Introduction

Motivations

Le présent mémoire se fixe pour objectif une première tentative d'étude et de classification des symétries globales et linéaires possibles de certains lagrangien simples de la théorie relativiste[1] des champs. Ceci poursuit un triple but

1. retrouver les résultats du théorème de Coleman et Mandula (voir l'appendice A) pour les théories considérés en utilisant une méthode directe et en travaillant au niveau des lagrangiens, sans passer par des considérations à propos de la matrice S,
2. ces résultats peuvent motiver l'utilisation de supersymétries même au niveau classique,
3. clairement séparer la partie « étude de symétries » de la partie « théorie quantique des champs » de la physique. Le théorème de Coleman et Mandula étant un résultat de théorie quantique des champs, tandis que nous allons dériver un résultat de mécanique lagrangienne (relativiste).

Plan

Dans le chapitre 1, nous étudions un formalisme adapté à notre étude de symétrie. Nous savons que deux lagrangiens ne se différenciant que d'une divergence (terme de la forme $\partial_\mu j^\mu$) décrivent la même action et donc « la même physique » ; un des résultats de ce chapitre est le théorème 2 qui montre que l'inverse est également vrai (dans un certain sens à préciser). Les conséquences de ce fait sur l'expression que peut prendre ce que nous appellerions une « symétrie de la physique » sont étudiées ensuite. C'est également dans ce chapitre que nous développons une méthode qui permettra d'exprimer une condition d'invariance de l'action qui ne fera pas intervenir le j^μ (voir la note de la page 29).

Le chapitre 2 fait la transition entre le formalisme général développé dans le chapitre 1 et les notations plus adaptées à la recherche de symétries proprement dite dans des lagrangiens concrets. Dans ce chapitre, nous posons nos deux hypothèse principales : la présence d'un terme d'interaction non dégénéré (dans un sens qui sera précisé) dans les lagrangiens étudiés et la linéarité des symétries recherchées. Nous expliquons en quoi

[1] relativiste en ce sens que nous n'étudierons que des lagrangiens possédants déjà une invariance sous le groupe de Poincaré ; notons que le Coleman et Mandula suppose aussi une théorie relativiste.

ces deux hypothèses sont des « transpositions lagrangiennes » d'hypothèses formulées dans le théorème de Coleman et Mandula. Sous ces hypothèses, nous montrons dans le théorème 4 que les symétries possibles ne peuvent pas coupler des champs dérivés plus d'une fois.

Les trois chapitre suivants sont consacrés à l'étude et à la classification des symétries de lagrangiens ne contenant que des champs scalaires. Nous commençons par un lagrangien ne décrivant qu'un seul champ en interaction (chapitre 3). Cette étude recouvre entre autres le cas d'école de la théorie « en $\lambda\phi^4$ ». Ensuite, nous passons au cas du lagrangien décrivant plusieurs particules scalaires différentes en interaction (chapitre 4). Enfin, le chapitre 5 étudie un lagrangien général décrivant plusieurs champs complexes en interaction.

Dans ces trois cas, nous parvenons à montrer que les seules symétries possibles sont celles du groupe de Poincaré (sauf exception discutée dans laquelle nous pouvons également avoir le groupe conforme en entier), ainsi que certaines symétries internes qui ne peuvent coupler que des particules de même masses, via une matrice antihermitienne[2].

Nous aurons ainsi établi une version lagrangienne du théorème de Coleman et Mandula pour des champs scalaires. Pour être exact, nous avons un peu plus que Coleman et Mandula : ces derniers montrent que les seules symétries possibles sont celles qu'ils présentent. Dans les cas sclaires que nous allons étudier, nous allons montrer de plus que lesdites symétries sont effectivement des symétries (avec une discution par rapport au groupe conforme).

Le chapitre 6 marque une pause dans la recherche de symétries. Il donne une introduction aux différents types de spineurs utilisés dans la suite. Nous introduisons les spineurs de Weyl, de Dirac et de Majorana, ainsi que les notions de conjugaison complexe, de montée et de descente d'indices. Une rapide définition des matrices σ de Pauli est également donnée. Les définitions adoptées constituent un intermédiaire entre les concepts d'indices abstraits que l'on peut trouver dans [8] au chapitre 2 et les définitions plus « conventionelles » en termes de couples de nombres complexes. La notation est, bien entendu, choisies de telle manière à ce que nous retrouvions les formules sous leurs formes habituelles.

Le dernier chapitre du mémoire, le chapitre 7, montre comment le formalisme que nous avons développé au chapitre 1 permet de démontrer rapidement deux résultats simples à propos des supersymétries. Nous montrons dans un premier temps qu'il est impossible de trouver des symétries échangeant les scalaires et les spineurs dans le terme d'interaction le plus simple que l'on puisse imaginer couplant un spineur de Dirac et un scalaire : $\overline{\psi}\psi\phi$. Dans un second temps, nous déduisons toutes les supersymétries du lagrangien de Wess-Zumino. Nous retrouvons bien entendu celles données dans la littérature.

[2] antisymétrique dans le cas réel.

Chapitre 1

Symétries et formes caractéristiques

Ce chapitre est essentiellement une partie du cours [1]. Les concepts introduits peuvent être également retrouvés dans [7] et dans [3].

1.1 Généralités sur les fonctions locales

1.1.1 Définitions

Espaces de fonctions

Soit $\mathcal{M}$, l'espace-temps sur lequel est définie la théorie que nous étudions. Il s'agit le plus souvent de l'espace-temps de Minkowski à d dimensions.

L'espace des champs sera désigné par Φ. Les *coordonnées locales* de cet espace sont $\phi^i\ :\ i = 1, \ldots, m$; les ϕ^i étant des fonctions de $\mathcal{M}$. Soit par ailleurs U, un ouvert de Φ.

$$\text{Une } \textit{section} \text{ est une fonction } s\ :\ \begin{array}{ll} \mathcal{M} & \rightarrow \mathcal{E} \equiv \mathcal{M} \times U, \\ x & \rightarrow (x, \phi^i(x)). \end{array}$$

Prenons $p \in \mathcal{M}$. Nous disons que deux sections sont *k-équivalentes* en p si elles ont même dérivées en p jusqu'à l'ordre k. Nous définissons alors $\mathcal{V}^k$: l'espace des classes d'équivalences des sections en p. Cet espace s'appelle *l'espace des jets en p*. Les coordonnées dans $\mathcal{V}^k$ sont $\{\phi^i, \phi^i_\mu, \ldots, \phi^i_{\mu_1 \ldots \mu_k}\}$ où nous avons défini la notation suivante :

$$\phi^i_{\mu_1 \ldots \mu_k}(x) \overset{def}{=} \left.\frac{\partial^{\,l} \phi^i}{\partial x^{\mu_1} \ldots \partial x^{\mu_l}}\right|_p (x), \tag{1.1.1}$$

avec $0 \leq l \leq k$.

Par la notation (μ), nous désignons le multiindice $(\mu_1, \ldots \mu_l)$, par $|\mu|$, sa longueur (ici, c'est l), et par $\phi^i_{(\mu)}$, nous désignons $\phi^i_{\mu_1 \ldots \mu_l}$. La définition de ce que nous entendons par $\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}$ viendra plus tard. Ce ne sera pas exactement $\frac{\partial}{\partial \phi^i_{\mu_1 \ldots \mu_l}}$.

En particulier, les coordonnées dans $\mathcal{V}^0(\mathcal{E})$ sont les ϕ^i et les x^μ mais aucun des $\phi^i_{(\mu)}$ avec $|\mu| > 0$.

Nous définissons encore le *fibré de jet* d'ordre k : $\mathcal{J}^k(\mathcal{E}) \stackrel{def}{=} \mathcal{M} \times \mathcal{V}^k$.

Enfin, une *fonction locale* d'ordre k est une fonction $f \in C^\infty(\mathcal{J}^k(\mathcal{E}))$. L'espace vectoriel de ces fonctions locales sera noté $Loc^k(\mathcal{E})$. L'exposant k sera souvent omis.

Un exemple simple de ces notions est donné à la page 16

1.1.2 Opérateurs sur $Loc(\mathcal{E})$

Dérivée, dérivée symétrisée et dérivée totale

Étant donné que $\phi_{01} = \phi_{10}$, nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{\partial \phi_{01}}{\partial \phi_{01}} = \frac{\partial \phi_{01}}{\partial \phi_{10}} = \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \phi_{01}} = \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \phi_{10}} = 1.$$

Ceci pose problème au moment de définir des contractions de la forme[1]

$$b^i_{\mu_1 \dots \mu_l} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{\mu_1 \dots \mu_l}},$$

étant donné que certains termes sont comptés plusieurs fois. En particulier, nous aimerions pouvoir définir le symbole

$$b^i_{(\mu)} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}$$

dans lequel nous aurions une somme sur la longueur des indices, en plus de la somme sur les indices $(\mu_1 \dots \mu_l)$ eux-même. Pour n'avoir qu'une seule fois chaque terme différent, nous sommes obligés, pour $b^i_{\mu_1 \dots \mu_l}$ symétrique[2], d'écrire des expressions de la forme de

$$\sum_{\mu_1 \le \dots \le \mu_l \le n-1} b^i_{\mu_1 \dots \mu_l} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{\mu_1 \dots \mu_l}} = \sum_{\mu_1 = 0}^{n-1} \dots \sum_{\mu_l = 0}^{n-1} \frac{m_0! \dots m_{n-1}!}{l!} b^i_{\mu_1 \dots \mu_l} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{\mu_1 \dots \mu_l}}, \tag{1.1.2}$$

où nous avons désigné par m_i le nombre de fois que la valeur i apparaît parmi les indices $\mu_1 \dots \mu_l$.

Ensuite, nous définissons les notations adaptées au problème :

$$\frac{\partial^s}{\partial \phi^i_{\mu_1 \dots \mu_l}} \stackrel{def}{=} \frac{m_0! \dots m_{n-1}!}{l!} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{\mu_1 \dots \mu_l}}; \tag{1.1.3}$$

$$\sum_{l=1}^{k} \sum_{\mu_1 \le \dots \le \mu_l \le n-1} b^i_{\mu_1 \dots \mu_l} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{\mu_1 \dots \mu_l}} = \sum_{l=1}^{k} b^i_{\mu_1 \dots \mu_l} \frac{\partial^s}{\partial \phi^i_{\mu_1 \dots \mu_l}}. \tag{1.1.4}$$

[1]Nous utilisons systématiquement la convention de sommation d'Einstein pour les indices répétés. Ici, nous avons une somme sur i –prenant autant de valeurs qu'il y a de champs dans le problème– et sur chacun des μ_i prenant n valeurs.

[2]une éventuelle partie antisymétrique de b^i ne changerait rien à l'égalité.

Si nous prenons comme convention que $\phi^i_{(\mu)} = \phi^i$ pour $|\mu| = 0$, nous pouvons obtenir une notation plus compacte pour les champs de vecteurs de $\mathcal{V}^k$ en notant

$$b^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} + \sum_{l=1}^{k} b^i_{\mu_1\ldots\mu_l} \frac{\partial^s}{\partial \phi^i_{\mu_1\ldots\mu_l}} = \sum_{l=0}^{k} b^i_{\mu_1\ldots\mu_l} \frac{\partial^s}{\partial \phi^i_{\mu_1\ldots\mu_l}} \tag{1.1.5}$$

$$= b^i_{(\mu)} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}, \tag{1.1.6}$$

si nous définissons

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \stackrel{def}{=} \frac{\partial^s}{\partial \phi^i_{\mu_1\ldots\mu_l}}.$$

Nous pouvons à présent démontrer une formule qui nous sera utile par la suite.

Lemme 1. *On a l'égalité*

$$\frac{\partial^s \phi^i_{\nu_1\ldots\nu_k}}{\partial \phi^j_{\mu_1\ldots\mu_k}} = \delta^i_j \frac{1}{k!} \sum_{\sigma\in S^k} \delta^{\mu_1}_{\nu_{\sigma(1)}} \ldots \delta^{\mu_k}_{\nu_{\sigma(k)}} \equiv \delta^i_j \delta^{\mu_1}_{(\nu_1} \ldots \delta^{\mu_k}_{\nu_k)}. \tag{1.1.7}$$

Démonstration. Par définition,

$$\frac{\partial^s \phi^i_{\nu_1\ldots\nu_k}}{\partial \phi^j_{\mu_1\ldots\mu_k}} = \frac{m_0!\ldots m_{n-1}!}{k!} \frac{\partial \phi^i_{\nu_1\ldots\nu_k}}{\partial \phi^j_{\mu_1\ldots\mu_k}}. \tag{1.1.8}$$

Or, nous savons que $\frac{\partial \phi^i_{\nu_1\ldots\nu_k}}{\partial \phi^j_{\mu_1\ldots\mu_k}}$ vaudra zéro ou un, suivant que

$$\{\nu_l\} = \{\mu_l\} \text{ et } i = j \tag{1.1.9}$$

ou non. Nous pouvons donc écrire que

$$\frac{\partial \phi^i_{\nu_1\ldots\nu_k}}{\partial \phi^j_{\mu_1\ldots\mu_k}} = \delta^i_j \sum_{\sigma\in S^k} \delta^{\nu_1}_{\mu_{\sigma(1)}} \ldots \delta^{\nu_k}_{\mu_{\sigma(k)}} \frac{1}{m_0!\ldots m_{n-1}!}. \tag{1.1.10}$$

Lorsque la condition (1.1.9) n'est pas satisfaite, cette égalité est évidente, tandis que lorsqu'elle l'est, nous avons bien $m_0!\ldots m_{n-1}!$ termes identiques (tous valant 1) dans la sommation. À partir de là, en multipliant et divisant par $k!$, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial^s \phi^i_{\nu_1\ldots\nu_k}}{\partial \phi^j_{\mu_1\ldots\mu_k}} = \frac{m_0!\ldots m_{n-1}!}{k!} \delta^i_j \sum_{\sigma\in S^k} \delta^{\nu_1}_{\mu_{\sigma(1)}} \ldots \delta^{\nu_k}_{\mu_{\sigma(k)}} \frac{1}{m_0!\ldots m_{n-1}!} \frac{k!}{k!}, \tag{1.1.11}$$

d'où la thèse.

CQFD.

La *dérivée totale* est définie par

$$\partial_\mu \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \sum_{l=0}^{k} \phi^i_{\nu_1 \ldots \nu_l \mu} \frac{\partial^s}{\partial \phi^i_{\nu_1 \ldots \nu_l}} \tag{1.1.12}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \phi^i_{(\nu)\mu} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\nu)}}. \tag{1.1.13}$$

Si $(\mu) = \mu_1 \ldots \mu_l$, définissons de même

$$\partial_{(\mu)} = \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \ldots \partial_{\mu_l}.$$

À ce niveau-ci, nous devons faire une remarque : dans $\mathcal{J}^k$, $\phi^i_{(\mu)}$ est la $(l+1)^{\text{ème}}$ coordonnée indépendante (x étant la première), tandis que $\partial_{(\mu)}\phi^i$ est la $l^{\text{ème}}$ dérivée de la seconde coordonnée indépendante. Ce n'est donc pas « évident » que $\phi^i_{(\mu)} = \partial_{(\mu)}\phi^i$.

Lemme 2. *Dans $\mathcal{J}^k$, nous quand même la relation intuitive*

$$\phi^i_{(\mu)} = \partial_{(\mu)}\phi^i. \tag{1.1.14}$$

Démonstration. Commençons avec $|\mu| = 1$, c'est à dire $(\mu) = \mu$. Nous avons alors

$$\partial_\mu \phi^i = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \phi^j_\mu \frac{\partial}{\partial \phi^j} + \phi^j_{\lambda\mu} \frac{\partial}{\partial \phi^j_\lambda} + \ldots \right) \phi^i. \tag{1.1.15}$$

Étant donné que nous travaillons dans $\mathcal{J}^k$, les coordonnées x, ϕ^i, $\phi^i_\mu \ldots$ sont toutes indépendantes[3]. Par conséquent, seul le deuxième terme est non nul. Il vaut $\phi^j_\mu \delta^i_j = \phi^i_\mu$.

Lorsque nous avons $|\mu| > 1$, nous devons simplement utiliser $|\mu|$ fois le premier résultat ; par exemple pour deux,

$$\partial_\mu \partial_\nu \phi^i = \partial_\mu \phi^i_\nu = \phi^i_{\mu\nu}.$$

CQFD.

Autres opérateurs

Nous définissons encore la *dérivée d'Euler-Lagrange* :

$$\frac{\delta f}{\delta \phi^i} \stackrel{def}{=} (-\partial)_{(\mu)} \left[\frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \right], \tag{1.1.16}$$

où nous avons défini

$$(-\partial)_{(\mu)} \equiv (-1)^{|\mu|} \partial_{(\mu)}.$$

[3]Dans $\mathcal{J}^k$, les ϕ^i ne sont pas des fonctions de x.

Lorsque nous considérons une théorie avec un lagrangien $\mathcal{L}$, nous appelons *équations d'Euler-Lagrange* de la théorie, les équations

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} = 0.$$

D'autre part, pour une fonction $Q^i \in Loc(\mathcal{E})$, nous introduisons un champ de vecteur associé à Q par

$$\delta_Q \overset{def}{=} \partial_{(\mu)} Q^i \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}. \tag{1.1.17}$$

D'après la définition, il vient immédiatement que

$$\delta_Q \phi^i = Q^i.$$

1.1.3 Quelque résultats importants

Lemme 3. *Soit s, une section et b, une fonction locale. Si nous définissons*

$$b[x, \phi]|_s = b(x^\mu, \phi^i(x), \phi^i_\mu(x), ...), \tag{1.1.18}$$

alors, nous avons :

$$\frac{d}{dx^\mu}(b|_s) = (\partial_\mu b)|_s \tag{1.1.19}$$

où la notation $|_s$ signifie « évaluée en la section s », c'est à dire que si $b = b(\phi, \phi_\mu)$, il faut calculer $b|_s$ avec $\phi_\mu(x) = \partial_\mu \phi(x)$.

Démonstration. Par la définition (1.1.18), $b|_s$ est une fonction de x à travers les $\phi^i_{(\mu)}|_s(x)$. La dérivée totale se calcule donc ainsi[4] :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^\mu}(b|_s(x)) &= \frac{d}{dx^\mu}\Big(b(x, \phi|_s(x), \phi_\mu|_s(x), \ldots)\Big) & (1.1.20) \\ &= \left.\frac{\partial b}{\partial x^\mu}\right|_s (x) + \left.\frac{\partial b}{\partial \phi}\right|_s (x) \frac{d\phi|_s}{dx^\mu}(x) + \ldots & (1.1.21) \end{aligned}$$

Mais $\phi|_s$ n'étant fonction que de x, $\frac{d\phi|_s}{dx^\mu}(x) = \frac{\partial \phi|_s}{\partial x^\mu}(x) = \phi_\mu|_s(x)$. Par conséquent, nous avons que

$$\frac{d}{dx^\mu}(b|_s(x)) = \left.\left(\frac{\partial b}{\partial x^\mu} + \frac{\partial b}{\partial \phi}\phi_\mu + \ldots\right)\right|_s (x), \tag{1.1.22}$$

et donc la thèse.

CQFD.

[4]Règle de dérivation de composée de fonctions.

Lemme 4. *Nous avons le commutateur suivant d'opérateurs agissants sur $\mathcal{J}^k$:*

$$[\frac{\partial}{\partial \phi^i_{\mu_1\ldots\mu_l}}, \partial_\nu] = \delta^{\mu_1}_{(\nu}\delta^{\mu_2}_{\lambda_1}\ldots\delta^{\mu_l}_{\lambda_{l-1})}\frac{\partial^s}{\partial \phi^i_{\lambda_1\ldots\lambda_{l-1}}}. \tag{1.1.23}$$

Démonstration. Par définitions,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} &= \frac{\partial^s}{\partial \phi^i_{\mu_1\ldots\mu_l}} & : \mathcal{J}^k \to \mathcal{J}^k \\ \partial_\mu = \; & \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \phi_{(\nu)\mu}\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\nu)}} & : \mathcal{J}^k \to \mathcal{J}^{k+1}. \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

Pour trouver le commutateur de deux champs de vecteurs, il faut faire agir l'un sur les coefficients de l'autre moins le contraire. D'une part, l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}$ n'a qu'une seule composante et son coefficient est 1. Nous obtenons donc zéro en lui appliquant ∂_ν. D'autre part, le coefficient de $\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\lambda)}}$ dans ∂_ν est $\phi^i_{(\lambda)\nu}$; il nous reste donc :

$$[\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}, \partial_\nu] = \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}\left(\phi^j_{(\lambda)\nu}\right)\frac{\partial}{\partial \phi^j_{(\lambda)}}.$$

Maintenant, la thèse découle du lemme 1 :

$$\frac{\partial \phi^i_{\lambda_1\ldots\lambda_{l-1}\nu}}{\partial \phi^i_{\mu_1\ldots\mu_l}} = \left(\frac{n_0!\ldots n_{n-1}!}{l!}\right)^{-1}\delta^{\mu_1}_{(\nu}\delta^{\mu_2}_{\lambda_1}\ldots\delta^{\mu_l}_{\lambda_{l-1})}$$

où les n_i sont les multiplicités dans $\{\lambda_i, \nu\}$.

En remettant les bouts ensemble, nous trouvons bien la formule (1.1.23).

CQFD.

Lemme 5. *Les champs de vecteurs δ_Q et ∂_ν commutent :*

$$[\delta_Q, \partial_\nu] = 0.$$

Démonstration. Commençons par écrire plus explicitement les définitions des opérateurs que nous considérons :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \delta_Q &=& Q^i\frac{\partial}{\partial \phi^i} + (\partial_\mu Q^i)\frac{\partial}{\partial \phi^i_\mu} + \ldots \\ \partial_\nu &=& \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \phi^i_\nu\frac{\partial}{\partial \phi^i} + \phi^i_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial \phi^i_\mu} + \ldots . \end{array}\right. \tag{1.1.25}$$

En faisant agir δ_Q sur les coefficients de ∂_ν, nous obtenons

$$(\partial_\mu Q^i)\frac{\partial}{\partial \phi^i_\mu}(\phi^j_\nu)\frac{\partial}{\partial \phi^j} + \ldots,$$

tandis qu'en faisant le contraire, c'est

$$\partial_\nu Q^i\frac{\partial}{\partial \phi^i} + \ldots$$

qui vient. La différence entre les deux fait bien zéro.

CQFD.

Lemme 6. *Si f et g sont des fonctions locales, nous avons la formule suivante :*

$$(-\partial)_{(\mu)}\left[\frac{\partial(\partial_\nu f)}{\partial\phi^i_{(\mu)}}g\right] = -(-\partial)_{(\mu)}\left[\frac{\partial f}{\partial\phi^i_{(\mu)}}\partial_\nu g\right]. \tag{1.1.26}$$

Démonstration. Nous utilisons le lemme 4 pour traiter $\frac{\partial(\partial_\nu f)}{\partial\phi^i_{(\mu)}}$ en disant que $ab = ba + [a,b]$. Ce que nous trouvons est :

$$(-\partial)_{(\mu)}\left[\frac{\partial(\partial_\nu f)}{\partial\phi^i_{(\mu)}}g\right] = (-\partial)_{(\mu)}\left[\partial_\nu\frac{\partial f}{\partial\phi^i_{(\mu)}}g + \delta^{\mu_1}_{(\nu}\delta^{\mu_2}_{\lambda_1}\dots\delta^{\mu_l}_{\lambda_{l-1})}\frac{\partial f}{\partial\phi^i_{(\lambda)}}g\right].$$

Le deuxième terme se décompose en $l!$ termes à cause de la symétrisation. Heureusement, ces termes sont tous égaux car ils ne diffèrent les uns des autres que par l'ordre des dérivées. Étant donné que la symétrisation est définie avec un $\frac{1}{k!}$, il n'y a en définitive aucun nouveau coefficient qui apparaît. Nous restons avec

$$\begin{aligned}(-\partial)_{(\mu)}\left[\frac{\partial(\partial_\nu f)}{\partial\phi^i_{(\mu)}}g\right] &= (-\partial)_{(\mu)}\Big[\underbrace{\partial_\nu\frac{\partial f}{\partial\phi^i_{(\mu)}}g}_{\partial_\nu \text{ sort par partie}}\Big] \overset{(a)}{+} (-\partial)_{\nu(\lambda)}\left[\frac{\partial f}{\partial\phi^i_{(\lambda)}}g\right] &(1.1.27)\\ &= (-\partial)_{(\mu)}\partial_\nu\left[\frac{\partial f}{\partial\phi^i_{(\mu)}}g\right] - (-\partial)_{(\mu)}\left[\frac{\partial f}{\partial\phi^i_{(\mu)}}\partial_\nu g\right]\\ &\quad\overset{(b)}{-} (-\partial)_{(\lambda)}\partial_\nu\left[\frac{\partial f}{\partial\phi^i_{(\lambda)}}g\right], &(1.1.28)\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat annoncé après simplification du premier terme avec le dernier.

(a) L'alternance du signe se fait d'après la longueur du multiindice $(\nu(\lambda))$, et non simplement sur (λ),

(b) ici nous avons sorti le ∂_ν du multiindice. L'alternance de signe ne se fait plus que d'après la longueur de (λ) et elle est donc exactement opposée à celle que nous avions en (a), c'est pour compenser ce fait que nous avons ajouté un signe moins.

CQFD.

Nous pouvons à présent démontrer l'importante formule suivante, qui nous servira de point de départ pour la suite ; voir équation (2.1.7).

Théorème 1. *Si Q^i et f sont des fonctions locales, alors elles satisfont*

$$\delta_Q\frac{\delta f}{\delta\phi^i} = \frac{\delta}{\delta\phi^i}(\delta_Q f) - (-\partial)_{(\lambda)}\Big[\frac{\partial Q^j}{\partial\phi^i_{(\lambda)}}\frac{\delta f}{\delta\phi^j}\Big]. \tag{1.1.29}$$

Démonstration. En utilisant les définitions des dérivées d'Euler-Lagrange et de δ_Q, ainsi que le lemme 5, nous obtenons dans un premier temps

$$\delta_Q \frac{\delta f}{\delta \phi^i} = \delta_Q \left[(-\partial)_{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \right] = (-\partial)_{(\mu)} \Big(\delta_Q \frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \Big). \tag{1.1.30}$$

Ensuite, nous nous concentrons sur $\delta_Q \frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\mu)}}$. En appliquant les définitions, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \delta_Q \frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\mu)}} &= (\partial_{(\lambda)} Q^j) \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^j_{(\lambda)} \partial \phi^i_{(\mu)}} && (1.1.31) \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \left((\partial_{(\lambda)} Q^j) \frac{\partial f}{\partial \phi^j_{(\lambda)}} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \left[\partial_{(\lambda)} Q^j \right] \frac{\partial f}{\partial \phi^j_{(\lambda)}} && (1.1.32) \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} (\delta_Q f) - \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} (\partial_{(\nu)} Q^j) \frac{\partial f}{\partial \phi^j_{(\nu)}}. && (1.1.33) \end{aligned}$$

Entre la première et la deuxième ligne, nous avons sorti $\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}$ par partie, tandis qu'entre la deuxième et la troisième, nous avons ré-appliqué la définition de δ_Q ainsi que changé le nom de la variable de sommation $(\lambda) \to (\nu)$.

Nous remettons à présent ce résultat dans l'expression (1.1.30) :

$$\delta_Q \frac{\delta f}{\delta \phi^i} = \underbrace{(-\partial)_{(\mu)} \left[\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} (\delta_Q f) \right]}_{\text{C'est juste } \frac{\delta}{\delta \phi^i}(\delta_Q f)} - (-\partial)_{(\mu)} \left[\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} (\partial_{(\nu)} Q^j) \frac{\partial f}{\partial \phi^j_{(\nu)}} \right]. \tag{1.1.34}$$

Il ne nous reste donc plus qu'à monter que

$$(-\partial)_{(\mu)} \left[\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} (\partial_{(\nu)} Q^j) \frac{\partial f}{\partial \phi^j_{(\nu)}} \right] = (-\partial)_{(\mu)} \left[\frac{\partial Q^j}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \frac{\delta f}{\delta \phi^j} \right] \tag{1.1.35}$$

pour avoir définitivement la thèse. Ce résultat s'obtient par utilisations successives du lemme 6 :

$$(-\partial)_{(\mu)} \left[\frac{\partial (\partial_\nu f)}{\partial \phi^i_{(\mu)}} g \right] = -(-\partial)_{(\mu)} \left[\frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \partial_\nu g \right]. \tag{1.1.36}$$

Mettons que $(\nu) = (\nu_1, \ldots \nu_k)$. Le lemme 6 permet de passer le $\partial_{(\nu)}$ de Q^i à $\frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\nu)}}$:

$$\begin{aligned}
(-\partial)_{(\mu)} \left[\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} [\partial_{(\nu)} Q^j] \frac{\partial f}{\partial \phi^j_{(\nu)}} \right] &= (-\partial)_{(\mu)} \left[\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} [\partial_{\nu_1} (\partial_{\nu_2 \ldots \nu_k} Q^j)] \frac{\partial f}{\partial \phi^j_{(\nu)}} \right] && (1.1.37)\\
&= -(-\partial)_{(\mu)} \left[\frac{\partial (\partial_{\nu_2 \ldots \nu_k} Q^j)}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \partial_{\nu_1} \frac{\partial f}{\partial \phi^j_{(\nu)}} \right] && (1.1.38)\\
&= [\ |\nu| \text{ applications du lemme 6 }]\\
&= (-1)^{|\nu|} (-\partial)_{(\mu)} \left[\frac{\partial Q^j}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \partial_{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial \phi^j_{(\nu)}} \right]. && (1.1.39)
\end{aligned}$$

Le $(-1)^{|\nu|}$ combiné avec $\partial_{(\nu)}$ donne $(-\partial)_{(\nu)}$ et nous retrouvons la définitions (1.1.16) de la dérivée d'Euler-Lagrange. Ainsi nous avons démontré l'équation (1.1.35) et par conséquent le présent théorème.

CQFD.

Remarque

Nous avons supposé, dans cette démonstration que les champs commutaient : $\phi^i \phi^j = \phi^j \phi^i$. À partir du moment où nous considérons des théories contenant des spineurs, ce théorème ne tient plus. La démonstration d'un théorème équivalent tenant compte de cette remarque est donnée dans l'annexe B.

1.2 Notions sur les formes

Nous définissons l'espace $\Lambda(dx)$ des polynômes en les dx^μ ; c'est à dire l'espace vectoriel réel engendré par

$$\left\{1, dx^\mu, dx^{\mu_1} dx^{\mu_2}, \ldots, dx^0 \ldots dx^{n-1}\right\},$$

avec $\mu_1 < \mu_2 < \ldots \leq n-1$. Par définition, les formes élémentaires dx^μ ont une propriété d'*anticommutation* :

$$\{dx^\mu, dx^\nu\} = 0.$$

Le *complexe horizontal* est définit par $\Omega(\mathcal{E}) = Loc(\mathcal{E}) \otimes \Lambda(dx^\mu)$. Un sous-espace de $\Omega(\mathcal{E})$ est donné par les polynômes homogènes de degré p : $\Omega^p(\mathcal{E})$. Une forme de $\Omega^p(\mathcal{E})$ se note toujours

$$\omega^p = \frac{1}{p!} \omega_{[\mu_1 \ldots \mu_p]} dx^{\mu_1} \ldots dx^{\mu_p}$$

où la notation $[\mu_1 \ldots \mu_p]$ signale que ω est antisymétrique en ses indices $\mu_1 \ldots \mu_p$. Des p-formes peuvent en effet toujours s'écrire avec des coefficients antisymétriques, étant donné qu'une éventuelle partie symétrique ne contribuerait pas à cause de la contraction avec les dx^{μ_i}.

Nous avons un opérateur sur $\Omega(\mathcal{E})$, la *différentielle horizontale*, définie par

$$\begin{aligned} d_H : \ \Omega^p(\mathcal{E}) &\rightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{E}) \\ \omega^p &\rightarrow d_H\omega^p = dx^\mu \partial_\mu \omega^p\,; \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

cette opération a l'importante propriété suivante :

$$d_H^2 = dx^\mu dx^\nu \partial_\mu \partial_\nu = 0,$$

à cause de l'antisymétrie de $dx^\mu dx^\nu$.

Nous notons $(d^{n-1}x)_\mu$ le produit de tout les dx^ν classés dans l'ordre croissant sauf dx^μ, avec un signe moins si le terme enlevé est impair. Formellement,

$$\left(d^{n-1}x\right)_\mu \stackrel{def}{=} \frac{1}{(n-1)!}\,\epsilon_{\mu\mu_2\ldots\mu_n} dx^{\mu_2} \ldots dx^{\mu_n} \tag{1.2.2}$$

où le ϵ est défini complètement antisymétrique avec $\epsilon_{01\ldots n-1} = 1$.

Lemme 7. *Pour toute fonction locale f, il existe des fonctions locales j^μ telles que*

$$\phi^i_{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\mu)}} = \partial_\mu j^\mu + \phi^i \frac{\delta f}{\delta \phi^i}. \tag{1.2.3}$$

Démonstration. Nous écrivons pour commencer les premiers termes de $\frac{\delta f}{\delta \phi^i}$:

$$\frac{\delta f}{\delta \phi^i} = \frac{\partial f}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \left[\frac{\partial^s f}{\partial \phi^i_\mu}\right] + \ldots \tag{1.2.4}$$

Ensuite, nous analysons terme à terme la sommation sur (μ) du premier membre de (1.2.3). Le premier terme,

$$\phi^i \frac{\partial f}{\partial \phi^i},$$

ne contient pas de composante de la forme $\partial_\mu j^\mu$, mais est exactement le premier terme de $\phi^i \frac{\delta f}{\delta \phi^i}$.

Le deuxième terme est le suivant :

$$\phi^i_\mu \frac{\partial^s f}{\partial \phi^i_\mu} = \partial_\mu \phi^i \frac{\partial^s f}{\partial \phi^i_\mu} = \partial_\mu \left(\phi^i \frac{\partial^s f}{\partial \phi^i_\mu}\right) - \phi^i \partial_\mu \frac{\partial^s f}{\partial \phi^i_\mu}.$$

Pour écrire la première égalité, nous avons utilisé le lemme 2. Le premier terme est de la bonne forme $\partial_\mu j^\mu$, tandis que le second est le deuxième terme de $\frac{\delta f}{\delta \phi^i}$, multiplié par ϕ^i.

Le troisième terme dans la somme sur (μ) est

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial_\nu \phi^i) \frac{\partial^s f}{\partial \phi^i_{\mu\nu}} &= \partial_\mu \underbrace{\left[(\partial_\nu \phi^i) \frac{\partial^s f}{\partial \phi^i_{\mu\nu}}\right]}_{\equiv g^\mu} - (\partial_\nu \phi^i) \partial_\mu \frac{\partial^s f}{\partial \phi^i_{\mu\nu}} && (1.2.5) \\ &= \partial_\mu g^\mu - \left[\partial_\nu \left(\phi^i \partial_\mu \frac{\partial^s f}{\partial \phi^i_{\mu\nu}}\right) - \phi^i \partial_\nu \partial_\mu \frac{\partial^s f}{\partial \phi^i_{\mu\nu}}\right] && (1.2.6) \\ &= \partial_\mu h^\mu + \phi^i \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial^s f}{\partial \phi^i_{\mu\nu}} && (1.2.7) \end{aligned}$$

où nous avons définit h^μ de façon idoine pour la dernière ligne.

Le premier terme est à nouveau une divergence que nous pouvons « oublier » en redéfinissant la fonction j^μ, tandis que le second terme est exactement le troisième terme de $\frac{\delta f}{\delta \phi^i}$, multiplié par ϕ^i. Notons au passage que l'alternance de signe se fait correctement, grâce aux intégrations par parties.

En remettant les bouts ensemble, et en continuant ainsi terme à terme, nous avons le résultat annoncé.

CQFD.

Par rapport aux équations d'Euler-Lagrange, la différentielle horizontale possède la propriété suivante[5] :

Théorème 2. *Soit $f \in Loc^k(\mathcal{E})$; alors*

$$\frac{\delta f}{\delta \phi^i} = 0 \Leftrightarrow \exists\, j^{\,\mu} \in Loc^{k-1}(\mathcal{E})\, tq\, f = \partial_\mu j^\mu. \tag{1.2.8}$$

Démonstration.
$\boxed{\Rightarrow}$

Nous introduisons d'une part un opérateur « de comptage »

$$Nf[x,\phi] = \left[\phi^i_{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\mu)}}\right][x,\phi],$$

c'est à dire que

$$(Nf)[x,\lambda\phi] = \lambda \phi^i_{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\mu)}}[x,\lambda\phi].$$

Et nous remarquons d'autre part que le théorème fondamental de l'analyse implique que

$$f(x,\phi) - f(x,0) = \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} f[x,\lambda\phi]\,; \tag{1.2.9}$$

mais

$$\frac{d}{d\lambda} f[x,\lambda\phi] = \frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\mu)}}[x,\lambda\phi] \frac{d\lambda \phi^i_{(\mu)}}{d\lambda} \tag{1.2.10}$$

$$= \phi^i_{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\mu)}}[x,\lambda\phi] \tag{1.2.11}$$

$$= \frac{1}{\lambda}(Nf)[x,\lambda\phi], \tag{1.2.12}$$

[5]Nous verrons par le lemme 8 que ce théorème donne effectivement une propriété de la différentielle horizontale par rapport à la dérivée d'Euler-Lagrange.

faisant en sorte que (1.2.9) devienne :

$$f(x,\phi) - f(x,0) = \int_0^1 d\lambda \frac{1}{\lambda}(Nf)[x,\lambda\phi]. \tag{1.2.13}$$

À présent, nous utilisons le lemme 7 pour voir que

$$\exists\, j^\mu \ tq\ Nf = \phi^i \frac{\delta f}{\delta \phi^i} + \partial_\mu j^\mu.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f[x,\phi] - f[x,0] &= \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}(Nf)[x,\lambda\phi] && (1.2.14)\\ &= \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\left(\phi^i \frac{\delta f}{\delta\phi^i} + \partial_\mu j^\mu\right)[x,\lambda\phi]. && (1.2.15)\end{aligned}$$

Montrons que nous pouvons faire sortir le ∂_μ de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\,(\partial_\mu j^\mu)[x,\lambda\phi]. \tag{1.2.16}$$

Le problème est que le j^μ est évalué en $[x,\lambda\phi]$, ce qui amène des λ lors de la dérivation par rapport aux $\phi_{(\mu)}$ contenus dans ∂_μ. Le problème ne se pose donc pas pour faire sortir le $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, mais bien pour les termes suivants. Ils s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \left(\phi^i_{(\nu)\mu}\frac{\partial j^\mu}{\partial \phi^i_{(\nu)}}\right)(\lambda\phi) &\overset{(a)}{=} \lambda\phi^i_{(\nu)\mu}\left(\frac{\partial j^\mu}{\partial\phi^i_{(\nu)}}\right)(\lambda\phi)\\ &\overset{(b)}{=} \left(\phi^i_{(\nu)\mu}\frac{\partial}{\partial\phi^i_{(\nu)}}\right)(j^\mu(\lambda\phi)) \,. && (1.2.17)\end{aligned}$$

(a) Évaluée en $\lambda\phi$, l'expression $\phi^i_{(\nu)\mu}$ vaut $\lambda\phi^i_{(\nu)\mu}$.

(b) Prenons $f\,:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial x}f(\lambda x) = \frac{\partial f}{\partial u}(\lambda x)\frac{\partial(\lambda x)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x)\lambda \tag{1.2.18}$$

où par $\frac{\partial f}{\partial u}$, nous entendons : « la dérivée de f par rapport à sa première variable », qui est en l'occurrence x. Par conséquent, nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}f(\lambda x), \tag{1.2.19}$$

et donc la relation (b).

L'équation (1.2.17) montre que nous pouvons sortir ∂_μ de l'intégrale (1.2.16). Par conséquent, nous pouvons dire que

$$\int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\,(\partial_\mu j^\mu)[x,\lambda\phi] = \partial_\mu g^\mu, \qquad g^\mu = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\,j^\mu[x,\lambda\phi].$$

Pour continuer, nous allons utiliser le résultat suivant :

$$f[x,0] = \frac{\partial}{\partial x^\mu}k^\mu(x) \quad \text{pour} \quad k^\mu(x) = \int_0^1 d\lambda\,\lambda^{n-1}x^\mu f(\lambda x,0) \tag{1.2.20}$$

où n est la dimension de l'espace $\mathcal{M}$. Ce résultat s'obtient par calcul direct, en commençant par appliquer Leibnitz en tenant compte du fait que $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\mu} = n$ et non 1, ainsi que du fait que

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,[f(\lambda x,0)] = \lambda\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(\lambda x,0).$$

En intégrant les deux bouts par parties séparément, nous obtenons le résultat (1.2.20) en utilisant le fait que

$$\frac{d}{d\lambda}\Big(f(\lambda x,0)\Big) = x^\mu\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(\lambda x,0).$$

L'équation (1.2.15) peut alors achever la première partie de la démonstration de ce théorème :

$$f[x,\phi] - \underbrace{f[x,0]}_{=\partial_\mu k^\mu} = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\underbrace{\left[\phi^i\frac{\delta f}{\delta\phi^i}\right]}_{=0\text{ par hypothèse}}[x,\lambda\phi] + \partial_\mu g^\mu, \tag{1.2.21}$$

et donc nous avons bien que

$$f[x,\phi] = \partial_\mu(g^\mu + k^\mu),$$

ce que nous voulions.

Nous pouvons à présent passer à la seconde partie de la démonstration.

$\boxed{\Leftarrow}$

Nous allons utiliser la formule (1.1.23). Soit donc à calculer :

$$\frac{\delta}{\delta\phi^i}\,(\partial_\nu j^\nu) = \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_l}\frac{\partial^s}{\partial\phi^i_{\mu_1\ldots\mu_l}}(\partial_\nu j^\nu) \tag{1.2.22}$$

$$= \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_l}\left(\delta^{\mu_1}_{(\nu}\delta^{\mu_2}_{\sigma_1}\ldots\delta^{\mu_l}_{\sigma_{l-1})}\frac{\partial^s j^\nu}{\partial\phi^i_{\sigma_1\ldots\sigma_{l-1}}} + \partial_\nu\frac{\partial^s j^\nu}{\partial\phi^i_{\mu_1\ldots\mu_l}}\right). \tag{1.2.23}$$

Lorsque nous faisons la somme sur les permutations des indices $(\nu\sigma_1\ldots\sigma_{l-1})$, nous trouvons $l!$ fois le même terme. Mais le symbole de symétrisation étant défini avec le bon coefficient ($\frac{1}{l!}$ ici), nous pouvons faire agir les δ sans ajouter de nouveaux coefficients de multiplicité. Nous continuons donc en écrivant

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\phi^i}(\partial_\nu j^\nu) &= \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\partial_\nu\partial_{\sigma_1}\dots\partial_{\sigma_{l-1}}\frac{\partial^s j^\nu}{\partial\phi^i_{\sigma_1\dots\sigma_{l-1}}} \\ &\quad+\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\partial_{\mu_1}\dots\partial_{\mu_l}\partial_\nu\frac{\partial^s j^\nu}{\partial\phi^i_{\mu_1\dots\mu_l}}\,. \qquad (1.2.24)\end{aligned}$$

Dans la première somme, il n'y a pas de terme $l=0$ car nous avons un σ_{l-1} ; nous commençons donc avec $l=1$, qui est juste une dérivée avec un signe moins. Dans la seconde somme, nous commençons avec $l=0$ qui est précisément la même chose. Les termes s'annulent donc deux à deux. Reste à voir ce que devient le terme $l=k$ dans la seconde somme car il n'est annulé par aucun terme de la première.

En fait, nous devons nous rappeler que si nous prenons $f \in Loc^k(\mathcal{E})$, nous aurons $j^\mu \in Loc^{k-1}(\mathcal{E})$. Par conséquent, le terme $l=k$ n'existe pas dans la seconde somme, étant donné que $\phi^i_{\mu_1\dots\mu_k}$ n'est pas une variable de j^μ. Au final, nous trouvons donc que l'équation (1.2.24) est nulle.

CQFD.

Lemme 8. *Toute forme de $\Omega^n(\mathcal{E})$ s'écrivant $\partial_\mu j^\mu d^n x$ peut être écrite sous la forme $d_H(\eta^{n-1})$ pour un certain $\eta^{n-1}\in\Omega^{n-1}(\mathcal{E})$, et inversement.*

Démonstration. Soit $\eta^{n-1}\in\Omega^{n-1}(\mathcal{E})$. Nous pouvons toujours l'écrire

$$\eta^{n-1} = j^\mu(d^{n-1}x)_\mu \qquad (1.2.25)$$

où $(d^{n-1}x)_\mu$ est défini par la formule (1.2.2). Avec cette écriture, nous avons le petit calcul suivant :

$$\begin{aligned}d_H\eta^{n-1} &= \partial_\nu j^\mu \underbrace{dx^\nu(d^{n-1}x)_\mu}_{\delta^\nu_\mu d^n x} &(1.2.26)\\ &= \partial_\nu j^\nu d^n x &(1.2.27)\end{aligned}$$

CQFD.

1.3 La forme caractéristique des champs de vecteurs

1.3.1 Transformations dans $\mathcal{J}^0$

Dans $\mathcal{J}^0(\mathcal{E})$, les coordonnées sont $(x,\phi(x))$ et les sections, des fonctions

$$s : x \to (x,\phi(x)).$$

Les champs de vecteurs sont les dérivations par rapport aux coordonnées, c'est à dire les v de la forme

$$v = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + b^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} \tag{1.3.1}$$

avec $a^\mu, b^i \in Loc(\mathcal{E})$.

Un tel champ de vecteurs définit une transformation infinitésimale des coordonnées. Prenons en effet un paramètre ϵ infinitésimal, et faisons agir $(1+\epsilon v)$ sur une fonction locale f :

$$f'(x,\phi) = (1+\epsilon v)f(x,\phi) = f(x,\phi) + \epsilon a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f + \epsilon b^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} f = f(x+\epsilon a^\mu, \phi + \epsilon b^i).$$

Le prime n'indique pas une dérivation. En ce qui concerne f en tant que fonction locale $f : (x,\phi) \to \mathbb{R}$, nous avons alors juste fait le changement de coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon a^\mu \\ \phi^i \mapsto \phi'^i = \phi^i + \epsilon b^i. \end{array} \right. \tag{1.3.2}$$

Nous aimerions maintenant considérer f comme une fonction $f : x \to \mathbb{R}$, en prenant ϕ en une section. C'est à dire en considérant ϕ comme une fonction donnée $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. En considérant la section s, la transformation (1.3.2) s'écrit de la manière suivante[6] :

$$(x, \phi(x)) \mapsto (x + \epsilon a|_s(x), \phi(x) + \epsilon !`!?b|_s(x)), \tag{1.3.3}$$

que nous voudrions exprimer sous la forme plus courante $(x', \phi'(x'))$. En comparant, nous faisons les identifications suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'^\mu &=& x^\mu + \epsilon a^\mu|_s(x) \\ \phi'(x') &=& \phi(x) + \epsilon b|_s(x). \end{array} \right. \tag{1.3.4}$$

Nous pouvons développer $\phi'(x+\epsilon a|_s(x))$ en

$$\phi'(x + \epsilon a|_s(x)) = \phi'(x) + \epsilon \frac{d}{dx^\mu} \phi'(x) a^\mu|_s(x) + \ldots . \tag{1.3.5}$$

L'expression $\phi'(x)$ est un abus d'écriture signalé dans la note en bas de la page 15 : en réalité il s'agit de $\phi'|_s(x)$. Nous voyons donc que le lemme 3 s'applique. En utilisant également le lemme 2, nous pouvons écrire que

$$\frac{d}{dx^\mu} \phi'|_s(x) = \partial_\mu \phi'|_s(x) = \phi'_\mu|_s(x).$$

Étant donné que la transformation est infinitésimale, la différence entre ϕ et ϕ' est d'ordre un. Dans le dernier terme de (1.3.5), nous pouvons donc remplacer ϕ' par ϕ

[6] À chaque fois que nous noterons une expression du genre de $\phi(x)$ ou $\phi_\mu(x)$, nous sous-entendrons repsectivement $\phi|_s(x)$ ou $\phi_\mu|_s(x)$.

sans ajouter de terme correctif car il serait d'ordre 2 (il y a déjà un ϵ d'ordre 1 devant). En tenant compte de cette remarque et étant donné que (1.3.5) est aussi égal à $\phi'(x') = \phi(x) + \epsilon b|_s(x)$, nous pouvons écrire que

$$\phi'^i(x') = {\phi'}^i(x) + \epsilon a^\mu|_s(x)\phi^i_\mu(x) = \phi^i(x) + \epsilon b^i|_s(x), \tag{1.3.6}$$

ce qui donne alors :

$$\delta\phi^i(x) = \epsilon(b^i - \phi^i_\mu a^\mu)|_s(x),$$

si ϵ est un paramètre infinitésimal. En définitive nous associons les transformation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta x^\mu & = & \epsilon a^\mu|_s(x) \\ \delta\phi^i(x) & = & \epsilon(b^i - \phi^i_\mu a^\mu)|_s(x) \end{array} \right. \tag{1.3.7}$$

au champ de vecteurs v (1.3.1).

1.3.2 Exemple

Considérons la fonction locale $f\ :(x,\phi) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f[x,\phi] = \phi^2 + x^2, \tag{1.3.8}$$

et la transformation des coordonnées locales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 2\epsilon\phi \\ \phi' & = & \phi + \epsilon x. \end{array} \right. \tag{1.3.9}$$

L'inversion de cette transformation donne au premier ordre

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x' - 2\epsilon\phi' \\ \phi & = & \phi' - \epsilon x', \end{array} \right. \tag{1.3.10}$$

et par conséquent, nous pouvons écrire

$$f[x,\phi] = \phi'^2 - 2\epsilon\phi' x' + x'^2 - 4\epsilon x'\phi'. \tag{1.3.11}$$

Il est important de remarquer que lorsque nous écrivons $x' = x + 2\epsilon\phi$, nous *ne sous-entendons pas* que ϕ est une fonction de x. Nous écrivons cela comme nous pouvons écrire n'importe quel changement de variable $(x_1, x_2) \to (x'_1, x'_2)$. Un autre changement de variable tout à fait légitime aurait été $(x, \phi, \phi_\mu) \to (x, x + \phi_\mu, x - \phi)$.

Si maintenant, nous voulons voir f comme une fonction des coordonnée de $\mathcal{M}$, nous calculons f en une section s. Si par exemple $s(y) = (y, \varphi(y))$, nous avons $f(y) \equiv f[y, \varphi(y)]$. Et dans ce cas, nous devons écrire les transformations des coordonnées (1.3.9) comme des transformations des coordonnées dans $\mathcal{M}$ et du champ φ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & y + 2\,\epsilon\,\varphi(y) \\ \varphi'(y') & = & \varphi(y) + \epsilon(y). \end{array} \right. \tag{1.3.12}$$

1.3.3 Transformations dans $\mathcal{J}^1$

Nous avons vu comment on associait une transformation dans $\mathcal{J}^0$ à un champ de vecteurs de la forme de (1.3.1). Le résultat est que *tout* champ de vecteurs de $\mathcal{J}^0$ définit bien une transformation des coordonnées[7] et des champs. À présent, nous voulons savoir s'il en va de même pour les champs de vecteurs de $\mathcal{J}^1$. Nous allons donc nous intéresser aux transformations des coordonnées de $\mathcal{J}^1$ induites par le champ de vecteurs

$$v^1 = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + b^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} + b^i_\mu \frac{\partial}{\partial \phi^i_\mu} \tag{1.3.13}$$

avec $b^i_\mu \in \ Loc(\mathcal{E})$.

Pour ce faire, nous allons exiger que la condition

$$\phi'^i_\mu|_s(x) = \frac{\partial \phi'^i}{\partial x^\mu}(x) \tag{1.3.14}$$

soit vérifiée. Pour voir ce que cela signifie, prenons une fonction locale $f[x,\phi]$ dépendante de x et des $\phi_{(\mu)}$. Prise en une section, cette fonction ne dépends plus que de x à travers les dérivées de ϕ :

$$f|_s(x) = f(x, \phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}(x), ...).$$

C'est cette propriété que nous écrivons sous la forme

$$\phi^i_\mu|_s(x) = \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}(x),$$

et que nous voulons conserver lors des transformations de coordonnées.

Soit $f\ : (x, \phi, \phi_\mu) \to \mathbb{R}$, un élément de $\mathcal{J}^1$. Nous trouvons que

$$(1 + \epsilon v) f(x, \phi, \phi_\mu) = f(x + \epsilon a, \phi + \epsilon b, \phi_\mu + \epsilon b_\mu), \tag{1.3.15}$$

et par conséquent, nous disons que v induit un changement de coordonnées dans $\mathcal{J}^1$ (changement de variable pour les fonctions de Loc^1) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& x + \epsilon a \\ \phi' &=& \phi + \epsilon b \\ \phi'_\mu &=& \phi_\mu + \epsilon b_\mu. \end{array} \right. \tag{1.3.16}$$

Si nous considérons la transformation en une section s, les coordonnées ϕ deviennent des champs $\phi(x)$ et la transformation (1.3.16) se note :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& x + \epsilon a|_s(x) \\ \phi'(x') &=& \phi(x) + \epsilon b|_s(x) \\ \phi'_\mu(x') &=& \phi_\mu(x) + \epsilon b_\mu|_s(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}(x) + \epsilon b_\mu|_s(x). \end{array} \right. \tag{1.3.17}$$

[7]Par « coordonnées », nous entendons ici les coordonnées x^μ de l'espace $\mathcal{M}$ vu comme espace physique sur lequel une théorie est construite, pas comme coordonnée locale.

De la même manière que nous avons déduit (1.3.4), nous déduisons que

$$\phi'^{i}_{\mu}(x+\epsilon a|_s) = \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}(x) + \epsilon b^i_\mu|_s(x). \tag{1.3.18}$$

Nous utilisons à nouveau un développement de Taylor au premier ordre en ϵ pour traiter cette équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}(x) + \epsilon b^i_\mu|_s(x) &= \phi'^{i}_{\mu}(x+\epsilon a|_s) \\ &= \phi'^{i}_{\mu}(x) + \epsilon a^\nu|_s(x)\frac{\partial \phi^i_\mu}{\partial x^\nu}(x) \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

et donc,

$$\phi'^{i}_{\mu}(x) = \epsilon(b^i_\mu - a^\nu \phi^i_{\mu\nu})|_s(x) + \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}(x). \tag{1.3.20}$$

En dérivant (1.3.6)[8] par rapport à x^μ, il vient d'autre part :

$$\frac{\partial \phi'^{i}}{\partial x^\mu}(x) = \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}(x) + \epsilon \frac{\partial}{\partial x^\mu}(b^i - \phi^i_\nu a^\nu)|_s(x), \tag{1.3.21}$$

et en utilisant le lemme 3, nous trouvons :

$$\frac{\partial \phi'^{i}}{\partial x^\mu}(x) = \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}(x) + \epsilon \partial_\mu(b^i - \phi^i_\nu a^\nu)|_s(x). \tag{1.3.22}$$

D'après l'exigence (1.3.14), les équations (1.3.20) et (1.3.22) sont égales. En égalisant, nous trouvons que les fonctions b^i_μ sont entièrement déterminées par les fonctions a^μ et b^i :

$$b^i_\mu = \partial_\mu(b^i - \phi^i_\nu a^\nu) + a^\nu \phi^i_{\mu\nu}, \tag{1.3.23}$$

ou, en distribuant le ∂_μ par Leibnitz,

$$b^i_\mu = \partial_\mu b^i - \phi^i_\nu \partial_\mu a^\nu \tag{1.3.24}$$

Tout les champs de vecteurs de $\mathcal{J}^1$ définissent une transformation des coordonnées locales, mais seuls ceux qui vérifient la relation (1.3.24) induisent des transformation des champs qui préservent la condition (1.3.14).

[8]qui est encore vraie, étant donné que nous pouvons refaire tout ce qui a été dit dans le point 1.3.1.

Plus généralement

Si nous considérons les transformations des coordonnées de $\mathcal{J}^k$ induites par le champ de vecteurs

$$v^k = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + b^i_{(\mu)} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}, \tag{1.3.25}$$

nous devons avoir (pour $|\mu| \geq 1$)

$$b^i_{(\mu)} = \partial_{(\mu)}(b^i - \phi^i_\nu a^\nu) + \phi^i_{(\mu)\nu} a^\nu \tag{1.3.26}$$

afin de conserver la condition

$$\phi^i_{(\mu)} = \partial_{(\mu)} \phi^i, \tag{1.3.27}$$

c'est à dire afin d'avoir

$$\phi'^i_{(\mu)} = \partial_{(\mu)} \phi'^i. \tag{1.3.28}$$

En résumé

Si dans les coordonnées de $\mathcal{J}^k$, nous faisons le changement

$$\left\{ \begin{array}{ll} x^\mu & \rightarrow x^\mu + \epsilon a^\mu \\ \phi_{(\mu)} & \rightarrow \phi_{(\mu)} + \epsilon b_{(\mu)}, \end{array} \right. \tag{1.3.29}$$

alors au niveau des sections, nous avons les transformations induites suivantes pour les coordonnées dans $\mathcal{M}$ et les champs $\phi|_s(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{rl} x^\mu & \rightarrow x^\mu + \epsilon a^\mu|_s(x) \\ \phi_{(\mu)}(x) & \rightarrow \phi_{(\mu)}(x) + \epsilon b_{(\mu)}|_s(x). \end{array} \right. \tag{1.3.30}$$

Ces dernières transformations n'étant possibles[9] que si pour $|\mu| > 0$,

$$b^i_{(\mu)} = \partial_{(\mu)}(b^i - \phi^i_\nu a^\nu) + \phi^i_{(\mu)\nu}.$$

À cause de la condition $\phi^i_{(\mu)} = \partial_{(\mu)}\phi^i$, toutes les transformations de $\mathcal{J}^k$ ne sont donc pas « bonnes » pour induire des transformations dans les sections.

Au niveau de la physique, seules les transformations vérifiant cette condition ont un sens car seules les sections ont un sens. Par conséquent, seules les transformations vérifiant (1.3.26) nous intéresseront ici.

Pour être plus précis, se fixer la transformation des coordonnée x^μ et ϕ^i suffit à fixer les lois de transformation de tout les $\phi^i_{(\mu)}$ *au niveau de sections* ; pas au niveau de $\mathcal{J}^k$.

[9] au sens où ces transformations préserveraient la condition $\partial_{(\mu)}\phi^i = \phi^i_{(\mu)}$.

1.3.4 Forme caractéristique

Nous définissons maintenant les notations suivantes :

$$\begin{aligned} Q^i &= b^i - \phi^i_\nu a^\nu, && (1.3.31) \\ v_Q &= Q^i \frac{\partial}{\partial \phi^i}. && (1.3.32) \end{aligned}$$

La fonction locale Q^i est appelée la *caractéristique* de v, et le champ de vecteurs v_Q est la *forme caractéristique* de v. Le champ de vecteur (1.3.1) peut alors être écrit de la manière suivante :

$$v = (b^i - \phi^i_\nu a^\nu)\frac{\partial}{\partial \phi^i} + a^\nu(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \phi^i_\nu \frac{\partial}{\partial \phi^i}) = v_Q + a^\nu(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \phi^i_\nu \frac{\partial}{\partial \phi^i}), \quad (1.3.33)$$

et nous définissons encore le *prolongement de v* :

$$pr\, v = \partial_{(\mu)} Q^i \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} + a^\nu \partial_\nu. \quad (1.3.34)$$

Le prolongement de v a cette propriété d'être le champ de vecteurs obtenu par substitution de la condition (1.3.26) dans le champ général (1.3.25).

Par la définition (1.1.17) nous pouvons encore écrire

$$pr\, v = \delta_Q + a^\nu \partial_\nu. \quad (1.3.35)$$

Notons que le champ de vecteurs δ_Q, canoniquement associé à v, ne comprends pas de composantes $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

En comparant les équations (1.3.33) et (1.3.34), nous trouvons que

$$pr\, v_Q = \delta_Q.$$

En effet, en essayant d'écrire v_Q sous la forme (1.3.25), nous avons $a^\mu = 0$ et $b^i = Q^i$, les autres $Q^i_{(\mu)}$ étant tous nuls. En faisant jouer la définition (1.3.34) là-dessus, nous trouvons que

$$pr\, v_Q = \partial_{(\mu)} Q^i \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} = \delta_Q. \quad (1.3.36)$$

1.4 Symétries de l'action

1.4.1 Définition et propriétés

Pour un lagrangien $\mathcal{L} \in Loc^k(\mathcal{E})$, l'action est définie par

$$S = \int \mathcal{L} d^n x.$$

Étant donné que les équations d'Euler-Lagrange ont identiques pour $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}+\partial\mu j^\mu$ (voir le théorème 2), nous définissons des classes d'équivalences de lagrangiens par

$$\mathcal{L}d^n x \sim \mathcal{L}d^n x + d_H\left(j^\mu (d^{n-1}x)_\mu\right).$$

Nous allons définir les *symétries infinitésimales de l'action* comme étant des champs de vecteurs v tels que

$$pr\, v[\mathcal{L}d^n x] = [0], \tag{1.4.1}$$

en désignant par $[a]$, la classe d'équivalence de a pour la relation $\sim$.

Pour pouvoir poser cette définition, il faut définir comment $pr\, v$ agit sur les dx^μ. Nous le faisons en exigeant la relation suivante :

$$[pr\, v, d_H] = 0\,, \tag{1.4.2}$$

et en nous donnant la définition

$$pr\, v = a^\nu \partial_\nu + \delta_Q + b^\nu \frac{\partial}{\partial dx^\nu} \tag{1.4.3}$$

dans laquelle nous fixons les b^ν de telle façon a avoir (1.4.2).

Par le lemme 5, nous avons $[\delta_Q, d_H] = 0$, et donc

$$\begin{aligned} [pr\, v, d_H] &= [a^\nu\partial_\nu + b^\nu \frac{\partial}{\partial dx^\nu}, dx^\mu \partial_\mu] & (1.4.4)\\ &= b^\mu \partial_\mu - dx^\nu(\partial_\nu a^\mu)\partial_\mu - dx^\mu(\partial_\mu b^\nu)\frac{\partial}{\partial dx^\nu} \overset{!}{=} 0. & (1.4.5)\end{aligned}$$

En annulant le coefficient de ∂_μ, nous trouvons

$$b^\mu = dx^\nu(\partial_\nu a^\mu), \tag{1.4.6}$$

ce qui assure l'annulation du coefficient de $\frac{\partial}{\partial dx^\nu}$:

$$\begin{aligned} dx^\mu(\partial_\mu b^\nu)\frac{\partial}{\partial dx^\nu} &= dx^\mu \partial_\mu (dx^\rho \partial_\rho a^\nu)\frac{\partial}{\partial dx^\nu} & (1.4.7)\\ &= \underbrace{dx^\mu dx^\rho \partial_\mu \partial_\rho}_{=0} a^\nu \frac{\partial}{\partial dx^\nu}, & (1.4.8)\end{aligned}$$

qui est donc d'office nul.

En définitive, nous définissons donc

$$pr\, v = a^\mu \partial_\mu + \delta_Q + d_H a^\mu \frac{\partial}{\partial dx^\mu};$$

donnant ainsi un sens à la définition (1.4.1). De plus, la condition (1.4.1) qui fait de v une symétrie de l'action est indépendante du choix du représentant :

$$pr\, v[\mathcal{L}d^n x] = [0]$$

signifie que $pr\, v$ appliqué à n'importe quel élément de la classe de $\mathcal{L}d^n x$ doit tomber dans la classe de 0. Prenons donc un élément quelconque de la classe de $\mathcal{L}d^n x$:

$$\mathcal{L}d^n x + d_H \left[j^\mu (d^{n-1}x)_\mu \right],$$

et appliquons-lui $pr\, v$:

$$pr\, v \left(\mathcal{L}d^n x + d_H \left[j^\mu (d^{n-1}x)_\mu \right] \right) = pr\, v[\mathcal{L}d^n x] + pr\, v \left(d_H \left[j^\mu (d^{n-1}x)_\mu \right] \right). \tag{1.4.9}$$

Le premier terme fait zéro par hypothèse, tandis que le second est bien de la forme $d_H(...) \in [0]$ car nous avons tout fait pour que $[pr\, v, d_H] = 0$.

C'est maintenant que vient le théorème le plus important de cette partie.

Théorème 3. *Le champ de vecteurs v vérifiant* (1.3.26) *est une symétrie infinitésimale de l'action si et seulement si v_Q en est une.*

Chaque symétrie de l'action est donc équivalente à une symétrie de l'action sous forme caractéristique.

Démonstration. Ce qu'il faut voir c'est si

$$(pr\, v)\mathcal{L}\, d^n x \sim 0 \Leftrightarrow (pr\, v_Q)\mathcal{L}\, d^n x \sim 0.$$

Nous calculons donc $(pr\, v)\mathcal{L}\, d^n x$ en nous souvenant de la définition (1.4.3) :

$$pr\, v = a^\nu \partial_\nu + \delta_Q + (d_H a^\mu) \frac{\partial}{\partial dx^\mu}.$$

$$\begin{aligned}
(pr\, v)\mathcal{L}\, d^n x &= \delta_Q \mathcal{L}\, d^n x + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}\, d^n x + \mathcal{L}\, d_H a^\mu (d^{n-1}x)_\mu && (1.4.10)\\
&= \delta_Q \mathcal{L}\, d^n x + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}\, d^n x + \mathcal{L}\, dx^\nu \partial_\nu a^\mu (d^{n-1}x)_\mu && (1.4.11)\\
&= \delta_Q \mathcal{L}\, d^n x + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}\, d^n x + \mathcal{L}\, \partial_\nu a^\mu \delta^\nu_\mu d^n x && (1.4.12)\\
&= \delta_Q \mathcal{L}\, d^n x + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}\, d^n x + \mathcal{L}\, \partial_\mu a^\mu d^n x && (1.4.13)\\
&= \delta_Q \mathcal{L}\, d^n x + \partial_\mu (a^\mu \mathcal{L}) d^n x && (1.4.14)\\
&= \delta_Q \mathcal{L}\, d^n x + d_H \left(a^\mu \mathcal{L}\, (d^{n-1}x)_\mu \right). && (1.4.15)
\end{aligned}$$

Maintenant, dire que $(pr\, v)\mathcal{L}\, d^n x \sim 0$, c'est dire que $\delta_Q \mathcal{L}\, d^n x \sim 0$, étant donné que les objets de la forme $d_H(...)$ ne jouent pas de rôle dans les $\sim$.

Nous avons donc montré que

$$(pr\, v)\mathcal{L}\, d^n x \sim 0 \Leftrightarrow \delta_Q \mathcal{L}\, d^n x \sim 0. \tag{1.4.16}$$

Et alors, l'équation (1.3.36) donne la thèse.

CQFD.

1.4.2 Comment rechercher des symétries ?

Nous pouvons à présent préciser notre démarche pour la recherche des symétries des lagrangien que nous allons étudier. Toutes les transformations des coordonnées sont décrites par un vecteur v. Le but est de trouver quels sont les v qui décrivent une symétrie des équations d'Euler-Lagrange (symétrie du lagrangien à une divergence près). Étant donné que nous avons une équivalence des descriptions des symétries de l'action en termes de v ou de v_Q, nous allons plutôt rechercher les v_Q, sans perte de généralité car les v s'y retrouveront tous. Si v_Q est une symétrie de l'action, nous avons $pr\, v_Q[\mathcal{L}\, d^n x] = [0]$, c'est à dire

$$\delta_Q[\mathcal{L}\, d^n x] = [0].$$

Si nous prenons un lagrangien représentant de la classe $[\mathcal{L}\, d^n x]$, nous devons avoir

$$\delta_Q \mathcal{L}\, d^n x = d_H(...),$$

de là, si δ_Q représente une symétrie de l'action pour le lagrangien $\mathcal{L}\, d^n x$, il existe une fonction j^μ telle que $\delta_Q \mathcal{L}\, d^n x = \partial_\mu j^\mu$, et par conséquent, le premier terme du second membre de (1.1.29) s'annule lorsque nous la prenons avec $f = \mathcal{L}$.

Ce point est important, étant donné que c'était précisément le seul terme contenant $\delta_Q \mathcal{L}$, et partant, le seul terme contenant $\partial_\mu j^\mu$. Cette équation devient alors une équation pour les seuls Q. Ensuite, partant du Q trouvé, nous construisons l'opérateur de symétrie δ_Q et nous pouvons remonter jusqu'à la forme la plus classique de la symétrie : le champ de vecteurs v.

Pour éviter de devoir ainsi remonter de Q à v, nous allons à présent calculer les Q correspondants aux symétries classique de la littérature dont nous aurons besoin : transformations de Poincaré et conformes. Nous pourrons alors simplement comparer le Q_s, caractéristiques des symétrie trouvées et les Q_t, caractéristiques des symétries connues.

1.5 Formes caractéristiques des transformations conformes

Dans cette section, nous cherchons les Q associés aux transformations conformes infinitésimales : le groupe de Lorentz, les translations, les dilatations ainsi que les spéciales conformes. Une étude plus détaillée du sujet peut être trouvée dans le deuxième chapitre de [6] pour ce qui est des transformations de coordonnées en général et dans le quatrième chapitre en ce qui concerne le groupe conforme en particulier.

1.5.1 Les translations

Les translations sont les plus simples. Elles s'expriment généralement de la manière suivante :

$$\delta x^\mu = \epsilon c^\mu. \tag{1.5.1}$$

Ces transformations des coordonnées de $\mathcal{M}$ induisent une transformations des coordonnées de $Loc(\mathcal{E})$ par l'exigence d'avoir

$$\phi'(x') = \phi(x).$$

Nous pouvons donc écrire

$$\phi'(x+\epsilon c) = \phi'(x) + \epsilon c^\mu \partial_\mu \phi'(x) = \phi(x), \tag{1.5.2}$$

et par conséquent,

$$\delta\phi(x) = -\epsilon c^\mu \partial_\mu \phi'(x). \tag{1.5.3}$$

Seulement, le passage de ϕ à ϕ' est du premier ordre, tandis que dans le second terme, nous avons déjà un ϵc^μ du premier ordre, nous pouvons donc y remplacer ϕ' par ϕ sans ajouter de terme correctif. En définitive,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta x^\mu &=& \epsilon c^\mu \\ \delta\phi(x) &=& -\epsilon c^\mu \partial_\mu \phi(x) \end{array} \right. \tag{1.5.4}$$

que nous comparons aux transformations (1.3.7) pour fixer les paramètres a^μ et b^i, fixant le Q de la transformation (1.5.1). Nous avons les identifications suivantes :

$$\text{Translations} \left\{ \begin{array}{rcl} a^\mu &=& \epsilon c^\mu \\ b^i &=& 0, \end{array} \right. \tag{1.5.5}$$

de telle façon à ce qu' en prenant des notations plus « neutres », nous ayons

$$Q^i_{translations} = \phi^i_\nu a^\nu. \tag{1.5.6}$$

1.5.2 Les rotations

La transformation des coordonnées dans $\mathcal{M}$ est

$$x'^{\,\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu,$$

tandis que la transformation des champs se fait par

$$\phi'(\Lambda x) = L_\Lambda \phi(x)$$

où L_Λ est une matrice (faisant partie d'une représentation du groupe de Lorentz) agissant sur les composantes spinorielles de ϕ. Dans le cas où ϕ est un champ scalaire, cette matrice n'intervient pas. Nous nous plaçons dans ce dernier cas. Pour une transformation infinitésimale et d'un champ scalaire, nous notons $\Lambda^\mu{}_\nu = (\mathbb{1}+\omega)^\mu{}_\nu$ et nous avons

$$\phi(x) = \phi'([\mathbb{1}+\omega]x) = \phi'(x) + \omega^\mu{}_\nu \, x^\nu \partial_\mu \phi'(x). \tag{1.5.7}$$

Les transformations de $\mathcal{J}^1$ se notent donc

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \omega^\mu{}_\nu x^\nu && (1.5.8)\\ \delta\phi(x) &= -\omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x). && (1.5.9)\end{aligned}$$

Comparant à nouveau avec (1.3.7), nous trouvons les paramètres de la rotation sous la forme

$$\text{Rotations}\left\{ \begin{aligned} a^\mu &= \omega^\mu{}_\nu x^\nu \\ b &= 0, \end{aligned}\right. \tag{1.5.10}$$

fixant ainsi la caractéristique de la rotation :

$$Q^i_{rotations} = \phi^i_\lambda \omega^\lambda{}_\nu x^\nu. \tag{1.5.11}$$

1.5.3 Les dilatations

Elles sont définies, pour un champ de *dimension d'échelle* Δ, par

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \lambda x \\ \phi'(\lambda x) &= \lambda^{-\Delta}\phi(x). \end{aligned}\right. \tag{1.5.12}$$

Pour une transformation infinitésimale, nous faisons la substitution $\lambda \to (1+\lambda)$ avec λ infinitésimal. En tenant compte de l'approximation

$$(1+\epsilon)^r = 1 + r\epsilon,$$

nous restons avec

$$\begin{aligned} x' &= (1+\lambda)x, && (1.5.13)\\ \phi'((1+\lambda)x) &= (1+\lambda)^{-\Delta}\phi(x) && (1.5.14)\\ &= (1-\Delta\lambda)\phi(x). && (1.5.15)\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\left\{ \begin{aligned} \delta x^\mu &= \lambda x^\mu \\ \delta\phi(x) &= -\Delta\lambda\phi(x) - \lambda x^\mu \partial_\mu \phi(x). \end{aligned}\right. \tag{1.5.16}$$

Notons que le coefficient de $\partial_\mu \phi$ est exactement la transformations de x, comme il se doit d'après (1.3.7). Ceci amène les paramètres suivants pour les dilatations :

$$\text{Dilatations}\left\{ \begin{aligned} a^\mu &= \lambda x^\mu \\ b^i &= -\Delta\lambda\phi^i, \end{aligned}\right. \tag{1.5.17}$$

ou en prenant une notation plus simple (en laissant tomber les signes car λ est arbitraire),

$$Q^i_{dilatation} = \Delta\lambda\phi^i + \lambda\phi^i_\nu x^\nu. \tag{1.5.18}$$

À noter que ce Q possède une partie en ϕ^i en plus de sa partie en ϕ^i_μ. Lorsque nous trouverons le groupe conforme comme symétrie de $\mathcal{L}$, nous l'aurons avec une partie en ϕ^i, ce qui est l'indice du fait que les champs avec lesquels nous travaillons sont de dimension d'échelle Δ non nulle.

1.5.4 Les spéciales conformes

Elles sont données par

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + 2(x \cdot \gamma)x^{\mu} - \gamma^{\mu}x^2.$$

La transformation que cela induit sur les champs ϕ^i se calcule comme d'habitude en posant[10] $\phi'(x') = \phi(x)$; dans ce cas-ci, nous obtenons :

$$\phi'(x') = \phi'(x + 2(x \cdot \gamma)x - \gamma\, x^2) = \phi'(x) + [2(x \cdot \gamma)x^{\mu} - \gamma^{\mu}x^2]\partial_{\mu}\phi(x). \qquad (1.5.19)$$

Nous avons donc

$$\text{Spéciales conformes} \begin{cases} a^{\mu} &= 2(x \cdot \gamma)x^{\mu} - \gamma^{\mu}x^2 \\ b^i &= 0. \end{cases} \qquad (1.5.20)$$

$$Q^i_{\text{spéciales conformes}} = \phi^i_{\mu}[2(x \cdot \gamma)x^{\mu} - \gamma^{\mu}x^2] \qquad (1.5.21)$$

Remarque

Nous remarquons que le b^i_{μ} lié à cette transformation par la formule (1.3.24) n'est pas nul. La transformation spéciale conforme ainsi définie est donc une transformation qui ne laisse invariant x ni ϕ^i ni les ϕ^i_{μ} (et les dilatations avec $\Delta = 0$ non plus d'ailleurs).

Ce fait là ne doit cependant pas nous faire oublier que ce qui compte, c'est le Q^i associé à la transformation et rien d'autre. Si un champ de vecteurs v donnée possède des $b^i_{(\mu)}$ non nuls jusqu'à un ordre k, aussi grand que soit k, il sera toujours une symétrie de l'action *ssi* v_Q l'est ; v_Q ne dépendant que de Q, lui-même n'étant défini que par a^{μ} et b^i.

[10] nous ne recopions pas les indices suppérieurs i.

Chapitre 2

Notations et premiers résultats

2.1 Hypothèses et point de départ

Nous nous proposons de chercher toutes les symétries possibles pour une action invariante sous le groupe de Poincaré, c'est à dire tout les opérateurs B tels que

$$\exists j^{\ \mu} \ : \ B\mathcal{L} = \partial_\mu j^\mu,$$

sachant que nous avons déjà un tel j^μ pour $B = P_\mu$ et $B = J_{\mu\nu}$.

Linéarité

Comme mentionné dans l'appendice A consacré au théorème de Coleman et Mandula, une *symétrie* est un opérateur qui a entre autres propriétés, celle de transformer un état à une particule en un état à une particule. Dans le formalisme lagrangien, nous traduisons cette hypothèse par le fait que les symétries devront respecter le degré des différents termes du lagrangien. Nous ne pouvons par exemple pas avoir de symétries B telles que

$$B\phi = \phi^2$$

car, une telle symétrie aurait la propriété de transformer le terme cinétique d'une particule libre en un terme d'interaction à trois particules. En effet, une symétrie de ce type serait de la forme $B = \phi^2 \frac{\partial}{\partial\phi}$, et nous avons alors clairement

$$B(\phi^2) = \phi^2 \frac{\partial(\phi^2)}{\partial\phi} = 2\phi^3.$$

Sous cette hypothèse, le candidat symétrie de l'action doit avoir la forme suivante :

$$B = \partial_{(\lambda)} \left[b^{(\mu)l}{}_j \, \phi^j_{(\mu)} \right] \frac{\partial}{\partial\phi^l_{(\lambda)}} \,. \qquad (2.1.1)$$

Localité (Ordre maximum)

Nous allons supposer qu'il existe un certain $|\lambda|_{max}$ tel que tout les $b^{(\mu)i}{}_j$ soient nuls dès que $|\mu| > |\lambda|_{max}$. En effet, nous avons vu que le lagrangien était naturellement une fonction locale, c'est à dire un élément de $Loc^k(\mathcal{E})$ pour un certain k. Nous posons l'hypothèse que les symétries ne font apparaître qu'un nombre fini de dérivées afin de rester dans des coordonnées locale.

Si un tel $|\mu|_{max}$ n'existait pas, nous n'aurions $B\mathcal{L} \in Loc^k\mathcal{E}$ pour aucun k.

Remarque

Afin d'éviter les confusions signalons que dans la suite, il sera souvent fait mention de « condition d'invariance » ; il s'agira à chaque fois d'un abus de langage car le lagrangien n'est pas vraiment invariant sous les symétries que l'on cherche : sa variation vaut une divergence ; c'est à dire que $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu j^\mu$. C'est à proprement parler l'action

$$S = \int d^dx\, \mathcal{L} \tag{2.1.2}$$

qui est invariante.

L'équation de départ

Le point de départ de nos investigations sera l'équation (1.1.29). Comme indiqué dans le paragraphe 1.4.2, nous allons chercher les symétries de l'action sous la forme de δ_Q (nous cherchons les Q). C'est à dire que nous allons chercher les Q qui font en sorte que

$$\exists\, j^\mu\, tq\, \delta_Q\mathcal{L} = \partial_\mu j^\mu.$$

Pour un tel δ_Q, le premier terme du second membre de (1.1.29) s'annule étant donné le théorème 2 appliqué à $\frac{\delta(\delta_Q\mathcal{L})}{\delta\phi^i} = \frac{\delta(\partial_\mu j^\mu)}{\delta\phi^i} = 0$.

Nous avons donc la condition d'invariance de la fonction locale f sous la symétrie engendrée par Q sous la forme :

$$\delta_Q\frac{\delta f}{\delta\phi^i} = -(-\partial)_{(\lambda)}\Big[\frac{\partial Q^j}{\partial\phi^i_{(\lambda)}}\frac{\delta f}{\delta\phi^j}\Big]. \tag{2.1.3}$$

Pour fixer la notation, il faut comparer B à δ_Q ; c'est à dire que nous cherchons une symétrie sous la forme (2.1.1) qui soit également de la forme (1.1.17) :

$$B = \partial_{(\lambda)}\left[b^{(\mu)l}{}_j\,\phi^j_{(\mu)}\right]\frac{\partial}{\partial\phi^l_{(\lambda)}} \tag{2.1.4}$$

et

$$\delta_Q = \partial_{(\mu)}Q^i\frac{\partial}{\partial\phi^i_{(\mu)}} \tag{2.1.5}$$

donnent la correspondance :

$$Q^i = b^{(\lambda)i}{}_j \, \phi^j_{(\lambda)}. \tag{2.1.6}$$

Et remettant tout ensemble, nous pouvons réécrire la condition (2.1.3) d'invariance du lagrangien pour B sous la forme :

$$B\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^i} \stackrel{!}{=} -(-\partial)_{(\lambda)} \left[b^{(\lambda)j}{}_i \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^j} \right] \tag{2.1.7}$$

avec B donné par (2.1.1). Notons que $(-\partial)_{(\lambda)}$ est symétrique en les composantes de (λ) ; nous pouvons donc supposer sans perte de généralité que $b^{(\lambda)i}{}_j$ soit également symétrique en les composantes de (λ). C'est à dire que nous avons par exemple $b^{(123)i}{}_j = b^{(231)i}{}_j$.

Notons aussi que la relation (2.1.7) possède un indice libre i. Ceci fait en sorte que les coefficients b d'un candidat symétrie d'une théorie contenant n champs doivent vérifier n contraintes différentes.

Pourquoi utiliser cette formule ?

Précisons un point souligné dans le paragraphe 1.4.2. La formule (2.1.7) fourni automatiquement un système d'équation pour les inconnues $b^{(\mu)i}{}_j$, c'est à dire pour la caractéristique de la symétrie que nous recherchons. Il se fait que –et c'est là le point important– les paramètres de Q sont les *seules* inconnues du système (2.1.7). La méthode que nous avons développé dans le chapitre 1 permet ainsi d'éviter de devoir poser le problème sous la forme

$$\delta_Q\mathcal{L} = \partial_\mu j^{\,\mu}$$

qui contient explicitement les inconnues non-essentielles $j^{\,\mu}$.

2.2 L'importance de l'interaction

Le lagrangien que nous considérons est composé d'une partie quadratique en les champs et d'une partie d'interaction. Nous supposons cette deuxième partie de la forme

$$\mathcal{L}^k = \frac{1}{k!} g_{l_1 \dots l_k} \phi^{l_1} \dots \phi^{l_k}, \qquad k \geq 3. \tag{2.2.1}$$

Le terme d'interaction peut être traité séparément des termes cinétiques grâce à l'hypothèse de linéarité. En effet, les symétries que nous cherchons peuvent changer des ϕ en ϕ_μ, mais pas en ϕ^2 ou $\phi\phi_\mu$ par exemple. Par conséquent, les termes cinétiques restent de degré deux en les coordonnées locales sous l'effet de la symétrie. De la même manière, sous la symétrie, les termes de la forme (2.2.1) restent de degré k, et ne peuvent donc pas se confondre avec des termes provenant de la partie cinétique dans la condition (2.1.7).

Ceci fait en sorte que nous pouvons écrire la condition (2.1.7) pour $\mathcal{L}^k$ indépendamment de celle que nous pouvons poser pour $\mathcal{L}^2$.

Cette remarque justifie le fait que nous pouvons déduire des résultats généraux sur les symétries d'un lagrangien en ne considérant que son terme d'interaction.

Avant de commencer la démonstration des deux résultats de ce chapitre, nous calculons la dérivée d'Euler-Lagrange de $\mathcal{L}^k$.

Aucun champ dérivé n'apparaît dans le lagrangien (2.2.1). Par conséquent, de la somme sur (μ) de la formule (1.1.16), il ne reste que le terme « sans indice », $|\mu| = 0$. La dérivée d'Euler-Lagrange se réduit donc à $\frac{\partial \mathcal{L}^k}{\partial \phi^i}$.

Pour ce calcul, nous devons utiliser Leibnitz (k termes). Le premier de ces k termes vaut

$$\frac{1}{k!}\, g_{i_1 \ldots i_k} \delta_i^{i_1} \phi^{i2} \ldots \phi^{ik}.$$

Les autres sont tous égaux à celui-là car le delta apparaît successivement à la place du premier champ, du deuxième,... Le terme dont le $j^{\text{ème}}$ champ est remplacé par delta se ramène à la même forme que le premier en changeant les noms de variables de sommation $i_j \leftrightarrow i_1$.

En ré-arrangeant les termes et en utilisant la symétrie de g, nous obtenons :

$$\frac{\delta \mathcal{L}^k}{\delta \phi^i} = \frac{\partial \mathcal{L}^k}{\partial \phi^i} = \frac{1}{(k-1)!} g_{i\, l_2 \ldots l_k} \phi^{l_2} \ldots \phi^{l_k}. \tag{2.2.2}$$

Lemme 9. *Si une action est invariante sous les translation (sous-groupe de celui de Poincaré), alors le g de la partie d'interaction de son lagrangien donnée par* (2.2.1) *ne peut pas déprendre de x.*

Démonstration. Pour commencer, nous nous rappelons la caractéristique des translation :

$$\begin{aligned} Q &= a^\nu \phi^i_\nu, & (2.2.3)\\ \delta_Q &= a^\nu \phi^i_{(\mu)\nu} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}. & (2.2.4) \end{aligned}$$

Ensuite, nous appliquons le critère[1] (2.1.3), en y mettant (2.2.2), (2.2.3) et (2.2.4).

$$\delta_Q \frac{\delta \mathcal{L}^k}{\delta \phi^i} = -(-\partial)_{(\lambda)} \left[\frac{\partial Q^j}{\partial \phi^i_{(\lambda)}} \frac{\delta \mathcal{L}^k}{\delta \phi^j} \right] \tag{2.2.5}$$

$$\delta_Q \left[\frac{1}{(k-1)!} g_{ii_2\ldots i_k} \phi^{i_2} \ldots \phi^{i_k} \right] = \partial_\lambda \left[\delta^j_i \delta^\lambda_\nu a^\nu \frac{1}{(k-1)!} g_{ji_2\ldots i_k} \phi i_2 \ldots \phi^{i_k} \right] \tag{2.2.6}$$

$$g_{ii_2\ldots i_k} a^\nu \phi^j_\nu \frac{\partial}{\partial \phi^j} (\phi^{i_2} \ldots \phi^{i_k}) = a^\lambda (\partial_\lambda g_{ii_2\ldots i_k}) \phi^{i_2} \ldots \phi^{i_k} + a^\lambda g_{ii_2\ldots i_k} \partial_\lambda (\phi^{i_2} \ldots \phi^{i_k}) \tag{2.2.7}$$

$$\begin{aligned} g_{iji_3\ldots i_k} a^\nu \phi^j_\nu \phi^{i_3} \ldots \phi^{i_k} (k-1) &= a^\lambda (\partial_\lambda g_{ii_2\ldots i_k}) \phi^{i_2} \ldots \phi^{i_k} \\ &\quad + (k-1) a^\lambda g_{ii_2\ldots i_k} \phi^{i_2}_\lambda \phi^{i_3} \ldots \phi^{i_k}, \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

et par conséquent,

$$a^\lambda (\partial_\lambda g_{ii_2\ldots i_k}) \phi^{i_2} \ldots \phi i_k = 0. \tag{2.2.9}$$

Les ϕ^i étant des variables, et les a^λ étant arbitraires, cela implique l'annulation de $\partial_\lambda g_{ii_2\ldots i_k}$. Or, les g ne dépendent a priori que des x, car il est dans la définition même de g qu'ils ne peuvent pas dépendre des champs. Ceci fait en sorte que la dérivée totale ∂_λ se réduit à la dérivée partielle par rapport aux x.

CQFD.

Étant donné que nous n'étudions que les lagrangiens invariants sous le groupe de Poincaré, ce lemme est d'application dans tout le mémoire[2]. C'est pour cette raison que nous n'avons volontairement pas indiqué de dépendance en x dans le g de (2.2.1).

Le théorème suivant fait un premier pas dans la recherche des ${b^{(\mu)i}}_j$. Il indique que sous une hypothèse simple à propos de l'interaction, seuls les ${b^i}_j$ et les ${b^{\mu i}}_j$ sont non nuls.

Théorème 4. *En présence d'un terme d'interaction de la forme* (2.2.1)*, les seules symétries de la forme* (2.1.1) *se réduisent à*

$$B = \partial_{(\lambda)} \left[{b^i}_j \phi^j + {b^{\mu i}}_j \phi^j_\mu \right] \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\lambda)}} \tag{2.2.10}$$

dès que g est non dégénérée, en ce sens que que

$$k^i g_{ij\ldots k} = 0 \Rightarrow k^i = 0 \qquad \forall\, i.$$

[1] L'opérateur δ_Q des translations étant pair, la formule (B.0.7) n'est pas différente de (2.1.3). Voir page 66 et l'appendice B.

[2] À proprement parler, ce ne sera pas vrai pour le chapitre qui traitera avec des spineurs. En effet, la formule de départ (2.1.7) n'est alors pas vraie.

Ceci qui signifie que la condition d'invariance (2.1.7) s'écrit maintenant

$$\partial_{(\lambda)}\left[b^{l}{}_{j}\,\phi^{j}+b^{\mu\,l}{}_{j}\,\phi^{j}_{\mu}\right]\frac{\partial}{\partial\phi^{l}_{(\lambda)}}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^{i}}\overset{!}{=}-\left[b^{\,j}{}_{i}\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^{j}}\right]+\partial_{\lambda}\left[b^{\lambda\,j}{}_{i}\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^{j}}\right]. \qquad (2.2.11)$$

Démonstration. Les ϕ^i sont les champs de la théorie que nous considérons. Il est important de noter qu'en ce qui concerne les équations du mouvement les variables indépendantes du problème sont les $\phi^k_{(\mu)}$. Par exemple, ϕ^i_{34} est indépendante de ϕ^i_3.

Regardons comment la condition (2.1.7) va agir sur $\mathcal{L}^k$. Pour cela, commençons par écrire $B\frac{\delta\mathcal{L}^k}{\delta\phi^i}$ à partir de (2.1.1) et (2.2.2).

$$B\frac{\delta\mathcal{L}^k}{\delta\phi^i}=\frac{1}{(k-1)!}\,b^{(\lambda)l}{}_{j}\,\phi^{j}_{(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\phi^l}\left(g_{i\,l_2\ldots i_k}\phi^{l_2}\ldots\phi^{l_k}\right). \qquad (2.2.12)$$

La dérivation par rapport à ϕ^l donne lieu à $(k-1)$ termes identiques. La condition (2.1.7) devient :

$$\frac{1}{(k-2)!}b^{(\lambda)l}{}_{j}\,\phi^{j}_{(\lambda)}g_{i\,l\,i_3\ldots l_k}\phi^{l_3}\ldots\phi^{l_k}\;\overset{!}{=}\;-\frac{1}{(k-1)!}(-\partial)_{(\lambda)}\left[b^{(\lambda)j}{}_{i}\,g_{j\,l_2\ldots l_k}\,\phi^{l_2}\ldots\phi^{l_k}\right]. \qquad (2.2.13)$$

Il faut d'abord remarquer que dans le membre de gauche de (2.2.13), un seul champ est dérivé. Dans le membre de droite par contre, nous avons toute une série de termes (Leibnitz) dans lesquels jusqu'à $|\lambda|_{max}$ champs peuvent être dérivés (si le nombre de champs différents est plus grand que ce $|\lambda|_{max}$). Ces termes doivent se compenser entre eux pour obtenir l'égalité imposée.

Afin de voir comment les choses se mettent, examinons le cas $|\lambda|_{max}=3$ et avec une interaction d'ordre 3. Nous avons à droite, entre autres termes, le terme suivant :

$$\partial_a\partial_b\partial_c\left(b^{(abc)j}{}_{i}\,g_{jkl}\phi^k\phi^l\right).$$

Nous le développons en utilisant un certain nombre de fois la règle de Leibnitz. Il est bon de se rappeler que $b^{(abc)}$ est complètement symétrique en (abc) ou peut être choisit tel, car $b^{(abc)}$ est défini dans le terme $b^{(abc)}\phi_{abc}$ de Q alors que ϕ_{abc} est tout à fait symétrique en (abc).

En ne regardant que les termes dans lesquels toutes les dérivées portent sur les champs (et non sur g ou sur $b^{(\lambda)}$)[3] et sur plus d'un champ (le terme où toutes les dérivées portent sur un seul champ peut-être compensé à gauche), nous avons les termes suivants :

$$b^{(abc)j}{}_{i}\,g_{jkl}\left[\phi^k_{ac}\phi^l_b+\phi^k_{ab}\phi^l_c+\phi^k_a\phi^l_{cb}+\phi^k_{bc}\phi^l_a+\phi^k_c\phi^l_{ba}+\phi^k_b\phi^l_{ac}\right]=0 \qquad (2.2.14)$$

[3]Sous l'hypothèse que le lagrangien est invariant sous les translations, nous avons démontré que g ne peut en fait pas dépendre de x.

qui est nul car c'est le seul terme à posséder trois dérivées portants sur des champs. C'est pour obtenir ce résultat que nous avons précisément considéré les termes contenants *le plus* de dérivations. En effet, prenons (μ) tel que $|\mu| < |\lambda|_{max}$. Nous avons alors à droite au moins les deux termes suivants contenants $\phi^i_{(\mu)}$:

$$b^{(\mu)j}{}_i\, \phi^i_{(\mu)} \qquad \text{et} \qquad \partial_\nu b^{\nu(\mu)\,j}{}_i\, \phi^i_{(\mu)}.$$

En considérant les champs dérivés moins que $|\lambda|_{max}$ fois, nous tombons sur des conditions plus difficiles qui lient des $b^{(\mu)j}{}_i$ d'ordres différents.

Étant donné les propriétés de symétrie des $b^{(abc)}$ et des g_{jkl}, tout les termes qui comportent le produit $\phi^k_{12}\phi^l_3$ des variables indépendantes ϕ^k_{12} et ϕ^l_3 viennent avec le même facteur qui doit donc s'annuler. C'est pour cela que tout les $b^{(abc)j}{}_i$ sont nuls.

Plus précisément, le coefficient de $\phi^k_{12}\,\phi^l_3$ est

$$(b^{(123)j}{}_i + b^{(123)j}{}_i + \ldots)g_{jkl} = 0.$$

Les points représentent les permutations de (123) mais étant donné que $b^{(123)j}{}_i = b^{(123)j}{}_i = \ldots$, nous avons

$$b^{(123)j}{}_i\, g_{jkl} = 0.$$

Et par conséquent, l'hypothèse de non dégénérescence de g fait en sorte que $b^{(123)j}{}_i = 0$.

Plus généralement, tout les $b^{(\mu)}$ sont nuls pour $|\mu| \geq |\mu|_{max}$. Et par récurrence, tout les $b^{(\mu)}$ seront nuls pour $|\mu| \geq 2$. Le terme avec un seul indice échappe au raisonnement car il peut être compensé par le membre de gauche qui a d'office un terme dérivé.

Nous avons en fait seulement démontré que, dans le cas où le terme avec le plus de dérivées possédait plus de dérivées que le nombre de champ dans le terme d'interaction, ce terme est nul. L'argument de récurrence s'arrête à partir du moment où l'on dit que l'ordre maximum de dérivation est k. Mais à ce moment-là, l'argument pour continuer à descendre est encore plus simple : le terme où chacune des dérivées porte sur un champs différent doit s'annuler, et donc les $b^{(\mu)i}{}_j$ continuent à s'annuler jusqu'à $|\mu| = 2$.

CQFD.

Des raisonnements du même type sont effectués en détail sur un cas précis à la page 67.

Deux remarques

- D'abord, il est important de remarquer que cette conclusion est valable pour tout lagrangien ayant au moins un terme d'interaction de la forme de (2.2.1), quelle que soit la nature des champs ϕ^i. Quand nous considérons des champs complexes, il faudra bien comprendre que dans la formule (2.2.11), les sommations se font sur *tout* les champs du problèmes. C'est à dire que certains des ϕ^i seront en fait des $\overline{\phi}^i$. Nous devons donc regarder cette conclusion avec souplesse dans la notation.

– Ensuite, nous devons nous rendre compte que ce résultat, ainsi dérivé ne tient pas pour les interactions contenant des spineurs. En effet, nous avons fait commuter des champs ϕ^i, ce qui amène des signes moins lorsqu'on travaille avec des fermions. Un traitement complet d'un cas particulier avec spineur est fait au chapitre 7.

Un exemple où le théorème 4 n'est pas vrai

Nous avons par exemple le cas de la particule libre sans masse :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\psi_x^2, \tag{2.2.15}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} = \psi_{xx}. \tag{2.2.16}$$

Dans ce cas, nous avons

$$Q = b^{(3)}\ \psi_{xxx}$$

qui fonctionne comme symétrie. Par ailleurs, les $Q = b^{(n)}\ \psi_{x^n}$ avec n impair fonctionnent tous.

Notons toutefois que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}(\psi_x^2 + \psi^2), \\ Q &= a\psi + b\psi_x + c\psi_{xx} \end{aligned}$$

implique $c = 0$.

Chapitre 3

Un seul champ scalaire réel

Nous allons à présent nous concentrer sur le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu + m^2\phi^2\right) + \frac{\lambda}{k!}\phi^k, \qquad k \geq 3. \tag{3.0.1}$$

Remarquons d'emblée que ce lagrangien vérifie le théorème 4. Nous pouvons donc rechercher les symétries en lui appliquant la formule (2.2.11)

3.1 Poser les contraintes

3.1.1 Les termes quadratiques

Nous pouvons poser la condition (2.2.11) sur la partie quadratique et potentielle du lagrangien indépendamment car ces deux parties sont de degré différents en les champs alors que les candidats symétrie que nous considérons ne changent pas les degrés (voir discussion plus haut).

Nous commençons en posant les contraintes liées aux termes quadratiques du lagrangien (3.0.1) :

$$\mathcal{L}^2 = -\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu + m^2\phi^2\right). \tag{3.1.1}$$

Nous notons le d'Alembertien $\Box = \partial_\mu\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. Trois simples calculs préliminaires donnent :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}^2}{\delta\phi} = (-\partial)_{(\mu)}\frac{\partial\mathcal{L}^2}{\partial\phi_{(\mu)}} \quad &= \quad (\Box - m^2)\phi, && (3.1.2)\\
B\frac{\delta\mathcal{L}^2}{\delta\phi} = \partial_{(\lambda)}\left[b^\mu\phi_\mu + b\phi\right]\frac{\partial\mathcal{L}^2}{\partial\phi_{(\lambda)}} \quad &= \quad (\Box - m^2)(b\phi + b^\mu\phi_\mu), && (3.1.3)\\
-(-\partial)_{(\mu)}\left[b^{(\mu)}\frac{\delta\mathcal{L}^2}{\delta\phi}\right] \quad &= \quad -b(\Box - m^2)\phi + \partial_\mu(b^\mu(\Box - m^2)\phi), && (3.1.4)
\end{aligned}$$

de telle façon à ce que l'on puisse écrire la condition (2.2.11) :

$$(\Box - m^2)(b\phi + b^\rho \phi_\rho) + b(\Box - m^2)\phi - \partial_\rho \left[b^\rho(\Box - m^2)\phi \right] = 0. \tag{3.1.5}$$

C'est la condition d'invariance du lagrangien (3.0.1). Il faut noter que le dernier ∂_ρ porte à la fois sur b^ρ et sur $(\Box - m^2)\phi$. Il faut lui appliquer Leibnitz.

Afin d'obtenir des relations entre b et b^ρ, nous allons annuler (à une subtilité près, voir plus bas) les coefficients des différentes variables indépendantes, c'est à dire les coefficients des différents $\phi_{(\mu)}$. Pour ce faire, il faut porter les dérivations directement sur le ϕ. Le terme $\Box(b\phi)$ par exemple doit être explicité par la formule[1]

$$\Box(XY) = (\Box X)Y + (\Box Y)X + 2\partial^\nu X \partial_\nu Y; \tag{3.1.6}$$

$$\begin{aligned}(\Box b)\phi &+ b\Box\phi + 2\partial^\rho b\phi_\rho - m^2 b\phi + (\Box b^\mu)\phi_\mu + b^\mu\Box\phi_\mu + 2\partial^\rho b^\mu \phi_{\rho\mu} \\ &- m^2 b^\mu \phi_\mu + b\Box\phi - bm^2\phi - b^\mu\Box\phi_\mu + b^\mu m^2\phi_\mu - \partial_\rho b^\rho \Box\phi + \partial_\rho b^\rho m^2\phi = 0.\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Beaucoup de choses se simplifient et se combinent pour donner

$$\begin{aligned}(\Box b)\phi + 2b\Box\phi + 2\partial^\mu b\phi_\mu &- 2m^2 b\phi + (\Box b^\mu)\phi_\mu \\ &- \partial_\rho b^\rho \Box\phi + \partial_\rho b^\rho m^2\phi + 2\partial^\rho b^\mu \phi_{\mu\rho} = 0.\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Notons qu'il n'y a pas de termes dans lesquels ϕ serait dérivé trois fois car les deux termes $\Box\phi_\mu$ se simplifient. Cela ne sera plus le cas lorsque nous considérons plusieurs champs différents en interaction.

Termes en ϕ

$$\Box b - 2m^2 b + m^2 \partial_\mu b^\mu = 0. \tag{3.1.9}$$

Termes en ϕ_ν

$$2\partial^\nu b + \Box b^\nu = 0. \tag{3.1.10}$$

Termes en $\phi_{\nu\mu}$

Avant d'annuler simplement le coefficient de $\phi_{\nu\mu}$ dans (3.1.8), nous devons nous rappeler que $\phi_{\nu\mu}$ est symétrique en $(\mu\nu)$. De façon générique, le terme en $\phi_{\nu\mu}$ peut s'écrire

$$c^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} = (s^{\mu\nu} + a^{\mu\nu})\phi_{\mu\nu} = s^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}$$

où s et a sont les parties respectivement symétriques et antisymétrique de c. Rappelons-nous maintenant que $\phi_{\mu\nu}$ est une variable du problème ; c'est à dire

[1] pas dure à démonter en utilisant deux fois Leibnitz pour calculer $\eta^{ab}\partial_a\partial_b(XY)$.

que la condition d'invariance doit être vérifiée quelle que soit la valeur de $\phi_{\mu\nu}$. Prenons-la nulle pour tout μ et ν sauf $\mu = a$ et $\nu = b$, pour un certain choix de a et b fixé. Nous avons alors

$$s^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow s^{ab}\phi_{ab} + s^{ba}\phi_{ba} = 0 \Rightarrow s^{ab} = 0,$$

compte tenu de la symétrie de $s^{\mu\nu}$ et $\phi_{\mu\nu}$. En résumé, la condition $c^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} = 0$ n'implique que l'annulation de la partie symétrique de c, mais ne donne aucune information sur sa partie antisymétrique. Nous ne pouvons donc pas dire plus que

$$2b\eta^{\mu\nu} - \partial_\rho b^\rho \eta^{\mu\nu} + 2\frac{1}{2}(\partial^\mu b^\nu + \partial^\nu b^\mu) = 0. \tag{3.1.11}$$

Écrivons aussi la contraction de cette équation avec $\eta_{\mu\nu}$:

$$2bd - \partial_\rho b^\rho d + 2\partial_\rho b^\rho = 0 \tag{3.1.12}$$

où d est la dimension de l'espace sur lequel on travaille : $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\mu} = \delta^\mu_\mu = Tr(\mathbb{1}) = d$.

3.1.2 Le terme d'interaction

Rappelons que, dans les calculs (3.1.2)–(3.1.4), nous avons utilisé l'hypothèse $\lambda \neq 0$ de façon cruciale au moment où nous avons dit que $b^{(\mu)} = 0$ pour $|\mu| \geq 2$.

Nous avons à nouveau trois calculs à effectuer afin d'écrire notre condition générale (2.1.7) :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}^k}{\delta \phi} &= \frac{\lambda}{(k-1)!}\phi^{k-1}, && (3.1.13)\\
B\frac{\delta \mathcal{L}^k}{\delta \phi} &= (b\phi + b^\mu \phi_\mu)\frac{\lambda(k-1)}{(k-1)!}\phi^{k-2}, && (3.1.14)\\
-(-\partial)_{(\mu)}\left[b^{(\mu)}\frac{\lambda\phi^{k-1}}{(k-1)!}\right] &= -b\frac{\lambda\phi^{k-1}}{(k-1)!} + \partial_\mu b^\mu \frac{\lambda\phi^{k-1}}{(k-1)!} + \\
&\quad + b^\mu \frac{\lambda(k-1)}{(k-1)!}\phi^{k-2}\phi_\mu. && (3.1.15)
\end{aligned}$$

La condition (2.2.11) implique que

$$b = \frac{1}{k}\partial_\mu b^\mu. \tag{3.1.16}$$

3.2 Résolution des contraintes

Le groupe conforme

Nous pouvons d'abord tirer b en fonction de $\partial_\rho b^\rho$ à partir de (3.1.12) :

$$b = \left(\frac{d-2}{2d}\right)\partial_\mu b^\mu. \tag{3.2.1}$$

Ensuite en remplaçant cette expression de b dans la condition (3.1.11), nous trouvons que b^μ doit satisfaire l'équation de Killing conforme pour $\eta_{\mu\nu}$:

$$\partial_\nu b_\mu + \partial_\mu b_\nu = \frac{2}{d}\partial_\lambda b^\lambda \eta_{\mu\nu}, \tag{3.2.2}$$

dont la solution est[2] :

$$b^\mu = \alpha^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \sigma x^\mu + \gamma^\mu x^2 - 2x^\mu \gamma \cdot x, \tag{3.2.3}$$

où $\omega^\mu{}_\nu, \alpha^\mu, \sigma, \gamma^\mu$ sont arbitraires à ceci près que $\omega_{\nu\mu}$ doit être antisymétrique, ce qui pour effet immédiat l'annulation de la trace de $\omega^{\mu}{}_{\nu}$:

$$\omega^\mu{}_\mu = \eta^{\mu\nu}\omega_{\nu\mu} = 0. \tag{3.2.4}$$

Nous pouvons d'ores et déjà calculer la quantité suivante qui jouera un rôle dans la suite

$$\begin{aligned}\partial_\lambda b^\lambda &= \omega^{\lambda}{}_{\lambda} + \sigma + 2\gamma^\lambda x_\lambda - 2\gamma \cdot x - 2x^\lambda \gamma^\nu \eta_{\nu\lambda} \\ &= \sigma - 2x \cdot \gamma\,;\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

nous avons utilisé (3.2.4).

Une vérification

Nous pouvons vérifier que la condition (3.1.10) est automatiquement satisfaite. Pour ce faire, nous calculons $\Box b^\nu$ à partir de (3.2.3). Les trois premiers termes tombent, ce qui nous laisse le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\Box b^\mu &= \eta^{ab}\partial_a\partial_b b^\mu \\ &= \eta^{ab}\partial_a\left[\gamma^\mu\partial_b x^2 - 2\partial_b x^\mu \gamma\cdot x - 2x^\mu\partial_b(\gamma_\rho\delta^\rho_b)\right] \\ &= \eta^{ab}\left[2\gamma^\mu\delta_{ab} - 2\delta^\mu_b\gamma_a - 2\delta^\mu_a\gamma_b\right] \\ &= 2\gamma^\mu d - 2\delta^\mu_b\gamma^b - 2\delta^\mu_a\gamma^a \\ &= (2d-4)\gamma^\mu.\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

La condition (3.1.10) s'écrit alors

$$2\partial^\nu b + (2d-4)\gamma^\nu = 0, \tag{3.2.7}$$

avec

$$b = \left(\frac{d-2}{2d}\right)\partial_\rho b^\rho, \tag{3.2.8}$$

$$\partial^\nu b = \left(\frac{d-2}{2d}\right)\partial^\nu\partial_\rho b^\rho, \tag{3.2.9}$$

$$\partial_\rho b^\rho = \sigma - 2d\gamma \cdot x. \tag{3.2.10}$$

[2] Une dérivation de cette solution est donnée dans le quatrième chapitre de [6].

L'équation (3.2.7) devient (σ est une constante) :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{d-2}{2d}\right)\partial^\nu(\sigma - 2d\gamma\cdot x) + (2d-4)\gamma^\nu \\ &= -2d+4+2d-4 \equiv 0. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

3.2.1 Deux façons d'éliminer les dilatations et spéciales conformes

Remarquons que les dilatations et les spéciales conformes disparaissent dès que nous avons $\partial_\mu b^\mu = 0$. En effet, en calculant cette quantité à partir de l'expression (3.2.3), nous trouvons :

$$\partial_\mu b^\mu = 0 = \omega^\mu{}_\mu + \sigma + 2\gamma\cdot x = 0, \qquad \forall x. \tag{3.2.12}$$

Étant donné que $\omega^\mu{}_\mu = 0$, cette relation ne donne aucune contrainte ni sur ω ni sur α, tandis que sa vérification pour tout x implique l'annulation de σ et γ, et par conséquent l'exclusion des dilatations et des spéciales conformes.

Il se fait que nous tombons sur la condition $\partial_\mu b^\mu = 0$ dans deux cas que nous allons discuter maintenant.

Le terme de masse

La seule contrainte liée au terme de masse est (3.1.9) qui contient un $\Box b$. Pour remarquer que $\Box b$ est nul, il suffit de le calculer en partant de (3.2.1) et d'utiliser (3.2.6) :

$$\Box b = cst\cdot\partial_\rho\Box b^\rho = 0. \tag{3.2.13}$$

Ceci étant, (3.1.9) devient

$$-2m^2 b + m^2\partial_\mu b^\mu = 0,$$

qui –compte tenu de (3.2.1)– n'est autre que

$$\frac{2}{d}m^2\partial_\mu b^\mu = 0. \tag{3.2.14}$$

Dès que $m \neq 0$, les dilatations et les spéciales conformes sont donc exclues.

La dimension et l'ordre de l'interaction

Nous avons obtenus deux contraintes différentes sur b :

$$b = \left(\frac{d-2}{2d}\right)\partial_\rho b^\rho$$

qui venait des contraintes du $\mathcal{L}^2$ et

$$b = \frac{1}{k}\partial_\mu b^\mu$$

qui provenait du $\mathcal{L}^k$.

Égaliser les deux nous donne tout de suite le choix suivant :

- Soit d et k sont des solutions entières de

$$k = \frac{2d}{d-2}, \tag{3.2.15}$$

- Soit $k \neq \frac{2d}{d-2}$ qui oblige

$$\partial_\rho b^\rho = 0 \tag{3.2.16}$$

  qui par le raisonnement déjà fait conduit à rejeter le groupe conforme comme candidat symétrie du lagrangien.

Notons que l'équation $k(d) = \frac{2d}{d-2}$ n'a que peu de solutions entières : pour $d \to \infty$, $k(d) \to 2$, ce qui signifie qu'à partir du moment où $k(d)$ sera décroissante et plus petite que 3, il n'y aura plus de solutions $k(d) \in \mathbb{N}$.

Étant donné que nous avons utilisé de façon cruciale le fait que $k \neq 0$, les seules possibilités sont

$$d = 3 \quad et \quad k = 6, \tag{3.2.17}$$
$$d = 4 \quad et \quad k = 4, \tag{3.2.18}$$
$$d = 6 \quad et \quad k = 3. \tag{3.2.19}$$

3.2.2 Conclusions

Lorsque la particule n'a pas de masse et lorsqu'une des conditions (3.2.17)–(3.2.19) est vérifiée, tout le groupe conforme est symétrie du lagrangien (3.0.1). C'est par exemple le cas de la théorie en $\lambda\phi^4$ sans masse à quatre dimensions.

Dans les autres cas, les seules symétries sont celles du groupe de Poincaré.

Notons pour terminer qu'il est possible d'avoir des théories qui comportent plusieurs termes d'interactions de la forme de (2.2.1) avec différents k. Dans ce cas, nous obtenons bien entendu deux conditions (3.2.15) incompatibles, ce qui aura encore pour effet d'exclure les dilatations et les spéciales conformes.

Chapitre 4

Plusieurs champs scalaires réels en interaction

Le lagrangien que nous allons étudier à présent est le suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\delta_{ij}\phi^i_\mu\phi^j_\nu + \frac{1}{2}m_{ij}\phi^i\phi^j + \frac{1}{k!}g_{i_1\ldots i_k}\phi^{i_1}\ldots\phi^{i_k}, \qquad k \geq 3. \tag{4.0.1}$$

Ce lagrangien vérifie le théorème 4 ; nous pouvons donc reprendre l'équation (2.2.11) comme point de départ.

4.1 Poser les contraintes

La condition d'invariance pour la partie quadratique

Nous obtenons par calcul direct que

$$\frac{\delta\mathcal{L}^2}{\delta\phi^i} = (m_{ij} - \delta_{ij}\Box)\phi^j \tag{4.1.1}$$

où $\mathcal{L}^2$ dénote comme toujours la partie quadratique du lagrangien proposé.

À partir de là, $B\frac{\delta\mathcal{L}^2}{\delta\phi^k}$ se laisse calculer par application de la définition (2.2.10) :

$$\begin{aligned} B\frac{\delta\mathcal{L}^2}{\delta\phi^i} &= \left[b^{\,k}{}_{l}\,\phi^l + b^{\mu\,k}{}_{l}\,\phi^l_\mu\right]\frac{\partial}{\partial\phi^k}m_{ij}\phi^j - \partial_{\alpha\beta}\left[b^{\,k}{}_{l}\,\phi^l + b^{\mu\,k}{}_{l}\,\phi^l_\mu\right]\frac{\partial}{\partial\phi^k_{\alpha\beta}}\left(\delta_{ij}\eta^{\rho\sigma}\phi^j_{\rho\sigma}\right) \\ &= m_{ij}\left[b^{\,j}{}_{l}\,\phi^l + b^{\mu\,j}{}_{l}\,\phi^l_\mu\right] - \delta_{ij}\Box\left[b^{\,j}{}_{l}\,\phi^l + b^{\mu\,j}{}_{l}\,\phi^l_\mu\right], \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

et pour finir, l'application de (3.1.6) donne

$$\begin{aligned} B\frac{\delta\mathcal{L}^2}{\delta\phi^i} &= b^{\,j}{}_{l}\,m_{ij}\phi^l + b^{\mu\,j}{}_{l}\,m_{ij}\phi^l_\mu \\ &\quad -(\Box b_{il})\phi^l - (\Box\phi^l)b_{il} - 2\partial^\nu b_{il}\phi^l_\nu \\ &\quad -(\Box b^\mu{}_{il})\phi^l_\mu + (\Box\phi^l_\mu)b^\mu{}_{il} - 2\partial^\nu b^\mu{}_{il}\,\phi^l_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

D'autre part, le second membre de (2.2.11) donne le résultat suivant (en utilisant Leibnitz pour distribuer le ∂_λ) :

$$\begin{aligned} -\left[b^{\,j}{}_i \frac{\delta \mathcal{L}^2}{\delta \phi^j}\right] + \partial_\lambda \left[b^{\lambda j}{}_i \frac{\delta \mathcal{L}^2}{\delta \phi^j}\right] = & - \; b^{\,j}{}_i \, m_{jl}\phi^l - b_{li}\Box\phi^l + \partial_\lambda b^{\lambda j}{}_i \, m_{jl}\phi^l + \partial_\lambda b^{\lambda}{}_{li}\,\Box\phi^l \\ & + \; b^{\lambda j}{}_i \, m_{jl}\phi^l_\lambda + b^{\lambda}{}_{lk}\,\Box\partial_\lambda\phi^l \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

qu'il faut égaliser à (4.1.3).

Nous prenons la convention suivante : les indices qui numérotent les champs (le i de ϕ^i par exemple) vont être montés et descendus avec le delta de Kronecker. C'est à dire que, par définition,

$$b^{(\mu)}{}_{ij} \stackrel{def}{=} \delta_{ik}\, b^{(\mu)k}{}_j \,.$$

Ceci étant, nous pouvons égaler séparément les termes contenant les mêmes variables indépendantes.

Terme en $\Box\phi^j_\lambda$

$$b^{\lambda}{}_{ij} = b^{\lambda}{}_{ji} \tag{4.1.5}$$

C'est à dire que $b^{\lambda}{}_{ij}$ est symétrique en (ij), ce qui est un résultat très important pour la suite.

Termes en $\phi^k_{\mu\nu}$

Cette fois encore, il faut faire attention au fait que seule une condition sur la partie symétrique du coefficient de $\phi^k_{\mu\nu}$ peut être obtenue. Finalement, la contrainte est :

$$\eta^{\mu\nu} b_{ik} + 2\partial^{(\nu} b^{\mu)}{}_{ik} = -b_{ki}\,\eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda b^{\lambda}{}_{ki}\,\eta^{\mu\nu} \tag{4.1.6}$$

ou, en explicitant $\partial^{(\nu} b^{\mu)}$,

$$\eta^{\mu\nu} b_{ik} + \partial^\mu b^{\nu}{}_{ik} + \partial^\nu b^{\mu}{}_{ik} = -b_{ki}\eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda b^{\lambda}{}_{ki}\,\eta^{\mu\nu}, \tag{4.1.7}$$

Termes en ϕ^k_μ

$$b^{\mu j}{}_k \, m_{ij} - 2\partial^\mu b_{ik} - \Box b^{\mu}{}_{ik} = b^{\mu j}{}_i \, m_{jk}, \tag{4.1.8}$$

Termes en ϕ^k

$$b^{\,j}{}_k \, m_{ij} - \Box b_{ik} = -b^{\,j}{}_i \, m_{jk} + \partial_\lambda b^{\lambda j}{}_i \, m_{jk}. \tag{4.1.9}$$

La condition d'invariance pour la partie interaction

Nous noterons $V(\phi)$ la partie d'interaction du lagrangien (4.0.1). Cette partie ne contenant pas de dérivées des champs, nous avons :

$$\frac{\delta V}{\delta \phi^i} = \frac{\partial V}{\partial \phi^i} = \frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial \phi^i}\left(g_{i_1 i_2 \ldots i_k}\phi^{i_1}\phi^{i_2}\ldots\phi^{i_k}\right) \tag{4.1.10}$$

$$= \frac{1}{k!} g_{i_1 \ldots i_k}\left(\delta^{i_1}_i \phi^{i_2}\ldots\phi^{i_k} + \ldots + \phi^{i_1}\ldots\phi^{i_{k-1}}\delta^{i_k}_i\right) \tag{4.1.11}$$

où l'on peut renommer des indices et utiliser la symétrie de g par rapport à tout ses indices pour montrer que nous avons en fait k fois le même terme. Le résultat est que

$$\frac{\delta V}{\delta\phi^i} = \frac{1}{(k-1)!} g_{i\,i_2\ldots i_k}\phi^{i_2}\ldots\phi^{i_k}. \tag{4.1.12}$$

Nous pouvons à présent appliquer la formule (2.2.11) pour trouver la condition d'invariance de V.

$$\begin{aligned}(k-1)g_{i\,l\,i_3\ldots i_k}\left[b^l{}_j\,\phi^j + b^{\mu\,l}{}_j\,\phi^j_\mu\right]\phi^{i_3}\ldots\phi^{i_k} \stackrel{!}{=} &\; - \;\left[b^l{}_i\,g_{l\,i_2\ldots i_k}\phi^{i_2}\ldots\phi^{i_k}\right] \\ &\; + \;\partial_\lambda b^{\lambda\,l}{}_i\,g_{li_2\ldots i_k}\phi^{i_2}\phi^{i_k} \\ &\; + \;b^{\lambda\,l}{}_i\,g_{l\,i_2\ldots i_k}(k-1)\phi^{i_2}_\lambda\phi^{i_3}\ldots\phi^{i_k}\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

où nous avons renommé les indices sommés $i_2 \to j$ pour avoir les mêmes variables dans tout les termes.

Nous avons deux types de termes dans (4.1.13) : des termes avec un champ dérivé[1] et des termes sans champ dérivé. Ces deux types de termes doivent séparément vérifier la condition car les ϕ^i sont des variables indépendantes des ϕ^i_μ.

Termes avec un champ dérivé

$$g_{i\,l\,i_3\ldots i_k}b^{\lambda\,l}{}_j\,\phi^j_\lambda\phi^{i_3}\ldots\phi^{i_k} = b^{\lambda\,l}{}_i\,g_{l\,j\,i_3\ldots i_k}\phi^j_\lambda\phi^{i_3}\ldots\phi^{i_k}, \tag{4.1.14}$$

ce qui donne la condition :

$$g_{i\,l}b^{\lambda\,l}{}_j = g_{j\,l}b^{\lambda\,l}{}_i \tag{4.1.15}$$

où nous désignons par g_{kl} un quelconque des $g_{i_1\ldots i_k}$ pour lequel $i_1 = k$ et $i_2 = l$.

Termes sans champ dérivé

$$\begin{aligned}(k-1)g_{i\,l\,i_3\ldots i_k}b^l{}_j\,\phi^j\phi^{i_3}\ldots\phi^{i_k} = &\; - \;\left[b^l{}_i\,g_{l\,i_2\ldots i_k}\phi^{i_2}\ldots\phi^{i_k}\right] \\ &\; + \;\partial_\lambda b^{\lambda\,l}{}_i\,g_{l\,i_2\ldots i_k}\phi^{i_2}\ldots\phi^{i_k}.\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

En changeant des noms d'indices de sommation pour avoir les mêmes variables partout,

$$\partial_\lambda b^{\lambda\,l}{}_i\,g_{lj} = (k-1)g_{il}b^l{}_j + b^l{}_i\,g_{lj}. \tag{4.1.17}$$

[1] Il serait plus exact de parler des « coordonnées locales ϕ^i_μ » que des champs dérivés.

4.2 Résolution des contraintes

4.2.1 Le groupe conforme

En contractant (4.1.6) avec $\eta_{\mu\nu}$, nous obtenons :

$$d(b_{ik} + b_{ki}) + 2\partial_\mu b^\mu{}_{ik} = d\,\partial_\lambda b^\lambda{}_{ki}\,. \tag{4.2.1}$$

Cette équation peut être réécrite en séparant b en ses parties symétrique et antisymétrique :

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} - b_{ji}), \tag{4.2.2}$$
$$s_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}). \tag{4.2.3}$$

En introduisant ces notations et en utilisant (4.1.5), nous trouvons :

$$s_{ik} = \left(\frac{d-2}{2d}\right)\partial_\lambda b^\lambda{}_{ik}\,, \tag{4.2.4}$$

qui est une équation tout à fait similaire à (3.2.1) de la page 37.

Nous pouvons donc, comme précédemment, trouver le groupe conforme comme candidat symétrie du lagrangien de la manière suivante : d'abord nous réécrivons (4.1.6) en utilisant la notation s_{ij} :

$$2\eta^{\mu\nu}s_{ik} = \partial_\lambda b^\lambda{}_{ik}\,\eta^{\mu\nu} - \partial^\nu b^\mu{}_{ik} - \partial^\mu b^\nu{}_{ik} \tag{4.2.5}$$

dans laquelle nous remettons (4.2.4). Une fois les termes correctement mis, nous trouvons sans surprise que

$$\frac{2}{d}\partial_\lambda b^\lambda{}_{ik}\,\eta^{\mu\nu} = \partial^\nu b^\mu{}_{ik} + \partial^\mu b^\nu{}_{ik} \tag{4.2.6}$$

dont la solutions s'écrit comme (3.2.3) mais avec deux indices en plus :

$$b^\mu{}_{ik} = \alpha_{ik}{}^\mu + \omega_{ik}{}^\mu{}_\nu x^\nu + \sigma_{ik}x^\mu + \gamma_{ik}{}^\mu x^2 - 2x^\mu\gamma_{ik}\cdot x. \tag{4.2.7}$$

Il est utile de noter que $\omega_{ij}{}^\mu{}_\nu$ est symétrique en (ij) car $b^\mu{}_{ij}$ l'est. Cela n'empêche pas $\omega_{ij\,\mu\nu}$ d'être antisymétrique en $(\mu\nu)$. Il faut juste faire attention de quels indices on parle lorsqu'on dit « oméga est symétrique » ou « oméga est antisymétrique ».

La forme des $b^{\mu i}{}_j$ est donc fixée à partir des contraintes (4.1.5) et (4.1.6). Nous allons maintenant voir que les contraintes dues aux interactions fixent aussi les b_{ij} par rapport aux $b^{\mu i}{}_j$.

4.2.2 Analyse des contraintes d'interactions

Rappelons les contraintes trouvées :

$$\begin{aligned} g_{i\,l} b^{\lambda\, l}{}_{j} &= g_{j\,l} b^{\lambda\, l}{}_{i}\,, & (4.2.8)\\ \partial_\lambda b^{\lambda\, l}{}_{i}\, g_{l\, j} &= (k-1) g_{i\,l} b^{l}{}_{j} + b^{l}{}_{i}\, g_{l\,j}. & (4.2.9) \end{aligned}$$

La condition (4.2.8) montre que $g_{i\,l} b^{\lambda\, l}{}_{j}$ est symétrique en (ij). Ce qui fait en sorte que le premier membre de (4.2.9) est aussi symétrique en (ij). Ceci nous suggère de décomposer cette équation en ses parties symétrique et antisymétrique.

La partie antisymétrique

$$0 = (k-2) g_{il} b^{l}{}_{j} - (k-2) g_{l\,j} b^{l}{}_{i}\,,$$

qui donne :

$$g_{i\,l} b^{l}{}_{j} - g_{jl} b^{l}{}_{i} = 0. \tag{4.2.10}$$

La partie symétrique

$$\partial_\lambda b^{\lambda\, l}{}_{i}\, g_{lj} = \frac{k}{2}\left(g_{il} b^{l}{}_{j} + g_{lj} b^{l}{}_{i}\right).$$

En utilisant (4.2.10) dans le second membre de cette équation, nous trouvons :

$$\partial_\lambda b^{\lambda\, l}{}_{i}\, g_{lj} = k\, g_{jl} b^{l}{}_{i}\,. \tag{4.2.11}$$

qui, en tenant compte de l'hypothèse de non-dégénérescence de g, amène à la condition (tout à fait comparable à (3.1.16)) :

$$\partial_\lambda b^{\lambda\, l}{}_{i} = k b^{l}{}_{i}\,. \tag{4.2.12}$$

En effet, compte tenu de la symétrie de $b^{\lambda}{}_{ij}$, (4.2.11) s'écrit

$$(\partial_\lambda b^{\lambda\, l}{}_{i} - k b^{\,l}{}_{j}) g_{lj} = 0,$$

ce qui entraîne l'annulation du coefficient de g_{lj}, et prouve donc l'équation (4.2.12).

Cette équation (4.2.12) a la symétrie de b_{ij} pour effet immédiat :

$$b_{ij} = b_{ji}.$$

4.2.3 Ce que deviennent les deux dernières contraintes

Jusqu'à présent, nous avons trouvé des formes assez précises pour les $b^{\mu\, i}{}_{j}$ et les b_{ij} sans faire appel aux contraintes (4.1.8) et (4.1.9). Nous allons à présent y mettre les expressions trouvées et voir si de nouvelles contraintes apparaissent.

À partir de (4.2.7), nous dérivons les relations suivantes :

$$\partial_\mu b^\mu{}_{ik} = \sigma_{ik} - 2d\gamma_{ik} \cdot x, \tag{4.2.13}$$

ainsi que

$$\Box b^\mu{}_{ik} = (2d-4)\gamma^\mu{}_{ik}. \tag{4.2.14}$$

Grâce à (4.2.12), nous trouvons une forme explicite pour les b_{ij} :

$$b_{ij} = \frac{1}{k}(\sigma_{ik} - 2d\gamma_{ik} \cdot x). \tag{4.2.15}$$

Ensuite, nous devons regarder ce que ces expressions donnent quand elles sont remises dans les contraintes non encore exploitées (4.1.8) et (4.1.9).

La partie symétrique de (4.1.8) est elle aussi indépendante du terme de masse. Elle donne :

$$2\partial^\mu b_{ik} + \Box b^\mu{}_{ik} = 0. \tag{4.2.16}$$

En y remettant (4.2.15) et (4.2.14), nous trouvons que

$$\left(\frac{-4d}{k} + 2d - 4\right)\gamma_{ik} = 0.$$

Nous avons donc soit $\gamma_{ik} = 0$, soit $d = \frac{2k}{k-2}$ (de façon équivalente, $k = \frac{2d}{d-2}$). Comme nous l'avons vu plus haut, le cas $k = \frac{2d}{d-2}$ est exceptionnel. Dans la suite, appellerons « cas exceptionnel », les cas qui vérifient cette relation entre k et d ; nous supposeront toujours, sauf mention explicite du contraire, que nous ne sommes pas dans un cas exceptionnel.

Indépendamment du terme de masse, nous avons déjà fixé $\gamma_{ij} = 0$ et donc $\Box b^\mu{}_{ij} = 0$ par l'équation (4.2.14).

Les transformations spéciales conformes ne sont donc des candidats symétries du lagrangien que dans les cas exceptionnels.

En comparant (4.2.4) et la partie symétrique de (4.2.12) en ayant baissé les indices, nous trouvons encore l'identité suivante :

$$\left(\frac{d-2}{2d}\right)\partial_\lambda b^\lambda{}_{ik} = \frac{1}{k}\partial_\lambda b^\lambda{}_{ik},$$

par conséquent, nous avons soit $d = \frac{2k}{k-2}$, soit $\partial_\lambda b^\lambda{}_{ik} = 0$. Étant donné que nous avons pris le parti d'étudier les cas non exceptionnels, nous nous retrouvons avec la seconde possibilité : $\partial_\lambda b^\lambda{}_{ik} = 0$. Mais comme nous avons déjà trouvé que $\gamma_{ij} = 0$, cette nouvelle condition mise dans (4.2.13) donne

$$\sigma = \gamma = 0,$$

toujours indépendamment de la présence d'un terme de masse.

$$\text{Cas non-exceptionnel } \Rightarrow \sigma = \gamma = 0 \text{ indépendamment des termes de masse éventuels.} \tag{4.2.17}$$

4.2.4 Analyse des termes de masse

D'emblée, nous nous plaçons dans un cas non exceptionnel. Nous avons donc

$$\partial_\lambda b^{\lambda}{}_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad b_{ij} = 0.$$

D'autre part, nous faisons l'hypothèse que la matrice de masse est de la forme $m_{ij} = \delta_{ij} m_j$, ce qui permet de descendre des indices.

La partie antisymétrique de (4.1.9) donne $0 = 0$, tandis que sa partie symétrique donne

$$b_{ij}(m_i + m_j) = 0. \tag{4.2.18}$$

Enfin, la partie antisymétrique de (4.1.8) donne la contrainte

$$b^{\mu}{}_{ij}\,(m_i - m_j) = 0. \tag{4.2.19}$$

La partie symétrique de (4.1.8) ayant déjà été analysée plus haut - équation (4.2.16).

Étant donné que nous savons déjà que $b_{ij} = 0$, (4.2.18) ne donne aucune information supplémentaire. L'équation (4.2.19) par conte a pour effet d'éliminer toute symétrie liée à une symétrie interne couplant des champs de masses différentes. C'est à dire que $b^{\mu}{}_{ij}$ sera nul dès que $m_i \neq m_j$. Le groupe de Poincaré peut donc être associé qu'aux paramètres $b^{\mu}{}_{ii}$.

Remarque

Si nous considérons un cas exceptionnel, la condition (4.2.18) annule quand même les b_{ij}, et donc les $\partial_\lambda b^{\lambda}{}_{ij}$. Mais alors, (4.2.15) par exemple implique l'annulation de σ et γ (une fonction linéaire en x identiquement nulle). De ce fait-là, *nous n'avons de dilatations et de spéciales conformes comme symétries que dans les cas exceptionnels sans termes de masses.*

4.3 Note à propos des symétries internes

En prenant les contraintes (4.1.5)-(4.1.9) dans lesquelles nous posons $b^{\mu i}{}_{j} = 0$, nous trouvons respectivement

$$\begin{aligned} 0 &= 0, && (4.3.1)\\ \eta^{\mu\nu} b_{ij} &= -b_{ji}\eta^{\mu\nu}, && (4.3.2)\\ -2\partial^\mu b_{ij} &= 0, && (4.3.3)\\ b^{\,l}{}_{j}\, m_{il} - \Box b_{ij} &= -b^{\,l}{}_{i}\, m_{jl}. && (4.3.4) \end{aligned}$$

Nous remettons l'hypothèse $m_{ij} = \delta_{ij} m_j$ dans la dernière équation. La deuxième équation impose l'antisymétrie de b_{ij} :

$$b_{ij} = -b_{ji}, \tag{4.3.5}$$

tandis que la troisième, contractée avec ∂_μ annule le d'alembertien de b_{ij}, faisant en sorte que la dernière équation devienne

$$b_{ij}\, m_i = -b_{ji}\, m_j. \tag{4.3.6}$$

Alors, l'antisymétrie de b_{ij} implique que les symétries internes du lagrangien (4.0.1) ne peuvent coupler que des particules de même masses, ce qui va dans le sens du théorème de Coleman et Mandula étant donné que ces derniers démontrent que les symétries internes ne modifient pas l'impulsion. A fortiori, les symétries internes ne peuvent pas modifier la masse des particules car $p^2 = m^2$.

Chapitre 5

Plusieurs champs scalaires complexes en interaction

Lorsque nous considérons des champs complexes, les variables indépendantes sont les champs ϕ^a et leurs complexes-conjugués $\overline{\phi}^a$. Pour simplifier les notations, nous allons considérer définir les champs ξ^i qui parcourent à la fois les ϕ^i et les $\overline{\phi}^i$. Schématiquement, nous avons

$$\xi = \begin{pmatrix} \phi \\ \overline{\phi} \end{pmatrix}. \tag{5.0.1}$$

Par exemple,

$$c_i \xi^i = c_a \phi^a + d_a \overline{\phi}^a$$

où l'indice a parcours deux fois moins de valeurs que i.

Nous introduisons aussi les indices « barres » qui sont définis ainsi :

$$\xi^{\bar{i}} = \overline{\xi}^i,$$

avec comme corollaire immédiat que

$$\overline{\xi}^{\bar{i}} = \xi^i.$$

Il est important de remarquer que la sommation sur i doit être faite dans les expressions de la forme $a^i b_{\bar{i}}$. Par exemple,

$$\delta_{\bar{i}k} \xi^i = \delta_{ik} \xi^{\bar{i}}$$

est un changement de nom $i \to \bar{i}$ de l'indice de sommation tout à fait régulier.

5.1 Recherche du lagrangien

En ce qui concerne les termes quadratiques, le cas complexe ne pose aucun problème particulier par rapport au cas réel. Nous pouvons toujours l'écrire sous la forme

$$\mathcal{L}^k = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \delta_{kl} \xi^k_\mu \overline{\xi}^l_\nu + \frac{1}{2} m_{kl} \xi^k \overline{\xi}^l. \tag{5.1.1}$$

La matrice des m_{kl} sera considéré comme diagonale : $m_{kl} = m_k \delta_{kl}$ avec la l'hypothèse que $m_i = m_{\bar{i}}$. Mais nous n'allons, par prudence, pas tout de suite introduire cette condition dans nos expressions car elle prête à confusion dans la position des indices. La matrice m a alors les propriétés utiles suivantes :

$$m_{\bar{i}\bar{j}} = m_{\bar{i}} \delta_{ij} = m_{ij}, \tag{5.1.2}$$
$$m_{ij} = m_i \delta_{ij} = m_j \delta_{ij} = m_{ji}. \tag{5.1.3}$$

Étant donné la définition de ξ, la sommation sur k et l fait venir deux fois chaque terme. En effet, fixons i et j, et voyons combien de fois le terme $\delta_{ij}\xi^i\overline{\xi}^j$ (sans sommations) arrive dans $\delta_{kl}\xi^k\overline{\xi}^l$ (avec sommations). Il arrive une première fois dans le terme $k = i$, $l = j$, et une seconde fois dans le terme $k = \bar{j}$, $l = \bar{i}$ car nous avons bien entendu $\delta_{\bar{j}\bar{i}} = \xi^{\bar{j}}\overline{\xi}^{\bar{i}} = \delta_{ij}\overline{\xi}^j\xi^i$. Les propriétés de m font en sorte qu'il en aille de même pour la sommation $m_{kl}\xi^k\overline{\xi}^l$.

C'est pour cela que nous avons placé un coefficient un demi devant les termes de $\mathcal{L}^k$.

Le terme d'interaction doit être choisit de manière plus prudente car le lagrangien doit être réel. Pour commencer, nous allons écrire une généralisation directe du cas réel, en ajoutant seulement un terme complexe-conjugué pour respecter la condition de réalité :

$$V(\xi) = g_{i_1 \ldots i_k}\xi^{i_1} \ldots \xi^{l_k} + g^*_{i_1 \ldots i_k}\overline{\xi}^{i_1} \ldots \overline{\xi}^{l_k}. \tag{5.1.4}$$

Si dans le deuxième terme, nous changeons tout les noms des indices sommés $i_l \to \bar{i}_l$, nous trouvons que nous pouvons toujours choisir

$$g_{i_1 \ldots i_k} = g^*_{\bar{i}_1 \ldots \bar{i}_k}. \tag{5.1.5}$$

Ainsi, le potentiel peut finalement être écrit sous la forme

$$V(\xi) = \frac{1}{k!}\, g_{i_1 \ldots i_k}\xi^{i_1} \ldots \xi^{i_k}, \qquad g_{i_1 \ldots i_k} = g^*_{\bar{i}_1 \ldots \bar{i}_k}. \tag{5.1.6}$$

Le lagrangien que nous étudions dans ce chapitre est donc le suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\delta_{kl}\xi^k_\mu\overline{\xi}^l_\nu + \frac{1}{2}m_{kl}\xi^k\overline{\xi}^l + \frac{1}{k!}\, g_{i_1 \ldots i_k}\xi^{i_1} \ldots \xi^{i_k}\,; \tag{5.1.7}$$

et avec ces notations, la condition (2.2.11) s'écrit maintenant :

$$\partial_{(\lambda)}\left[{q^l}_j\,\xi^j + {q^{\mu l}}_j\,\xi^j_\mu\right]\frac{\partial}{\partial\xi^l_{(\lambda)}}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\xi^i} = -\left[{q^j}_i\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\xi^j}\right] + \partial_\lambda\left[{q^{\lambda j}}_i\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\xi^j}\right]. \tag{5.1.8}$$

Remarque sur la réalité

Nous supposons que la symétrie ne change pas la réalité du lagrangien. C'est à dire que nous avons construit le lagrangien de telle sorte à ce qu'il soit réel, et que nous exigeons que sa variation soit également réelle : $B\mathcal{L} \in \mathbb{R}$. Voyons ce que cette condition apporte comme contrainte sur les coefficients $q^{(\mu)i}{}_j$. L'exigence est que

$$\partial_{(\lambda)} \left(q^{(\mu)l}{}_j \, \xi^j_{(\mu)} \right) \frac{\partial}{\partial \xi^l_{(\lambda)}} = \partial_{(\lambda)} \left(q^{*(\mu)\,l}{}_j \, \overline{\xi}^j_{(\mu)} \right) \frac{\partial}{\partial \overline{\xi}^l_{(\lambda)}}.$$

En identifiant les coefficients des différentes composantes des champs de vecteurs du membre de gauche à ceux du membre de droite, nous trouvons que

$$q^{(\mu)l}{}_j \, \xi^j_{(\mu)} = q^{*(\mu)\,\bar{l}}{}_{\bar{j}} \, \xi^j_{(\mu)},$$

et donc que

$$q^{(\mu)}{}_{lj} = q^{*(\mu)}_{\overline{lj}}. \tag{5.1.9}$$

5.2 Poser les contraintes

Nous commençons en calculant les contraintes portant sur la partie cinétique du lagrangien proposé. La difficulté dans les calculs est le fait que les $\overline{\xi}^{\,i}$ prennent les mêmes valeurs que les ξ^i ; nous avons par exemple

$$\begin{aligned} \delta_{kl} \frac{\partial(\xi^k \overline{\xi}^{\,l})}{\partial \xi^i} &= \delta_{kl} \delta^k_i \overline{\xi}^{\,l} + \delta_{kl} \xi^k \delta^l_{\bar{i}} && (5.2.1)\\ &= \overline{\xi}^{\,i} + \delta_{k\bar{i}} \xi^k && (5.2.2)\\ &= 2\overline{\xi}^{\,i}. && (5.2.3) \end{aligned}$$

Tenant compte de cette remarque, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}^2}{\delta \xi^i} &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \xi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \xi^i_\mu} && (5.2.4)\\ &= \frac{1}{2} m_{il} \overline{\xi}^{\,l} + \frac{1}{2} m_{k\bar{i}} \xi^k - \partial_\mu \left(\eta^{\mu\nu} \delta_{ik} \overline{\xi}^k_\nu \right) && (5.2.5)\\ &= m_{il} \overline{\xi}^l - \delta_{ik} \Box \overline{\xi}^k. && (5.2.6) \end{aligned}$$

Entre la deuxième et la troisième ligne, nous avons fait le jeu d'indice suivant :

$$m_{k\bar{i}} \xi^k = m_{\overline{k\bar{i}}} \xi^{\overline{k}} = m_{ki} \overline{\xi}^{\,k} = m_{il} \overline{\xi}^{\,l}.$$

Nous écrivons le résultat sous la forme

$$\frac{\delta \mathcal{L}^2}{\delta \xi^i} = (m_{ik} - \delta_{ik}\Box)\overline{\xi}^{\,k}. \tag{5.2.7}$$

Notons que cette expression suffit : il ne faut pas calculer de $\frac{\delta \mathcal{L}^2}{\delta \overline{\xi}^{\,i}}$. En effet, nous avons

$$\frac{\delta \mathcal{L}^2}{\delta \overline{\xi}^{\,i}} = \frac{\delta \mathcal{L}^2}{\delta \xi^{\overline{i}}} = (m_{\overline{i}k} - \delta_{\overline{i}k}\Box)\overline{\xi}^{\,k} = (m_{ik} - \delta_{ik}\Box)\xi^k. \tag{5.2.8}$$

La première égalité est évidente, la seconde se fait en recopiant (5.2.7) et la troisième par un changement de nom de la variable de sommation $k \to \overline{k}$.

Tournons nous à présent vers la condition (5.1.8), et analysons pour commencer la sommation sur le multiindice (λ) du membre de gauche. Étant donné que $\frac{\delta \mathcal{L}^2}{\delta \xi^i}$ ne comporte que du ξ non dérivé ou dérivé deux fois, la somme sur (λ) se réduit au terme « sans indice », $|\lambda| = 0$ et aux termes avec deux indices, $(\lambda) = \mu\nu$. Nous restons donc avec les calculs de

$$\frac{\partial}{\partial \xi^l}\frac{\delta \mathcal{L}^2}{\delta \xi^i} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial \xi^l_{\alpha\beta}}\frac{\delta \mathcal{L}^2}{\delta \xi^i}.$$

Le premier est facile et donne

$$\frac{\partial}{\partial \xi^l}\frac{\delta \mathcal{L}^2}{\delta \xi^i} = m_{i\overline{l}}, \tag{5.2.9}$$

tandis que le second demande un tout petit peu d'efforts avec les indices :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^l_{\alpha\beta}}\frac{\delta \mathcal{L}^2}{\delta \xi^i} &= -\delta_{ik}\eta^{\rho\sigma}\delta^\rho_\alpha\delta^\beta_\sigma\delta^k_{\overline{l}} \\ &= -\delta_{i\overline{l}}\,\eta^{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Nous pouvons à présent écrire la condition (5.1.8) pour le lagrangien (5.1.7). Commençons par le membre de gauche :

$$\begin{aligned} \partial_{(\lambda)}\left[q^l{}_j\,\xi^j + q^{\mu\,l}{}_j\,\xi^j_\mu\right]\frac{\partial}{\partial \xi^l_{(\lambda)}}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \xi^i} &= \left[q^l{}_j\,\xi^j + q^{u\,l}{}_j\,\xi^j_\mu\right] m_{i\overline{l}} \\ &\quad + \partial_{\alpha\beta}\left[q^l{}_j\,\xi^j + q^{u\,l}{}_j\,\xi^j_\mu\right](-)\delta_{i\overline{l}}\,\eta^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

dans quoi il faut remarquer le d'alembertien $\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}$, le distribuer avec (3.1.6) et utiliser $\delta_{i\overline{l}} = \delta_{\overline{i}l}$ pour obtenir la forme définitive du membre de gauche de (5.1.8) :

$$\begin{aligned} \text{gauche} &= m_{i\overline{l}}q^l{}_j\,\xi^j + q^{\mu\,l}{}_j\,m_{i\overline{l}}\xi^j_\mu - \Box q_{\;\overline{i}j}\,\xi^j - q_{\;\overline{i}j}\,\eta^{\rho\sigma}\xi^j_{\rho\sigma} - 2\partial^\nu q_{\;\overline{i}j}\,\xi^j_\nu \\ &\quad - \Box q^\mu{}_{\overline{i}j}\,\xi^j_\mu - q^\mu{}_{\overline{i}j}\,\eta^{\rho\sigma}\xi^j_{\mu\rho\sigma} - 2\partial^\nu q^\mu{}_{\overline{i}j}\,\xi^j_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Le calcul du membre de droite se fait de manière similaire :

$$\begin{aligned}
-\left[q^j{}_i\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\xi^j}\right]+\partial_\lambda\left[q^{\lambda j}{}_i\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\xi^j}\right] &= -q^j{}_i\, m_{jk}\overline{\xi}^{\,k}-q^j{}_i\,(-)\delta_{jk}\eta^{\rho\sigma}\overline{\xi}^{\,k}_{\rho\sigma}\\
&\quad+\partial_\lambda\left(q^{\lambda j}{}_i\, m_{jk}\overline{\xi}^{\,k}-q^{\lambda j}{}_i\,\delta_{jk}\eta^{\rho\sigma}\overline{\xi}^{\,k}_{\rho\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Après distribution de la dérivée, nous écrivons la forme définitive du membre de droite de la condition (5.1.8) :

$$\begin{aligned}
\text{droite} &= -q^j{}_i\, m_{jk}\overline{\xi}^{\,k}+q_{ki}\eta^{\rho\sigma}\overline{\xi}^{\,k}_{\rho\sigma}+\partial_\lambda q^{\lambda j}{}_i\, m_{jk}\overline{\xi}^{\,k}+q^{\lambda j}{}_i\, m_{jk}\overline{\xi}^{\,k}_\lambda\\
&\quad-\partial_\lambda q^\lambda{}_{ki}\,\eta^{\rho\sigma}\overline{\xi}^{\,k}_{\rho\sigma}-q^\lambda{}_{ki}\,\eta^{\rho\sigma}\overline{\xi}^{\,k}_{\rho\sigma\lambda}.
\end{aligned}\tag{5.2.13}$$

Lorsque nous identifierons les coefficients de ξ^j dans (5.2.12) et (5.2.13), nous devrons tenir compte du fait que $\overline{\xi}^{\,i}$ vaut ξ^j pour $i=\overline{j}$ (même remarque pour les termes dérivés). Une fois ceci clair et en se souvenant de la subtilité pour $\xi^j_{\mu\nu}$ dont nous ne voyons en fait que la partie symétrique en $(\mu\nu)$ du coefficient, les choses viennent vite en lisant (5.2.12) et (5.2.13).

Termes en ξ^j

$$-\,q^l{}_i\, m_{l\bar{j}}+\partial_\lambda q^{\lambda l}{}_i\, m_{l\bar{j}}=m_{i\bar{l}}q^l{}_j\,-\Box q_{\bar{i}j},\tag{5.2.14}$$

Termes en ξ^j_μ

$$q^{\mu l}{}_j\, m_{i\bar{l}}-2\partial^\mu q_{\bar{i}j}-\Box q^\mu{}_{\bar{i}j}\,=m_{l\bar{j}}q^{\mu l}{}_i\,,\tag{5.2.15}$$

Termes en $\xi^j_{\mu\nu}$

$$q_{\bar{j}i}\eta^{\mu\nu}-\partial_\lambda q^\lambda{}_{\bar{j}i}\,\eta^{\mu\nu}=-q_{\bar{i}j}\eta^{\mu\nu}-2\frac{1}{2}\left(\partial^\nu q^\mu{}_{\bar{i}j}\,+\partial^\mu q^\nu{}_{\bar{i}j}\right),\tag{5.2.16}$$

Termes en $\xi^j_{\rho\sigma\lambda}$

$$-\,q^\lambda{}_{\bar{j}i}\,\eta^{\rho\sigma}=-q^\lambda{}_{\bar{i}j}\,\eta^{\rho\sigma}\tag{5.2.17}$$

qui doit être valable pour tout ρ et pour tout σ. Cela entraîne tout de suite l'importante condition

$$q^\lambda{}_{\bar{i}j}\,=q^\lambda{}_{\bar{j}i}\,,\tag{5.2.18}$$

qui est bien comparable à (4.1.5).

5.2.1 En ce qui concerne le terme potentiel

Le calcul est tout à fait semblable à celui décrit lorsque nous traitions les champs réels. La seule différence réside en ce fait que g vérifie la condition supplémentaire de réalité (5.1.5). Après des calculs tout à fait identiques à ceux faits aux pages 42-43, nous trouvons les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
q^{\lambda l}{}_i\, g_{jli_3\ldots i_k} &= q^{\lambda l}{}_j\, g_{ili_3\ldots i_k},\qquad(5.2.19)\\
\partial_\lambda b^{\lambda l}{}_i\, g_{lj} &= (k-1)g_{il}b^l{}_j\,+b^l{}_i\, g_{lj}.\qquad(5.2.20)
\end{aligned}$$

5.3 Résolution des contraintes

5.3.1 Le groupe conforme à nouveau

De la même manière que nous l'avions déjà fait les deux premières fois, nous contractons la condition (5.2.16) avec $\eta_{\mu\nu}$:

$$-dq_{\bar{i}j} - 2\partial_\mu q^\mu{}_{\bar{i}j} = dq_{\bar{j}i} - d\partial_\mu q^\mu{}_{\bar{j}i}\,.$$

En utilisant (5.2.18), il vient :

$$(q_{\bar{i}j} + q_{\bar{j}i}) = \left(\frac{d-2}{d}\right)\partial_\mu q^\mu{}_{\bar{i}j}\,. \tag{5.3.1}$$

Nous remettons cette expression pour $(q_{\bar{i}j} + q_{\bar{j}i})$ dans (5.2.16) en utilisant à nouveau (5.2.18) et nous trouvons une fois encore que $q^\mu{}_{ij}$ est une vecteur conforme par rapport à son indice μ :

$$\frac{2}{d}\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda q^\lambda{}_{\bar{i}j} = \partial^\mu q^\nu{}_{\bar{i}j} + \partial^\nu q^\mu{}_{\bar{i}j}\,, \tag{5.3.2}$$

par conséquent (en omettant la barre sur le i, étant donné qu'il est arbitraire),

$$q^\mu{}_{ik} = \alpha_{ik}{}^\mu + \omega_{ik}{}^\mu{}_\nu x^\nu + \sigma_{ik}x^\mu + \gamma_{ik}{}^\mu x^2 - 2x^\mu\gamma_{ik}\cdot x. \tag{5.3.3}$$

Nous avons donc à nouveau les deux formules suivantes qui donnent des conditions sur les q en fonction des paramètres du groupe conforme :

$$\Box q^\mu{}_{ik} = (2d-4)\gamma^\mu{}_{ik} \tag{5.3.4}$$
$$\text{et } \partial_\mu q^\mu{}_{ik} = \sigma_{ik} - 2d\gamma_{ik}\cdot x. \tag{5.3.5}$$

Bien entendu, nous avons à nouveau la condition d'antisymétrie de $\omega_{\mu\nu}$, et les indices ik des paramètres α, β, γ vérifient la même propriété de symétrie que ceux de $q^\lambda{}_{ik}$ donnée par (5.2.18).

Grâce à (5.3.1), la relation (5.3.5) donne une forme explicite de $q_{\bar{i}j} + q_{\bar{j}i}$ en fonction des paramètres du groupe conforme.

Nous continuons en cherchant ce qu'apportent les contraintes liées aux interactions, laissant celles liées aux masses à plus tard[1].

Calculons les parties symétriques et antisymétriques de (5.2.20). En tenant compte de (5.2.19), nous trouvons la relation suivante[2] :

$$\partial_\lambda q^\lambda{}_{ij} = kq_{ij}. \tag{5.3.6}$$

[1]Notons en effet que nous n'avons pas encore fait usage de ces contraintes.
[2]Ceci est le même raisonnement que (4.2.8)–(4.2.12).

En comparant avec (5.2.18), nous trouvons que

$$q_{\bar{i}j} = q_{\bar{j}i}, \tag{5.3.7}$$

mais alors (5.3.1) fait en sorte que

$$q_{ij} = \left(\frac{d-2}{2d}\right) \partial_\lambda q^\lambda{}_{ij} \,. \tag{5.3.8}$$

En comparant cette dernière relation avec (5.3.6), il vient

$$\left(\frac{d-2}{2d}\right) \partial_\lambda q^\lambda{}_{ij} = \frac{1}{k} \partial_\lambda q^\lambda{}_{ij} \,. \tag{5.3.9}$$

Nous avons donc à nouveau le choix entre

$$\frac{d-2}{2d} = \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad \partial_\lambda q^\lambda{}_{ij} = q_{ij} = 0. \tag{5.3.10}$$

Encore une fois, la conclusion est qu'il ne peut y avoir aucune autre symétrie que le groupe de Poincaré au lagrangien (5.1.7) en dehors des cas exceptionnels[3]. Cette conclusion est valable indépendamment des valeurs nulles ou non des m_{ij}.

5.3.2 L'autre paire de conditions

Les conditions (5.2.14) et (5.2.15) n'ont pas encore été utilisées. Il convient à présent de voir de quelle manière elles peuvent renforcer ou confirmer les résultats obtenus jusqu'à présent.

Commençons par écrire les parties symétriques et antisymétriques de (5.2.14) et (5.2.15). Nous trouvons respectivement :

$$\partial_\lambda q^\lambda{}_{\bar{i}j} (m_j + m_i) + \Box(q_{\bar{i}j} - q_{\bar{j}i}) = 2q_{\bar{j}i} m_j + 2q_{\bar{i}j} m_i, \tag{5.3.11}$$

$$\partial_\lambda q^\lambda{}_{\bar{j}i} (m_j - m_i) = \Box(q_{\bar{j}i} - q_{\bar{i}j}), \tag{5.3.12}$$

$$\partial^\mu (q_{\bar{i}j} + q_{\bar{j}i}) + \Box q^\mu{}_{\bar{i}j} = 0, \tag{5.3.13}$$

$$q^\mu{}_{\bar{i}j} (m_i - m_j) = \partial^\mu (q_{\bar{i}j} - q_{\bar{j}i}). \tag{5.3.14}$$

En utilisant (5.3.1) et (5.3.5) dans (5.3.13), nous trouvons que cette dernière équation s'écrit

$$\frac{d-2}{d} \partial^\mu (\sigma_{\bar{i}j} - 2d\gamma_{\bar{i}j} \cdot x) + (2d-4)\gamma^\mu_{\bar{i}j} = 0.$$

[3]Nous pouvons aussi avoir des symétries internes pure, mais cela fera l'objet d'une autre section, voir section 5.4.

En calculant le premier membre, nous remarquons que cette contrainte est en réalité une identité. Elle n'apporte donc rien de nouveau.

De plus, il est facile de voir que l'équation (5.3.12) découle de (5.3.14) par applications de ∂_μ. Nous pouvons donc nous contenter de considérer les équations (5.3.11) et (5.3.14).

L'équation (5.3.7) permet de considérablement simplifier (5.3.11). Elle donne

$$\partial_\lambda q^{\lambda}{}_{\bar{i}j}(m_j + m_i) = 2q_{\bar{i}j}(m_i + m_j). \tag{5.3.15}$$

si $m_i + m_j \neq 0$, alors compte tenu de (5.3.8), nous tombons sur $d = d - 2$, ce qui est impossible.

Dans le cas où q_{ij} est lié à au moins une particule massive, nous avons donc $q_{\bar{i}j} = \partial_\lambda q^{\lambda}{}_{\bar{i}j} = 0$, et par conséquent le groupe conforme est exclu en dehors du sous-groupe de Poincaré.

Remarque

La relation (5.3.14) quant à elle devient (par utilisation de (5.3.7))

$$q^{\mu}{}_{\bar{i}j} = 0. \tag{5.3.16}$$

Pour que $q^{\mu}{}_{ij}$ soit non nul, nous venons de voir qu'il faut que $m_i = m_j = 0$. De ce fait, (5.3.14) est automatiquement vérifiée et n'apporte aucune nouvelle information.

5.4 Note à propos des symétries internes

Pour ce paragraphe, nous supposons que la matrice de masse est réelle. Nous pouvons la choisir telle que

$$m_{k\bar{l}} = m_{\bar{k}l}. \tag{5.4.1}$$

En effet, la réalité du lagrangien impose entre autres, la réalité du terme de masse. Parmi tout les termes de la somme $m_{ij}\xi^i\xi^j$, les termes $m_{k\bar{l}}\xi^k\xi^l$ et $m_{\bar{k}l}\overline{\xi}^k\overline{\xi}^l$ sont sensés être complexes- conjugués l'un de l'autre. Étant donné que les m_{ij} sont supposés réels, cela implique le résultat annoncé (5.4.1).

Les symétries internes sont caractérisées par les relations $q^{\lambda i}{}_j = 0$. En mettant cette conditions dans les équations (5.2.14)-(5.2.17), nous obtenons les contraintes suivantes sur les $q^{i}{}_j$:

$$\begin{aligned} -q_{\bar{j}i}m_j &= q_{\bar{i}j}m_i, & (5.4.2)\\ \partial^\mu q_{\bar{i}j} &= 0, & (5.4.3)\\ q_{\bar{j}i}\eta^{\mu\nu} &= -q_{\bar{i}j}\eta^{\mu\nu}, & (5.4.4)\\ 0 &= 0. & (5.4.5) \end{aligned}$$

Nous en tirons très vite que

$$\begin{aligned} q_{\bar{j}i} &= -q_{\bar{i}j}, & (5.4.6)\\ q_{\bar{i}j}m_j &= q_{\bar{i}j}m_i, & (5.4.7) \end{aligned}$$

ce qui nous indique que les symétries internes ne peuvent coupler que des particules de masses identiques, et que ce couplage ne se fait que via une matrice qui possède une propriété de symétrie particulière que nous allons étudier à présent.

En reprenant la condition (5.1.9), et en la combinant avec (5.4.6), nous trouvons

$$\boxed{q_{ij} = -q^*_{ji}.} \tag{5.4.8}$$

Cette conclusion est à mettre en rapport avec la thèse du théorème de Coleman et Mandula donnée dans l'appendice A.

Chapitre 6

Définitions et conventions à propos des spineurs

6.1 Spineurs

6.1.1 Spineurs de Weyl

Définitions

Les définitions que nous donnons dans ce chapitre sont inspirées du formalisme développé dans le deuxième chapitre de [8], ainsi que du cours [2].

Les *spineurs de Weyl* « avec indices en haut » sont des éléments ξ de $\mathbb{C}^2$, c'est à dire des couples de nombres complexes. En composantes, ils sont notés ξ^α. Les spineurs « avec indice en bas » sont des éléments de l'espace dual de $\mathbb{C}^2$ que nous noterons $d(\mathbb{C}^2)$. Étant donné que les formes linéaires sur $\mathbb{C}^2$ peuvent toujours s'écrire $\omega(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$, nous les noterons η_α, de telle sorte à pouvoir écrire l'application de la forme η au vecteur ξ de la manière suivante :

$$\eta_\alpha \xi^\alpha.$$

Nous écrirons toujours ces spineurs en composantes, la position haute ou basse de l'indice indiquant si l'objet considéré est un vecteur de $\mathbb{C}^2$ ou bien une forme[1] sur $\mathbb{C}^2$.

Soit ξ, un spineur. Nous définissons son *complexe-conjugué* par la conjugaison complexe composante par composante. Nous notons cette opération par une barre : le complexe-conjugué de $\xi \in \mathbb{C}^2$ est $\overline{\xi} \in \mathbb{C}^2$. En composantes, nous avons donc

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \qquad \overline{\xi} = \begin{pmatrix} \overline{\xi^1} \\ \overline{\xi^2} \end{pmatrix}. \tag{6.1.1}$$

Pour des raisons de notations (essentiellement liées aux représentations du groupe de Lorentz dont nous ne parlerons pas ici), les composantes de $\overline{\xi}$ sont toujours notées avec un indice pointé : $\overline{\xi}^{\dot\alpha}$. D'autre part, nous notons $\overline{\mathbb{C}}^{\,2}$ l'ensemble des spineurs complexes-conjugués. Bien entendu, $\overline{\mathbb{C}}^{\,2} = \mathbb{C}^2$.

[1]Dans le mot « forme », nous entendons toujours « forme linéaire ». Ce n'est pas le cas partout dans la littérature.

Notations

Afin de pouvoir utiliser ces définitions dans un formalisme qui amène des expressions identiques aux expressions habituelles, nous devons encore définir ce que nous entendons par δ et ϵ.

$\delta \,:\, d(\mathbb{C}^2) \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

est défini par trois relations (η est une 1-forme et ξ est un spineur) :

$$\begin{aligned} \delta(\eta, \xi) &= \eta\xi, \\ \delta(\eta, \cdot) &= \eta, \\ \delta(\cdot, \xi) &= \xi. \end{aligned}$$

En notation indicielle, ces relations s'écrivent respectivement :

$$\delta^{\alpha}{}_{\beta}\,\eta_{\alpha}\xi^{\beta} = \eta_{\alpha}\xi^{\alpha}, \qquad \eta_{\alpha}\delta^{\alpha}{}_{\beta}\,, \qquad \delta^{\alpha}{}_{\beta}\,\xi^{\beta} = \xi^{\alpha}.$$

Ensuite, nous définissons la 2-forme ϵ

$\epsilon \,:\, \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

telle que (η et ξ sont des spineurs)

$$\epsilon(\xi, \eta) = -\epsilon(\eta, \xi).$$

En composantes,

$$\epsilon_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\eta^{\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta}\xi^{\beta}\eta^{\alpha}.$$

Enfin, nous pouvons définir l'application linéaire

$e \,:\, d(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathbb{C}^2$

agissant de la manière suivante sur une forme η :

$$e(\eta)^{\sigma} = \eta_{\alpha}e^{\alpha\sigma}, \tag{6.1.2}$$

et vérifiant la relation suivante :

$$\epsilon(\cdot, e(\cdot)) = \delta. \tag{6.1.3}$$

La relation (6.1.2) définit les $e^{\alpha\sigma}$, tandis que la relation (6.1.3) signifie que pour $\xi \in \mathbb{C}^2$ et $\eta \in d(\mathbb{C}^2)$, nous exigeons que

$$\epsilon(\cdot, e(\cdot))(\xi, \eta) = \delta(\xi, \eta), \tag{6.1.4}$$

ou encore

$$\epsilon(\xi, e(\eta)) = \delta(\xi, \eta) \tag{6.1.5}$$

$$\epsilon_{\rho\sigma}\xi^{\rho}e(\eta)^{\sigma} = \delta^{\alpha}{}_{\rho}\,\xi^{\rho}\eta_{\alpha} \tag{6.1.6}$$

$$\epsilon_{\rho\sigma}e^{\alpha\sigma}\xi^{\rho}\eta_{\alpha} = \delta^{\alpha}{}_{\rho}\,\xi^{\rho}\eta_{\alpha}. \tag{6.1.7}$$

En définitive, nous écrivons la relation de définition de e sous la forme suivante :

$$\epsilon_{\rho\sigma}e^{\alpha\sigma} = \delta^{\alpha}{}_{\rho}\,. \tag{6.1.8}$$

Étant donné que cette application est bien définie (à une normalisation près) à partir de la donnée de ϵ, nous pouvons l'appeler ϵ aussi. Le fait que nous travaillerons toujours en composantes fera en sorte que le ϵ de $d(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2)$ apparaîtra toujours avec des indices inférieurs tandis que le ϵ que nous venons de définir apparaîtra toujours avec des indices supérieurs, ce qui évitera toute confusion.

D'autre part, nous pouvons, à chaque spineur ξ, associer canoniquement une 1-forme η par la formule

$$\eta \equiv \epsilon\xi, \tag{6.1.9}$$

ou en composantes,

$$\eta_\alpha = \epsilon_{\beta\alpha}\xi^\beta. \tag{6.1.10}$$

Cette relation définit une bijection entre les 1-formes η sur $\mathbb{C}^2$ et les spineurs ξ. En effet, en contractant[2] (6.1.10) avec $\epsilon^{\sigma\alpha}$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \eta_\alpha\epsilon^{\sigma\alpha} &= \xi^\beta\epsilon_{\beta\alpha}\epsilon^{\sigma\alpha} \\ &= \xi^\beta\delta^\sigma{}_\beta = \xi^\sigma. \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

Nous noterons donc les spineurs et leurs 1-formes associées par la même lettre, la position de l'indice indiquant la nature de l'objet écrit. Cette remarque permet de donner un sens à la formule (6.1.11). En effet, il n'est pas nécessaire de noter la forme agissant sur un spineur *devant* le spineur. Les indices indiquent par leur positions et leur points à la fois la nature des objets et quelle forme agit sur quel spineur. Par exemple, les expressions $\eta_\alpha\xi^\alpha$ et $\xi^\alpha\eta_\alpha$ sont égales et désignent toutes deux le réel obtenu par application de la 1-forme η sur le spineur ξ.

Ceci nous fourni les lois de « montée » et de « descente » d'indices sous la forme suivante :

$$\xi_\alpha = \xi^\beta\epsilon_{\beta\alpha}, \tag{6.1.12}$$
$$\xi^\alpha = \xi_\beta\epsilon^{\alpha\beta}. \tag{6.1.13}$$

Ces relations font en sorte que nous ayons aussi

$$\xi^\alpha\eta_\alpha = -\xi_\alpha\eta^\alpha.$$

En termes de matrices

Pour ce qui est de la notation matricielle (qui ne sera pas beaucoup utilisée), nous définissions ξ^α comme une matrice colonne et ξ_α comme une matrice ligne :

$$\xi^\alpha = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \qquad \xi_\alpha = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix}. \tag{6.1.14}$$

[2] C'est à dire en faisant agir la 1-forme η sur le 2-spineur ϵ.

Nous remarquons alors tout de suite que l'égalité $\xi_\alpha = \xi^\beta \epsilon_{\beta\alpha}$ ne peut pas être juste vue en termes matriciel, pas plus que $\xi_\alpha = \epsilon_{\beta\alpha}\xi^\beta$. Pour penser en termes de matrices, il faut donc ajouter des transpositions :

$$\xi_\alpha = \left(\xi^t\right)^\beta \epsilon_{\beta\alpha}.$$

D'autre part, ϵ peut être représentée par une matrice 2×2 telle que

$$\left(\xi^t\right)^\beta \epsilon_{\beta\alpha} = -\left(\xi^t\right)^\beta \epsilon_{\alpha\beta} \qquad \forall\, \xi^\alpha.$$

La matrice de ϵ est donc antisymétrique et peut être normalisée à

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.1.15}$$

La relation

$$\epsilon_{\alpha\beta}\xi^\alpha\eta^\beta = -\epsilon_{\alpha\beta}\xi^\beta\eta^\alpha$$

s'écrit, en notation matricielle,

$$\eta^t\epsilon\xi = -\xi^t\epsilon\eta.$$

Plus explicitement :

$$\begin{pmatrix} \eta^1 & \eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}, \tag{6.1.16}$$

qui est bien une équation vérifiée pour tout spineurs ξ^α et η^α.

La matrice ϵ a comme propriétés de base :

$$\epsilon^2 = -1 \qquad \epsilon^t = \epsilon^{-1}.$$

6.1.2 Spineurs de Dirac

Définition

Les spineurs de Dirac sont des couples de spineurs de natures différentes : un spineur de Weyl et une forme de l'espace complexe conjugué[3]. Typiquement, un tel spineur se note

$$\psi = \begin{pmatrix} \eta \\ \overline{\xi} \end{pmatrix},$$

avec η, un spineur et $\overline{\xi}$, un élément de $d(\overline{\mathbb{C}}^{\,2})$.

Les spineurs de Dirac ainsi définis sont appelés spineurs de Dirac *dans la représentation de Weyl*.

[3] Un élément de $d(\overline{\mathbb{C}}^{\,2})$.

Passage de Weyl à Dirac

Afin de définir ce que nous appelons les « composantes » d'un spineur de Dirac, nous écrivons la définition en ajoutant un indice au ψ :

$$\psi^\sigma = \begin{pmatrix} \eta^\alpha \\ \overline{\xi}_{\dot\alpha} \end{pmatrix}. \tag{6.1.17}$$

Pour donner un sens à cette expression, nous devons considérer que l'indice de Dirac σ représente *deux* indices de Weyl. schématiquement, nous pouvons écrire

$$\text{« } {}^\sigma = {}^\alpha{}_{\dot\alpha} \text{ ».} \tag{6.1.18}$$

Logiquement, nous définissons les spineurs de Dirac « avec indice en dessous » par la formule suivante :

$$\psi_\sigma = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \overline{\xi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}. \tag{6.1.19}$$

Le passage de l'un à l'autre se fait à l'aide d'une « double matrice ϵ » :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot\beta\dot\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^\alpha \\ \overline{\xi}_{\dot\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_\beta \\ \overline{\xi}^{\dot\beta} \end{pmatrix}. \tag{6.1.20}$$

Si σ se décompose en ${}^\alpha{}_{\dot\alpha}$ et ρ en ${}^\beta{}_{\dot\beta}$, nous définissons la matrice ϵ d'éléments :

$$\epsilon_{\sigma\rho} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot\beta\dot\alpha} \end{pmatrix}, \tag{6.1.21}$$

qui permet d'écrire la descente d'indices des spineurs de Dirac sous la forme

$$\epsilon_{\sigma\rho}\psi^\sigma = \psi_\rho, \tag{6.1.22}$$

qui est une expression analogue à (6.1.12).

La matrice $\epsilon^{\sigma\rho}$ se définit de manière similaire, et nous trouvons pour la montée d'indices de Dirac, une formule analogue à (6.1.13).

Afin de pouvoir écrire sous forme 4-spinorielle les égalités du type

$$\overline{\psi}\psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha & \overline{\eta}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^\alpha \\ \overline{\xi}_{\dot\alpha} \end{pmatrix} = \xi_\alpha\eta^\alpha + \overline{\eta}^{\dot\alpha}\overline{\xi}_{\dot\alpha}, \tag{6.1.23}$$

nous définissons encore

$$\overline{\psi}_\sigma = \begin{pmatrix} \xi_\alpha & \overline{\eta}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}. \tag{6.1.24}$$

Ceci permet d'écrire l'égalité précédente sous la forme

$$\overline{\psi}\psi = \overline{\psi}^\sigma\psi_\sigma = \epsilon_{\sigma\rho}\overline{\psi}^\sigma\psi^\rho. \tag{6.1.25}$$

6.1.3 Spineurs de Majorana

Signalons encore l'existence dans la littérature des spineurs de Majorana, bien que nous ne les utiliserons pas ici.

Un spineur de Dirac ψ est dit *de Majorana* lorsqu'il vérifie $\psi = \overline{\psi}$. Nous avons donc que $\overline{\psi}_\sigma = \psi_\sigma$, et donc que

$$\xi_\alpha = \eta_\alpha, \qquad \overline{\eta}^{\dot{\alpha}} = \overline{\xi}^{\dot{\alpha}}. \tag{6.1.26}$$

Étant donné que pour des spineurs de Dirac généraux, nous avons $\psi_\rho = \epsilon_{\sigma\rho}\psi^\sigma$, nous avons aussi, pour des Majorana,

$$\psi_\rho = \epsilon_{\sigma\rho}\overline{\psi}^\sigma. \tag{6.1.27}$$

Certains auteurs (par exemple [10]) décrivent le modèle de Wess-Zumino avec un spineur de Majorana. Quand nous en parlerons brièvement dans la section 7.2, nous le décrirons plutôt avec un spineur de Weyl. Il est bien entendu que les deux descriptions sont équivalentes.

Remarque

À partir du moment où nous travaillons avec des spineurs de Dirac, il n'est plus intéressant de faire la distinction entre les indices avec et sans point car un indice de Dirac représente à la fois un indice pointé et un indice non pointé, voir équation (6.1.18).

Notons aussi que la distinction n'est pas nécessaire non plus avec les spineurs de Weyl à partir du moment où nous prenons la convention de toujours noter les éléments de $\overline{\mathbb{C}}^2$ par la même lettre que l'élément correspondant dans $\mathbb{C}^2$, surmontée d'une barre. Avec cette convention, la barre indique que l'objet considéré est dans $\overline{\mathbb{C}}^2$, et le point sur l'indice est redondant.

6.2 Développements

6.2.1 L'espace $\mathbb{C}^2 \otimes \overline{\mathbb{C}}^2$

Nous pouvons définir les objets de la forme $v^{\alpha\dot{\alpha}}$ comme étant des éléments de $\mathbb{C}^2 \otimes \overline{\mathbb{C}}^2$. Cet espace est naturellement isomorphe à $\overline{\mathbb{C}}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ en faisant l'identification

$$\xi^\alpha \otimes \overline{\eta}^{\dot{\alpha}} \sim \overline{\eta}^{\dot{\alpha}} \otimes \xi^\alpha.$$

Par conséquent, nous pouvons définir le sous-espace V de $\mathbb{C}^2 \otimes \overline{\mathbb{C}}^2$ par

$$v^{\alpha\dot{\alpha}} \in V \Leftrightarrow \overline{v}^{\dot{\alpha}\alpha} = -v^{\alpha\dot{\alpha}}. \tag{6.2.1}$$

Pour $v^{\alpha\dot{\alpha}} \in \mathbb{C}^2 \otimes \overline{\mathbb{C}}^2$, $\overline{v^{\alpha\dot{\alpha}}} = \overline{v}^{\dot{\alpha}\alpha} \in \overline{\mathbb{C}}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Étant donné que nous avons décidés de complètement identifier ces deux espaces, nous pouvons comparer $\overline{v}^{\dot{\alpha}\alpha}$ et $v^{\alpha\dot{\alpha}}$, et la définition (6.2.1) est légitime.

La question qui se pose est de savoir la dimension de V (en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$). Pour y répondre, prenons un certain v dans V. Un tel v peut toujours s'écrire sous la forme $v = z \otimes c$ avec $z \in \mathbb{C}^2$ et $c \in \overline{\mathbb{C}}^2$. Nous avons alors

$$\overline{v} = \overline{z} \otimes \overline{c} \sim \overline{c} \otimes \overline{z} \stackrel{!}{=} -z \otimes c$$

où le symbole $\sim$ fait référence à l'identification entre $\mathbb{C}^2 \otimes \overline{\mathbb{C}}^2$ et $\overline{\mathbb{C}}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, tandis que la seconde égalité est celle que l'on impose comme définition de V. Nous en déduisons immédiatement que la relation $v = -\overline{v}$ impose les contraintes suivantes sur les composantes de v :

$$\begin{cases} \overline{c} = -z \\ \overline{z} = -c. \end{cases} \tag{6.2.2}$$

Ceci fait en sorte que la seconde composante de v est entièrement déterminée à partir de la première. L'espace V est donc isomorphe à $\mathbb{C}^2$ et par conséquent à $\mathcal{M}$ (espaces de même dimension 4).

Nous notons τ l'isomorphisme.

$$\begin{array}{cccc} \tau : & V & \rightarrow & \mathcal{M} \\ & \tau^\mu(v) & = & \tau^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} v^{\alpha\dot{\alpha}}. \end{array} \tag{6.2.3}$$

Cet isomorphisme n'est pas unique. Nous pouvons donc lui imposer un certain nombre de conditions. Les propriétés que nous imposons à l'isomorphisme que nous allons utiliser dans la suite sont les suivantes[4] :

1. $\tau^{\alpha\dot{\alpha}}_\mu \tau^\nu_{\alpha\dot{\alpha}} = \delta^\nu{}_\mu$,
2. $\overline{\tau}^{\dot{\alpha}\beta}_\mu = -\tau^{\beta\dot{\alpha}}_\mu$,
3. $\tau^{\alpha\dot{\alpha}}_\mu \tau^\mu_{\beta\dot{\beta}} = \delta^\alpha{}_\beta \, \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$,
4. $\tau^{\alpha\dot{\alpha}}_{[\mu} \tau_{\nu]\alpha_\beta} = \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \tau^{\rho\,\alpha\dot{\alpha}} \tau^\lambda_{\alpha_\beta}$.

Ceci étant, nous pouvons facilement obtenir l'isomorphisme inverse. Si a est le vecteur associé à v, nous écrivons $a = \tau(v)$, c'est à dire

$$a^\mu = \tau^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} v^{\alpha\dot{\alpha}}.$$

En contractant cette relation avec $\tau^{\beta\dot{\beta}}_\mu$, il vient en utilisant la troisième propriété :

$$v^{\beta\dot{\beta}} = \tau^{\beta\dot{\beta}}_\mu a^\mu. \tag{6.2.4}$$

Les *matrices de Pauli* σ sont définies à partir des τ :

$$\tau^{\alpha\dot{\alpha}}_\mu = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sigma^{\alpha\dot{\alpha}}_\mu \tag{6.2.5}$$

$$\overline{\tau}^{\,\mu}_{\dot{\alpha}\alpha} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \overline{\sigma}^{\,\mu}_{\dot{\alpha}\alpha}. \tag{6.2.6}$$

Ces définitions font en sorte que nous ayons

$$\overline{\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}} = \overline{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\beta} = i\sqrt{2}\,\overline{\tau}^\mu_{\dot{\alpha}\beta} = i\sqrt{2}(-)\tau^\mu_{\beta\dot{\alpha}} = -\sigma^\mu_{\beta\dot{\alpha}}. \tag{6.2.7}$$

[4]Nous pouvons nous convaincre de l'existence d'un isomorphisme $V \rightarrow \mathcal{M}$ vérifiant ces conditions en remarquant que les matrices de Dirac habituelles par exemple vérifient bien ces relations.

6.2.2 La parité des variables

Lorsque nous travaillons avec des spineurs, nous sommes confrontés à des expressions contenant

$$\epsilon_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta = \epsilon_{\beta\alpha}\psi^\beta\psi^\alpha = -\epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta\psi^\alpha.$$

Étant donné l'antisymétrie de ϵ, nous sommes donc amenés à dire que[5]

$$\psi^\alpha\psi^\beta = -\psi^\beta\psi^\alpha.$$

Nous disons que ces variables sont *impaires*. Par opposition, nous disons que les scalaires (qui eux, commutent) sont *pairs*. Lorsque nous considérons une théorie contenant des spineurs aussi bien que des scalaires, les coordonnées locales sont dites *graduées* car certaines sont paires, tandis que d'autres sont impaires. À chaque coordonnée locale ϕ^i correspond alors une parité η_i valant zéro ou un, et nous avons la règle suivante de commutation entre les coordonnées locales

$$\phi^i\phi^j = (-1)^{\eta_i\eta_j}\phi^j\phi^i.$$

Remarque

Étant donné que nous n'utiliserons jamais de spineurs de Weyl et de Dirac en même temps, nous n'allons plus faire attention à utiliser les indices α, β pour les spineurs de Weyl et ρ, σ pour ceux de Dirac.

[5] Ceci n'est qu'une motivation. La raison profonde est dans la quantification des champs qui impose des relations d'anticommutation aux spineurs.

Chapitre 7

Remarques à propos de la supersymétrie

Dans ce chapitre, nous étudions les possibilités de symétries échangeant scalaires[1] et spineurs dans deux cas simples. Nous commençons par montrer qu'il n'existe pas de supersymétries pour le terme d'interaction le plus simple entre un spineur de Dirac et un scalaire : $\overline{\psi}\psi\phi$. Et nous fixerons ensuite toutes les supersymétries du lagrangien du modèle de Wess-Zumino.

7.1 L'interaction simple entre un Dirac et un scalaire

Soit à chercher les symétries échangeant scalaires les spineurs dans l'interaction suivante :

$$V = \epsilon_{\sigma\rho}\overline{\psi}^\sigma\psi^\rho\phi \tag{7.1.1}$$

où nous considérons ϕ, un champ réel.

Pour les raisons invoquées dans le chapitre 2, nous ne cherchons que des symétries linéaires :

$$\begin{cases} \delta\phi = b^{(\mu)}{}_\alpha\psi^\alpha_{(\mu)} + c^{(\mu)}{}_\alpha\overline{\psi}^\alpha_{(\mu)}, \\ \delta\psi^\alpha = b^{(\mu)\alpha}\phi_{(\mu)}, \\ \delta\overline{\psi}^\alpha = c^{(\mu)\alpha}\phi_{(\mu)}. \end{cases} \tag{7.1.2}$$

Comme dans le cas que nous avions traité avec des champs complexes, nous demandons que la symétrie préserve la réalité, c'est à dire que nous imposons à la variation de ϕ d'être réelle, ainsi qu'aux variations de ψ et $\overline{\psi}$ d'être complexes-conjuguées l'une de l'autre. Ceci implique immédiatement que

$$b^{(\mu)}{}_\alpha = c^{*(\mu)}{}_\alpha,$$

[1]De telles symétries sont appelées *supersymétries*.

ainsi que la réalité de $b^{(\mu)\alpha}$ et $c^{(\mu)\alpha}$.

Pour pouvoir utiliser la formule (B.0.7), nous devons calculer les dérivées d'Euler-Lagrange de V par rapport à ses variables. Pour ce faire, il faut faire attention à ce que les variables spinorielles anticommutent ; de ce fait, un signe moins apparaît dans le calcul de $\frac{\partial V}{\partial \psi^\sigma}$. Nous trouvons en définitive :

$$\frac{\delta V}{\delta \phi} = \epsilon_{\sigma\rho}\overline{\psi}^\sigma \psi^\rho, \qquad \frac{\delta V}{\delta \overline{\psi}^\sigma} = \epsilon_{\sigma\rho}\phi\psi^\rho, \qquad \frac{\delta V}{\delta \psi^\rho} = -\epsilon_{\sigma\rho}\phi\overline{\psi}^\sigma. \tag{7.1.3}$$

La première condition que nous écrivons est celle avec ϕ.

$$\begin{aligned} B\frac{\delta V}{\delta \phi} &= \left(c^{(\mu)\alpha}\phi_{(\mu)}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{\psi}^\alpha}\frac{\delta V}{\delta \phi} + \left(b^{(\mu)\alpha}\phi_{(\mu)}\right)\frac{\partial}{\partial \psi^\alpha}\frac{\delta V}{\delta \phi} \\ &= c^{(\mu)\alpha}\phi_{(\mu)}\epsilon_{\alpha\rho}\psi^\rho - b^{(\mu)\alpha}\phi_{(\mu)}\epsilon_{\sigma\alpha}\overline{\psi}^\sigma \qquad (7.1.4) \\ &\overset{!}{=} -(-\partial)_{(\lambda)}\left[b^{(\lambda)\alpha}\frac{\delta V}{\delta \psi^\alpha} + c^{(\lambda)\alpha}\frac{\delta V}{\delta \overline{\psi}^\alpha}\right] \qquad (7.1.5) \\ &= -(-\partial)_{(\lambda)}\left[-b^{(\lambda)\alpha}\epsilon_{\sigma\alpha}\overline{\psi}^\sigma\phi + c^{(\lambda)\alpha}\epsilon_{\alpha\rho}\psi^\rho\phi\right]. \qquad (7.1.6) \end{aligned}$$

C'est à dire

$$c^{(\mu)\alpha}\phi_{(\mu)}\epsilon_{\alpha\rho}\psi^\rho - b^{(\mu)\alpha}\phi_{(\mu)}\epsilon_{\sigma\alpha}\overline{\psi}^\sigma = -(-\partial)_{(\lambda)}\left[-b^{(\lambda)\alpha}\epsilon_{\sigma\alpha}\overline{\psi}^\sigma\phi + c^{(\lambda)\alpha}\epsilon_{\alpha\rho}\psi^\rho\phi\right]. \tag{7.1.7}$$

Si nous isolons dans cette équation les termes contenant les variables $\overline{\psi}$ et ϕ ou leurs dérivées, nous trouvons la relation

$$-\epsilon_{\sigma\alpha}b^{(\mu)\alpha}\phi_{(\mu)}\overline{\psi}^\sigma = -(-\partial)_{(\lambda)}\left[-b^{(\lambda)\alpha}\epsilon_{\sigma\alpha}\overline{\psi}^\sigma\phi\right]. \tag{7.1.8}$$

Considérons les termes du second membre pour lesquels la longueur du multiindice (λ) est maximale, et parmi ceux-ci, isolons ceux dans lesquels toutes les dérivées portent sur $\overline{\psi}^\sigma$. Étant donné que les $\overline{\psi}^\sigma_{(\lambda)}$ sont des variables indépendantes, la somme de ces termes doit être nulle car il n'y a aucun $\overline{\psi}$ dérivé dans le premier membre, et que dans le second membre, ces termes sont les seuls contenant $\overline{\psi}$ dérivé $|\lambda|_{max}$ fois. Le terme d'ordre maximum à droite est donc nul. Par récurrence, ils sont tous nuls jusqu'à l'ordre zéro (à l'ordre zéro, il n'y a plus de dérivées à mettre sur le $\overline{\psi}$, et par conséquent, le terme peut avoir un correspondant dans le terme de gauche).

Nous venons d'établir que $b^{(\mu)\alpha} = 0$ pour tout $|\mu| > 0$. Il ne reste donc de la relation (7.1.8) que

$$-\epsilon_{\sigma\alpha}b^\alpha\phi\overline{\psi}^\sigma = \epsilon_{\sigma\alpha}b^\alpha\phi\overline{\psi}^\sigma. \tag{7.1.9}$$

Cette dernière équation montrant que nous avons aussi

$$b^\alpha = 0.$$

Le même raisonnement appliqué aux termes contenant des ψ et de ϕ dans (7.1.7) montre que nous avons également

$$c^{(\mu)\alpha} = 0$$

pour tout (μ).

Ainsi, nous avons déjà trouvé qu'une éventuelle supersymétrie applicable à V doit vérifier

$$\delta\psi^\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta\overline{\psi}^\alpha = 0. \tag{7.1.10}$$

Écrivons à présent la contrainte liée à $B\frac{\delta V}{\delta\psi^\rho}$. Étant donné que $c^{(\mu)\sigma} = 0$, le terme en $\frac{\partial}{\partial\overline{\psi}^\sigma}\frac{\delta V}{\delta\psi^\rho}$ de $B\frac{\delta V}{\delta\psi^\rho}$ est nul, et il ne reste que

$$\left(b^{(\mu)}{}_\alpha\psi^\alpha_{(\mu)} + c^{(\mu)}{}_\alpha\overline{\psi}^\alpha_{(\mu)}\right)\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\delta V}{\delta\psi^\rho} \overset{!}{=} 0, \tag{7.1.11}$$

par conséquent, la contrainte est

$$\left(b^{(\mu)}{}_\alpha\psi^\alpha_{(\mu)} + c^{(\mu)}{}_\alpha\overline{\psi}^\alpha_{(\mu)}\right)\epsilon_{\sigma\rho}\overline{\psi}^\sigma = 0, \tag{7.1.12}$$

et nous en concluons que

$$b^{(\mu)}{}_\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad c^{(\mu)}{}_\alpha = 0,$$

et donc que

$$\delta\phi = 0. \tag{7.1.13}$$

Conclusion

Nous venons de démontrer qu'une théorie contenant $\overline{\psi}\psi\phi$ comme seul terme d'interaction d'ordre 3 ne peut pas posséder de symétries linéaires échangeant les spineurs et le scalaire. Pour mettre en évidence un lagrangien qui admettrait une telle symétrie, il faudrait donc construire des interactions plus compliquées en plusieurs termes entre lesquels des compensations pourraient avoir lieu afin éviter de tomber sur des conditions de la forme de (7.1.8). De tels lagrangiens existent ; nous avons par exemple celui du modèle de Wess-Zumino qui admet des supersymétries non triviales que nous allons calculer maintenant.

7.2 Le modèle de Wess-Zumino

Le lagrangien du modèle de Wess-Zumino est construit à partir d'un spineur de Weyl ψ et de deux champs scalaires complexes A et F. Nous le reprenons tel que donné dans [9], à ceci près que nous ne mettons pas de coefficient global devant les termes d'interaction[2].

[2]ceci est justifié par le fait qu'étant de degré trois, les termes d'interaction pevent être de toute façon traités séparément des termes cinétiques.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WZ} &= \eta^{\mu\nu} A_\mu \overline{A}_\nu + \frac{i}{2}\psi^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha}_\mu + F\overline{F} &(7.2.1)\\ &-\frac{m}{4}(4AF + \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta + 4\overline{A}\,\overline{F} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\beta}) &(7.2.2)\\ &+2A^2F + A\epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\,\alpha}\psi^{\,\beta} + 2\overline{A}^{\,2}\overline{F} + \overline{A}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\,\alpha}\overline{\psi}^{\,\beta}. &(7.2.3)\end{aligned}$$

Ce lagrangien se décompose naturellement en deux parties : l'une contenant les termes quadratiques en les champs (termes cinétiques), et l'autre contenant les termes cubiques en les champs (termes d'interaction) :

$$\mathcal{L}_{int} = 2A^2F + A\epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\,\alpha}\psi^{\,\beta} + 2\overline{A}^{\,2}\overline{F} + \overline{A}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\,\dot\alpha}\overline{\psi}^{\,\dot\beta}. \tag{7.2.4}$$

$$\mathcal{L}_{cin} = \eta^{\mu\nu} A_\mu \overline{A}_\nu + \frac{i}{2}\psi^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha}_\mu + F\overline{F}\,. \tag{7.2.5}$$

Les symétries que nous cherchons intervertissent les scalaires et les spineurs ; elles s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned}\delta\psi^{\,\alpha} &= b^{(\mu)\alpha}{}_A\, A_{(\mu)} + b^{(\mu)\alpha}{}_{\overline{A}}\,\overline{A}_{(\mu)} + b^{(\mu)\alpha}{}_F\, F_{(\mu)} + b^{(\mu)\alpha}{}_{\overline{F}}\,\overline{F}_{(\mu)}, &(7.2.6)\\ \delta\overline{\psi}^{\,\dot\alpha} &= b^{(\mu)\dot\alpha}{}_A\, A_{(\mu)} + b^{(\mu)\dot\alpha}{}_{\overline{A}}\,\overline{A}_{(\mu)} + b^{(\mu)\dot\alpha}{}_F\, F_{(\mu)} + b^{(\mu)\dot\alpha}{}_{\overline{F}}\,\overline{F}_{(\mu)}, &(7.2.7)\\ \delta A &= b^{(\mu)A}{}_\alpha\,\psi^{\,\alpha}_{(\mu)} + b^{(\mu)A}{}_{\dot\alpha}\,\overline{\psi}^{\,\dot\alpha}_{(\mu)}, &(7.2.8)\\ \delta\overline{A} &= b^{(\mu)\overline{A}}{}_\alpha\,\psi^{\,\alpha}_{(\mu)} + b^{(\mu)\overline{A}}{}_{\dot\alpha}\,\overline{\psi}^{\,\dot\alpha}_{(\mu)}, &(7.2.9)\\ \delta F &= b^{(\mu)F}{}_\alpha\,\psi^{\,\alpha}_{(\mu)} + b^{(\mu)F}{}_{\dot\alpha}\,\overline{\psi}^{\,\dot\alpha}_{(\mu)}, &(7.2.10)\\ \delta\overline{F} &= b^{(\mu)\overline{F}}{}_\alpha\,\psi^{\,\alpha}_{(\mu)} + b^{(\mu)\overline{F}}{}_{\dot\alpha}\,\overline{\psi}^{\,\dot\alpha}_{(\mu)}. &(7.2.11)\end{aligned}$$

Les notations

Nous avons choisi de désigner par $b^{(\mu)A}{}_\alpha$, le paramètre $b^{(\mu)i}{}_j$ dans lequel i correspond au champ A et j, au champ ψ^α. De la même manière, nous désignons par $b^{(\mu)\dot\alpha}{}_{\overline{A}}$, le $b^{(\mu)i}{}_j$ avec i correspondant à $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$ et j à $\overline{A}$. Les autres coefficients sont définis de la même manière. L'indice α de $b^{(\mu)A}{}_\alpha$ n'est donc pas un indice spinoriel. Mais étant donné que la variation du champ A comporte à la fois une partie en ψ^1 et une partie en ψ^2 (et les complexes-conjugués), nous utilisons quand même une convention de sommation sous-entendue :

$$b^{(\mu)A}{}_\alpha\,\psi^\alpha = b^{(\mu)A}{}_1\,\psi^1 + b^{(\mu)A}{}_2\,\psi^2.$$

Nous obtenons les contraintes que doivent vérifier les $b^{(\mu)i}{}_j$ en appliquant la condition (B.0.7) et en y remplaçant successivement ϕ^i par les champs A,F,ψ^α,$\overline{A}$,$\overline{F}$ et $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$.

7.2.1 La contrainte avec F

$$
\begin{aligned}
B\frac{\delta\mathcal{L}_{int}}{\delta F} &= \left(b^{(\mu)A}{}_{\alpha}\,\psi^{\alpha}_{\ (\mu)} + b^{(\mu)A}{}_{\dot\alpha}\,\overline{\psi}^{\dot\alpha}_{\ (\mu)}\right)4A \\
&\stackrel{!}{=} -(-\partial)_{(\lambda)}\left[b^{(\lambda)\alpha}{}_{F}\,(2A\epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta}) + b^{(\lambda)\dot\alpha}{}_{F}\,(2\overline{A}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta})\right].
\end{aligned}
\tag{7.2.12}
$$

Ceci est une égalité entre des termes qui contiennent chacun deux champs. Les termes qui contiennent des variables indépendantes identiques, c'est à dire tout les termes en $A\psi$, tout les termes en $A\overline{\psi}$,... forment des contraintes indépendantes.

Termes en $A\psi$ Ils forment la condition suivante :

$$
2b^{(\mu)A}{}_{\alpha}\,\psi^{\alpha}_{\ (\mu)}A = -(-\partial)_{(\lambda)}\left[b^{(\lambda)\alpha}{}_{F}\,\epsilon_{\alpha\beta}A\psi^{\beta}\right]. \tag{7.2.13}
$$

Analysons le second membre, et dans la somme sur (λ), prenons les terme avec $|\lambda|$ le plus grand. Considérons plus précisément le terme dans lequel toutes les dérivées portent sur le A. Ce terme doit être nul, étant donné qu'il est le seul à posséder un A dérivé $|\lambda|_{max}$ fois. Nous avons donc, pour ces (λ), que $b^{(\lambda)\alpha}{}_{F} = 0$. Par récurrence, nous trouvons que tout les $b^{(\lambda)\alpha}{}_{F}$ s'annulent, sauf éventuellement ceux dans lesquels $|\lambda| = 0$. Le membre de droite de (7.2.13) ne contient donc aucun ψ dérivé, et par conséquent, le membre de gauche nous apprends que les $b^{(\mu)A}{}_{\alpha}$ sont également tous nuls, sauf éventuellement ceux avec $|\mu| = 0$. Nous restons donc avec

$$
2b^{A}{}_{\alpha}\psi^{\alpha}A = -b^{\alpha}{}_{F}\epsilon_{\alpha\beta}A\psi^{\beta}. \tag{7.2.14}
$$

La première contrainte que nous notons est la suivante :

$$
2b^{A}{}_{\alpha} = b^{\beta}{}_{F}\epsilon_{\alpha\beta}. \tag{7.2.15}
$$

Les termes en $A\overline{\psi}$ et $\overline{A}\,\overline{\psi}$ Ils nous apprennent –par le même genre de raisonnement– que

$$
b^{(\mu)A}{}_{\dot\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad b^{(\mu)\dot\alpha}{}_{F} = 0. \tag{7.2.16}
$$

7.2.2 La contrainte avec $\overline{F}$

$$
\begin{aligned}
B\frac{\delta\mathcal{L}_{int}}{\delta\overline{F}} &= \left(b^{(\mu)\overline{A}}{}_{\alpha}\,\psi^{\alpha}_{(\mu)} + b^{(\mu)\overline{A}}{}_{\dot\alpha}\,\overline{\psi}^{\dot\alpha}_{(\mu)}\right)4\overline{A} \\
&\stackrel{!}{=} -(-\partial)_{(\lambda)}\left[b^{(\lambda)\alpha}{}_{\overline{F}}\;2\epsilon_{\alpha\beta}A\psi^{\beta} + b^{(\lambda)\dot\alpha}{}_{\overline{F}}\;2\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{A}\,\overline{\psi}^{\dot\beta}\right].
\end{aligned}
\tag{7.2.17}
$$

Les contraintes qui en découlent sont les suivantes :

Termes en $A\psi$ et $\overline{A}\psi$ Ils font en sorte que pour tout (λ),

$$b^{(\lambda)\alpha}{}_{\overline{F}} = 0 \qquad \text{et} \qquad b^{(\lambda)\overline{A}}{}_{\alpha} = 0. \tag{7.2.18}$$

Termes en $\overline{A}\,\overline{\psi}$ Ces termes imposent

$$2b^{\overline{A}}{}_{\dot\alpha} = b^{\dot\beta}{}_{\overline{F}}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}, \tag{7.2.19}$$

les autres $b^{(\mu)\overline{A}}{}_{\dot\alpha}$ et $b^{(\mu)\dot\beta}{}_{\overline{F}}$ étant nuls.

7.2.3 La contrainte avec A

En tenant compte des coefficients de (7.2.6)–(7.2.11) que nous avons déjà montré être nuls, nous trouvons que

$$\begin{aligned} B\frac{\delta\mathcal{L}_{int}}{\delta A} &= \left(b^{A}{}_{\alpha}\psi^{\alpha}\right)4F + \left(b^{(\mu)F}{}_{\alpha}\,\psi^{\alpha}_{(\mu)} + b^{(\mu)F}{}_{\dot\alpha}\,\overline{\psi}^{\dot\alpha}_{(\mu)}\right)4A & (7.2.20)\\ &\quad + \left(b^{(\mu)\alpha}{}_{A}\,A_{(\mu)} + b^{(\mu)\alpha}{}_{\overline{A}}\,\overline{A}_{(\mu)} + b^{\alpha}{}_{F}F\right)2\epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta} & (7.2.21)\\ &\overset{!}{=} -(-\partial)_{(\lambda)}\left[b^{(\lambda)\alpha}{}_{A}\,2A\epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta} + b^{(\lambda)\dot\alpha}{}_{A}\,2\overline{A}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}\right]. & (7.2.22)\end{aligned}$$

Termes en ψF

$$2b^{A}{}_{\alpha} = b^{\beta}{}_{F}\epsilon_{\alpha\beta},$$

ce qui ne fait que confirmer la condition (7.2.15). Dans la suite, nous ne signalerons plus quand de telles confirmations apparaîtront.

Termes en $A\psi$ Ces termes donnent

$$2b^{(\mu)F}{}_{\alpha}\,\psi^{\alpha}_{(\mu)}A + b^{(\mu)\alpha}{}_{A}\,A_{(\mu)}\epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta} = -(-\partial)_{(\lambda)}\left[b^{(\lambda)\alpha}{}_{A}\,\epsilon_{\alpha\beta}A\psi^{\beta}\right]. \tag{7.2.23}$$

Tout les termes –dans la somme sur (λ)– du second membre contenant plus de deux dérivés sont nuls, étant donné que dans ces termes, nous pouvons trouver des termes contenant à la fois du A et du ψ dérivé. Nous restons donc avec

$$\begin{aligned} 2b^{F}{}_{\beta}\psi^{\beta}A + 2b^{\mu\,F}{}_{\beta}\,\psi^{\beta}_{\mu}A \quad &+ \quad b^{\alpha}{}_{A}\epsilon_{\alpha\beta}A\psi^{\beta} + b^{\mu\,\alpha}{}_{A}\,\epsilon_{\alpha\beta}A_{\mu}\psi^{\beta}\\ &= \quad -b^{\alpha}{}_{A}\epsilon_{\alpha\beta}A\psi^{\beta} + \partial_{\mu}\left[b^{\mu\,\alpha}{}_{A}\,\epsilon_{\alpha\beta}A\psi^{\beta}\right], \quad (7.2.24)\end{aligned}$$

que nous pouvons à nouveau décomposer en termes contenant plus précisément $\psi^{\beta}A$, $\psi^{\beta}_{\mu}A$,et $\psi^{\beta}A_{\mu}$. Ces termes donnent respectivement les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} 2b^{F}{}_{\beta} + 2b^{\alpha}{}_{A}\epsilon_{\alpha\beta} &= \partial_{\mu}b^{\mu\,\alpha}{}_{A}\,\epsilon_{\alpha\beta}, & (7.2.25)\\ 2b^{\mu\,F}{}_{\beta} &= b^{\mu\,\alpha}{}_{A}\,\epsilon_{\alpha\beta}, & (7.2.26)\\ b^{\mu\,\alpha}{}_{A}\,\epsilon_{\alpha\beta} &= b^{\mu\,\alpha}{}_{A}\,\epsilon_{\alpha\beta}. & (7.2.27)\end{aligned}$$

La dernière égalité étant triviale, nous ne la retenons pas.

Termes en $\overline{\psi}A$, $\overline{\psi A}$, $\overline{A}\psi$ Ces termes donnent respectivement les annulations suivantes :

$$b^{(\mu)F}{}_{\dot\alpha} = 0, \tag{7.2.28}$$
$$b^{(\mu)\dot\alpha}{}_{A} = 0, \tag{7.2.29}$$
$$b^{(\mu)\alpha}{}_{\overline{A}} = 0. \tag{7.2.30}$$

7.2.4 La contrainte avec $\overline{A}$

$$\begin{aligned} B\frac{\delta\mathcal{L}_{int}}{\delta\overline{A}} &= \left(b^{\overline{A}}{}_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha}\right)4\overline{F} + \left(b^{(\mu)\overline{F}}{}_{\alpha}\,\psi^{\alpha}_{(\mu)} + b^{(\mu)\overline{F}}{}_{\dot\alpha}\,\overline{\psi}^{\dot\alpha}_{(\mu)}\right)4\overline{A} \\ &\quad + \left(b^{(\mu)\dot\alpha}{}_{\overline{A}}\,\overline{A}_{(\mu)} + b^{\dot\alpha}{}_{\overline{F}}\overline{F}\right)2\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta} \qquad (7.2.31) \\ &\stackrel{!}{=} -(-\partial)_{(\lambda)}\left[b^{(\lambda)\dot\alpha}{}_{\overline{A}}\,2\overline{A}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}\right]. \qquad (7.2.32) \end{aligned}$$

Termes en $\psi\overline{A}$

$$b^{(\mu)\overline{F}}{}_{\alpha} = 0. \tag{7.2.33}$$

termes en $\overline{\psi A}$

$$2b^{(\mu)\overline{F}}{}_{\dot\alpha}\,\overline{\psi}^{\dot\alpha}_{(\mu)}\overline{A} + b^{(\mu)\dot\beta}{}_{\overline{A}}\,\overline{A}_{(\mu)}\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha} = (-\partial)_{(\lambda)}\left[b^{(\lambda)\dot\beta}{}_{\overline{A}}\,\overline{A}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\alpha}\right]. \tag{7.2.34}$$

Les termes du membre de droite qui contiennent deux dérivées ou plus doivent s'annuler. Par conséquent, il ne reste de non nul que les coefficients $b^{(\mu)i}{}_{j}$ avec $|\mu|$ égal à zéro ou à un. En séparant dans les termes qui restent les parties en $\overline{\psi}^{\dot\alpha}\overline{A}$, $\overline{\psi}^{\dot\alpha}_{\mu}\overline{A}$, et $\overline{\psi}^{\dot\alpha}\overline{A}_{\mu}$, nous trouvons les contraintes non triviales suivantes :

$$\begin{aligned} 2b^{\overline{F}}{}_{\dot\alpha} - 2b^{\dot\beta}{}_{\overline{A}}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} &= -\partial_\mu b^{\mu\,\dot\beta}{}_{\overline{A}}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}, \qquad (7.2.35) \\ 2b^{\mu\,\overline{F}}{}_{\dot\alpha} &= -b^{\mu\,\dot\beta}{}_{\overline{A}}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}. \qquad (7.2.36) \end{aligned}$$

7.2.5 La contrainte avec ψ^α

Cette fois-ci, la contrainte (B.0.7) est réellement différente de (2.1.7), étant donné que tant B que ψ^α sont impairs. Nous avons donc un signe différent par rapport à ce dont nous avons l'habitude dans le second membre de la condition. En tenant compte des contraintes déjà établies, nous avons :

$$\begin{aligned} B\frac{\delta\mathcal{L}_{int}}{\delta\psi^\alpha} &= \left(b^{A}{}_{\gamma}\psi^{\gamma}\right)2\epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta} + \left(b^{\beta}{}_{A}A + b^{\mu\,\beta}{}_{A}\,A_\mu + b^{\beta}{}_{F}F\right)2A\epsilon_{\alpha\beta} \\ &\stackrel{!}{=} b^{A}{}_{\alpha}(4AF + \epsilon_{\gamma\beta}\psi^\gamma\psi^\beta) + b^{F}{}_{\alpha}2A^2 - \partial_\mu\left(b^{\mu\,F}{}_{\alpha}\,2A^2\right). \qquad (7.2.37) \end{aligned}$$

Termes en $\psi\psi$

$$2b^A{}_\gamma \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\gamma\psi^\beta = b^A{}_\alpha \epsilon_{\gamma\beta}\psi^\gamma\psi^\beta. \tag{7.2.38}$$

Pour trouver la contrainte que cela entraîne sur les $b^A{}_\alpha$, nous devons égaler les parties *antisymétrique* en $\gamma\beta$ des coefficients des deux membres. Cela donne

$$b^A{}_\gamma \epsilon_{\alpha\beta} + b^A{}_\beta \epsilon_{\gamma\alpha} + b^A{}_\alpha \epsilon_{\beta\gamma} = 0. \tag{7.2.39}$$

Cette relation est en fait une identité vérifiée quels que soient les coefficients $b^A{}_\alpha$. Nous ne la retenons donc pas.

Termes en AA Nous devons y séparer les termes en A^2 et en AA_μ. La seule nouvelle contrainte qui apparaît est

$$b^\beta{}_A \epsilon_{\alpha\beta} = b^F{}_\alpha - \partial_\mu b^{\mu F}{}_\alpha\,. \tag{7.2.40}$$

Termes en FA Ils n'apportent rien de nouveau.

7.2.6 La contrainte avec $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$

$$\begin{aligned} B\frac{\delta\mathcal{L}_{int}}{\delta\overline{\psi}\dot\alpha} &= 2b^{\overline{A}}{}_{\dot\gamma}\overline{\psi}^{\dot\gamma}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta} + 2\left(b^{\dot\beta}{}_{\overline{A}}\overline{A} + b^{\mu\dot\beta}{}_{\overline{A}}\overline{A}_\mu + b^{\dot\beta}{}_{\overline{F}}\overline{F}\right)\overline{A}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \\ &\overset{!}{=} b^{\overline{A}}{}_{\dot\alpha}(4\overline{A}\,\overline{F} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\beta}) + 2b^{\overline{F}}{}_{\dot\alpha}\overline{A}^2 - 2\partial_\mu\left(b^{\mu\overline{F}}{}_{\dot\alpha}\overline{A}^2\right). \end{aligned} \tag{7.2.41}$$

Termes en $\overline{\psi\psi}$ Lorsque nous cherchons les contraintes liées à ces termes, nous devons à nouveau ne garder que la partie antisymétrique de l'expression obtenue. Nous trouvons

$$b^{\overline{A}}{}_{\dot\alpha}\epsilon_{\dot\beta\dot\gamma} + b^{\overline{A}}{}_{\dot\beta}\epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha} + b^{\overline{A}}{}_{\dot\gamma}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} = 0, \tag{7.2.42}$$

qui comme (7.2.39) est une identité qui ne donne aucune information sur les $b^{\overline{A}}{}_{\dot\alpha}$.

Termes en $\overline{A}\,\overline{A}$

$$b^{\dot\beta}{}_{\overline{A}}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} = b^{\overline{F}}{}_{\dot\alpha} - \partial_\mu b^{\mu\overline{F}}{}_{\dot\alpha}\,, \tag{7.2.43}$$

Termes en $\overline{A}\,\overline{F}$

$$b^{\dot\beta}{}_{\overline{F}}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} = 2b^{\overline{A}}{}_{\dot\alpha}, \tag{7.2.44}$$

Termes en $\overline{A}_\mu\overline{A}$

$$b^{\mu\dot\beta}{}_{\overline{A}} = -2b^{\mu\overline{F}}{}_{\dot\alpha}\,. \tag{7.2.45}$$

7.2.7 Résumé des contraintes obtenues

Les choses nulles

$$b^{(\mu)A}{}_{\dot\alpha} = 0, \qquad b^{(\mu)\overline{A}}{}_{\alpha} = 0, \tag{7.2.46}$$

$$b^{(\mu)\overline{F}}{}_{\alpha} = 0, \qquad b^{(\mu)F}{}_{\dot\alpha} = 0, \tag{7.2.47}$$

$$b^{(\mu)\dot\alpha}{}_{F} = 0, \qquad b^{(\mu)\alpha}{}_{\overline{F}} = 0, \tag{7.2.48}$$

$$b^{(\mu)\alpha}{}_{\overline{A}} = 0, \qquad b^{(\mu)\dot\alpha}{}_{A} = 0. \tag{7.2.49}$$

Les autres

$$2b^{A}{}_{\alpha} = b^{\beta}{}_{F}\epsilon_{\alpha\beta}, \tag{7.2.50}$$

$$2b^{F}{}_{\beta} + 2b^{\alpha}{}_{A}\epsilon_{\alpha\beta} = \partial_\mu b^{\mu\,\alpha}{}_{A}\,\epsilon_{\alpha\beta}, \tag{7.2.51}$$

$$2b^{\mu\,F}{}_{\beta} = b^{\mu\,\alpha}{}_{A}\,\epsilon_{\alpha\beta}, \tag{7.2.52}$$

$$b^{\beta}{}_{A}\epsilon_{\alpha\beta} = b^{F}{}_{\alpha} - \partial_\mu b^{\mu\,F}{}_{\alpha}\,, \tag{7.2.53}$$

Et nous avons de même pour les paramètres correspondants aux champs complexes-conjuguées :

$$2b^{\overline{A}}{}_{\dot\alpha} = b^{\dot\beta}{}_{\overline{F}}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}, \tag{7.2.54}$$

$$2b^{\overline{F}}{}_{\dot\beta} + 2b^{\dot\alpha}{}_{\overline{A}}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} = \partial_\mu b^{\mu\,\dot\alpha}{}_{\overline{A}}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}, \tag{7.2.55}$$

$$2b^{\mu\,\overline{F}}{}_{\dot\beta} = b^{\mu\,\dot\alpha}{}_{\overline{A}}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}, \tag{7.2.56}$$

$$b^{\dot\beta}{}_{\overline{A}}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} = b^{\overline{F}}{}_{\dot\alpha} - \partial_\mu b^{\mu\,\overline{F}}{}_{\dot\alpha}\,, \tag{7.2.57}$$

Les paramètres non repris dans ces équations sont tous nuls. C'est par exemple le cas de $b^{\mu\,A}{}_{\alpha}$ et de $b^{\mu\nu\,\alpha}{}_{A}$.

7.3 La partie cinétique du lagrangien de Wess-Zumino

Afin de pouvoir aller plus loin, nous aurons besoin de quelque contraintes provenant du terme cinétique de Wess-Zumino. Ce dernier s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cin} &= \eta^{\mu\nu} A_\mu \overline{A}_\nu + \frac{i}{2}\psi^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} \overline{\psi}^{\dot\alpha}_\mu + F\overline{F} \\ &\quad -\frac{m}{4}\left(4AF + \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta + 4\overline{A}\,\overline{F} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\beta}\right).\end{aligned} \tag{7.3.1}$$

Nous devons d'abord calculer ses dérivée d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{cin}}{\delta\psi^\alpha} = \frac{i}{2}\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}_\mu - \frac{m}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta, \tag{7.3.2}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{cin}}{\delta\overline{\psi}^{\dot\alpha}} = \frac{i}{2}\,\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\psi^\beta_\mu - \frac{m}{2}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}, \tag{7.3.3}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{cin}}{\delta F} = \overline{F} - mA, \tag{7.3.4}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{cin}}{\delta\overline{F}} = F - m\overline{A}, \tag{7.3.5}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{cin}}{\delta A} = -(mF + \Box\overline{A}). \tag{7.3.6}$$

Faisons une remarque : *a priori*, nous nous attendons à ce que la dérivée d'Euler-Lagrange de $\mathcal{L}_{cin}$ par rapport à ψ et $\overline{\psi}$ soient complexes-conjuguées l'unes de l'autres. Telles qu'écrites ici, nous avons l'impression que ce n'est pas le cas. En fait, les équations (7.3.2) et (7.3.3) sont bien complexes-conjuguées l'une de l'autre : la propriété (6.2.7) fait en sorte que

$$\overline{\frac{i}{2}\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}_\mu} = -\frac{i}{2}\,\overline{\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}}\psi^\beta_\mu = -\frac{i}{2}(-)\,\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\psi^\beta_\mu = \frac{i}{2}\,\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\psi^\beta_\mu. \tag{7.3.7}$$

Ensuite, nous devons écrire une à une les différentes contraintes qui apparaissent, et en tirer des conclusions. Pour ce faire, nous allons bien entendu tenir compte des différentes contraintes déjà obtenues.

7.3.1 La contrainte avec ψ^α

$$\begin{aligned}&-\frac{m}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\Big({b^\beta}_F F + {b^\beta}_A A + {b^{\mu\beta}}_A A_\mu\Big) + \partial_\nu\Big({b^{\dot\alpha}}_{\overline{F}}\overline{F} + {b^{\dot\alpha}}_{\overline{A}}\overline{A} + {b^{\mu\dot\alpha}}_{\overline{A}}\,\overline{A}_\mu\Big)\big(\frac{i}{2}\sigma^\nu_{\alpha\dot\alpha}\big) \\ &\quad \stackrel{!}{=} -{b^A}_\alpha(mF + \Box\overline{A}) + {b^F}_\alpha(\overline{F} - mA) - \partial_\mu\left[{b^{\mu F}}_\alpha(\overline{F} - mA)\right]\end{aligned} \tag{7.3.8}$$

Termes en F

$$m{b^\beta}_F \epsilon_{\alpha\beta} = 2m{b^A}_\alpha. \tag{7.3.9}$$

Dans le cas où $m \neq 0$, cette relation confirme (7.2.50).

Termes en A Si $m \neq 0$, nous trouvons

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}{b^\beta}_A = {b^F}_\alpha - \partial_\mu {b^{\mu\,F}}_\alpha. \tag{7.3.10}$$

Or, la contrainte (7.2.53) fait en sorte que le second membre vaut ${b^\beta}_A \epsilon_{\alpha\beta}$. Nous en déduisons que

$${b^\beta}_A = 0. \tag{7.3.11}$$

7.3.2 La contrainte avec $\overline{F}$

$${b^F}_\alpha \psi^\alpha + {b^{\mu\,F}}_\alpha \psi^\alpha_\mu + {b^{\overline{A}}}_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha}(-m) \overset{!}{=} -b^{\dot\alpha}_{\overline{F}}\Big(-\frac{m}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta} + \frac{i}{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\psi^\alpha_\mu\Big) \tag{7.3.12}$$

Termes en ψ^α

$${b^F}_\alpha = 0, \tag{7.3.13}$$

Termes en ψ^α_μ

$${b^{\mu\,F}}_\alpha = -\frac{i}{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} b^{\dot\alpha}_{\overline{F}}. \tag{7.3.14}$$

7.3.3 La contrainte avec F

$${b^{\overline{F}}}_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha} + {b^{\mu\,\overline{F}}}_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha}_\mu - m{b^A}_\alpha\psi^\alpha \overset{!}{=} -{b^\alpha}_F\Big(-\frac{m}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta + \frac{i}{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha}_\mu\Big). \tag{7.3.15}$$

Les termes en ψ^α_μ donnent la contrainte suivante :

$${b^{\mu\,\overline{F}}}_{\dot\alpha} = -\frac{i}{2}{b^\alpha}_F\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}. \tag{7.3.16}$$

Avec ces contraintes supplémentaires, nous sommes en mesure de fixer toutes les supersymétries du lagrangien de Wess-Zumino *ne dépendant pas de x*.

7.3.4 Recherche d'une solution

Commençons par plusieurs remarque sur le système (7.2.50)–(7.2.57).

- Tout ce que nous pouvons dire à propos du sous-système (7.2.50)–(7.2.53) s'applique automatiquement au sous-système (7.2.54)–(7.2.57),
- à partir du moment où nous ne cherchons plus que des symétries dont les paramètres b ne dépendent pas de x, compte tenu de (7.3.11) et (7.3.13), (7.2.53) est une identité qui ne nous apporte donc rien.
- et pour finir, (7.2.53) peut se déduire de (7.2.51) et (7.2.52).

En définitive, le système que nous devons résoudre se décompose en deux sous-systèmes découplés. Le premier est :

$$
\begin{aligned}
2b^A{}_\alpha &= b^\beta{}_F \epsilon_{\alpha\beta}, && (7.3.17)\\
b^{\mu\overline{F}}{}_{\dot\alpha} &= -\frac{i}{2} b^\beta{}_F \sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}, && (7.3.18)\\
2b^{\mu\overline{F}}{}_{\dot\alpha} &= b^{\mu\dot\beta}{}_{\overline{A}}\, \epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}, && (7.3.19)
\end{aligned}
$$

tandis que le second est le même, mais pour les paramètres correspondants aux champs complexes-conjugués :

$$
\begin{aligned}
2b^{\overline{A}}{}_{\dot\alpha} &= b^{\dot\beta}{}_{\overline{F}}\, \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}, && (7.3.20)\\
b^{\mu F}{}_\alpha &= -\frac{i}{2}\, {}^\mu_{\alpha\dot\alpha} b^{\dot\alpha}{}_{\overline{F}}, && (7.3.21)\\
2b^{\mu F}{}_\beta &= b^{\mu\alpha}{}_A\, \epsilon_{\alpha\beta}. && (7.3.22)
\end{aligned}
$$

Dès que $b^A{}_\alpha$ est fixé, toutes les variables qui apparaissent dans le premier sous-système sont fixées ; nous avons donc une base de deux solutions à ce sous-système : une solution dans laquelle $b^A{}_1$ vaut 1 tandis que $b^A{}_2$ vaut zéro, et une autre solution dans laquelle nous avons le contraire. Le système complet aura donc quatre solutions car le second sous-système aura également deux solutions. Nous allons à présent chercher les solutions du système complet en posant $b^{\overline{A}}{}_{\dot\alpha} = 0$ pour tout $\dot\alpha$, et en travaillant sur le premier sous-système (équations (7.3.17)–(7.3.18)). Nous trouverons alors deux solutions au système, les deux autres se trouvant en résolvant de la même façon, mais en posant $b^A{}_\alpha = 0$, et en raisonnant sur le second sous-système.

Le second sous-système donne immédiatement que pour tout $\dot\alpha$, $\dot\beta$, et α,

$$
\begin{aligned}
b^{\overline{A}}{}_{\dot\alpha} &= 0, && (7.3.23)\\
b^{\mu F}{}_\alpha &= 0, && (7.3.24)\\
b^{\mu\alpha}{}_A &= 0 && (7.3.25)\\
b^{\dot\alpha}{}_{\overline{F}} &= 0. && (7.3.26)
\end{aligned}
$$

D'autre part, en contractant (7.3.17) avec $\epsilon^{\gamma\alpha}$, et en définissant

$$
b^{A\alpha} = b^A{}_\beta \epsilon^{\alpha\beta}, \qquad (7.3.27)
$$

nous avons

$$2b^{A\alpha} = -b^{\alpha}{}_{F}. \tag{7.3.28}$$

Nous définissons la symétrie δ_α comme étant celle pour laquelle

$$b^{A\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}. \tag{7.3.29}$$

Pour éviter les fautes d'indices, il est plus prudent de réécrire l'équation (7.3.28) en désignant l'indice libre par β plutôt que α qui est maintenant fixé. En remplaçant dans l'équation obtenue $b^{A\beta}$ par sa valeur donnée par (7.3.29), nous trouvons :

$$2b^{A\beta} = -b^{\beta}{}_{F} = 2\delta^{\beta}_{\alpha}. \tag{7.3.30}$$

Ensuite, nous remplaçons la valeur de $b^{\beta}{}_{F}$ tirée de cette équation dans (7.3.18) :

$$b^{\mu\overline{F}}{}_{\dot\alpha} = -\frac{i}{2}\, b^{\beta}{}_{F}\sigma^{\mu}_{\beta\dot\alpha} = -\frac{i}{2}(-2\delta^{\beta}_{\alpha})\sigma^{\mu}_{\beta\dot\alpha}. \tag{7.3.31}$$

Ceci entraîne que

$$b^{\mu\overline{F}}{}_{\dot\alpha} = i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}. \tag{7.3.32}$$

Pour finir, nous remplaçons cette valeur de $b^{\mu\overline{F}}{}_{\dot\alpha}$ dans (7.3.19) que nous contractons avec $\epsilon^{\dot\gamma\dot\alpha}$. Le résultat est

$$b^{\mu\dot\alpha}{}_{\overline{A}} = 2i\sigma^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\dot\alpha}. \tag{7.3.33}$$

D'après la symétrie du problème, (7.3.11) et (7.3.13), il est évident que nous ayons aussi

$$b^{\dot\beta}{}_{\overline{A}} = 0, \tag{7.3.34}$$

$$b^{\overline{F}}{}_{\dot\alpha} = 0. \tag{7.3.35}$$

Nous sommes maintenant en mesure de complètement expliciter les variations des champs sous la forme (7.2.6)–(7.2.11). En utilisant (7.3.11), (7.3.30) et (7.3.25), nous avons :

$$\delta_\alpha\psi^{\beta} = b^{\beta}{}_{A}A + b^{\mu\beta}{}_{A}\,A_\mu + b^{\beta}{}_{F}F = -2\delta^{\beta}_{\alpha}F\,; \tag{7.3.36}$$

avec (7.3.34), (7.3.26) et (7.3.33),

$$\delta_\alpha\overline{\psi}^{\dot\beta} = b^{\dot\beta}{}_{\overline{A}}\overline{A} + b^{\mu\dot\beta}{}_{\overline{A}}\,\overline{A}_{\mu} + b^{\dot\beta}{}_{\overline{F}}\overline{F} = 2i\sigma^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\dot\beta}\,\overline{A}_{\mu}, \tag{7.3.37}$$

ce que nous réécrivons sous la forme plus simple

$$\delta_\alpha\overline{\psi}_{\dot\alpha} = 2i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\overline{A}_{\mu}. \tag{7.3.38}$$

Avec (7.3.30), nous avons

$$\delta_\alpha A = b^A{}_\beta \psi^\beta = -b^{A\beta}\psi_\beta = -\psi_\alpha\,; \tag{7.3.39}$$

avec (7.3.23),

$$\delta_\alpha \overline{A} = 0\,; \tag{7.3.40}$$

avec (7.3.13) et (7.3.24),

$$\delta_\alpha F = b^F{}_\alpha \psi^\alpha + b^{\mu F}{}_\alpha \psi^\alpha_\mu = 0\,; \tag{7.3.41}$$

et enfin, avec (7.3.35) et (7.3.32), il vient

$$\delta_\alpha \overline{F} = b^{\overline{F}}{}_{\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta} + b^{\mu \overline{F}}{}_{\dot\beta}\,\overline{\psi}^{\dot\beta}_\mu = i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}_\mu. \tag{7.3.42}$$

7.3.5 Conclusion

Nous avons complètement démontré que les seules supersymétries[3] possibles pour le lagrangien de Wess-Zumino sont les deux δ_α ci-dessous, ainsi que les deux $\overline{\delta}_{\dot\alpha}$ correspondantes qui se déduisent de δ_α en prenant par conjugaison complexe.

$$\begin{array}{llll} \delta_\alpha\psi^\beta & = -2\delta^\beta_\alpha F & \delta_\alpha\overline{\psi}_{\dot\alpha} & = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{A}_{\,\mu} \\ \delta_\alpha A & = -\psi_\alpha & \delta_\alpha\overline{A} & = 0 \\ \delta_\alpha F & = 0 & \delta_\alpha\overline{F} & = i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}_\mu. \end{array} \tag{7.3.43}$$

7.3.6 Remarque à propos de la parité

Souvenons-nous de l'identité (7.2.39). Si nous avions pris comme convention que les spineurs commutaient, nous aurions obtenu une relation presque identique mais pas tout à fait : nous aurions dû prendre la partie *symétrique* de (7.2.38). La relation ainsi obtenue n'aurait plus été une identité, mais une contrainte supplémentaire sur les $b^{\;A}{}_{\alpha}$. Il n'est pas difficile de montrer que cette contraite aurait comme effet d'annuler toutes les supersymétries possibles.

L'existence même de supersymétries est donc conditionnée aux relations d'*anti*commutations des spineurs.

[3]globales, linéaires et dont la caractéristique ne dépends pas de x.

Annexe A

Le théorème de Coleman et Mandula

Le théorème no-go de Coleman et Mandula [4] démontre que la seule algèbre de Lie de générateurs de symétries contenant les transformations de Poincaré ne peut être composé, outre les P_μ et $J_{\mu\nu}$ (générateurs respectivement des translations et des transformations de Lorentz propres), uniquement de générateurs[1] B_α telles que

- $[B_\alpha, P_\mu] = [B_\alpha, J_{\mu\nu}] = 0$,
- B_α agit sur les états physiques par des matrices hermitiennes indépendantes du spin et de l'impulsion.

Dans le contexte de ce théorème, nous entendons par *générateur de symétrie*, un opérateur hermitien B_α tel que

- l'opérateur B_α commute avec la matrice de diffusion S,
- les générateurs de symétries B_α forment une algèbre de Lie, c'est à dire que si B_α et B_β sont des générateurs de symétrie, alors leur commutateur est aussi un générateur de symétrie : $[B_\alpha, B_\beta] = k^\gamma_{\alpha\beta} B_\gamma$,
- un état à une particule est changé en un état à une particule sous l'action de B_α,
- sur les états à plusieurs particules, B_α agit comme somme directe de son action sur des états à une seule particule.

Cela se démontre en faisant un certain nombre d'hypothèses raisonnables sur la matrice S.

Une exception connue à ce théorème est le groupe conforme qui peut être une symétrie de la matrice S dans certains cas spéciaux, pour des particules sans masse. Voir discution page 39 par exemple.

Ce résultat sert souvent de motivation à l'étude des superalgèbres, étant donné que celles-ci sortent du cadre du théorème de Coleman et Mandula. En effet, les supersymétries forment une superalgèbre de Lie, et non une algèbre de Lie. Elles offrent donc une possibilité d'extension non triviale du groupe de Poincaré. En particulier, les supersymétries permettent de décrire des symétries entre les fermions et les bosons, ce que

[1]Ces générateurs sont souvent appelés *symétries internes*. Dans le cadre de notre étude, nous désigneront sous ce nom les symétries de l'action qui ont uniquement un effet de changement de base pour les ϕ^i. C'est à dire des symétries qui agissent de la manière suivante :$B\phi^i = B^i{}_j\,\phi^j$.

le théorème de Coleman et Mandula montre ne pas être possible à l'aide seulement de générateurs de symétrie formant une algèbre de Lie.

Ce théorème se démontre en travaillant dans un formalisme lié *à la matrice S*, alors que les cours modernes de théorie quantique des champs décrivent toute la théorie en termes de lagrangiens, la matrice S ne prenant de rôle qu'au moment de calculer des amplitudes. De plus, la matrice S est un concept de théorie des champs n'existant pas en mécanique classique (contrairement aux lagrangiens).

Précisons à ce niveau que l'énoncé du Coleman et Mandula que nous donnons ici n'a pas la prétention d'être comlet, ni de refléter exactement ce qui est écrit dans l'article original. En ceci, nous nous conformons à notre programme dans lequel le Coleman et Mandula n'est qu'une motivation.

Annexe B

Le critère d'invariance avec des variable graduées

Lorsque nous travaillons sur des théories contenant des spineurs à côté des scalaires, le théorème 1 n'est plus vrai, étant donné que certains des ϕ^i anticommutent au lieu de commuter. Dans cet appendice, nous allons démontrer une formule analogue à (1.1.29), qui sera également valable lorsque certaines coordonnées locales auront des parités négatives[1].

Nous ne considérons que des symétries paires *ou* impaires. C'est à dire que $\delta_Q \phi^i$ sera une combinaison de ϕ^j tous pairs ou tous impairs : il n'y aura pas de symétries transformant un champ scalaire en une combinaison de scalaires et de spineurs par exemple. Ceci fait en sorte qu'il est légitime de parler de la parité de δ_Q.

La démonstration qui suit est tirée de [3], théorème 6.5.

Notons pour commencer que le lemme 6 reste valable, étant donné que le ∂_μ est toujours pair. En effet,

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \phi^i_{(\nu)\mu} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\nu)}}$$

et par conséquent, la parité du $\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\nu)}}$ est toujours compensée par celle de $\phi^i_{(\nu)\mu}$ qui est bien entendu toujours la même.

À la place du théorème 1, nous avons à présent le

Théorème 5. *Si Q^i et f sont des fonctions locales d'un espace dont les coordonnées locales ϕ^i sont de parité η_i, et si la parité de δ_Q vaut η_Q, alors nous avons la formule suivante :*

$$\delta_Q \frac{\delta f}{\delta \phi^i} = (-1)^{\eta_Q \eta_i} \frac{\delta}{\delta \phi^i}(\delta_Q f) - (-1)^{\eta_Q \eta_i} (-\partial)_{(\lambda)} \left[\frac{\partial Q^j}{\partial \phi^i_{(\lambda)}} \frac{\delta f}{\delta \phi^j} \right]. \tag{B.0.1}$$

Démonstration. Étant donné que $(-\partial)_{(\mu)}$ est toujours pair, nous pouvons commencer

[1] Voir définition page 66.

par le commuter avec δ_Q pour obtenir

$$\delta_Q \frac{\delta f}{\delta \phi^i} = (-\partial)_{(\mu)} \left(\delta_Q \frac{\partial f}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \right). \tag{B.0.2}$$

Afin de traiter ce qui se trouve à l'intérieur de la parenthèse, nous calculons le commutateur (gradué !) de δ_Q et $\frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}$. Cela se fait comme d'habitude en faisant agir le premier opérateur sur les coefficients du second puis en faisant le contraire, à ceci près que nous ne devons pas simplement faire la différence entre les deux mais nous devons ajouter un signe moins quand les deux sont impairs.

Nous avons donc

$$\left[\delta_Q, \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}\right] = 0 - (-1)^{\eta_Q \eta_i} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} (\partial_{(\lambda)} Q^j) \frac{\partial}{\partial \phi^j_{(\lambda)}}, \tag{B.0.3}$$

mais d'autre part, nous avons par définition :

$$\left[\delta_Q, \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}\right] = \delta_Q \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} - (-1)^{\eta_Q \eta_i} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \delta_Q. \tag{B.0.4}$$

Tout ceci nous permet d'exprimer $\delta_Q \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}}$ sous la forme

$$\delta_Q \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} = -(-1)^{\eta_Q \eta_i} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} (\partial_{(\lambda)} Q^j) \frac{\partial}{\partial \phi^j_{(\lambda)}} + (-1)^{\eta_Q \eta_i} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \delta_Q. \tag{B.0.5}$$

En reprenant l'équation (B.0.2), nous trouvons la relation suivante :

$$\begin{aligned} \delta_Q \frac{\delta f}{\delta \phi^i} = & - (-\partial) \left((-1)^{\eta_Q \eta_i} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} (\partial_{(\lambda)} Q^j) \frac{\partial}{\partial \phi^j_{(\lambda)}} \right) \\ & + (-\partial)_{(\mu)} \left((-1)^{\eta_Q \eta_i} \frac{\partial}{\partial \phi^i_{(\mu)}} \delta_Q \right), \end{aligned} \tag{B.0.6}$$

d'où la thèse découle en appliquant la même procédure que dans la démonstration du théorème 1 à partir de (1.1.37).

CQFD.

Nous pouvons maintenant donner la formule qui remplace (2.1.7) lorsque nous considérons une supersymétrie :

$$B \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} = -(-1)^{\eta_B \eta_i} (-\partial)_{(\lambda)} \left[b^{(\lambda)j}{}_i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^j} \right] \tag{B.0.7}$$

où η_B est la parité de B qui est, rappelons-le, de la forme δ_Q.

Remerciements

Je tiens à remercier Glenn Barnich pour son aide d'ordre scientifique ainsi que Fabienne De Neyn pour son soutien logistique.

$\mathcal{FIN}$

Bibliographie

[1] G. Barnich. PHYS136 Quantification canonique des théories de jauges et méthodes BRST. Un cours de seconde licence en sciences physiques de l'ULB. En fait, le titre officiel du cours ne corresponds pas à la matière effectivement couverte. Cette dernière est *Symétries en théorie classique des champs. Approche cohomologique*, 2001.

[2] G. Barnich. PHYS165 Interactions fondamentales. Un cours de seconde licence en sciences physiques de l'ULB., 2003.

[3] G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux. Local brst cohomology in gauge theories. *Phys. Rept.*, 338 :439–569, 2000. hep-th/0002245.

[4] S. Coleman and J. Mandula. All possible symmetries of the S matrix. *Physical Review*, 159(5) :1251–1256, july 1967.

[5] J.F. Cornwell. *Group theory in physics*, volume 2. Harcourt Brace&Company, 1984.

[6] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal. *Conformal field theory*. Springer, 1997.

[7] P.J. Olver. *Application of Lie groups to differential equations*. Springer, 1993.

[8] R. Penrose and W. Rindler. *Spinors and space-time*, volume 1. Cambridge University Press, 1984.

[9] O. Piguet. Introduction to supersymmetric gauge theories. 1997. hep-th/9710095.

[10] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 3. Cambridge University Press, 2000.

Table des matières

Introduction **i**
Motivations i
Plan i

1 Symétries et formes caractéristiques **1**
1.1 Généralités sur les fonctions locales 1
1.1.1 Définitions 1
1.1.2 Opérateurs sur $Loc(\mathcal{E})$ 2
1.1.3 Quelque résultats importants 5
1.2 Notions sur les formes 9
1.3 La forme caractéristique des champs de vecteurs 14
1.3.1 Transformations dans $\mathcal{J}^0$ 14
1.3.2 Exemple 16
1.3.3 Transformations dans $\mathcal{J}^1$ 17
1.3.4 Forme caractéristique 20
1.4 Symétries de l'action 20
1.4.1 Définition et propriétés 20
1.4.2 Comment rechercher des symétries ? 23
1.5 Formes caractéristiques des transformations conformes 23
1.5.1 Les translations 23
1.5.2 Les rotations 24
1.5.3 Les dilatations 25
1.5.4 Les spéciales conformes 26

2 Notations et premiers résultats **27**
2.1 Hypothèses et point de départ 27
2.2 L'importance de l'interaction 29

3 Un seul champ scalaire réel **35**
3.1 Poser les contraintes 35
3.1.1 Les termes quadratiques 35
3.1.2 Le terme d'interaction 37
3.2 Résolution des contraintes 37
3.2.1 Deux façons d'éliminer les dilatations et spéciales conformes . . . 39

3.2.2 Conclusions . . . 40

4 Plusieurs champs scalaires **41**

4.1 Poser les contraintes . . . 41

4.2 Résolution des contraintes . . . 44

4.2.1 Le groupe conforme . . . 44

4.2.2 Analyse des contraintes d'interactions . . . 45

4.2.3 Ce que deviennent les deux dernières contraintes . . . 45

4.2.4 Analyse des termes de masse . . . 47

4.3 Note à propos des symétries internes . . . 47

5 Champs complexes **49**

5.1 Recherche du lagrangien . . . 49

5.2 Poser les contraintes . . . 51

5.2.1 En ce qui concerne le terme potentiel . . . 53

5.3 Résolution des contraintes . . . 54

5.3.1 Le groupe conforme à nouveau . . . 54

5.3.2 L'autre paire de conditions . . . 55

5.4 Note à propos des symétries internes . . . 56

6 Définitions et conventions à propos des spineurs **59**

6.1 Spineurs . . . 59

6.1.1 Spineurs de Weyl . . . 59

6.1.2 Spineurs de Dirac . . . 62

6.1.3 Spineurs de Majorana . . . 64

6.2 Développements . . . 64

6.2.1 L'espace $\mathbb{C}^2 \otimes \overline{\mathbb{C}}^2$ . . . 64

6.2.2 La parité des variables . . . 66

7 Remarques à propos de la supersymétrie **67**

7.1 L'interaction simple entre un Dirac et un scalaire . . . 67

7.2 Le modèle de Wess-Zumino . . . 69

7.2.1 La contrainte avec F . . . 71

7.2.2 La contrainte avec $\overline{F}$ . . . 71

7.2.3 La contrainte avec A . . . 72

7.2.4 La contrainte avec $\overline{A}$ . . . 73

7.2.5 La contrainte avec ψ^α . . . 73

7.2.6 La contrainte avec $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$ . . . 74

7.2.7 Résumé des contraintes obtenues . . . 75

7.3 La partie cinétique du lagrangien de Wess-Zumino . . . 76

7.3.1 La contrainte avec ψ^α . . . 76

7.3.2 La contrainte avec $\overline{F}$ . . . 77

7.3.3 La contrainte avec F . . . 77

7.3.4 Recherche d'une solution . . . 78

7.3.5 Conclusion 80
7.3.6 Remarque à propos de la parité 80

A Le théorème de Coleman et Mandula **81**

B Le critère d'invariance avec des variable graduées **83**