Le Frido

Les quelques premières années de mathématique

https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf

Laurent Claessens

avec beaucoup d'aide
(voir les remerciements)

30 novembre 2025
a39e321e8dd723c14bae8dc4c067c511b3128502



Copyright 2011-2025
Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the chapter entitled "GNU Free Documentation License".

ISBN : Y-Y-YYYYYYY-Y-Y

Plusieurs versions et extensions de ce document.

La version courante Vous trouverez une version régulièrement mise à jour à l'adresse suivante :

http://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf

Aux oraux d'agrégation Le règlement de l'agrégation oblige la commercialisation. Pour acheter les 4 volumes du Frido, voyez ici :

http://laurent.claessens-donadello.eu/frido.html

ainsi que l'erratum :

https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/blob/master/erratum.md

La version la plus complète Une version plus complète, comprenant le Frido, des exercices ainsi que de la géométrie différentielle :

http://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/giulietta.pdf

Les sources LaTeX https://github.com/LaurentClaessens/mazhe

Index thématique

1 : cardinalité
2 : morphismes et compagnie
3 : arithmétique modulo, théorème de Bézout, théorème chinois
4 : divisibilité
5 : équations diophantiennes
6 : types d'anneaux
7 : sous-groupes
8 : groupe symétrique
9 : action de groupe
10 : classification de groupes
11 : fonction indicatrice d'Euler
12 : produit semi-direct de groupes
13 : théorie des représentations
14 : espaces vectoriels
15 : rang
16 : formes bilinéaires et quadratiques
17 : endomorphismes cycliques
18 : extension de corps et polynômes
19 : polynômes
20 : polynôme d'endomorphismes
21 : dualité
22 : injections
23 : tribu, algèbre de parties, λ-systèmes et co.
24 : théorie de la mesure
25 : normes
26 : inégalités
27 : constructions topologiques
28 : espaces métriques, normés
29 : limite et continuité
30 : intégration
31 : connexité
32 : séparabilité
33 : compacts
34 : densité
35 : application réciproque
36 : applications continues et bornées
37 : suite de Cauchy, espace complet
38 : caractérisations séquentielles
39 : valeurs propres, définie positive
40 : norme matricielle, norme opérateur et rayon spectral
41 : série de matrices
42 : décomposition de matrices
43 : systèmes d'équations linéaires
44 : réduction, diagonalisation
45 : déterminant
46 : espaces de fonctions
47 : fonctions lipschitziennes
48 : suites et séries
49 : suite de fonctions
50 : exponentielle
51 : logarithme
52 : fonction puissance
53 : sommation finie et infinie
54 : polynôme de Taylor
55 : formule des accroissements finis
56 : dérivation
57 : différentielle
58 : équations différentielles
59 : convexité
60 : espaces de Hilbert, base hilbertienne
61 : analyse complexe, fonctions holomorphes
62 : permuter des limites
63 : déduire la nullité d'une fonction depuis son intégrale
64 : inversion locale, fonction implicite
65 : points fixes
66 : changement de variables
67 : techniques de calcul
68 : méthodes de calcul
69 : méthode de Newton
70 : prolongement d'applications
71 : opérations sur les distributions
72 : convolution
73 : séries de Fourier
74 : transformée de Fourier
75 : gaussienne
76 : lemme de transfert
77 : invariants de similitude
78 : isométries
79 : enveloppes
80 : intégration sur des variétés
81 : dénombrements
82 : caractérisation de distributions en probabilités
83 : théorème central limite
84 : indépendance d'événements et de variables aléatoires
85 : probabilités et espérances conditionnelles
86 : chaine de Markov

THEMEooCaHH00Ct

Thème 1 : cardinalité Le Frido[1] ne définit pas la notion de nombre cardinal ; ça nous mènerait trop loin. Au lieu de cela, nous allons nous contenter des notions d'équipotence, surpotence et subpotence, et démontrer un certain nombre de résultats en utilisant sans retenue le lemme de Zorn 1.37.

(1) Ensemble infini, définition 1.69.

(2) Ensemble dénombrable, définition 1.220.

(3) Cardinal d'un ensemble fini, définition 1.207.

(4) Définition d'équipotence, surpotence et subpotence, notations $A \succ B$ et $A \approx B$, définition 1.66.

[1] Ici je mets la référence [1] ; pas parce qu'elle est utile ici, mais parce que je veux être sûr qu'elle soit numéro 1 de façon à être facilement reconnaissable. Elle indique les affirmations à propos desquelles le lecteur doit être doublement attentif.

(5) Toute partie d'un ensemble fini est finie, lemme 1.71.

(6) Si A est un ensemble fini ou dénombrable, alors il existe une surjection $\mathbb{N} \to A$, lemme 1.230.

(7) Si A est un ensemble infini et si $f\colon A \to B$ est une application injective, alors $f(A)$ est infini, proposition 1.74.

(8) Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable, proposition 1.221

(9) Une bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, proposition 1.224.

(10) Une décomposition de $\mathbb{N}$ en une infinité de parties équipotentes à $\mathbb{N}$, corolaire 1.226.

(11) Si il existe une surjection $\mathbb{N} \to A$, alors A est fini ou dénombrable, lemme 1.227.

(12) Une union dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable, proposition 1.228

(13) Tout ensemble infini contient une partie en bijection avec $\mathbb{N}$, proposition 1.235.

(14) Toute partie d'un ensemble fini est finie, et toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable, proposition 1.236.

(15) Si $A \succeq B$ et $B \succeq A$, alors $A \approx B$, théorème de Cantor-Schröder-Bernstein 1.77

(16) Le théorème de Cantor 1.81 dit qu'il n'existe pas de surjection d'un ensemble vers son ensemble des parties. On en déduit qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles (corolaire 1.83).

(17) Si A est infini et si $A \succeq B$, alors $A \approx A \cup B$ par le lemme 1.240.

(18) Si S est un ensemble infini alors il existe une bijection $\varphi\colon \{0,1\} \times S \to S$, proposition 1.242.

(19) Si A est infini, alors $A \times \mathbb{N} \approx A$, proposition 1.245.

(20) Si A est infini et si $B \prec A$, alors $A \setminus B \approx A$, lemme 1.247.

(21) Si A est infini, alors $A \approx A \times A$, théorème 1.252.

Il y a aussi des résultats de cardinalité autour des extensions de corps.

(1) Si $\mathbb{K}$ est un corps infini, alors $\mathbb{K}[X] \approx \mathbb{K}$.

(2) Le théorème de Steinitz 6.134 affirme que tout corps admet une unique clôture algébrique. La preuve utilise pas mal de cardinalité ainsi que le lemme de Zorn 1.37.

THEMEooMOTHooOCSZ

Thème 2 : morphismes et compagnie Un morphisme est un concept algébrique. Il s'agit d'une application (pas spécialement inversible) qui préserve la structure. Quand on parle de morphisme, il faut donc préciser la structure. On dit « morphisme de groupe », « morphisme d'espace vectoriel », « morphisme d'anneaux », etc.

(1) Un morphisme de module est la définition 1.444.

(2) Un morphisme de groupes est la définition 1.88.

(3) Un morphisme d'anneaux est la définition 1.98.

(4) Un morphisme de corps est aussi la définition 1.98. Un corps n'a pas plus de structure qu'un anneau.

(5) Un isomorphisme d'espaces topologiques est une application continue, inversible, dont l'inverse est continue, 7.51. On dit aussi un homéomorphisme.

(6) Un difféomorphisme est différentiable d'inverse différentiable, définition 10.302.

(7) Un C^k-difféomorphisme est une application C^k d'inverse C^k. Définition 10.302.

NORMooTXFWooApjnOY

-1.1.
Le mot « homomorphisme » signifie exactement « morphisme », et, sauf incohérence de ma part, il n'est pas utilisé dans le Frido. Si vous tombez sur ce mot quelque part, soyez prudent, vérifiez dans le contexte si le mot attendu est bien « morphisme », et écrivez-moi.

THEMEooNRZHo6MT0Y3

Thème 3 : arithmétique modulo, théorème de Bézout, théorème chinois

(1) Pour $\mathbb{Z}^*$ c'est le théorème 1.358.

(2) Existence d'un pgcd et d'un ppcm pour tout partie d'un anneau principal, proposition 3.50.

(3) Théorème de Bézout dans un anneau principal : proposition 3.59 qui dit que si $\delta \in \text{pgcd}(a,b)$ alors il existe u, v tels que $ua + vb = \delta$

(4) Théorème de Bézout dans un anneau de polynômes : théorème 6.47.

(5) En parlant des racines de l'unité et des générateurs du groupe unitaire dans le lemme 19.8. Au passage nous y parlerons de solfège.

(6) La proposition 1.367 qui donne tout entier assez grand comme combinaisons de a et b à coefficients positifs est utilisée en chaines de Markov, voir la définition 38.33 et ce qui suit.

(7) PGCD et PPCM sont dans la définition 1.105.

(8) Calcul effectif du PGCD puis des coefficients de Bézout : sous-sections 3.2.1.1 et 3.2.1.2.

(9) Dans un anneau principal il y a une relation entre idéal engendré et pgcd, ppcm : $(a)+(b) = \text{pgcd}(a,g)$ et $(a) \cap (b) = \text{ppcm}(a,b)$. C'est la proposition 3.62.

(10) Théorème des restes chinois. Il existe beaucoup de théorèmes chinois.

(10a) Dans un anneau principal, si $a = a_1 \dots a_r$ alors on a isomorphisme $A/(a) \simeq A/(a_1) \times \dots \times A/(a_r)$ par le théorème 3.63.

(10b) Version anneaux quotients : théorème 1.420.

(10c) Version congruence. Si les I_i sont des idéaux solutions à l'équation $x \in [a_i]_{I_i}$ sont donnés par la proposition 1.419.

<++>

THEMEooDRH1O0C4

Thème 4 : divisibilité

(1) Si a divise[2] bc et si a est premier avec c, alors a divise b. Lemme de Gauss 1.370. Pour les anneaux principaux, lemme 3.60.

(2) Si a divise b et b divise a, alors $a = b$, lemme 1.372.

THEMEooDiophTHE0C5

Thème 5 : équations diophantiennes

(1) Équation $ax + by = c$ dans $\mathbb{N}$, équation (3.53).

(2) Dans 3.2.6, nous résolvons $ax + by = c$ en utilisant Bézout (théorème 1.358).

(3) L'exemple 3.79 donne une application de la pure notion de modulo pour $x^2 = 3y^2 + 8$. Pas de solutions.

(4) L'exemple 3.80 résout l'équation $x^2 + 2 = y^3$ en parlant de l'extension $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ et de stathme.

(5) Les propositions 3.84 et 3.86 parlent de triplets pythagoriciens.

(6) Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décompositions de fractions en éléments simples, théorème 26.102.

(7) La proposition 1.224 donne une bijection $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en résolvant dans $\mathbb{N}$ (entre autres) l'équation $k = y^2 + x$ pour k fixé.

[2] Divise, définition 1.101.

THEMEooVIQIooJHFQQS

Thème 6 : types d'anneaux

(1) Définition d'anneau : définition 1.92.

(2) La définition d'anneau principal est 1.349 ; pour un idéal principal, c'est 1.348.

(3) $\mathbb{Z}$ est intègre, lemme 1.346, principal et euclidien (proposition 1.351).

(4) $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal (voir (5)).

ITEMooNQQMooSnuKvW

(5) Si A est un anneau intègre[3] qui n'est pas un corps, alors $A[X]$ n'est pas principal, lemme 1.421.

(6) L'anneau des fonctions holomorphes sur un compact donné est principal, proposition 26.68.

(7) L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ n'est pas factoriel, exemple 3.58.

(8) L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est ni factoriel ni principal, exemple 3.70.

(9) Tous les idéaux de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont principaux, mais $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas principal. Exemple 1.416.

anneau principal

- Définition 1.349.
- Il est intègre, définition 1.349.
- Il est noetherien, lemme 3.66.
- il est factoriel, théorème 3.68.

anneau euclidien

- Définition 1.345.
- Il est principal par 1.350

anneau intègre

- Définition 1.335.

anneau noetherien

- Définition 3.65.

anneau factoriel

- Définition 3.53.
- Il est intègre, définition 3.53.

corps

- Corps, définition 1.390.
- Il est un anneau intègre, lemme 1.336.
- Il est un anneau principal, proposition 3.69.
- Il est un anneau factoriel, proposition 3.69.

Dans un anneau intègre

- Un anneau fini intègre est un corps, proposition 3.51.
- A est intègre si et seulement si $A[X]$ est intègre, théorème 3.92.
- Si un pgcd[4] est inversible, tous les pgcd sont inversibles, lemme 1.338.

Dans un anneau principal

- p est premier si et seulement si il est irréductible si et seulement si l'idéal pA est maximal, proposition 1.408.
- Tous les idéaux sont principaux, définition 1.349.

[3] Définition 1.335.
[4] pgcd, définition 1.105.

- Si $\text{pgcd}(a,b)=1$, $\text{pgcd}(a,c)=1$, alors $\text{pgcd}(a,bc)=1$, lemme 3.61.

Dans un anneau factoriel

- Si p est irréductible et si $p \mid ab$, alors p divise a ou b, lemme 3.54.
- Tout élément irréductible est premier, proposition 3.55.
- Si p est irréductible, pA est un idéal premier, lemme 3.56.
- Si p est irréductible, A/pA est un anneau intègre, lemme 3.56 et proposition 1.405.
- P et Q sont primitifs si et seulement si PQ est primitif, lemme 3.107.
- Formule $c(PQ)=c(P)c(Q)$. Lemme 3.107.
- L'anneau des polynômes $\mathcal{P}(A)=A[X]$ est factoriel, théorème 6.35.

Dans un corps commutatif

- L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est factoriel, proposition 6.36, euclidien et principal, lemme 3.98.
- Les seuls idéaux de $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$, lemme 1.318.
- L'anneau $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ est euclidien, lemme 3.98.

élément irréductible

- Définition 1.327

élément premier

- Définition 1.326
- Si A est intègre et unitaire, l'élément p est premier si et seulement si l'idéal pA est premier, proposition 1.337.

éléments associés

- Définition 3.43.

Dans un anneau, un idéal est 1.316.

idéal premier

- Définition 1.403.
- Idéal premier si et seulement si A/I est anneau intègre, proposition 1.405.

idéal maximal

- Idéal maximal si et seulement si A/I est un corps, proposition 1.405.

idéal principal

- Définition 1.348.
- Dans un anneau unitaire intègre, p est irréductible si et seulement si il n'y a pas d'idéal principal I tel que $pA \subsetneq I \subsetneq A$, proposition 1.337.

THEMEooSou3GFBQ67

Thème 7 : sous-groupes

(1) Théorème de Burnside sur les sous-groupes d'exposant fini de $\text{GL}(n,\mathbb{C})$, théorème 8.310.

(2) Sous-groupes compacts de $\text{GL}(n,\mathbb{R})$, lemme 13.46 ou proposition 13.47.

THEMEooQEEWo3XDD68

Thème 8 : groupe symétrique

(1) Définition 1.269.

(2) La signature $\epsilon\colon S_n \to \{-1,1\}$ est l'unique morphisme surjectif de S_n sur $\{-1,1\}$, proposition 1.299(1).

(3) La table des caractères du groupe symétrique S_4 est donné dans la section 16.5.

(4) Le groupe symétrique S_4 est le groupe des symétries affines du tétraèdre régulier[5], proposition 18.194.

(5) Le groupe alterné A_5 est l'unique groupe simple d'ordre[6] 60, proposition 5.55.

(6) La proposition 5.45 donne la position du groupe alterné dans le groupe symétrique : A_n est un sous-groupe caractéristique de S_n, et l'unique sous-groupe d'indice 2.

[5] Définition 12.180.
[6] Ordre d'un groupe, définition 1.257.

THEMEooKZHBooTRCTOC9

Thème 9 : action de groupe

(1) Définition d'une action de groupe sur un ensemble : 1.481.

(2) Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, théorème 23.96.

(3) La formule de Burnside (théorème 2.41) parle du nombre d'orbites pour l'action d'un groupe fini sur un ensemble fini.

(4) Des applications de la formule de Burnside : le jeu de la roulette et l'affaire du collier, 18.10.14.1 et 18.10.14.2.

(5) Le groupe symétrique S_n agit sur l'anneau $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, lemme 1.482.

THEMEooTheoffdCFGQpt9

Thème 10 : classification de groupes

(1) Ordre d'un groupe, définition 1.257.

(2) Structure des groupes d'ordre pq, théorème 5.25.

(3) Le groupe alterné est simple, théorème 5.51.

(4) Définition 5.6 d'un p-groupe.

(5) Théorème de Sylow 5.11.

(6) Théorème de Burnside sur les sous-groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, théorème 8.310.

(7) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, corolaire 19.34.

(8) Le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique, proposition 3.125.

(9) Le premier théorème d'isomorphisme 2.7 dit que si θ est un morphisme de groupes, alors $G/\ker(\theta) = \mathrm{Image}(\theta)$.

(10) Le deuxième théorème d'isomorphisme 2.8 dit que si N est normal dans G, alors $NH/N = H/(H \cap N)$.

(11) Le troisième théorème d'isomorphisme 2.10 dit que, avec des hypothèses de normalité, $(G/M)/(N/M) = G/N$.

À propos d'ordre dans un groupe.

(1) L'ordre d'un groupe est son cardinal. L'ordre d'un élément est le plus petit n tel que $g^n = e$, définition 1.258.

(2) L'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe, corolaire 2.15.

(3) Si H est normal dans G, alors $|G/H| = |G|/|H|$, théorème de Lagrange 2.14.

(4) Si G est un groupe cyclique, pour tout diviseur p de $|G|$, le groupe G contient au moins un élément d'ordre p. Théorème de Cauchy 3.22.

THMooUDYMoTOC10

Thème 11 : fonction indicatrice d'Euler

(1) Définition de $\varphi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ dans 5.29.

(2) Propriétés genre $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$, corolaire 5.43.

(3) $\varphi(n) = \mathrm{Card}(\Delta_n)$, proposition 19.14.

(4) $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, lemme 5.38.

(5) Le théorème de Euler-Fermat 5.34 donne $a^{\varphi(n)} \in [1]_n$ dès que a et n sont premiers entre eux.

(6) Si A et B sont premiers entre eux, il existe p, m tels que $A^p = mB + 1$, proposition 5.34.

THEMEooProduitSemiDirectGroupes

Thème 12 : produit semi-direct de groupes

(1) Définition 2.48.

(2) Le corolaire 2.50 donne un critère pour prouver qu'un produit NH est un produit semi-direct.

(3) L'exemple 18.176 donne le groupe des isométries du carré comme un produit semi-direct.

(4) Le théorème 5.25 classifie les groupes d'ordre pq (p, q premiers distincts) à grands coups de produit semi-directs.

(5) Le théorème 18.80 donne les isométries de $\mathbb{R}^n$ par $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = T(n) \times_\rho O(n)$ où $T(n)$ est le groupe des translations.

(6) La proposition 18.82 donne une décomposition du groupe orthogonal $\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \times_\rho C_2$ où $C_2 = \{\mathrm{Id}, R\}$ où R est de déterminant -1.

(7) La proposition 11.63 donne $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) = T(n) \times_\rho \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ où $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ est le groupe des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^n$.

THEMEooTheorieRepresentations

Thème 13 : théorie des représentations

(1) Définition 4.145.

(2) Table des caractères du groupe diédral, section 18.17.

(3) Table des caractères du groupe symétrique S_4, section 16.5.

THEMEooEspacesVectoriels

Thème 14 : espaces vectoriels

(1) Les notations $\mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{L}^0(V, W)$, $\mathrm{GL}(V, W)$ ainsi que les notions de morphismes et d'isomorphismes d'espaces vectoriels normés sont dans la définition 10.312.

(2) Existence d'une base. Pour un espace vectoriel quelconque, proposition 4.25.

(3) Théorème de la base incomplète. Pour un espace vectoriel quelconque, théorème 4.26.

(4) En dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé, corolaire 7.229.

THEMEooDimensionRang

Thème 15 : rang

(1) Définition pour une application linéaire : 4.48, pour une matrice : 4.111. L'équivalence est la proposition 4.115.

(2) Le théorème du rang, théorème 4.49

(3) Pour une applicaton linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, il est équivalent d'être injectif, surjectif ou bijectif, c'est le corolaire 4.51.

(4) Pour prouver que des matrices sont équivalentes et pour les mettre sous des formes canoniques, nous avons le lemme 4.118 et son corolaire 4.119.

(5) Tout hyperplan de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ coupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, corolaire 4.119. Cela utilise la forme canonique susmentionnée.

(6) Le lien entre application duale et orthogonal de la proposition 8.190 utilise la notion de rang.

(7) Le lemme 8.300 parle de commutant et utilise la notion de rang. Ce lemme sert à prouver diverses conditions équivalentes à être un endomorphisme cyclique dans le théorème 8.301.

THEMEooOAJKooEVCV16

Thème 16 : formes bilinéaires et quadratiques

(1) Les formes bilinéaires sont définies en 8.120.

(2) Forme quadratique, définition 8.121.

(3) Équivalence de forme quadratiques, définition 8.250. Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature, proposition 8.251.

(4) Une isométrie d'une forme bilinéaire est affine ou linéaire, théorème 8.153.

(5) Forme bilinéaire dégénérée, définition 8.125.

(6) Une forme bilinéaire est non-dégénérée si et seulement si sa matrice associée est inversible, c'est la proposition 8.227.

(7) Une isométrie d'une forme bilinéaire est linéaire ou affine par le théorème 8.153.

(8) Toute forme quadratique admet des bases orthogonales, théorème 8.243 pour le cas général ; proposition 8.254 pour le cas de $\mathbb{R}^n$, en se basant sur le théorème spectral.

(9) Base q-orthogonale pour une forme quadratique, théorème 8.243.

(10) Le concept de projection orthogonale est la définition 12.150 en dimension finie et la définition 25.7 dans le cas des espaces de Hilbert.

(11) Produit hermitien, définition 8.171. Opérateur hermitien ($A^\dagger = A$), opérateur unitaire ($A^\dagger A = 1$), définition 8.174

matrice

(1) Matrice d'une forme quadratique, définition 8.144.

(2) Théorème de Sylvester à propos de signature (définition 8.159) de forme quadratique réelle : 8.249.

orthogonalité

(1) Il existe une base q-orhogonale, proposition 8.241 et théorème 8.243.

(2) Définition de l'orthogonal $A^\perp$ et du noyau $\ker(b)$, définitions 8.127, 8.128.

(3) Diverses propriétés comme $A^\perp = \text{Span}(A)^\perp$ et $V \cap V^\perp = \ker(b_V)$, propositions 8.129 et 8.130.

(4) En dimension finie, $(V^\perp)^\perp = V$, lemme 8.133.

(5) Nous avons $\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E)$, lemme 8.132.

(6) Pour une forme quadratique strictement définie positive ou négative, $E = F \oplus E^\perp$, lemme 8.135.

THEMEooEndoCYFOQu17

Thème 17 : endomorphismes cycliques

(1) Définition 8.101.

(2) Groupe cyclique, définition 1.440.

(3) Son lien avec le commutant donné dans la proposition 8.298 et le théorème 8.301.

(4) Utilisation dans le théorème de Frobenius (invariants de similitude), théorème 8.289.

THEMEooZYKFooQKOuP18

Thème 18 : extension de corps et polynômes

(1) Définition d'une extension de corps 6.59.

(2) Définition de polynôme minimal : 6.64.

(3) Pour l'extension du corps de base d'un espace vectoriel et les propriétés d'extension des applications linéaires, voir la section 8.15.

(4) Extension de corps de base et similitude d'application linéaire (ou de matrices, c'est la même chose), théorème 8.303.

(5) Extension de corps de base et cyclicité des applications linéaires, corolaire 8.302.

(6) À propos d'extensions de $\mathbb{Q}$, le lemme 6.182.

(7) Corps de rupture : définition 6.113 existence par la proposition 6.119. Il n'y a pas unicité.

(8) Corps de décomposition : définition 6.141. Attention : le plus souvent nous parlons de corps de décomposition d'un seul polynôme. Cette définition est un peu surfaite. Existence par la proposition 6.142 qui le donne même comme extension par toutes les racines, et unicité à isomorphisme près par le théorème 6.144, énoncé de façon plus simple (mais pas indépendante !) en la proposition 6.145.

(9) Si $\mathbb{K}$ est algébrique clos et si $\alpha\colon \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ est une extension algébrique, alors $\alpha(\mathbb{K}) = \mathbb{L}$ par le lemme 6.80.

Un trio de résultats qui fait du bon boulot ensemble :

(1) Dans un anneau principal qui n'est pas un corps, un idéal est maximal si et seulement si il est engendré par un irréductible[7] (proposition 1.412).

(2) Dans un anneau, un idéal I est maximal si et seulement si A/I est un corps (proposition 1.401)

(3) Si $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathbb{K}[X]$ est principal (lemme 3.98).

THEMEoolPolynômes19

Thème 19 : polynômes

Définitions Soient un anneau A, un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ et un élément $\alpha \in \mathbb{L}$.

(1) La définition la plus formelle est en tant que module produit $A^{(\mathbb{N})}$, définition 1.473. Le produit et l'évaluation sont définis en 1.476 et la formule $(PQ)(x) = P(x)Q(x)$ dans 1.477.

(2) Si $\mathbb{A}$ est commutatif, alors $\mathbb{A}[X]$ est également commutatif, lemme 1.478.

(3) En ce qui concerne la notation $A[X]$, elle ne devrait pas être utilisée, voir 1.19.2. L'ensemble des polynômes sera noté $\mathcal{P}(A)$ et ceux de degré n (définition 1.475), $\mathcal{P}_n(A)$.

(4) $A[X]$, définition 1.473 ; l'anneau $\mathbb{K}[X]$ a même définition parce que c'est un cas particulier. L'évaluation d'un polynôme en un élément de l'anneau, $P(\alpha)$ est définie en 1.476.

(5) Liens entre $\mathbb{K}[\alpha]$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(\alpha)$ et $\mathbb{K}(X)$ lorsque α est transcendant, proposition 6.100.
Et la proposition 6.103 pour le cas où α est algébrique[8].

(6) Si A est un anneau et si α est un élément d'une extension de A (comme anneau), nous écrivons $A[\alpha]$ pour le plus petit sous-anneau de B contenant A et α. C'est la définition 3.90.

(7) $\mathbb{K}(X)$, le corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$, définition 6.84. Si $R = P/Q$ dans $\mathbb{K}(X)$, l'évaluation est $R(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)^{-1}$, définition 6.85.

(8) $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ est le plus petit corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α, définition 6.86.

(9) À propos de polynômes à plusieurs variables.
- Anneau de polynômes : $A[X_1, \dots, X_n]$ est la définition 3.39.
- Corps engendré : $\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est la définition 6.138.
- Corps des fractions rationnelles : $\mathbb{K}(X_1, \dots, X_n)$ est la définition 6.139.

contenu À propos de $c(P)$.

(1) Définition du contenu $c(P)$, 3.101.

(2) $c(PQ) = c(P)c(Q)$, lemme de Gauss 19.48, et lemme 3.107 pour un anneau factoriel.

(3) Si $c(P) = 1$, on dit que P est primitif au sens des pgcd, définition 3.103.

(4) Si $a \in A$ nous avons $c(aP) = ac(P)$ par le lemme 1.339.

(5) Un polynôme primitif est la définition 3.103.

Dérivation Plusieurs propriétés du polynôme dérivé P'.

(1) La définition 6.154 donne $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_i X^{k-1}$.

(2) Règle de Leibniz, lemme 6.155.

[7] Irréductibilité, y compris polynôme irréductible, définition 1.327.
[8] Définition 6.71.

(3) Caractérisation de $P' = 0$ en fonction de la caractéristique de $\mathbb{K}$, lemme 6.156.

Coefficients dans un anneau commutatif (1) Les polynômes à coefficients dans un anneau commutatif sont à la section 3.7.

(2) Un anneau A est intègre si et seulement si $A[X]$ est intègre ; théorème 3.92.

Coefficients dans un corps Les polynômes à coefficients dans un corps sont à la section 6.3.

(1) Si $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathbb{K}[X]$ est euclidien et principal, lemme 3.98.

(2) Nous parlons de l'idéal des polynômes annulateurs dans le théorème 6.43.

(3) Le théorème 6.43 dit que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal et que tous ses idéaux sont engendrés par un unique polynôme unitaire.

(4) Le polynôme minimal est irréductible, proposition 6.67.

(5) Quelques formules sur le pgcd, lemme 6.57.

Polynôme primitif (1) Un polynôme est irréductible sur A si et seulement si il est irréductible et primitif sur le corps des fractions, corolaire 3.122.

Polynôme d'endomorphisme C'est la section 8.7.

Racines et factorisation (1) Si $\mathbb{A}$ est un anneau, la proposition 3.111 factorise une racine.

(2) Si $\mathbb{A}$ est un anneau, la proposition 3.116 factorise une racine avec sa multiplicité.

(3) Si $\mathbb{A}$ est un anneau, le théorème 3.118 factorise plusieurs racines avec leurs multiplicités.

(4) Le théorème 3.118 nous indique que lorsqu'on a autant de racines (multiplicité comprise) que le degré, alors nous avons toutes les racines.

(5) Si $\mathbb{K}$ est un corps et α une racine dans une extension, le polynôme minimal de α divise tout polynôme annulateur par la proposition 6.101.

(6) Le théorème 6.110 annule un polynôme de degré n ayant $n+1$ racines distinctes.

(7) La proposition 6.185 nous annule un polynôme à plusieurs variables lorsqu'il a trop de racines.

(8) En analyse complexe, le principe des zéros isolés 17.136 annule en gros toute série entière possédant un zéro non isolé.

(9) Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

THEMEooPolynomeEndomEHTG629

Thème 20 : polynôme d'endomorphismes

(1) Endomorphismes cycliques et commutant dans le cas diagonalisable, proposition 8.298.

(2) Racine carrée d'une matrice hermitienne positive, proposition 13.33.

(3) Théorème de Burnside sur les sous-groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, théorème 8.310.

(4) Décomposition de Dunford, théorème 8.262.

(5) Algorithme des facteurs invariants 4.120.

THEMEooULGFEHFGCT

Thème 21 : dualité Ne pas confondre dual algébrique et dual topologique d'un espace vectoriel.

(1) Dual algébrique E^*, définition 4.135.

(2) Dual topologique E', définition 25.1.

(3) Le dual d'un espace de Banach est de Banach, proposition 7.320.

(4) Définition de la base duale 4.136.

(5) $\dim(E) = \dim(E^*)$, lemme 4.136.

(6) Base préduale (existence, unicité) : proposition 4.140.

(7) Théorème de représentation de Riez 27.187 : $L^p = (L^q)'$, et en particulier $L^\infty = (L^1)'$.

(8) Il n'est pas vrai que $(L^\infty)' = L^1$, voir la proposition 27.241.

(9) Dans un espace de Banach[9], $\|x\| = \max_{\substack{\varphi\in E'\\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(x)|$, proposition 27.172.

Dual topologique et algébrique Ils sont définis par 4.135. Le dual algébrique est l'ensemble des formes linéaires, et le dual topologique ne considère que les formes linéaires continues (en dimension infinie, les applications linéaires ne sont pas toutes continues).

Topologie Une topologie possible sur le dual d'un espace vectoriel topologique est celle $*$-faible de la définition 7.411.

Nous comparons les topologies faibles et de la norme en la section 10.18.

Théorèmes de dualité Quelques théorèmes établissent des dualités entre des espaces courants.

(1) En dimension finie, $x \mapsto b(x,.)$ est isomorphisme $E \to E^*$ lorsque b est une forme bilinéaire, proposition 8.131.
(2) Le théorème de représentation de Riesz 25.18 pour les espaces de Hilbert.
(3) La proposition 27.185 pour les espaces $L^p\big([0,1]\big)$ avec $1 < p < 2$.
(4) Le théorème de représentation de Riesz 27.187 pour les espaces L^p en général.

Tous ces théorèmes donnent la dualité par l'application $\Phi_x = \langle x, . \rangle$.

THEMEooInjectionsSSooTHEME22

Thème 22 : injections

(1) L'espace de Sobolev $H^1(I)$ s'injecte de façon compacte dans $C^0(\bar{I})$, proposition 31.6.
(2) L'espace de Sobolev $H^1(I)$ s'injecte de façon continue dans $L^2(I)$, proposition 31.6.
(3) L'espace $L^2(\Omega)$ s'injecte continument dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ (les distributions), proposition 30.34.

INTooVDSCo

Thème 23 : tribu, algèbre de parties, λ-systèmes et co. Il existe des centaines de notions de mesures et de classes de parties.

(1) Le plus souvent lorsque nous parlons de mesure est que nous parlons de mesure positive, définition 14.18 sur un espace mesuré avec une tribu, définition 14.1.
(2) Une mesure extérieure est la définition 14.10
(3) Une algèbre de partie : définition 14.13. Une mesure sur une algèbre de parties : définition 14.11. L'intérêt est que si on connait une mesure sur une algèbre de parties, elle se prolonge en une mesure sur la tribu engendrée par le théorème de prolongement de Hahn 14.80.
(4) Un λ-système : définition 14.31.
(5) Une mesure complexe : définition 14.239.

En théorie de l'intégration, si X est une partie de $\mathbb{R}^n$, la convention est de considérer des fonctions

$$f\colon \big(X, \mathcal{L}\mathrm{eb}(X)\big) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R})\big).$$

Voir les points 14.120 et 14.166 pour les conventions à ce propos.

À propos d'applications mesurables :

(1) Définition d'une application mesurable, définition 14.44.
(2) Une fonction continue est borélienne, théorème 14.56.
(3) Si les f_n sont mesutables (au sens des boréliens), alors $\sup_n f_n$ est mesurable, lemme 14.100.

À propos de tribu induite :

(1) Définition 14.8.
(2) Les boréliens induits sont bien les boréliens de la topologie induite[10] : $\mathcal{B}\mathrm{or}(Y) = \mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$, théorème 14.57.

Tribu engendrée.

(1) Tribu engendrée par des parties, définition 14.4.

[9] Espace de Banach, définition 7.316.
[10] Topologie induite, définition 7.27.

THEMEooKLVRDHRQCQ4

Thème 24 : théorie de la mesure

Mesure À propos de mesure.

(1) Tribu des boréliens, définition 14.50.
(2) Mesure positive, mesure finie et σ-finie, c'est la définition 14.18.
(3) Le produit de tribus est donné par la définition 14.127,
(4) Produit d'une mesure par une fonction, définition 14.212.
(5) le produit d'espaces mesurés est donné par la définition 14.247.
(6) Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, définition 14.143.
(7) Une partie de $\mathbb{R}$ non mesurable au sens de Lebesgue : l'exemple 14.157.
(8) Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$, définition 14.249.
(9) Mesure à densité, définition 14.212.

Opérations On peut faire quelques opérations sur les mesures.

(1) Si w est une fonction et μ une mesure, on définit $w \cdot \mu$ par 14.212 : $(w \cdot \mu)(A) = \int_A w d\mu$).

Théorèmes d'approximation Il est important de pouvoir approcher des fonctions continues ou L^p par des fonctions étagées, sinon on ne parvient pas à faire tourner la machine de l'intégration de Lebesgue.

(1) Si $(S, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et si $f : S \to [0, +\infty]$ est une fonction mesurable, le théorème fondamental d'approximation 14.118 dit qu'il existe une suite croissante de fonctions étagées qui converge vers f.
(2) Les fonctions étagées sont denses dans L^p, proposition 27.59.
(3) Encadrement d'un borélien A par un fermé F et un ouvert V par le lemme 14.86 : $F \subset A \subset V$ avec $\mu(V \setminus F) < \epsilon$.
(4) Approximation L^p de la fonction caractéristique d'un borélien par une fonction continue par le théorème 14.242.

Produit (1) La tribu produit, définition 14.127.
(2) La mesure produit, définition 14.246.

THEMEooUJVXEHZ0G25

Thème 25 : normes

Définitions (1) Espace vectoriel normé : définition 7.212.
(2) Produit scalaire, définition 8.163.
(3) Norme associée à un produit scalaire (cas réel), théorème 10.1.
(4) Norme associée à une forme sesquilinéaire[11] (cas complexe), proposition 10.30.
(5) Identité du parallélogramme $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, proposition 10.30.
(6) Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, définition 8.168. Norme sur $\mathbb{R}^n$, définition 10.3.
(7) Forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$, définition 8.178. Norme sur $\mathbb{C}^n$, définition 10.31.
(8) La proposition 10.56 donne les normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
(9) Sur $\mathbb{R}^n$, la proposition 17.105 dit que $\|x\|_p$ est une norme.
(10) Norme d'une application n-multilinéaire, définition 10.105.

Topologie (1) Métrique associée à une norme $d(x,y) = \|x-y\|$, définition 7.217.
(2) La topologie d'un espace vectoriel normé est la topologie métrique du théorème 7.142.
(3) Les boules sont les boules métrique définies en (7.124).

Inégalités (1) En général pour les normes $\|.\|_p$, il y a des inégalités dans 17.106 et 17.98.
(2) La proposition 17.111 donne l'inégalité $\|x\|_q \leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|x\|_p$ dès que $0 < q < p$.

Équivalence de norme (1) Définition de l'équivalence de norme 10.58.

[11] Définition 8.171.

(2) La proposition 10.59 sur l'équivalence des normes $\|.\|_2$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^n$.

(3) Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes par le théorème 10.61.

Autres (1) Montrer que le problème $a-b$ est stable dans l'exemple 34.27.

(2) La proposition 12.116 donnant $\rho(A) \leqslant \|A\|$ utilise l'équivalence de toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie (théorème 10.61.).

(3) La norme $x \mapsto \|x\|$ est une application continue, proposition 7.288.

Norme opérateur et d'algèbre voir le thème 40.

THEMEooInegalitesNorTHEMOOC26

Thème 26 : inégalités Dans $\mathbb{C}$ nous avons $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ par la proposition 9.105(1).

Inégalité de Clarkson Pour $f, g \in L^p$ nous avons l'inégalité de Clarkson 27.147 :

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^p + \|\frac{f-g}{2}\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\Big). \tag{-1.1}$$

Inégalité de Young Nous avons

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{-1.2}$$

par la proposition 27.36.

Inégalité de Jensen (1) Une version discrète pour $f\big(\sum_i \lambda_i x_i\big)$, la proposition 17.102.

(2) Une version intégrale pour $f\big(\int \alpha d\mu\big)$, la proposition 27.37.

(3) Une version pour l'espérance conditionnelle, la proposition 36.87.

Inégalité de Hölder Il en existe de nombreuses versions et variations.

(1) Hölder pour L^p : $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$, proposition 27.39.

(2) Hölder pour ℓ^p : $\|x\|_q \leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|x\|_p$, proposition 17.111.

(3) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_\infty$, théorème 17.106

(4) $\|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_q$, corolaire 17.107.

Inégalité de Minkowsky (1) Pour une forme quadratique[12] q sur $\mathbb{R}^n$ nous avons $\sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)}+\sqrt{q(y)}$. Proposition 10.23.

(2) Si $1 \leqslant p < \infty$ et si $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ alors $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$. Proposition 27.45.

(3) L'inégalité de Minkowsky sous forme intégrale s'écrit sous forme déballée

$$\left[\int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|d\nu(y)\Big)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leqslant \int_Y \Big(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x)\Big)^{1/p} d\nu(y).$$

ou sous forme compacte

$$\left\|x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)\right\|_p \leqslant \int_Y \|f_y\|_p d\nu(y)$$

C'est la proposition 27.50.

Transformée de Fourier Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nous avons $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$, lemme 29.12.

Inégalité des normes Inégalité de normes : si $f \in L^p$ et $g \in L^1$, alors $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_p\|g\|_1$, proposition 27.83.

c_r **inégalité** La proposition 27.137 donne $\big|f(\omega)+g(\omega)\big|^r \leqslant c_r|f(\omega)|^r + c_r|g(\omega)|^r$.

[12] Définition 8.121.

THEMEooYRIWooHXOo27

Thème 27 : constructions topologiques

topologie produit Si X et Y sont des espaces topologiques, nous pouvons construire une topologie sur $X \times Y$.

(1) Dans le cas d'un produit infini, c'est la définition 7.62.

(2) La définition de la topologie produit est 7.63.

(3) Pour les espaces vectoriels normés, le produit est donné par la définition 7.282.

(4) L'équivalence entre la topologie de la norme produit et la topologie produit est le lemme 7.282.

(5) Quand V et W sont des espaces métriques, la topologie considérée sur $V \times W$ est celle de la définition 7.282. C'est à la fois la topologie de la norme produit et la topologie produit.

(6) La convergence dans un espace vectoriel est si et seulement si il y a convergence composante par composante, proposition 7.85.

(7) Dans le cas d'espaces normés, la topologie produit est la même que celle de la norme produit, lemme 7.283.

topologie induite Si X est un espace topologique et si A est une partie de X, nous mettons une topologie sur A.

(1) Le topologie induite, définition 7.27.

(2) Si X est un espace vectoriel normé, la topologie induite est celle de la norme restreinte : lemme 7.163.

topologie quotient Si X est topologique et si $\sim$ est une relation d'équivalence[13], nous définissons une topologie sur $X/\sim$.

(1) La topologie quotient est définie en 7.67.

(2) Si X est vectoriel normé, la topologie sur $X/\sim$ est aussi donnée par une norme quotient de la définition 7.408. La proposition 7.410 donne l'équivalence entre la topologie quotient et la norme quotient.

topologie rendant continues des applications Si nous avons une application $f\colon X \to Y$ et si Y est topologique, nous mettons une topologie sur X rendant f continue.

(1) Définition de la plus petite topologie rendant des applications continues, proposition 7.55.

THEMEooEspacesMetriquesooHTOo28

Thème 28 : espaces métriques, normés

(1) Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance, définition 7.139.

(2) La distance uniforme dans le cas de fonctions à support compact est 7.276.

(3) La distance entre un point et un ensemble est la définition 7.198.

(4) Le théorème-définition 7.142 donne la topologie sur un espace métrique en disant que les boules ouvertes sont une base de la topologie (définition 7.2).

(5) La définition de la convergence d'une suite est la définition 7.14.

(6) Dans un espace vectoriel normé, une application est continue si et seulement si elle est bornée, proposition 10.85.

(7) Un espace vectoriel topologique[14] qui possède en tout point une base dénombrable de topologie accepte une distance, théorème 7.335.

[13] Définition 1.50 pour relation d'équivalence.
[14] Définition 7.219.

THEMEooGVCCoBHBOO20

Thème 29 : limite et continuité

(1) Limite d'une fonction en un point : définition 7.135. Il n'y a pas unicité en général comme le montre l'exemple 7.73 dans un espace non séparé.

(2) Définition de la continuité d'une fonction en un point et sur une partie de l'espace de départ : définition 7.45.

(3) Caractérisation de la limite dans $\mathbb{R}$, proposition 12.1.

(4) Unicité de la limite d'une suite dans un espace séparé : proposition 7.82. Unicité de la limite d'une fonction, toujours dans le cas d'un espace séparé : proposition 7.138.

(5) La proposition 7.414 donne l'unicité de la limite dans le cas des espaces duaux pour la topologie $*$-faible. La proposition 7.138 nous dira qu'il y a unicité dès que l'espace d'arrivée est séparé.

(6) Continuité sur une partie si et seulement si continue en chaque point, c'est le théorème 7.263.

(7) Voir l'exemple 12.56 traité en détail pour la (non) continuité d'une fonction qui fait un saut en un point.

(8) La fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est continue, lemme 9.30.

THEMEooHINHoTHSVQW

Thème 30 : intégration À propos d'intégration.

Vocabulaire La différence entre une intégrale qui existe et une fonction intégrable est dans 14.187.

L'ordre dans lequel les choses sont faites

- Nous commençons par considérer des fonctions $f : \Omega \to [0, +\infty]$ dans la définition 14.167.
- Nous donnerons ensuite quelques propriétés restreintes aux fonctions à valeurs positives, par exemple
  (1) La convergence monotone 14.178,
  (2) Lemme de Fatou 14.182.
  (3) (presque) linéarité pour les fonctions positives, théorème 14.183.
- La définition pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{C}$ est 14.186.
- Pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel, c'est la définition 14.197.

primitive et intégrale (1) La définition 14.286 donne $\int_a^b f = \int_{]a,b[} f$ lorsque f est intégrable sur $]a, b[$.

(2) Lorsque f n'est pas intégrable sur $]a, b[$ nous pouvons poser $\lim_{x\to b} \int_a^b f$ et dire que c'est une intégrale impropre, définition 14.298.

(3) Si F et G sont primitives de f, alors $F = G + cst$, corolaire 12.224.

Quelque résultats (1) Intégrale associée à une mesure, définition 14.167

(2) L'existence d'une primitive pour toute fonction continue est le théorème 12.450.

(3) La définition d'une primitive est la définition 12.223.

(4) Primitive et intégrale, proposition 14.287.

(5) Intégrale impropre, définition 14.298.

Intégrale et mesure (1) L'intégrale de la fonction 1 donne la mesure : $\int_B 1 d\mu = \mu(B)$, c'est le lemme 14.175.

(2) Le théorème de Radon-Nikodym 14.235 donne une densité pour certaines mesures.

(3) Le produit d'une mesure par une fonction donnée par la définition 14.212 introduit aussi une densité : $(w \cdot \mu)(A) = \int_A w d\mu$.

Limite dans les bornes (1) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable alors $\lim_{b\to\infty} \int_{[a,b]} f = \int_{[0,\infty[} f$.

(2) Nous avons $\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f$ par la proposition 14.263.

Autre résultats (1) Si $A, B \subset \Omega$ sont des parties disjointes, alors $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$, proposition 14.194.

(2) La σ-additivité dénombrable, $\int_{\bigcup_i A_i} f d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu$ est dans les propositions 14.210 et 14.211.

THEMEooCHTQ31

Thème 31 : connexité

(1) Définition 7.102

(2) L'image d'un connexe par une fonction continue est connexe, lemme 7.273.

(3) Un espace topologique est connexe si et seulement si il vérifie les valeurs intermédiaires, proposition 9.58.

(4) Dans un connexe, une partie ouverte et fermée est soit vide soit l'espace entier, proposition 7.105(4).

(5) Connexité par arcs, définition 9.65.

(6) Si U est connexe et si $U \subset S \subset \bar{U}$, alors S est connexe, proposition 7.106.

(7) Une partie de $\mathbb{R}^2$ qui est connexe, mais pas connexe par arcs, proposition 21.56.

(8) Une partie de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si elle est un intervalle, proposition 9.54.

(9) Le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ est connexe par arcs, proposition 13.24.

(10) Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs, proposition 13.25.

(11) Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes par arcs, proposition 13.26.

(12) Le groupe $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ n'est pas connexe, lemme 13.21.

(13) Les groupes $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ sont connexes par arcs, lemme 13.22.

(14) Pour tout $n \geqslant 2$, le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est connexe, le groupe $\mathrm{O}(n)$ a deux composantes connexes, proposition 13.8.

(15) Connexité des formes quadratiques de signature donnée, proposition 17.117.

(16) Dans un espace vectoriel normé, les connexes par arcs sont connexes par arcs C^1, proposition 15.6.

THEMEooSEPA32

Thème 32 : séparabilité

(1) Espace topologique normal, définition 7.90.

(2) Le dual d'un espace vectoriel normé sépare les points, corolaire 27.173.

(3) Les fermés et les compacts sont séparés dans un espace vectoriel topologique, proposition 7.324.

(4) Le théorème de Hahn-Banach 27.167 parle d'hyperplan qui sépare des parties convexes disjointes (et autres hypothèses).

(5) Les ouverts séparent les points et les compacts, lemme 7.132.

THEMEooQQBH33

Thème 33 : compacts

Propriétés générales Quelques propriétés de compacts.

(1) La définition d'un ensemble compact est la définition 7.109.

(2) Ne pas confondre le compactifié d'Alexandrov 7.185 avec la droite réelle achevée 12.26.

(3) Une partie est relativement compacte si sa fermeture est compacte, définition 7.129. Une union finie de relativement compacts est relativement compacte, lemme 7.131.

(4) Si M est un compact de $A \times B$, alors $M \subset K \times L$ où K est compact de A et L de B, proposition 7.127.

(5) Un fermé dans un compact est compact, lemme 7.121. L'intersection entre un compact et un fermé est compacte, proposition 7.122.

(6) Dans un espace Hausdorff[15], les compacts sont fermés, 7.121(2).

(7) Un espace est compact si et seulement si toute intersection finie de fermé est non vide, théorème 7.134.

(8) Tout compact d'un espace topologique séparé est fermé, lemme 7.121(2).

(9) Dans un espace vectoriel réel de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés par le théorème 9.24.

(10) Le théorème de Borel-Lebesgue 9.19 dit qu'un intervalle[16] de $\mathbb{R}$ est compact si et seulement si il

[15] Hausdorff, définition 7.74.
[16] Définition 1.27.

est de la forme $[a, b]$.

(11) Théorème des fermés emboîtés dans le cas compact, corolaire 7.118. À ne pas confondre avec celui dans le cas des espaces métrique, théorème 7.352.

(12) Théorème des compacts emboîtés, proposition 7.123. Une intersection dénombrable de compacts emboîtés est compacte et non vide.

(13) L'image d'un compact par une fonction continue est un compact, théorème 7.275.

(14) Si $f\colon K \to X$ est une bijection continue, sa réciproque est continue, lemme 7.278.

(15) Suites dans un compact

(15a) Toute suite dans un compact admet une sous-suite convergente, théorème 7.343.

(15b) Dans $\mathbb{R}^n$, toute suite dans un compact admet une sous-suite convergente, théorème 9.59. La démonstration de ce théorème est non seulement plus compliquée que le cas général, mais utilise en plus le cas dans $\mathbb{R}$; lequel cas n'est pas démontré de façon directe dans le Frido.

(15c) Un espace métrique est compact si et seulement si toute suite contient une sous-suite convergente. C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.194. La démonstration de ce théorème est indépendante.

(15d) Si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction continue, alors la convergence est uniforme sur tout compact, proposition 12.388.

(16) Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes, théorème 7.196.

(17) Une fonction continue sur un compact y est uniformément continue, théorème de Heine 12.80.

(18) Une bijection continue $f\colon K \to X$ entre un compact et un séparé est un isomorphisme, 7.277.

Produits de compacts Le théorème de Tychonoff dit que tout produit de compact est compact pour la topologie produit. Nous allons en voir diverses versions.

- $\mathbb{R}$, lemme 9.21.
- Produit fini d'espaces métriques compacts, théorème 7.368.
- Produit dénombrable d'espaces métriques compacts, théorème 7.370.
- En général, théorème 7.361.

Composante connexe À propos de composantes connexes et de compacts.

(1) Si K est compact dans $\mathbb{C}$, alors la partie $\mathbb{C} \setminus K$ possède exactement une composante connexe non bornée. Lemme 26.50.

THEooPUIIóBHDDC34

Thème 34 : densité

(1) Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, proposition 9.16.

(2) Densité des polynômes dans $\left(C^0\big([0,1]\big), \|.\|_\infty\right)$, théorème de Bernstein 36.191, ou une conséquence de Stone-Weierstrass 12.444.

(3) Densité des polynômes dans $\big(C^0(I), \|.\|_\infty\big)$ lorsque $I = [a, b]$, corolaire 36.192.

(4) Densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leqslant p < \infty$, théorème 27.65.

(5) Densité de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$, proposition 31.15.

(6) Densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$, proposition 31.17.

Cela est utilisé pour le théorème de trace 31.19.

(7) Les applications étagées dans les applications mesurables (qui plus est avec limite croissante), théorème fondamental d'approximation 14.118.

(8) Les fonctions étagées dans les fonctions continues à support compact (pour la norme uniforme), proposition 29.19.

(9) Les fonctions continues à support compact dans $L^2(I)$, théorème 27.68.

(10) Les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^p(S^1)$ pour $1 \leqslant p < \infty$. Deux démonstrations indépendantes par le théorème 28.8 et le théorème 27.102.

Les densités sont bien entendu utilisées pour prouver des formules sur un espace en sachant qu'elles sont vraies sur une partie dense. Mais également pour étendre une application définie seulement sur une partie dense. C'est par exemple ce qui est fait pour définir la trace γ_0 sur les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ en utilisant le théorème d'extension 17.127.

Comme presque tous les théorèmes importants, le théorème de Stone-Weierstrass possède de nombreuses formulations à divers degrés de généralité.

- Le lemme 12.440 le donne pour la racine carré.
- Le théorème 12.446 donne la densité des polynômes dans les fonctions continues sur un compact.
- Le théorème 12.443 est une généralisation qui donne la densité uniforme d'une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ dès que X sépare les points.
- Le théorème 12.444 donne le même résultat pour la densité dans $C(X, \mathbb{C})$.
- Le lemme 28.1 est une version pour les polynômes trigonométriques.
- Le lemme 12.440 est un cas particulier du théorème 12.446, mais nous en donnons une démonstration indépendante afin d'isoler la preuve de la généralisation 12.444. Une version pour les polynômes trigonométriques sera donnée dans le lemme 28.1.

Le théorème de Stone-Weierstrass est utilisé, entre autres nombreuses choses, pour prouver la densité des polynômes trigonométriques dans les fonctions continues sur S^1, voir la proposition 27.119.

THEMEooOXNQodHRKCC35

Thème 35 : application réciproque

(1) Définition 1.19.

(2) Dans le cas des réels, des exemples sont donnés en 9.9.

(3) Continuité, théorème de la bijection 12.53.

(4) Continuité de la réciproque pour $f\colon K \to X$, lemme 7.278.

(5) Si f est strictement monotone sur un intervalle, son inverse est continue, théorème de la bijection 12.53.

(6) Théorème de la bijection 12.53 (qui contient aussi de la continuité).

(7) Dérivabilité, proposition 12.202.

(8) Une application continue est injective si et seulement si elle est strictement monotone, lemme 12.50.

THEMEooYCBUTdHRKC36

Thème 36 : applications continues et bornées

(1) Une application linéaire entre espaces vectoriels topologiques est continue si et seulement si elle est continue en 0. Proposition 7.223.

(2) Application continue, définition 7.45.

(3) Une application linéaire non continue : exemple 10.86 de $e_k \mapsto ke_k$. Les dérivées partielles sont calculées en (25.156).

(4) La dérivation sur les polynômes (exemple 10.87) donne un autre exemple d'application linéaire non continue.

(5) Une application linéaire est bornée si et seulement si elle est continue, proposition 10.85.

(6) Une forme sesquilinéaire est bornée si et seulement si elle est continue, proposition 25.2.

THMooOCXT-THMooOCXT-37

Thème 37 : suite de Cauchy, espace complet Nous parlons d'espaces topologiques complets. À ne pas confondre avec un espace mesuré complet, définition 14.68.

Quand nous parlons de suite de Cauchy dans les rationnels, ce sera la définition 1.493(1).

(1) Corps complet : définition 1.493(3), espace métrique complet : définition 7.313.

(2) L'image d'une suite de Cauchy est de Cauchy. Si (x_n) est de Cauchy, alors $\big(f(x_n)\big)$ est de Cauchy quand f est une isométrie, lemme 17.131.

(3) La définition 7.312 donne la notion de suite de Cauchy dans un espace métrique.

(4) La définition 7.310 donne la notion de suite de τ-Cauchy dans un espace vectoriel topologique.

(5) Deux espaces métriques (avec une distance) peuvent être isomorphes en tant qu'espaces topologiques, mais ne pas avoir les mêmes suites de Cauchy, exemple 7.317.

(6) La proposition 7.322 donne l'équivalence entre les suites de Cauchy et les suites τ-Cauchy dans le cas des espaces vectoriels topologiques *normés*.

(7) L'exemple 7.317 est un exemple pire que simplement une suite de Cauchy qui ne converge pas. Le problème de convergence de cette suite n'est pas simplement que la limite n'est pas dans l'espace ; c'est que la suite de Cauchy donnée ne convergerait même pas dans $\mathbb{R}$.

(8) Le théorème 17.135 est un théorème de complétion d'un espace métrique.

(9) Dans $\mathbb{R}$, une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy, théorème 7.340(2).

(10) Toute suite convergente dans un espace métrique est de Cauchy, proposition 7.323.

Quelques espaces qui sont complets sont listés ci-dessous. Attention : la complétude est bien une propriété de la métrique ; le même ensemble peut être complet pour une distance et pas pour une autre. Souvent, cependant la distance à considérer est donnée par le contexte.

(1) Les réels $\mathbb{R}$, théorème 7.340.

(2) Les complexes $\mathbb{C}$, proposition 7.342.

(3) Un espace vectoriel normé sur un corps complet est complet, proposition 7.346.

(4) La proposition 12.383 donne quelques espaces complets. Soit X un espace topologique métrique, (Y,d) un espace métrique complet. Alors les espaces

(4a) $\big(C_b^0(X,Y),\|.\|_\infty\big)$
(4b) $\big(C_0^0(X,Y),\|.\|_\infty\big)$
(4c) $\big(C_0^k(X,Y),\|.\|_\infty\big)$

sont complets.

(5) Le lemme 12.384 dit que $\big(C^0(A,B),\|.\|_\infty\big)$ est complet dès que A est compact et B est complet.

(6) L'espace $\mathscr{D}(K)$ est complet tant pour la topologie des seminormes[17] que pour la topologie métrique (qui sont les mêmes). C'est la proposition 30.27.

(7) L'espace $\mathscr{S}(\Omega)$ est complet et métrisable par la proposition 30.78.

(8) L'espace $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ par le théorème 27.55.

La limite uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'est pas spécialement dérivable. Même si les fonctions sont de classe C^∞, la limite n'est pas spécialement mieux que continue. En effet, le théorème de Stone-Weierstrass 12.446 nous dit que les polynômes (qui sont C^∞) sont denses dans les fonctions continues sur un compact pour la norme uniforme. Vous ne pouvez donc pas espérer que $\big(C^p(X,Y),\|.\|_\infty\big)$ soit complet en général.

THEMEooCarHESO-THEMEooCarHESO-38

Thème 38 : caractérisations séquentielles Diverses caractérisations séquentielles.

continuité Des résultats de continuité séquentielle.

(1) Fonction séquentiellement continue, définition 7.150. Dans un espace métrisable séparé, la continuité séquentielle est équivalente à la continuité, proposition 7.157.

(2) Quand une topologie est donnée par un ensemble dénombrable de seminormes, il est métrisable, proposition 7.403.

[17] Seminorme, définition 7.381, et la topologie des seminormes est la définition 7.397.

(3) La continuité implique la continuité séquentielle, proposition 7.146 et corolaire 7.187.

(4) Une version spéciale pour $\mathbb{R}^m$ est donnée par le théorème 12.244.

fermeture Fermeture séquentielle, proposition 7.154.

compacité Un espace topologique séquentiellement compact : toute suite possède une sous-suite convergente, définition 7.114.

THEMEooYEVLodWTQC39

Thème 39 : valeurs propres, définie positive

À propos de valeurs propres (1) Définition des valeurs propres d'une forme quadratique : définition 8.252.

(2) Définition de valeur propre et vecteur propre pour un endomorphisme $f\colon V \to V$, définition 8.84.

À propos de choses définies positives (1) Une application bilinéaire est définie positive lorsque $g(u,u) \geqslant 0$ et $g(u,u) = 0$ si et seulement si $u = 0$ est la définition 8.122.

(2) Un opérateur ou une matrice est défini positif si toutes ses valeurs propres sont positives, c'est la définition 8.228.

(3) Pour une matrice symétrique, définie positive si et seulement si $\langle Ax, x\rangle > 0$ pour tout x. C'est le lemme 8.232.

(4) Une application linéaire est définie positive si et seulement si sa matrice associée l'est. C'est la proposition 8.233.

Remarque : nous ne définissons pas la notion de matrice définie positive dans le cas d'une matrice non symétrique.

THEMEooOJJFodWTQC40

Thème 40 : norme matricielle, norme opérateur et rayon spectral Quelques définitions

(1) Définition de la norme opérateur : définition 10.67.

(2) Définition du rayon spectral 10.79.

La norme matricielle n'est rien d'autre que la norme opérateur de l'application linéaire donnée par la matrice.

(1) Lien entre norme matricielle et rayon spectral, le théorème 12.122 assure que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)}$.

(2) Lien entre valeurs propres et norme opérateur : le lemme 12.123 pour les matrices symétriques strictement définies positives donne $\|A\|_2 = \lambda_{max}$.

(3) Pour une matrice diagonale, $\|D\|_2 = \max\{|\lambda_i|\}$, lemme 12.124.

(4) Pour toute norme algébrique nous avons $\rho(A) \leqslant \|A\|$, proposition 12.116.

(5) Dans le cadre du conditionnement de matrice. Voir en particulier la proposition 34.110 qui utilise le théorème 12.122.

(6) Rayon spectral et convergence de méthode itérative, proposition 34.148.

Pour la norme opérateur nous avons les résultats suivants.

(1) La majoration $\|Au\| \leqslant \|A\|\|u\|$ est le lemme 10.81.

(2) Définition d'une algèbre : 1.461 et pour une norme d'algèbre : 10.78.

(3) La norme opérateur est une norme d'algèbre : $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$, lemme 10.84.

(4) Pour des espaces vectoriels normés, être borné est équivalent à être continu : proposition 10.85.

(5) Le lemme à propos d'exponentielle de matrice 15.173 donne :

$$\|e^{tA}\| \leqslant P\big(|t|\big) \sum_{i=1}^{r} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_i)}.$$

La norme opérateur est utilisée pour donner une norme sur les produits tensoriels, définition 10.269.

Une norme matricielle donne une topologie. Il y a donc également des liens entre rayon spectral et convergence de série. Dans cette optique, pour les séries de matrices, voir le thème 41.

Notations :

(1) $\mathcal{L}(E,F)$ est l'ensemble des applications linéaires $E \to F$.

(2) $\mathcal{L}^0(E,F)$ est l'ensemble des applications linéaires continues $E \to F$ (par analogie avec C^0). Pour définir $\mathcal{L}^0(E,F)$ il faut que E et F soient des espaces vectoriels topologiques ; le plus souvent ce seront des espaces vectoriels normés.

(3) $\mathrm{End}(E)$ est l'ensemble des applications linéaires $E \to E$.

(4) $\mathrm{End}^0(E)$ est l'ensemble des applications linéaires continues $E \to E$.

THEMEooPQKDodTHAOKFH

Thème 41 : série de matrices

(1) Rayon spectral et norme opérateur : thème 40.

(2) Exponentielle de matrices : thème 50.

(3) Série entière de matrices : section 15.13.

(4) Pour la série $\sum_k A^k = (1-A)^{-1}$.

- Pour un espace de Banach : proposition 10.344.
- Pour les matrices nilpotentes : proposition 8.211.
- En lien avec le rayon spectral (si et seulement si $\rho(A) < 1$) dans la proposition 15.169.
- Le lemme 15.53 parle de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{nk} = (1-z^k)^{-1}$.

Cette série est utilisée entre autres dans la proposition 34.168 pour prouver qu'une M-matrice irréductible vérifie $A^{-1} > 0$.

DECooWTAIdHNZOCH2

Thème 42 : décomposition de matrices

(1) Décomposition de Bruhat, théorème 13.45.

(2) Décomposition de Dunford, théorème 8.262.

(3) Décomposition polaire 13.38 des matrices symétriques et la proposition 17.57 pour la régularité.

THEMEooSystEqTAOCH3

Thème 43 : systèmes d'équations linéaires

- Algorithme des facteurs invariants 4.120.
- La méthode du gradient à pas optimal permet de résoudre par itérations $Ax = b$ lorsque A est symétrique strictement définie positive. Il s'agit de minimiser une fonction bien choisie. Propositions 17.113 pour l'existence et 17.114 pour la méthode.

THEMEooDiagoTHAOCH4

Thème 44 : réduction, diagonalisation Des résultats qui parlent diagonalisation

(1) Définition d'un endomorphisme diagonalisable : 8.212.

(2) Conditions équivalentes au fait d'être diagonalisable en termes de polynôme minimal, y compris la décomposition en espaces propres : théorème 8.217.

(3) Diagonalisation simultanée 8.220, pseudo-diagonalisation simultanée 10.52.

(4) Diagonalisation d'exponentielle 15.151 utilisant la décomposition de Dunford.

(5) Décomposition polaire théorème 13.38. $M = SQ$, S est symétrique, réelle, définie positive, Q est orthogonale.

(6) Décomposition de Dunford 8.262. $u = s + n$ où s est diagonalisable et n est nilpotent, $[s,n] = 0$.

(7) Réduction de Jordan (bloc-diagonale) 8.292.

(8) L'algorithme des facteurs invariants 4.120 donne $U = PDQ$ avec P et Q inversibles, D diagonale, sans hypothèse sur U. De plus les éléments de D forment une chaine d'éléments qui se divisent l'un l'autre.

Le théorème spectral et ses variantes :

(1) Théorème spectral, matrice symétrique, théorème 8.225. Via le lemme de Schur complexe 12.102.

(2) Théorème spectral autoadjoint (c'est le même, mais vu sans matrices), théorème 10.19

(3) Théorème spectral hermitien, lemme 10.32.

(4) Théorème spectral, matrice normales, théorème 12.104.

Pour les résultats de décomposition dont une partie est diagonale, voir le thème 42 sur les décompositions.
Réduction de quadriques :

(1) Réduction de Gauss, théorème 8.239.

Trigonalisation.

(1) Le lemme de Schur complexe 12.102 dit que toute matrice est unitairement équivalente à une matrice triangulaire supérieure.

THMooUXJMTHCG45

Thème 45 : déterminant

(1) Déterminant d'une matrice : définition 4.83.

(2) Déterminant d'un endomorphisme 8.14.

(3) Déterminant $\det_\varphi$ d'une application linéaire entre espaces différents, proposition 10.91.

(4) Le lemme 10.5 donne la formule $\det(f) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \langle e_{\sigma(i)}, f(e_i)\rangle$.

(5) Principales propriétés algébriques du déterminant : la proposition 8.15.

(6) La formule $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ est la proposition 8.247 pour des matrices et la proposition 8.15(1) pour les applications linéaires.

(7) Déterminant et manipulations de lignes et colonnes, section 4.3.11 et les propositions qui précèdent à partir du lemme 4.85 qui dit que $\det(A) = \det(A^t)$.

(8) Les n-formes alternées forment un espace de dimension 1, proposition 8.8.

(9) Déterminant d'une famille de vecteurs 8.9.

(10) Calcul d'un déterminant de taille 2×2 : équation (4.107).

(11) Interprétations géométriques

(11a) À propos d'orthogonalité, le déterminant est très lié au produit vectoriel en dimension 3. Et il le généralise en dimension supérieure.

(11a.i) Liaison au produit vectoriel (orthogonalité) dans la proposition 10.49.

(11a.ii) En particulier le lemme 10.50 nous dit comment un déterminant donne un vecteur orthogonal à une famille donnée de vecteurs.

(11b) Déterminant et aires, volumes

(11b.i) Déterminant et mesure de Lebesgue : théorème 14.272.

(11b.ii) Aire du parallélogramme : il y a la formule avec le produit vectoriel dans la proposition 18.56, mais l'aire proprement dite, avec une intégrale est dans la proposition 20.26.

(11b.iii) Volume du parallélépipède avec le produit mixte et le déterminant 3×3, 18.57.

Tant que nous en sommes dans les interprétations géométriques, il faut lier déterminant, produit vectoriel, orthogonalité et mesure en notant que l'élément de volume lors de l'intégration en dimension 3 est donné par (20.211) : $dS = \|T_u \times T_v\|$ qui est la norme du produit vectoriel des vecteurs tangents au paramétrage.

Nous voyons dans l'équation (20.208) que l'élément de volume pour une partie de dimension n dans $\mathbb{R}^m$ (à l'occasion d'y intégrer une fonction) est donné par un déterminant mettant en jeu les vecteurs tangents du paramétrage.

(12) Le déterminant de Vandermonde est à la proposition 4.126. Il est utilisé à divers endroits :

(12a) Pour prouver que u est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Tr}(u^p) = 0$ pour tout p (lemme 8.209)

(12b) Pour prouver qu'un endomorphisme possédant $\dim(E)$ valeurs propres distinctes est cyclique (proposition 8.298).

(12c) Pour montrer qu'un polynôme ayant $n+1$ racines a tout ses coefficients nuls (proposition 4.127), et donc que les monômes forment une base de l'espace des polynômes (proposition 4.128).

THEMooNMYKod... THMOOCP46

Thème 46 : espaces de fonctions En ce qui concerne les densités, voir le thème 34.

(1) $C^\infty(A)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur A. Les éléments de $C^\infty(A)$ peuvent être à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ selon le contexte.

(2) $\mathscr{D}(A)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ dont le support est un compact dans A.

Pour les ensembles $\mathscr{S}(A)$, $\mathscr{D}(A)$ et $L^p(A)$, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. La raison est que, de toutes façons, le passage à la transformée de Fourier produit en général des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ même si les fonctions de départ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Topologie Les espaces de fonctions sont souvent munis de topologies définies par des seminormes[18].

(1) La topologie des seminormes est la définition 7.381.

(2) La définition 30.14 donne les topologies sur $C^\infty(\Omega)$, $\mathscr{D}(K)$ et $\mathscr{D}(\Omega)$.

(3) La topologie $*$-faible sur $\mathscr{D}'(\Omega)$ est donnée par la définition 30.30.

(4) $p_{K,m}(f) = \sum_{|\mu|\leqslant m} \|\partial^\mu f\|_K$ est une seminorme sur $C^\infty(\Omega)$, proposition 30.9.

L'espace $L^2\big([0,2\pi]\big)$ C'est un espace très important, entre autres parce qu'il est de Hilbert et est bien adapté à la transformée de Fourier.

(1) Un rappel de la construction en 27.104.

(2) Le produit scalaire[19] $\langle f, g\rangle$ est donné en (29.184) et la base trigonométrique est (29.185).

(3) La densité des polynômes trigonométriques dans $L^p(S^2)$ est le théorème 27.102 ou le théorème 28.8, au choix.

(4) Une conséquence de cette densité est que le système trigonométrique est une base hilbertienne[20] de L^2 par le lemme 29.47.

L'espace L^2 est discuté en analyse fonctionnelle, dans la section 27.7 et les suivantes parce que l'étude de L^2 utilise entre autres l'inégalité de Hölder 27.39.

Le fait que L^2 soit un espace de Hilbert est utilisé dans la preuve du théorème de représentation de Riesz 27.185.

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, alors $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Banach ; c'est le théorème de Riesz-Fischer 27.56.

THEMEooFonctionsLi... THMOOCP47

Thème 47 : fonctions lipschitziennes

(1) Définition : 12.342.

(2) La notion de lipschitzien est utilisée pour définir la stabilité d'un problème, définition 34.26.

(3) Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, proposition 12.347.

[18] Définition 7.381.
[19] Produit scalaire, définition 8.163.
[20] Définition 25.27.

THEMEooSTHESC48

Thème 48 : suites et séries

Opérations sur les suites (1) Les limites $x_k + y_k \to x + y$ et $\lambda x_k \to \lambda x$ sont la proposition 7.260.

(2) La limite $x_k y_k \to xy$ est la proposition 9.28.

Suites La proposition 9.27 donne une caractérisation de limite de suite dans un espace vectoriel normé.

(1) Les suites adjacentes, c'est la définition 9.40.

(2) Les séries alternées, théorème 10.176. Il s'agit de dire que $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ converge quand a_k est décroissante et tend vers zéro.

(3) Le concept de suite adjacente sert à étudier la série de Taylor de $\ln(x+1)$, voir le lemme 15.113 et ce qui l'entoure.

(4) La définition de la convergence absolue est la définition 10.118.

(5) Une suite réelle croissante et majorée converge, proposition 9.36.

(6) Toute suite dans un compact admet une sous-suite convergente, théorème 7.343.

(7) Pour tout réel, il existe une suite croissante de rationnels qui y converge, proposition 9.17.

Produit de Cauchy (1) Dans une algèbre normée, proposition 10.164,

(2) Dans $\mathbb{C}$, théorème 15.27.

Calcul de suites (1) Somme : $x_n + y_n \to x + y$ est la proposition 9.29.

Série Les séries sont en général dans la section 10.9.

(1) Quelques séries usuelles en 10.12.3 : série harmonique, géométrique, de Riemann, et la mythique arithmético-géométrique.

(1a) La série est associative : $\sum_k (a_k + b_k) = \sum_k a_k + \sum_k b_k$. C'est la proposition 10.159.

(1b) La série harmonique diverge : $\sum_k \frac{1}{k} = \infty$, exemple 10.170.

(1c) La série géométrique : $\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$, proposition 10.172.

(1d) Une autre cool série : $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N}{N+1}$, lemme 10.175.

(2) La série de Riemann $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$ (définition 15.138) converge ou non selon les valeurs de α. Proposition 14.301 pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et 15.140 pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

(3) Critère des séries alternées, théorème 10.176.

(4) Convergence d'une série implique convergence vers zéro du terme général, proposition 10.121.

(5) Dans une algèbre normée : $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)b = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k b)$, proposition 10.163.

(6) Produit de Cauchy : théorème 15.27 et proposition 10.164.

Sommes infinies En ce qui concerne les sommes finies, la notation $\sum_{i=1}^{N}$ est définie en 1.159. Pour permuter les termes d'une somme avec un élément du groupe symétrique, nous avons la proposition 1.305.

Voici quelques résultats à propos de sommes infinies.

(1) Une somme indexée par un ensemble quelconque est la définition 10.128.

(2) La proposition 10.132 donne une caractérisation pour le sommes de réels positifs.

(3) La définition de la somme d'une infinité de termes est donnée par la définition 10.111.

(4) Une somme de termes positifs indexée par un ensemble indénombrable est toujours infinie par le lemme 10.141.

(5) si la série converge, on peut regrouper ses termes sans modifier la convergence ni la somme (associativité) ; pour les sommes infinies l'associativité et la commutativité dans une série sont perdues. Néanmoins, il subsiste que

(5a) si la série converge absolument, on peut modifier l'ordre des termes sans modifier la convergence ni la somme (commutativité, proposition 10.125).

(6) Permuter une somme infinie avec une application linéaire : $f(\sum_{i\in I} v_i) = \sum_{i\in I} f(v_i)$, c'est la proposition 10.146.

Série entières (1) Rayon de convergence, définition 15.12.

(2) Critère de Hadamard, théorème 15.39. Il donne le rayon de convergence $1/R = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$ ou $1/R = \lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k|$.

(3) Convergence absolue à l'intérieur du rayon de convergence, lemme d'Abel 15.18.

(4) La fonction définie par la série entière $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$ est holomorphe dans son disque de convergence par la proposition 15.48.

(5) La série entière pour $\frac{1}{1-z^k}$, pour $\frac{1}{\omega-z}$ et pour $\frac{1}{(\omega-z)^k}$ sont dans le lemme 15.53.

(6) Les séries entières se généralisent sur les espaces de Banach en séries de puissances, définition 15.57.

THEMEooSuite49

Thème 49 : suite de fonctions

(1) Une limite uniforme de fonctions continues est continue, proposition 12.382.

(2) Sous certaines hypothèses, si $f_i \to f$, alors $f_i' \to f'$, théorème 12.398.

(3) Si les f_k sont continues et si la convergence $\sum_k f_k$ est uniforme, alors la somme est continue, théorème 12.394.

THEMEooKXSG50

Thème 50 : exponentielle Toutes les exponentielles sont définies par la série

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

tant que la somme a un sens.

Réels Voici le plan que nous suivons dans le Frido :

- L'exponentielle est définie par sa série en 15.70.
- Nous démontrons qu'elle vérifie l'équation différentielle $y' = y$, $y(0) = 1$ (théorème 15.88).
- L'équation différentielle $y' = \lambda y$ est dans la proposition 15.92.
- Nous démontrons l'unicité de la solution à cette équation différentielle.
- Nous démontrons qu'elle est égale à $x \mapsto y(1)^x$. Cela donne la définition du nombre e comme valant $y(1)$.
- Nous définissons le logarithme comme l'application réciproque de l'exponentielle (définition 15.95).
- Les fonctions trigonométriques (sinus et cosinus) sont définies par leurs séries. Il est alors montré que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ (lemme 18.11).

Propriétés

- La formule $a^{-x} = 1/a^x$ est la proposition 12.422(3).
- $\exp(x) = e^x$, proposition 15.91.
- Nous avons l'encadrement $2.5 < e < 3$, lemme 15.93.
- Le nombre e est irrationnel, proposition 15.94.

Complexes (1) La définition de $\exp(a + ib)$ est la définition 15.70.

(2) Les principales propriétés, dont $e^{z+w} = e^z e^w$, sont dans la proposition 18.9.

(3) Nous avons $e^{ix} = e^{iy}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + 2k\pi$, corolaire 18.25.

(4) Le fait que $e^{i\theta}$ donne tous les nombres complexes de norme 1 est la proposition 18.62(1).

(5) Le groupe des racines de l'unité est donné par l'équation (19.1).

Algèbre normée commutative Pour la définition c'est la proposition 15.70 et pour la régularité C^∞ c'est la proposition 15.75.

Idem non commutatif Il y a une tentative de théorème 15.76, mais c'est principalement pour les matrices qu'il y a des résultats.

Matrices De nombreux résultats sont disponibles pour les exponentielles de matrices.

(1) $e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}$, proposition 15.80.

(2) Si A est une matrice, alors $(e^{tA})'(u) = Ae^{uA}$, proposition 15.82.

(3) Les sections 10.17 et 15.5.3 parlent d'exponentielle de matrices.

(4) L'exponentielle donne lieu à une fonction de classe C^∞, proposition 15.170.

(5) Le lemme à propos d'exponentielle de matrice 15.173 donne :

$$\|e^{tA}\| \leqslant P\big(|t|\big) \sum_{i=1}^{r} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_i)}.$$

(6) La proposition 15.151 : si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique scindé, alors A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.

(7) La section 15.13.3 parle des fonctions exponentielle et logarithme pour les matrices. Entre autres la dérivation et les séries.

(8) Pour résoudre des équations différentielles linéaires : sous-section 32.6.1.

(9) La proposition 15.150 dit que l'exponentielle est surjective sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

(10) La proposition 10.347 : si u est un endomorphisme, alors $\exp(u)$ est un polynôme en u.

(11) Calcul effectif : sous-section 15.13.4.

(12) Proposition 13.29 : si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ alors $e^{\mathrm{Tr}(A)} = \det(e^A)$.

(13) Les séries entières de matrices sont traitées autour de la proposition 15.167.

Paramétrisation du cercle (1) La proposition 18.62 parle des propriétés de

$$\begin{aligned} \varphi\colon]0,2\pi[&\to S^1 \\ t &\mapsto e^{it}. \end{aligned} \tag{-1.3}$$

THEMEooLBgaF0651

Thème 51 : logarithme

(1) Le logarithme pour les réels strictement positifs $\ln\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ est donné en la définition 15.95 ; c'est l'application réciproque de exp.

(2) Les principales propriétés sont dans la proposition 15.98 : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ etc.

(3) Dérivée : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, proposition 15.97.

(4) La proposition 15.114 donne la série

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k. \tag{-1.4}$$

(5) L'exemple 20.152 donne l'encadrement $0.644 \leqslant \ln(2) \leqslant 0.846$.

(6) La proposition 15.150 dit que toute matrice complexe admet un logarithme. En particulier une série explicite est donnée pour le logarithme d'un bloc de Jordan[21].

(7) Sur les complexes, le logarithme $\ln\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est la définition 26.30. Attention : ce n'est pas la seule définition possible.

(8) La série harmonique diverge à vitesse logarithmique, et la série des inverses des nombres premiers, c'est encore plus lent : théorème 15.134.

(9) Détermination du logarithme le long d'un chemin dans $\mathbb{C}$, définition 26.46.

(10) Un logarithme continu d'une fonction, définition 26.45.

(11) Théorème de Borsuk 26.48 : il y a toujours un logarithme continu le long d'un chemin homotope à une constante (et il y a même équivalence avec admettre une extension sur $\mathbb{C}^*$).

(12) Si $z \in \mathbb{C}$, nous avons $\int \frac{1}{x+z} dx = \ln(x+z)$, proposition 26.43.

(13) La proposition 26.59 dit qu'une application f a un logarithme continu si et seulement si $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0) = 0$.

[21] Jordan, théorème 8.292.

THEMEooBSBLoBWTaQQi2

Thème 52 : fonction puissance Il y a beaucoup de choses à dire…

Définition Nous considérons, pour $a > 0$, la fonction $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $g_a(x) = a^x$. La définition de cette fonction se fait en de nombreuses étapes.

(1) a^n pour $n \in \mathbb{N}$ en la définition 1.342.
(2) a^n pour $n \in \mathbb{Z}$ en la définition 12.402.
(3) $a^{1/n}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ en la définition 12.405.
(4) a^q pour $q \in \mathbb{Q}$ en la définition 12.405.
(5) $\sqrt[n]{x}$ en la définition 12.407.
(6) La fonction g_a est Cauchy-continue sur $\mathbb{Q}$, c'est la proposition 12.419.
(7) a^x pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ en la définition 12.421.
(8) a^z pour $a > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ en la définition 18.5.

Quelques propriétés Quelques propriétés.

(1) Si b, m sont des entiers, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b^n > m$, proposition 1.344.
(2) Pour tout $q \in \mathbb{Q}$, il y a un $\sqrt{q}$ dans $\mathbb{R}$, proposition 1.593.
(3) Pour $a > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons $a^x a^y = a^{x+y}$, proposition 12.422.
(4) Nous avons $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$, proposition 12.433.
(5) Si $a > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$ par la proposition 12.432.
(6) Si $\alpha > 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante pour $x \geqslant 0$, proposition 12.427.
(7) La formule $a^{-x} = 1/a^x$ est la proposition 12.422(3).
(8) La fonction puissance $g_a(x) = a^x$ est continue, proposition 12.422.

Croissance (1) La fonction puissance $f_\alpha(x) = x^\alpha$ est strictement croissante pour les $x > 0$, proposition 12.427
(2) La fonction puissance $g_a(x) = a^x$ est strictement croissante, proposition 12.422.
(3) $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$, proposition 12.434.

Continuité, Dérivation Comme toutes les choses sur la fonction puissance, les preuves sont assez différentes selon que l'on parle de a^x ou de x^a.

(1) La fonction $f_\alpha(x) = x^\alpha$ est continue, proposition 12.431.
(2) La fonction a^x est dérivable et sa dérivée vérifie $g'_a(x) = g_a(x)g'_a(0)$, proposition 12.451.
(3) La formule de dérivation pour $x \mapsto x^q$ avec $q \in \mathbb{Q}$ est la proposition 12.461.
(4) La dérivation de $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est la proposition 14.295. Si elle est tellement loin, c'est parce qu'elle nécessite de permuter une limite de fonctions avec une dérivée.
(5) Pour la formule générale de dérivation de $x \mapsto a^x$ demande de savoir les logarithmes (proposition 15.107).

L'équation fonctionnelle L'exponentielle et plus généralement la fonction puissance $g_a(x) = a^x$ peut être introduite au moyen d'une équation fonctionnelle au lieu de l'équation différentielle usuelle. Cette fameuse équation fonctionnelle est

$$f(x + y) = f(x)f(y) \tag{-1.5}$$

en la définition 12.453.

(1) L'équivalence entre l'équation fonctionnelle et l'équation différentielle est donnée par la proposition 12.459.
(2) La fonction $g_a(x) = a^x$ vérifie l'équation fonctionnelle $g_a(x+y) = g_a(x)g_a(y)$ et les conséquences. C'est la définition 12.453 et les choses qui suivent.
(3) L'équation fonctionnelle pour une fonction continue $f : \mathbb{R} \to S^1$ est traitée dans la proposition 12.463.

Une définition alternative de la fonction puissance serait de poser directement

$$a^x = e^{x\ln(a)}.$$

De là les propriétés se déduisent facilement. Dans cette approche, les choses se mettent dans l'ordre suivant :

- Définir $\exp(x)$ par sa série pour tout x.
- Démontrer que $\exp(q) = \exp(1)^q$ pour tout rationnel q (première partie de la proposition 15.91).
- Définir $e = \exp(1)$.
- Définir, pour x irrationnel, $a^x = \exp(x\ln(a))$.
- Prouver que $e^x = \exp(x)$ pour tout x.

THEMEooMKLBooHCOOss

Thème 53 : sommation finie et infinie La définition du symbole $\sum_{i\in I}$ se fait en trois étapes et deux demi, chacune se basant sur la précédente.

(1) Si $(A, +)$ est un ensemble avec une loi de composition interne, $\sum_{i=0}^{n} a_i$ est en 1.159.

(2) Si I est fini et si est à valeur dans un groupe commutatif, $\sum_{i\in I} f(i)$ est 1.304.

(3) Une somme peut être découpée en parties disjointe : $\sum_{A\cup B} = \sum_A + \sum_B$ par le lemme 1.307.

(4) Enfin si I est un ensemble quelconque, la définition 10.128 introduit la notion de famille sommable dans un espace vectoriel normé.

(5) Si (a_k) est une suite dans un espace vectoriel normé, la somme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est avec les sommes partielles dans la définition 10.111.

(6) La somme au sens de Cesàro est la somme des moyennes partielles, définition 10.177.

Notez que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ n'est pas un cas particulier de $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$. Une différence de taille entre les deux est que pour que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ existe, il suffit que les a_k puissent être sommés dans cet ordre. À l'inverse pour que $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ existe, il faut que l'ordre de sommation puisse être arbitraire.

Si vous voulez sommer des séries encore moins convergentes, vous pouvez avoir envie d'utiliser la super-somme[2], ou la η-régularisation[3].

THEMEooPolynTTayl54

Thème 54 : polynôme de Taylor

Énoncés Il existe de nombreux énoncés du théorème de Taylor, et en particulier beaucoup de formules pour le reste.

(1) Énoncé : théorème 12.471.

(2) Une majoration du reste est dans le théorème 15.63

(3) De classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, proposition 12.478.

(4) Avec un reste donné par un point dans $]x, a[$, proposition 12.482.

(5) Avec reste intégral, théorème 20.149, et théorème 20.147 pour le cas simple $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(6) Le polynôme de Taylor généralise à l'utilisation de toutes les dérivées disponibles le résultat de développement limité donné par la proposition 10.293.

(7) Pour les fonctions holomorphes, il y a le théorème 26.76 qui donne une série de Taylor sur un disque de convergence.

Utilisation Des polynômes de Taylor sont utilisés pour démontrer des théorèmes par-ci par-là.

(1) Il est utilisé pour justifier la méthode de Newton autour de l'équation (34.95).

(2) On utilise pas mal de Taylor dans les résultats liant extrémum et différentielle/hessienne. Par exemple la proposition 17.70.

Quelques développements Voici quelques développements limités à savoir. Ils sont calculables en utilisant la formule de Taylor-Young (proposition 12.487).

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n\alpha(x) \qquad \text{ordre } n, \text{proposition 15.109}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p+1}\alpha(x) \qquad \text{ordre } 2p+1, \text{proposition 18.76}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+2}\alpha(x) \qquad \text{ordre } 2p+1, \text{proposition 18.76}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \alpha(x)x^n \qquad \text{ordre } n, \text{proposition 15.112}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \qquad \text{exact proposition 15.114}$$

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \text{exact proposition 15.114}$$

$$(1+x)^l = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} x^k \qquad \text{exact si } l \text{ est entier.}$$

$$(1+x)^l = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{l(l-1)\dots(l-k+1)}{k!} x^k + x^n\alpha(x) \qquad \text{ordre } n.$$

Dans toutes ces formules, la fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$.

Le développement limité en 0 d'une fonction paire ne contient que les puissances de x d'exposant pair. Voir comme exemple le développement de la fonction cosinus.

INTERNooXFNTδBNT0055

Thème 55 : formule des accroissements finis Il en existe plusieurs formes :

(1) Une version adaptée aux espaces normés de dimension finie, avec hypothèse de différentiabilité, est le théorème 12.340. La formule $\|f(b) - f(a)\|_n \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|df_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|b-a\|_m$.

(2) Une version pour les dérivées partielles est dans le lemme 12.262. Pour rappel, la définition de la dérivation partielle est 10.280.

(3) La formule $f(a+\epsilon e_i) = f(a) + \epsilon(\partial_i f)(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)$, proposition 12.263.

(4) L'existence de $c \in]a,b[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{-1.7}$$
est le théorème des accroissements finis proprement dit. C'est le théorème 12.216.

(5) Il existe un c entre a et b tel que
$$f(b) = f(a) + (b-a)(\partial_\beta f)(c) \tag{-1.8}$$
où $\beta = b-a$ est la proposition 12.261.

(6) La formule $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \alpha(h)$ pour une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en le théorème 10.293.

(7) Une généralisation pour les intervalles non bornés : théorème 12.218.

(8) Espaces vectoriels normés, théorème 10.337

(9) La formule
$$f(a+h) = f(a) = df_a(h) + \alpha(h) \tag{-1.9}$$
est le lemme 10.311.

THEMEooDerivooTOCC56

Thème 56 : dérivation

(1) Définition de la dérivée, définition 10.281.

(2) Dérivée de fonction composée, proposition 12.205 dans le cas réel.

(3) Dérivée partielle de fonction composée, théorème 12.327.

(4) La formule $(f \circ \gamma)'(a) = (\nabla f)\big(\gamma(a)\big) \cdot \gamma'(a)$, corolaire 12.328.

(5) $f(\lambda x)' = \lambda f'(x)$, lemme 12.199.

(6) Toute fonction dérivable est continue, 12.187.

THEMEooDifferTOCC57

Thème 57 : différentielle

Généralités (1) La différentielle est définie en général pour des espaces vectoriels normés par la proposition 10.279

(2) Différentielle et dérivées partielles continues, théorème 12.320.

(3) Différentielle d'une application linéaire, lemme 10.307.

(4) Nous parlons de différentielle en dimension finie et donnons une interprétation géométrique en 12.25.1.

(5) La recherche d'extrémums d'une fonction sur $\mathbb{R}^n$ passe par la seconde différentielle, proposition 17.70.

(6) Lien entre différentielle seconde (hessienne) et convexité en la proposition 17.97 et le corolaire 17.98.

(7) La différentielle est liée aux dérivées partielles par les formules données au lemme 12.280

$$df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \nabla f(a) \cdot u. \tag{-1.10}$$

(8) La matrice de df en a est $(df_a)_{ij} = df_a(e_j) \cdot e_i = (\partial_j f_i)(a)$, proposition 12.281.

Différentielle et dérivées partielles À propos de fonctions de classe C^k, définition 10.297.

(1) Une fonction est de classe C^1 si et seulement si ses dérivées partielles sont continues, théorème 12.320.

(2) Une fonction est C^n si et seulement si ses dérivées partielles sont C^{n-1}, c'est le théorème 12.356.

(3) Différentiabilité en un seul point si les dérivées partielles sont continues en ce point : proposition 12.318.

Fonctions composées À propos de la formule $d(f\circ g)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$, il y a deux théorèmes très semblables.

(1) Le théorème 10.316 insiste sur des hypothèses locales.

(2) Le théorème 10.317 fait des hypothèses plus globales pour s'alléger l'esprit, mais fait une récurrence pour dire que $f \circ g$ est de classe C^r si f et g le sont.

(3) Dans le cas d'espaces vectoriels normés de dimension finie, proposition 10.320.

(4) Composée avec une application linéaire, propositions 10.319 et 10.318.

Applications à valeurs dans les endomorphismes (1) $A\colon U \to \mathrm{End}(V,W)$ est C^p si ses composantes le sont, proposition 12.361.

(2) $A\colon U \to \mathrm{End}(V,W)$ est C^p si $s \mapsto A(s)v$ est C^p pour tout v, proposition 12.361

THEMEooHTQC58

Thème 58 : équations différentielles L'utilisation des théorèmes de point fixe pour l'existence de solutions à des équations différentielles est fait dans le chapitre sur les points fixes.

(1) Le théorème de Schauder a pour conséquence le théorème de Cauchy-Arzela 20.34 pour les équations différentielles.

(2) Le théorème de Schauder 20.33 permet de démontrer une version du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 17.39) sans la condition de Lipschitz.

(3) Le théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39 est utilisé à plusieurs endroits :

- Pour calculer la transformée de Fourier de $e^{-x^2/2}$ dans le lemme 29.24.

(4) Théorème de stabilité de Lyapunov 32.46.

(5) Le système proie-prédateur de Lotka-Volterra 32.47.

(6) Équation de Schrödinger, théorème 32.55.

(7) L'équation $(x-x_0)^\alpha u = 0$ pour $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, théorème 30.50.

(8) La proposition 32.50 donne un résultat sur $y'' + qy = 0$ à partir d'une hypothèse de croissance.

(9) Équation de Hill $y'' + qy = 0$, proposition 32.52.

THEMEooHTQC59

Thème 59 : convexité

Fonctions convexes L'essentiel des résultats sur les fonctions convexes sont dans la section 17.12. On a surtout :

(1) Définition des fonctions convexes : 17.76 et 17.94 en dimension supérieure.
(2) En termes de différentielles, 17.95 pour la différentielle première et 17.98 pour la hessienne.
(3) Une courbe paramétrée convexe est la définition 21.90.
(4) L'enveloppe convexe d'une courbe fermée simple et convexe : 21.92.
(5) Courbure et convexité d'une courbe paramétrée : section 21.13.4.
(6) Une courbe paramétrée convexe est localement le graphe d'une fonction convexe par le lemme 21.91.
(7) La convexité est utilisée dans la méthode du gradient à pas optimal de la proposition 17.114.
(8) La fonction $t \mapsto t^p$ est strictement convexe sur les positifs dans le lemme 17.87.
(9) Une inégalité sympa : $a^r + b^r \leqslant (a+b)^r \leqslant 2^{r-1}(a^r + b^r)$ pour $a, b > 0$ et $r > 1$, lemme 27.134.

En termes de parties convexes, on a :

Parties convexes (1) Définition 7.208 d'une partie convexe d'un espace vectoriel.
(2) Une boule est convexe, proposition 7.254.
(3) Un polygone convexe est défini en 18.167, et les racines de l'unité forment un polygone convexe par la proposition 18.168.

THEMEooHTQC60

Thème 60 : espaces de Hilbert, base hilbertienne Beaucoup de choses concernant les espaces L^2, et en particulier la base trigonométrique sont dans le thème 46.

(1) Toute partie orthonormale d'un espace de Hilbert est libre, proposition 25.24.

(2) Tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne, proposition 25.37.

(3) Unicité de la décomposition dans une base hilbertienne, proposition 25.38.

THEMEooAnalyseCHTQC61

Thème 61 : analyse complexe, fonctions holomorphes

(1) Le lien entre différentielle et dérivée complexe est donné par les équations

$$df_{z_0}(z) = f'(z_0)z = (\partial_z f)(z_0)z \tag{-1.11}$$

par (12.911) et la proposition 26.5. Cela se résume par la formulation lapidaire $f' = \partial_z f$.

(2) Série de Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, théorème 29.58.

THEMEooJGEHoo

Thème 62 : permuter des limites

Permuter des dérivées partielles Pour permuter les dérivées partielles, la clef est d'être C^k.

(1) Si une fonction est de classe C^2, le théorème de Schwarz 12.370 dit que

$$\partial_k \partial_l f = \partial_l \partial_k f. \tag{-1.12}$$

(2) Pour une fonction de classe C^m, on peut permuter m dérivées partielles avec la proposition 12.379.

Fonctions définies par une intégrale Les théorèmes sur les fonctions définies par une intégrale, section 17.4. Nous avons entre autres

(1) $\partial_i \int_B f = \int_B \partial_i f$, avec B compact, proposition 17.24.

(2) Si f est majorée par une fonction ne dépendant pas de x, nous avons le théorème 17.15 pour la continuité de $x \mapsto \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega)$.

(3) Pour la fonction $F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega)$, nous avons la dérivation sous l'intégrale par la formule de Leibniz

$$F'(a) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(a,\omega)d\mu(\omega) \tag{-1.13}$$

démontrée en le théorème 17.19 ou 17.23.
Des variations avec des dérivées partielles et des différentielles sont dans 17.24 et dans 17.25.

(4) Si $f\colon \mathbb{C}\times\Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe (pour $\mathbb{C}$), alors F est holomorphe et

$$F'(z) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(z,\omega)d\mu(\omega). \tag{-1.14}$$

(5) Pour des dérivées partielles multiples, nous avons la formule

$$(\partial^\alpha F)(x) = \int_\Omega (\partial^\alpha f_\omega)(a)d\mu(\omega) \tag{-1.15}$$

dans la proposition 17.21.

(6) Si l'intégrale est uniformément convergente, nous avons le théorème 17.16 qui donne la continuité de $F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega)$.

(7) Pour dériver $\int_B g(t,z)dt$ avec B compact dans $\mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, il faut aller voir la proposition 26.64.

(8) En ce qui concerne le x dans la borne, le théorème 14.287 lie primitive et intégrale en montrant que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f (sous certaines conditions). Le théorème fondamental de l'analyse 14.288 en est une conséquence.

(9) Si T est une **distribution**, alors nous avons

$$T\big(x\mapsto(\partial_y^\alpha\phi)(x,y_0)\big) = \partial_y^\alpha\Big(T\big(x\mapsto\phi(x,y)\big)\Big)_{y=y_0}. \tag{-1.16}$$

C'est la proposition 30.54.

Dérivée et intégrale (1) Dériver $\int_\Omega f(x,\omega)d\omega$, théorème 17.23.

Série et intégrale (1) L'application $\int_0^t f(t,\lambda)dt$ est analytique[22] si f est analytique, proposition 15.204.

Série et limite (1) $\lim_k \sum_n a_{n,k} = \sum_n \lim_k a_{n,k}$, lemme 15.213.

Limite et intégrale (1) Théorème de la convergence monotone, théorème 14.178.

(2) $\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$ dans le corolaire 14.181.

Fubini Le théorème de Fubini permet non seulement de permuter des intégrales, mais également des sommes parce que ces dernières peuvent être vues comme des intégrales sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu des parties et de la mesure de comptage[23]. Nous utilisons cette technique pour permuter une somme et une intégrale dans l'équation (26.309).

[22] Définition 15.189.
[23] Mesure de comptage, définition 14.264.

L'utilisation de Fubini pour permuter des intégrales (sur deux variables différentes) ou deux sommes est expliquée dans 14.306.

C'est par exemple utilisé pour permuter deux sommes dans le cadre des chaines de Markov en 38.8.

- le théorème de Fubini-Tonelli 14.302 demande que la fonction soit mesurable et positive ;
- le théorème de Fubini 14.305 demande que la fonction soit intégrable (mais pas spécialement positive) ;
- le corolaire 14.304 demande l'intégrabilité de la valeur absolue des intégrales partielles pour déduire que la fonction elle-même est intégrable.

Limite et dérivées, différentielle (1) Permuter limite et dérivée dans le cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, théorème 12.398.

(2) Permuter limite et dérivées partielles, théorème 12.401.

(3) Permuter limite et différentielle, théorème 15.9.

Quelques remarques sur les techniques de démonstration.

(1) Le résultat fondamental 12.398 est démontré sans recourir à des intégrales. Une preuve alternative, plus courte, avec des intégrales est donnée en 14.328.

(2) Permuter limite et dérivée partielle, théorème 12.401.

(3) Permuter série et différentielle, théorème 15.9.

Somme et dérivée Permuter somme et différentielle, théorème 15.9.

Limite et mesure Une mesure n'est pas toujours une limite, mais la définition d'une mesure positive sur un espace mesurable parle de permuter limite et mesure : définition 14.18(2).

Norme et intégrale L'inégalité de Minkowski (27.183) permute la norme L^p et l'intégrale. Il n'y a cependant pas vraiment permutation, mais inégalité. C'est déjà mieux que rien.

Distribution et intégrale C'est le théorème 30.55.

Pour les fonctions holomorphes (1) Une série convergent uniformément de fonctions holomorphes est holomorphe, proposition 26.84.

Régularité dans les bornes.

- Le corolaire 27.61 dit que $\lim_{h\to 0} \int_a^{a+h} f = 0$.
- La proposition 27.62 dit que $x \mapsto \int_a^x f$ est continue.

THEMEooDASVolTWZOOf63

Thème 63 : déduire la nullité d'une fonction depuis son intégrale Des résultats qui disent que si $\int f = 0$ c'est que $f = 0$ dans un sens ou dans un autre.

(1) Il y a le lemme 14.199 qui dit ça.

(2) Un lemme du genre dans L^2 existe aussi pour $\int f\varphi = 0$ pour tout φ. C'est le lemme 27.89.

(3) En utilisant le théorème de représentation de Riesz, on peut prouver que $\int_\Omega f\chi = 0$ implique $f = 0$ pour tout $f \in L^p$, proposition 27.190.

(4) Si $\int f\chi = 0$ pour tout χ à support compact alors $f = 0$ presque partout, proposition 29.28.

(5) Si $\int_a^x f = 0$ pour tout x, alors $f = 0$, proposition 29.29.

(6) La proposition 27.26 donne $f = 0$ dans L^p lorsque $\int fg = 0$ pour tout $g \in L^q$.

(7) Une fonction $h \in C_c^\infty(I)$ admet une primitive dans $C_c^\infty(I)$ si et seulement si $\int_I h = 0$. Théorème 17.2.

Dans le même ordre d'idées, si $f > 0$ et si $\mu(X) > 0$ alors $\int_X f > 0$ par le lemme 14.201.

THEMEooInversionLocaleOOf64

Thème 64 : inversion locale, fonction implicite

(1) Théorème d'inversion locale dans un Banach : théorème 17.47.

(2) Inversion locale version analytique : théorème 15.210.

(3) Fonction implicite dans un Banach : théorème 17.48.

(4) Utilisé pour montrer que le flot d'une équation différentielle est un C^p-difféomorphisme local, voir 32.39.

(5) Pour le théorème de Von Neumann 17.61.

THEMEooWAYJoTESTooCOMMENTooMAINooCOMMENTooMAIN65

Thème 65 : points fixes

(1) Il y a plusieurs théorèmes de points fixes.

Théorème de Picard 17.34 donne un point fixe comme limite d'itérés d'une fonction lipschitzienne. Il aura pour conséquence le théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39, l'équation de Fredholm, théorème 17.38 et le théorème d'inversion locale dans le cas des espaces de Banach 17.47.

Théorème de Brouwer qui donne un point fixe pour une application d'une boule vers elle-même. Nous allons donner plusieurs versions et preuves.

(1a) Dans $\mathbb{R}^n$ en version C^∞ via le théorème de Stokes, proposition 20.30.

(1b) Dans $\mathbb{R}^n$ en version continue, en s'appuyant sur le cas C^∞ et en faisant un passage à la limite, théorème 20.32.

(1c) Dans $\mathbb{R}^2$ via l'homotopie, théorème 26.66. Oui, c'est très loin. Et c'est normal parce que ça va utiliser la formule de l'indice qui est de l'analyse complexe[24].

Théorème de Markov-Kakutani 20.36 qui donne un point fixe à une application affine continue d'un convexe fermé borné dans lui-même.

Théorème de Schauder C'est une version valable en dimension infinie du théorème de Brouwer. Théorème 20.33

(2) Pour les équations différentielles

(2a) Le théorème de Schauder a pour conséquence le théorème de Cauchy-Arzela 20.34 pour les équations différentielles.

(2b) Le théorème de Schauder 20.33 permet de démontrer une version du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 17.39) sans la condition de Lipschitz, mais alors sans unicité de la solution. Notons que de ce point de vue nous sommes dans la même situation que la différence entre le théorème de Brouwer et celui de Picard : hors hypothèse de type « contraction », point d'unicité.

(3) En calcul numérique

- La convergence d'une méthode de point fixe est donnée par la proposition 34.48.
- La convergence quadratique de la méthode de Newton est donnée par le théorème 34.54.
- En calcul numérique, section 34.5
- Méthode de Newton comme méthode de point fixe, sous-section 34.6.2.

(4) D'autres utilisations de points fixes.

- Processus de Galton-Watson, théorème 38.59.
- Dans le théorème de Max-Milgram 25.61, le théorème de Picard est utilisé.

THEMEooChangementTESTooCOMMENTooMAINooCOMMENTooMAIN66

Thème 66 : changement de variables Il n'existe rien en mathématique qui s'appelle « changement de variables » : il n'existe que des compositions de fonctions. Ce snobisme terminologique étant, voici un certain nombre de résultats de changement de variables.

(1) Dans des intégrales, théorème 14.282.

(2) Dans des limites, le lemme 7.230 donne $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x+a-b)$ si la limite existe.

(3) Dans les limites, la proposition 7.231 dit que $\lim_{x\to b} f(x+a) = \lim_{x\to a+b} f(x)$.

(4) Dans une équation aux dérivées partielles, exemple 33.132.

(5) Limite de fonction composée $\lim_{x\to a}(f\circ g)$, propositions 7.232 et 7.233.

[24] On aime bien parce que ça ne demande pas Stokes, mais quand même hein, c'est pas gratos non plus.

THEMEooLTCIooDOOO67

Thème 67 : techniques de calcul Il y en a pour tous les gouts.

Primitives et intégrales Toute la section 18.2 donne des trucs et astuces pour trouver des primitives et des intégrales.

Limite à deux variables Les exemples de limites à plusieurs variables font souvent intervenir des coordonnées polaires (du théorème 18.226) ou autres fonctions trigonométriques. Ils sont donc placés beaucoup plus bas que la théorie.

- Méthode du développement asymptotique, sous-section 18.14.2.
- Méthode des coordonnées polaires, sous-section 18.14.1.
- Utilisation du théorème de la fonction implicite, dans l'exemple 18.228.

THEMEooMethoooOOO68

Thème 68 : méthodes de calcul

(1) Théorème de Rothstein-Trager 20.97.

(2) Algorithme des facteurs invariants 4.120.

(3) Méthode de Newton, théorème 34.63

(4) Calcul d'intégrale par suite équirépartie 28.10.

THEMEooMethoooOOO69

Thème 69 : méthode de Newton

(1) Nous parlons un petit peu de méthode de Newton en dimension 1 dans 34.6.

(2) La méthode de Newton fonctionne bien avec les fonctions convexes par la proposition 34.56.

(3) La méthode de Newton en dimension n est le théorème 34.63.

(4) Un intervalle de convergence autour de α s'obtient par majoration de $|g'|$, proposition 34.48.

(5) Un intervalle de convergence quadratique s'obtient par majoration de $|g''|$, théorème 34.54.

(6) En calcul numérique, section 34.6.

(7) Méthode de Newton pour calculer $\sqrt{A}$, exemple 34.57.

THEMEooProlongeooOO70

Thème 70 : prolongement d'applications

(1) Prolongement de fonction définie sur une partie dense, théorème 17.128

(2) Lemme de Borel 15.186.

(3) Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler.

(4) Le théorème de Tietze prolonge des fonctions continues définies sur un fermé. Prolongement continu dans le cas métrique, théorème 27.176. Dans le cas d'un espace normal, théorème 26.22.

THEMEooDistributionsOOO71

Thème 71 : opérations sur les distributions

(1) Convolution d'une distribution par une fonction, définition par l'équation (30.221).

(2) Dérivation d'une distribution, proposition-définition 30.36.

(3) Produit d'une distribution par une fonction, définition 30.35.

THEMEooCTHV00G72

Thème 72 : convolution

(1) Définition 27.78, et principales propriétés sur $L^1(\mathbb{R})$ dans le théorème 27.79.

(2) Inégalité de normes : si $f \in L^p$ et $g \in L^1$, alors $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$, proposition 27.83.

(3) $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors $\varphi * \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, proposition 27.254.

(4) Les suites régularisantes : $\lim_{n\to\infty} \rho_n * f = f$ dans la proposition 29.18.

(5) Convolution d'une distribution par une fonction, définition par l'équation (30.221).

(6) Nous avons $(f * g)' = f * g'$, proposition 27.84.

(7) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in C^\infty$, corolaire 27.85.

(8) Somme de variables aléatoires : $f_{x+Y} = f_X * f_Y$, proposition 36.42.

THMooHWEB00G73

Thème 73 : séries de Fourier

- Le système trigonométrique est donné en la définition 27.97.
- Les coefficients de Fourier de $c_n(f)$ sont donnés par 27.99.
- Formule sommatoire de Poisson, proposition 29.15.
- Inégalité isopérimétrique, théorème 29.61.
- Fonction continue et périodique dont la série de Fourier ne converge pas, proposition 29.56.
- Nous allons montrer la convergence de $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{inx}$ vers $f(x)$ dans divers cas :
  (1) Si f est continue et périodique, convergence au sens de Cesàro, théorème de Fejér 28.7.
  (2) Convergence au sens $L^2\Big([0, 2\pi]\Big)$ dans le théorème 29.48.
  (3) Si f est continue, périodique et si sa série de Fourier converge uniformément, théorème 28.15.
  (4) Si f est périodique et la série des coefficients converge absolument pour tout x, proposition 28.16.
  (5) Si f est périodique et de classe C^1, théorème 28.17.
  (6) Unicité des coefficients de Fourier, corolaire 29.51.

  Il est cependant faux de croire que la continuité et la périodicité suffisent à obtenir une convergence, comme le montre la proposition 29.56.

THEMEooTransfoTHTFO074

Thème 74 : transformée de Fourier

(1) Définition sur L^1, définition 29.1.

(2) La transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$ est continue, proposition 29.11.

(3) L'espace de Schwartz[25] est stable par transformée de Fourier. L'application $\mathcal{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est continue. Proposition 29.22

(4) L'application $\mathcal{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est une bijection. Formule d'inversion, proposition 29.62.

THEMEooGaussTHGS0075

Thème 75 : gaussienne

(1) Le calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

est fait de deux façons dans l'exemple 14.308. Dans les deux cas, le théorème de Fubini 14.305 est utilisé.

(2) Le lemme 29.24 calcule la transformée de Fourier de $g_\epsilon(x) = e^{-\epsilon\|x\|^2}$ qui donne $\hat{g}_\epsilon(\xi) = \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{d/2} e^{-\|\xi\|^2/4\epsilon}$.

(3) Le lemme 29.25 donne une suite régularisante à base de gaussienne.

(4) Elle est utilisée pour régulariser une intégrale dans la preuve de la formule d'inversion de Fourier 29.62

[25] Définition 27.242.

THEMEooJREIooTHE0076

Thème 76 : lemme de transfert Il y a deux résultats qui portent ce nom. Le premier est dans la théorie de Fourier, le résultat $\hat{f}' = i\xi\hat{f}$.

(1) Lemme 29.21 sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

(2) Lemme 31.10 pour L^2.

L'autre lemme de transfert est en théorie des tribus, le résultat $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big)$ du lemme 14.48. Celui-ci est d'ailleurs plutôt nommé « lemme de transport ».

Il existe aussi un théorème de transfert 36.97 qui parle de variables aléatoires :

$$E(f \circ X) = \int_\Omega f\big(X(\omega)\big)dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dP_X(x) \tag{-1.17}$$

THEMEooInvariantsSHE0077

Thème 77 : invariants de similitude

(1) Théorème 8.289.

(2) Pour prouver que la similitude d'applications linéaires résiste à l'extension du corps de base, théorème 8.303.

(3) Pour prouver que la dimension du commutant d'un endomorphisme de E est de dimension au moins $\dim(E)$, lemme 8.300.

(4) Nous verrons dans la remarque 8.290 à propos des invariants de similitude que toute matrice est semblable[26] à la matrice bloc-diagonale constituées des matrices compagnon (définition 8.284) de la suite des polynômes minimaux.

THMooVUCL0078

Thème 78 : isométries Il y a $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ et $(\mathbb{R}^n, d)$.

Les isométries de $\|.\|$ sont linéaires, tandis que les isométries de la distance contiennent aussi les translations et les rotations de centre différent de l'origine.

Ne pas confondre une isométrie d'un espace affine avec une isométrie d'un espace euclidien[27]. Les isométries d'un espace euclidien préservent le produit scalaire et fixent donc l'origine (lemme 10.28). Les isométries des espaces affines par contre conservent les distances (définition 11.64) et peuvent donc déplacer l'origine de l'espace vectoriel sur lequel il est modelé ; typiquement les translations sont des isométries de l'espace affine mais pas de l'espace euclidien.

Parfois, lorsqu'on coupe les cheveux en quatre, il faut faire attention en parlant de $\mathbb{R}^n$: soit on en parle comme d'un espace métrique (muni de la distance), soit on en parle comme d'un espace normé (muni de la norme ou du produit scalaire).

Général Quelques résultats généraux et en vrac à propos d'isométries.

(1) Définition d'une isométrie pour une forme bilinéaire, 8.151. Pour une forme quadratique : définition 8.150.

(2) Définition du groupe orthogonal 8.42, et le spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n)$ en la définition 8.45. Le groupe $\mathrm{SO}(2)$ est le groupe des rotations, par corolaire 18.137.

(3) La rotation $R_A(\theta)$ d'un angle θ autour du point $A \in \mathbb{R}^2$ est donnée par la définition 18.126.

(4) La proposition 18.138 donne à toute rotation $R_0(\theta)$ une matrice de la forme connue. C'est autour de cela que nous définissons les angles, définition 18.156.

(5) Le groupe orthogonal est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$, proposition 8.44.

(6) Les isométries de l'espace euclidien sont affines, 8.153.

(7) Les isométries de l'espace euclidien comme produit semi-direct : $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \simeq T(n) \times_\rho \mathrm{O}(n)$, théorème 18.80.

(8) Isométries du cube, section 5.7.

(9) Nous parlons des isométries affines du tétraèdre régulier dans la proposition 18.194.

Groupe diédral Le groupe diédral est un peu central dans la théorie des isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$ parce que beaucoup de sous-groupes finis des isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$ sont en fait isomorphes au groupe diédral.

[26] Définition 4.117.
[27] Définition 8.167.

(1) Générateurs du groupe diédral, proposition 18.174.

(2) Un sous-groupe fini des isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$ contenant au moins une réflexion est isomorphe au groupe diédral par le théorème 18.199.

(3) Le théorème 18.201 dit que le groupe des isométries propres d'une partie quelconque de $(\mathbb{R}^2, d)$ est soit cyclique soit isomorphe au groupe diédral.

Isométries et réflexions Dans un espace euclidien, toute isométrie peut être décomposée en réflexions autour d'hyperplans. Voici quelques énoncés à ce propos.

(1) Définition d'une réflexion dans $\mathbb{R}^2$ 18.120.

(2) La caractérisation en termes de projection orthogonale est le lemme 18.107 ; en termes de médiatrice c'est le lemme 18.111.

(3) Définition d'un hyperplan 8.304.

(4) En dimension 2, une rotation est définie comme composée de deux réflexions en la définition 18.117.

(5) En dimension 2, les réflexions ont un déterminant -1 par le lemme 18.130.

(6) Les isométries du plan $(\mathbb{R}^2, d)$ sont données dans le théorème 18.190, et sont au plus 3 réflexions par le théorème 18.188.

(7) Décomposition des isométries de $\mathbb{R}^n$ en réflexions par le lemme 18.88.

(8) En particulier, les éléments de SO(3) sont des compositions de deux réflexions par le corolaire 18.90.

(9) Une isométrie de $\mathbb{R}^n$ préserve l'orientation si et seulement si elle est la composition d'un nombre pair de réflexions. C'est le théorème 18.96.

Sous-groupe fini (1) Les sous-groupes finis des isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$ sont cycliques, théorème 18.199.

(2) Les sous-groupes finis de SO(3) sont listés dans 18.223.

(3) Les sous-groupes finis de SO(2) sont cycliques, lemme 18.141.

THEMEooHVdQp79

Thème 79 : enveloppes

(1) L'ellipse de John-Loewner donne un ellipsoïde de volume minimum autour d'un compact dans $\mathbb{R}^n$, théorème 17.122.

(2) Le cercle circonscrit à une courbe donne un cercle de rayon minimal contenant une courbe fermée simple, proposition 21.89.

(3) Enveloppe convexe du groupe orthogonal 13.44.

(4) Enveloppe convexe d'une courbe fermée plane comme intersection des demi-plans tangents, proposition 21.95.

THEMEooIntegrationVarietes

Thème 80 : intégration sur des variétés Définition d'une variété : 20.1.

orientation La notion d'orientation commence avec l'orientation des bases d'un espace vectoriel et continue jusqu'à orienter des variétés à partir de ses cartes.

(1) Classe d'orientation sur les bases d'un espace vectoriel, définition 8.27.

(2) Orientation sur une surface, définition 20.60.

(3) Variété orientable, définition 20.17.

Intégrale Nous définissons d'abord l'intégrale sur une carte, et ensuite sur une variété. En ce qui concerne les formes différentielles, nous n'intégrons que des n-formes sur des variétés de dimension n.

(1) Intégrale d'une fonction sur une carte, définition 20.9.

théorème de Stokes, théorème de Green et compagnie Tous ces théorèmes sont des conséquences plus ou moins directes de celui de Stokes, et des généralisations du théorème fondamental de l'analyse.

(1) Forme générale, théorème 20.71.

(2) Rotationnel et circulation, théorème 24.8.

Le théorème de Stokes peut être utilisé pour montrer le théorème de Brouwer, proposition 20.30.

THEMEooDenombrements THEOOCB1

Thème 81 : dénombrements

- Le nombre de parties de taille k dans un ensemble de taille n est $\binom{n}{k}$, proposition 1.382.
- Coloriage de roulette (18.10.14.1) et composition de colliers (18.10.14.2).
- Nombres de Bell, théorème 15.188.
- Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décompositions de fractions en éléments simples[28], théorème 26.102.

THEMEooProbaDoc THEOOCB2

Thème 82 : caractérisation de distributions en probabilités

(1) La probabilité conjointe est la définition 36.24.

(2) La fonction de répartition est la définition 36.88.

(3) La fonction caractéristique est la définition 36.91.

THEMEooTheoremeCentralLimite THEOOCB3

Thème 83 : théorème central limite

(1) Pour les processus de Poisson[29], théorème 40.22.

THEMEooProbaIndependance THEOOCB4

Thème 84 : indépendance d'événements et de variables aléatoires

(1) Événements indépendants, définition 36.9.

(2) Variables aléatoires indépendantes, définition 36.13.

(3) Espérance de variables aléatoires indépendantes : $E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \dots E(X_n)$, proposition 36.37.

(4) Densité de variables aléatoires indépendantes : $f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$, proposition 36.27.

THEMEooProbaConditionnelle THEOOCB5

Thème 85 : probabilités et espérances conditionnelles Les deux définitions de base, sur lesquelles se basent toutes les choses conditionnelles sont :

- L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire sachant une tribu : $E(X|\mathcal{F})$ de la définition 36.64.

Les autres sont listées ci-dessous.

Probabilité conditionnelle .

Plusieurs probabilités conditionnelles.

- D'un événement en sachant un autre : la définition 36.56 donne

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

  Cela est la définition de base. L'autre est une définition dérivée.
- D'un événement vis-à-vis d'une variable aléatoire discrète. C'est par la définition 36.82 qui définit la variable aléatoire

$$P(A|X)(\omega) = P(A|X = X(\omega)).$$

  Dans le cas continu, c'est la définition 36.83 :

$$P(A|X) = P(A|\sigma(X)) = E(\mathbb{1}_A|\sigma(X)).$$

- D'un événement par rapport à une tribu. C'est la variable aléatoire

$$P(A|\mathcal{F}) = E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}).$$

Espérances conditionnelles Plusieurs espérances conditionnelles.

[28] Éléments simples, lemme 19.15.
[29] Définition 40.5.

- D'une variable aléatoire par rapport à un événement, définition 36.76 :
$$E(X|A) = \frac{E(X\mathbb{1}_A)}{P(A)}. \tag{-1.18}$$
- d'une variable aléatoire par rapport à une tribu. La variable aléatoire $E(X|\mathcal{F})$ est la variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable telle que
$$\int_B E(X|\mathcal{F}) = \int_B X$$
pour tout $X \in \mathcal{F}$. Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alors $E(X|\mathcal{F}) = \texttt{proj}_K(X)$ où K est le sous-ensemble de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ des fonctions $\mathcal{F}$-mesurables (théorème 36.64). Cela au sens des projections orthogonales.
- d'une variable aléatoire par rapport à une autre. La définition 36.66 est une variation sur le même thème :
$$E(X|Y) = E(X|\sigma(Y)),$$

Notons que partout, si X est une variable aléatoire, la notation « sachant X » est un raccourci pour dire « sachant la tribu engendrée par X ».

Quelque formules.

(1) Pour l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire prenant seulement une quantité dénombrable de valeurs : $E(X|A) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k P(X = y_k|A)$ par le lemme 36.77.

(2) La probabilité conditionnelle se factorise par rapport à l'union disjointe par le lemme 36.60 : $P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i|B\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i|B)$.

THEMEGHWOOS86

Thème 86 : chaine de Markov

(1) Construction d'une chaine de Markov dont la matrice de transition est donnée, lemme 38.42.

(2) Principales propriétés d'une chaine de Markov homogène, proposition 38.39.

(3) Si la chaine de Markov est irréductible, alors il y a unicité de l'état stationnaire, proposition 38.16. Mais attention : cela ne veut pas encore dire que la chaine converge effectivement vers cet état.

(4) Si la chaine est irréductible et apériodique, alors il y a convergence en loi vers l'unique loi invariante, théorème 38.37.

(5) État absorbant, définition 38.44.

-1.1 Conventions sur les matrices et changement de bases

SECooBTTTooZZABWA

-1.1.1 Matrices et applications linéaires

SUBSECooAFPDooOzXdGz

Le lien entre matrice et application linéaire est donné par la définition 4.72. L'application d'une matrice à un vecteur est (4.87). Le lien le plus simple entre l'application linéaire et les éléments de matrice est donné par la proposition 4.75. Voici les relations :

$$T_{\alpha i} = T(e_i)_\alpha \tag{-1.19a}$$
$$T(e_i) = \sum_\alpha T_{\alpha i} f_\alpha \tag{-1.19b}$$
$$T(x) = \sum_{i\alpha} T_{\alpha i} x_i f_\alpha \tag{-1.19c}$$
$$T(x)_\alpha = \sum_i T_{\alpha i} x_i. \tag{-1.19d}$$

De la même manière nous utiliserons (rarement) la notation suivante (définition 9.112) si $x \in \mathbb{R}^n$ et $T \in \mathbb{M}(n \times n)$:
$$xT = \sum_{ij} x_i T_{ij} e_j. \tag{-1.20}$$

À partir de là, il est possible de parler de vecteur propre à gauche lorsque $xT = \lambda x$.

Cela définit une application $\psi\colon \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{K}) \to \mathcal{L}(E, F)$ qui a plein de propriétés.

(1) C'est une bijection, proposition 4.75(4).

(2) C'est un isomorphisme d'algèbre, proposition 4.78.

(3) C'est un isomorphisme d'espaces vectoriels, proposition 4.76.

(4) Isomorphisme d'algèbres et d'anneaux, proposition 4.78.

(5) Isomorphisme d'espaces topologiques, proposition 4.78.

Lorsque nous avons une base orthonormée[30] nous avons aussi les propositions 8.179 et 8.179 qui donnent des formules avec produit scalaire :

(1) $T_{\alpha i} = e_\alpha \cdot T(e_i)$

(2) $x \cdot Ay = \sum_{kl} A_{kl} x_k y_l$.

où le point est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

-1.1.2 Le changement de base

Soit un espace vectoriel V muni de deux bases $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(f_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$. Le lemme 4.121 donne le lien entre les vecteurs de base :

(1) $f_\alpha = \sum_i Q_{i\alpha} e_i$

(2) $e_i = \sum_\alpha Q^{-1}_{\alpha i} f_\alpha$

La proposition 4.122 donne un certain nombre de formules pour les coordonnées des vecteurs :

(1) $y_\alpha = \sum_i Q^{-1}_{\alpha i} x_i$

(2) $x_i = \sum_\alpha Q_{i\alpha} y_\alpha$.

(3) $x_i = (Qy)_i$

(4) $x = Qy$

La transformation de la matrice d'une application linéaire lors d'un changement de base est la proposition 4.125. Soit une application linéaire $T\colon V \to V$ de matrices A et B dans les bases $\{e_i\}$ et $\{f_\alpha\}$. Si les bases sont liées par $f_\alpha = \sum_i Q_{i\alpha} e_i$, alors les matrices A et B sont liées par

$$B = Q^{-1} A Q. \tag{-1.21}$$

En ce qui concerne la base duale, si $e'_j = \sum_i A_{ij} e_i$, alors

$$\alpha'_j = \sum_j A^{-1}_{jk} \alpha_k, \tag{-1.22}$$

proposition 4.142.

-1.1.3 Changement de base : matrice d'une forme bilinéaire

La proposition 8.147 fait le changement de matrice d'une forme bilinéaire lors d'un changement de base. Si la matrice de q dans la base $\{e_i\}$ est A et celle dans la base $\{f_\alpha\}$ est B, alors

$$B = Q^t A Q. \tag{-1.23}$$

Pour comparaison avec la loi de transformation des matrices des applications linéaires, voir la remarque 8.148.

Plus généralement, si ϕ est une application linéaire, la matrice de $q \circ \phi$ est $\phi^t q \phi$, proposition 8.146.

[30] Définition 8.165.

-1.2 Multiindice et liste d'indices

NORMooRRZCooMOKAzY

-1.2.
Je crois qu'il y a quelques incohérences de notations/dénominations dans le texte. En principe quand on parle de $\mathbb{R}^n$, un **multiindice** [4] est une vecteur d'entiers positifs à n composantes. Si $\alpha = (2, 1)$ alors nous avons la notation

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f \tag{-1.24}$$

Cette notation pose problème lorsque, par exemple, $\partial_1^2 \partial_2 f \neq \partial_1 \partial_2 \partial_1 f$. La notation en multiindice permet aussi d'écrire, pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \tag{-1.25}$$

Elle pose également problème lorsque l'on veut faire une récurrence sur l'ordre de dérivation en ajoutant une seule dérivation à la fois.

C'est pourquoi nous introduisons le concept de **liste d'indices**. En parlant de $\mathbb{R}^n$, une liste d'indices est un vecteur arbitrairement long (mais fini) d'entiers dans $\{1, \dots, n\}$. Si, dans $\mathbb{R}^7$, $\alpha = (1, 3, 1, 5)$, alors

$$\partial^\alpha f = \partial_1 \partial_3 \partial_1 \partial_5 f. \tag{-1.26}$$

Si α est une liste d'indices de longueur p, une **queue de** α est une liste d'indices de longueur $0 < k \leqslant p$ de la forme $(\alpha_{p-k+1}, \alpha_{p-k+2}, \dots, \alpha_p)$.

Voir aussi la définition 3.36 pour $\alpha!$.

-1.3 Anglicismes

SECooPBZVooCVInFT

Voici quelques anglicismes dont je ne me souviens jamais.

(1) Une σ-algèbre est une tribu, définition 14.1.

(2) Le « uniform boundedness principle » est le théorème de Banach-Steinhaus 10.187.

(3) Un anneau est ce qu'on appelle « *ring* » en anglais. Un corps est en anglais « *field* ». De plus le mot « *field* » comprend la commutativité. Donc certains utilisent le mot « corps » pour dire « corps commutatif » et parlent alors d'anneau *à division* pour parler de corps non commutatifs.

Table des matières

Thématique **3**
-1.1 Conventions sur les matrices et changement de bases . . . 42
-1.1.1 Matrices et applications linéaires . . . 42
-1.1.2 Le changement de base . . . 43
-1.1.3 Changement de base : matrice d'une forme bilinéaire . . . 43
-1.2 Multiindice et liste d'indices . . . 44
-1.3 Anglicismes . . . 44

Table des matières **45**

Index **76**

Liste des notations **98**

I Le Frido **103**

0 Introduction **105**
0.1 Auteurs, contributeurs, sources et remerciements . . . 105
0.1.1 Ceux qui ont travaillé sur le Frido . . . 105
0.1.2 Aide directe, mais pas volontairement sur le Frido . . . 106
0.1.3 Des gens qui ont fait un travail qui m'a bien servi . . . 107
0.2 Originalité . . . 107
0.3 Les choses qui doivent vous faire tiquer . . . 108
0.4 Quelques choix qui peuvent provoquer des quiproquos . . . 108
0.5 Autres choix pas spécialement standards . . . 108
0.5.1 Mathématique intéressante . . . 109
0.6 Sage est là pour vous aider . . . 109
0.6.1 Lancez-vous dans Sage . . . 109
0.6.2 Exemples de ce que Sage peut faire pour vous . . . 109
0.7 Comment contribuer et aider ? . . . 111
0.7.1 Orthographe . . . 111
0.7.2 Des preuves qui manquent . . . 111
0.7.3 Du texte qui manque . . . 111
0.7.4 Des exemples qui manquent . . . 111
0.7.5 Des choses qui n'aident pas . . . 111
0.7.6 Trucs de programmation et de LaTeX . . . 111
0.8 Les politiques éditoriales . . . 112
0.8.1 Licence libre . . . 112
0.8.2 pdflatex . . . 112
0.8.3 utf8 . . . 112
0.8.4 Notations . . . 112
0.8.5 De la bibliographie . . . 112
0.8.6 Faire des références à tout . . . 112
0.8.7 Des listes de liens internes . . . 112
0.8.8 Pas de références vers le futur . . . 112

1 Construction des ensembles de nombres **113**
1.1 Les bases . . . 113
1.1.1 Axiomatique et grammaire . . . 113
1.1.2 Les théorèmes encapsulants . . . 113

1.2 Ensembles, relations, fonctions . . . 114
1.2.1 Opérations ensemblistes . . . 114
1.2.2 Des relations aux bijections . . . 115
1.2.3 Ensemble ordonné . . . 117
1.2.4 Lemme de Zorn . . . 118
1.2.5 Quelques relations ensemblistes . . . 119
1.2.6 Relations d'équivalence . . . 124
1.2.7 Applications bien définies . . . 125
1.2.8 Relations ternaires, opérations . . . 126
1.3 Cardinalité . . . 127
1.3.1 Équipotence, surpotence, subpotence . . . 127
1.3.2 Un peu d'infinité . . . 128
1.3.3 Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein . . . 133
1.3.4 Comparabilité cardinale . . . 136
1.3.5 Théorème de Cantor, ensemble des ensembles . . . 137
1.4 Quelques structures algébriques . . . 137
1.4.1 Positivité . . . 141
1.4.2 Diviseurs, pgcd et ppcm . . . 141
1.4.3 Règle des signes dans un anneau totalement ordonné . . . 142
1.4.4 Valeur absolue, corps valué . . . 143
1.5 Les entiers naturels . . . 145
1.5.1 Triplet naturel . . . 145
1.5.2 Applications définies par récurrence . . . 146
1.5.3 Addition sur les naturels . . . 149
1.5.4 Ordre sur les naturels . . . 152
1.5.5 Multiplication dans les naturels . . . 157
1.5.6 Presque unicité des triplets naturels . . . 159
1.5.7 Écriture d'un naturel dans une base . . . 163
1.6 Les entiers relatifs . . . 167
1.6.1 Opposé . . . 169
1.6.2 Ordre sur $\mathbb{Z}$ . . . 170
1.7 Quelques résultats de cardinalité . . . 173
1.7.1 Ensembles dénombrables . . . 173
1.7.2 Minimum, maximum . . . 177
1.7.3 Dénombrabilité et ensemble des naturels . . . 178
1.7.4 Ajouter ou soustraire des cardinalités . . . 183
1.8 Groupes . . . 188
1.8.1 Définition, unicité du neutre . . . 188
1.8.2 Ordre d'un groupe et d'un élément . . . 189
1.8.3 Groupe ordonné . . . 189
1.8.4 Classes de conjugaison . . . 189
1.8.5 Permutations, groupe symétrique . . . 190
1.8.6 Décomposition en cycles . . . 191
1.8.7 Parité d'une permutation, signature . . . 196
1.8.8 Permutations un peu ordonnées . . . 199
1.9 Symbole de sommation . . . 200
1.9.1 Somme à valeurs dans un groupe commutatif . . . 200
1.9.2 Symbole de produit . . . 203
1.10 Anneaux . . . 204
1.10.1 Idéal dans un anneau . . . 204
1.10.2 Idéal engendré . . . 205
1.10.3 Autres trucs sur les idéaux . . . 207
1.10.4 Élément irréductible et premier . . . 208
1.10.5 Anneau intègre . . . 208
1.10.6 Fonction puissance . . . 212
1.10.7 Anneau euclidien . . . 212
1.10.8 Anneau principal et idéal premier . . . 213
1.11 Le groupe et anneau des entiers . . . 214
1.11.1 Division euclidienne . . . 214
1.11.2 Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ . . . 216
1.11.3 Théorème de Bézout . . . 216

1.11.4 PGCD, PPCM . . . 217
1.11.5 Décomposition en facteurs premiers . . . 219
1.11.6 Double comptage . . . 221
1.11.7 Binôme de Newton . . . 222
1.11.8 Divisibilité des coefficients binomiaux . . . 225
1.11.9 Coefficients binomiaux et polynômes . . . 226
1.12 Idéal dans un anneau . . . 227
1.13 Anneau intègre . . . 231
1.14 Théorèmes chinois et idéaux . . . 233
1.15 Sous-groupe normal . . . 236
1.16 Corps . . . 239
1.16.1 Définitions, morphismes . . . 239
1.16.2 Sous-groupe engendré . . . 240
1.17 Module sur un anneau . . . 242
1.17.1 Module produit . . . 243
1.17.2 Sous-module . . . 245
1.18 Caractéristique d'un anneau . . . 247
1.18.1 Endomorphisme de Frobenius . . . 248
1.18.2 Caractéristique deux . . . 249
1.19 Polynômes . . . 249
1.19.1 Polynômes d'une variable . . . 249
1.19.2 La notation $A[X]$ . . . 251
1.19.3 Action du groupe symétrique . . . 252
1.19.4 Corps des fractions . . . 253
1.19.5 Corps totalement ordonné . . . 258
1.20 Les rationnels . . . 259
1.20.1 Relation d'ordre . . . 260
1.20.2 Caractéristique . . . 262
1.21 Suite de Cauchy dans un corps totalement ordonné . . . 262
1.21.1 Suites de Cauchy dans les rationnels . . . 264
1.22 Insuffisance des rationnels . . . 266
1.23 Les réels . . . 269
1.23.1 L'ensemble . . . 269
1.23.2 Relation d'ordre . . . 271
1.23.3 Complétude . . . 278
1.23.4 Intervalles . . . 281
1.23.5 Maximum, supremum et compagnie . . . 282
1.23.6 Racines . . . 288
1.23.7 Partie entière, partie fractionnaire . . . 288
1.23.8 Le tore . . . 289
1.24 Les complexes . . . 291
1.24.1 Norme et inégalités . . . 292

2 Théorie des groupes **293**
2.1 Groupe dérivé . . . 293
2.2 Théorèmes d'isomorphismes . . . 294
2.3 Indice d'un sous-groupe et ordre des éléments . . . 296
2.4 Suite de composition . . . 297
2.5 Groupes résolubles . . . 300
2.6 Action de groupes . . . 301
2.7 Produit semi-direct de groupes . . . 307
2.8 Groupe de torsion . . . 309
2.9 Famille presque nulle . . . 309

3 Anneaux **311**
3.1 Inversibles et nilpotents . . . 311
3.2 PGCD, PPCM et éléments inversibles . . . 312
3.2.1 Calcul effectif du PGCD et théorème de Bézout . . . 312
3.2.2 Générateurs . . . 314
3.2.3 pgcd, ppcm dans $\mathbb{N}$ . . . 315
3.2.4 Ordre d'un élément dans un groupe fini . . . 318

3.2.5 Écriture des fractions . . . 319
3.2.6 Équation diophantienne linéaire à deux inconnues . . . 321
3.2.7 Quotients . . . 322
3.3 Coefficients multinomiaux . . . 322
3.3.1 Théorème multinomial . . . 322
3.4 Polynômes de plusieurs variables . . . 324
3.4.1 Divisibilité et classes d'association . . . 325
3.4.2 PGCD et PPCM . . . 325
3.4.3 pgcd, ppcm dans un anneau principal . . . 326
3.4.4 Anneaux intègres et corps . . . 326
3.5 Anneau factoriel . . . 327
3.5.1 Autour du théorème de Bézout . . . 328
3.5.2 Théorème chinois . . . 330
3.5.3 Idéal premier . . . 331
3.5.4 Anneau noethérien . . . 332
3.6 Anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ . . . 334
3.6.1 Équations diophantiennes . . . 336
3.6.2 Triplets pythagoriciens et équation de Fermat pour $n = 4$ . . . 337
3.7 Polynômes à coefficients dans un anneau commutatif . . . 340
3.7.1 Monômes . . . 340
3.7.2 Évaluation . . . 340
3.7.3 Polynômes sur un anneau intègre . . . 341
3.7.4 Division euclidienne . . . 341
3.7.5 Polynôme primitif . . . 342
3.7.6 Racines des polynômes . . . 344
3.7.7 Quelques identités . . . 347
3.7.8 Générateurs pour le groupe multiplicatif . . . 347

4 Espaces vectoriels (début) 349
4.1 Parties libres, génératrices, bases et dimension . . . 349
4.1.1 Et en dimension infinie . . . 355
4.1.2 Espace librement engendré . . . 357
4.2 Applications linéaires . . . 358
4.2.1 Définition . . . 358
4.2.2 Linéarité et bases . . . 361
4.2.3 Rang . . . 362
4.3 Matrices . . . 366
4.3.1 Définitions . . . 366
4.3.2 Identifier matrices et applications linéaires . . . 368
4.3.3 Ensemble des applications linéaires . . . 371
4.3.4 Déterminant . . . 372
4.3.5 Déterminant en petite dimension . . . 372
4.3.6 Manipulations de lignes et de colonnes . . . 372
4.3.7 Réduction de Gauss . . . 378
4.3.8 Matrices inversibles . . . 379
4.3.9 Inversibilité et déterminant . . . 381
4.3.10 Quelques ensembles de matrices particuliers . . . 381
4.3.11 Déterminant et combinaisons de lignes et colonnes . . . 381
4.3.12 Transvections . . . 382
4.3.13 Mineur, rang . . . 383
4.3.14 Matrices équivalentes et semblables . . . 385
4.3.15 Algorithme des facteurs invariants . . . 386
4.4 Changement de base . . . 387
4.4.1 Changement de base : vecteurs de base . . . 387
4.4.2 Changement de base : coordonnées . . . 388
4.4.3 Changement de base : matrice d'une application linéaire . . . 389
4.4.4 Déterminant de Vandermonde . . . 389
4.5 Espaces de polynômes . . . 390
4.6 Projection et orthogonalité . . . 392
4.7 Dualité . . . 392
4.7.1 Changement de base duale . . . 395

4.7.2 Orthogonal . . . 395
4.8 Représentation de groupe . . . 396
4.9 Somme directe d'espaces vectoriels . . . 396
4.9.1 Structure réelle . . . 399

5 Classification de certains groupes 401
5.1 Théorèmes de Sylow . . . 401
5.2 Groupe monogène . . . 404
5.3 Automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . 406
5.4 Groupes abéliens finis . . . 407
5.5 Groupes d'ordre pq . . . 409
5.5.1 Fonction indicatrice d'Euler . . . 412
5.5.2 Générateurs . . . 415
5.5.3 Fonction indicatrice d'Euler (propriétés) . . . 415
5.6 Groupe symétrique, groupe alterné . . . 415
5.6.1 Le groupe alterné . . . 415
5.6.2 Sous-groupes normaux . . . 420
5.6.3 Indice . . . 422
5.7 Isométries du cube . . . 423

6 Corps 427
6.1 Généralités . . . 427
6.1.1 Corps ordonnés . . . 427
6.1.2 Automorphismes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ . . . 427
6.1.3 Corps premier . . . 429
6.1.4 Petit théorème de Fermat . . . 430
6.1.5 Nombres de Sophie Germain . . . 431
6.2 Théorème des deux carrés . . . 433
6.2.1 Un peu de structure dans $\mathbb{Z}[i]$ . . . 433
6.2.2 Résultats chinois . . . 436
6.3 Polynômes à coefficients dans un corps . . . 439
6.3.1 Irréductibilité . . . 443
6.3.2 Idéaux . . . 444
6.3.3 Identité de Bézout . . . 446
6.3.4 Lemme et théorème de Gauss . . . 446
6.3.5 Polynômes sur un corps et pgcd . . . 447
6.4 Extension de corps . . . 449
6.4.1 Extension et polynôme minimal . . . 450
6.4.2 Extensions algébriques et éléments transcendants . . . 452
6.4.3 Extension algébrique et polynôme minimal . . . 454
6.4.4 Extensions et polynômes . . . 455
6.4.5 Racines de polynômes . . . 464
6.4.6 Corps de rupture . . . 465
6.4.7 Pile d'extensions . . . 467
6.4.8 Clôture algébrique . . . 468
6.4.9 Polynômes à plusieurs variables . . . 474
6.4.10 Corps de décomposition . . . 474
6.4.11 Non irréductible ou pas corps ? . . . 478
6.4.12 Clôture algébrique . . . 478
6.4.13 Dérivée de polynômes . . . 479
6.4.14 Extensions séparables . . . 480
6.5 Idéal maximum . . . 486
6.5.1 Idéal maximum . . . 486
6.6 Polynômes symétriques et alternés . . . 487
6.6.1 Polynômes symétriques, alternés ou semi-symétriques . . . 487
6.6.2 Polynôme symétrique élémentaire . . . 487
6.6.3 Relations coefficients racines . . . 489
6.7 Minuscule morceau sur la théorie de Galois . . . 490

7 Topologie générale 493
7.1 Éléments généraux de topologie . . . 493

7.1.1 Définitions et propriétés de base . . . 493
7.1.2 Base de topologie . . . 493
7.1.3 Fermés . . . 494
7.1.4 Quelques exemples . . . 495
7.1.5 Adhérence, fermeture, intérieur, point d'accumulation et point isolé . . . 496
7.1.6 Topologie sur $\mathbb{Q}$ . . . 502
7.1.7 Applications continues . . . 503
7.2 Topologie rendant continue (topologie initiale) . . . 504
7.2.1 Topologie produit . . . 507
7.2.2 Topologie de la convergence simple . . . 508
7.2.3 Topologie quotient . . . 509
7.3 Espace séparable . . . 509
7.4 Suites et convergence . . . 510
7.4.1 Convergence dans un fermé . . . 510
7.4.2 Pour des limites uniques : séparabilité . . . 511
7.4.3 Topologie induite . . . 512
7.4.4 Fonctions équivalentes . . . 512
7.5 Espace topologique normal et complètement normal . . . 514
7.6 Connexité . . . 514
7.7 Compacité . . . 518
7.7.1 Définition et notions connexes . . . 518
7.7.2 Autres compacité . . . 519
7.7.3 Quelques propriétés . . . 520
7.7.4 Espace relativement compact . . . 523
7.7.5 Propriété d'intersection finie . . . 524
7.8 Limite de fonction . . . 524
7.9 Topologie, distances et normes . . . 525
7.9.1 Distance et topologie métrique . . . 525
7.9.2 Précompact . . . 527
7.9.3 Caractérisations séquentielles . . . 527
7.9.4 Suites et espaces métriques . . . 527
7.9.5 Continuité de la distance . . . 529
7.9.6 Topologie métrique et induite . . . 530
7.9.7 Intérieur, adhérence et frontière . . . 530
7.9.8 Boules ouvertes, fermées, sphères . . . 531
7.9.9 Espace localement compact . . . 532
7.9.10 Compactifié d'Alexandrov . . . 533
7.9.11 Continuité séquentielle . . . 535
7.9.12 Continuité et compacité . . . 535
7.9.13 Distance à un ensemble . . . 538
7.9.14 Espace métrisable . . . 539
7.9.15 Connexité . . . 540
7.9.16 Convexité . . . 541
7.9.17 Norme . . . 541
7.9.18 Topologie . . . 543
7.10 Espaces vectoriels topologiques . . . 543
7.10.1 De complexe à réel . . . 544
7.10.2 Base de topologie . . . 545
7.10.3 Corps topologique . . . 547
7.10.4 Voisinage symétrique et équilibré . . . 547
7.10.5 Espace topologique localement convexe . . . 550
7.10.6 Limite de suites . . . 552
7.11 Applications continues . . . 553
7.11.1 Continuité . . . 553
7.11.2 Continuité et topologie induite . . . 555
7.11.3 Continuité et connexité . . . 556
7.11.4 Continuité et compacité . . . 557
7.11.5 Distance uniforme . . . 558
7.11.6 Continuité de la réciproque sur un compact . . . 558
7.11.7 Espace vectoriel topologique . . . 559
7.12 Produit fini d'espaces vectoriels normés . . . 559

7.12.1 Distance et norme produit . . . 559
7.13 Topologie réelle en dimension n . . . 563
7.13.1 Ouverts et fermés . . . 563
7.13.2 Point d'accumulation, point isolé . . . 563
7.13.3 Limite de suite . . . 564
7.14 Topologie et distance . . . 564
7.15 Suites de Cauchy, métrique et espaces complets . . . 566
7.15.1 Généralités . . . 566
7.15.2 Espace de Banach . . . 567
7.15.3 Espace topologique métrique . . . 568
7.15.4 Compacts, fermés . . . 569
7.15.5 Équivalence entre Cauchy et $\tau-$Cauchy . . . 577
7.16 Norme, espace vectoriel normé . . . 578
7.17 Espaces métriques . . . 580
7.17.1 Espaces métrisables . . . 580
7.17.2 Fonctions continues . . . 581
7.17.3 Théorème de Tykhonov . . . 587
7.17.4 Ensembles enchainés . . . 587
7.17.5 Produit fini d'espaces métriques . . . 588
7.17.6 Équicontinuité . . . 589
7.17.7 Continuité uniforme . . . 590
7.18 Partie maigre et nulle part dense . . . 590
7.19 Seminormes . . . 591
7.19.1 Seminorme . . . 591
7.19.2 Fonctionnelle de Minkowski . . . 592
7.20 Topologie des seminormes . . . 596
7.20.1 Topologie initiale des seminormes . . . 596
7.20.2 Topologie avec des boules . . . 597
7.20.3 Seminorme et métrisable . . . 602
7.20.4 Boules et topologie . . . 603
7.20.5 Espace dual . . . 606
7.20.6 Espace $C^k(\mathbb{R}, E')$ . . . 606
7.21 Espaces de Baire . . . 607

8 Espaces vectoriels (encore) 611
8.1 Déterminants . . . 611
8.2 Applications multilinéaires . . . 611
8.2.1 Formes multilinéaires alternées . . . 612
8.2.2 Déterminant d'une famille de vecteurs . . . 613
8.2.3 Déterminant d'un endomorphisme . . . 616
8.2.4 Déterminant de Gram . . . 619
8.2.5 Déterminant de Cauchy . . . 619
8.2.6 Matrice de Sylvester . . . 619
8.2.7 Théorème de Kronecker . . . 622
8.3 Orientation . . . 623
8.3.1 Cas vectoriel . . . 623
8.3.2 Cas affine . . . 625
8.4 Hermitien, orthogonal, adjoint . . . 625
8.4.1 Opérateur orthogonal, matrice orthogonale . . . 627
8.5 Topologie . . . 628
8.5.1 Boules et sphères . . . 628
8.5.2 Ouverts, fermés, intérieur et adhérence . . . 629
8.5.3 Point isolé, point d'accumulation . . . 635
8.5.4 Des exemples . . . 636
8.6 Valeur propre et vecteur propre . . . 639
8.6.1 Généralités . . . 639
8.6.2 Dans le vif du sujet . . . 639
8.7 Polynômes d'endomorphismes . . . 641
8.7.1 Polynômes d'endomorphismes . . . 641
8.7.2 Polynôme minimal et minimal ponctuel . . . 644
8.7.3 Polynôme caractéristique . . . 649

8.8 Formes bilinéaires et quadratiques . . . 652
8.8.1 Dégénérescence d'une forme bilinéaire . . . 653
8.8.2 Orthogonal pour une forme bilinéaire . . . 654
8.8.3 Formes quadratiques . . . 656
8.8.4 Isotropie . . . 658
8.9 Formes bilinéaires et quadratiques . . . 659
8.9.1 Matrice associée à une forme bilinéaire . . . 659
8.9.2 Changement de base : matrice d'une forme bilinéaire . . . 660
8.9.3 Isométrie, forme quadratique et bilinéaire . . . 660
8.9.4 Isométries . . . 661
8.10 Signature, théorème de Sylvester . . . 663
8.11 Produit scalaire, produit hermitien . . . 664
8.11.1 Hermitien, unitaire, etc. . . . 666
8.11.2 Éléments de matrice . . . 667
8.11.3 Transposée : pas d'approche naïve . . . 668
8.11.4 Transposée : la bonne approche . . . 669
8.11.5 Polynômes de Lagrange . . . 671
8.11.6 Dual de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ . . . 672
8.12 Diagonalisation et trigonalisation . . . 673
8.12.1 Matrices semblables . . . 673
8.12.2 Trace de matrices semblables . . . 674
8.12.3 Endomorphismes nilpotents . . . 675
8.12.4 Endomorphismes diagonalisables . . . 677
8.12.5 Diagonalisation : cas complexe, pas toujours . . . 680
8.12.6 Diagonalisation : cas réel . . . 681
8.12.7 Matrice définie positive . . . 683
8.12.8 Réduction de Gauss . . . 685
8.12.9 Orthogonalité pour une forme bilinéaire . . . 688
8.12.10 Équivalence de formes quadratiques . . . 692
8.12.11 Diagonalisation . . . 692
8.13 Fonctions . . . 694
8.14 Sous-espaces caractéristiques . . . 694
8.14.1 Théorèmes de décomposition . . . 696
8.14.2 Valeurs singulières . . . 698
8.15 Extension du corps de base . . . 699
8.15.1 Extension des applications linéaires . . . 699
8.15.2 Projections . . . 701
8.15.3 Rang, polynôme minimal, polynôme caractéristique . . . 703
8.16 Frobenius et Jordan . . . 705
8.16.1 Matrice compagnon . . . 705
8.16.2 Réduction de Frobenius . . . 706
8.16.3 Forme normale de Jordan . . . 708
8.17 Commutant et endomorphismes cycliques . . . 710
8.17.1 Endomorphisme cyclique . . . 710
8.17.2 Commutant : cas diagonalisable . . . 710
8.17.3 Commutant : cas général . . . 713
8.18 Hyperplans et formes linéaires . . . 715
8.18.1 Trouver la matrice d'une symétrie donnée . . . 716
8.19 Théorème de Burnside . . . 718
8.20 Ellipsoïde . . . 720
8.21 Système d'équations linéaires : méthode de Gauss . . . 721

9 Analyse réelle : topologie et continuité **723**
9.1 Intervalles . . . 723
9.2 Application réciproque . . . 724
9.2.1 Définitions . . . 724
9.2.2 Graphe de la fonction réciproque . . . 724
9.3 Topologie sur l'ensemble des réels . . . 725
9.3.1 Compacité pour les réels . . . 726
9.3.2 Conséquence : les fermés bornés sont compacts . . . 728
9.3.3 Suites et limites dans les réels . . . 729

9.3.4 Opérations sur les limites . . . 729
9.3.5 Exemples . . . 730
9.3.6 Limites infinies . . . 731
9.3.7 Topologie et matrices . . . 731
9.3.8 Suites croissantes et bornées . . . 732
9.3.9 Suites adjacentes . . . 733
9.3.10 Limite supérieure et inférieure . . . 734
9.3.11 Ouverts, voisinage, topologie . . . 736
9.3.12 Intervalles et connexité . . . 737
9.3.13 Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . 740
9.3.14 Recouvrement par des intervalles ouverts . . . 741
9.4 Connexité par arcs . . . 743
9.4.1 Des exemples . . . 744
9.4.2 Quelques mots à propos de la droite réelle achevée . . . 746
9.5 Continuité . . . 746
9.5.1 Opération sur la continuité . . . 747
9.5.2 La fonction la moins continue du monde . . . 749
9.5.3 Approche topologique . . . 750
9.5.4 Limite sur des chemins . . . 751
9.5.5 Racine carrée . . . 751
9.5.6 Module sur les nombres complexes . . . 751
9.5.7 Théorème de Perron-Frobenius . . . 755
9.5.8 Limite à gauche et à droite . . . 758
9.5.9 Continuité de la racine carrée, invitation à la topologie induite . . . 759
9.5.10 Second degré . . . 760

10 Espaces vectoriels normés **763**
10.0.1 Norme, produit scalaire et Cauchy-Schwarz (cas réel) . . . 763
10.0.2 Topologie . . . 766
10.0.3 Le tore . . . 766
10.0.4 Le tore . . . 769
10.1 Théorème spectral autoadjoint . . . 771
10.1.1 Inégalité de Minkowski . . . 773
10.1.2 Cauchy-Schwarz etc. cas complexe . . . 774
10.2 Norme à partir d'un produit scalaire . . . 775
10.2.1 Diagonalisation : cas complexe, ce qu'on a . . . 776
10.2.2 Projection et orthogonalité . . . 776
10.2.3 Théorème de Pythagore . . . 777
10.2.4 Produit vectoriel . . . 778
10.2.5 Produit mixte . . . 781
10.2.6 Procédé de Gram-Schmidt . . . 783
10.2.7 Pseudo-réduction simultanée . . . 783
10.3 Approximations . . . 784
10.3.1 Quelques exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$ . . . 785
10.4 Équivalence des normes . . . 786
10.4.1 En dimension finie . . . 786
10.4.2 Contre-exemple en dimension infinie . . . 789
10.5 Norme opérateur . . . 790
10.5.1 Matrice bloc-diagonale . . . 792
10.5.2 Norme d'algèbre . . . 793
10.6 Application linéaire continue et bornée . . . 794
10.6.1 Déterminant entre espaces différents . . . 796
10.6.2 Suites . . . 798
10.6.3 Continuité du produit de matrices . . . 800
10.7 Applications multilinéaires . . . 801
10.7.1 Norme . . . 801
10.7.2 Continuité . . . 803
10.7.3 Continuité de la composition . . . 805
10.7.4 Norme . . . 805
10.8 Applications multilinéaires . . . 806
10.9 Séries . . . 807

10.10 Sommes de familles infinies . . . 808
10.10.1 Suites . . . 808
10.10.2 Séries . . . 809
10.10.3 Terme général . . . 809
10.10.4 Convergence commutative . . . 810
10.10.5 Famille sommable . . . 814
10.10.6 Sommation associative . . . 818
10.10.7 Somme non dénombrables . . . 818
10.10.8 Sommes dénombrables . . . 819
10.11 Liens entre différents types de sommabilité . . . 822
10.11.1 Séries entières . . . 826
10.11.2 Somme téléscopique . . . 827
10.11.3 Distributivité . . . 827
10.11.4 Produit de Cauchy . . . 828
10.12 Série réelle . . . 829
10.12.1 Critères de convergence absolue . . . 829
10.12.2 Critères de convergence simple . . . 830
10.12.3 Quelques séries usuelles . . . 831
10.12.4 Séries alternées . . . 833
10.12.5 Moyenne de Cesàro . . . 834
10.12.6 Écriture décimale d'un réel . . . 835
10.12.7 Théorème de Banach-Steinhaus . . . 838
10.12.8 Convergence forte . . . 840
10.13 Application ouverte . . . 841
10.14 Produit tensoriel d'espaces vectoriels . . . 844
10.15 Produit tensoriel . . . 844
10.15.1 Définition générale . . . 845
10.15.2 Constructions du produit tensoriel . . . 847
10.15.3 Construction abstraite . . . 847
10.15.4 Bases . . . 850
10.15.5 Construction par les formes multilinéaires . . . 852
10.15.6 Décomposabilité . . . 854
10.15.7 Produit tensoriel d'applications linéaires . . . 855
10.15.8 Contraction . . . 857
10.15.9 Tenseurs symétriques et alternés . . . 858
10.15.10 Décomposition . . . 863
10.15.11 Règle de Leibniz pour le produit extérieur . . . 864
10.15.12 Produit intérieur . . . 871
10.15.13 Pull back . . . 874
10.15.14 Norme . . . 875
10.15.15 Applications bilinéaires, matrices et produit tensoriel . . . 875
10.15.16 Application d'opérateurs . . . 876
10.15.17 Convergence en norme et par composante . . . 876
10.16 Calcul différentiel dans un espace vectoriel normé . . . 877
10.16.1 Limite de fonctions . . . 877
10.16.2 Définition de la différentielle . . . 877
10.16.3 Pas en dimension infinie . . . 878
10.16.4 Dérivée directionnelle . . . 878
10.16.5 Théorème des accroissements finis . . . 881
10.16.6 Différentielle d'ordre 2 . . . 883
10.16.7 Quelques mots à propos des différentielles d'ordre supérieur . . . 883
10.16.8 Topologie et norme induite . . . 885
10.16.9 Différentielle d'applications linéaires . . . 885
10.16.10 Différentielle d'applications multilinéaires . . . 886
10.16.11 Accroissements finis . . . 887
10.16.12 Notations pour les applications linéaires . . . 888
10.16.13 (non ?) Différentiabilité des applications linéaires . . . 888
10.16.14 Dérivation en chaine et formule de Leibniz . . . 888
10.16.15 Composition . . . 890
10.16.16 Règle de Leibniz . . . 893
10.16.17 Inverse . . . 894

10.16.18 Différentiation de produit tensoriel . . . 894
10.16.19 Produit cartésien . . . 897
10.16.20 Formule des accroissements finis . . . 899
10.16.21 Applications multilinéaires . . . 902
10.16.22 Différentielle partielle . . . 903
10.16.23 L'inverse, sa différentielle . . . 904
10.17 Exponentielle de matrice . . . 906
10.18 Espace dual . . . 907
10.18.1 Topologies . . . 908
10.18.2 Module de continuité . . . 909
10.19 Mini introduction aux nombres p-adiques . . . 910
10.19.1 La flèche d'Achille . . . 910
10.19.2 La tortue et Achille . . . 911
10.19.3 Dans les nombres p-adiques, c'est vrai . . . 911

11 Espaces affines **913**
11.1 Vecteurs agissant sur un espace . . . 913
11.2 Repères cartésiens affines . . . 914
11.3 Classification affine des coniques . . . 914
11.4 Applications affines . . . 918
11.4.1 Autres propriétés . . . 919
11.5 Isomorphismes . . . 921
11.6 Sous-espaces affines . . . 921
11.7 Barycentre . . . 922
11.7.1 Sous-espaces affines . . . 923
11.7.2 Enveloppe convexe . . . 925
11.7.3 Applications affines et barycentre . . . 927
11.8 Repères, coordonnées cartésiennes et barycentriques . . . 928
11.8.1 Équation de droite . . . 932
11.8.2 Associativité, coordonnées barycentriques dans un triangle . . . 932
11.9 Applications affines sur $\mathbb{R}^n$ . . . 933
11.9.1 Structure de groupe pour les applications affines . . . 934
11.10 Isométries . . . 935

12 Analyse réelle : limites et dérivation **937**
12.1 Limite de fonctions . . . 937
12.1.1 Définition . . . 937
12.1.2 Quelques règles de calcul . . . 939
12.2 Limites pointées et épointées . . . 942
12.2.1 Théorèmes de composition de limites . . . 944
12.2.2 Discussion pointée Vs épointée . . . 947
12.3 Limites en l'infini . . . 950
12.3.1 Droite réelle achevée . . . 950
12.3.2 Limites en l'infini . . . 951
12.3.3 Limite en des nombres . . . 952
12.3.4 Limites quand tout va bien . . . 953
12.3.5 Limites de fonctions . . . 953
12.3.6 Limite à gauche et à droite . . . 954
12.4 Limite en compactifié d'Alexandrov . . . 955
12.4.1 Prolongement par continuité . . . 955
12.4.2 Prolongement par continuité . . . 957
12.4.3 Théorème de la bijection . . . 957
12.5 Limite et continuité . . . 960
12.5.1 Prolongement des rationnels vers les réels . . . 962
12.6 Espace des fonctions continues . . . 965
12.7 Uniforme continuité . . . 969
12.8 Fonctions sur un compact . . . 971
12.9 Polynômes, théorème de d'Alembert . . . 972
12.9.1 Polynômes sur les réels . . . 972
12.9.2 Polynômes sur les complexes . . . 973
12.10 Trigonalisation . . . 978

12.10.1 Trigonalisation : généralités . . . 978
12.10.2 Trigonalisation : cas complexe . . . 978
12.11 Matrices, spectre et norme . . . 984
12.11.1 Rayon spectral . . . 985
12.11.2 Normes de matrices et d'applications linéaires . . . 989
12.12 Droites dans un espace vectoriel . . . 993
12.12.1 Parallélisme et perpendicularité . . . 995
12.12.2 Droites et applications linéaires . . . 996
12.12.3 Projection orthogonale . . . 997
12.13 Géométrie dans le plan . . . 999
12.13.1 Segment, médiatrice et équidistance . . . 1002
12.14 Géométrie dans l'espace . . . 1007
12.14.1 Droites et plans dans l'espace . . . 1008
12.14.2 Plan médiateur . . . 1009
12.14.3 Tétraèdre . . . 1010
12.15 Plan médiateur dans l'espace . . . 1011
12.16 Dérivée : exemples introductifs . . . 1011
12.16.1 La vitesse . . . 1011
12.16.2 La tangente à une courbe . . . 1012
12.16.3 L'aire en dessous d'une courbe . . . 1013
12.17 Dérivation de fonctions réelles . . . 1014
12.17.1 Exemples . . . 1015
12.17.2 Interprétation géométrique : tangente . . . 1016
12.17.3 Interprétation géométrique : approximation affine . . . 1016
12.18 Règles de calcul . . . 1017
12.18.1 Dérivée de la réciproque . . . 1022
12.18.2 Dérivée de fonction composée . . . 1024
12.18.3 Dérivée de fonction périodique . . . 1025
12.19 Dérivation et croissance . . . 1025
12.19.1 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis . . . 1027
12.19.2 Règle de L'Hôpital . . . 1029
12.19.3 Dérivée et primitive . . . 1031
12.20 Fonctions de plusieurs variables . . . 1032
12.20.1 Graphes de fonctions à plusieurs variables . . . 1034
12.20.2 Courbes de niveau . . . 1035
12.21 Limites à plusieurs variables . . . 1039
12.21.1 Caractérisation de la limite par les suites . . . 1041
12.21.2 Règle de l'étau . . . 1042
12.21.3 Méthode des chemins . . . 1043
12.22 Dérivée directionnelle . . . 1045
12.22.1 Dérivée partielle et directionnelles . . . 1045
12.22.2 Gradient : direction de plus grande pente . . . 1045
12.22.3 Gradient : orthogonal au plan tangent . . . 1046
12.22.4 Mise en bouche en dimension 2 . . . 1047
12.23 Accroissements finis et dérivées partielles . . . 1048
12.24 Formes différentielles . . . 1049
12.24.1 Décomposition dans la base duale . . . 1049
12.24.2 L'isomorphisme musical . . . 1050
12.25 Différentielle . . . 1050
12.25.1 Exemples introductifs . . . 1050
12.25.2 Différentielle . . . 1051
12.25.3 Matrice de la différentielle . . . 1052
12.25.4 Différentielle, dual et forme différentielle . . . 1053
12.25.5 Ce n'est pas la différentielle extérieure . . . 1054
12.25.6 Continuité, dérivabilité et différentiabilité . . . 1054
12.25.7 Calcul de valeurs approchées . . . 1057
12.25.8 Différentielle et tangente . . . 1058
12.25.9 Prouver qu'une fonction n'est pas différentiable . . . 1060
12.25.10 Gradient . . . 1063
12.25.11 Linéarité . . . 1063
12.26 Produit . . . 1064

12.26.1 Difficulté d'ordre supérieur . . . 1065
12.26.2 Solution : produit tensoriel . . . 1066
12.26.3 Formes bilinéaires . . . 1066
12.27 Différentielle de fonction composée . . . 1067
12.27.1 Fonctions composées . . . 1069
12.28 Autres trucs sur la différentielle . . . 1070
12.28.1 Différentielle et dérivées partielles . . . 1070
12.28.2 Plan tangent . . . 1070
12.28.3 Notes idéologiques quant au concept de plan tangent . . . 1071
12.28.4 Gradient et recherche du plan tangent . . . 1071
12.29 Jacobienne . . . 1075
12.29.1 Rappels et définitions . . . 1075
12.30 Fonctions de classe C^1 . . . 1075
12.31 Différentielle et dérivée complexe . . . 1083
12.31.1 Quelques règles de calcul . . . 1087
12.32 Théorèmes des accroissements finis . . . 1087
12.33 Fonctions lipschitziennes . . . 1088
12.34 Différentielles d'ordre supérieur . . . 1089
12.34.1 Différentielle et dérivées partielles . . . 1089
12.34.2 Application à valeurs dans les opérateurs . . . 1093
12.34.3 Espaces d'applications multilinéaires et identifications . . . 1094
12.34.4 Fonctions différentiables plusieurs fois . . . 1098
12.34.5 Différentielle seconde, fonction de classe C^2 . . . 1098
12.34.6 Ordre supérieur . . . 1101
12.35 Suites et séries : généralités . . . 1103
12.35.1 Norme supremum . . . 1103
12.35.2 Convergence uniforme . . . 1104
12.35.3 Série de fonctions . . . 1106
12.36 Permuter limite et dérivée . . . 1108
12.37 La fonction puissance . . . 1114
12.37.1 Sur les naturels . . . 1114
12.37.2 Sur les rationnels, racines . . . 1116
12.38 Densité des polynômes . . . 1130
12.38.1 Théorème de Stone-Weierstrass . . . 1130
12.39 Primitive de fonction continue . . . 1134
12.39.1 Dérivation de la fonction puissance (première) . . . 1135
12.39.2 Équation fonctionnelle . . . 1137
12.39.3 Dérivation de la fonction puissance (seconde) . . . 1140
12.39.4 Vers les complexes . . . 1141
12.40 Polynômes de Taylor . . . 1142
12.40.1 Fonctions « petit o » . . . 1146
12.40.2 Autres formulations . . . 1147
12.40.3 Formule et reste . . . 1148
12.40.4 Reste intégral . . . 1148
12.41 Développement limité autour de zéro . . . 1148
12.41.1 Généralités . . . 1149
12.41.2 Formule de Taylor-Young . . . 1150
12.41.3 Règles de calcul . . . 1151
12.42 Développement ailleurs qu'à l'origine . . . 1152
12.43 Développement au voisinage de l'infini . . . 1153
12.43.1 La fonction puissance : remarques pour la suite . . . 1154
12.44 Fonctions réelles de deux variables réelles . . . 1154
12.44.1 Limites de fonctions à deux variables . . . 1154
12.44.2 Dérivées partielles . . . 1155
12.44.3 Différentielle et accroissement . . . 1155
12.45 Les fonctions à valeurs vectorielles . . . 1156
12.46 Fonctions vectorielles de plusieurs variables . . . 1156
12.47 Limites à plusieurs variables . . . 1156
12.48 Champs de vecteurs . . . 1159
12.48.1 Matrice jacobienne . . . 1160
12.49 Divergence, rotationnel et l'opérateur nabla . . . 1160

12.50 Interprétation de la divergence . . . 1162
12.51 Quelques formules de Leibniz . . . 1164

13 Analyse sur des groupes 1165
13.0.1 Groupe topologique . . . 1165
13.1 Action de groupe et connexité . . . 1166
13.2 Espaces de matrices . . . 1169
13.2.1 Dilatations et transvections . . . 1169
13.2.2 Connexité de certains groupes . . . 1175
13.2.3 Densité . . . 1177
13.2.4 Racine carrée d'une matrice hermitienne positive . . . 1179
13.2.5 Racine carrée d'une matrice symétrique positive . . . 1180
13.2.6 Décomposition polaires : cas réel . . . 1180
13.2.7 Enveloppe convexe . . . 1183
13.2.8 Décomposition de Bruhat . . . 1185
13.3 Sous-groupes du groupe linéaire . . . 1187

14 Tribus, théorie de la mesure, intégration 1191
14.1 Tribus . . . 1191
14.1.1 Généralités . . . 1191
14.1.2 Tribu engendrée . . . 1192
14.1.3 Tribu induite . . . 1193
14.2 Théorie de la mesure . . . 1193
14.2.1 Mesure sur un ensemble de parties . . . 1193
14.2.2 Mesure sur une algèbre de parties . . . 1194
14.2.3 Mesure sur une tribu, espace mesuré . . . 1196
14.2.4 Mesures sigma-finies . . . 1196
14.2.5 Suite du texte . . . 1197
14.2.6 Mesure extérieure . . . 1202
14.3 Applications mesurables . . . 1204
14.3.1 Propriétés . . . 1204
14.3.2 D'une tribu à l'autre . . . 1205
14.4 Tribu borélienne . . . 1206
14.4.1 Applications continues et boréliennes . . . 1207
14.4.2 Tribu de Baire . . . 1209
14.5 Espace mesuré complet . . . 1211
14.5.1 Partie négligeable . . . 1211
14.5.2 Prolongement . . . 1219
14.5.3 Mesure image . . . 1221
14.5.4 Régularité d'une mesure . . . 1222
14.5.5 Théorème de récurrence . . . 1229
14.6 Mesurabilité des fonctions à valeurs réelles . . . 1229
14.6.1 Fonctions à valeurs réelles sur un espace mesurable . . . 1230
14.6.2 Fonction étagée . . . 1235
14.6.3 Fonctions réelles à variables réelles . . . 1238
14.7 Tribu produit . . . 1239
14.7.1 Produit d'espaces mesurables . . . 1239
14.7.2 Le cas des boréliens . . . 1241
14.8 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ . . . 1242
14.8.1 Mesure et tribu de Lebesgue . . . 1246
14.8.2 Propriétés de la mesure de Lebesgue . . . 1247
14.8.3 Fonctions mesurables . . . 1251
14.8.4 Ensemble de Vitali (non mesurable) . . . 1252
14.8.5 Ensemble de Cantor . . . 1252
14.8.6 Mesure positive sans intervalle . . . 1254
14.9 Intégrale par rapport à une mesure . . . 1255
14.9.1 Définition pour les fonctions à valeurs positives . . . 1255
14.9.2 Premières propriétés . . . 1257
14.9.3 Propriétés plus avancées . . . 1260
14.9.4 Fonctions à valeurs réelles . . . 1263
14.9.5 Additivité de l'intégrale . . . 1265

14.9.6 Fonctions à valeurs vectorielles (dimension finie) . . . 1266
14.9.7 Quelques propriétés . . . 1268
14.9.8 Permuter limite et intégrale . . . 1269
14.9.9 Additivité de l'intégrale de Lebesgue . . . 1272
14.9.10 Produit d'une mesure par une fonction (mesure à densité) . . . 1273
14.9.11 Mesure et topologie . . . 1275
14.10 Mesure à densité . . . 1278
14.10.1 Théorème de Radon-Nikodym . . . 1278
14.10.2 Mesure complexe . . . 1292
14.10.3 Théorème d'approximation . . . 1292
14.11 Produit de mesures . . . 1293
14.12 Tribu et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ . . . 1298
14.12.1 Propriétés d'unicité . . . 1299
14.12.2 Régularité . . . 1300
14.13 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue . . . 1301
14.13.1 Quelques limites dans les bornes . . . 1302
14.13.2 Mesure de comptage et série . . . 1304
14.13.3 Théorème de la moyenne . . . 1306
14.14 Changement de variables dans une intégrale multiple . . . 1307
14.14.1 Des lemmes . . . 1307
14.14.2 Déterminant et mesure de Lebesgue . . . 1307
14.14.3 Ensembles négligeables . . . 1309
14.14.4 Parties et fonctions mesurables . . . 1310
14.14.5 Le théorème et sa démonstration . . . 1310
14.14.6 Exemples . . . 1315
14.15 Changement d'espace mesuré . . . 1315
14.16 Primitives et intégrales . . . 1316
14.16.1 Théorème fondamental du calcul intégral . . . 1317
14.16.2 Exemples et applications . . . 1318
14.16.3 Intégrales impropres . . . 1319
14.17 Théorème de Fubini-Tonelli et de Fubini . . . 1321
14.17.1 Utiliser Fubini sur $\mathbb{R}^n$ . . . 1329
14.17.2 Absolue continuité et variation bornée . . . 1330
14.17.3 Dérivation dans les bornes . . . 1331
14.17.4 Permuter limite et dérivée . . . 1332

15 Suites et séries de fonctions 1335
15.1 Séries de fonctions . . . 1335
15.1.1 Intégration de séries de fonctions . . . 1335
15.1.2 Différentiabilité . . . 1337
15.2 Séries entières . . . 1341
15.2.1 Disque de convergence . . . 1342
15.2.2 Somme et produit de séries . . . 1344
15.2.3 Séries entières et polynômes . . . 1349
15.2.4 Critère de comparaison . . . 1355
15.2.5 Convergence normale . . . 1355
15.2.6 Unicité . . . 1357
15.2.7 Dérivation . . . 1358
15.2.8 Intégration . . . 1360
15.3 Séries de Taylor . . . 1361
15.3.1 Série de puissance . . . 1361
15.3.2 Polynôme de Taylor d'une série entière . . . 1362
15.3.3 Une majoration pour le reste . . . 1362
15.3.4 Fonctions analytiques . . . 1363
15.4 Algèbre engendrée par une matrice . . . 1365
15.5 Exponentielle sur une algèbre normée . . . 1365
15.5.1 Définition . . . 1365
15.5.2 Différentielles . . . 1367
15.5.3 Exponentielle de matrice . . . 1370
15.6 Exponentielle et logarithme dans les réels . . . 1373
15.6.1 L'équation différentielle . . . 1373

15.6.2 Existence . . . 1374
15.6.3 Le nombre de Neper e . . . 1374
15.6.4 Application réciproque : logarithme . . . 1376
15.6.5 Approximations numériques de e . . . 1378
15.6.6 Résumé des propriétés de l'exponentielle . . . 1379
15.6.7 Dérivée de la fonction puissance . . . 1381
15.6.8 Dérivée du logarithme . . . 1382
15.6.9 Taylor pour l'exponentielle . . . 1382
15.6.10 Analycité . . . 1382
15.6.11 Autres propriétés et petits calculs . . . 1382
15.6.12 Taylor pour le logarithme . . . 1383
15.6.13 Développements et calcul de limites . . . 1386
15.6.14 Une petite intégrale . . . 1386
15.7 Vitesses des puissances, de l'exponentielle et du logarithme . . . 1387
15.7.1 Un peu de théorie . . . 1387
15.7.2 Fonction de Riemann . . . 1389
15.7.3 Nombres premiers . . . 1392
15.7.4 Quelques limites . . . 1393
15.8 Trigonométrie hyperbolique . . . 1397
15.9 Séries entières de matrices . . . 1399
15.9.1 Différentiabilité . . . 1399
15.10 Exponentielle de matrices . . . 1401
15.10.1 Diagonalisabilité d'exponentielle . . . 1402
15.11 Étude d'asymptote . . . 1403
15.12 Développement en série . . . 1404
15.12.1 Série génératrice d'une suite . . . 1404
15.12.2 Développement en série et Taylor . . . 1404
15.12.3 Resommer une série . . . 1406
15.13 Séries entières de matrices . . . 1410
15.13.1 Rayon de convergence . . . 1411
15.13.2 Convergence et rayon spectral . . . 1411
15.13.3 Exponentielle et logarithme de matrice . . . 1413
15.13.4 Calcul effectif de l'exponentielle d'une matrice . . . 1415
15.14 Lemme de Borel . . . 1416
15.14.1 Fonctions plateaux, Urysohn, partition de l'unité . . . 1416
15.14.2 Lemme de Urysohn . . . 1420
15.14.3 Le lemme de Borel . . . 1420
15.15 Nombres de Bell . . . 1422
15.16 Applications analytique entre espaces de Banach . . . 1424
15.16.1 Applications analytiques . . . 1424
15.16.2 Opérateur d'inversion . . . 1427
15.16.3 Famille sommable . . . 1428
15.16.4 Intégrale par rapport à une des variables . . . 1431
15.16.5 Différentielle . . . 1434
15.16.6 Polynômes . . . 1435
15.16.7 Weierstrass et Cauchy-Lipschitz analytique . . . 1436
15.16.8 Série de puissance sur $\mathbb{C}$ . . . 1439
15.16.9 L'opérateur d'inversion est analytique . . . 1440

16 Représentations et caractères **1445**
16.1 Représentations et caractères . . . 1445
16.1.1 Crochet de dualité et transformée de Fourier . . . 1446
16.1.2 Groupes non abéliens . . . 1447
16.1.3 Représentations linéaires des groupes finis . . . 1448
16.1.4 Module . . . 1449
16.1.5 Structure hermitienne . . . 1451
16.1.6 Caractères . . . 1451
16.2 Équivalence de représentations et caractères . . . 1452
16.2.1 Représentation régulière . . . 1454
16.2.2 Caractères et représentations : suite et fin . . . 1455
16.3 Représentation produit tensoriel . . . 1457

16.4 Exemple sur le groupe symétrique . . . 1457
16.5 Table des caractères du groupe symétrique S_4 . . . 1458
16.5.1 Calculs à partir de rien ou presque . . . 1458
16.5.2 À propos de la représentation ρ_s . . . 1460
16.5.3 À propos de la représentation ρ_u . . . 1460

17 Encore de l'analyse (et c'est pas fini) 1463
17.1 Densité des polynômes . . . 1463
17.2 Primitive et intégrale . . . 1463
17.2.1 Théorème taubérien de Hardy-Littlewood . . . 1463
17.2.2 Théorème de Müntz . . . 1467
17.3 Intégrales convergeant uniformément . . . 1469
17.3.1 Définition et propriété . . . 1469
17.3.2 Critères de convergence uniforme . . . 1470
17.4 Fonctions définies par une intégrale . . . 1471
17.4.1 Continuité sous l'intégrale . . . 1471
17.4.2 Le coup du compact . . . 1472
17.4.3 Dérivabilité sous l'intégrale . . . 1473
17.4.4 Dérivation et intégrale . . . 1475
17.4.5 Différentiabilité sous l'intégrale . . . 1475
17.5 Théorème d'Hadamard . . . 1478
17.6 Deux théorèmes de point fixe . . . 1479
17.6.1 Points fixes attractifs et répulsifs . . . 1479
17.6.2 Picard . . . 1480
17.7 Théorèmes de point fixes et équations différentielles . . . 1482
17.7.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . 1482
17.8 Théorèmes d'inversion locale et de la fonction implicite . . . 1489
17.8.1 Mise en situation . . . 1489
17.8.2 Théorème d'inversion locale . . . 1490
17.8.3 Théorème de la fonction implicite . . . 1493
17.8.4 Exemple . . . 1495
17.9 Décomposition polaire (régularité) . . . 1496
17.10 Théorème de Von Neumann . . . 1497
17.11 Recherche d'extrémums . . . 1500
17.11.1 Extrema à une variable . . . 1500
17.11.2 Extrema libre . . . 1501
17.11.3 Extremums et hessienne . . . 1502
17.11.4 Un peu de recettes de cuisine . . . 1504
17.11.5 Extrema liés . . . 1504
17.12 Fonctions convexes . . . 1506
17.12.1 Inégalité des pentes . . . 1507
17.12.2 Convexité et régularité . . . 1508
17.12.3 Dérivées d'une fonction convexe . . . 1508
17.12.4 Graphe d'une fonction convexe . . . 1510
17.12.5 Convexité et hessienne . . . 1515
17.12.6 Quelques inégalités . . . 1520
17.12.7 Norme l^p . . . 1522
17.12.8 Hölder . . . 1522
17.13 Algorithme du gradient à pas optimal . . . 1526
17.14 Formes quadratiques, signature, et lemme de Morse . . . 1530
17.15 Ellipsoïde de John-Loewner . . . 1534
17.16 Prolongement de fonctions . . . 1539
17.16.1 Encore du prolongement . . . 1541
17.17 Complétion d'un espace métrique . . . 1543
17.17.1 Principe des zéros isolés . . . 1546
17.18 Un petit extra . . . 1547

18 Trigonométrie, isométries 1551
18.1 Trigonométrie . . . 1551
18.1.1 Définitions, périodicité et quelques valeurs remarquables . . . 1551
18.1.2 Fonction puissance (pour les complexes) . . . 1552

18.1.3 Formules de trigonométrie . . . 1554
18.2 Trucs et astuces de calcul d'intégrales . . . 1563
18.2.1 Quelques intégrales « usuelles » . . . 1563
18.2.2 Reformer un carré au dénominateur . . . 1566
18.2.3 Décomposition en fractions simples . . . 1566
18.3 Très modeste approximation de π . . . 1566
18.3.1 Les fonctions tangente et arc tangente . . . 1567
18.3.2 La fonction arc sinus . . . 1569
18.3.3 La fonction arc cosinus . . . 1571
18.3.4 Une meilleure approximation de π . . . 1573
18.3.5 Angle entre deux vecteurs . . . 1573
18.3.6 Aire du parallélogramme . . . 1574
18.4 Paramétrisation du cercle . . . 1575
18.5 Cercle trigonométriques . . . 1576
18.5.1 Bijection continue . . . 1576
18.5.2 Inverse . . . 1579
18.5.3 Cercle trigonométrique . . . 1580
18.5.4 Du point de vue de la tribu, mesure et co. . . . 1580
18.6 Exemples trigonométriques . . . 1583
18.6.1 Quelques équations trigonométriques . . . 1584
18.6.2 Développements en série . . . 1584
18.7 Isométries de l'espace euclidien . . . 1585
18.7.1 Structure du groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ . . . 1585
18.8 Isométries dans $\mathbb{R}^n$ . . . 1588
18.8.1 Préserver l'orientation . . . 1591
18.9 Groupes finis d'isométries . . . 1593
18.9.1 Points fixés par une affinité . . . 1594
18.10 Classification des isométries dans $\mathbb{R}^2$ . . . 1595
18.10.1 Projection orthogonale . . . 1595
18.10.2 Réflexions . . . 1596
18.10.3 Translations et réflexions . . . 1598
18.10.4 Rotations . . . 1599
18.10.5 Rotation d'un angle donné . . . 1601
18.10.6 Rotations vectorielles . . . 1603
18.10.7 Matrice des transformations orthogonales . . . 1605
18.10.8 Rotations, SO(2) et matrice de rotation . . . 1606
18.10.9 Rotation et application affine . . . 1607
18.10.10 Angle orienté . . . 1608
18.10.11 Angles et nombres complexes . . . 1612
18.10.12 Polygone convexe . . . 1616
18.10.13 Groupe diédral . . . 1617
18.10.14 Applications : du dénombrement . . . 1623
18.10.15 Classification . . . 1624
18.10.16 Classification des isométries de $\mathbb{R}$ . . . 1627
18.10.17 Isométries du tétraèdre régulier . . . 1627
18.10.18 Représentation de S_4 via les isométries du tétraèdre . . . 1629
18.11 Transformations de Lorentz . . . 1630
18.11.1 Sous-groupe fini d'isométries du plan . . . 1632
18.11.2 Relations trigonométriques dans un triangle rectangle . . . 1636
18.11.3 Pavages du plan . . . 1637
18.12 Un peu de structure de $\mathrm{O}(n)$ . . . 1651
18.12.1 Valeurs propres dans $\mathrm{O}(n)$ . . . 1651
18.12.2 Sous-groupes finis de SO(3) . . . 1654
18.13 Systèmes de coordonnées . . . 1662
18.13.1 Coordonnées polaires . . . 1662
18.13.2 Coordonnées cylindriques . . . 1669
18.13.3 Coordonnées sphériques . . . 1670
18.14 Calcul de limites . . . 1671
18.14.1 Méthode des coordonnées polaires . . . 1672
18.14.2 Méthode du développement asymptotique . . . 1674
18.15 Quelques intégrales avec de la trigonométrie . . . 1676

18.15.1 Changement de variables . . . 1676
18.15.2 Coordonnées polaires . . . 1676
18.15.3 Coordonnées cylindriques . . . 1677
18.15.4 Un autre système utile . . . 1678
18.16 Aire d'une surface de révolution . . . 1679
18.17 Table de caractères du groupe diédral . . . 1681
18.17.1 Représentations de dimension un . . . 1681
18.17.2 Représentations de dimension deux . . . 1682
18.17.3 Le compte pour n pair . . . 1684
18.17.4 Le compte pour n impair . . . 1684

19 Corps finis, racines de l'unité 1685
19.1 Le groupe des racines de l'unité dans les nombres complexes . . . 1685
19.1.1 Le groupe . . . 1685
19.1.2 Fonction indicatrice d'Euler . . . 1688
19.1.3 Décomposition en éléments simples . . . 1689
19.2 Chiffrement RSA . . . 1690
19.2.1 Mise en place par Bob . . . 1690
19.2.2 Chiffrement . . . 1691
19.2.3 Déchiffrement . . . 1691
19.2.4 Une imprudence à ne pas commettre . . . 1691
19.2.5 Problèmes calculatoires . . . 1692
19.2.6 La solidité de RSA . . . 1692
19.2.7 Note non mathématique pour doucher l'enthousiasme . . . 1692
19.3 Polynômes cyclotomiques . . . 1693
19.3.1 Définitions et propriétés . . . 1693
19.3.2 Nombres premiers . . . 1696
19.4 Corps finis . . . 1698
19.4.1 Théorème de Wedderburn . . . 1698
19.4.2 Existence, unicité . . . 1700
19.4.3 Symboles de Legendre et carrés . . . 1702
19.4.4 Théorème de Chevalley-Warning . . . 1707
19.4.5 Contenu d'un polynôme . . . 1709
19.4.6 Théorème de l'élément primitif . . . 1709
19.4.7 Construction de $\mathbb{F}_{p^n}$ . . . 1713
19.4.8 Exemple : étude de $\mathbb{F}_{16}$ . . . 1716
19.4.9 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ . . . 1717
19.4.10 Matrices . . . 1720
19.5 Constructions à la règle et au compas . . . 1721
19.5.1 Quelques constructions . . . 1721
19.5.2 Nombres constructibles . . . 1723
19.5.3 Polygones constructibles . . . 1725

20 Intégration sur des variétés 1731
20.1 Variétés . . . 1731
20.1.1 Introduction . . . 1731
20.1.2 Définition, carte . . . 1731
20.1.3 Ancienne définition . . . 1732
20.1.4 Espace tangent . . . 1733
20.2 Intégration . . . 1734
20.2.1 Le problème pour une intégration globale . . . 1734
20.2.2 Intégrale sur une carte . . . 1734
20.2.3 Quelques expressions pour l'élément de volume . . . 1736
20.3 Intégrale sur une variété . . . 1737
20.3.1 Mesure sur une carte . . . 1737
20.3.2 Intégrale sur une carte . . . 1738
20.3.3 Exemples . . . 1739
20.3.4 Orientation . . . 1739
20.4 Longueur, aire, volumes etc. . . . 1741
20.4.1 Quelques aires faciles . . . 1741
20.5 Autres théorèmes de points fixes . . . 1743

20.5.1 Brouwer . . . 1743
20.5.2 Théorème de Schauder . . . 1747
20.5.3 Théorème de Cauchy-Arzella . . . 1748
20.5.4 Théorème de Markov-Kakutani . . . 1749
20.6 Intégrales curvilignes . . . 1750
20.6.1 Chemins de classe C^1 . . . 1750
20.6.2 Intégrer une fonction . . . 1751
20.6.3 Intégrer un champ de vecteurs . . . 1752
20.6.4 Intégrer une forme différentielle sur un chemin . . . 1752
20.6.5 Intégration d'une forme différentielle sur un chemin . . . 1753
20.6.6 Interprétation physique : travail . . . 1754
20.6.7 Intégrer un champ de vecteurs sur un bord en 2D . . . 1755
20.6.8 Intégrer une forme différentielle sur un bord en 2D . . . 1755
20.6.9 Intégrer une forme différentielle sur un bord en 3D . . . 1755
20.6.10 Intégrer un champ de vecteurs sur un bord en 3D . . . 1755
20.6.11 Dérivées croisées et forme différentielle exacte . . . 1756
20.7 Surfaces paramétrées . . . 1757
20.7.1 Graphe d'une fonction . . . 1758
20.7.2 Intégrale sur une partie de $\mathbb{R}^m$ . . . 1759
20.8 Intégrales de surface . . . 1759
20.8.1 Intégrale d'un champ de vecteurs . . . 1759
20.9 Aires et intégrales . . . 1760
20.9.1 Aire d'une surface paramétrée . . . 1760
20.9.2 Intégrale d'une fonction sur une surface . . . 1761
20.9.3 Intégrale d'une 2-forme . . . 1762
20.10 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface . . . 1762
20.11 Divergence, Green, Stokes . . . 1765
20.11.1 Théorème de la divergence . . . 1765
20.11.2 Lacets et homotopie . . . 1766
20.11.3 Formule de Green . . . 1767
20.11.4 Formule de Stokes . . . 1768
20.12 Résumé des intégrales vues . . . 1769
20.12.1 L'intégrale d'une fonction sur les réels . . . 1769
20.12.2 Intégrale d'une fonction sur un chemin . . . 1769
20.12.3 Intégrale d'une fonction sur une surface . . . 1770
20.12.4 Intégrale d'une fonction sur un volume . . . 1770
20.12.5 Conclusion pour les fonctions . . . 1771
20.12.6 Circulation d'un champ de vecteurs . . . 1771
20.12.7 Flux d'un champ de vecteurs . . . 1771
20.12.8 Conclusion pour les champs de vecteurs . . . 1771
20.12.9 Attention pour les surfaces fermées ! . . . 1772
20.13 Formes différentielles exactes et fermées . . . 1773
20.14 Théorème d'Abel angulaire . . . 1775
20.15 Passage à la limite sous le signe intégral . . . 1778
20.15.1 Intégrale en dimension un . . . 1778
20.15.2 Intégrales convergentes . . . 1779
20.15.3 La méthode de Rothstein-Trager . . . 1779
20.16 Rappel sur les intégrales usuelles . . . 1784
20.17 Intégrales le long de chemins . . . 1785
20.17.1 Circulation d'un champ de vecteur . . . 1785
20.18 Circulation d'un champ conservatif . . . 1786
20.19 Intégration de fonction à deux variables . . . 1788
20.19.1 Intégration sur un domaine rectangulaire . . . 1788
20.19.2 Intégration sur un domaine non rectangulaire . . . 1789
20.19.3 Changement de variables . . . 1791
20.20 Les intégrales triples . . . 1791
20.20.1 Volume . . . 1792
20.21 Un petit peu plus formel . . . 1794
20.21.1 Intégration sur un domaine non rectangulaire . . . 1794
20.22 Aire et primitive . . . 1795
20.22.1 Longueur d'arc de courbe . . . 1796

20.22.2 Aire de révolution . . . 1797
20.23 L'aire en dessous d'une courbe . . . 1797
20.24 Propriétés des intégrales . . . 1797
20.25 Techniques d'intégration . . . 1799
20.25.1 Intégration par parties . . . 1799
20.25.2 Changement de variables – pour trouver des primitives . . . 1801
20.25.3 Changement de variables – pour calculer des intégrales . . . 1802
20.25.4 Intégrations des fractions rationnelles réduites . . . 1803
20.25.5 Quelques formules à connaitre . . . 1804
20.25.6 Taylor avec reste intégral . . . 1805
20.25.7 Approximation de ln(2) . . . 1808
20.26 Constructions plus naïves de l'intégrale dans le cas réel . . . 1809
20.26.1 Mesure de Lebesgue, version rapide . . . 1809
20.26.2 Pavés et subdivisions . . . 1810
20.26.3 Intégrale d'une fonction en escalier . . . 1813
20.26.4 Intégrales partielles . . . 1813
20.26.5 Réduction d'une intégrale multiple . . . 1814
20.26.6 Propriétés de l'intégrale . . . 1815
20.26.7 Intégrales multiples, cas général . . . 1816
20.26.8 Réduction d'une intégrale multiple . . . 1816
20.26.9 Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^2$ . . . 1817
20.26.10 Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^3$ . . . 1820
20.26.11 Fonctions et ensembles non bornés . . . 1822
20.26.12 Lemme de Morse . . . 1823
20.27 Autres intégrales sympathiques . . . 1825
20.27.1 Intégrale de Wallis . . . 1825
20.27.2 Formule de Stirling . . . 1828
20.27.3 La fonction sinus cardinal, intégrale de Dirichlet . . . 1831

21 Arcs paramétrés **1841**
21.1 Définitions . . . 1841
21.2 Longueur d'arc . . . 1841
21.3 Abscisse curviligne . . . 1843
21.3.1 Formule intégrale de la longueur . . . 1845
21.4 Suite du chapitre . . . 1850
21.5 Autres exemples . . . 1850
21.6 Élément de longueur . . . 1851
21.6.1 Élément de longueur : cartésiennes . . . 1851
21.6.2 Élément de longueur : polaires (1) . . . 1852
21.6.3 Élément de longueur : polaires (2) . . . 1852
21.6.4 Approximation de la longueur par des cordes . . . 1854
21.7 Arc géométrique . . . 1855
21.7.1 Abscisse curviligne et paramétrage normal . . . 1857
21.7.2 Tangente à une courbe paramétrée . . . 1861
21.8 Un peu de topologie . . . 1863
21.9 Repère de Frenet . . . 1865
21.9.1 Torsion . . . 1867
21.10 Hors des coordonnées normales . . . 1868
21.11 Tracer des courbes paramétriques dans $\mathbb{R}^2$ . . . 1870
21.12 Courbes planes . . . 1871
21.12.1 Angle . . . 1871
21.12.2 Courbure signée . . . 1872
21.12.3 Degré, indice et homotopie . . . 1875
21.13 Courbes fermées planes . . . 1881
21.13.1 Cercle circonscrit . . . 1881
21.13.2 Description locale . . . 1883
21.13.3 Enveloppe convexe . . . 1884
21.13.4 Courbure et convexité . . . 1887
21.13.5 Théorème des quatre sommets . . . 1888
21.13.6 Théorème d'Urysohn . . . 1890

22 Géométrie hyperbolique **1893**
22.1 Inversion . . . 1893
22.1.1 Cercles perpendiculaires . . . 1893
22.1.2 Inversion . . . 1894

23 Espaces projectifs **1899**
23.1 Sous-espaces projectifs . . . 1899
23.2 Espace projectifs comme « complétés » d'espaces affines . . . 1901
23.3 Théorème de Pappus . . . 1903
23.4 Homographies . . . 1904
23.4.1 Homographies . . . 1904
23.4.2 Le groupe projectif . . . 1905
23.4.3 Repères projectifs . . . 1906
23.4.4 Identifications $P(\mathbb{K}^2)$ vers $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ . . . 1910
23.4.5 Birapport . . . 1911
23.5 Coordonnées homogènes . . . 1916
23.5.1 Curiosité : matrice de translation . . . 1917
23.5.2 Dualité . . . 1917
23.5.3 Polynômes . . . 1919
23.6 La sphère de Riemann $P_1(\mathbb{C})$ . . . 1920
23.6.1 Éléments de géométrie dans $P_1(\mathbb{C})$ . . . 1920
23.6.2 Homographies . . . 1923
23.6.3 Birapport . . . 1929
23.6.4 Division harmonique . . . 1932
23.6.5 Groupe circulaire . . . 1935
23.6.6 Action du groupe modulaire . . . 1937

24 Analyse vectorielle **1943**
24.1 Le théorème de Green . . . 1943
24.2 Théorème de la divergence dans le plan . . . 1946
24.2.1 La convention de sens de parcours . . . 1946
24.2.2 Théorème de la divergence . . . 1947
24.3 Théorème de Stokes . . . 1948
24.4 Théorème de Gauss . . . 1949
24.5 Coordonnées curvilignes . . . 1950
24.5.1 Base locale . . . 1950
24.5.2 Importance de l'orthogonalité . . . 1951
24.5.3 Coordonnées polaires . . . 1952
24.5.4 Coordonnées cylindriques . . . 1953
24.5.5 Coordonnées sphériques . . . 1953
24.5.6 Gradient en coordonnées curvilignes . . . 1953
24.5.7 Divergence en coordonnées curvilignes . . . 1955
24.5.8 Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales . . . 1957
24.5.9 Rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales . . . 1957
24.6 Les formules . . . 1958
24.6.1 Coordonnées polaires . . . 1958
24.6.2 Coordonnées cylindriques . . . 1958
24.6.3 Coordonnées sphériques . . . 1959

25 Espaces de Hilbert **1961**
25.1 Espaces de Hilbert . . . 1961
25.1.1 Sous-espace vectoriel fermé ??? . . . 1964
25.2 Théorème de la projection . . . 1964
25.3 Systèmes orthogonaux et bases . . . 1967
25.3.1 Orthogonal d'une partie . . . 1967
25.3.2 Dual, théorème de représentation de Riesz . . . 1968
25.3.3 Séparabilité . . . 1970
25.3.4 Base hilbertienne . . . 1971
25.3.5 Décomposition dans une base hilbertienne . . . 1976
25.3.6 Digression sur les normes opérateurs . . . 1981
25.3.7 Applications linéaires et continuité . . . 1981

25.4 Théorème de Kochen-Specker . . . 1983
25.5 Théorème de Lax-Milgram . . . 1984

26 Analyse complexe **1989**
26.1 Fonctions holomorphes . . . 1989
26.1.1 Équations de Cauchy-Riemann . . . 1989
26.1.2 Intégrale sur un chemin dans $\mathbb{C}$ . . . 1992
26.1.3 Intégrales sur des chemins fermés . . . 1993
26.1.4 Homotopie entre applications . . . 1995
26.1.5 Intégrale et homotopie . . . 1996
26.1.6 Théorème de Tietze (espace normal) . . . 1998
26.2 Logarithme complexe . . . 2000
26.2.1 La fonction argument . . . 2000
26.2.2 Une définition possible du logarithme . . . 2003
26.2.3 Pas plus de continuité . . . 2005
26.2.4 Pas d'unicité : autres déterminations de l'argument . . . 2006
26.2.5 Pas d'unicité : développement en série . . . 2007
26.2.6 Pas d'unicité : laquelle choisir ? . . . 2007
26.2.7 Logarithme comme primitive . . . 2008
26.2.8 Logarithme sur un chemin . . . 2009
26.2.9 Lacets, indice et homotopie . . . 2011
26.2.10 Théorème de Cauchy et analycité . . . 2017
26.2.11 Théorème de Brouwer en dimension 2 . . . 2020
26.2.12 Principe des zéros isolés . . . 2021
26.2.13 Prolongement de fonctions holomorphes . . . 2023
26.2.14 Théorème de Runge . . . 2023
26.3 Intégrales de fonctions holomorphes . . . 2025
26.3.1 Holomorphie sous l'intégrale . . . 2026
26.3.2 Mesure de Radon . . . 2029
26.4 Conditions équivalentes à l'holomorphie . . . 2031
26.5 Limites, séries et dérivée . . . 2032
26.6 Singularités, pôles et méromorphe . . . 2032
26.7 Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne . . . 2037
26.8 Fonctions d'Euler . . . 2042
26.8.1 Euler et factorielle . . . 2045
26.9 Exponentielle et logarithme complexe . . . 2046
26.9.1 Propriétés de l'exponentielle . . . 2046
26.9.2 Intégrale de Fresnel . . . 2047
26.10 Théorème de Weierstrass . . . 2049
26.11 Analyse complexe en plusieurs variables . . . 2050

27 Analyse fonctionnelle **2051**
27.1 Théorème d'isomorphisme de Banach . . . 2051
27.2 Théorème d'Ascoli . . . 2051
27.3 Espaces de Lebesgue L^p . . . 2058
27.3.1 Généralités . . . 2058
27.3.2 Un peu de convergence de suites . . . 2062
27.3.3 L'espace L^∞ . . . 2063
27.3.4 Quelques identifications . . . 2065
27.3.5 Inégalité de Young, Jensen, Hölder et de Minkowski . . . 2066
27.3.6 Inégalité de Minkowski . . . 2070
27.3.7 Ni inclusions ni inégalités . . . 2082
27.3.8 Complétude . . . 2084
27.3.9 Théorèmes d'approximation . . . 2089
27.3.10 Densité des fonctions infiniment dérivables à support compact . . . 2090
27.3.11 Approximation . . . 2093
27.3.12 Partie uniformément intégrable . . . 2093
27.4 Autres résultats de convergence . . . 2094
27.5 Convolution . . . 2096
27.5.1 Fonction plateau, lemme d'Urysohn . . . 2099
27.5.2 Partition de l'unité . . . 2101

27.5.3 Approximation de l'unité . . . 2102
27.6 Intégrale sur des variétés . . . 2104
27.6.1 Formes différentielles . . . 2104
27.6.2 Intégrale d'une fonction sur une sous-variété . . . 2105
27.6.3 Densité des polynômes trigonométriques . . . 2105
27.7 Espaces L^2, généralités . . . 2107
27.8 L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ . . . 2108
27.9 L'espace $L^2(S^1)$ . . . 2109
27.9.1 Espace mesuré . . . 2109
27.9.2 Topologie . . . 2110
27.9.3 Système trigonométrique . . . 2115
27.9.4 Convolution . . . 2116
27.9.5 Approximation de l'unité . . . 2118
27.9.6 Base hilbertienne (suite des polynômes trigonométriques) . . . 2122
27.9.7 Convolution, bis . . . 2123
27.10 Sur $[0, 2\pi[$ . . . 2124
27.11 Des inégalités . . . 2124
27.11.1 c-r inégalité . . . 2124
27.11.2 Inégalité de Hanner . . . 2127
27.11.3 Inégalités de Clarkson . . . 2132
27.12 Théorème de la projection normale . . . 2135
27.12.1 Espace uniformément convexe . . . 2135
27.12.2 Uniforme convexité des espaces de Lebesgue . . . 2137
27.12.3 Théorème de la projection normale . . . 2138
27.13 Jauge . . . 2140
27.14 Théorèmes de Hahn-Banach . . . 2141
27.14.1 Applications $\mathbb{R}$-linéaires et $\mathbb{C}$-linéaires . . . 2141
27.14.2 Hahn-Banach, théorème d'extension dominée . . . 2144
27.14.3 Hyperplan séparateur . . . 2146
27.14.4 Prolongement de fonctionnelles (dimension finie) . . . 2149
27.14.5 Prolongement de fonctionnelles (dimension infinie) . . . 2151
27.15 Théorème de Tietze . . . 2153
27.15.1 Pas de bijections bicontinues entre dimensions différentes . . . 2155
27.16 Dualité, réflexivité et théorème de représentation de Riesz . . . 2158
27.16.1 Le théorème de Jordan . . . 2172
27.16.2 Théorème de Jordan . . . 2183
27.17 Topologie faible . . . 2183
27.17.1 Bases de topologie . . . 2184
27.17.2 Convergence . . . 2185
27.17.3 Helly et Goldstine . . . 2189
27.17.4 Banach-Alaoglu . . . 2191
27.17.5 Espace de Banach réflexif, Kakutani . . . 2194
27.17.6 Espaces L^∞ . . . 2195
27.18 Espace de Schwartz . . . 2196
27.18.1 Topologie . . . 2197
27.18.2 Produit de convolution . . . 2199
27.19 Théorème de Montel . . . 2200
27.20 Espaces de Bergman . . . 2201

28 Séries de Fourier **2205**
28.1 Densité des polynômes trigonométriques . . . 2205
28.1.1 Convergence pour les fonctions continues (via Weierstrass) . . . 2205
28.1.2 Convergence pour les fonctions continues (via Fejér) . . . 2205
28.1.3 Densité dans L^p . . . 2208
28.1.4 Suite équirépartie, critère de Weyl . . . 2209
28.2 Fonctions de Dirichlet . . . 2211
28.3 Coefficients et série de Fourier . . . 2212

29 Transformation de Fourier **2215**
29.1 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ . . . 2215
29.1.1 Formule sommatoire de Poisson . . . 2219

29.2 Suite régularisante . . . 2221
29.3 Dérivation dans les bornes . . . 2222
29.4 Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz . . . 2223
29.4.1 Quelques transformées de Fourier . . . 2225
29.5 Intégrales et fonctions nulles . . . 2228
29.6 L'espace de Lebesgues $L^2\big([a,b]\big)$ . . . 2231
29.7 Sur $[-T,T[$ . . . 2237
29.7.1 Le cas dans $[0,2\pi]$ . . . 2237
29.7.2 À propos des coefficients . . . 2241
29.7.3 Le contre-exemple que nous attendions tous . . . 2242
29.8 Série de Laurent . . . 2244
29.8.1 Inégalité isopérimétrique . . . 2249
29.8.2 Formule d'inversion . . . 2250
29.9 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ . . . 2254
29.9.1 Le problème . . . 2254
29.9.2 Extension de $L^1 \cap L^2$ vers L^2 . . . 2255

30 Distributions **2257**
30.1 Dérivée faible . . . 2257
30.1.1 Dérivée partielle au sens faible . . . 2257
30.1.2 Dérivée faible partielle . . . 2259
30.1.3 Formules de Leibniz . . . 2260
30.2 Topologie et convergence sur des espaces de fonctions . . . 2261
30.2.1 Limite inductive . . . 2261
30.2.2 Les espaces classiques . . . 2261
30.2.3 Espaces de fonctions et topologie inductive . . . 2267
30.2.4 Convergence dans les fonctions test . . . 2267
30.3 Distributions . . . 2269
30.3.1 Multiplication d'une distribution par une fonction . . . 2272
30.3.2 Dérivée de distribution . . . 2272
30.3.3 Ordre et support d'une distribution . . . 2273
30.4 L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$ . . . 2276
30.4.1 Dérivation . . . 2278
30.5 Une équation de distribution . . . 2278
30.6 Localisation, principe de recollement . . . 2279
30.7 Permuter distributions, dérivées et intégrales . . . 2283
30.8 Distributions tempérées . . . 2287
30.8.1 Topologie . . . 2289
30.8.2 Distributions associées à des fonctions . . . 2289
30.8.3 Composition avec une fonction . . . 2290
30.8.4 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée . . . 2290
30.8.5 Convolution d'une distribution par une fonction . . . 2290
30.8.6 Approximation de la distribution de Dirac . . . 2291
30.8.7 Peigne de Dirac . . . 2293
30.9 L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ . . . 2294
30.9.1 Propriétés générales . . . 2294
30.9.2 Dérivation . . . 2296

31 Espaces de Sobolev, équations elliptiques **2299**
31.1 Espaces de Sobolev . . . 2299
31.1.1 Sur un intervalle de $\mathbb{R}$ . . . 2299
31.1.2 Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . 2304
31.1.3 Espace de Sobolev fractionnaire . . . 2305
31.2 Trace . . . 2308
31.3 Théorème de plongement . . . 2310

32 Équations différentielles ordinaires **2315**
32.1 Équation homogène, solution particulière . . . 2316
32.2 Que faire avec $f(z)dz = g(t)dt$? . . . 2316
32.3 Équations linéaires du premier ordre . . . 2317
32.3.1 Pourquoi la variation des constantes fonctionne toujours ? . . . 2320

32.4 Équations à variables séparées . . . 2321
32.4.1 La méthode rapide . . . 2321
32.4.2 La méthode plus propre . . . 2321
32.4.3 Les théorèmes . . . 2321
32.5 Équations linéaires d'ordre supérieur . . . 2324
32.5.1 Équations et systèmes linéaires à coefficients constants . . . 2324
32.5.2 Si les coefficients ne sont pas constants ? . . . 2325
32.6 Système d'équations linéaires . . . 2325
32.6.1 La magie de l'exponentielle… . . . 2325
32.6.2 … mais la difficulté . . . 2326
32.6.3 La recette . . . 2326
32.6.4 Système d'équations linéaires avec matrice constante . . . 2327
32.6.5 Système d'équations linéaires avec matrice non constante . . . 2327
32.7 Réduction de l'ordre . . . 2327
32.8 Autour de Cauchy-Lipschitz . . . 2329
32.8.1 Fuite des compacts et explosion en temps fini . . . 2329
32.8.2 Écart entre deux conditions initiales . . . 2331
32.8.3 Flot d'un champ de vecteurs . . . 2332
32.8.4 Stabilité de Lyapunov . . . 2344
32.8.5 Système proies-prédateurs de Lotka-Volterra . . . 2348
32.9 Équation du second ordre . . . 2351
32.9.1 Wronskien . . . 2351
32.9.2 Avec second membre . . . 2352
32.9.3 Équation $y'' + q(t)y = 0$ . . . 2352
32.9.4 Équation de Hill . . . 2353
32.10 Différents types d'équations différentielles . . . 2356
32.10.1 Équation homogène . . . 2356
32.10.2 Équation de Bernoulli . . . 2357
32.10.3 Équation de Riccati . . . 2357
32.10.4 Équation différentielle exacte . . . 2357
32.11 Distributions pour les équations différentielles . . . 2358
32.11.1 Équation de Schrödinger . . . 2358
32.12 Équations différentielles du premier ordre . . . 2361
32.13 Premier ordre, variables séparables . . . 2363
32.14 Équations différentielles linéaires du premier ordre . . . 2366
32.14.1 Méthode de variation de la constante . . . 2367
32.15 Équations différentielles linéaires du second ordre . . . 2368
32.15.1 Équations différentielles linéaires du second ordre homogènes à coefficients constants . . . 2368
32.15.2 Linéaires du second ordre à coefficients constants, non homogènes . . . 2370
32.16 Fonction de Green . . . 2371

33 Équations aux dérivées partielles **2373**
33.1 Symbole principal, équation des caractéristiques . . . 2373
33.2 Méthode des caractéristiques pour l'ordre 1 . . . 2373
33.2.1 Un exemple complet un peu minimal . . . 2374
33.2.2 Un théorème d'existence et d'unicité . . . 2376
33.3 Méthode des caractéristiques pour l'ordre 2 . . . 2379
33.3.1 Principe général . . . 2379
33.3.2 Exemple : l'équation d'onde . . . 2380
33.4 Classification des équations du second ordre . . . 2381
33.4.1 Problème au limite . . . 2382
33.5 Principe du maximum . . . 2383
33.6 Quelques exemples . . . 2386
33.6.1 Un changement de variables . . . 2386

34 Numérique **2389**
34.1 Introduction . . . 2389
34.2 Représentations numériques . . . 2389
34.2.1 Entier relatif en complément à deux (binaire) . . . 2389
34.2.2 Représentation en virgule flottante . . . 2391
34.2.3 Simple précision, IEEE-754 . . . 2391

34.3 Problèmes pour écrire des nombres . . . 2393
34.3.1 Troncature : la base . . . 2394
34.3.2 Troncature : le drift . . . 2394
34.3.3 Quelques bonnes règles . . . 2395
34.3.4 Erreur de “cancellation” . . . 2395
34.3.5 Calcul d’une dérivée . . . 2397
34.3.6 Erreur d’absorption . . . 2398
34.4 Conditionnement et stabilité . . . 2398
34.4.1 Comment choisir et penser le K ? . . . 2401
34.5 Un peu de points fixes . . . 2401
34.5.1 Choix de la fonction à point fixe . . . 2401
34.5.2 Convergence quadratique . . . 2403
34.5.3 Convergence . . . 2404
34.6 Méthode de Newton . . . 2405
34.6.1 « Justification » par la formule de Taylor . . . 2406
34.6.2 « Justification » par points fixes . . . 2406
34.6.3 Convergence de la méthode de Newton . . . 2407
34.6.4 Racine carrée par la méthode de Newton . . . 2408
34.6.5 Formalisation de l’algorithme . . . 2408
34.6.6 Caractéristiques . . . 2409
34.6.7 Exemple de la racine carrée . . . 2410
34.6.8 Si multiplicité . . . 2410
34.6.9 Et la dérivée ? . . . 2411
34.6.10 Méthode de Newton : le cas général . . . 2411
34.7 Estimation de l’ordre de convergence . . . 2412
34.8 Autres méthodes . . . 2413
34.8.1 Méthode de Schröder . . . 2413
34.8.2 Halley . . . 2413
34.9 Méthode des sécantes variables . . . 2413
34.9.1 Aitken . . . 2414
34.10 Équations algébrique . . . 2415
34.10.1 Résoudre un système linéaire . . . 2415
34.10.2 Caractéristiques . . . 2415
34.10.3 Définitions . . . 2416
34.11 Équations non linéaires . . . 2416
34.11.1 Méthode de bissection . . . 2417
34.12 Efficacité . . . 2419
34.13 Exemples sous forme d’exercices . . . 2420
34.14 Approximations de fonctions . . . 2423
34.14.1 Critère d’interpolation . . . 2423
34.14.2 Base de Newton . . . 2424
34.14.3 Méthode des minimums quadratiques . . . 2426
34.14.4 Notre espace de Hilbert . . . 2426
34.14.5 Droite de régression . . . 2428
34.15 Conditionnement d’une matrice . . . 2428
34.15.1 Perturbation du vecteur . . . 2430
34.15.2 Perturbation de la matrice . . . 2431
34.16 Système linéaires (généralités) . . . 2432
34.16.1 Les méthodes directes . . . 2433
34.16.2 Méthodes itératives . . . 2433
34.17 Système linéaires (méthodes directes) . . . 2434
34.17.1 Inversion de matrice triangulaire . . . 2434
34.17.2 Transformation gaussienne . . . 2434
34.17.3 Méthode de Gauss pour résoudre des systèmes d’équations linéaires . . . 2435
34.17.4 Méthode de Gauss sans pivot (décomposition LU) . . . 2436
34.17.5 Matrice de permutation élémentaire . . . 2439
34.18 Méthode de Gauss avec pivot partiel (décomposition PLU) . . . 2440
34.18.1 L’idée . . . 2440
34.18.2 Le théorème . . . 2441
34.18.3 D’un point de vue algorithmique . . . 2444
34.18.4 Exemples . . . 2446

34.19 Résolution de systèmes linéaires (suite) . . . 2448
34.19.1 Déterminant . . . 2448
34.19.2 Plusieurs termes indépendants . . . 2449
34.19.3 Cholesky . . . 2449
34.20 Système linéaire (méthodes itératives) . . . 2452
34.20.1 La méthode générale . . . 2453
34.20.2 Jacobi . . . 2453
34.20.3 Gauss-Seidel . . . 2453
34.20.4 Autres . . . 2453
34.21 Indices connectés, matrice irréductible . . . 2454
34.22 Localisation des valeurs propres . . . 2455
34.22.1 Matrices à diagonale dominante . . . 2457
34.22.2 M-matrice . . . 2460

35 Méthode des différences finies 2463
35.1 Problèmes de dimension un . . . 2463
35.1.1 Un schéma à cinq points . . . 2464
35.1.2 Exemple . . . 2468
35.2 Problèmes de dimension deux . . . 2469
35.2.1 Discrétisation en croix . . . 2469
35.2.2 Discrétisation en carré . . . 2470
35.2.3 Résolution de la discrétisation en croix . . . 2471
35.3 Consistance, convergence . . . 2473
35.3.1 Définitions, mise en place . . . 2473
35.3.2 Exemple . . . 2474
35.3.3 Consistance, stabilité et convergence . . . 2475
35.3.4 Exemple : schéma à cinq points, laplacien en croix . . . 2476
35.4 Autres laplaciens . . . 2477
35.4.1 Travail avec le laplacien à 9 points . . . 2480

36 Variables aléatoires et théorie des probabilités 2481
36.1 Espace de probabilité . . . 2481
36.2 Variables aléatoires . . . 2482
36.2.1 Loi d'une variable aléatoire . . . 2482
36.2.2 Indépendance . . . 2482
36.2.3 Lois conjointes et indépendance . . . 2485
36.2.4 Densité jointe . . . 2488
36.2.5 Espérance . . . 2490
36.2.6 Moment . . . 2492
36.2.7 Somme et produit de variables aléatoires indépendantes . . . 2493
36.2.8 Variance . . . 2495
36.2.9 Covariance . . . 2496
36.2.10 Probabilité conditionnelle : événements . . . 2496
36.2.11 Espérance conditionnelle . . . 2499
36.2.12 Probabilité conditionnelle : tribu . . . 2506
36.2.13 Variables de Rademacher indépendantes . . . 2508
36.2.14 Un petit paradoxe . . . 2509
36.2.15 Inégalité de Jensen . . . 2515
36.2.16 Fonction de répartition . . . 2515
36.2.17 Fonction caractéristique . . . 2515
36.2.18 Fonction génératrice des moments, transformée de Laplace . . . 2517
36.2.19 Théorème de transfert . . . 2518
36.2.20 Changement de variables . . . 2520
36.3 Convergence . . . 2520
36.3.1 Convergence et fonction caractéristique . . . 2525
36.4 Loi des grands nombres, théorème central limite . . . 2529
36.4.1 Loi des grands nombres . . . 2529
36.4.2 Théorème central limite . . . 2530
36.4.3 Marche aléatoire . . . 2533
36.5 Les lois usuelles : du blabla . . . 2534
36.5.1 Loi de Bernoulli . . . 2534

36.5.2 Loi binomiale . . . 2535
36.6 Les lois usuelles . . . 2536
36.6.1 Loi de Bernoulli . . . 2536
36.6.2 Loi binomiale . . . 2536
36.6.3 Loi multinomiale . . . 2537
36.6.4 Loi géométrique . . . 2537
36.6.5 Loi de Poisson . . . 2538
36.6.6 Loi exponentielle . . . 2538
36.6.7 Approximation de la binomiale par une Poisson . . . 2542
36.6.8 Loi de Poisson et loi exponentielle . . . 2542
36.6.9 Loi normale . . . 2544
36.6.10 Vecteurs gaussiens . . . 2545
36.6.11 Variable aléatoire de Rademacher . . . 2549
36.6.12 Loi de Student . . . 2551
36.6.13 Indépendance, covariance et variance de somme . . . 2551
36.7 Estimation des grands écarts . . . 2551
36.8 Simulations de réalisations de variables aléatoires . . . 2554
36.8.1 Générateur uniforme . . . 2555
36.8.2 Simulation par inversion . . . 2555
36.8.3 Algorithme de Box-Muller . . . 2556
36.8.4 Méthode du rejet . . . 2557
36.8.5 Simuler une loi géométrique à l'ordinateur . . . 2558
36.8.6 Simuler une loi exponentielle à l'ordinateur . . . 2559
36.8.7 Simuler une loi de Poisson à l'ordinateur . . . 2559
36.9 Sage . . . 2559
36.9.1 Loi exponentielle . . . 2559
36.9.2 Inverser des lois . . . 2560
36.10 Monte-Carlo . . . 2560
36.10.1 Intervalle de confiance . . . 2561
36.11 Résultats qui se démontrent avec des variables aléatoires . . . 2563
36.11.1 Nombres normaux . . . 2563
36.11.2 Théorème de Bernstein . . . 2565

37 Statistiques **2569**
37.1 Notations et hypothèses . . . 2569
37.2 Modèle statistique . . . 2569
37.3 Modèles d'échantillonnages . . . 2572
37.4 Estimation ponctuelle . . . 2575
37.5 Statistiques et estimateurs . . . 2576
37.5.1 Qualité des estimateurs . . . 2576
37.5.2 Méthode des moments . . . 2577
37.5.3 Méthode de substitution . . . 2578
37.5.4 Méthode du maximum de vraisemblance . . . 2579
37.5.5 Exemples sous forme d'exercices . . . 2579
37.5.6 Estimation d'une fonction de répartition . . . 2581
37.5.7 Exemples sous forme d'exercices . . . 2581
37.5.8 Espérance et variance d'un estimateur . . . 2583
37.6 Estimation par intervalle de confiance . . . 2584
37.6.1 Région de confiance . . . 2586
37.6.2 Fonction pivotale . . . 2587
37.6.3 Sondage de proportion . . . 2589
37.7 Estimer une densité lorsqu'on ne sait rien . . . 2590
37.7.1 Distance entre des mesures . . . 2590
37.7.2 Estimateur par fenêtres glissantes . . . 2591
37.8 Test d'hypothèses, prise de décision . . . 2593
37.8.1 Exemple : qualité des pièces d'usine . . . 2593
37.8.2 Exemple : la résistance d'un fil . . . 2594
37.8.3 Vocabulaire et théorie . . . 2594
37.8.4 Risque de première et seconde espèce . . . 2595
37.8.5 Modèle paramétrique de loi gaussienne . . . 2596
37.9 Tests paramétriques . . . 2597

37.10 Tests d'adéquation . . . 2598

38 Chaînes de Markov à temps discret **2603**
38.1 Généralités . . . 2603
38.1.1 Matrice stochastique . . . 2605
38.2 Chaînes de Markov sur un ensemble fini . . . 2605
38.2.1 Graphe de transition . . . 2607
38.2.2 Nombre de visites . . . 2608
38.2.3 Récurrent et transient . . . 2609
38.2.4 Chaînes irréductibles . . . 2611
38.2.5 Périodique et irréductible . . . 2615
38.3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ . . . 2616
38.3.1 Chaînes de Markov homogènes . . . 2618
38.3.2 Chaîne de Markov définie par récurrence . . . 2620
38.4 Classification des états . . . 2623
38.5 Mesure invariante . . . 2625
38.6 Convergence vers l'équilibre . . . 2627
38.7 Processus de Galton-Watson . . . 2628

39 Martingales **2633**
39.1 Convergence de martingales . . . 2633
39.2 Temps d'arrêt et martingale terminée . . . 2635
39.2.1 Nombre de montées . . . 2636
39.2.2 Théorèmes d'arrêt . . . 2639
39.3 Décomposition de martingales . . . 2642
39.4 Problème de la ruine du joueur . . . 2643
39.4.1 Le cas où la pièce est truquée . . . 2644
39.4.2 Le cas où la pièce est non truquée . . . 2647
39.4.3 Un petit complément . . . 2649

40 Processus de Poisson **2651**
40.1 Processus de Poisson . . . 2651
40.1.1 Processus a-Poisson . . . 2651
40.1.2 Processus c-Poisson . . . 2651
40.1.3 Processus n-Poisson . . . 2652
40.1.4 Processus o-Poisson . . . 2652
40.1.5 Équivalence de définitions . . . 2665
40.1.6 Estimateurs . . . 2665
40.2 Quelques trucs sur la simulation . . . 2667
40.2.1 Le théorème central limite pour Markov . . . 2667
40.2.2 Feuille 5 . . . 2668
40.2.3 Feuille 6 . . . 2668
40.2.4 Feuille 7 . . . 2668
40.2.5 Simuler des lois conditionnelles . . . 2668

41 Langages **2671**
41.1 Alphabets et mots . . . 2671
41.2 Langages . . . 2672

42 Utilisation dans les autres sciences **2675**
42.1 Démystification du MRUA . . . 2675
42.1.1 Preuve de la formule . . . 2675
42.1.2 Interprétation graphique . . . 2676
42.2 Relativité en mécanique newtonienne . . . 2676
42.2.1 Relativité du mouvement . . . 2676
42.2.2 Bob et Alice . . . 2676
42.3 Invariance de la vitesse de la lumière . . . 2676
42.3.1 Champ de gravitation et électrique . . . 2676
42.3.2 Support du champ : pas d'éther . . . 2677
42.3.3 Le problème . . . 2677
42.4 Conséquences . . . 2678

42.4.1 Ligne d'univers . . . 2678
42.4.2 Transformations de Lorentz . . . 2678
42.4.3 Conditions d'existence . . . 2681
42.4.4 La notion d'intervalle . . . 2682
42.4.5 Le cône de lumière d'un point . . . 2682
42.4.6 Contraction des longueurs . . . 2682
42.4.7 Dilatation des intervalles de temps . . . 2683
42.4.8 Invariance de l'intervalle . . . 2684
42.4.9 Vitesse limite . . . 2687
42.5 Applications . . . 2688
42.5.1 Le GPS . . . 2688
42.5.2 Les ondes électromagnétiques . . . 2688
42.6 Mécanique relativiste . . . 2688
42.6.1 Des problèmes, toujours des problèmes . . . 2688
42.6.2 Loi d'addition des vitesses . . . 2689
42.6.3 L'action d'une force . . . 2689
42.6.4 Équivalence entre la masse et l'énergie . . . 2691
42.7 Principe de correspondance . . . 2691

43 Exemples avec Sage **2693**
43.1 Graphiques . . . 2693
43.1.1 Autres . . . 2693

44 Épilogue : la constante de Weiner **2711**
44.0.1 Résultats prouvés dans le Frido . . . 2711
44.0.2 Autres résultats . . . 2711
44.0.3 Conjectures . . . 2712

45 Développements possibles **2713**
45.1 Algèbre et géométrie . . . 2713
45.2 Analyse . . . 2717
45.3 Anciennes leçons . . . 2720

46 GNU Free Documentation License **2729**

Bibliographie **2735**

Index

λ-système, 1200
σ-compact, 519
k-forme différentielle, 1049
p-groupe, 401
p-Sylow, 401
q-orthogonal, 659

Abel
    angulaire, 1775
    convergence radiale, 1355
Abel
    angulaire, 1775
    convergence radiale, 1355
abélianisé, 294
abscisse
    curviligne, 1857
absolument continue, 1330
absorbant, 2623
accélération d'un chemin, 1841
accroissement, 1155
accroissements finie
    dérivée partielle, 882
action, 252
    adjointe, 302
    de groupe
        Wedderburn, 1698
    domaine fondamental, 304
    fidèle, 301
    libre, 307
    transitive, 307
action continue, 1166
action de groupe, 618
    sur des matrices, 1823
action fidèle, 301
action transitive, 307
adjoint, 625
affine
    application, 918
    espace, 913
    sous-espace, 921
aire, 1819
aire dans $\mathbb{R}^2$, 1741
algèbre, 246
    de parties, 1194
    engendrée, 247
algèbre de Banach, 567
algèbre engendrée, 1365
algébrique, 452
algébriquement
    indépendant, 490
algorithme, 2416
    consistant, 2416
    facteurs invariants, 386
    fortement consistant, 2416
    stable, 2416
algorithme convergent, 2416
alignement
    dans un espace projectif, 1900
alphabet, 2671
alterné
    groupe, 415
    polynôme, 487
analytique entre espaces de Banach, 1424
angle
    d'une courbe, 1874
    entre deux droites, 1613
    orienté de vecteurs, 1609
angle entre deux vecteurs, 1573
anneau, 139
    $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 410, 1690, 1697, 1701
    à division, 427
    de séries formelles, 1422
    élément régulier, 141
    euclidien
        facteurs invariants, 386
    factoriel, 327
    noethérien, 332
    principal, 434, 648
        utilisation, 435
    quotient par un idéal, 207
Anneau
    $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
        polynôme cyclotomique, 1694
anneau commutatif, 139
anneau intègre, 209
anneau principal
    Bézout, 328
anneau topologique, 547
anneau valué, 143
apériodique
    état d'une chaine de Markov, 2615
application, 115
    de classe C^k, 883
    définie positive, 653
    différentiable, 877, 883, 1055, 1087, 1491, 1823
        extrémums lié, 1504
    en escalier, 1812
    linéaire
        théorème de Banach-Steinhaus, 839
    mesurable, 1198

ouverte, 561
semi-définie positive, 653
tangente, 1059
application k-linéaire, 611
application k-multilinéaire, 611
application affine, 662
application bilinéaire, 652
application bloc-diagonale, 792
application multilinéaire
décomposable, 854
application ouverte, 841
application quotient, 509
application réciproque, 116
applications homotopes, 1995
applications linéaires semblables, 674
approximation
de fonctions
par des polynômes, 2565
de l'unité, 2102
par polynômes, 1465
polynomiale, 2023
arc
géométriques, 1856
paramétré, 1841
arc cosinus, 1572
arc sinus, 1570
arc tangente, 1568
archimédien, 157
$\mathbb{N}$, 161
$\mathbb{Q}$, 262
$\mathbb{R}$, 276
associée
subdivision, 1812
associés
éléments d'un anneau, 325
asymptotiquement pivotale, 2587
attractif
point fixe, 1479
automorphisme, 504
d'espace vectoriel, 359
automorphisme de groupes, 138
axiome
du choix, 115

Baire
tribu, 1209
Baire
tribu, 1209
barycentre
cas affine, 922
cas vectoriel, 1593
enveloppe convexe, 926
base, 350
d'un module, 245
de Newton, 2425
de topologie
dénombrable, 535
espace métrique, 535
duale, 393
espace préhilbertien, 1971
hilbertienne, 1971
utilisation, 2249
locale, 1951
base associée à un repère cartésien, 914
base canonique de $\mathbb{R}^m$, 354
base de topologie, 493
base de topologie et continuité, 503
base de voisinages, 494
base orthonormée, 665
base préduale, 394
Bergman (espace), 2201
Bernoulli, 2534
somme, 2552
Berry-Esséen (borne), 2533
Bessel
inégalité, 1971
Bézout
calcul effectif, 314
polynômes, 446
biais
d'estimateur, 2577
bien
conditionné, 2399
enchainé, 587
biholomorphe, 2050
bijection, 115
bilinéaire, 611
binormale, 1866
birapport, 1911
birapport dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 1929
birégulier
point sur une courbe, 1854
Bolzano-Weierstrass
espaces métriques, 536
bon
ordre, 118
bonne seminorme, 2262
bord, 530
borélienne
fonction, 1207
tribu, 1206
boréliens, 1206
borné, 535
partie de V, 628
temps d'arrêt, 2635
bornée
différentielle, 1076
partie de $\mathbb{R}^m$, 969
suite, 732
boule
ouverte, 526
boule dans un corps, 258
boule fermée, 531
Bruhat (décomposition), 1185
Burnisde
formule, 304

canonique
base, 354
décomposition, 126
espace affine, 914
canonique

base, 354
décomposition, 126
espace affine, 914
Cantor
ensemble, 1252
caractère, 1451
abélien, 1445
de S_4, 1458
groupe diédral, 1681
irréductible, 1451
caractéristique
d'un anneau, 247
d'une équation différentielle, 2373
polynôme, 649
sous-groupe, 190
cardinal, 174
cardioïde, 1853
carré
dans un corps fini, 1702
carrée
matrice, 366
carte, 1732
Cauchy
critère
uniforme, 822
déterminant, 619
formule, 2017
suite, 577
théorème, 401
Cauchy-continue, 963
Cauchy-Riemann, 1990
Cauchy-Schwarz, 763, 1963
Cayley
théorème, 401
cellule d'un pavage, 1811
centrale (application), 1451
centralisateur, 189, 204
centre
d'un anneau, 204
d'un groupe, 189
d'une rotation, 1599
cercle
circonscrit à une courbe, 1881
dans la sphère de Riemann, 1921
cercle-droite, 1922
cercles
perpendiculaires, 1893
Cesàro
moyenne, 834
chaine, 587
de Markov, 2603
convergence, 2627
finie, 2605
homogène, 2603
irréductible, 2606
récurrente positive, 2613
chaine de Markov apériodique, 2616
chaine de Markov régulière, 2606
champ
conservatif, 1786
de vecteurs, 1752
champ de vecteur conservatif, 1754
champ dérivant d'un potentiel, 1786
changement de variable, 1856
Chasles, 913
chemin, 1766
dans $\mathbb{R}^p$, 1841
chemin C^1 par morceaux, 1750
chemin de Jordan, 1766
chemin régulier, 1766
circulation, 1785
classe
d'association, 325
de conjugaison, 189
classe d'association, 325
classe de conjugaison
dans S_4 , 195
clôture algébrique, 453
codimension, 355
coefficient binomial, 222
coefficients
de Fourier, 2105
coefficients binomiaux, 222
coefficients de Fourier, 2116
coercion, 1984
coercive, 1527
colinéarité, 1899
combinaison
convexe, 922
combinatoire, 1623
commutant, 710
commutateur
dans un groupe, 293
commutativement sommable, 810
compacité, 536, 583, 587, 2027, 2049
sous-groupes du groupe linéaire, 1187
théorème de Dini, 1105
utilisation, 1536
théorème de Montel, 2200
compact, 518, 630
arc paramétré, 1841
boule unité, 729
et fonction continue, 536, 739
fermé et borné, 728
intervalle $[a, b]$, 727
le coup du, 1472
localement, 532
opérateur, 2051
produit dénombrable, 589
produit fini, 588
quasi, 518
séquentiellement, 519
suite exhaustive, 585
compacts et fermés, 520
complément
à deux, 2389
complémentaire, 114
complet
$\mathbb{R}$
corps, 280
espace métrique, 577
corps, 258

espace mesuré, 1211
espace topologique, 566
métrique, 566
complété
d'un espace métrique, 1544
complète
famille de projecteurs, 245
complétion
projective, 1902
complétion d'espace métrique, 1544
complétude, 1541, 1545, 2084
espaces L^p, 2085
complexe conjugué, 292
composante, 1156
composante connexe, 516
composition, loi interne, 126
composition
suite de, 297
concaténation
de langages, 2672
de mots, 2671
concave, 1506
log-concave, 1513
condition initiale, 2362
conditionnement
absolu, 2399
d'une matrice inversible, 2429
relatif asymptotique, 2416
Cône de lumière, 2682
conjugué hermitien, 666
conjugués
éléments d'une extension, 452
connectés
indices d'une matrice, 2454
connexe par arc, 743
connexité, 587
définition, 516
et intervalles, 737
fonction holomorphe, 1547
indice d'une courbe, 2011
le groupe $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$, 1176
par arc
fonction différentiable, 1087
points d'accumulation, 583
prolongement analytique, 1547
signature d'une forme quadratique, 1531
théorème de Runge, 2023
théorème des valeurs intermédiaires, 751
utilisation
Brouwer, 2020
consistance
estimateur, 2576
ordre, 2473
constructible
angle, 1725
point, 1721
réel, 1721
construction
des réels, 270
contenu, 342
continue
fonction entre espaces métriques, 581
fonction entre espaces topologiques, 503
forme différentielle, 1050
continuité
fonction définie par une intégrale, 1471
séquentielle, 527
contraction, 857, 1480
convergence
commutative, 810
dans un espace vectoriel normé, 729
de martingales, 2641
en loi, 2521
en probabilité, 2521
ordre, 2412
presque surement, 2520
quadratique, 2403
rapidité, 1392, 2219, 2220, 2411, 2552
suite
dans un corps, 258
suite dans $\mathbb{R}^m$, 564
suite numérique, 729, 1465, 2209
Abel angulaire, 1775
uniforme, 809
intégrale, 1469
théorème de Dini, 1105
convergence absolue, 809
convergence de suite, 496
convergence forte, 840
convergence normale, 809
convexe
courbe plane, 1883
fonction sur $\mathbb{R}^n$, 1515
convexité
barycentre, 925
enveloppe de $O(n)$, 1184
fonction, 1506
inégalité de Jensen, 1520
locale, 550
méthode de Newton, 2408
utilisation, 1536
convolution, 2493, 2629
convolution sur S^1, 2116
coordonnées
cartésiennes
dans un espace affine, 929
curvilignes, 1950
cylindrique, 1669
dans un espace affine, 914
homogène, 1916
sphériques, 1670
coordonnées barycentrique, 931
coordonnées polaires, 1664
corps, 227
complet, 258
de décomposition, 474
de rupture, 465
polynôme cyclotomique, 1694
des fractions, 254
extension, 481, 488
fini, 1701, 1705, 1707
Wedderburn, 1698

formellement réel, 427
ordonné, 142
premier, 429
corps algébriquement clos, 453
corps valué, 143
cosinus, 1551
hyperbolique, 1397
courbe, 1841
efficacité, 2595
étude métrique, 2249
fermée, 1871
simple, 1871
courbe de Jordan, 1766
courbe de niveau, 1033, 1035
courbe simple, 1766
courbure, 1866
signée, 1872
totale, 1873
covariance, 2496
critère
Abel, 1343
Abel pour intégrales, 1470
Cauchy
uniforme, 822
de Cauchy, 280, 577
Weierstrass, 1470
série de fonctions, 1107
critère du quotient, 830
critique
Galton-Watson, 2629
point, 1501
point d'un arc, 1854
région, 2594
valeur, 2595
cycle, 191
cyclique
endomorphisme, 646
matrice, 646
cycloïde
coordonnées normales, 1859
longueur, 1853

décalage, 2391
décalage, 2391
décomposition
Bruhat, 1185
canonique, 126
corps, 474
Dunford, 697
application, 1402
exponentielle de matrice, 1129
Jordan
et exponentielle de matrice, 1401
polaire, 1181
primaire, 696
sous-espaces caractéristiques, 696
spectrale, 696
décomposition de Hahn, 1282
décomposition de Jordan, 1284
décomposition décimale, 837
degré
application $S^1 \to S^1$, 1875
d'une représentation, 396
extension de corps, 450
degré d'un polynôme, 250
demi-plan, 1003
dénombrable, 178
dénombrable à l'infini, 519
dénombrement, 1623
partitions de $\{1, \dots, n\}$, 1422
dense, 498
densité, 1545
d'une variable aléatoire, 2482
dans un espace de fonction
critère de Weyl, 2209
de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, 725
utilisation, 1512
de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, 1177
de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, 2198
de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, 2091
de $L^2\big([0,1]\big)$ dans $L^p\big([0,1]\big)$, 2092
de $S^+(n, \mathbb{R})$ dans $S^{++}(n, \mathbb{R})$, 1181
des fonctions étagées dans L^p, 2091
des polynômes
dans $C_c^0[0,1]$, 2565
matrices diagonalisables dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$, 1177
mesure, 1273
points extrémaux dans $\mathcal{L}$, 1183
prolongement, 1541
densité conjointe, 2486
densité d'une mesure, 1274
densité jointe, 2488
déplacement, 1637
dérivabilité
fonction définie par une intégrale, 1473
lemme de Borel, 1420
dérivable
au sens complexe, 1084
fonction, 2315
dérivation
au sens des distribution
Sobolev, 2302
dérivé
groupe, 293
dérivée, 878
dans Sobolev $H^1(I)$, 2299
distributionnelle, 2272
faible, 2259
fonction à valeurs dans E', 607
partielle, 1045, 1155
seconde, 1015
dérivée directionnelle, 878
dérivée faible, 2257
dérivée partielle, 878
déterminant, 612
Cauchy, 1468
d'un endomorphisme, 616
d'une famille de vecteurs, 613
de Cauchy, 619
et inversibilité, 616
forme linéaire alternée, 612
Gram, 619, 1467

interprétation géométrique, 1307
matrice, 372
résultant, 621, 1779
utilisation, 1536
Vandermonde, 389
détermination
logarithme, 2006
principale, 2006
détermination du logarithme, 2009
développable
en série entière, 1404
développement
asymptotique, 1153
limité
en zéro, 1149
fonction holomorphe, 1989
premier ordre, 881
Taylor, 1823
diagonale
dominante, 2457
fortement dominante, 2457
strictement dominante, 2457
diagonalisable, 677
et polynôme minimum scindé, 678
exponentielle, 1402
diagonalisation
cas complexe, 979
cas réel, 682
endomorphisme autoadjoint, 771
simultanée, 680
diamètre, 969
diédral, 1623
difféomorphisme, 884
de classe C^k, 1098
différence
centrée, 2463
divisée, 2425
progressive, 2463
régressive, 2463
différentiabilité, 1087
différentielle, 877
de $u \mapsto u^{-1}$, 905
partielle, 903
totale, 1155
dilatation, 1169
dilatation (matrice), 382
dimension, 354
n-formes multilinéaires alternées, 612
définition, 354
sous-espace affine, 921
utilisation, 926
direction, 878, 1861
sous-espace affine, 921
Dirichlet
noyau, 2205
théorème, 2206
théorème (sur les nombres premiers), 1697
disque de convergence, 1342
distance, 525
associée à une norme, 543
compatible, 570
entre deux mesures de probabilités, 2590
invariante, 570
point et ensemble, 565
distance discrète, 565
distance produit, 559
distingué
sous-groupe, 190
distribution, 2269
de Dirac, 2288
équation de Schrödinger, 2358
produit par une fonction, 2272
tempérée, 2288
divergence, 1160
divise, 141
diviseur
dans un anneau, 141
de zéro, 208
de zéro à droite, 208
polynôme, 341
diviseur de zéro, 208
division
euclidienne, 214, 341
harmonique, 1932
division euclidienne
quotient dans $\mathbb{N}$, 163
reste dans $\mathbb{N}$, 163
domaine, 723
de définition d'une fonction, 115
fondamental d'une action, 304
dominé
modèle statistique, 2575
dominée
convergence (Lebesgue), 1270
mesure, 1278
dominée par le dessus, 592
dominée par une seminorme, 592
droite
dans la sphère de Riemann, 1921
projective, 1899
droite affine, 932, 993
droite réelle achevée, 746
droite vectorielle, 993
droites parallèles, 995
droites perpendiculaires, 995
dual
d'un espace de Hilbert, 1968
de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$, 672
de $L^p(\Omega)$, 2168
de L^p, 2163
dual algébrique, 392
dual topologique, 907, 1961
Dunford
décomposition, 697
dyadique, 1298
développement, 277
écart-type, 2495
échantillon, 2570, 2572

effectif
empirique, 2598
effectif

empirique, 2598
efficacité
courbe, 2595
d'une méthode itérative, 2419
élément
inversible
dans un anneau, 208
élément
de surface, 1762
de torsion, 309
élément de surface, 1737
élément maximal, 117
élément minimal, 117
élément premier, 208
élément régulier, 127
à droite, 127
à gauche, 127
ellipsoïde, 720
elliptique
équation aux dérivées partielles, 2381
endomorphisme, 359
cyclique, 646
décomposition
polaire, 1181
diagonalisable, 718, 1179, 2355
Dunford, 697
diagonalisation, 682
nilpotent
Dunford, 697
préservant une forme quadratique, 1189
sous-espace stable, 697, 2355
endomorphisme direct, 625
endomorphisme préserve l'orientation, 625
engendré
λ-système, 1200
corps, extension, 458
sous-espace affine, 921
sous-groupe, 240
ensemble
archimédien, 157
de Cantor, 1252
différence symétrique, 123
infini, 128
ensemble connexe, 516
ensemble des mots, 2671
ensemble fini, 128
ensemble ordonné, 117
totalement ordonné, 117
ensemble quotient, 124
ensembles
disjoints, 114
entier, 167
entier relatif
négatif, 170
positif, 170
strictement négatif, 170
strictement positif, 170
entiers relatifs
négatifs, 170
positifs, 170
entrelacement, 1452
enveloppe
convexe, 925
équation
différentielle
linéaire, 2317
ordinaire d'ordre 1, 2315
variables séparées, 2321
générale de degré n, 490
équation
aux variations, 2337
de Riccati, 2357
des classes, 304
des orbites, 304
différentielle
étude qualitative, 2355
Hill, 2353
homogène, 2356
système, 2355
diophantienne, 321, 337, 339
Fredholm, 1482
orbite-stabilisateur, 303
équation de droite, 999
équation différentielle
linéaire du premier ordre, 2366
linéaire du premier ordre, homogène, 2366
linéaire du second ordre, 2368
linéaire du second ordre, homogène, 2368
premier ordre, 2361
second ordre, 2362
variables séparables, 2364
équation exponentielle, 1136
équation fonctionnelle, 1136
équation homogène associée, 2366
équicontinu, 589
équipotent, 127
équivalence
arcs paramétrés, 1855
chemin, 1849
classe de fonctions, 2058
de représentations, 1452
de suites, 731
homotopie, 2014
suite de composition, 299
équivalence de forme quadratiques, 692
équivalence de normes, 786
erreur, 2426, 2452
assignation, 2394
de consistance, 2473
discrétisation, 2473
quadratique, 2428
troncature, 2394
erreur relative, 2393
escalier, 1235
espace
L^2
Sobolev, 2302
L^p, 2062
de Bergman, 2201
de fonctions
L^p, 2085
Sobolev H^1, 2302

de Hilbert
espace de Sobolev H^1, 2302
de probabilité, 2481
de Schwartz, 2196, 2287
de Sobolev, 2299, 2305
euclidien, 783
mesurable, 1191
mesuré, 1196
complété, 1213
métrique, 525
base de topologie, 535
projectif, 1899
séparé, 510
topologique
métrisable, 580
vectoriel, 243
dimension, 612
vectoriel topologique
métrisable, 525
espace complètement normal, 514
espace connexe, 514
espace de Baire, 608
espace de Banach, 567
espace de Sobolev, 2304
espace propre, 639
espace tangent, 1733
espace topologique, 493
espace topologique normal, 514
espace vectoriel
topologique, 543
espace vectoriel normé, 541
espérance, 2490
conditionnelle, 2499, 2501
événement, 2501
variable aléatoire, 2505
estimateur, 2576
biais, 2577
consistant, 2576
de fonction de répartition, 2581
maximum de vraisemblance, 2579
estimateur convergeant, 2576
estimation
des grands écarts, 2552
étagée
fonction, 1235
état
apériodique, 2615
récurrent, 2609
récurrent positif, 2609
transitoire, 2609
Éther, 2677
étoile de Kleene, 2673
étranger
dans leur ensemble, 342
étrangers
polynômes, 342
Euclide
algorithme étendu, 312
lemme, 219
euclidien
anneau, 212
espace, 665
évaluation
polynôme plusieurs variables, 324
événement, 2481
Événement, 2682
exact
intervalle de confiance, 2584
excès
intervalle de confiance, 2584
exhaustive (suite de compacts), 585
exponentielle, 1380
convergence, 832
de matrice, 906, 1401, 1402, 1413
utilisation, 1499
existence, 1374
rapide, 1692
unicité, 1136
exposant, 407, 718
d'un groupe, 238
extension
corps de base, 699
de corps, 450, 488
algébrique, 461
finie, 1709
simple, 458
utilisation, 1726
isométrie, 1542
séparable, 483
extension algébrique, 453
extension algébriquement clos, 453
extrapolation, 2424
extrémité
d'un intervalle, 737
extrémum, 1823
lié, 1504
local
relatif, 1504
extrémum local, 1500
extrémums, 1502
volume d'un ellipsoïde, 1536

facteur
intégrant, 2358
facteur
intégrant, 2358
factoriel
anneau, 327
factorisation
de polynôme, 346, 464
faisceau de droites, 1918
famille
sommable, 814
famille trigonométrique
sur S^1, 2115
Fatou, 1261
Fejér
noyau, 2206
fermé, 494, 630
fermeture séquentielle, 528
filtration, 2633
filtration naturelle, 2633

fine
subdivision, 1841
fixateur, 301
flot, 2332, 2373
flux
d'un champ de vecteur, 1765
flux d'un champ de vecteurs, 1763
fonction, 115, 723
Γ d'Euler, 2042
à décroissance rapide, 2196
bijective, 115
borélienne, 1207
caractéristique, 1814
d'une variable aléatoire, 2515
composée de fonctions, 116
continue
égales, 529
convexe, 1506, 1512
croissante, 724
de Dirichlet, 2211
de Möbius, 1717
de répartition, 2515
décroissante, 724
définie par une intégrale, 1419, 1471, 1476, 2049, 2231
Γ d'Euler, 2042
utilisation, 2541
domaine de définition, 115
en escalier intégrable, 1813
ensemble de définition, 115
étagée, 2090
génératrice, 2517
holomorphe, 1084, 2049
théorème de Montel, 2200
image, 723
injective, 115
méromorphe
Γ d'Euler, 2042
monotone, 724
surjective, 115
valeurs vectorielles, 1156
fonction analytique, 1142
fonction continue en un point, 503
fonction dérivée, 878
fonction intégrable, 1264
fonction périodique, 1025
fonctionnelle
énergie, 1987
fonctionnelle de Minkowski, 592
fonctions équivalentes, 512
fondamental
domaine d'une action, 304
forme
bilinéaire, 653
non dégénérée, 653
différentielle, 1049
exacte, 1773
fermée, 1773
linéaire
différentielle, 1504
quadratique, 1531, 1533, 1823
groupe orthogonal, 1189
forme bilinéaire symétrique, 653
forme canonique
fonction simple, 1236
matrice de transition, 2624
forme linéaire, 392, 612
forme multilinéaire alternée, 612
forme quadratique, 653
formle multilinéaire antisymétrique, 611
formule
Bayes, 2497
Burnside, 304
d'expulsion (produit vectoriel), 781
de Cauchy, 2017
Hadamard, 1352
inversion Möbius, 1718
probabilité totales, 2497
sommatoire de Poisson, 2219
Taylor
utilisation, 2411
formule binomiale, 226
Formule de Leibniz, 2260
formule de Stirling, 1828
formule de Taylor
reste intégral, 1806
formule des classes, 303
Fourier, 2219
série
utilisation, 2249
transformée
groupe abélien fini, 1447
fraction
rationnelle
intégration, 1779
fraction dyadique, 277, 1892
fraction rationnelle, 1803
fractions
rationnelles, 255
fractions (corps), 254
Fredholm
équation, 1482
Frenet
formules, 1867
fréquence
empirique, 2598, 2608
Fresnel
intégrale, 2047
Frobenius
morphisme, 248
frontière, 530, 634
Fubini
théorème
dans $\mathbb{R}^n$, 1328

Galton-Watson
sous-critique, 2629
sur-critique, 2629
Galton-Watson
sous-critique, 2629
sur-critique, 2629
Gauss

lemme
polynômes, 446
somme de, 1703
générateur, 241
génératrice
partie d'un module, 245
géométrie
avec des groupes, 1618, 1938
avec nombres complexes, 1618, 1938
géométrique
avec des nombres complexes, 2249
Gershgorin
disque, 2455
gradient, 880, 1056, 1063, 1075
Gram (déterminant), 619
Gram-Schmidt, 783
graphe, 723, 1016
de transition (chaine de Markov), 2607
fonction, 1032
fonction de deux variables, 1034
Grönwall (lemme), 2315
groupe, 137
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 1533
p-groupe, 401
action, 1938
utilisation, 1189
agissant sur un ensemble
diédral, 1617
alterné, 415
circulaire, 1935
de Galois, 490
de permutation, 1681
de permutations, 1623
caractères de S_4, 1458
de torsion, 309
dérivé, 293
de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, 1175
de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$, 1175
du groupe alterné, 418
du groupe symétrique, 417
des isométries
espace métrique, 565
des symétries, 1635
diédral, 1617, 1623
générateurs (preuve), 1618
générateurs (utilisation), 1681
en géométrie, 1617
et géométrie, 612, 1623, 1938
isométries du cube, 423
fini, 403, 410, 1623, 1690, 1698, 1701
alterné, 417
diédral, 1617
Wedderburn, 1698
linéaire, 1185
décomposition polaire, 1181
enveloppe convexe de $\Omega(n)$, 1184
hyperplan, 673
sous-groupes compacts, 1187
modulaire, 1937
orthogonal, 627
d'une forme quadratique, 1189
partie génératrice, 417, 1690, 1938
permutation, 612, 618, 1185, 1690
diédral, 1617
projectif, 1905
quotient, 297
simple, 190
sous-groupe, 138
spécial orthogonal, 628
symétrique, 190
action sur un triangle, 1448
groupe abélien, 138
groupe commutatif, 138
groupe cyclique, 241
groupe de pavage, 1637
groupe dérivé
de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, 1169
groupe ordonné, 189
groupe résoluble, 300
groupe simple, 190
groupe topologique, 1165

Hadamard
conditions, 2383
formule, 1352
Hadamard
conditions, 2383
formule, 1352
Hardy-Littlewood (théorème), 1465
Hausdorff, 510
Heine (théorème), 969
hermitienne, 666
hessienne, 1099
Hilbert
espace, 1963
holomorphe, 1084, 2050
sur un compact, 1084
homéomorphisme, 504
homogène
chaine de Markov, 2603
homographie, 1904, 1938
sur $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, 1925
homothétie, 1006
homotopie, 1766
homotopie à extrémité fixées, 1767
hyperbolique
équation aux dérivées partielles, 2382
hyperplan, 715, 1588
de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, 673
sépare
au sens strict, 2146
séparer
au sens large, 2146
hypothèse
alternative, 2594
composite, 2594
multiple, 2594
nulle, 2594
simple, 2594

idéal
bilatère, 204

dans un anneau, 204
principal
à droite, 213
à gauche, 213
idéal
bilatère, 204
dans un anneau, 204
principal
à droite, 213
à gauche, 213
idéal à droite, 204
idéal engendré, 205
idéal maximal, 229
idéaux premiers dans leur ensemble, 205
idéaux premiers entre eux, 204
identifiable, 2575
identité de polarisation, 657
image, 723
par une fonction, cas général, 115
incompressible
champ de vecteur, 1162
indécomposable
module, 246
indépendance
affine, 928
algébrique, 490
événements, 2482
utilisation, 2563, 2643
projective, 1906
sous tribus, 2482
variables aléatoires, 2483
indicatrice d'Euler, 412
indice, 296
d'une courbe dans $\mathbb{C}$, 2011
de rotation, 1875
indice d'inertie, 663
inductif, 118
induite
topologie, 631
tribu, 1193
inégalité
arithmético-géométrique, 1520
Bessel, 1971
Cauchy-Schwarz, 763, 1963
de Khintchine, 2549
de la moyenne, 1087
des pentes, 1507
Hölder, 2067
utilisation, 2494, 2566
isopérimétrique, 2249
Jensen, 1520
espérance conditionnelle, 2515
pour une somme, 1520
version intégrale, 2066
Kantorovitch, 1521
Markov, 2529
Minkowski, 2070
triangulaire, 525, 541
inférence statistique, 2569
infimum, 282
injection, 115
intégrable
fonction à valeurs vectorielles, 1267
fonction non en escalier, 1818
fonction positive, 1822
intégrale
calcul, 2209
convergente, 1320, 1779
d'une fonction sur une carte, 1738
d'une fonction sur une variété, 2105
d'une forme différentielle, 1753
fonction en escalier, 1813
Fresnel, 2047
impropre, 1319, 1320
sur un chemin, 1751
intégrale d'une fonction, 1256
intégrale d'une forme différentielle, 1752
intégrale de Dirichlet, 1838
intégrale existe, 1264
intégrale sur une carte, 1734
intégration
fraction rationnelle, 1779
intéressante, 109
intérieur, 496
d'un ensemble, 629
point, 629
interpolation, 2424
Intervalle, 2682
intervalle, 723, 742
d'un ensemble ordonné, 117
longueur, 1243
intervalle de confiance
asymptotique, 2588
invariance cyclique
trace, 368
invariant
de similitude, 707
invariante
mesure
pour une chaine de Markov, 2625
inverse
dans un groupe, 188
inverse généralisé, 2555
inversion, 1894
dans le groupe symétrique, 198
inversion dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 1923
involution, 680
irrationalité
$\sqrt{2}$, 266
irréductible
chaine de Markov, 2606
dans un anneau, 208
module, 246
représentation, 1449
isobarycentre, 923
isométrie
de forme quadratique, 661
de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, 1618
espace euclidien
isométries du cube, 423
groupe, 565
isométrie (forme bilinéaire), 661

isométrie d'espaces métriques, 565
isométrie positive, 1591
isomorphisme, 845
  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, 1701
  d'anneaux, 204
  de corps, 240
  espace affine, 921
  espace vectoriel normé, 888
  espaces vectoriels, 359
isomorphisme d'espace topologique, 504
isotrope
  cône, 658
  sous-espace, 658
  totalement, 658
  vecteur, 658

jacobien, 1075, 1160
jacobien, 1075, 1160
jauge, 2140
Jordan
  réduction, 709
Jordan-Hölder, 297

Kronecker
  symbole, 354
Kronecker
  symbole, 354

l, 170
l, 170
lacet, 1766
lacet de Jordan, 1766
Lagrange
  multiplicateur, 1504
  polynôme, 671
  théorème, 297
lagrangien, 1504
langage, 2672
  itéré, 2673
  itéré strict, 2673
  unité, 2672
  vide, 2672
Laplace
  transformée, 2517
laplacien, 1957
Legendre
  symbole, 1702
Leibniz, 1018
  applications entre espaces vectoriels normés, 902
lemme
  Borel, 1420
  d'Euclide, 219
  de Borel-Cantelli, 2527
  de Gauss
    contenu de polynôme, 1709
    pour des entiers, 219
  de Morse, 1823
  de Schreider, 299
  de Slutsky, 2526
  de transport, 1205
  de Zorn, 118
  des noyaux, 641
  Fatou, 1261
  Gauss
    dans un anneau principal, 329
    polynômes, 446
  Grönwall, 2315
  Hadamard, 1478
  Schur complexe, 979
  Schur réel, 681
lemme de regroupement, 2485
lettres, 2671
Levi-Civita, 1952
libre
  action, 307
  partie, 349
  partie d'un module, 245
librement engendré, 357
Ligne d'univers, 2678
limite, 694
  d'ensembles, 1199
  d'une fonction, 524
  de fonctions holomorphes, 2049
  de suite
    espace topologique, 496
  inférieure, 735
  inversion, 1422, 1465, 2049, 2062
  permutation
    utilisation, 2517
  suite dans $\mathbb{R}^m$, 564
  suite numérique, 729
  supérieure, 734, 735
  unicité, 525
limite à droite, 758, 954
limite à gauche, 758
limite de suite, 496
limite épointée, 943
limite inductive, 2261
limite inférieure, 734
limite pointée, 942
linéaire
  application, 358
linéairement indépendant
  module, 243
lipschitzienne, 1088, 1480
  localement, 1088
liste d'indices, 44
localement
  intégrable, 1319
log-concave, 1513
logarithme
  complexe, 2003
  dans $\mathbb{C}$, 2000
  de matrice, 1413
  sur les réels positifs, 1376
logarithme d'une application, 2009
loi
  χ^2, 2551
  binomiale
    comportement asymptotique, 2552
  conjointe, 2485
  de Poisson, 2538

des grands nombres
forte, 2529
pour les chaines de Markov, 2627
processus de Poisson, 2664
utilisation, 2552, 2563
marginale, 2485
normale
vecteur gaussien, 2545
parente, 2569, 2570
parente d'un échantillon, 2572
réciprocité quadratique, 1705
sans mémoire, 2540
Student, 2551
loi binomiale, 2536
loi d'une variable aléatoire, 2482
loi exponentielle, 2539
loi stationnaire, 2606
longueur
arc géométrique, 1856
d'un arc paramétré compact, 1842
d'un intervalle, 1243
d'une arrête, 1810
élément de, 1851
longueur d'arc, 1843
Lotka-Volterra, 2348

M-matrice, 2460
M-matrice, 2460
magma, 126
commutatif, 127
élément neutre, 127
à droite, 126
à gauche, 126
élément régulier, 127
unifère, 127
maigre, 1209
majorant, 117, 282
essentiel, 2063
manipulation de lignes, 378
Markov
inégalité, 2529, 2574
martingale, 2633
bornée dans $L^2(\Omega)$, 2634
matrice, 366, 1185, 1938
compagnon, 705
creuse, 2433
cyclique, 646
d'une application linéaire, 369
de dilatation, 382
de permutation, 382
de similitude, 1084
de Sylvester, 619
de transvection, 382
dense, 2433
équivalence, 385
dans le groupe linéaire, 1189
hermitienne
racine carrée, 1179
jacobienne, 1063, 1075
normale, 979
orthogonale, 381, 627
permutation
élémentaire, 2439
racine carrée, 1179
réductible, 2454
semblable, 1179
semblables, 1533
symétrique, 1533
réelle, 1531
trigonalisable, 978
matrice bloc-diagonale, 792
matrice d'une forme bilinéaire, 659
matrice de transition, 2603
matrice diagonale, 677
matrice positive, 755
matrice primitive, 755
matrice stochastique, 2605
matrice-colonne, 366
matrice-ligne, 366
matrices
similitude, 385
matrices équivalentes, 673
matrices semblables, 673
maximale
partie orthonormale, 1972
maximum, 117, 177
global, 1500
local, 1500
maximum local, 1500
médiatrice, 1002
méromorphe, 2035
mesurable
application, 1198
au sens de m^*, 1204
ensemble, 1197
fonction, 1204
Lebesgue, 1810
mesure
σ-finie, 1196
angle entre vecteurs, 1610
complexe, 1292
dans une carte, 1737
de Borel, 1227
de comptage, 1304, 1328
de Lebesgue, 1246
de Radon, 1227, 2029
extérieure, 1193
externe, 1809
finie, 1196
image, 1221
positive, 1196
probabilité, 2481
produit, 1296
régulière, 1227
extérieure, 1227
intérieure, 1227
sur un ensemble de parties, 1193
mesure σ-finie, 1194
mesure à densité, 1274
mesure absolument continue, 1274, 1278
mesure finie, 1194
mesure signée, 1196

mesures mutuellement singulières, 1278
méthode
des chemins, 1043
Newton, 2411
cas convexe, 2408
Méthode
de Newton, 2406
métrisable
espace vectoriel topologique, 525
minimum, 177
ensemble ordonné, 117
minimum local, 1500
minorant, 117, 282
modèle
échantillonnage, 2570, 2572
paramétrique, 2570
modèle statistique, 2569
modulaire (groupe), 1937
module
à gauche, 242
de continuité, 909
indécomposable, 246
irréductible, 246
simple, 246
module d'un nombre complexe, 751
module produit, 243
moment, 2492
fonction génératrice, 2517
monogène, 241
extension de corps, 458
monoïde, 434
monôme, 340
monotone par morceaux, 1239
monotonie, 2353
morphisme
d'algèbres, 246
d'anneaux, 140
de corps, 240
espace vectoriel normé, 888
Frobenius, 248
morphisme de groupes, 138
morphisme de modules, 242
morphisme de produits tensoriels, 845
mot, 2671
longueur d'un mot, 2671
mot vide, 2671
nombre d'occurrences, 2671
mot non vide, 2671
moyenne
de Cesàro, 834
empirique, 2495
empirique d'un échantillon, 2572
quadratique, 2495
multiindice, 44, 322
multiplicateur
de Lagrange, 1504
multiplication, 157
multiplicité
racine d'un polynôme, 344
racine de $f(x) = 0$, 2405
valeur propre
algébrique, 977
géométrique, 977

n-connexe, 514
n-connexe, 514
nabla, 1071
négatif, 273
négligeable
partie d'un espace mesuré, 1211
neutre
dans un groupe, 188
Newton
méthode, 2411
nilpotent, 208
niveau de confiance, 2584
nombre
complexe
norme 1, 1698
de Fermat, 1725
dénormalisé, 2392
normal, 2563
normalisé, 2392
premier, 410, 434, 1392, 1690, 1697, 1701
dans leur ensemble, 218
théorème des deux carrés, 435
tours d'une courbe plane, 1873
nombre de montées, 2636
nombre entier
divisible, 163
impair, 163
pair, 163
nombre premier
décomposition, 220
polynôme cyclotomique, 1694
nombres complexes, 291
non dénombrable, 178
normal
arc paramétré, 1857
endomorphisme, 979
nombre, 2563
sous-groupe, 190
normal extérieur
vecteur, 1765
normale
loi réduite, 2544
principale, 1866
normalisateur, 190
norme, 541
d'algèbre, 793
d'application linéaire, 790
d'une application linéaire, 790
euclidienne
dans $\mathbb{R}^m$, 772
supremum, 785
sur $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, 334
normé
espace vectoriel, 543
norme maximum, 731
norme quotient, 605
norme supremum, 808
normes équivalentes, 786

noyau
application vers un groupe, 294
d'une forme bilinéaire, 658
Dirichlet, 2205
Fejér, 2206
vers un espace vectoriel, 359
noyau d'une forme bilinéaire, 654
nulle part dense, 590

observation, 2481
observation, 2481
opérateur
défini positif, 683
opérateur hermitien, 667
opérateur unitaire, 667
opérateurs
compatibles, 1983
opération sur un ensemble, 126
opposés
chemins, 1849
orbite
d'un point sous une action, 301
orbite d'un élément sous une permutation, 190
ordre, 117
bon ordre, 118
d'un élément, 189
d'un polynôme, 344
d'une matrice carrée, 366
dans un anneau, 142
de convergence d'un schéma, 2474
distribution, 2273
partiel, 117
sur un anneau factoriel, 328
total, 117
ordre d'un groupe, 189
orientation, 624, 1739, 1759
origine
abscisse curviligne, 1857
repère affine, 929
orthogonal, 665, 1967
coordonnées curviligne, 1951
famille de projecteurs, 245
matrice, 627
opérateur, 627
sous-espace, 395
orthogonal pour une forme bilinéaire, 654
orthonormé, 772
système, 1970
oscillation
d'une fonction, 965
d'une fonction en un point, 965
osculateur (cercle), 1870
ouvert, 493, 630

parabolique
équation aux dérivées partielles, 2382
parabolique
équation aux dérivées partielles, 2382
parallèle
sous-espaces affines, 921
parallélogramme, 1742
paramétrage, 1849
normale, 1857
paramétrages
admissible, 1856
Parseval, 1977
partie
génératrice, 241, 349
régulière, 1149
totale, 1970
partie absolument convexe, 548
partie absorbante, 548
partie connexe, 514
partie convexe, 541
partie discrète, 498
partie entière, 288
partie équilibrée, 547
partie fractionnaire, 288
partie inductive, 728
partie libre
module, 243
partie linéaire, 918
partie maigre, 590
partie négative, 1279
partie nulle, 1279
partie positive, 1279
partie symétrique, 547
partition
dénombrable mesurable, 1232
partition d'ensembles, 114
partition de l'unité, 2101
passage aux classes, 509
pavable, 1810
pavage du plan, 1637
pavé, 1809, 1810
Pearson
théorème, 2598
peigne de Dirac, 2293
période, 1025
permutation, 190
matrice, 382
permutation impaire, 198
permutation paire, 198
permuter
dérivée et intégrale
$\mathbb{R}^n$, 1476
dans $\mathbb{R}$, 1473
dans $\mathbb{R}$ avec les bornes, 1331
dérivée et limite, 1111
différentielle et intégrale
$\mathbb{R}^n$, 1477
intégrale
et série, 1328
limite et intégrale
convergence dominée, 1270
convergence monotone, 1260
espace mesuré, 1471, 1472
série entière et dérivation, 1358
série entière et intégration, 1361
somme et intégrale, 1261, 1335
permuter limite et intégrale, 1471
petit théorème de Fermat, 430

pgcd
calcul effectif, 313
dans un anneau intègre, 142
polynômes, 448
pivotale, 2587
plan
projectif, 1899
tangent, 1074, 1155
plan affine, 993
plan médiateur, 1009
plan vectoriel, 993
Plancherel, 1976
plongement, 1541
Poincaré (demi-plan), 1937
point
d'équilibre
stable, 2344
pondéré, 922
point adhérent, 497
point critique
définition, 1824
point d'accumulation, 502
point d'équilibre, 2344
point extrémal dans un convexe, 1183
point fixe, 2629
attractif, 1479
Brouwer, 1745
Picard, 1480
Schauder, 1747
point intérieur, 496
point isolé, 502
Poisson
formule sommatoire, 2219
processus, 2652
polaire
nombre complexes, 1578
pôle, 1654, 2032
polydisque, 2050
polygone, 1616
polygone convexe, 1616
polynôme
à plusieurs indéterminées, 622, 1707
alterné, 487
annulateur, 641, 645
caractéristique, 649, 984
contenu, 342
cyclotomique, 1693
irréductibilité, 1694
propriétés, 1694
d'endomorphisme, 1179
décomposition de Dunford, 697
de Bernstein, 2565
irréductible
sur $\mathbb{F}_q$, 1718
minimal, 454
d'un élément d'une extension, 451
ponctuel, 645
racines, 488
semi-symétrique, 487
symétrique, 487, 488, 618, 622, 1707
élémentaire, 489
trigonométrique, 2105
polynôme de Lagrange, 671
polynôme de plusieurs variables, 324
polynôme de Taylor, 1143
polynôme dérivé, 479
polynôme irréductible, 208
polynôme primitif, 342
polynôme scindé, 443
polynôme séparable, 483
polynôme sur espace de Banach, 1435
polynôme sur un espace de Banach, 1361
polynôme symétrique élémentaire, 487
polynôme trigonométrique, 2115
polynômes, 249
portée
mesure, 1279
positif, 273
positivement liés, 753
positivité, 141
potentiel, 1757, 1786
ppcm
dans un anneau intègre, 142
prébase, 495
précision
simple, 2391, 2392
précompact, 527
préhilbertien, 1963
premier
corps, 429
deux éléments d'un anneau principal, 218
deux polynômes entre eux, 342
idéal, 230
premier type
région solide, 1820
préserve l'orientation, 625, 1591
presque
nulle, 309
partout, 1198
surjective, 2153
primitif
élément d'un corps, 1701
élément d'une extension de corps, 458
racine, 1712
triplet pythagoricien, 337
primitive, 1014, 1784
de fonction continue, 1134
et intégrale, 1321
fonction, 1031
primitive et intégrale, 1317
principal
anneau, 213
idéal, 213
principe
prolongement analytique, 1547
zéros isolés, 1546
Principe de correspondance, 2691
probabilité
conditionnelle, 2496
problème
aux limites d'évolution, 2382
aux limites stationnaires, 2382

bien posé, 2382
limite de Dirichlet, 2382
limite de Von Neumann, 2382
problème de Cauchy, 2362
processus
adapté à une filtration, 2633
arrêté, 2641
croissant prévisible, 2642
Galton-Watson, 2628
Poisson, 2652
sans mémoire, 2540
processus arrêté, 2642
processus de comptage, 2651
processus de Poisson, 2651
produit, 157
d'une mesure par une fonction, 1273
de convolution, 2096
et Fourier, 2217
de langages, 2672
de mots, 2671
distribution et fonction, 2272
espaces mesurés, 1298
mixte, 779, 781
scalaire
en général, 664
sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, 990
semi-direct, 308
tensoriel
de représentations, 1457
vectoriel, 778
produit de Cauchy, 1346, 1348
produit extérieur, 861
produit hermitien, 666
produit intérieur, 871
produit pseudo-scalaire, 664
produit remarquable, 2025
produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, 665
produit tensoriel, 845, 847
projecteur
dans un module, 245
projecteur parallèlement, 398
projectif
complétion, 1902
droite, 1899, 1900
espace, 1899
groupe, 1905
hyperplan, 1900
plan, 1899
repère, 1906
sous-espace, 1899
projection
orthogonale, 1966
projection normale, 2136
projection orthogonale, 1595
prolongement
analytique, 1547
utilisation, 2201
de fonctions, 1541
lemme de Borel, 1420
méromorphe de la fonction Γ, 2042
par continuité, 957
dans $H^1(I)$, 2302
par densité, 1541
théorème de Hahn, 1219
prolongement de fonctionnelle linéaire, 2151
propriété d'intersection finie, 524
propriété d'intersection non vide, 519
propriété des valeurs intermédiaires, 740
propriété universelle, 845
pseudo-dimension, 2182
puissance
d'un langage, 2672
d'un mot, 2672
d'un point, 1893
d'un test, 2595
d'une inversion, 1923
pull back, 874

quasi-compact, 518
quasi-compact, 518
quaternion, 485
queue de liste d'indices, 44
quotient, 214, 341
dans une suite de composition, 297
de groupe, 297
de groupes, 409
quotient d'un chemin, 2172
quotient d'un espace vectoriel, 844

racine
carré
de matrice hermitienne, 1179
carré de matrice
hermitienne positive, 1179
d'un polynôme, 344
de l'unité, 718, 1618, 1694, 1697, 1938
primitive, 1688
utilisation, 1694
de polynôme, 464
multiple, 2405
primitive, 1712
simple, 2405
racine
carré
de matrice hermitienne, 1179
carré de matrice
hermitienne positive, 1179
d'un polynôme, 344
de l'unité, 718, 1618, 1694, 1697, 1938
primitive, 1688
utilisation, 1694
de polynôme, 464
multiple, 2405
primitive, 1712
simple, 2405
racine carrée, 751
racine de l'unité, 1685
racine multiple, 344
racine simple, 344
raffinement, 1841
subdivision d'un pavé, 1811
rang, 362, 612, 691

classe d'équivalence, 385
diagonalisation, 682
différentielle, 1504
utilisation, 1969
rang d'une forme quadratique, 663
rang d'une matrice, 383
rare, 1209
rationnels, 259
rayon
de courbure, 1866
de torsion, 1867
spectral, 793, 1129
rayon de convergence, 1342, 1361
réciproque
dérivabilité, 1027
recouvrement, 518
rectangle
produit de tribus, 1240
rectifiable, 1842
arc géométrique, 1856
récurrent
état, 2609
nul, 2609
point d'un système dynamique, 1229
positif, 2609
réduction
d'endomorphisme, 697
Jordan, 709
réduction de Frobenius, 707
réel, 270
réflexif, 2158
réflexion, 1627
dans $\mathbb{R}^2$, 1596
glissée, 1625
par rapport à un hyperplan, 1588
région
critique, 2595
de confiance exacte, 2586
de rejet, 2595
règle du produit nul, 209
régularité
d'une mesure, 1227
extérieure de la mesure de Lebesgue, 1249
intérieure de la mesure de Lebesgue, 1251
régulier
arc, 1854
point d'un arc, 1854
régulière
surface, 1757
rejet
région dans une prise de décision, 2594
relation
d'ordre, 117
relation anormale, 2420
relation binaire, 115
relation d'équivalence, 124
relation ternaire, 115
relation unaire, 115
relations
coefficient-racines, 489
de Chasles, 913, 1798
relativement compact, 523
relèvement, 1875
repère
affine, 929
cartésien
espace affine, 914
de Frenet, 1866
projectif, 1906
représentation, 396
de groupe fini
caractères de S_4, 1458
fidèle, 396
groupe diédral, 1681
irréductible, 1449, 1450
produit tensoriel, 1457
régulière gauche, 1454
virgule fixe, 2391
Représentation
virgule flottante normalisée, 2391
répulsif
point fixe, 1479
résidu
méthode itérative, 2452
résolvante, 2327
reste, 214, 341
d'un développement limité, 1149
restriction d'une distribution, 2279
résultant, 620
utilisation, 622, 1779
Riemann
fonction, 1389
risque
première espèce, 2595
quadratique, 2577
seconde espèce, 2595
rotation
en dimension 2, 1599
rotation d'angle θ, 1602
rotation-homothétie, 1923
rupture
corps, 465

schéma
consistant, 2473
schéma
consistant, 2473
schéma discret convergent, 2474
schéma numérique, 2473
Schrödinger, 2358
Schur (théorème), 1452
section
de graphe, 1033
propriété des, 1293
segment
dans $\mathbb{R}^p$, 737
dans un espace affine, 923
semi-défini positif, 683
semi-simple
endomorphisme, 647
semi-symétrique
polynôme, 487

seminorme, 591
seminorme quotient, 605
seminormes séparantes, 602
séparable, 1970
élément d'une extension, 483
espace topologique, 510
extension de corps, 483
polynôme non constant, 483
séparation stricte, 2146
sépare
les points, 1131
séquentiellement fermé, 528
série
dans un espace vectoriel normé, 807
de Fourier, 2212, 2219
utilisation, 2249
de puissance, 1342
donnant $(1-A)^{-1}$, 904
entière, 1342, 1422, 2219
Abel angulaire, 1775
processus de Markov, 2629
utilisation, 2517
fonctions, 1465, 2219
génératrice d'une suite, 1404
géométrique, 831
nombres, 1465
numérique, 1392, 1422
Riemann, 1395
Taylor, 1405
série convergente, 807
série de Laurent, 2245
série de puissance, 1361
série de Taylor, 1143
série divergente, 807
série entière
fonctions holomorphes, 2017
série harmonique, 831
sesquilinéaire, 666
signature
forme quadratique, 663
signature d'une permutation, 196
similitude, 1084
simple
extension de corps, 458
fonction, 1235
module, 246
singularité, 2032
singularité effaçable, 2032
singularité isolée, 2032
sinus, 1551
hyperbolique, 1397
sinus cardinal, 1565, 1831
solfège, 1687
solution
générale, 2361
particulière, 2361
somme
inférieure, 1816
partielle, 807
supérieure, 1816
somme directe, 396, 397
somme directe (de représentations), 1449
somme directe topologique, 545
somme partielles
Abel angulaire, 1775
sommet, 1888
Sophie Germain, 431
sous arc, 1841
sous-additivité
sur algèbre de parties, 1194
sous-anneau, 228
sous-corps premier, 429
sous-espace
affine engendré par une partie, 921
caractéristique, 694
sous-espace topologique, 499
sous-groupe
caractéristique, 190
distingué, 410
dans le groupe alterné, 417
engendré, 240
normal, 297, 409
sous-groupe distingué, 190
sous-martingale, 2633
sous-module, 245
sous-module engendré, 243
spectre
matrice hermitienne, 776
matrice symétrique réelle, 682
spectre d'un endomorphisme, 640
sphère, 531
de Riemann, 1920
stabilisateur, 301
stabilité
d'un point d'équilibre, 2344
Lyapunov, 2345
stable, 2398
schéma numérique, 2476
stathme
sur $\mathbb{Z}[i]$, 433
stathme euclidien, 212
stationnaire
chaine de Markov, 2626
statistique, 2576
statistiques
descriptives, 2569
strictement
convexe
sur $\mathbb{R}^n$, 1515
strictement convexe, 1506
structure
complexe, 1872
structure d'anneau canonique, 204
structure réelle, 399
Student, 2551, 2588
subdivision, 1811
associée à une fonction, 1812
d'un intervalle, 1841
subordonnée
norme, 790
subpotent, 127
suite, 309

arithmético-géométrique, 832
de Cauchy, 566
dans un corps, 258
de fonctions, 2062
théorème de Montel, 2200
de fonctions intégrables, 1471, 2049
de Jordan-Hölder, 297
définie par itération, 2411
équirépartie, 2209
critère de Weyl, 2209
exacte, 307
régularisante, 2221
suite de composition, 297
suite de variables aléatoires de Bernoulli, 2628
suites adjacentes, 733
supplémentaire, 355
support, 1813
d'une permutation, 190
distribution, 2273
famille d'éléments, 309
supremum, 282
d'une suite d'ensembles, 1191
supremum essentiel, 2063
sur-martingale, 2633
surface paramétrée, 1757
surjection, 115
surpotent, 127
Sylow
p-Sylow, 401
Sylvester (matrice), 619
symbole
de Legendre, 1702
symbole principal, 2373
symétrique
polynôme, 487
système
fondamental, 2324
orthonormé, 1970
trigonométrique, 1970, 2105
système trigonométrique, 2233

tangent
vecteur unitaire, 1866
tangent
vecteur unitaire, 1866
tangente, 1567, 1861
Tangente hyperbolique, 2685
tangente hyperbolique, 1399
taubérien, 1463
taux d'accroissement, 1507
Taylor
série entière, 1405
temps d'arrêt, 2635
temps de première atteinte, 2609
temps de retour, 2609
tenseur, 852
tenseur alterné, 858
tenseur symétrique, 858
terminée
martingale, 2640
test, 2594
bilatéral, 2595
unilatéral, 2595
tétraèdre régulier, 1010
théorème
accroissements finis, 900
dans $\mathbb{R}$, 1028
forme générale, 1087
Ascoli, 2053
Banach-Steinhaus, 839
avec seminormes, 2054
base incomplète, 353
Beppo-Levi, 1260
Bézout
polynômes, 446
utilisation, 620
Bolzano-Weierstrass, 536
Borel-Cantelli, 2481
Borel-Lebesgue, 728
Brouwer
dimension 2, 2020
Carathéodory, 926
Cauchy
groupe, 318
Cauchy-Arzela, 1748
Cauchy-Lipschitz, 1482
Cayley-Hamilton, 651, 1178
central limite, 2531
processus de Poisson, 2666
Chevalley-Warning, 1707
chinois, 438
anneau principal, 330
Cochran, 2574
Cochrane, 2574
convergence
dominée de Lebesgue, 1270
monotone, 1260
de Jordan, 2183
de représentation de Riesz, 1969
décomposition des noyaux
et exponentielle de matrice, 1415
des deux carrés, 435
version faible, 434
Dini, 1105
Dirichlet, 2206
forme faible, 1697
Doob, 2641
du rang, 362
élément primitif, 1709
élément primitif, 484, 1710
extension d'isométrie, 1542
Fejér, 2207
fonction implicite dans $\mathbb{R}^n$, 1494
fonction implicite dans Banach, 1493
Fubini
dans $\mathbb{R}^n$, 1328
espace mesuré, 1324
version compacte dans $\mathbb{R}^2$, 1788
Fubini-Tonelli, 1322
fuite des compacts, 2329
Gauss
polynômes, 446

Gauss-Wantzel, 1726
Glivenko-Cantelli, 2581
Hahn-Banach, 2144
Hardy-Littlewood, 1465
Heine, 969
incidence, 1900
inversion locale, 1491
utilisation, 1504, 1823
isomorphisme
second, 294
troisième, 295
isomorphisme de Banach, 2051
Kronecker, 622
Lagrange, 297
Lie-Kolchin, 981
Lotka-Volterra, 2349
Markov-Takutani, 1749
Montel, 2200
Pappus
affine, 1903
projectif, 1904
Pearson, 2598
petit de Fermat, 430
Picard, 1480
point fixe
Brouwer, 2020
projection
cas vectoriel, 1966
partie fermée convexe, 1964
prolongement de Hahn, 1219
prolongement de Riemann, 2033
Radon-Nikodym, 1285
complexe, 1292
Rolle, 1027
Rothstein-Trager, 1779
Runge, 2023
Schauder, 1747
Schur, 1452
spectral, 696
autoadjoint, 771
matrice symétrique, 682
matrices normales, 979
stabilité de Lyapunov, 2345
Stone-Weierstrass, 1131, 1133, 1134
Sylvester, 691
taubérien, 1463
taubérien faible, 1777
transfert, 2519
Tykhonov
dénombrable, 589
fini, 588
valeurs intermédiaires, 751
Von Neumann, 1499
Wedderburn, 1698
Weierstrass, 536
théorème de Baire, 590, 609
théorème de Brouwer, 1746
théorème de Cartan-Dieudonné, 1589
théorème de Tykhonov, 587
théorème des extrémums liés, 1504
théorème fondamental du calcul intégral, 1317
topologie, 493, 631
$*$-faible, 606, 2271
p-adique, 911
discrète, 495
engendrée par une famille, 495
forte, 793
grossière, 495
métrique, 526
sur $\mathscr{D}(\Omega)$, 2262
sur $\mathscr{D}(K)$, 2262
sur $C^\infty(\Omega)$, 2261
sur dual topologique, 606
usuelle sur $\mathbb{R}^n$, 632
topologie d'une norme, 766
topologie de la convergence simple, 508
topologie des seminormes, 598
topologie faible, 2184
topologie induite, 498
topologie initiale, 505
topologie produit, 507
topologie quotient, 509
tore, 289
torsion, 1867
d'un groupe, 309
totale, 1970
trace, 2308
dual de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, 672
matrice, 675
produit scalaire sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, 990
unicité pour la propriété de trace, 672
trace d'endomorphisme, 675
transcendant, 452
transformation
Fourier, 2219
gaussienne, 2434
transformée
de Cauchy, 2029
de Fourier, 2215, 2516
continuité, 2217
groupe abélien fini, 1447
Fourier
distribution tempérée, 2290
Laplace, 2517
transient
état, 2609
transition
probabilité, 2603
transitoire
état, 2609
transposé, 626
transposée, 669
transposition, 195
transvection, 1169
transvection (matrice), 382
transversale, 304
tribu, 1191
borélienne, 1206
de Baire, 1209
de Lebesgue, 1246
induite, 1193
produit, 1239

tribu de Lebesgue sur S^1, 1582
tribu engendrée, 1192
tribu engendrée par une application, 1192
trigonalisation
    et polynôme caractéristique, 978
    simultanée, 981
triplet
    pythagoricien, 337
triplet naturel, 145
type
    fini
        en algèbre, 486
        espace vectoriel, 352

unicité
    des mesures, 1201
unicité
    des mesures, 1201
uniformément continue, 590
uniformément convexe, 2135
uniformément intégrable, 2093
unipotent, 208
unitaire
    normale principale, 1866

valeur
    principale (distribution), 2288
    propre, 639
valeur
    principale (distribution), 2288
    propre, 639
valeur absolue, 143
    p-adique, 911
valeur principale, 2001
valeur propre
    d'une forme quadratique, 693
    forme quadratique, 692
valeur singulière, 698
valuation
    p-adique, 911
valuation d'un polynôme, 250
Vandermonde (déterminant), 389
variable
    de décision, 2595
variable aléatoire, 2482
    absolument continue, 2482
    Bernoulli
        marche aléatoire, 2616
        utilisation, 2565
    binomiale
        utilisation, 2643
    centrée, 2494
    de Bernoulli
        utilisation, 2643
    de Rademacher, 2549
variable aléatoire de Bernoulli, 2536
variance, 2495
    empirique, 2495, 2573
    empirique corrigée, 2573
    vecteur gaussien, 2545
variation bornée, 1330
variation des constantes, 2318, 2325
variation totale, 1330
variété, 1504, 1731
variété
    orientée, 1740
variété orientable, 1740
vecteur
    cyclique, 646
    gaussien, 2545
    propre, 639
    unitaire normal, 1866
    unitaire tangent, 1862
vecteur propre à gauche, 755
Vitali (ensemble), 1252
vitesse d'un chemin, 1841
vitesse de convergence de suites, 1391
voisinage, 494, 631
volume
    d'une région solide, 1821
    région bornée dans $\mathbb{R}^3$, 1819
volume dans $\mathbb{R}^3$, 1741
vraisemblance, 2579

Weiner
    constante, 2711
Weiner
    constante, 2711
wronskien, 2351

Liste des notations

Algèbre

$[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ degré d'une extension de corps, page 450

(S) idéal engendré par S, page 205

$\mathcal{L}(E, F)$ Ensemble des applications linéaires de E dans F, page 358

$\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier, page 429

$\mathbb{F}_{p^n}$ corps fini à p^n éléments, page 1700

$\mathbb{K}(A)$ corps contenant $\mathbb{K}$ et A, page 458

$\mathbb{K}[A]$ anneau contenant $\mathbb{K}$ et A, page 458

$\mathrm{Fun}(X, Y)$ les applications de X vers Y, page 204

$\mathrm{S}(E)$ Les opérateurs autoadjoints de E, page 667

∇f gradient de la fonction f, page 1063

$\mathtt{proj}_V$ projection de $V \times W$ sur V, page 561

$\mathrm{res}(P, Q)$ résultant des polynômes P et Q, page 620

$\mathrm{Span}(A)$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A, page 349

$\sqrt{A}$ racine d'une matrice hermitienne positive, page 1179

$\theta_\alpha(P)$ la multiplicité de α par rapport à P, page 344

$A[X]$ tous les polynômes de degré fini à coefficients dans A, page 252

$A_n[X]$ les polynômes à coefficients dans A et de degré inférieur ou égal à n, page 340

$C(P)$ matrice compagnon, page 705

$D \mid P$ D divise P, page 341

$df_a(u)$ Application de la différentielle de f sur le vecteur u, page 1052

$E_\lambda(T)$ Espace propre de T, page 640

$f^{(n)}$ La n-ième dérivée de la fonction f, page 1144

$mat_{\mathcal{B}}(q)$ matrice de q dans la base $\mathcal{B}$, page 1534

$o(x)$ fonction tendant rapidement vers zéro, page 1146

$U(A)$ ensemble des inversibles, page 208

U_n Le groupe des racines n^{e} de l'unité, page 1685

Ensembles de matrices

$S^+(n, \mathbb{R})$ matrices symétriques définies positives, page 683

$S^{++}(n, \mathbb{R})$ matrices symétriques strictement définies positives, page 683

$\mathrm{Aut}(E)$ automorphisme de l'espace vectoriel E, page 359

$\mathcal{L}^0(E,F)$ applications linéaires bornées (continues), page 888

$\mathrm{End}(E)$ les endomorphismes de E, page 359

$\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, page 627

$\Omega(E)$ formes quadratiques non dégénérées, page 1530

$Q(E)$ formes quadratiques réelles sur E, page 653

$Q^+(E)$ formes quadratiques positives, page 1531

$Q^{++}(E)$ formes quadratiques strictement définies positives, page 1531

$S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ matrices symétriques réelles de signature (p,q), page 1531

$\beta(s)$ Vecteur unitaire de la binormale, page 1866

$\gamma \sim g$ Équivalence d'arcs paramétrés, page 1855

$\nu(s)$ Vecteur unitaire de la normale principale, page 1866

$c(s)$ rayon de courbure, page 1866

$t(s)$ Torsion, page 1867

Géométrie

$P(E)$ l'espace projectif de E, page 1899

$(x_0 : \ldots : x_n)$ coordonnées homogènes dans un espace projectif, page 1916

$\mathcal{C}\mathrm{onv}(A)$ enveloppe convexe, page 925

$\mathrm{PGL}(E)$ groupe projectif, page 1905

B^o orthogonal dans le dual, page 395

$G[\mathbb{C}]$ combinaisons d'éléments de G à coefficients dans $\mathbb{C}$, page 1449

$P_1(\mathbb{C})$ sphère de Riemann, page 1920

Chaînes de Markov

$\pi(x)$ lié au temps de retour, page 2611

Probabilités et statistique

$\sigma(f)$ La tribu engendrée par une variable aléatoire ou une application, page 1192

$a \wedge b$ $\min(a,b)$, page 2639

K_X matrice de covariance d'un vecteur gaussien, page 2545

$m(\mathcal{A})$ Ensemble des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables, page 1207

Théorie des groupes

$(G/H)_g$ classes à gauche, page 302

$[a]_p$ ensemble des $a + kp$, page 322

$[G,G]$ groupe dérivé, page 293

$[g,h]$ commutateur dans un groupe, page 293

$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ Le groupe des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^n$., page 934

gr_G groupe engendré, page 240

$\hat{G}$ groupe des caractères de G, page 1445

σ_x réflexion par rapport à x, page 1627

A_n groupe alterné, page 415

$D(G)$ groupe dérivé, page 293

D_n groupe diédral, page 1617

G^{ab} groupe abélianisé de G, page 294

$N \times_\phi H$ produit semi-direct, page 308

S_n le groupe symétrique, page 190

$N \lhd G$ Le sous-groupe N est normal dans G, page 190

Topologie et théorie des ensembles

$\mathrm{Adh}(A)$ adhérence de A, page 497

$\complement A$ Le complémentaire de l'ensemble A, page 114

$\mathrm{Diam}(A)$ Diamètre de la partie A, page 969

∂A La frontière de l'ensemble A, page 634

$A \Delta B$ différence symétrique, page 123

A^c complémentaire de A, page 114

Analyse

$C^\infty(I, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$ fonctions à valeurs dans les distributions, page 2276

$(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$ complété de l'espace mesuré $(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$, page 1213

$\mathcal{L}(E, F)$ Les applications linéaires de E vers F, page 888

$\arg(z)$ La valeur principale de l'argument de $z \in \mathbb{C}$, page 2001

$\mathbb{D}_b$ l'ensemble des écritures décimales en base b, page 835

$\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, page 270

$\mathbb{R}^+$ les réels positifs ou nuls, page 273

exp exponentielle, page 1380

$\mathscr{H}'$ dual, page 1968

$\mathrm{Isom}(X)$ Le groupe des isométries de X, page 565

$\liminf a_n$ limite inférieure, page 734

$\limsup a_n$ limite supérieure, page 734

$\mathcal{L}^p$ espace de Lebesgue, sans les classes, page 2058

$\mu \ll \nu$ La mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure ν, page 1278

$\mu \perp \nu$ mesures mutuellement singulières, page 1278

μ^* La mesure extérieure associée à la mesure μ, page 1203

∂_z,$\partial_{\bar{z}}$ dérivées partielles d'une fonction complexe, page 1989

$\mathtt{proj}_K(x)$ projection orthogonale de x sur y, page 1966

$\sigma(\mathcal{D})$ tribu engendrée par $\mathcal{D}$, page 1192

$\mathscr{D}(\Omega)$ Les fonctions C^∞ à support compact sur Ω, page 2269

$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ espace des distributions tempérées, page 2288

$A^2(\Omega)$ espace de Bergman, page 2201

$A^\perp$ orthogonal d'une partie., page 1967

$C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$ Fonctions à valeurs dans les distributions., page 2358

$C_c(I)$ fonctions continues à support compact dans I, page 2093

$f \sim g$ fonctions ayant des limites équivalentes, page 1043

$H^1(\Omega)$ espace de Sobolev sur Ω, page 2304

$H^1(I)$ espace de Sobolev, page 2299

$H^m(M)$ espace de Sobolev, page 2305

$L^1_{loc}(I)$ fonctions intégrables sur les compacts de I, page 2299

L^p espace de Lebesgue avec les classes, page 2060

$M_i\varphi$ La fonction $x \mapsto x_i\varphi(x)$, page 2196

$S_n f$ somme partielle de série de Fourier, page 2238

Première partie

Le Frido

Chapitre 0

Introduction

0.1 Auteurs, contributeurs, sources et remerciements

SECooINTROremerciements

Les remerciements, dans chaque catégorie, sont mis dans l'ordre chronologique approximatif.

0.1.1 Ceux qui ont travaillé sur le Frido

SUBooINTROremerciementsFrido

(1) Carlotta Donadello pour l'ensemble du cours de CTU de géométrie analytique 2010-2011. Une grosse partie de « analyse réelle » vient de là.

(2) Les étudiants de géométrie analytique en CTU 2010-2011 ont détecté d'innombrables coquilles. Les étudiants du cours présentiel de géométrie analytique 2011-2012 ont signalé un certain nombre d'incorrections dans les exercices et les corrigés. Les agrégatifs de Besançon 2011-2012 pour leurs plans et leurs développements.

(3) Lilian Besson pour m'avoir signalé un paquet de fautes, et quelques points pas clairs en statistiques.

(4) Plouf qui m'a signalé une coquille dans le fil la-selection-scientifique-de-la-semaine-numero-106.

(5) Benjamin de Block pour des coquilles et une mise au point sur les conventions à propos de $\mathbb{R}^+$ et $(\mathbb{R}^+)^*$.

(6) Olivier Garet pour avoir répondu à plein de questions de probabilités.

(7) François Gannaz pour de la relecture et une version plus claire de la preuve (et de l'énoncé) de la proposition 19.10.

(8) Danarmk pour des réponses à des questions dans les commentaires (allongement pour éviter un Overfull hbox) `http://linuxfr.org/nodes/110155/comments/1675589`. Et aussi pour une discussion à propos de la topologie sur $\mathscr{D}(\Omega)$.

(9) Cédric Boutilier pour des réponses à des questions de probabilité statistique. `https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/issues/16`

(10) Remsirems pour des réponses à des questions d'analyse[1]

(11) Bertrand Desmons pour plusieurs patchs rendant plus clairs de nombreux passages sur les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

(12) Anthony Ollivier pour m'avoir fait remarquer qu'il n'est pas vrai que $A[X]$ est euclidien lorsque A est intègre (contre-exemple : $A = \mathbb{Z}$). Ça fait une faute de moins dans le Frido.

(13) ybailly pour avoir détecté un bon nombre de coquilles dans la partie sur les ensembles de nombres.

(14) Éric Guirbal pour le remplacement de `frenchb` par `french`.

(15) cdrcprds pour une réponse à une question d'algèbre, démonstration à l'appui à propos de pgcd. Également pour sa relecture sans pitié de la partie sur la cardinalité (en particulier $A \approx A \setminus B$) et pour avoir pointé l'utilité du théorème de comparabilité cardinale.

[1] `http://linuxfr.org/nodes/110155/comments/1675813`

(16) Antoine Bensalah pour avoir répondu à une question sur Lax-Milgram tout en même temps que pointé une erreur dans la démonstration et fourni l'exemple 25.62 sur l'optimalité de l'inégalité.

(17) Guillaume Deschamps pour ses remarques à propos du fait que le chapitre « constructions des ensembles » est très ardu.

(18) Guillaume Barriere pour sa relecture attentive jusqu'aux corps.

(19) Samy Clementz pour avoir découvert une faute dans la définition de mesure positive sur un espace mesurable.

(20) Sylvain Rousseau pour avoir clarifié une construction dans le théorème de Bower version C^∞.

(21) Maxmax pour des typos dans l'index thématique.

(22) Laurent Choulette pour une typo dans les propriétés du neutre d'un groupe.

(23) Pierre Lairez pour la démonstration du théorème d'inversion de limite et de dérivée 12.398 sans passer par les intégrales (et les lemmes correspondants à propos du module de continuité).

(24) Gregory Berhuy pour des réponses d'algèbres dans les catégories facile, moyen et difficile.

(25) Benoît Tran pour avoir signalé un paquet de typos dans la démonstration de l'ellipsoïde de John-Loewner et ses dépendances.

(26) Provatiscus pour avoir signalé un paquet de choses pas claires, et surtout pour avoir trouvé une faute dans la démonstration du fait qu'une fonction continue sur $\mathbb{Q}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Et pour cause : cet énoncé est faux. https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/issues/124

(27) William pour l'environnement `example` qui gère correctement le triangle.

(28) Colin Pitrat pour de nombreuses remarques, typos et relecture de théorèmes.

(29) Bruno Turgeon pour une très belle moisson de fautes de frappe (euphémisme pour dire « mon ignorance crasse de l'orthographe »).

(30) Sacha Dhénin pour une belle quantité de fautes de frappes et pour avoir soulevé quelques points pas clairs (par exemple la définition du sous-groupe engendré dans le cas de la partie vide).

(31) Patrice Goyer pour m'avoir signalé quelques fautes et pas mal de points pas clairs dans les polynômes et dans la théorie généraliste des ensembles. Et pour m'avoir fait remarquer (deux fois) que mon script de déploiement ne marchait pas.

(32) Alain Vigne pour une quantité (presque) indénombrable de fautes d'orthographe et de mauvaises tournures de phrase dans les espaces vectoriels, la construction de nombres, la théorie des groupes et les anneaux. Il m'a également pointé quelques fautes et points vraiment pas clairs dans des démonstrations dont la correction a permis de bien améliorer la qualité du texte.

(33) Quentin Guyot pour une quantité de typos proche du nombre de Graham dont beaucoup me semblent impossible à détecter sans une lecture attentive ; (au moins) huit entrées dans l'erratum lui sont dues (au sens où c'est lui qui les a trouvées, pas qu'il les a causées).

(34) Jean Abou Samra pour la démonstration de la connextité par arcs C^1.

(35) jperon pour le classement de l'index en comptant les é comme des é. Voir [5].

0.1.2 Aide directe, mais pas volontairement sur le Frido

SUBooINTROremerciementsDirecte

(1) Plein de monde pour diverses contributions à des énoncés d'exercices. Pierre Bieliavsky pour les énoncés d'analyse numérique (MAT1151 à Louvain la Neuve 2009-2010). Jonathan Di Cosmo pour certaines corrections de MAT1151. François Lemeux, exercices sur les normes de matrices et correction de coquilles. Martin Meyer et Mustapha Mokhtar-Kharroubi pour certains exercices du cours *Outils mathématiques* (surtout ceux des DS et examens).

(2) Nicolas Richard et Ivik Swan pour les parties des exercices et rappels de calcul différentiel et intégral (Université libre de Bruxelles, 2003-2004) qui leurs reviennent.

(3) Carlotta Donadello pour la partie géométrie analytique : topologie dans $\mathbb{R}^n$, courbes, intégrales, limites. (Université de Franche-Comté 2010-2012)

(4) Le forum usenet de math, en particulier pour la construction des corps fini dans le fil « Vérifier qu'un polynôme est primitif » initié le 20 décembre 2011.

(5) Mihai Bostan nous a donné ses notes manuscrites de son cours présentiel de géométrie analytique 2009-2010. (Presque) Toute la structure du cours de géométrie analytique lui est due (qui est maintenant fondue un peu partout dans les chapitres d'analyse).

0.1.3 Des gens qui ont fait un travail qui m'a bien servi

SUBooINTROremerciementsAutres

(1) Arnaud Girand pour avoir mis ses développements bien faits en ligne. Une bonne vingtaine de résultats un peu partout dans ces notes viennent de lui.

(2) Le site `http://www.les-mathematiques.net` m'a donné les preuves de nombreux résultats.

(3) Pierre Monmarché pour son document en ligne tout plein de développements, et des réponses à des questions.

(4) Tous les contributeurs du Wikipédia francophone (et aussi un peu l'anglophone) doivent être remerciés. J'en ai pompé des quantités astronomiques ; des articles utilisés sont cités à divers endroits du texte, mais ce n'est absolument pas exhaustif.

(5) Les intervenants du fil « Antisymétrisation, alterné, déterminant et caractéristique » sur `les-mathematiques.net` m'ont bien aidé pour la section sur les déterminants 8.1 (bien qu'ils ne le savent pas).

(6) Xavier Mauquoy pour l'énoncé et la preuve du théorème 3.32.

(7) David Revoy pour les dessins de Pepper&Carrot de la couverture.

J'ai souvent donné entre parenthèses à côté des mots « théorème », « lemme » ou « proposition » une ou plusieurs références vers les sources de la preuve que je donne. Ce sont parfois des liens vers la bibliographie ; parfois aussi des liens hypertextes vers des sites, des blogs, etc. Tous ces gens ont fait du bon boulot. Sans toute cette « communauté », l'internet serait mort[2].

0.2 Originalité

SECooINTROoriginalite

Ces notes ne sont pas originales par leur contenu : ce sont toutes des choses qu'on trouve facilement sur internet ; je crois que la bibliographie est éloquente à ce sujet. Ce cours se distingue des autres sur les points suivants.

La longueur J'ai décidé de ne pas me soucier de la taille du fichier. Il fera cinq mille pages s'il le faut, mais il restera en un bloc. Étant donné qu'il n'existe qu'une seule mathématique, il ne m'a pas semblé intéressant de produire une division artificielle entre l'analyse, la géométrie ou l'algèbre. Tous les résultats d'une branche peuvent (et sont) être utilisés dans toutes les autres branches.

Dans cette optique, je me suis évertué à ne créer que des références « vers le haut ». À moins d'oubli de ma part[3], il n'y a aucun endroit du texte qui dépend d'un lemme démontré plus bas. Le fait qu'un théorème B soit plus bas qu'un théorème A signifie qu'on peut démontrer A sans savoir B.

La licence Ce document est publié sous une licence libre. Elle vous donne explicitement le droit de copier, modifier et redistribuer.

Les mises à jour Ce document est régulièrement mis à jour. Des fautes d'orthographe sont corrigées (presque) chaque jour. Si vous me signalez une faute de mathématique, elle sera corrigée.

Transparence Je ne fais pas semblant que ces notes soient parfaites. Les points sur lesquels je ne suis pas sûr, les preuves que j'ai inventées moi-même sont clairement indiqués pour inciter le lecteur à redoubler de prudence. Une liste de questions à résoudre est incluse en la section 0.7. Voir 0.3 pour plus de détails.

[2] Cette dernière phrase doit être comprise comme un appel à ne pas utiliser Moodle et autres iCampus pour diffuser vos cours de math, ou en tout cas pas comme moyen exclusif.

[3] Par exemple pour les théorèmes pour lesquels je n'ai pas lu ni a fortiori écrit de preuves.

0.3 Les choses qui doivent vous faire tiquer

SECooWVHBooCaYoXP

Un cours de math doit toujours être lu attentivement, surtout si vous avez l'intention de resservir à un jury le fruit de vos lectures. Dans ce livre, trois éléments doivent vous faire redoubler de prudence.

La référence [1] D'abord les références à [1] indiquent qu'une bonne partie de ce qui suit est de l'invention personnelle de l'auteur. Cela ne veut évidemment pas dire que c'est moi qui ai découvert le résultat. Ça veut dire que je n'ai pas trouvé le résultat ou certaines parties de la preuve.

Les notes en bas de page Certaines notes en bas de page sont écrites dans une fonte spéciale[4]. Elles indiquent des points sur lesquels je doute ou des étapes de calculs que je ne parviens pas à reproduire en suivant mes sources. Lorsque vous voyez une telle note, redoublez de prudence, allez voir la source, et écrivez-moi si vous pouvez résoudre le problème.

Les environnements dédiés Et enfin certains problèmes sont indiqués plus longuement dans un environnement dédié en petits caractères comme ceci :

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 0.1
Les choses écrites comme ceci sont des questions ou des éléments sur lesquels j'ai un doute. Lisez-les attentivement. Ces notes mentionnent des points que personnellement je n'oserais pas affirmer plein d'aplomb à un jury d'agrégation.

0.4 Quelques choix qui peuvent provoquer des quiproquos

SECooINTROquiproquos

Comme tout cours de mathématique, ce cours fait des choix qui sont parfois discutables. Voici quelques points sur lesquels les choix faits ici ne sont peut-être pas ceux fait par tout le monde. Ce sont donc des points sur lesquels vous devez faire attention pour éviter les quiproquos lors par exemple d'un oral dans un concours.

(1) Nous utilisons la définition « épointée » de limite d'une fonction en un point. Elle diffère de celle donnée par le ministère de l'enseignement en France. Si votre but est de passer un concours d'enseignement en France, vous devriez lire 12.2 ; dans tous les autres cas, la définition prise ici est celle qu'il vous faut.

(2) Un compact est une partie d'un espace topologique pour lequel tout recouvrement par des ouverts admet un sous-recouvrement fini. Le fait d'être séparable n'est pas inclus dans la définition de compact. De nombreux textes français incluent la séparabilité dans la compacité.

(3) Le logarithme sur $\mathbb{C}$ est une application $\ln\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie partout sauf en zéro. Elle n'est donc pas continue sur la fameuse demi-droite. À ne pas confondre avec une *détermination* du logarithme qui est par définition continue et donc non définie sur la demi-droite.

Cela est un choix très discutable. La raison de donner à la notation « ln » cette signification est simplement de suivre l'usage de Sage. Pour Sage, $\ln(-1)$ existe et vaut $i\pi$.

Voir les remarques 26.42.

(4) Le mot « corps » n'implique pas la commutativité bien que tous les corps du Frido soient commutatifs, et nous n'utilisons pas la terminologie « anneau à division ». Voir la section -1.3 et la discussion 6.1.

0.5 Autres choix pas spécialement standards

SECooINTROchoixPasStandards

Nous listons ici quelques choix qui n'induisent pas de différences ou d'incompatibilité avec les autres cours, mais qui doivent être compris et justifiés.

(1) Nous n'utilisons pas les notations $o(x)$ ou autres $O(N^2)$. D'abord parce que je n'ai jamais très bien compris comment elles fonctionnent, et ensuite (surtout) parce que ces notations induisent en erreur. Ce sont des notations qui cachent, sous des notations a peu près intuitive, l'utilisation de théorèmes pas simples.

Écrire

$$f(x) = P(x) + o(x^2), \tag{0.1}$$

[4] Les notes comme celle-ci signifient qu'il y a certaines choses dont je ne suis pas sûr.

c'est un peu comme quand on écrit (horreur !)

$$F(x) = \int f(x)dx + C. \tag{0.2}$$

Où est le x à droite ? Quel est le statut de C ?

Même chose pour la notation $f(x) = P(x) + o(x^2)$. Le x de $o(x^2)$ est-il le x qu'on a à gauche ? Si $g(x) = Q(x) + o(x^2)$, est-ce le même o que celui de f ?

(2) Nous allons être plus calme avec la notation $A[X]$ pour les polynômes sur l'anneau A, et encore moins $A[X_1, \dots, X_n]$ pour les polynômes de n variables. Au lieu de cela nous utilisons $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}_n(A)$.

Est-ce que vous diriez que $A[X] = A[Y]$? Quelle est exactement la nature de X dans $P = X^2 + 1$ ou dans $P(X) = X^2 + 1$? Si $P \in A[X]$ vaut $P(X) = X^2$ et si $Q \in A[Y]$ vaut $Q(Y) = Y^2$, est-ce que vous oseriez écrire $P = Q$?

0.5.1 Mathématique intéressante

SUBooINTROMathInteressantes

Définition 0.2.
Une notion mathématique est ***intéressante*** *si elle permet de répondre à une question que l'on peut se poser sans connaitre la notion.*

EXEooINTROmathInteressantes1

Exemple 0.3.
Étant donné un segment dans le plan, quels sont les triangles rectangles dont ce segment est l'hypoténuse ?

Nous n'avons pas besoin de cercles pour poser cette question. Mais nous avons besoin de connaissances sur les cercles pour y répondre. Donc l'étude des cercles est intéressante. △

EXEooINTROmathInteressantes2

Exemple 0.4.
Comment fonctionne la gravitation ?

Cette question peut être posée sans connaitre de calcul tensoriel, d'équations différentielles ou d'intégrales. Et pourtant, tous ces concepts sont utiles pour y répondre. △

0.6 Sage est là pour vous aider

SECooINTROsage

Il existe de nombreux logiciels de mathématique. Notre préféré est Sage pour une raison très précise : Sage est (en simplifiant) un module pour Python. Donc quand on travaille en Sage, on dispose de tout Python. La syntaxe et la structure de Sage ne sont pas *ad hoc* pour faire des maths, et ce qu'on apprend en Sage peut être recyclé pour faire n'importe quoi : navigateur web, script de manipulation de texte, traitement d'image, réseau neuronaux, …

Sage est un logiciel disponible pour l'épreuve de modélisation de l'agrégation de mathématique ; il y a donc de bonnes chances que vous en ayez l'usage.

0.6.1 Lancez-vous dans Sage

SUBooINTROsageLancezVous

(1) Aller sur `http://www.sagemath.org`,

(2) créer un compte,

(3) créer des feuilles de calcul et s'amuser !!

Il y a beaucoup de documentation sur le site officiel[5], et nous vous conseillons particulièrement le livre [6].

Si vous comptez utiliser régulièrement ce logiciel, je vous recommande *chaudement* de l'installer sur votre ordinateur.

0.6.2 Exemples de ce que Sage peut faire pour vous

SUBooINTROsageExemples

Ce livre est émaillé de petits bouts de code en Sage montrant ses différentes fonctionnalités là où nous en avons besoin[6]. Voici une liste (non exhaustive) de ce que Sage peut faire pour vous.

(1) Calculer des limites de fonctions, exemples 43.1 et 43.2.

[5] http://www.sagemath.org
[6] Soit un vrai besoin comme tracer un graphique en 3D, soit de la paresse comme calculer une grosse dérivée.

(2) Tracer des graphes de fonctions, exemple 43.2.

(3) Tracer des courbes en trois dimensions, voir exemple 12.232. Notez que pour cela vous devez installer aussi le logiciel Jmol. Pour Ubuntu, c'est dans le paquet `icedtea6-plugin`.

(4) Calculer des dérivées partielles de fonctions à plusieurs variables, voir exemple 43.3.

(5) Résoudre des systèmes d'équations linéaires. Voir les exemples 43.4 et 43.5. Lire aussi la documentation.

(6) Tout savoir d'une forme quadratique, voir exemple 43.6.

(7) Calculer la matrice hessienne de fonctions de deux variables, déterminer les points critiques, déterminer le genre de la matrice hessienne aux points critiques et écrire les extrémums de la fonctions (sous réserve d'être capable de résoudre certaines équations), voir les exemples 43.7 et 43.8.

(8) Indiquer une infinité de solutions à une équation en utilisant des paramètres. L'exemple 43.9 montre ça avec une équation algébrique. Un exemple concernant des fonctions trigonométriques :

```
sage: solve(sin(x)/cos(x)==1,x,to_poly_solve=True)
[x == 1/4*pi + pi*z1]
sage: solve(sin(x)**2==cos(x)**2,x,to_poly_solve=True)
[sin(x) == cos(x), x == -1/4*pi + 2*pi*z86, x == 3/4*pi + 2*pi*z84]
```

Notez l'option `to_poly_solve=True` dans `solve`.

(9) Calculer des dérivées symboliquement, voir exemple 43.10.

(10) Calculer des approximations numériques comme dans l'exemple 43.11.

(11) Calculer dans un corps de polynômes modulo comme $\mathbb{F}_p[X]/P$ où P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. Voir l'exemple 19.64.

Sage peut en général faire tout ce que vous êtes capable de faire à l'entrée en master et probablement bien plus, à la notable exception des limites à deux variables.

REMooINTROsageAttention

Remarque 0.5.
Sage peut toutefois vous induire en erreur si vous n'y prenez pas garde parce qu'il sait des choses en mathématique que vous ne savez pas. Par conséquent il peut parfois vous donner des réponses (mathématiquement exactes) auxquelles vous ne vous attendez pas. Voir par exemple 15.165 pour le logarithme de nombres négatifs. Et aussi ceci :

```
1
2
3  SageMath version 7.3, Release Date: 2016-08-04
4  Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
5  Type "help()" for help.
6
7  sage: limit(1/x,x=0)
8  Infinity
9  sage: limit(1/x**2,x=0)
10 +Infinity
```

tex/sage/sageSnip017.sage

Sage fait une différence entre `Infinity` et `+Infinity` et donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \tag{0.3}$$

ainsi que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty. \tag{0.4}$$

Voir aussi la compactification en un point d'Alexandroff 7.185.

0.7 Comment contribuer et aider ?

SecooCKWWooBFgnea

0.7.1 Orthographe

Quelques règles.

(1) Le Frido utilise l'orthographe rectifiée. Le plus visible est « corolaire » au lieu de « corollaire » et quelques accents circonflexes qui sautent. Par exemple : « convergence presque sure » au lieu de « presque sûre ».

(2) Le Frido écrit « à priori » et non « a priori » parce que si au bout de seulement quelques décennies on a le droit d'écrire « des pizzas » ou comme si ce n'était pas un mot italien, au bout de 1000 ans il faut se calmer en prétendant que « à priori » est du latin.

(3) En terme de féminisation, on n'écrit pas « la.e lectrice.teur » mais on utilise

```
\randomGender{le lecteur}{la lectrice}
```

et une des deux formes sera choisie au hasard durant la compilation. Comme ça le Frido est neutre en moyenne. La macro est bien faite : elle choisira la même forme si on l'appelle deux fois dans le même paragraphe.

0.7.2 Des preuves qui manquent

SUBooINTROhowtoContribProofs

Vous trouverez un peu partout des énoncés sans preuves. Certaines sont surement très faciles, et d'autres probablement assez compliquées. N'hésitez pas à rédiger une preuve et me l'envoyer.

Vous pouvez m'envoyer vos preuves sous forme de « c'est bien fait dans tel cours », avec une URL.

Ne me dites juste pas « c'est bien fait dans tel *livre* ». Je ne travaille pas à l'université, et je n'ai pas accès à une bibliothèque universitaire ; je n'ai donc pas réellement accès à ces fameux « livres » dont tout le monde parle.

0.7.3 Du texte qui manque

SUBooINTROhowtoContribText

Vous remarquerez que de nombreuses pages du Frido sont des enchainements de théorèmes et démonstrations sans articulations. Autrement dit, il manque ce qu'à l'agrégation on dirait à l'oral quand on présente le plan. Si vous avez des idées de choses à ajouter ici ou là, faites-le moi savoir.

0.7.4 Des exemples qui manquent

SUBooINTROhowtoContribExamples

Si vous connaissez de bons exemples, faites-le moi savoir.

0.7.5 Des choses qui n'aident pas

Il y a toutefois un type de contribution qui n'est pas très utile : les modifications de style ou de notations. Ne me faites pas un commit changeant 50 fichiers pour modifier « strictement définie positive » en « définie positive » ou pour améliorer le d dans $\int f(x)dx$.

0.7.6 Trucs de programmation et de LaTeX

SUBooINTROhowtoContribProg

(1) Comment faire en sorte que les mots commençant par « é » soient avec les « e » dans l'index, et non avant les « a » ? Il me faudrait un mécanisme plus automatique que faire `machin@truc`.

Une fonction en Python qui prend en entrée le fichier bbl sous forme de string et qui ressort sous forme de string le fichier bbl modifié me convient.

(2) Écrire un script (en Python ou autre) qui prend en argument deux numéros ou noms de chapitres et qui retourne l'ensemble des lignes du premier qui contient des `ref` ou `eqref` dont le label correspondant est dans le second.

Attention : il faut tenir compte de `input` de façon récursive.

Bonus : calculer le hash sha1 de chaque ligne du résultat et ne pas l'afficher si il se trouve dans la liste du fichier `commons.py`.

0.8 Les politiques éditoriales

SECooINTROpolitics

Certaines parties de ce texte ne respectent pas les politiques éditoriales. Ce sont des erreurs de jeunesse, et j'en suis le premier triste.

0.8.1 Licence libre

SUBooINTROpoliticsFreelic

Je crois que c'est clair.

0.8.2 pdflatex

SUBooINTROpoliticsPdflatex

Tout est compilable avec pdfLaTeX. Pas de pstricks, de psfrag ou de ps<quoiquecesoit>.

0.8.3 utf8

SUBooINTROpoliticsUTF8

Je crois que c'est clair.

0.8.4 Notations

SUBooINTROpoliticsNotations

On essaie d'être cohérent dans les notations et les conventions. Pour la transformée de Fourier par exemple, je crois que la définition du produit scalaire dans L^2, des coefficients de Fourier, de la transformation et de la transformation inverse sont cohérents. Cela demande, lorsqu'on suit un livre qui ne suit pas les conventions utilisées ici, de convertir parfois massivement.

0.8.5 De la bibliographie

SUBooINTROpoliticsBiblio

On évite d'écrire en haut de chapitre « les références pour ce chapitre sont … ». Il est mieux d'écrire au niveau des théorèmes, entre parenthèses, les références.

Lorsqu'on écrit l'énoncé d'un théorème sans retranscrire la démonstration, il faut mettre une référence vers un document *en ligne* qui en contient la preuve. Il est vraiment fastidieux de chercher une preuve sur internet et de tomber sur des dizaines de documents qui donnent l'énoncé mais pas la preuve.

0.8.6 Faire des références à tout

SUBooINTROpoliticsInternalRefs

Lorsqu'un utilise le théorème des accroissements finis, il ne faut pas écrire « d'après le théorème des accroissements finis, blablabla ». Il faut écrire un `\ref` explicite vers le résultat. Cela alourdit un peu le texte, mais lorsqu'on joue avec un texte de plus de 2000 pages, il est parfois laborieux de trouver le résultat qu'on cherche (surtout si il existe plusieurs versions d'un résultat et que l'on veut faire référence à une version particulière).

0.8.7 Des listes de liens internes

SUBooINTROpoliticsInternalLinks

Le début du Frido contient une espèce d'index thématique. Il serait bon de l'étoffer.

0.8.8 Pas de références vers le futur

SUBooINTROpoliticsNoFutureRef

Dans le Frido, *aucune* preuve ne peut faire une référence vers un résultat prouvé plus bas. On n'utilise pas le théorème 10 dans la démonstration du théorème 7. Cela est une contrainte forte sur le découpage en chapitres et sur l'ordre de présentation des matières.

Il est bien entendu accepté et même encouragé de mettre des notes du type « Nous verrons plus loin un théorème qui … ». Tant que ce théorème n'est pas *utilisé*, ça va.

Chapitre 1

Construction des ensembles de nombres

1.1 Les bases

SECooIntroBases

1.1.1 Axiomatique et grammaire

SUBooNoroodeFridoNombres

1.1.
Le Frido n'est pas supposé être lu dans l'ordre de la première à la dernière page ; les matières y sont présentées dans l'ordre logique mathématique, et non dans l'ordre logique pédagogique, et encore moins par ordre de difficulté croissante.

En mathématique, si on lit une démonstration et que l'on veut vraiment tout justifier, et justifier toutes les étapes de tous les résultats utilisés, on tombe forcément un jour sur les axiomes.

Or l'axiomatique est un sujet particulièrement difficile. Nous n'allons donc pas « tout justifier » jusque là. Nous n'allons même pas préciser quel système d'axiome est utilisé. En particulier nous n'allons pas donner l'axiomatique des ensembles : nous allons supposer connus les ensembles et leurs principales propriétés.

NorooFridoGrammaire

1.2.
Nous n'allons pas non plus formaliser la grammaire des expressions mathématiques[1]. Nous supposons que vous êtes capables de lire des expressions comme

$$x \in \mathbb{N} \Rightarrow \{a \geqslant x\} \text{ est infini.} \tag{1.1}$$

1.1.2 Les théorèmes encapsulants

SUBooThmEncapsulants

1.3.
Je propose d'introduire le concept de « théorème encapsulant ». Un théorème est encapsulant lorsque les techniques et concepts utiles à sa démonstration ne sont pas utiles pour énoncer et utiliser le théorème.

Sauter la démonstration d'un théorème encapsulant permet donc de sauter des parties entières de la mathématique.

Un exemple typique d'un théorème qui n'est pas encapsulant est le théorème de Rolle 12.213. Les ingrédients de la démonstration (topologie, dérivée) sont présents dans l'énoncé[2]. D'habitude, quand on utilise le théorème de Rolle on est dans un contexte où on est en train de parler de dérivée, de topologie, et de théorème des valeurs intermédiaires.

Notez que le théorème de Stokes (théorème 24.8, plus généralement théorème 20.71) n'est pas non plus encapsulant parce que pour énoncer le théorème, il faut quand même définir les intégrales, les différentielles, les bords, etc. La démonstration de Stokes ne fait pas intervenir de concepts réellement nouveaux par rapport à ce qu'il faut savoir pour énoncer Stokes.

Le Frido va accepter sans démonstrations deux théorèmes encapsulants qui évitent de devoir parler de pans entiers de la théorie des ensembles.

(1) Le lemme de Zorn 1.37. Il cachera toute la complexité de l'axiome du choix et la moitié de ce qu'apporte cet axiome par rapport à ZF.

[1] J'utilise ici des mots que je ne comprends pas, juste pour me donner l'air malin.

[2] C'est-à-dire que pour énoncer le théorème de Rolle, il faut déjà connaître pratiquement toutes les notions nécessaires pour le démontrer.

(2) L'existence d'un ensemble des naturels (théorème 1.118). Même si nous proposerons un moyen d'en construire un, cela cachera toute la complexité d'axiomatisation, des différentes définitions d'ensembles finis, d'existence de maximum, etc. Voir [7, 8].

Notez que les énoncés de ces théorèmes ne demandent pas grand chose : relation d'ordre sur un ensemble pour le lemme de Zorn ; ensemble et application injective pour les naturels.

Je me demande d'ailleurs si il existe beaucoup d'autres théorèmes encapsulants.

1.2 Ensembles, relations, fonctions

NORMSEGFridoEnsMathsFaciles

1.4.
Tout cela pour dire que le Frido ne traitera que de la partie facile de la mathématique.

1.2.1 Opérations ensemblistes

SUBooOperationsEnsemblistes2NormesEnsemblistes2

1.5.
Nous supposons avoir une théorie des ensembles qui tient la route. En particulier nous supposons que les notions suivantes sont connues :

(1) ensemble vide,

(2) ensemble, appartenance, intersection, union,

(3) produit cartésien de plusieurs ensembles[3].

Ce sont toutes des choses dont la construction à partir des axiomes n'est en aucun cas évidente. En particulier, des « définitions » comme « l'intersection de deux ensembles est l'ensemble contenant exactement les éléments communs aux deux ensembles » ne sont pas correctes parce qu'elles passent à côté de l'existence et de l'unicité d'un tel ensemble.

DEFooJLBVooMyCQMO

Définition 1.6.
Soit E, un ensemble et A, une partie de E (c'est-à-dire un sous-ensemble de E). Le ***complémentaire*** *de l'ensemble A, dans E, noté $\complement A$ est l'ensemble des éléments de E qui ne font pas partie de A :*

$$\complement A = E \setminus A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}. \tag{1.2}$$

Nous allons aussi régulièrement noter le complémentaire de A par A^c.

DefEnsemblesDisjoints

Définition 1.7.
Deux ensembles A et B sont ***disjoints*** *si leur intersection est vide[4] ; en d'autres termes, si il n'existe aucun élément commun à A et B.*

DefPartitionEnsembles

Définition 1.8.
Soit E un ensemble, et E_α des parties de E indexées sur un ensemble A. Les E_α forment une ***partition*** *si :*

- *pour tous $\alpha, \beta \in A$, on a soit $E_\alpha = E_\beta$, soit $E_\alpha \cap E_\beta = \varnothing$;*
- *la réunion des E_α est E.*

On dit aussi que E est partitionné par les E_α.

NorooDepartTheoEns

1.9.
Remarquez par exemple que la première phrase de l'article de Wikipédia sur la construction de $\mathbb{N}$ est « Partant de la théorie des ensembles, on identifie 0 à l'ensemble vide, puis on construit … ». Il est bien précisé que l'on part d'une théorie des ensembles.

La suite de ce chapitre sera essentiellement sans exemple parce qu'avant d'avoir construit les ensembles de nombres, je ne sais pas très bien quels exemples on peut donner de quoi que ce soit.

[3] Nous en proposons une définition dans un cadre général – définition 1.22 –, dont les fondements devraient être analysés de très près.

[4] Remarquez que les mots « intersection » et « vide » sont de ceux que nous avons décidé de ne pas définir.

1.2.2 Des relations aux bijections

DEFooRFctBijections

Définition 1.10 ([9]).
*Une **relation binaire** d'un ensemble E vers un ensemble F est une partie de $E \times F$.*

Si G est une relation binaire entre E et F, et si $(x;y) \in G$, nous notons $x\mathcal{R}_G y$ et nous disons que x est en relation avec *y.*

*On définit aussi une **relation unaire** d'un ensemble E comme une partie de E, et une **relation ternaire** de trois ensembles E_1, E_2 et E_3 comme une partie de $E_1 \times E_2 \times E_3$.*

DefooApplicFct

Définition 1.11.
*Soit G une relation binaire entre deux ensembles E et F. Si, pour tout $x \in E$, et tous y, $y' \in F$, les relations $x\mathcal{R}_G y$ et $x\mathcal{R}_G y'$ entraînent $y = y'$, alors on peut associer à chaque $x \in E$ apparaissant comme première composante dans G, l'élément unique $y \in F$ qui est en relation avec x dans G. Cette association définit une **fonction** de E dans F.*

Le plus souvent, les fonctions entre deux ensembles sont désignées par f, ou selon le contexte, par une autre lettre, souvent minuscule. On notera presque toujours les ensembles concernés par la fonction, et on adopte alors la notation $f : E \to F$.

*Pour marquer l'association, à $x \in E$, du $y \in F$ correspondant à travers f, on note cet élément $f(x)$: ainsi, $f(x) \in F$, et il est appelé **image de x par f**.*

L'ensemble des $x \in E$ pour lesquels il existe $y \in F$ tel que $x\mathcal{R}_G y$ est noté D_f, ou bien Domaine f *; on l'appelle **domaine de définition de f** , ou encore **ensemble de définition de f**. Lorsque* Domaine$(f) = E$*, on dit que f est une **application**.*

RemLienFctRelation

Remarque 1.12 (Lien entre fonction et relation)**.**
Si $f : E \to F$ est une fonction de relation sous-jacente G, alors :

- Domaine $f = \{x \in E$ tel que $\exists y \in F : (x, y) \in G\}$;
- $\Im f = \{y \in F$ tel que $\exists x \in E : (x, y) \in G\}$;
- Graph $f = G$.

REMooFonctionDomaineEntier

Remarque 1.13.
Dans le Frido, on prend comme convention que, quand on écrit $f : E \to F$, alors Domaine $f = E$. C'est un choix qui n'est peut-être pas standard, mais qui évite des complications sur ce qu'est réellement le domaine de définition. En particulier, dans le Frido, on ne verra que très rarement f « tout seul ».

En revanche, on ne sait rien sur $\Im f$ a priori. Il ne faut pas déduire de la notation que l'ensemble image $\Im f$ serait F tout entier.

NORooLMBYooYjUoju

1.14.
L'**axiome du choix** que nous acceptons peut s'énoncer comme ceci[10] : Étant donné un ensemble X d'ensembles non vides, il existe une fonction définie sur X, appelée fonction de choix, qui à chacun d'entre eux associe un de ses éléments.

DefooInjSurjBij

Définition 1.15.
Soient deux ensembles E et F. Une fonction $f : E \to F$ est

*(1) **surjective** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$;*

*(2) **injective** si pour tout $y \in F$, il existe au plus un $x \in E$ tel que $y = f(x)$;*

*(3) **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.*

NORMooMethodePreuveInj

1.16.
La méthode la plus courante pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est injective est de considérer $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$, et de prouver à partir de là que $x = y$. Ou alors de supposer $x \neq y$ et d'obtenir une contradiction.

La technique de la contradiction est évidemment la plus courante lorsque l'égalité $f(x) = g(x)$ implique une équation faisant intervenir $1/(x - y)$.

La surjection et l'injection sont des propriétés bien différentes qu'il convient de prouver séparément. De plus une même « formule » peut définir une application injective, surjective, bijective ou non selon les ensembles sur lesquels nous la considérons.

DEFcomposeeFonctions

Définition 1.17.
Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions définies respectivement sur les ensembles X et Y. On

définit alors la ***composée*** *de f avec g comme la fonction $g \circ f$ de l'ensemble X vers l'ensemble Z telle que $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.*

On remarquera que le domaine de définition de $g \circ f$ est l'ensemble $\{x \in \text{Domaine}\, f$ tel que $f(x) \in \text{Domaine}\, g\}$, sous-ensemble de $\text{Domaine}\, f$.

LEMooWBYSooFqyqQP

Lemme 1.18.
Soient deux ensembles A et B ainsi qu'une application $f\colon A \to B$. Nous supposons qu'il existe une application $g\colon B \to A$ telle que $f \circ g = \text{Id}_B$ et $g \circ f = \text{Id}_A$.

Alors f est une bijection.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Injection** Supposons que $f(a) = f(b)$. Alors en appliquant g des deux côtés, et en utilisant le fait que $g \circ f = \text{Id}_A$, nous trouvons $a = b$.

(2) **Surjection** Soit $x \in B$. Posons $a = g(x)$. Alors, en utilisant le fait que $f \circ g = \text{Id}_B$ nous avons

$$f(a) = (f \circ g)(x) = x. \tag{1.3}$$

Donc x est dans l'image de f et f est surjective.

□

DEFooTRGYooRxORpY

Définition 1.19.
*Soit $f\colon A \to B$ une bijection. L'****application réciproque*** *de f est la fonction*

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon B &\to A \\ y &\mapsto \text{le } x \in A \text{ tel que } f(x) = y. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Plus généralement si $f\colon X \to Y$ est une fonction quelconque et si $S \subset Y$, nous notons

$$f^{-1}(S) = \{x \in \text{Domaine}\, f \text{ tel que } f(x) \in S\}, \tag{1.5}$$

et dans le cas où S est réduit à un unique élément y, nous notons $f^{-1}(y)$ au lieu de $f^{-1}\big(\{y\}\big)$. Si de plus $f^{-1}(S)$ est un singleton x, nous noterons $f^{-1}(S) = x$ et non $f^{-1}(S) = \{x\}$.

REMooDifferenceElementSingleton

Remarque 1.20.
Les plus acharnées parmi les lectrices se rendront compte de la différence ontologique fondamentale entre x et $\{x\}$, et donc des abus de notations explicitées dans la définition précédente.

PROPooBXVSooZXmwKC

Proposition 1.21 ([1])**.**
Soit $f\colon A \to B$ une fonction. Si X et Y sont des parties de A, alors :

ITEMooFctInclusionInter

(1) on a l'inclusion $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$;

ITEMooFctInjEgaliteInter

(2) si de plus, f est injective[5]*, alors $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$;*

ITEMooFctInjDisjonction

(3) si enfin, f est injective et X et Y sont disjoints, alors $f(X) \cap f(Y) = \varnothing$ (autrement dit : $f(X)$ et $f(Y)$ sont disjoints aussi).

Démonstration. Prouvons d'abord $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$, ensuite $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$ dans le cas où f est une injection, et enfin le cas d'ensembles disjoints.

(1) **Première inclusion** Si $\xi \in f(X \cap Y)$, alors il existe $s \in X \cap Y$ tel que $\xi = f(s)$. Étant donné que $s \in X$, nous avons $\xi = f(s) \in f(X)$. Et comme $s \in Y$ nous avons aussi $\xi = f(s) \in f(Y)$. Au final $\xi = f(x) \in f(X) \cap f(Y)$.

(2) **Seconde inclusion** Si $\xi \in f(X) \cap f(Y)$, il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $\xi = f(x)$ et $\xi = f(y)$. Par injectivité de f, nous avons $x = y$ et donc $\xi \in f(X \cap Y)$.

(3) **Ensembles disjoints** Si f est injective, et si $X \cap Y = \varnothing$, alors il n'y a aucun élément dans $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

□

DEFooTYIMooZUsYJw

Définition 1.22 (Produit cartésien infini[11])**.**
Soit un ensemble I ainsi qu'une collection d'ensembles $\{A_i\}_{i \in I}$. Nous notons $\prod_{i \in I} A_i$ l'ensemble des applications $f\colon I \to \bigcup A_i$ telles que $f(i) \in A_i$.

[5] Définition 1.15.

1.2.3 Ensemble ordonné

SDBooEnsembleOrdonne

Définition 1.23.
*Une **relation d'ordre** sur un ensemble E est une relation binaire*[6] *(notée $\leqslant$) sur E telle que pour tous $x, y, z \in E$,*

(1) Réflexivité : $x \leqslant x$

ITEMooQTXOooTZXEnu

(2) Antisymétrie : $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ implique $x = y$

(3) Transitivité : $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ implique $x \leqslant z$.

Pour suivre les notations de la définition 1.10, la partie G de $E \times E$ est une relation d'ordre lorsque

(1) $(x, x) \in G$ pour tout $x \in G$,

(2) Si $(x, y) \in G$ et $(y, x) \in G$, alors $x = y$,

(3) Si $(x, y) \in G$ et $(y, z) \in G$, alors $(x, z) \in G$.

Dans la suite nous n'allons plus écrire de relations binaires en détaillant l'ensemble sous-jacent.

*Lorsque nous avons un ensemble E et une relation d'ordre $\leqslant$ sur E, nous disons que le couple $(E, \leqslant)$ est un **ensemble ordonné**.*

DEFooVGYQooUhUZGr

Définition 1.24.
*Un ensemble ordonné est **totalement ordonné** si deux éléments quelconques si deux éléments sont toujours comparables : si $x, y \in E$ alors nous avons soit $x \leqslant y$ soit $y \leqslant x$. Si les éléments ne sont pas tous comparables, nous disons que l'ordre est **partiel**.*

ExeooOrdreInclusion

Exemple 1.25.
Si E est un ensemble, l'inclusion est un ordre sur l'ensemble des parties de E, mais pas un ordre total parce que si X, Y sont des parties de E, alors nous n'avons pas automatiquement soit $X \subset Y$ soit $Y \subset X$. △

NORMooIntroIntervalleOrdonne

1.26.
On convient assez naturellement de la notation suivante : écrire $x \leqslant y \leqslant z$ revient à écrire $(x \leqslant y)$ et $(y \leqslant z)$. Cela s'étend à un nombre (fini) quelconque d'éléments, et le lecteur saura interpréter correctement, nous l'espérons, des inégalités du genre $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ dans les prochains développements.

La notion d'ordre permet d'introduire la notion d'intervalle, qui s'écrit assez simplement une fois la convention prise.

DefEYAooMYYTz

Définition 1.27.
*Soit un ensemble totalement ordonné $(E, \leqslant)$. Un **intervalle** de E est une partie I telle que tout élément compris entre deux éléments de I soit dans I. En language mathématique, la partie I de E est un intervalle si*

$$\forall a, b \in I,\ \forall x \in E, (a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow x \in I).$$

DEFooDNWRooTiMAzK

Définition 1.28.
*Soit un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ et une partie A de E. Un élément $p \in E$ est un **minorant** de A si pour tout $a \in A$, les éléments p et a sont comparables et $p \leqslant a$. Si de plus, $p \in A$, on dira que p est un **minimum** de A.*

*Les notions de **maximum** et de **majorant** sont définies de façon analogue (en remplaçant $p \leqslant a$ par $a \leqslant p$).*

DEFooBZNRooYRPGme

Définition 1.29 ([12])**.**
*Soit un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$. Un élément $M \in E$ est un **élément maximal** de E si pour tout $x \in E$, dès que $M \leqslant x$, on a $x = M$.*

*De même, nous disons que $m \in E$ est un **élément minimal** de E si pour tout $x \in E$, nous avons $x \leqslant m \Rightarrow x = m$.*

PROPooUniciteMinMax

Proposition 1.30.
Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et A un sous-ensemble de E admettant un minimum. Alors ce minimum est unique.

[6] Définition 1.10.

Démonstration. Soit m le premier élément minimum de A. Quel que soit $x \in A$, on sait que x et m sont comparables, et que $m \leqslant x$.

Supposons que $p \in A$ soit un (autre) élément minimum de A. Alors, par ce fait, on a $p \leqslant m$; mais par définition de m, on a aussi $m \leqslant p$. Ainsi, par antisymétrie[7], on a $m = p$. □

NORMooPlusPetitElement

1.31.
On peut ainsi parler, lorsqu'une partie possède un minimum, de « plus petit élément » de la partie. Attention : il n'en existe pas toujours. D'innombrables exemples pourront être vus lorsque nous aurons construit $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Typiquement les intervalles du type $]a, b[$.

NORMooVHIBooJAOsou

1.32.
Notons qu'il n'est pas demandé à un élément maximal[8] d'être comparable à tous les autres éléments. Si $(E, \leqslant)$ n'est pas totalement ordonné, un élément maximal peut ne majorer qu'une partie de E.

Un élément maximal est plus grand que tous les éléments avec lesquels il est comparable.

Dans un ensemble totalement ordonné, les notions d'élément maximal de E et de maximum[9] de E coïncident ; dans le cas d'un ordre partiel, ces notions sont distinctes.

Il se peut que nous parlions d'un « maximum » ou « élément maximum » au lieu d'un « élément maximal », en particulier en utilisant le lemme de Zorn. Si vous voyez de telles choses, n'hésitez pas à me le dire.

Par exemple, quand on applique le lemme de Zorn pour démontrer l'existence d'une base dans un espace vectoriel de dimension infinie, on obtient une famille libre qui est maximale, c'est-à-dire qui est un élément maximal dans l'ensemble, ordonné par inclusion, des familles libres de l'espace vectoriel. C'est un élément maximal, et non un maximum, car l'ensemble des familles libres d'un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ n'admet pas de maximum (pour l'inclusion).

Voir 4.26 et 4.28.

ExeooMaximalPasMajorant

Exemple 1.33 ([1])**.**
Soit un ensemble E ainsi que $a \neq b$ dans E. Nous considérons les parties

$$A = \{P \subset E \text{ tel que } a \in P, b \notin P\} \tag{1.6a}$$
$$B = \{P \subset E \text{ tel que } b \in P, a \notin P\}. \tag{1.6b}$$

Et enfin nous considérons l'ensemble $F = A \cup B$, c'est-à-dire l'ensemble des parties de E qui contiennent soit a soit b mais pas les deux. Nous ordonnons partiellement F par l'inclusion.

Dans $(F, \subset)$, l'élément $E \setminus \{b\}$ est un élément maximal, mais pas un majorant. △

DEFooLJEAooBLGsiS

Définition 1.34.
Un ensemble ordonné est ***bien ordonné*** *si toute partie non vide possède un plus petit élément.*

Autrement dit, l'ensemble ordonné E est bien ordonné si pour toute partie non vide A, il existe $x \in A$ tel que $x \leqslant y$ pour tout $y \in A$.

NorooOrdreBienOrdonne

1.35.
Quelques remarques.

(1) L'inégalité stricte (définie par : $x < y$ si et seulement si $x \leqslant y$ et $x \neq y$) n'est pas une relation d'ordre parce qu'elle n'est pas réflexive.

(2) Nous verrons dans la remarque 1.557 que l'intervalle $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas bien ordonné.

(3) Un ensemble bien ordonné est forcément totalement ordonné parce que toutes les parties de la forme $\{x, y\}$ possèdent un minimum. Par conséquent x et y doivent être comparables : $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

1.2.4 Lemme de Zorn

SUBooDefGHEZorn

Définition 1.36 (Ensemble inductif[13])**.**
Un ensemble est ***inductif*** *si toute partie totalement ordonnée admet un majorant.*

LemUEGjJBc

Lemme 1.37 (Lemme de Zorn[14])**.**
Tout ensemble ordonné inductif non vide admet au moins un élément maximal.

PROPooFOETooWYLOeq

Proposition 1.38 ([15])**.**
Soient un ensemble inductif $(E, \leqslant)$ et $b \in E$. Il existe un élément maximal[10] *$m \in E$ tel que $b \leqslant m$.*

[7] Point (2) de la définition 1.23.
[8] Définition 1.29
[9] Définition 1.28.
[10] Définition 1.29.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Un ensemble** Nous considérons

$$E_b = \{x \in E \text{ tel que } b \leqslant x\}. \tag{1.7}$$

(2) E_b **est inductif** Soit une partie non vide totalement ordonnée $A \subset E_b$; démontrons que A admet un majorant dans E_b. Puisque $E_b \subset E$, par transitivité de l'inclusion, $A \subset E$ et puisque E est inductif, la partie A admet un majorant $m' \in E$: justifions maintenant que $m' \in E_b$.

Comme A est non vide, nous pouvons considérer $x \in A$. Nous avons $b \leqslant x$ parce que $x \in A \subset E_b$. Mais comme m' est un majorant de A, $x \leqslant m'$. Bref, nous avons les inégalités

$$b \leqslant x \leqslant m'. \tag{1.8}$$

Par transitivité de l'ordre, $b \leqslant m'$ et donc $m' \in E_b$.

Nous avons ainsi prouvé que m' est un majorant de A contenu dans E_b. Donc E_b est inductif.

(3) **Zorn** Puisque $(E_b, \leqslant)$ est inductif, le lemme de Zorn 1.37 nous indique que E_b a un élément maximal. Nous le notons m.

(4) m **est maximal dans** E Supposons avoir un élément $a \in E$ tel que $m \leqslant a$. Comme $m \in E_b$, nous avons les inégalités

$$b \leqslant m \leqslant a, \tag{1.9}$$

et donc $a \in E_b$ par transitivité. Mais m est maximal dans E_b, donc $a \leqslant m$, d'où $a = m$ par antisymétrie.

□

PROPooRHNFooHFUOEx

Proposition 1.39 ([1]).
Soit A et Bă deux ensembles non vides, et une application surjective $f\colon A \to B$. Il existe une application $\alpha\colon B \to A$ telle que

$$\alpha(b) \in f^{-1}(b) \tag{1.10}$$

pour tout $b \in B$.

Démonstration. Nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(X, \alpha) \text{ tel que } X \subset B, \alpha\colon X \to A \text{ tel que } \alpha(x) \in f^{-1}(x) \forall x \in X\} \tag{1.11}$$

que nous ordonnons par inclusion pour X et par extension pour α.

D'abord, $\mathcal{A}$ est non vide : considérons un élément $a \in A$ et posons $b = f(a)$; en posant $X = \{b\}$ et $\alpha\colon \{b\} \to A$ donné par $\alpha(b) = a$, le couple (X, α) est bien un élément de $\mathcal{A}$.

Ensuite, $\mathcal{A}$ est inductif. En effet, soit une partie $\mathcal{F} = \{(X_i, \alpha_i)\}_{i \in I}$ totalement ordonnée de $\mathcal{A}$. Nous posons $X = \bigcup_i X_i$ et $\alpha\colon X \to A$ par $\alpha(b) = \alpha_i(b)$ dès que $b \in X_i$. L'élément (X, α) est dans $\mathcal{A}$ et majore $\mathcal{F}$.

Nous pouvons donc utiliser le lemme de Zorn[11], et affirmer que l'ensemble $\mathcal{A}$ contient un maximum (Y, β). Montrons alors par l'absurde que $Y = B$.

Supposons que $Y \neq B$. Alors il existe $b \in B \setminus Y$. Comme $f\colon A \to B$ est surjective, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$[12]. Nous posons alors $Y' = Y \cup \{b\}$ et

$$\beta'(x) = \begin{cases} \beta(x) & \text{si } x \in B \\ a & \text{si } x = b. \end{cases} \tag{1.12}$$

Le couple (Y', β') majore (Y, β) et nous avons une contradiction avec la maximalité de Y. □

1.2.5 Quelques relations ensemblistes

LEMooBoRAMooDQfGtM

Lemme 1.40 ([1]).
Si $B \subset A$, alors $X \setminus A \subset X \setminus B$.

Démonstration. Si $x \in X \setminus A$, alors x n'est pas dans A. Si x était dans B, nous aurions $x \in B \subset A$. Donc x n'est pas dans B et donc $x \in X \setminus B$. □

[11] Lemme 1.37.

[12] Toute la subtilité de l'axiome du choix. Si on a un élément b, on a le droit de considérer un élément $a \in f^{-1}(b)$, mais on n'a pas le droit de considérer un tel élément de A pour tout élément de B.

LEMooHRKAooRskzQL

Lemme 1.41 (Quelques relations ensemblistes)**.**
Soient $A, B, C \subset X$. Nous avons

ITEMooIXUAooXDPtWj

(1) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

ITEMooQCGUooKnWfBo

(2) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

ITEMooXWKCooUASxlh

(3) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

ITEMooRXJOooUYPaCp

(4) $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B$.

ITEMooYYWAooLnADjR

(5) Si I est un ensemble et que $A_i \subset X$ pour tout $i \in I$ alors

$$X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i). \tag{1.13}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Deux inclusions.

(1a) **Dans un sens** Si $x \in X \setminus (A \cap B)$. Il y a deux possibilités : soit $x \in A$, soit $x \notin A$. Si $x \in A$, alors $x \notin B$, sinon nous aurions $x \in A \cap B$. Donc $x \in X \setminus B$. Le cas $x \notin A$ est similaire.

(1b) **Dans l'autre sens** Soit $x \in X \setminus A$. Vu que $A \cap B \subset A$, le lemme 1.40 dit que $x \in X \setminus (A \cap B)$.

(2) **Pour (2)** Deux inclusions.

(2a) **Premier sens** Soit $x \in X \setminus (A \cup B)$. Si x était dans A, il serait dans $A \cup B$. Or il n'est pas dans $A \cup B$ donc x n'est pas dans A. On montre de même que $x \in X \setminus B$.

(2b) **Dans l'autre sens** Soit $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$. Supposons que $x \in A \cup B$, et disons $x \in A$ pour fixer les idées. Nous savons que $x \in X \setminus A$; contradiction. Donc $x \notin A$. Nous obtenons la même contradiction si $x \in B$.

(3) **Pour (3)** Deux inclusions.

(3a) **Premier sens** Supposons que $x \in A \cap (B \setminus C)$. D'une part $x \in A$. Or $x \in B \setminus C$, donc $x \in B$. Nous avons déjà $x \in A \cap B$. Mais $x \in B \setminus C$ implique $x \notin C$. Donc $x \in (A \cap B) \setminus C$.

(3b) **Deuxième sens** Nous avons :

ITEMooMGGEooVRxrB

(3b.i) $x \in A \cap B$ donc $x \in A$.

ITEMooOIQCooUAwng

(3b.ii) $x \in A \cap B$ donc $x \in B$.

ITEMooCTHOooBLcsZv

(3b.iii) $x \in (A \cap B) \setminus C$ donc $x \notin C$.

Les points (3b.ii) et (3b.iii) font $x \in B \setminus C$. En ajoutant (3b.i) nous avons $x \in A \cap (B \setminus C)$.

(4) **Pour (4)** C'est un cas particulier de (3) avec $B = X$.

(5) **Pour (5)** En deux inclusions.

(5a) **Dans un sens** Soit $x \in X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i$. Vu que x n'est pas dans $\bigcap_{i \in I} A_i$, il existe $j \in I$ tel que $x \notin A_j$, et donc tel que $x \in X \setminus A_j$.

(5b) **Dans l'autre sens** Si $x \in \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$, alors il existe $j \in I$ tel que $x \in X \setminus A_j$. Donc x n'est pas dans A_j et à fortiori pas dans $\bigcap_{i \in I} A_i$.

□

LEMooBGQRooCVLGsh

Lemme 1.42 ([1])**.**
Si $A \subset B$ et si $f : B \to B$ est injective, alors

EQooHLEHooADUbJQ

$$f(A) = f(B) \setminus f(B \setminus A). \tag{1.14}$$

Démonstration. Les deux inclusions.

(1) $\subseteq$ Soit $a \in A$. Alors $a \in A \subset B$, de telle sorte que $f(a) \in f(B)$. Mais a n'est pas dans $B \setminus A$, disjoint de A, et comme f est injective, grâce à la propriété 1.21(3), $f(A) \cap f(B \setminus A) = \varnothing$. Comme $f(a) \in f(A)$, nous avons $f(a) \notin f(B \setminus A)$.

(2) **Dans l'autre sens** Suppose $y \in f(B) \setminus f(B \setminus A)$. Vu que $y \in f(B)$, il existe $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Mais comme $y \notin f(B \setminus A)$, nous avons $b \notin B \setminus A$. Donc, $b \in B \cap A$, d'où $b \in A$ et par suite $f(b) \in f(A)$.

□
LEMooHPUNooPmViwi

Lemme 1.43 ([16]).
Pour tous ensembles A, B, C nous avons

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \tag{1.15}$$
$$\text{et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{1.16}$$

Démonstration. Nous démontrons la première égalité d'ensembles par double inclusion.

(1) **Inclusion dans un sens** Nous supposons que $x \in A \cap (B \cup C)$. Il y a deux possibilités : soit x est dans $A \cap B$ soit non. Si $x \in A \cap B$ c'est bon. Sinon, nous allons prouver que $x \in A \cap C$.

Vu que $x \in A$ et $x \notin A \cap B$, nous avons $x \notin B$. Mais $x \in B \cup C$. Donc $x \in C$. Nous avons prouvé que $x \in A \cap C$.

(2) **Inclusion inverse** Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Nous allons prouver que $x \in A \cap (B \cup C)$.

(2a) **Si $x \in A \cap B$** Nous supposons que $x \in A \cap B$. Directement $x \in A$. Et comme $x \in B$, nous avons aussi $x \in B \cup C$. Donc $x \in A \cap (B \cup C)$.

(2b) **Si $x \in A \cap C$** Même raisonnement.

L'autre égalité d'ensembles se démontre de manière similaire (quoique plus simple).

(1) **Inclusion dans un sens** Si $x \in A \cup (B \cap C)$, alors, il est dans A, ou bien il est à la fois dans B et dans C.

- Si $x \in A$, alors il est aussi dans $A \cup B$, et dans $A \cup C$; donc il se trouve dans $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Si $x \in B$, alors il est dans $A \cup B$. Si, en même temps, $x \in C$, alors il est dans $A \cup C$. Donc il se trouve dans l'intersection $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(2) **Inclusion inverse** Soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Il est donc à la fois dans $A \cup B$ et dans $A \cup C$.

- Si $x \in A$, alors il est bien dans $A \cup (B \cap C)$.
- Sinon, il doit se trouver à la fois dans B et dans C, car dans le cas contraire il ne pourrait pas se trouver dans les unions ci-dessus. Ainsi $x \in B \cap C$, et donc $x \in A \cup (B \cap C)$.

□
LemPropsComplement

Lemme 1.44.
Quelques propriétés à propos des complémentaires[13]*. Si E est un ensemble et si A et B sont des sous-ensembles de E, nous avons*

ITEMooComplementDisjoint
(1) $A \cap (E \setminus A) = \varnothing$.

ITEMooComplementPartition
(2) *A et $E \setminus A$ forment une partition*[14] *de E.*

ITEMooWIYBooKMLVnZ
(3) $\complement\complement A = A$, *en d'autres termes,* $E \setminus (E \setminus A) = A$.

ItemLemPropComplementiii
(4) $A \setminus B = A \cap \complement B$.

ITEMooNHDUooWtURqQ
(5) $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$.

ITEMooTBWKooTChOmC
(6) $A^c \setminus B^c = B \setminus A$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Par définition même du complémentaire, on ne peut avoir en même temps $x \in A$ et $x \notin A$.

(2) **Pour (2)** On a clairement $A \subset E$ et $E \setminus A \subset E$. Le point précédent nous justifie que l'intersection est vide. On a aussi $A \cup (E \setminus A) \subset E$: prouvons l'inclusion inverse.

Si $x \in E$, alors ou bien $x \in A$, ou bien $x \notin A$, et donc par définition du complémentaire, $x \in E \setminus A$.

[13] Définition 1.6.
[14] Définition 1.8.

(3) **Pour (3)** On peut faire une preuve avec une double inclusion.

(3a) **Si $x \in E \setminus (E \setminus A)$** Alors $x \notin E \setminus A$. Par l'absurde, si $x \notin A$, alors $x \in E \setminus A$, ce qui est contradictoire. Ainsi, la possibilité $x \notin A$ est exclue et donc $x \in A$.

(3b) **Si $x \in A$** Alors $x \notin (E \setminus A)$. c'est-à-dire $x \in E \setminus B = E \setminus (E \setminus A)$.

Une autre preuve consiste à utiliser le point (2) d'abord avec A, ensuite avec $E \setminus A$. Dans les deux cas, on partitionne E en deux ; l'un des ensembles est $E \setminus A$, l'autre est respectivement A et $E \setminus (E$ă $\setminus A)$, qui sont dès lors nécessairement égaux.

(4) **Pour (4)** En deux parties.

(4a) **Si $x \in A \setminus B$** Alors deux choses :

(4a.i) $x \in A$.

(4a.ii) $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in E \setminus B$.

Donc $x \in A \cap (E \setminus B)$.

(4b) **Si $x \in A \cap (E \setminus B)$** Alors deux choses :

(4b.i) $x \in A$.

(4b.ii) $x \in E \setminus B$, ce qui implique[15] que $x \notin B$.

Donc $x \in A \cap (E \setminus B)$.

(5) **Pour (5)** Il faut le faire en deux inclusions.

(5a) $(A \setminus B)^c \subset A^c \cup B$ Supposons que $x \in (A \setminus B)^c$. Si $x \in A^c$, c'est bon. Supposons que x n'est pas dans A^c, et montrons que $x \in B$. Le fait que x ne soit pas dans A^c signifie que $x \in A$. Si x n'était pas dans B, alors x serait dans $A \setminus B$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $x \in B$.

(5b) $A^c \cup B \subset (A \setminus B)^c$ Supposons d'abord que $x \in A^c$. Comme $A \setminus B \subset A$, si $x \in A^c$, alors $x \in (A \setminus B)^c$.
Si $x \in B$, alors x n'est pas dans $A \setminus B$ et donc x est dans $(A \setminus B)^c$.

(6) **Pour (6)** Pour cette égalité, nous séparons 4 cas suivant que x est dans A ou B ou non. Bref, nous écrivons la table de vérité :

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A^c \setminus B^c$	0	0	1	0
$B \setminus A$	0	0	1	0

(1.17)

Les deux dernières lignes étant égales, nous avons l'égalité d'ensembles annoncée.

□

LEMooMDTPooAhmYqv

Lemme 1.45 ([1]).
Soient des parties $(A_j)_{j\in I}$ de X. Nous avons

$$\bigcup_{j\in I} A_j = X \setminus \Big(\bigcap_{j\in I} (X \setminus A_j) \Big). \tag{1.18}$$

Démonstration. En deux inclusions.

(1) **Sens direct** Si $x \in A_i$, alors $x \notin (X \setminus A_i)$. Or $\bigcap_{j\in I}(X \setminus A_j) \subset (X \setminus A_i)$, donc

$$x \in X \setminus \Big(\bigcap_{j\in I} (X \setminus A_j) \Big). \tag{1.19}$$

(2) **Dans l'autre sens** Dire que $x \in X \setminus \Big(\bigcap_{j\in I}(X \setminus A_j) \Big)$, c'est dire que x n'est pas dans l'intersection des $X \setminus A_i$. Il existe donc un $i \in I$ tel que $x \notin (X \setminus A_i)$, c'est-à-dire tel que $x \in A_i$. Donc $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$.

□

[15] Je vous laisse disserter sur le fait que ce soit une implication ou juste une reformulation, vu que sous-entendu $x \in E$.

LEMooPWUHooMBKquL

Lemme 1.46 ([1]).
Soient des ensembles $\{A_i\}_{i\in I}$ et $\{B_j\}_{j\in J}$. Alors

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)\cap\Big(\bigcup_{k\in J} B_j\Big) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cap B_j). \tag{1.20}$$

Démonstration. L'inclusion dans un sens. Si $x\in(\bigcup_i A_i)\cap(\bigcup_j B_j)$, alors il existe $i\in I$ et $j\in J$ tels que $x\in A_i$ et $x\in B_j$, c'est-à-dire $x\in A_i\cap B_j$.

Pour l'autre sens, si $x\in A_{i_0}\cap B_{j_0}$, alors $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$ et $x\in\bigcup_{j\in J}B_j$. □

DefBMLooVjlSG

Définition 1.47 (différence symétrique).
*Si A et B sont des ensembles, l'ensemble $A\Delta B$ est la **différence symétrique** d'ensembles :*

$$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B). \tag{1.21}$$

C'est l'ensemble des éléments étant soit dans A soit dans B mais pas dans les deux, ni dans aucun des deux.

REMooTableVeriteDiffSym

Remarque 1.48.
La table de vérité de $A\Delta B$ est intéressante :

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A\Delta B$	0	1	1	0

EQooOJBOooKkKbYp (1.22)

La deuxième colonne signifie que si $x\in A$ et $x\in B^c$, alors $x\in A\Delta B$.

LemCUVoohKpWB

Lemme 1.49 ([17]).
Si A et B sont des parties d'un ensemble, nous avons

$$A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A), \tag{1.23}$$

EQooMWTNooKXfFyU

et aussi

ItemVUCooHAztC

(1) $A^c\Delta B^c = A\Delta B$.

ItemVUCooHAztCii

(2) $(A\Delta B)\Delta B = A$.

ITEMooSPZXooPTgisP

(3) $(A\Delta B)^c = (A^c\cap B^c)\cup(A\cap B)$.

ITEMooSMXWooYcWsRC

(4) *Associativité :* $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

Démonstration. Pour (1.23), il suffit de réfléchir un peu : $A\Delta B$ contient précisément les éléments de A qui ne sont pas dans B, ainsi que les éléments de B qui ne sont pas dans A. On peut d'ailleurs voir que la table de vérité de $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ est la même que (1.22).

Et pour le reste, c'est parti.

(1) **Pour (1)** Nous rappelons l'égalité $X^c\setminus Y^c = Y\setminus X$ du lemme 1.44(6). De là nous écrivons

$$A^c\Delta B^c = (A^c\cup B^c)\setminus(A^c\cap B^c) = (A^c\cap B^c)^c\setminus(A^c\cup B^c)^c = (A\cup B)\setminus(A\cap B) = A\Delta B. \tag{1.24}$$

(2) **Pour (2)** Ici, il faut remarquer que $(A\Delta B)\cup B = A\cup B$ et que $(A\Delta B)\cap B = B\setminus A$, donc

$$(A\Delta B)\Delta B = ((A\Delta B)\cup B)\setminus((A\Delta B)\cap B) \tag{1.25}$$
$$= (A\cup B)\setminus(B\setminus A). \tag{1.26}$$

Donc tous les éléments de $(A\Delta B)\Delta B$ sont dans $A\cup B$ mais pas dans $B\setminus A$.

- Un élément de $A\cup B$ est dans A ou bien dans B ; s'il n'est pas dans $B\setminus A$, il se trouve nécessairement dans A.
- Réciproquement, tous les éléments de A sont dans $A\cup B$ et ne sont pas dans $B\setminus A$.

Ainsi, on a bien $(A\Delta B)\Delta B = A$.

(3) **Pour (3)** Il s'agit d'utiliser le lemme 1.44(5) :

$$(A\Delta B)^c = \Big((A\cup B)\setminus(A\cap B)\Big)^c \tag{1.27a}$$
$$= (A\cup B)^c \cup (A\cap B) \tag{1.27b}$$
$$= (A^c\cap B^c)\cup(A\cap B). \tag{1.27c}$$

(4) **Pour l'associativité (4)** Nous écrivons les tables de vérités selon que x est dans A, B, C ou non. D'abord

A	1	1	1	1	0	0	0	0
B	1	1	0	0	1	1	0	0
C	1	0	1	0	1	0	1	0
$B\Delta C$	0	1	1	0	0	1	1	0
$A\Delta(B\Delta C)$	1	0	0	1	0	1	1	0

(1.28)

La quatrième ligne s'écrit sur le modèle de (1.22) en regardant les deuxièmes et troisièmes lignes. La dernière ligne se fait avec la première et la quatrième.

L'autre table de vérité se fait de la même manière :

A	1	1	1	1	0	0	0	0
B	1	1	0	0	1	1	0	0
C	1	0	1	0	1	0	1	0
$A\Delta B$	0	0	1	1	1	1	0	0
$(A\Delta B)\Delta C$	1	0	0	1	0	1	1	0

EQooMHPCooHpzBcY (1.29)

Puisque les lignes pour $A\Delta(B\Delta C)$ et pour $(A\Delta B)\Delta C$ sont identiques, nous avons égalité.

□

1.2.6 Relations d'équivalence

appDefRelEquiv

Définition 1.50.
*Si E est un ensemble, une **relation d'équivalence** sur E est une relation binaire*[16] *$\sim$ qui est à la fois*

réflexive *$x\sim x$ pour tout $x\in E$,*

symétrique *$x\sim y$ si et seulement si $y\sim x$;*

transitive *si $x\sim y$ et $y\sim z$, alors $x\sim z$.*

DEFooRHPSooHKBZXl

Définition 1.51.
*Si E est un ensemble et si $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, alors nous notons $E/\sim$ l'**ensemble quotient**, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence dans E. Un élément de $E/\sim$ est de la forme*

$$[a] = \{x\in E \text{ tel que } x\sim a\}. \tag{1.30}$$

Les éléments de $E/\sim$ sont donc des sous-ensembles de E.

LEMooEgaliteClassesGen

Lemme 1.52.
Soit un ensemble E et une relation d'équivalence $\sim$. Pour $a,b\in E$, nous avons $[a]=[b]$ si et seulement si $a\sim b$.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $[a]=[b]$. Par réflexivité, $a\sim a$ et nous avons $a\in[a]=[b]$. Mais $a\in[b]$ signifie $a\sim b$, ce qu'il fallait.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $a\sim b$, et nous démontrons que $[a]\subset[b]$. Si $x\in[a]$, alors $x\sim a$. Mais $a\sim b$. Donc $x\sim a\sim b$, ce qui implique $x\sim b$ par transitivité. Or dire $x\sim b$ implique $x\in[b]$. Pour l'inclusion $[b]\subset[a]$, il suffit de réécrire : on vous laisse faire.

□

[16] Définition 1.10.

1.2.7 Applications bien définies

La proposition suivante est ce qui est utilisé à chaque fois qu'on dit « telle formule définit bien une fonction » ou « cette fonction est bien définie parce que … »

PROPooCONJooTpJwBe

Proposition 1.53 ([1]).
Soient deux ensembles E et A. Nous considérons une relation d'équivalence $\sim$ sur E et une application $g\colon E \to A$ telle que si $a \sim b$ alors $g(a) = g(b)$.

Alors il existe une unique application $\tilde{g}\colon E/\sim \to A$ vérifiant

$$\tilde{g}([x]) = g(x) \tag{1.31}$$

EQooCTHKooTXPfvh

pour tout $x \in E$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Existence**

Nous considérons $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A ainsi que S l'ensemble des singletons de A. Nous définissons l'application

$$\begin{aligned} g_P\colon E/\sim &\to \mathcal{P}(A) \\ \alpha &\mapsto \{g(x) \text{ tel que } x \in \alpha\}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Soit $\alpha \in E/\sim$. Prouvons que si $a \in \alpha$, alors $g_P(\alpha) = \{g(a)\}$. Par construction nous avons $g(a) \in \{g(x) \text{ tel que } x \in \alpha\}$ et donc l'inclusion $\{g(a)\} \subset g_P(\alpha)$. Pour l'inclusion dans l'autre sens, nous considérons $x \in \alpha$ et nous montrons que $g(x) \in \{g(a)\}$. En effet $x, a \in \alpha$, donc $g(x) = g(a)$.

Tout cela pour dire que g_P prend ses valeurs dans S et que $g_P([a]) = \{a\}$ pour tout $a \in E$.

Nous introduisons maintenant l'opération d'extraction

$$\begin{aligned} e\colon S &\to A \\ \{x\} &\mapsto x, \end{aligned} \tag{1.33}$$

et nous considérons $\tilde{g} = e \circ g_P$. Vérifions que c'est bon.

Soit $x \in E$. Nous avons $x \in [x]$ et donc $g_P([x]) = \{x\}$. Donc

$$\tilde{g}\big([x]\big) = (e \circ g_P)([x]) = e\big(\{x\}\big) = x. \tag{1.34}$$

(2) **Unicité** Soit une autre application $\tilde{g}_2\colon E/\sim \to A$ vérifiant la condition (1.31). Soit $\alpha \in E/\sim$. Soit $a \in \alpha$. Nous avons $\tilde{g}(\alpha) = \tilde{g}([a]) = a$. Et aussi $\tilde{g}_2(\alpha) = \tilde{g}_2([a]) = a$. Donc $\tilde{g}(\alpha) = \tilde{g}_2(\alpha)$.

□

EXooYDRVooHsANlC

Exemple 1.54.
Sur l'ensemble de tous les polygones du plan, la relation « a le même nombre de côtés » est une relation d'équivalence. Plus précisément, si P et Q sont deux polygones, nous disons que $P \sim Q$ si et seulement si P et Q ont le même nombre de côtés. C'est une relation d'équivalence :

- un polygone P a toujours le même nombre de côtés que lui-même : $P \sim P$;
- si P a le même nombre de côtés que Q ($P \sim Q$), alors Q a le même nombre de côtés que P ($Q \sim P$) ;
- si P a le même nombre de côtés que Q ($P \sim Q$) et que Q a le même nombre de côtés que R ($Q \sim R$), alors P a le même nombre de côtés que R ($P \sim R$).

△

EXooProjCanoniqueEquivAppl

Exemple 1.55.
Soit f une application entre deux ensembles E et F. Nous définissons une relation d'équivalence sur E par

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y). \tag{1.35}$$

Nous notons par $\pi\colon E \to E/\sim$ la projection canonique. L'application

$$\begin{aligned} g\colon E/\sim &\to F \\ [x] &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{1.36}$$

est bien définie et injective[17]. Elle n'est pas surjective tant que f ne l'est pas. La **décomposition canonique** de f est

$$f = g \circ \pi. \tag{1.37}$$

△

La proposition suivante est souvent utilisée pour créer un majorant quand on veut vérifier les hypothèses du lemme de Zorn.

PROPooKXBGooJYUbtF

Proposition 1.56 ([1])**.**
Soit un ensemble d'ensembles $\{X_i\}_{i\in I}$ et des applications $f_i\colon X_i \to A$ telles que

$$f_i(x) = f_j(x) \tag{1.38}$$

pour tout $i, j \in I$ et $x \in X_i \cap X_j$. Nous posons $X = \bigcup_{i\in I} X_i$.

Alors il existe une unique application $f\colon X \to A$ telle que $f(x) = f_i(x)$ pour tout $i \in I$ et $x \in X$ tels que $x \in X_i$.

Démonstration. Nous commençons par prouver l'existence. Pour chaque $x \in X$ nous posons $I_x = \{i \in I \text{ tel que } x \in X_i\}$, et nous posons

$$\begin{aligned} \varphi_x\colon I_x &\to A \\ i &\mapsto f_i(x). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Prouvons que $\varphi_x\colon I_x \to A$ est constante. Soient $i, j \in I_x$. Alors $\varphi_x(i) = f_i(x)$ et $\varphi_x(j) = f_j(x)$. Vu que $i \in I_x$, nous avons $x \in X_i$ et vu que $j \in I_x$, nous avons $x \in X_j$. Donc $x \in X_i \cap X_j$, et par hypothèse, $f_i(x) = f_j(x)$. Cela montre que $\varphi_x(i) = \varphi_x(j)$.

Et nous posons

$$f(x) = e\big(\varphi_x(I_x)\big) \tag{1.40}$$

où e est l'application qui à un singleton fait correspondre l'élément qui est dedans.

Soient $i \in I$ et $x \in X$ tels que $x \in X_i$. Alors $f_i(x) \in \varphi_x(I_x)$ et donc $\varphi_x\big(I_x\big) = \{f_i(x)\}$ et finalement $f(x) = f_i(x)$.

En ce qui concerne l'unicité, nous supposons que $f\colon X \to A$ et $g\colon X \to A$ aient les propriétés requises. Soit $x \in X$; il existe $i \in I$ tel que $x \in X_i$. Pour un tel i, nous avons $f(x) = f_i(x)$ et $g(x) = f_i(x)$ et donc $f(x) = g(x)$. □

1.2.8 Relations ternaires, opérations

NORMooRelationsTernaires

1.57.
Comme pour les fonctions construites sur base des relations binaires, on peut en construire pour les relations ternaires[18].

NORMooFonctionDeuxVariables

1.58.
Soit G une relation ternaire sur les ensembles $E_1,\ E_2,\ E_3$. Supposons que, étant donnés $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, il existe un unique $x_3 \in E_3$ tel que $(x_1, x_2, x_3) \in G$. On définit alors la fonction

$$\begin{aligned} f\colon E_1 \times E_2 &\to E_3 \\ (x_1, x_2) &\mapsto \text{le } x_3 \text{ dans la relation } G. \end{aligned} \tag{1.41}$$

DEFooOperation

Définition 1.59.
*On appelle **opération** sur l'ensemble E une fonction définie sur $E \times E$ et à valeurs dans E. Cette opération peut être notée sous forme préfixe ($f(x, y)$) ou sous forme infixe, c'est-à-dire entre les deux éléments que l'on opère ($x * y$).*

*Parfois, on dit aussi que $*$ est une **loi de composition interne** sur E, ou encore que E, muni de l'opération $*$, est un **magma**.*

DEFooMagmaNeutre

Définition 1.60 (neutres dans un magma)**.**
Soit E un ensemble muni d'une opération $*\colon E \times E \to E$. On dit d'un élément $e \in E$ qu'il est :

*(1) **neutre à gauche** si, pour tout $x \in E$, on ait $e * x = x$;*

*(2) **neutre à droite** si, pour tout $x \in E$, on ait $x * e = x$;*

[17] Proposition 1.53.
[18] Voire des relations avec plus d'ensembles, mais nous n'en avons pas (encore) besoin.

(3) ***neutre*** *s'il est neutre à gauche et à droite.*

PROPooDEFMagmaUnifere

Proposition-Définition 1.61.
Soit $(E,*)$ un magma admettant un neutre à gauche $e\in E$ et un neutre à droite $n\in E$. Alors :

(1) on a $e=n$;

(2) il n'y a pas d'autre neutre (à gauche ou à droite) que eă.

Ainsi, l'élément e est appelé ***neutre*** *du magma $(E,*)$ et on dit que E est un* ***magma unifère****.*

Démonstration. On sait que $e*n$ vaut n, car e est neutre à gauche, mais vaut aussi e car n est neutre à droite. Bref, on a

$$n=e*n=e.$$

Si e' était un autre neutre à gauche, alors $e'=e'*n=n=e$: la première égalité venant du fait que n est neutre à droite, la deuxième que e' est neutre à gauche, la troisième de l'égalité ci-dessus. De la même façon, si n' était un autre neutre à droite, alors $n'=e*n'=e=n$. □

DEFooMagmaCommutatif

Définition 1.62 (magma commutatif)**.**
Soit E un ensemble muni d'une opération $*\colon E\times E\to E$. On dit que E est un ***magma commutatif*** *si pour tout $x,y\in E$, on a $x*y=y*x$.*

DEFooIJIEooZaAdSs

Définition 1.63 (élément régulier[18])**.**
Soit un ensemble E muni d'une opération $*\colon E\times E\to E$. Un élément $s\in E$ est ***régulier à gauche*** *si pour tout $x,y\in E$ nous avons*

$$s*x=s*y\Rightarrow x=y. \tag{1.42}$$

L'élément s est ***régulier à droite*** *si pour tout $x,y\in E$ nous avons*

$$x*s=y*s\Rightarrow x=y. \tag{1.43}$$

Il est ***régulier*** *si il est régulier à gauche et à droite.*

REMooMagmasEltsReguliers

Remarque 1.64.
Dans un magma E, si e est un neutre à gauche (respectivement à droite), alors il est forcément régulier à gauche (resp. à droite).

On verra plus tard la notion de groupe[19], qui étend celle de magma : nous verrons que tous les éléments d'un groupe sont réguliers, et pour cause : ils admettent tous un inverse qui permet de simplifier.

On aura plus tard la notion d'anneau[20]. Dans ce cadre, la régularité des éléments vis-à-vis de l'opération de multiplication sera moins évidente ; en particulier, elle sera loin d'être automatique.

1.3 Cardinalité

SECooCardinalite

1.3.1 Équipotence, surpotence, subpotence

NOTAooEquiSurSubpotence

1.65.
Les notions d'équipotence, surpotence et de subpotence permettent de comparer les « tailles » des ensembles sans avoir besoin de la théorie des ordinaux. Tout ceci ne sera pas très souvent utile par la suite. Un exemple d'utilisation de ces notions est le théorème de Steinitz 6.134 qui démontre l'existence de clôture algébrique pour tout corps.

DEFooXGXZooIgcBCg

Définition 1.66 ([19, 20])**.**
Soient deux ensembles A et B.

(1) Les ensembles A et B sont ***équipotents*** *si il existe une bijection entre A et B. Nous notons $A\approx B$.*

(2) L'ensemble A est ***surpotent*** *à B si il existe une surjection de A vers B. Nous notons $A\succeq B$.*

(3) L'ensemble A est ***subpotent*** *à B si il existe une injection de A vers B. Nous notons $A\preceq B$.*

Nous disons également « strictement » surpotent quand il y a surpotence mais pas équipotence, et de même pour la subpotence. Les symboles $\succ$ et $\prec$ sont alors utilisés.

[19] Définition 1.85.
[20] Définition 1.92.

PROPooWSXTooMQPcNG

Proposition 1.67 ([1, 15]).
L'ensemble A est subpotent à B si et seulement si B est surpotent à A.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que A est subpotent à B. Il existe une injection $\varphi\colon A \to B$. Nous définissons $f\colon B \to A$ par

$$f(x) = \begin{cases} \varphi^{-1}(x) & \text{si } x \in \varphi(A) \\ a & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.44}$$

où a est un élément quelconque de A. Cette application est bien définie parce que φ est injective, de telle sorte que φ^{-1} est bien définie. Puisque φ est définie sur tout A, l'application f est une surjection.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que B est surpotent à A. Il existe donc une surjection $\varphi\colon B \to A$. Pour chaque $x \in A$ nous considérons un élément $b_x \in \varphi^{-1}(x)$, qui existe parce que φ est surjective. Nous considérons ensuite l'application

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ x &\mapsto b_x. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Nous prouvons que f est une injection. Supposons que $x, y \in A$ soient tels que $f(x) = f(y)$. Nous avons $b_x = b_y$. Donc

$$x = \varphi(b_x) = \varphi(b_y) = y. \tag{1.46}$$

Nous avons prouvé que $x = y$, et donc que f est injective.

□

1.3.2 Un peu d'infinité

NORooPasDeClasses

1.68.
Vu que l'ensemble des ensembles n'existe pas[21], nous n'allons pas énoncer le fait que ces notions donnent une relation d'ordre sur les ensembles ; il faudrait parler de classes et nous ne nous en sortirions pas. Nous allons toutefois énoncer quelques résultats qui vont dans ce sens. Pour en savoir plus, vous pouvez lire les différentes pages de Wikipédia sur les nombres cardinaux.

DefEOZLooUMCzZR

Définition 1.69 (ensemble Dedekind infini)**.**
*Un ensemble est **infini** si il peut être mis en bijection avec un de ses sous-ensembles propres (c'est-à-dire différent de lui-même).*

*Un ensemble est **fini** si il n'est pas infini.*

NORooQuelleDefEnsInfini

1.70.
Nous adoptons les notions d'ensembles finis et infinis au sens de Dedekind. De nombreuses sources (dont Wikipédia [21, 22]) définissent un ensemble fini comme étant un ensemble en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$ de la forme $\{0, \dots, N\}$. Alors un ensemble est infini si il n'est pas fini.

Cependant, d'une part *les deux définitions d'ensembles infinis ne sont pas équivalentes*, mais d'autre part, elles sont équivalentes si on accepte l'axiome du choix[22]. Or le Frido accepte l'axiome du choix sans vergogne et sous toutes ses formes. Nous démontrerons donc, en utilisant le lemme de Zorn, qu'un ensemble A est fini (définition 1.69) si et seulement si il existe une bijection $\{0, \dots, N\} \to A$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$. Ce sera le théorème 1.207.

LEMooTUIRooEXjfDY

Lemme 1.71.
Toute partie d'un ensemble fini est finie.

Démonstration. Nous allons prouver la contraposée : si un ensemble contient une partie infinie, alors il est infini. Soit $A \subset B$ où A est infini. Nous allons prouver que B est infini. En vertu de la définition 1.69, il existe une partie $A' \subsetneq A$ et une bijection $\sigma\colon A' \to A$.

Nous considérons la partie $B' = A' \cup (B \setminus A)$, qui est une partie stricte de B. Puisque $A' \cap (B \setminus A) = \varnothing$, nous pouvons définir

$$\begin{aligned} \varphi\colon B' &\to B \\ x &\mapsto \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in A' \\ x & \text{si } x \in B \setminus A. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.47}$$

[21] Voir le corolaire 1.83.
[22] Et même seulement l'axiome du choix dénombrable ; si vous voulez en savoir plus, lisez la page Wikipédia [23].

Montrons que φ est une bijection.

(1) **Surjectif** Nous avons $\varphi(A') = A$ et $\varphi(B \setminus A) = B \setminus A$. Donc

$$\varphi(B') = \varphi(A') \cup \varphi(B \setminus A) = A \cup (B \setminus A) = B. \tag{1.48}$$

(2) **Injectif** Si $\varphi(x) = \varphi(y)$, nous avons 4 possibilités suivant que x et y sont dans A' ou $B \setminus A$.

Si $x, y \in A'$, alors $\varphi(x) = \varphi(y)$ implique $\sigma(x) = \sigma(y)$ et donc $x = y$ parce que σ est injective.

Si $x \in A'$ et $y \in B \setminus A$ alors $\varphi(x) = \sigma(x) \in A$ et $\varphi(y) = y \in B \setminus A$. Ce cas n'est pas possible. Le cas $x \in B \setminus A$ et $y \in A'$ n'est pas possible non plus.

Si $x, y \in B \setminus A$, alors $\varphi(x) = \varphi(y)$ implique immédiatement $x = y$.

Nous avons une bijection entre B' et B alors que B' est un sous-ensemble strict de B. Donc B est infini. □

Voici une proposition qui dit que si on n'a pas de maximum, on est infini. Une preuve alternative beaucoup plus simple[23] sera donnée dans le lemme 1.216. Ici, nous démontrons sans utiliser la construction des naturels.

PROPooVZRVooAncMjb

Proposition 1.72 ([24]).
Si $(A, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné[24] fini, alors il a un maximum[25].

Démonstration. Nous considérons un ensemble totalement ordonné A (que nous supposons non vide). Nous supposons que A n'a pas de maximum et nous démontrons que A est infini. Nous fixons un élément $a \in A$ et nous considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A} = \Big\{(X, f) \text{ tel que } \begin{cases} X \subset A \\ f\colon X \to A \text{ est injective} \\ X \setminus f(X) = \{a\} \\ f(X) \setminus X = \varnothing \text{ ou } f(X) \setminus X = \max\big(f(X)\big) \end{cases} \Big\}. \tag{1.49}$$

Nous ordonnons les couples (X, f) en disant que $(X_1, f_1) \leqslant (X_2, f_2)$ lorsque $X_1 \subset X_2$ et $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in X_1$, c'est-à-dire lorsque f_2 étend f_1.

Nous rappelons que si une partie a un maximum, alors le maximum est unique par 1.30. Nous ne le répéterons pas à chaque fois.

(1) **$\mathcal{A}$ est non vide** Vu que A n'a pas de maximum, il existe $b \in A$ avec $b > a$. Alors l'application $f\colon \{a\} \to \{b\}$ est une bijection et $\big(\{a\}, f\big) \in \mathcal{A}$ parce que $\{a\}\setminus\{b\} = \{a\}$ et $\{b\}\setminus\{a\} = \{b\} = \max(\{b\})$.

(2) **$\mathcal{A}$ est inductif** Nous considérons une partie totalement ordonnée $\mathcal{F} = \{(X_i, f_i)\}_{i\in I}$ et nous montrons qu'elle admet un majorant dans $\mathcal{A}$. Nous posons $X_u = \bigcup_{i\in I} X_i$, et nous considérons l'unique application $f_u\colon X \to A$ vérifiant[26] $f_u(x) = f_i(x)$ dès que $x \in X_i$.

Le fait que (X_u, f_u) soit un majorant de $\mathcal{F}$ est immédiat. Ce qui est moins immédiat est que $(X_u, f_u) \in \mathcal{A}$. C'est ce que nous prouvons à présent.

(2a) $X_u \subset A$ Parce que X_u est une réunion de parties de A. Ok. Ça commence facile.

(2b) **f_u est injective** Soient $x, y \in X_u$ tels que $f_u(x) = f_u(y)$. Il existe $i, j \in I$ tels que $x \in X_i$ et $y \in X_j$. Supposons que $X_i \subset X_j$ (si c'est pas le cas, il faut juste inverser i et j dans ce que qui suit). Alors $f_u(x) = f_j(x)$ et $f_u(y) = f_j(y)$. Mais comme f_j est injective, nous en déduisons que $x = y$.

(2c) $X_u \setminus f_u(X_u) = \{a\}$ Vu que $\mathcal{F}$ est non vide, il contient un (X_i, f_i) où X_i vérifie $X_i \setminus f(X_i) = \{a\}$. Nous avons alors $a \in X_i \subset X_u$. Mais $f(X_u) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$ alors que a n'est dans aucun des $f(X_i)$. Donc a n'est pas dans $f(X_u)$. Bref $a \in X_u \setminus f(X_u)$. Il nous reste à prouver que a est le seule élément de $X_u \setminus f(X_u)$.

Soit $b \in X_u \setminus f(X_u)$. Vu que $b \in X_u$, il existe $i \in I$ tel que $b \in X_i$. Il y a deux possibilités : soit $b \in f(X_i)$ soit non. Si oui, alors $b \in f(X_i) \subset f(X_u)$ alors que nous venions de dire que $b \notin f(X_u)$. Pas possible. Donc $b \notin f(X_i)$. Dans ce cas, $b \in X_i \setminus f(X_i) = \{a\}$ et donc $b = a$.

[23] Plus simple ? À nuancer parce que celle que nous donnons ici ne demande pas la construction de $\mathbb{N}$ – qui est un gros morceau.
[24] Définition 1.24.
[25] Définition 1.28.
[26] Penser à utiliser la proposition 1.53 pour vérifier que ça existe et que c'est unique.

(2d) $f(X_u) \setminus X_u = \varnothing$ **ou** $f(X_u) \setminus X_u = \max\big(f(X_u)\big)$ Si $f(X_u)\setminus X_u = \varnothing$ on est bon. Nous supposons que ce n'est pas le cas et nous prouvons que si $y \in f(X_u) \setminus X_u$, alors $y = \max\big(f(X_u)\big)$.

Soit $z \in f(X_u)$. Vu que $y, z \in f(X_u)$ il existe des $i, j \in I$ tels que $y \in f_i(X_i)$ et $z \in f_j(X_j)$. Étant donné que $\mathcal{F}$ est totalement ordonné, nous avons $(X_i, f_i) \leqslant (X_j, f_j)$ ou le contraire. Nous posons

$$(X_0, f_0) = \max\big\{(X_i, f_i), (X_j, f_j)\big\}. \tag{1.50}$$

Nous avons $X_i \subset X_0$ et $X_j \subset X_0$ et donc $f_i = f_j$ sur X_0 et donc $x, y \in f_0(x_0)$. Rappel que nous avions pris $y \in f(X_u) \setminus X_u$. Et particulier $y \notin X_0$ parce que $X_0 \subset X_u$. Donc $y \in f_0(X_0) \setminus X_0$.

Vu que $(X_0, f_0) \in \mathcal{F}$, nous avons $y = \max\big(f(X_0)\big)$. Et comme $z \in f(X_0)$ nous avons $y \geqslant z$. Nous avons prouvé que y est un majorant de $f(X_u)$. Vu que $y \in f(X_u)$, il est bien le maximum.

Nous avons montré que si $y \in f(X_u) \setminus X_u$, alors $y = \max\big(f(X_u)\big)$. Nous en déduisons que $f(X_u) \setminus X_u = \max\big(X_u\big)$.

Et voilà. Le lemme de Zorn 1.37 s'applique : $\mathcal{A}$ a un élément maximal que nous allons nommer (X_m, f_m). Nous pouvons passer à la suite.

(1) $f(X_m) \setminus X_m = \varnothing$

Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors $f(X_m) \setminus X_m = \{y\}$ où $y = \max\big(f_m(X_m)\big)$. Mais nous avons dit par hypothèse que A n'avait pas de maximum. Donc ni y ni a n'en sont et il existe $z \in A$ tel que $z > \max(a, y)$. Nous posons

$$X_M = X_m \cup \{y\}. \tag{1.51}$$

Vu que y n'est pas dans X_m, la partie X_M est strictement plus grande que X_m. Nous prenons ensuite $f_M \colon X_M \to f(X_m) \cup \{z\}$ qui étend f_m en posant $f_M(y) = z$.

Nous prouvons que $(X_M, f_M) \in \mathcal{A}$.

(1a) f_M **est injective** C'est parce que f_m est injective et que $f_M(y) = z$ alors que z n'est pas dans $f_M(X_m)$ parce que

$$z > \max(a, y) \geqslant y = \max\big(f_m(X_m)\big). \tag{1.52}$$

(1b) $X_M \setminus f_M(X_M) = \{a\}$ Nous avons $a \in X_m \setminus f_m(X_m)$. Donc $a \in X_m \subset X_M$ et a est hors de $f_m(X_m)$. Mais $f_M(X_M) = f_m(X_m) \cup \{z\}$. Vu que $a \neq z$ nous avons bien $a \neq f_M(X_M)$ et donc $a \in X_M \setminus f_M(X_M)$. Reste à prouver que a est tout seul dans $X_M \setminus f_M(X_M)$.

Soit $b \in X_M \setminus f_M(X_M)$. Notre objectif est de prouver soit que $b = a$ soit de trouver une absurdité. Il y a deux possibilités : soit $b \in X_m$ soit $b = y$.

(1b.i) **Si** $b \in X_m$ Dans ce cas, $b \in X_M \setminus f_M(X_M)$ et $b \in X_m$. Donc

$$b \in X_m \setminus f_M(X_M) = X_m \setminus \big(f_m(X_m) \cup \{z\}\big) \subset X_m \setminus f_m(X_m) = \{a\} \tag{1.53}$$

parce que $(X_m, f_m) \in \mathcal{A}$. Donc $b = a$.

(1b.ii) **Si** $b = y$ Ici il y a une impossibilité parce que d'une part $y = \max\big(f_m(X_m)\big)$, mais d'autre part $y = b \in X_M \setminus f_M(X_M)$. Donc b n'est pas dans $f_M(X_M)$, qui contient $f_m(X_m)$.

Nous avons montré que $b = a$ et donc que $X_M \setminus f_M(X_M) = \{a\}$.

(1c) $z = \max\big(f_M(X_M)\big)$ Nous avons choisi $z > \max(a, y)$ et $X_M = X_m \cup \{y\}$. Donc $z > y = \max\big(f_m(X_m)\big)$ et $z \geqslant z$, donc

$$z \geqslant \max\big(f_m(X_m) \cup \{z\}\big) = \max\big(f_M(X_M)\big). \tag{1.54}$$

Mais comme en même temps $z = f_M(y) \in f_M(X_M)$, nous avons $z = \max\big(f_M(X_M)\big)$.

(1d) $f_M(X_M) \setminus X_M = \{z\}$ En plusieurs points.

(1d.i) $z \in f_M(X_M)$ Parce que $z = f_M(y)$.

(1d.ii) $z \notin X_M$ Supposons que $z \in X_M$ et déduisons une absurdité. Il y a deux possibilités : soit $z \in X_m$ soit $z = y$. Vu que $z > \max(a, y)$ la seconde possibilité est exclue. Reste $z \in X_m$. Vu que

$$z > \max(a, y) \geqslant y = \max\big(f_m(X_m)\big)), \tag{1.55}$$

nous avons $z \notin f_m(X_m)$. Donc $z \in X_m \setminus f_m(X_m) = \{a\}$. Donc $z = a$, qui n'est pas possible parce que $y > \max(a, y) \geqslant a$.

Nous avons donc bien démontré que $z \notin X_M$.

(1d.iii) z **est seul dans** $f_M(X_M) \setminus X_M$ Soit $z' \in f_M(X_M) \setminus X_M$. Vu que $f_M(X_M) = f_m(X_m) \cup \{z\}$, nous avons deux possibilités : soit $z' \in f_m(X_m)$ soit $z' = z$. Le seconde possibilité nous va parfaitement.
Voyons ce qu'il se passe si $z' \in f_m(X_m)$. Nous avons

$$z' \in f_m(X_m) \setminus X_M \subset f_m(X_m) \setminus X_m = \{y\}. \tag{1.56}$$

Mais il n'est pas possible d'avoir $z' = y$ parce que $y \in X_M$ alors que $z' \notin X_M$.

Nous avons fini de prouver que $(X_M, f_M) \in \mathcal{A}$. Par construction nous avons cependant que $(X_M, f_M) \geqslant (X_m, f_m)$, qui contredit la maximalité de (X_m, f_m). Nous en déduisons que le y n'existe pas et donc que $f_m(X_m) \setminus X_m = \varnothing$.

(2) **La suite** Ici nous savons que $f_m(X_m) \setminus X_m = \varnothing$. L'application $f_m \colon X_m \to f_m(X_m)$ est une bijection vérifiant

(2a) $X_m \setminus f_m(X_m) = \{a\}$
(2b) $f_m(X_m) \setminus X_m = \varnothing$.

Notez que le deuxième point implique que $f_m(X_m) \subset X_m$.

(3) **L'application** g Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} g \colon A &\to A \\ x &\mapsto \begin{cases} f_m(x) & \text{si } x \in X_m \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.57}$$

(4) g **est injective** Il y a 4 possibilités suivant que x et y sont dans X_m ou non.

(4a) **Si** $x, y \in X_m$ Alors $g(x) = f_m(x)$ et $g(y) = f_m(y)$. Donc $f_m(x) = f_m(y)$ et donc $x = y$ parce que f_m est injective.

(4b) **Si** $x \in X_m$ **et** $y \notin X_m$ Alors

$$g(x) = f_m(x) \in f_m(X_m) \subset X_m, \tag{1.58}$$

alors que $g(y) \notin X_m$. Il n'est donc pas possible que $g(x) = g(y)$ dans ce cas.

(4c) **Si** $x, y \notin X_m$ Alors $g(x) = x$ et $g(y) = y$. Et donc $x = y$.

Cela prouve que g est injective.

(5) $a \notin g(A)$ Supposons que $a = g(x)$ pour un certain $x \in A$. Il y a deux possibilités : $x \in X_m$ ou $x \notin X_m$.
Dans le premier cas, nous avons $a = g(x) = f_m(x) \in f_m(X_m)$ qui n'est pas possible parce que $a \notin f_m(X_m)$ du fait que $X_m \setminus f_m(X_m) = \{a\}$.
Dans le second cas, nous avons $a = g(x) = x \notin X_m$, qui n'est pas possible parce que nous savons que $x \in X_m$.

(6) **Conclusion** Nous avons construit une injection $g \colon A \to A \setminus \{a\}$. Cela prouve que A est infini.

□
PROPooVOKDooOStPzU

Proposition 1.73 ([1, 15]).
Si A est fini et si $\omega \notin A$, alors $A \cup \{\omega\}$ est fini.

Démonstration. Supposons que $A \cup \{\omega\}$ est infini. Il existe un sous-ensemble strict de $A \cup \{\omega\}$ en bijection avec $A \cup \{\omega\}$. Soient donc $B \subsetneq A \cup \{\omega\}$ et $\sigma \colon B \to A \cup \{\omega\}$ une bijection.
Il y a deux possibilités : soit ω est dans B, soit non.

(1) $\omega \notin B$ Alors $B \subset A$, et il existe $x \in B$ tel que $\sigma(x) = \omega$. Considérons $B' = B \setminus \{x\}$; cela est une partie propre de A. Ensuite nous définissons

$$\begin{aligned} \varphi \colon B \setminus \{x\} &\to A \\ a &\mapsto \sigma(a). \end{aligned} \tag{1.59}$$

C'est injectif parce que σ est injective, et c'est surjectif parce que

$$\varphi\big(B \setminus \{x\}\big) = \sigma(B) \setminus \sigma(\{\omega\}) = \sigma(B) \setminus \{\omega\} = (A \cup \{\omega\}) \setminus \{\omega\} = A. \tag{1.60}$$

Pour la dernière égalité nous avons utilisé le fait que ω n'est pas dans A.

(2) **Si $\omega \in B$** Plusieurs choses à dire.

(2a) $\sigma(\omega) \neq \omega$
Si $\omega \in B$, nous commençons par prouver que $\sigma(\omega) \neq \omega$. En effet si $\sigma(\omega) = \omega$, alors nous pouvons poser

$$\begin{aligned} \sigma' \colon B \setminus \{\omega\} &\to A \\ x &\mapsto \sigma(x). \end{aligned} \tag{1.61}$$

Ce σ' est une bijection entre A et la partie propre $B \setminus \{A\}$. Cela est impossible parce que nous avons supposé que A est fini.

(2b) **Definition de φ** Puisque B est une partie propre de $A \cup \{\omega\}$, il existe $x \in A \setminus B$. Nous considérons $B' = \big(B \setminus \{\omega\}\big) \cup \{x\}$ et nous définissons

$$\begin{aligned} \varphi \colon B' &\to A \\ b &\mapsto \begin{cases} \sigma(b) & \text{si } b \neq x \\ \sigma(\omega) & \text{si } b = x. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.62}$$

Nous montrons à présent que φ est une bijection.

(2c) **Injectif** Soient $u, v \in B'$ tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$. Il y a 4 possibilités suivant que u ou v est égal à x.

- Si $u = v = x$ on est bon.
- Si $u = x$ et $v \neq x$. D'une part $\varphi(u) = \varphi(v) = \sigma(v)$ parce que $v \neq x$. Mais d'autre part $\varphi(u) = \varphi(x) = \sigma(\omega)$. Donc $\sigma(v) = \sigma(\omega)$ et $v = \omega$ par injectivité de σ. Or cela est impossible parce que $v \in B'$ alors que $\omega \notin B'$. Ici nous utilisons le fait que ω ne peut pas être égal à x parce que $x \in A$ alors que ω est hors de A.
  Bref, ce cas est impossible.
- Si $u \neq x$ et $v = x$, alors c'est le même cas que le précédent avec quelque adaptations.
- Si $u \neq x$ et $v \neq x$, alors $\varphi(u) = \sigma(u)$ et $\varphi(v) = \sigma(v)$, de telle sorte que $\sigma(u) = \sigma(v)$ et donc $u = v$ par injectivité de σ.

(2d) **Surjective** Soit $y \in A$. Vu que $\sigma \colon B \to A \cup \{\omega\}$ est surjective, il existe $b \in B$ tel que $\sigma(b) = y$. Notez que $b \neq x$ parce que $x \in A \setminus B$.
Si $b \neq \omega$ alors $b \in B \setminus \{\omega\} \subset B'$. Nous pouvons calculer $\varphi(b)$. Étant donné que $b \neq x$, nous avons $\varphi(b) = \sigma(b) = y$.
Si au contraire $b = \omega$, alors $\varphi(x) = \sigma(\omega) = y$. Dans les deux cas, y est dans l'image de φ.

Dans tous les cas nous avons construit une bijection entre une partie propre $B' \subsetneq A$ et A, ce qui est absurde parce que A est un ensemble fini. □

PROPooWKSIooHcfYPN

Proposition 1.74 ([1]).
Si A est infini et si $\sigma \colon A \to B$ est injective, alors B est infini.

Démonstration. Nous allons prouver que $\sigma(A)$ est une partie infinie de B. Puisque A est infini, nous pouvons considérer une partie $A' \subsetneq A$ et une bijection $\varphi_A \colon A' \to A$. Nous définissons

$$\begin{aligned} \varphi_B \colon \sigma(A') &\to \sigma(A) \\ y &\mapsto \sigma\Big(\varphi_A\big(\sigma^{-1}(y)\big)\Big). \end{aligned} \tag{1.63}$$

Cette définition a un sens parce que si $y \in \sigma(A')$, alors il existe un unique $x \in A'$ tel que $\sigma(x) = y$ parce que σ est injective. De là, $\varphi_A(x) \in A$ et nous pouvons lui appliquer σ.

Nous montrons que φ_B est une bijection.

(1) **Injective** Supposons que $\varphi_B(a) = \varphi_B(b)$, c'est-à-dire que

$$(\sigma \circ \varphi_A \circ \sigma^{-1})(a) = (\sigma \circ \varphi_A \circ \sigma^{-1})(b). \tag{1.64}$$

Étant donné que σ et φ_A sont injectives, nous avons $\sigma^{-1}(a) = \sigma^{-1}(b)$. En appliquant σ des deux côtés, nous trouvons $a = b$.

(2) **surjective** Soit $y \in \sigma(A)$. En prenant $x \in (\sigma \circ \varphi_A^{-1} \circ \sigma^{-1})(y)$ nous avons $\varphi_B(x) = y$.

Donc B contient une partie infinie ($\sigma(A)$). Le lemme 1.71 conclut que B est infini. □

LEMooPGPVooZzlFvf

Lemme 1.75.
À propos d'applications entre ensembles finis.

ITEMooNCCUooBGrtdn

(1) Si $\sigma\colon A\to B$ est une application quelconque et si A est fini, alors $\sigma(A)$ est une partie finie de B.

ITEMooKQMFooSzmXrd

(2) Si $\sigma\colon A\to B$ est surjective et si A est fini, alors B est fini.

Démonstration. Nous allons utiliser le lemme de Zorn. Nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{A}=\{X\subset A \text{ tel que } \sigma\colon X\to\sigma(A) \text{ est injective}\} \tag{1.65}$$

que nous ordonnons (partiellement) par l'inclusion.

(1) **$\mathcal{A}$ est inductif** Soit une partie totalement ordonnée $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$. Nous considérons $Y=\bigcup_{X\in\mathcal{F}}X$, et nous prouvons que Y est un majorant de $\mathcal{F}$.

Pour cela nous commençons par prouver que $Y\in\mathcal{A}$. Soient $a,b\in Y$ tels que $\sigma(a)=\sigma(b)$. Il existe $X_1,X_2\in\mathcal{F}$ tels que $a\in X_1$ et $b\in X_2$. Supposons pour fixer les idées que $X_1\leqslant X_2$ ($\mathcal{F}$ étant totalement ordonné nous avons toujours $X_1\leqslant X_2$ ou $X_2\leqslant X_1$). Puisque l'ordre est l'inclusion, cela signifie que $X_1\subset X_2$. Nous avons donc $a,b\in X_2$, alors que σ est injective sur X_2. Donc $\sigma(a)=\sigma(b)$ implique $a=b$, et σ est injective sur Y. Nous avons donc prouvé que $Y\in\mathcal{A}$.

Puisque pour tout $X\in\mathcal{F}$ nous avons $X\subset Y$, nous avons $X\leqslant Y$ (dans $\mathcal{A}$) pour tout $X\in\mathcal{F}$. Bref, Y est un majorant de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{A}$.

Toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{A}$ est majorée. Cela signifie que $\mathcal{A}$ est inductif[27].

(2) **Zorn** L'ensemble $\mathcal{A}$ étant inductif et non vide (les singletons dans A sont dans $\mathcal{A}$), il possède un élément maximal[28] par le lemme de Zorn 1.37. Nous nommons A' un élément maximal dans $\mathcal{A}$.

(3) **Bijective** L'application $\sigma\colon A'\to\sigma(A)$ est injective parce que $A'\in\mathcal{A}$. Nous devons prouver qu'elle est surjective.

Supposons que $y\in\sigma(A)\setminus\sigma(A')$. Alors il existe $a\in A\setminus A'$ tel que $\sigma(a)=y$. Dans ce cas, la partie $A'\cup\{a\}$ est un majorant de A' dans $\mathcal{A}$, ce qui est impossible.

Donc $\sigma\colon A'\to\sigma(A)$ est bijective.

(4) **Conclusion** L'ensemble A' est fini en tant que partie de l'ensemble fini A (lemme 1.71). L'application σ étant injective, la proposition 1.74 conclut que $\sigma(A')$ est fini. Et comme $\sigma(A')$ n'est autre que $\sigma(A)$ nous avons fini.

La partie (1) est prouvée. La partie (2) est maintenant facile. La partie (1) dit que $\sigma(A)$ est une partie finie de B, mais si σ est surjective, alors $\sigma(A)=B$. □

1.3.3 Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein

SUBooCEMooSDNMooHrBBpsxb

Lemme 1.76 ([25])**.**
Soient un ensemble A et une partie B de A. Si il existe une injection $f\colon A\to B$ alors il existe une bijection $\alpha\colon A\to B$.

Nous donnons deux preuves de ce lemme.

Première preuve de 1.76. Nous posons $Y=A\setminus B$ et nous décomposons la preuve en étapes.

(1) **Les $f^k(Y)$ sont disjoints** Vu que f prend ses valeurs dans B, nous avons $f^k(Y)\subset B$ pour tout k. Et vu que $Y=A\setminus B$, nous avons

EQooDNHJooFJBrDq

$$f^k(Y)\cap Y=\varnothing \tag{1.66}$$

pour tout k. L'application f étant injective, elle vérifie $f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$. Nous appliquons f^m des deux côtés de (1.66) :

$$f^{k+m}(Y)\cap f^m(Y)=\varnothing \tag{1.67}$$

pour tout $k,m\in\mathbb{N}$.

[27] Plus précisément c'est l'ensemble ordonné $(\mathcal{A},\subset)$ qui est inductif.
[28] Définition 1.29 ; voir aussi 1.32.

(2) **Une décomposition** Nous posons

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^k(Y) = Y \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(Y). \tag{1.68}$$

Vu que $f(X) \subset B$ nous avons l'égalité

$$B = f(X) \cup \big(B \setminus f(X)\big). \tag{1.69}$$

(3) $A \setminus X = B \setminus f(X)$ Supposons $x \in A \setminus X$. Vu que $Y = A \setminus B$ est dans X, l'élément x n'est pas dans $A \setminus B$ et donc est dans B parce qu'il est dans A. Mais x n'est pas dans X et en particulier pas dans $f(X)$ parce que $f(X) \subset X$. Donc x est dans $B \setminus f(X)$.

Dans l'autre sens, nous supposons que $x \in B \setminus f(X)$. Vu que $B \subset A$ nous avons $x \in A$. Comme x est hors de $f(X)$, il est hors des $f^k(Y)$ pour $k \geqslant 1$. Mais $x \in B$, donc x est hors de $A \setminus B = f^0(Y)$. Donc x est hors de $f^k(Y)$ pour tout $k \geqslant 0$. Donc x est hors de X.

(4) **La bijection** Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \alpha\colon A &\to B \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ x & \text{si } x \in A \setminus X. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.70}$$

Nous démontrons dans les points suivants que α est bijective.

(5) **Injective** Nous supposons $\alpha(x) = \alpha(y)$. Il y a 4 possibilités suivant que x et y soient dans X ou $A \setminus X$.

Si $x, y \in X$ alors $f(x) = f(y)$ et donc $x = y$ parce que f est injective.

Si $x \in X$ et $y \in A \setminus X$, alors $f(x) = y$. Mais $f(x) \in f(X)$ et $y \in A \setminus X = B \setminus f(X)$. Donc l'élément $f(x) = y$ est dans $f(X) \cap \big(B \setminus f(X)\big) = \varnothing$. Il n'est donc pas possible d'avoir $\alpha(x) = \alpha(y)$ avec $x \in X$ et $y \in A \setminus X$.

Si $x \in A \setminus X$ et $y \in X$, c'est la même chose.

Si $x, y \in A \setminus X$, alors $x = \alpha(x) = \alpha(y) = y$.

(6) **Surjective** Soit $y \in B$. Il y a deux possibilités : $y \in X$ et $y \in A \setminus X$. La première se divise en deux : $y \in Y$ et $y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(Y)$. On y va.

(6a) $y \in Y$ Ce cas n'est pas possible parce que $y \in B$ alors que $Y = A \setminus B$.

(6b) $y \in f^k(Y)$ **avec** $k \geqslant 1$ Nous avons

$$y \in f\big(f^{k-1}(Y)\big) \subset f(X) \subset \alpha(A). \tag{1.71}$$

(6c) $y \in A \setminus X$ Alors $y = \alpha(y)$.

□

Deuxième preuve de 1.76[15]. Nous posons $Y = A \setminus B$ et

$$\mathcal{M} = \{M \subset A \text{ tel que } Y \cup f(M) \subset M\}. \tag{1.72}$$

Nous allons dire de nombreuses choses à propos de ce $\mathcal{M}$.

(1) $\mathcal{M}$ **est non vide** Nous avons $A \in \mathcal{M}$ parce que Y et $f(A)$ sont dans A.

(2) **Si** $M \in \mathcal{M}$ **alors** $Y \subset M$ C'est dans la définition de $\mathcal{M}$.

(3) **Encore un ensemble** Vu que $\mathcal{M}$ est non vide, nous pouvons poser

$$X = \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M \tag{1.73}$$

sans nous poser trop de questions. Cela étant fait, nous pouvons passer aux choses sérieuses.

(4) $f(X) \subset M$ **pour tout** $M \in \mathcal{M}$ Soit $M \in \mathcal{M}$. Nous avons

$$\begin{aligned} f(X) &\subset f(M) && \text{(1.74a)}\\ &\subset Y \cup f(M) && \text{(1.74b)}\\ &\subset M && \text{(1.74c)} \end{aligned}$$

Justifications.

- Pour (1.74a). Parce que $X \subset \mathcal{M}$.
- Pour (1.74c). Parce que $M \in \mathcal{M}$.

(5) $X \in \mathcal{M}$ Vu que $Y \subset M$ pour tout M dans $\mathcal{M}$, nous avons $Y \subset \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M = X$. Nous devons prouver $f(X) \subset X$. Nous venons de prouver que $f(X) \subset M$ pour tout $M \in \mathcal{M}$, donc

$$f(X) \subset \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M = X. \tag{1.75}$$

L'ensemble X est le plus petit élément de $\mathcal{M}$ pour l'inclusion.

(6) $Y \cup f(X) \subset X$ Ça fait partie de $X \in \mathcal{M}$. Mais c'est bien de le dire explicitement parce que nous allons l'utiliser quelques fois dans la suite.

(7) $Y \cup f(X) \in \mathcal{M}$ Vu que $X \in \mathcal{M}$, nous savons déjà que $Y \cup f(X) \subset X$. En appliquant f des deux côtés,

$$f\big(Y \cup f(X)\big) \subset f(X). \tag{1.76}$$

En ajoutant Y des deux côtés,

$$Y \cup f\big(Y \cup f(X)\big) \subset Y \cup f(X), \tag{1.77}$$

et donc $Y \cup f(X) \in \mathcal{M}$.

(8) $Y \cup f(X) = X$ Nous savons déjà que $Y \cup f(X) \in \mathcal{M}$. Vu que X est le plus petit élément de $\mathcal{M}$, nous avons

$$X \subset Y \cup f(X). \tag{1.78}$$

L'inclusion inverse étant déjà faite, nous avons l'égalité.

(9) $B \setminus f(X) = A \setminus X$ Nous avons :

$$\begin{aligned} A \setminus X &= A \setminus \big(Y \cup f(X)\big) && \text{(1.79a)}\\ &= (A \setminus Y) \cap \big(A \setminus f(X)\big) && \text{(1.79b)}\\ &= B \cap \big(A \setminus f(X)\big) && \text{(1.79c)}\\ &= (B \cap A) \setminus f(X) && \text{(1.79d)}\\ &= B \setminus f(X). && \text{(1.79e)} \end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (1.79b). Complémentaire de réunion, lemme 1.41(2).
- Pour (1.79c). Parce que $A \setminus Y = B$ du fait que $Y = A \setminus B$.
- Pour (1.79d). Lemme 1.41(3).
- Pour (1.79e). Parce que $B \subset A$.

(10) **Notre bijection** Nous voulons définir

$$\begin{aligned} \alpha\colon A &\to B \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ x & \text{si } x \in A \setminus X. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.80}$$

Pour y parvenir, nous devons prouver que α prend effectivement ses valeurs dans B. Ensuite nous prouverons que α est une bijection.

(11) α **prend ses valeurs dans** B Si $x \in X$ nous avons $\alpha(x) = f(x) \in B$. Si au contraire $x \in A \setminus X$ nous avons

$$\alpha(x) = x \in A \setminus X = B \setminus f(X) \subset B. \tag{1.81}$$

(12) α **est injective** Soient $x, y \in A$ tels que $\alpha(x) = \alpha(y)$. Il y a quatre possibilités suivant que x et y sont dans X ou dans $A \setminus X$.

(12a) $x \in X$, $y \in X$ Alors $f(x) = \alpha(x) = \alpha(y) = f(y)$. Vu que f est injective, nous trouvons que $x = y$.

(12b) $x \in X$, $y \in A \setminus X$ Nous avons $\alpha(x) = f(x) \in f(X)$ et $\alpha(y) = y \in A \setminus X = B \setminus f(X)$. Il n'est donc pas possible d'avoir $\alpha(x) = \alpha(y)$ dans ce cas.

(12c) $x \in A \setminus X$, $y \in X$ Idem.

(12d) $x \in A \setminus X$, $y \in A \setminus X$ Dans ce cas nous avons $\alpha(x) = x$ et $\alpha(y) = y$. Donc $x = y$.

(13) α **est surjective** Soit $b \in B$. Il y a deux possibilités : $b \in f(X)$ ou $b \notin f(X)$.

(13a) **Si** $b \in f(X)$ Soit $x \in X$ tel que $f(x) = b$. Alors $\alpha(x) = f(x) = b$.

(13b) **Si** $b \notin f(X)$ Alors $b \in B \setminus f(X) = A \setminus X$, et donc $\alpha(b) = b$.

□

THOooRYZJooQcjlcl

Théorème 1.77 (Cantor-Schröder-Bernstein)**.**
Soient deux ensembles A et B pour lesquels il existe des injections $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to A$. Alors il existe une bijection entre A et B.

Démonstration. La composée $g \circ f\colon A \to A$ est injective et prend ses valeurs dans $g\big(f(A)\big) \subset g(B) \subset A$. Bref, l'application $g \circ f\colon A \to g(B)$ est injective. Le lemme 1.76 donne alors une bijection $\varphi\colon A \to g(B)$.

Nous montrons que $g^{-1} \circ \varphi\colon A \to B$ est une bijection.

(1) **Injective** Nous supposons $x, y \in A$ tels que

$$g^{-1}\big(\varphi(x)\big) = g^{-1}\big(\varphi(y)\big). \tag{1.82}$$

Nous appliquons g des deux côtés : $\varphi(x) = \varphi(y)$. Puisque φ est une bijection, cela entraîne $x = y$.

(2) **Surjective** Soit $b \in B$. En posant $a = \varphi^{-1}\big(g(b)\big)$ nous avons bien $(g^{-1} \circ \varphi)(a) = b$.

□

1.3.4 Comparabilité cardinale

SUBoo6Thm6CabitreCardIntro

1.78.
Le théorème de comparabilité cardinale énonce que si A et B sont des ensembles, alors nous avons toujours $A \succeq B$ ou $A \preceq B$ (ou les deux ; dans ce cas $A \approx B$ par Cantor-Schröder-Bernstein).

THOooCBSKooCmzfUf

Théorème 1.79 (Théorème de comparabilité cardinale[1, 26, 27])**.**
Entre deux ensembles, il existe forcément une injection de l'un dans l'autre.

Démonstration. Nous allons montrer que le graphe d'une injection de A dans B ou de B dans A est donné par un élément maximal (au sens de l'inclusion) de l'ensemble (inductif) des graphes d'injections d'une partie de A dans une partie de B.

Nous allons utiliser le lemme de Zorn 1.37 à l'ensemble[29]

$$\mathcal{A} = \left\{ (X, Y, \varphi) \text{ tel que } \begin{cases} X \subset A \\ Y \subset B \\ \varphi\colon X \to Y \text{ est injective.} \end{cases} \right\} \tag{1.83}$$

que nous ordonnons par l'inclusion, c'est-à-dire par $(X_1, Y_1, \varphi_1) < (X_2, Y_2, \varphi_2)$ lorsque $X_1 \subset X_2$, $Y_1 \subset Y_2$ et $\varphi_2|_{X_1} = \varphi_1$.

Nous passons rapidement sur le fait que cet ensemble est inductif, et nous considérons tout de suite un élément maximal (X, Y, φ). Il y a deux possibilités : soit $\varphi(X) = B$, soit $\varphi(X) \neq B$.

(1) **Si** $\varphi(X) = B$ Dans ce cas, $\varphi\colon X \to B$ est une surjection. L'ensemble A est donc surpotent à B. La proposition 1.67 conclut que B est subpotent à A.

(2) **Si** $\varphi(X) \neq B$ Nous subdivisons en deux nouveaux cas : soit $X = A$, soit $X \neq A$.

[29] Attention : dans le Frido, la notation $f\colon A \to B$, signifie que f est définie sur tout l'ensemble A, mais pas qu'elle est surjective sur B.

(2a) **Si $X = A$** Alors nous avons une injection $\varphi: A \to B$, et c'est bon.

(2b) **Si $X \neq A$** Nous sommes dans le cas $X \neq A$ et $\varphi(X) \neq B$. Soient $a \in A \setminus X$ et $b \in B \setminus \varphi(X)$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi: X \cup \{a\} &\to Y \cup \{b\} \\ x &\mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in X \\ b & \text{si } x = a. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.84}$$

C'est une application injective. Donc le triplet $(X \cup \{a\}, Y \cup \{b\}, \psi)$ majore (X, Y, φ). Nous avons une contradiction et ce cas n'est pas possible.

□

NORMooOrdreSurEnsembles

1.80.
Le théorème de comparabilité cardinale couplé au théorème de Cantor-Schröder-Bernstein nous indique que pour tout ensembles A et B, nous avons soit $A \preceq B$, soit $B \preceq A$. Et si $A \preceq B \preceq A$, alors $A \approx B$.

Nous ne sommes pas loin de dire que la relation $\preceq$ donne un ordre total sur l'ensemble des ensembles. C'est très beau sauf que l'ensemble des ensembles n'existe pas[30]. Il faudrait parler de *classe* des ensembles, mais ça nous mènerait trop loin. Toujours est-il que ces deux théorèmes montrent qu'on n'est pas loin d'avoir un ordre sur les ensembles, et que cela est une des bases possibles pour développer les nombres cardinaux.

1.3.5 Théorème de Cantor, ensemble des ensembles

THOoSUBNoTheWSalut

Théorème 1.81 (Cantor[28])**.**
Un ensemble est toujours strictement subpotent à son ensemble des parties.

Démonstration. Soit un ensemble E et son ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$. Nous commençons par prouver qu'il n'existe pas de surjection $E \to \mathcal{P}(E)$. Soit en effet une application $f: E \to \mathcal{P}(E)$. Nous posons

$$D = \{x \in E \text{ tel que } x \notin f(x)\}. \tag{1.85}$$

Nous prouvons que D ne peut pas être dans l'image de f. Supposons que $y \in E$ soit tel que $f(y) = D$.

(1) **Si $y \in D$** Alors par définition de D, nous avons $y \notin f(y) = D$. Contradiction.

(2) **Si $y \notin D$** Alors $y \in f(y) = D$, contradiction.

Donc aucune surjection $f: E \to \mathcal{P}(E)$ n'existe. En particulier pas de bijections.

Par ailleurs, l'application $g: \mathcal{P}(E) \to E$ qui fait $g(\{a\}) = a$ (et n'importe quoi d'autre sur les autres éléments de $\mathcal{P}(E)$) est une surjection $\mathcal{P}(E) \to E$.

Donc $\mathcal{P}(E)$ est toujours strictement surpotent à E. □

NORooSensEnsSurpotent

1.82.
Le théorème de Cantor implique en particulier qu'il existe (au moins) une infinité dénombrable d'ensembles infinis de cardinalité différentes (plus évidemment une infinité dénombrable d'ensembles finis de cardinalité différentes).

Pour tout ensemble A, il est donc possible de dire « soit E, un ensemble strictement surpotent à A ».

CORooZMAOooPfJosM

Corolaire 1.83.
Il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.

Démonstration. Si E était un tel ensemble, nous aurions $\mathcal{P}(E) \subset E$ parce que les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des ensembles. Or cela donnerait une surjection $E \to \mathcal{P}(E)$ alors que cela est impossible par le théorème de Cantor 1.81. □

1.4 Quelques structures algébriques

NORMooSECooStructuresAlgebriques

1.84.
Nous collectons ici les définitions des principales structures algébriques.

DEFooBMUZooLAfbeM

Définition 1.85 (Groupe)**.**
*Un **groupe** est un ensemble G muni d'une opération interne $\cdot: G \times G \to G$ telle que*

[30] Corolaire 1.83.

(1) pour tous g, h, $k \in G$, $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$,

(2) il existe un élément $e \in G$ tel que $e \cdot g = g \cdot e = g$ pour tout $g \in G$,

(3) pour tout $g \in G$, il existe un élément $h \in G$ tel que $g \cdot h = h \cdot g = e$.

*Un groupe est **commutatif** ou **abélien** si $g \cdot h = h \cdot g$ pour tout $g, h \in G$.*

REMooNotationOperationGroupe

Remarque 1.86.
Remarquez que nous avons écrit $g \cdot h$ et non $\cdot(g,h)$ comme une notation purement fonctionnelle nous l'aurait suggéré. Dans les exemples concrets, selon les cas, la loi de groupe appliquée à g et h sera notée tantôt $g+h$, tantôt $g \cdot h$ ou, le plus souvent pour un groupe générique, simplement gh.

DEFooSousGroupe

Définition 1.87 (Sous-groupe)**.**
*Soit G un groupe et H un sous-ensemble de G. On dit que H est un **sous-groupe** de G si H, muni de l'opération héritée de G, est un groupe. Plus précisément, H est un sous-groupe de G si :*

(1) l'opération interne $\cdot : G \times G \to G$ restreinte à $H \times H$ a ses images dans H ;

(2) l'élément e est un élément de H ;

(3) lorsque $g \in H$, l'élément h tel que $g \cdot h = h \cdot g = e$ est en réalité dans H.

DEFooBEHTooMeCOTX

Définition 1.88 (morphisme, automorphisme)**.**
*Soient deux groupes G et H. Un **morphisme** entre G et H est une application $\alpha : G \to H$ telle que pour tous $g, h \in G$ nous ayons $\alpha(g \cdot_G h) = \alpha(g) \cdot_H \alpha(h)$.*

Comme d'habitude, un isomorphisme est un morphisme bijectif.

*Un **automorphisme** de G est un isomorphisme de G vers G lui-même. L'ensemble des automorphismes de G est noté $\mathrm{Aut}(G)$.*

PROPooJHHPooIpciPA

Proposition 1.89.
Si $\alpha : G \to H$ est un morphisme de groupes, alors $\alpha(G)$ est un sous-groupe de H.

Démonstration. Point par point vis-à-vis de la définition 1.87. On notera $\cdot$ l'opération de H et $\cdot_G$ celle de G.

(1) **Opération interne** Si h et h' sont deux éléments de $\alpha(G)$, il existe deux éléments g et g' de G tels que $h = \alpha(g)$ et $h' = \alpha(g')$. Alors

$$h \cdot h' = \alpha(g) \cdot \alpha(g') = \alpha(g \cdot_G g'),$$

puisque α est un morphisme de groupes. Ainsi $h \cdot h' \in \alpha(G)$ car il est l'image de $g \cdot_G g'$.

(2) **Neutre** On a $e_H = \alpha(e_G)$ quel que soit le morphisme α.

(3) **Inverse** L'inverse d'un élément $h = \alpha(g)$ est l'élément $\alpha(g^{-1})$.

□

LEMooKJMWooQeIwgF

Lemme 1.90.
Si G est un groupe, alors $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la composition.

Démonstration. Soient α et β des automorphismes de G. Alors nous prouvons que $\alpha \circ \beta$ est un automorphisme de G :

$$(\alpha \circ \beta)(gh) = \alpha\big(\beta(g)\beta(h)\big) = \alpha\big(\beta(g)\big)\alpha\big(\beta(h)\big) = (\alpha \circ \beta)(g)(\alpha \circ \beta)(h). \tag{1.86}$$

□

LEMooDPISooRoAFmt

Lemme 1.91.
Si G et H sont des groupes isomorphes, alors les groupes $\mathrm{Aut}(G)$ et $\mathrm{Aut}(H)$ sont isomorphes.

Démonstration. Soit un isomorphisme $f : G \to H$. D'abord pour tout $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, l'application $f \circ \alpha \circ f^{-1}$ est un automorphisme de H. Cela est rapidement vérifié parce que f, α et f^{-1} sont des bijections et des morphismes.

Nous pouvons donc considérer l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Aut}(G) &\to \mathrm{Aut}(H) \\ \alpha &\mapsto f \circ \alpha \circ f^{-1}. \end{aligned} \tag{1.87}$$

(1) ψ **est un morphisme** Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(G)$. Vu que f est une bijection, nous pouvons introduire $f^{-1} \circ f$ partout où ça nous plaît :

$$\psi(\alpha\beta) = f \circ \alpha \circ \beta \circ f^{-1} = f \circ \alpha \circ f^{-1} \circ f \circ \beta \circ f^{-1} = \psi(\alpha) \circ \psi(\beta). \tag{1.88}$$

(2) ψ **est injective** Si $\alpha\beta \in \mathrm{Aut}(G)$ sont tels que $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$, alors

$$f \circ \alpha \circ f^{-1} = f \circ \beta \circ f^{-1}. \tag{1.89}$$

Comme f est une bijection, cela implique que $\alpha = \beta$.

(3) ψ **est surjective** Si $\alpha \colon H \to H$ est un automorphisme, alors $\sigma = \psi(f^{-1} \circ \sigma \circ f)$ où il est facile de vérifier que $f^{-1} \circ \sigma \circ f \in \mathrm{Aut}(G)$.

□
DefHXJUooKoovob

Définition 1.92 (Anneau[29])**.**
Un ***anneau***[31] *est un triplet* $(A, +, \cdot)$ *avec les conditions*

(1) $(A, +)$ *est un groupe*[32] *commutatif. Nous notons* 0 *le neutre.*

(2) La multiplication est associative et admet un neutre, que nous notons 1*.*
ITEMooGMNOooSTGiXw

(3) La multiplication est distributive (à gauche et à droite) par rapport à l'addition. Cela signifie que, pour tous a*,* b *et* c *de* A*, nous avons les deux égalités*

$$a(b + c) = ab + ac \qquad et \qquad (a + b)c = ac + bc. \tag{1.90}$$

L'anneau $(A, +, \cdot)$ *est* ***commutatif*** *si pour tout* $a, b \in A$ *nous avons* $a \cdot b = b \cdot a$*.*
LEMooVUSMooWisQpD

Lemme 1.93.
Pour tout élément a *d'un anneau nous avons* $a \cdot 0 = 0$ *et* $0 \cdot a = 0$

Démonstration. L'élément 0 est le neutre de l'addition. Il peut être écrit $1 + (-1)$, et en utilisant la distributivité (à gauche),

$$a \cdot 0 = a \cdot (1 + (-1)) = a + (-a) = 0. \tag{1.91}$$

L'autre égalité se prouve de même avec la distributivité à droite. □
PROPooNCCGooXjVyVt

Proposition 1.94.
Dans un anneau[33] *non nul, le neutre pour l'addition est distinct du neutre pour la multiplication.*

Démonstration. Supposons par contraposée que dans un anneau A, nous ayons $1 = 0$. Alors, pour tout $a \in A$, on a $a = 1a = 0a = 0$: les égalités étant justifées respectivement par la définition de 1, l'hypothèse $1 = 0$, et le lemme 1.93. Ainsi, $a = 0$ pour tout $a \in A$ et l'anneau est nul. □
LEMooLTERooVKgqjn

Lemme 1.95 ([1])**.**
Un peu d'arithmétique. Soit un anneau A *et deux éléments* $a, b \in A$*. Nous avons les égalités suivantes :*
ITEMooWNPVooFeMQAp

(1) Si $a \neq 0$ *alors* $-a \neq 0$*.*
ITEMooUGHCooOPgoeR

(2) $1 \times 1 = 1$*.*
ITEMooJMBSooVgvVwg

(3) $(-1) \times a = -a$*.*
ITEMooXJGMooKNLlHU

(4) $-(-a) = a$*.*
ITEMooYMRKooHVYYKU

(5) $(-1) \times (-1) = 1$*.*
ITEMooAnneauArith5

(6) $(-a)b = -ab$
ITEMooHUJFooKkylVt

(7) $(-a)(-b) = ab$

Démonstration. En plusieurs parties.

[31] Nous faisons le choix qu'un anneau admet toujours un neutre pour la multiplication. Certains ouvrages parlent dans ce cas d'anneau unitaire.
[32] Groupe, définition 1.85.
[33] Définition 1.92.

(1) **Pour (1)** Si $-a=0$ alors en ajoutant a deux côtés, nous avons $0=a$ qui est contraire à l'hypothèse.

(2) **Pour (2)** La définition de 1 est que $1\times a=a$ pour tout a. En particulier pour $a=1$ nous avons le résultat.

(3) **Pour (3)** Nous avons

$$(-1)\times a+a=a\times\big((-1)+1\big)=a\times 0=0. \tag{1.92}$$

Nous avons utilisé le fait que la multiplication était distributive et que le zéro était absorbant (lemme 1.93).

(4) **Pour (4)** Nous avons $-a+a=0$ par définition de la notation $-a$. Donc a est bien l'inverse de $-a$ pour l'addition.

(5) **Pour (5)** En utilisant les points (3) et (4) nous avons

$$(-1)\times(-1)=-(-1)=1. \tag{1.93}$$

(6) **Pour (6) et (7)** Par propriété de distributivité[34], on a $ab+(-a)b=(a+(-a))b=0b=0$; donc l'opposé de ab s'écrit $-ab$ ou bien $(-a)b$.

Par la même propriété (avec l'autre égalité), on a $(-a)b+(-a)(-b)=(-a)(b+(-b))=(-a)0=0$, donc $(-a)b$ a pour opposé $(-a)(-b)=ab$.

□

NORooDistributiviteSoustraction

1.96.
La distributivité de la partie (3) de la définition 1.92 ne traite que de l'addition ; pas de la soustraction. Voici un lemme qui dit que la distriutivité fonctionne aussi avec les soustractions.

LEMooVPYUooRzexke

Lemme 1.97 ([15]).
Soient un anneau A ainsi que $a,b,c\in A$. Alors

$$a(b-c)=ab-ac. \tag{1.94}$$

Démonstration. Nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} a(b-c)+ac&=a\big((b-c)+c\big) && \text{SUBEQooKCOWooFeQHUM (1.95a)}\\ &=ab. && \text{SUBEQooMLLOooNRmIYM (1.95b)} \end{aligned}$$

Justifications :

- Pour 1.95a. Distributivité.
- Pour 1.95b. Parce que $(b-c)+c=b$.

Nous avons donc $a(b-c)+ac=ab$ et donc l'égalité demandée en ajoutant $-ac$ des deux côtés. □

DEFooSPHPooCwjzuz

Définition 1.98 (Morphisme d'anneaux[30]).
Si $(A,+,\cdot)$ et $(B,+,\cdot)$ sont des anneaux[35]*, un **morphisme d'anneaux** est une application $f\colon A\to B$ telle que*

(1) $f(a+b)=f(a)+f(b)$

(2) $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$

(3) $f(1)=1$.

Étant bien entendu que les significations de 1, $+$ et $\cdot$ sont différentes à gauche et à droite.

[34] Définition 1.92, point (3).
[35] Définition 1.92.

1.4.1 Positivité

SUBooZERMooAnneaux

Définition 1.99 ([1]).
Soit un anneau[36] *A. Une **positivité** sur A est une partie $A^+ \subset A$ telle que*

(1) Pour tout $a \neq 0$ dans A, nous avons[37] *$a \in A^+$ xor $-a \in A^+$.*

(2) Pour tout $a, b \in A^+$, nous avons $a + b \in A^+$.

Oui, il faudrait dire une stricte *positivité.*

PROPooKLOPooBgQqhM

Proposition 1.100 ([1]).
Soit A^+ une positivité[38] *sur A. Pour $a, b \in A$, on définit la relation $a \leqslant b$ si et seulement si $b - a \in A^+ \cup \{0\}$. Cette relation est une relation d'ordre*[39] *sur A.*

Démonstration. Nous vérifions les conditions de la définition 1.23.

(1) **Réflexivité** Vu que $a - a = 0$ et que $0 \in A^{\cup}\{0\}$, nous avons $a \leqslant a$.

(2) **Antisymétrie** Si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, nous avons

$$\begin{cases} b - a \in A^+ \cup \{0\} & \text{(1.96a)} \\ a - b \in A^+ \cup \{0\}. & \text{(1.96b)} \end{cases}$$

Par définition de la positivité, on ne peut avoir $a-b$ et $b-a$ tous les deux dans A^+. Donc soit $a-b=0$, soit $b-a=0$ (ou les deux en même temps, ce qui est le cas). Quoi qu'il en soit, on en déduit $a = b$.

(3) **Transitivité** Supposons que $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$. Nous avons alors

$$\begin{cases} b - a \in A^+ \cup \{0\} & \text{(1.97a)} \\ c - b \in A^+ \cup \{0\}. & \text{(1.97b)} \end{cases}$$

Si l'un des deux est nul, c'est facile. Nous supposons qu'ils sont tous les deux dans A^+. Alors leur somme est dans A^+ : $(b-a)+(c-b) \in A^+$. Cela donne tout de suite $c - a \in A^+$ et donc $a \leqslant c$ comme demandé.

□

1.4.2 Diviseurs, pgcd et ppcm

SUBooDiviseursPGCDPPCM

Définition 1.101 (Diviseurs dans un anneau).
Soit un anneau[40] *A. Soient $a, b \in A$. On dit que a divise b, ou que a est un **diviseur (à gauche)** de b si il existe $c \in A$ tel que $ac = b$. On dit que c'est un diviseur de b à droite si $ca = b$ pour un certain $c \in A$.*

*Dans un anneau commutatif, nous disons que a **divise** b si il existe $x \in A$ tel que $ax = b$. Dans ce cas nous écrivons $a \mid b$.*

NORMooAnneauIntegreIntro

1.102.
Un cas particulier est le cas des diviseurs de zéro. L'absence de tels diviseurs dans un anneau est une propriété intéressante : on dit dans ce cas que l'anneau est *intègre*. Nous définirons cela proprement en la définition 1.335, grâce à des propriétés équivalentes.

DEFooAnneauEltRegulier

Définition 1.103.
*Un élément $a \in A$ est **régulier à droite** si, dès lors qu'un élément $b \in a$ est tel que $ba = 0$, alors $b = 0$. Il est régulier à gauche si $ab = 0$ implique $b = 0$.*

PROPooRegulierMagmaAnneau

Proposition 1.104.
Soit A un anneau. La notion de régularité dans un anneau est équivalente à la notion de régularité[41] *dans le magma A muni de l'opération de multiplication.*

Démonstration. En deux étapes. On ne va faire que la régularité à gauche, il suffit d'adapter pour la régularité à droite.

[36] Définition 1.92.
[37] *xor* est le ou exclusif. L'un ou bien l'autre est vrai, mais on ne peut avoir les deux en même temps.
[38] Définition 1.99.
[39] Définition 1.23.
[40] Anneau,définition 1.98.
[41] Définition 1.63

(1) **Régulier dans le magma implique régulier dans l'anneau** Soit $a \in A$. On sait, par régularité de A dans le magma, que pour tous x et y de A, dès lors que $ax = ay$, alors $x = y$.

Soit $b \in A$. Supposons que $ab = 0$. Le lemme 1.93 permet d'écrire $ab = a0$. En prenant $x = b$ et $y = 0$, on en déduit $b = 0$, soit la régularité de a dans l'anneau.

(2) **Régulier dans l'anneau implique régulier dans le magma** Soit $a \in A$. On sait que l'égalité $ab = 0$ implique $b = 0$.

Soit $x, y \in A$. Supposons que $ax = ay$; alors $ax - ay = 0$ et par distributivité soustractive[42], $a(x-y) = 0$. Mais la régularité d'anneau dit alors que $x - y = 0$, et donc que $x = y$. Donc a est régulier dans le magma A.

□
DefrYwbct

Définition 1.105.
*Soient A un anneau commutatif et $S \subset A$. Nous disons que $\delta \in A$ est un **PGCD** de S si*

(1) δ divise[43] tous les éléments de S.
ITEMooVCKGooWDXZOj

(2) si d divise également tous les éléments de S, alors d divise δ.

*Nous disons que $\mu \in A$ est un **PPCM** de S si*

(1) $S \mid \mu$,

(2) si $S \mid m$, alors $\mu \mid m$.

Si P et Q sont des polynômes, ce que nous notons $\operatorname{pgcd}(P,Q)$ *est l'unique polynôme unitaire dans* $\operatorname{pgcd}\left(\{P,Q\}\right)$.
Voir 6.53.
REMooExistenceUnicitePGCD

Remarque 1.106.
On parle d'existence de pgcd dans 3.50.

Au sens de la définition 1.105, le pgcd n'est pas unique. Dans $\mathbb{Z}$ par exemple les nombres 4 et -4 sont tous deux pgcd de $\{4, 16\}$.

Dans $\mathbb{Z}$ cependant, nous modifions implicitement la définition et nous n'acceptons que les positifs, de telle sorte que l'unique pgcd soit effectivement le plus grand pour l'ordre usuel sur $\mathbb{Z}$.

Pour l'unicité dans $\mathbb{Z}$, voir 3.13.

1.4.3 Règle des signes dans un anneau totalement ordonné

SUBDefSigneACWToDOYdoXkJ

Définition 1.107 (Anneau totalement ordonné[1])**.**
*Un anneau A est **totalement ordonné** si, sur A, il existe une relation d'ordre total[44] compatible avec la structure d'anneau, c'est-à-dire tel que*
ITEMooZISJooWNxnBj

(1) $x \leqslant y$ implique $x + z \leqslant y + z$ pour tout $x, y, z \in A$
CONDooBYYDooElXgPO

(2) $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ implique $xy \geqslant 0$.
PROPooELXCooCYzEVD

Proposition 1.108 ([1])**.**
Soit un anneau totalement ordonné A.
ITEMooRRUGooRUpYwt

(1) Si $a \leqslant 0$ alors $-a \geqslant 0$.
ITEMooNKYCooCmqHsO

(2) Si $a \geqslant 0$ alors $-a \leqslant 0$
ITEMooXOTGooYxKubR

(3) Si $a, b \geqslant 0$ alors $a + b \geqslant 0$

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** En vertu de 1.107(1) nous pouvons ajouter $-a$ est deux côtés de $a \leqslant 0$: $a - a \leqslant 0 - a$ et donc $0 \leqslant -a$.

(2) **Pour (2)** On écrit $a \geqslant 0$ et nous faisons $-a$ des deux côtés pour obtenir $a - a \geqslant 0 - a$, c'est-à-dire $0 \geqslant -a$.

[42] Lemme 1.97.
[43] Définition 1.101.
[44] Définition 1.24.

(3) **Pour (3)** Nous avons $a \geqslant 0$. Nous ajoutons b des deux côtés pour avoir $a + b \geqslant b \geqslant 0$.

□

LEMooXJTAooZauchx

Lemme 1.109 (Règle des signes[31])**.**
Soit un anneau totalement ordonné A ainsi que $x, y \in A$. Nous avons :

ITEMooHESRooKrDult

(1) *Si $x, y \geqslant 0$ alors $xy \geqslant 0$.*

ITEMooNLAQooHtERZJ

(2) *Si $a \geqslant 0$ et $b \leqslant 0$ alors $ab \leqslant 0$.*

ITEMooDZUJooVWuLbD

(3) *Si $a, b \leqslant 0$ alors $ab \geqslant 0$*

ITEMooRGYAooCUIfss

(4) *$0 < 1$.*

ITEMooMRNHooLglPKn

(5) *Si $x \geqslant 0$ et x est inversible dans A, alors $x^{-1} \geqslant 0$.*

Démonstration. Plusieurs points.

(1) **Pour (1)** C'est directement la définition 1.107(2).

(2) **Pour (2)** En posant $x = a$ et $y = -b \geqslant 0$ (par la proposition 1.108(1)), nous avons $xy \geqslant 0$ par la définition 1.107(2). Nous avons alors $a(-b) = -ab \geqslant 0$ par (1), et donc $ab \leqslant 0$.

(3) **Pour (3)** Nous posons $a' = -a$ et $b' = -b$. Par 1.108(1) nous avons $a', b' \geqslant 0$. Donc $a'b' \geqslant 0$ par le point (2). Mais $a'b' = (-a)(-b) = ab$ par le lemme 1.95(7).

(4) **Pour (4)** Supposons par l'absurde que $1 \leqslant 0$. L'utilisation de (3) avec $a = b = 1$ donne $ab = 1 \cdot 1 = 1 \geqslant 0$, ce qui nous contredit. Ainsi, $1 > 0$.

(5) **Pour (5)** Si $x^{-1} < 0$, alors $1 = xx^{-1} < 0$. Mais comme nous venons de voir que $1 \geqslant 0$ nous déduisons que $x^{-1} \geqslant 0$.

□

1.4.4 Valeur absolue, corps valué

DEFooPWXXooAsBRnS

Définition 1.110 (Valeur absolue, corps valué[32, 33])**.**
*Un **anneau valué** A est un annau totalement ordonné muni d'une application $|.| : A \to \mathbb{K}$ telle que*

(1) *$|x| \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}$,*

(2) *$|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$,*

(3) *$|x + y| \leqslant |x| + |y|$*

(4) *$|xy| \leqslant |x||y|$.*

*Une telle application est une **valeur absolue**.*

NORooLienCorpsValueEspaceMetrique

1.111.
Un corps valué sera un espace topologique métrique dans la définition 7.236. Dans le cas d'un corps totalement ordonné, nous avons une valeur absolue donnée par 1.113 et les principales propriétés dans le lemme 1.114.

NORooValAbsGenerale

1.112.
La plupart du temps, la valeur absolue $|.|$ sera à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Cependant nous avons besoin d'une définition générale parce que nous allons devoir définir ce qu'est une suite de Cauchy (définition 1.493(1)) dans un corps avant la définition des réels ; les réels étant définis comme étant des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

DEFooJXKVooErANPh

Proposition-Définition 1.113 (Valeur absolue[1])**.**
Si A est un anneau totalement ordonné[45]*, alors l'application*

$$|x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ x & si\ x > 0. \end{cases} \tag{1.98}$$

EQooNONAooHLSERO

[45] Définition 1.107.

est une valeur absolue[46]*. Elle vérifie de plus*

$$|xy| = |x||y|. \tag{1.99}$$

EQooORNAooBYFeFk

Par défaut, lorsque nous parlons de la valeur absolue sur A, c'est celle-ci.

Démonstration. Il faut vérifier les conditions de la définition 1.110.

(1) $|x| = 0$ **si et seulement si** $x = 0$ C'est la définition et le fait que $-x \neq 0$ lorsque $x \neq 0$ par le lemme 1.95(1).

(2) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ Il y a 4 possibilités suivant la positivité de x et y.

(2a) **Si** $x, y \geqslant 0$ Alors $x + y \geqslant 0$ par la proposition 1.108(3). Donc $|x| = x$, $|y| = y$ et $|x + y| = x + y$.

(2b) **Si** $x \geqslant 0$ **et** $y < 0$ Nous posons $y' = -y$, et nous avons deux possibilités : $y' \geqslant x$ et $y' < x$.

(2b.i) **Si** $y' < x$ Alors en posant $a = x - y'$ nous avons $a > 0$. Nous avons ensuite :

$$|x + y| = |y' + a + y| = |y' + a - y'| = |a| = a. \tag{1.100}$$

Mais

$$|x| + |y| = x + y' = y' + a + y' = a + 2y' \geqslant a = |x + y|. \tag{1.101}$$

(2b.ii) **Si** $y' \geqslant x$ Alors en posant $a = y' - x$ nous avons $a \geqslant 0$ et

$$|x + y| = |x - y'| = |x - (x + a)| = | - a| = a. \tag{1.102}$$

Mais aussi

$$|x| + |y| = x + y' = x + x + y = 2x + a \geqslant a. \tag{1.103}$$

Les autres cas sont du même style.

(3) $|xy| = |x||y|$

Il y a 4 possibilités.

(3a) **Si** $x, y \geqslant 0$ Nous avons directement $|x| = x$, $|y| = y$. Par ailleurs A est un anneau totalement ordonné ; la définition 1.107(2) donne $xy \geqslant 0$ et donc $|xy| = xy$.

(3b) **Si** $x \geqslant 0$ **et** $y \leqslant 0$ La définition de la valeur absolue donne $|x| = x$ et $|y| = -y$. Par ailleurs la proposition 1.109(2) dit que $xy \leqslant 0$ de telle sorte que $|xy| = -xy$.

(3c) **Si** $x \leqslant 0$ **et** $y \geqslant 0$ Même chose.

(3d) **Si** $x, y \leqslant 0$ Même chose, en utilisant 1.109(3).

□

LemooANTJooYxQZDw

Lemme 1.114 (Propriétés de la valeur absolue)**.**
Soit A un anneau totalement ordonné muni de la valeur absolue usuelle (définition 1.113). Si $x, y \in A$, alors :

ITEMooSDNHooDnjScE

(1) $|x| \geqslant 0$

ITEMooLQLTooTJTPVM

(2) $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$

ITEMooVJAEooOEatzY

(3) $| - x| = |x|$.

ItemooOMKNooRlanvk

(4) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

ITEMooISWFooMeOtjZ

(5) $|x - y| \leqslant |x - z| + |z - y|$.

ITEMooEFMLooYVCuHD

(6) $|xy| = |x||y|$

Démonstration. Point par point

(1) **(1)** Si $x \geqslant 0$ alors c'est vrai. Sinon, $x \leqslant 0$ et $|x| = -x \geqslant 0$ par le point (1) de la proposition 1.108.

(2) **(2)** Si $x = 0$ alors $x = -x$ et $|x| = 0$. Si $x \neq 0$ alors $-x \neq 0$ (par le lemme 1.95 point (1)). Que l'on ait x positif ou x négatif, nous aurons toujours $|x| \pm x \neq 0$.

[46] Définition 1.110.

(3) **(3)** Il faut décomposer en deux cas selon que $x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 0$.

Lorsque $x \leqslant 0$, on a $|x| = -x$ par définition, et par ailleurs, $-x \geqslant 0$ grâce au point (2) du lemme 1.95, donc $|-x| = -x = |x|$.

Supposons $x \geqslant 0$. Alors d'une part $|x| = x$. D'autre part $-x \leqslant 0$ par le point (1) de la proposition 1.108, de telle sorte que

$$|-x| = -(-x) = x, \tag{1.104}$$

cette dernière égalité étant justifiée par le point (4) du lemme 1.95.

Nous avons donc bien $|x| = |-x|$ quel que soit le cas considéré.

(4) **(4)** Nous supposons que $x \leqslant y$ et nous distinguons divers cas suivant la positivité de x et y.

(4a) Si $x, y \geqslant 0$. Dans ce cas, $x + y \geqslant y \geqslant 0$, donc $|x + y| = x + y = |x| + |y|$.

(4b) Si $x, y \leqslant 0$. Dans ce cas, $x + y \leqslant 0$ et nous avons $|x + y| = -x - y = |x| + |y|$.

(4c) Si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Nous subdivisons encore en deux cas suivant que $x + y$ est positif ou négatif. Si $x + y \geqslant 0$, alors nous écrivons successivement

$$x \leqslant 0 \tag{1.105a}$$
$$x + y \leqslant y \leqslant y + |x| = |x| + |y| \tag{1.105b}$$

et donc $|x + y| = x + y \leqslant |x| + |y|$.

Nous supposons à présent que $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 0$. Dans ce cas il suffit d'écrire $|x + y| = |(-x) + (-y)|$ pour retomber dans le cas précédent à inversion près de x et y.

(5) **Pour (5)** Soient $x, y, z \in \mathbb{K}$. En utilisant (4) nous avons

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leqslant |x - z| + |z - y|. \tag{1.106}$$

(6) **Pour (6)** Il suffit de prendre les 4 cas suivant les signes de x et y, et d'utiliser les règles de signes du lemme 1.109 dans la définition (1.98).

□

1.5 Les entiers naturels

NORMooEntiersNaturels

1.115 ([34]).
Comme le dit la page de Wikipédia consacrée aux nombres entiers, il faut savoir ce dont on parle. Les collégiens français apprennent que les entiers sont les nombres positifs ; les Québécois et les Belges y ajoutent les négatifs…

Dans le Frido, on dira « entier naturel » voire « naturel » pour les positifs, et « entier relatif » voire « entier » quand on accepte les négatifs. C'est un choix pas standard dont il faut avoir conscience.

1.5.1 Triplet naturel

DEFMooTripletNaturel

Définition 1.116 ([35]).
*Un **triplet naturel** est un triplet $(\mathcal{N}, o, s)$ où $\mathcal{N}$ est un ensemble, o est un élément de $\mathcal{N}$ et s est une application $s : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

(1) s est injective, ITEMooQAKJooGKdJsM

(2) $s(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \setminus \{o\}$ ITEMooXPYEooFajywh

(3) Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ est tel que $o \in \mathcal{A}$ et $s(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A} = \mathcal{N}$. NORMooTripletNaturelGratterTheoEns

1.117.
Le théorème suivant est typiquement de ceux qui vont demander de gratter la théorie axiomatique des ensembles avec une certaine précision. Comme nous l'avons dit en introduction 1.1, nous n'avons pas l'intention de préciser nos axiomes, mais notre principe de construction est connu et dû à John Von Neumann.

Nous verrons plus tard, en 1.143, que toute partie infinie d'un triplet naturel fournit un nouveau triplet naturel ; il en existe donc plusieurs.

THOooOXMHooXYgMqb

Théorème 1.118.
Il existe un triplet naturel.

NORMooConstructionTripletNaturel

1.119 (Idée de la construction[36, 37])**.**
Nous effectuons une construction de plusieurs ensembles, puis vérifier que l'ensemble final, muni du nécessaire, forme un triplet naturel.

(1) **Le premier élément** On pose $o = \varnothing$. Dans une axiomatisation raisonnable, l'ensemble vide existe toujours.

(2) **Le principe de construction** On construit $A_1 = o \cup \{o\}$ et on pose $s(o) = A_1$. Puis on définit $A_2 = A_1 \cup \{A_1\}$, et on pose $s(A_1) = A_2$.

De manière générale[47], une fois un ensemble A_i construit sur ce principe, on ajoute l'ensemble $A_i \cup \{A_i\}$ à notre construction, et on pose $s(A_i) = A_i \cup \{A_i\}$.

Finalement, l'ensemble $\mathcal{N}$ est la réunion[48] de tous les ensembles A_i ainsi construits, et l'application să est définie par $s(A) = A \cup \{A\}$.

(3) **Une remarque intéressante** En observant bien, on remarque que $o \in A_1$ mais aussi $o \subset A_1$. De même, $A_1 \subset A_2$ et donc $o \in A_2$ tout comme $A_1 \in A_2$. On a aussi $o \subset A_2$

En fait, dans tous les ensembles que l'on construit, on aura toujours un principe d'inclusion, et aussi d'appartenance. Bien que l'intuition nous fait penser que ça fonctionne, la preuve n'est pas évidente.

(4) **On a un triplet naturel** Montrons que $(\mathcal{N}, o, s)$ est bien un triplet naturel.

(4a) s est-elle injective ? Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{N}$ avec $A \neq B$, alors par la remarque ci-dessus, et quitte à inverser A et B, on a $A \subset B$. On en déduit que B est construit après A, et donc $A \cup \{A\} \subset B$. Mais, toujours par construction, $\{B\}$ ne peut être dans A, ni être égal au singleton $\{A\}$: ainsi $A \cup \{A\} \subset B \cup \{B\}$ mais $A \cup \{A\} \neq B \cup \{B\}$, soit $s(A) \neq s(B)$.

(4b) A-t-on $s(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \setminus \{o\}$? Par construction, un élément $B \in \mathcal{N} \setminus \{o\}$ est de la forme $A \cup \{ăA\}$ pour un certain ensemble A, lui-même dans $\mathcal{N}$.

(4c) Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{N}$ tel que $o \in \mathcal{A}$ et $s(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Cette dernière hypothèse nous dit que, dès que $A \in \mathcal{A}$, alors $A \cup \{A\} \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ contient $o = \varnothing$, il contient aussi A_1, donc aussi A_2, et par suite $\mathcal{N}$ tout entier. Finalement, $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$, donc l'égalité.

NORooDefinitionNChoixTriplet

1.120 (Définition de $\mathbb{N}$)**.**
Pour la suite, nous considérons un triplet naturel $(\mathcal{N}, o, s)$ et nous notons $\mathbb{N} = \mathcal{N}$. Donc la nature de tous les objets que nous allons considérer à partir de maintenant dépend du choix de triplet naturel que nous faisons à présent. Le théorème 1.157 nous assurera que peu de choses devraient réellement dépendre de ce choix.

Nous notons 0 l'élément o et 1 l'élément $s(0)$. C'est tout ce dont nous avons besoin dans l'immédiat.

1.5.2 Applications définies par récurrence

SUBRoAppliDefiRecurVocq

Proposition 1.121 (Récurrence[35])**.**
Soit un triplet naturel $(\mathcal{N}, o, s)$ et une application $P\colon \mathcal{N} \to \{0, 1\}$ vérifiant[49]

(1) $P(o) = 1$,

(2) pour tout $a \in \mathcal{N}$, si $P(a) = 1$, alors $P\big(s(a)\big) = 1$.

Alors $P(x) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{N}$.

Démonstration. Nous posons

$$A = \{x \in \mathcal{N} \text{ tel que } P(x) = 1\}. \tag{1.107}$$

Cet ensemble vérifie la propriété 1.116(3). Donc $A = \mathcal{N}$. □

[47] Ici on voit que nous ne sommes pas en train d'écrire une vraie démonstration parce que « de manière générale » n'est pas quelque chose de précisément défini. En particulier nous ne disposons pas encore de théorèmes formalisant les constructions par récurrence ;on serait tenté d'utiliser le théorème 1.122.

[48] Ici aussi c'est compliqué parce que rien ne garantit qu'il existe un ensemble contenant tous les A_i. Une construction un peu similaire construit les ordinaux, et dans ce cas, il n'existe pas d'ensembles contenant tous les ordinaux.

[49] Les plus pointilleux diront que 1 n'est pas encore défini. Bon j'avoue. Ce qui est important est que P prenne ses valeurs dans un ensemble contenant deux éléments distincts. Si maintenant vous râlez parce que « deux » est encore moins défini, prenez un ensemble quelconque A et dites que P prend ses valeurs dans $\{A, \mathcal{P}(A)\}$. Mais êtes-vous bien certain que $\mathcal{P}(A) \neq A$?

THOooEJPYooZFVnez

Théorème 1.122 ([15, 38]).
Soient E un ensemble, g une application de E dans E et b un élément de E. Alors il existe une unique application $f\colon \mathbb{N} \to E$ telle que :

(1) $f(0) = b$

(2) $f\big(s(n)\big) = g\big(f(n)\big)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Démonstration. Nous commençons par l'unicité. Soient f_1 et f_2 deux telles applications. Nous posons

$$A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } f_1(n) = f_2(n)\}. \tag{1.108}$$

Nous avons $0 \in A$ parce que $f_1(0) = f_2(0) = b$.

Supposons que $f_1(k) = f_2(k)$. Alors nous avons

$$f_1\big(s(k)\big) = g\big(f_1(k)\big) = g\big(f_2(k)\big) = f_2\big(s(k)\big). \tag{1.109}$$

Nous en déduisons que $s(k) \in A$. Autrement dit $s(A) \subset A$. La définition 1.116(3) nous indique alors que $A = \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $f_1 = f_2$.

Nous montrons à présent l'existence en plusieurs étapes.

(1) **L'ensemble est assez grand** Nous considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties $A \subset \mathbb{N} \times E$ telles que

(1a) $(0, b) \in A$

(1b) $(n, x) \in A \Rightarrow \big(s(n), g(x)\big) \in A$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide parce que $\mathbb{N} \times E \in \mathcal{A}$.

(2) **Le plus petit** Nous posons

$$G = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A, \tag{1.110}$$

et nous prouvons que $G \in \mathcal{A}$. D'abord $(0, b) \in G$ parce que cet élément est dans chacun des $A \in G$. Ensuite si $(n, x) \in G$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ nous avons $(n, x) \in A$ et donc $\big(s(n), g(x)\big) \in A$. Par conséquent $\big(s(n), g(x)\big) \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = G$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ nous posons

$$G_n = \{x \in E \text{ tel que } (n, x) \in G\}. \tag{1.111}$$

Nous avons en particulier que $b \in G_0$ parce que $(0, b) \in G$.

(3) G **contient un** (n, x) **pour tout** n Nous prouvons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in E$ tel que $(n, x) \in G$. Nous faisons ça avec la proposition 1.121 en posant

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{N} &\to \{0, 1\} \\ n &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } G_n \neq \varnothing \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.112}$$

Puisque $(0, b) \in G$ nous avons $P(0) = 1$. Supposons que $P(k) = 1$ et montrons que $P\big(s(k)\big) = 1$. Comme $P(k) = 1$, il existe $x \in E$ tel que $(k, x) \in G$. De ce fait, $\big(s(k), g(x)\big) \in G$, ce qui donne $G_{s(k)} \neq \varnothing$ et $P\big(s(k)\big) = 1$.

(4) G_n **est un singleton** Nous avons vu que G_n n'est jamais vide. Nous allons montrer que G_n est un singleton pour tout n. Pour cela nous posons

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{N} &\to \{0, 1\} \\ n &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } G_n \text{ est un singleton} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.113}$$

Nous prouvons par récurrence que $P(n) = 1$ pour tout n.

(4a) $P(0) = 1$ Nous commençons par prouver que $P(0) = 1$. Nous savons que $(0, b) \in G_0$. Supposons $a \neq b$ tel que $(0, a) \in G_0$. Alors en posant $G' = G \setminus \{(0, a)\}$ nous avons $G' \in \mathcal{A}$.

En effet $(0, b) \in G'$ parce que $(0, b) \in G$ et $(0, b) \neq (0, a)$. De plus si $(n, x) \in G'$, alors $\big(s(n), g(x)\big) \in G$. Mais comme $s(n) \neq 0$ nous avons $\big(s(n), g(x)\big) \neq (0, a)$ et donc $\big(s(n), g(x)\big) \in G'$. L'ensemble G' serait un élément de $\mathcal{A}$ strictement inclus dans G. Impossible. Donc G_0 est un singleton.

(4b) **Récurrence** Supposons que $P(k) = 1$, c'est-à-dire que G_k est un singleton. Soit e l'unique élément de G_k : $(k, e) \in G$. Nous avons alors aussi que $\big(s(k), g(e)\big) \in G$. Nous devons prouver que si $y \in G_{s(k)}$, alors $y = g(e)$.
Supposons donc $y \neq g(e)$ soit dans $G_{s(k)}$. Nous posons

$$G' = G \setminus \{\big(s(k), y\big)\}. \tag{1.114}$$

Nous prouvons que $G' \in \mathcal{A}$. D'abord $(0, b) \in G'$ parce que $s(k) \neq 0$. Soit ensuite $(m, z) \in G'$. Si $m = k$, alors $z = e$ (parce que par hypothèse G_k est un singleton) et nous savons que $\big(s(m), g(e)\big) \in G'$. Si par contre $m \neq k$, comme s est injective, nous avons aussi $s(m) \neq s(k)$. Donc $\big(s(m), g(z)\big) \neq \big(s(k), y\big)$ et $\big(s(m), g(z)\big) \in G'$. Donc $G' \in \mathcal{A}$ et est strictement plus petit que G. Contradiction.
Nous concluons que $G_{s(k)}$ est un singleton, c'est-à-dire que $P\big(s(k)\big) = 1$.

(4c) **Conclusion** Nous avons prouvé que G_n est un singleton pour tout n.

(5) **Et enfin**

Nous définissons $f(n)$ comme étant l'unique élément de G_n. Puisque $(0, b) \in G$ nous avons $G_0 = \{b\}$ et donc $g(0) = b$.

Par définition de f, nous avons $\big(n, f(n)\big) \in G$. Parce que $G \in \mathcal{A}$ nous avons alors

$$\big(s(n), g\big(f(n)\big)\big) \in G. \tag{1.115}$$

Autrement dit, $G_{s(n)} = \{g\big(f(n)\big)\}$. Cela montre que

$$f\big(s(n)\big) = g\big(f(n)\big), \tag{1.116}$$

et donc que f vérifie les propriétés demandées.

□
NORMooLNXMooWIblPf

1.123 ([1]).
Le théorème 1.122 nous permet de définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant par exemple

$$\begin{cases} x_1 = b & \text{(1.117a)} \\ x_{n+1} = f(x_n). & \text{(1.117b)} \end{cases}$$

Parfois nous pouvons avoir envie de définir une suite par récurrence de telle sorte que chaque nouveau terme dépende de tous les précédents :

$$\begin{cases} x_1 = b & \text{(1.118a)} \\ x_{n+1} = g(x_1, \dots, x_{n-1}). & \text{(1.118b)} \end{cases}$$

Pour ce faire, il faut un peu adapter.

Posons $E' = E \cup (E \times E) \cup (E \times E \times E) \cup \dots$. Nous supposons avoir une application $g\colon E' \to E'$ qui ne prend ses valeurs que dans E : $g(E') \subset E$. De plus nous considérons l'application

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} &\to E' \\ n &\mapsto \big(f(0), \dots, f(n)\big). \end{aligned} \tag{1.119}$$

Le théorème 1.122 appliqué à $g \circ a$ nous donne l'existence et l'unicité d'une application $f\colon \mathbb{N} \to E'$ telle que

$$\begin{cases} f(0) = b & \text{(1.120a)} \\ f(n+1) = g\big(f(0), \dots, f(n)\big). & \text{(1.120b)} \end{cases}$$

CORooVNHKooRkKtXf

Corolaire 1.124 ([15]).
Soient deux ensembles X, Y, une application $\alpha\colon X \to Y$ et une application $\beta\colon Y \to Y$. Alors il existe une unique application $H\colon X \times \mathbb{N} \to Y$ telle que

(1) $H(x, 0) = \alpha(x)$ pour tout élément $x \in X$;

(2) $H(x, n+1) = \beta(H(x, n))$ pour tout élément $x \in X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Pour faire le lien avec les notations du théorème 1.122, nous notons $E = \mathrm{Fun}(X, Y)$, $b = \alpha \in E$ et

$$\begin{aligned} g\colon E &\to E \\ s &\mapsto \beta \circ s. \end{aligned} \tag{1.121}$$

Le théorème 1.122 donne alors l'existence d'une application $f\colon \mathbb{N} \to E$ telle que

(1) $f(0) = b$

(2) $f(n+1) = g\big(f(n)\big)$.

Nous définissons alors

$$\begin{aligned} H\colon X \times \mathbb{N} &\to Y \\ (x, n) &\mapsto f(n)x, \end{aligned} \tag{1.122}$$

et nous vérifions qu'elle satisfait aux exigences.

(1) D'abord nous avons

$$H(x, 0) = f(0)x = b(x) = \alpha(x). \tag{1.123}$$

(2) Ensuite, pour $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$\begin{aligned} H(x, n+1) &= f(x+1)x && \text{(1.124a)} \\ &= g\big(f(n)\big)x && \text{(1.124b)} \\ &= g\big(f(n)\big)x && \text{(1.124c)} \\ &= \big(\beta \circ f(n)\big)x && \text{(1.124d)} \\ &= \beta\big(f(n)x\big) && \text{(1.124e)} \\ &= \beta\big(H(x, n)\big). && \text{(1.124f)} \end{aligned}$$

Et voilà. □

1.5.3 Addition sur les naturels

PRSOoVRDNooNatupEs

Proposition-Définition 1.125 ([35, 1]).
Il existe une unique fonction $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant

ITEMooILZSooNYIkYR

(1) $f(a, 0) = a$ pour tout $a \in \mathbb{N}$

ITEMooZWHQooBAjZyE

(2) $f\big(a, s(b)\big) = s\big(f(a, b)\big)$ pour tout $a, b \in \mathbb{N}$.

Pour $a, b \in \mathbb{N}$ nous notons $f(a, b) = a + b$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{N}$. Le théorème 1.122 dit qu'il existe une unique application $f_a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{N}$, SUBEQSooWUGPooSxezFi

$$\begin{cases} f_a(0) = a & \text{EQooVOCZooOCHZLn} \quad \text{(1.125a)} \\ f_a\big(s(x)\big) = s\big(f_a(x)\big). & \text{EQooMEYWooEsWofl} \quad \text{(1.125b)} \end{cases}$$

Montrons qu'une telle application vérifie $f_0(a) = a$ pour tout $a \in \mathbb{N}$. Pour cela nous utilisons la récurrence de la proposition 1.121 en posant

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{N} &\to \{0, 1\} \\ n &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } f_0(n) = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.126}$$

Nous avons $f_0(0) = 0$ en posant $a = 0$ dans (1.125a). Supposons ensuite que $P(a) = 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} f_0\big(s(a)\big) &= s\big(f_0(a)\big) && && \text{(1.127a)} \\ &= s(a) && \text{pcq } P(a) = 1. && \text{(1.127b)} \end{aligned}$$

Donc $P\big(s(a)\big) = s(a)$. Nous en déduisons que $P(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ et donc que

$$f_0(x) = x \tag{1.128}$$ EQooIKGVooHQMQqX

pour tout x.

Avec ça, nous prouvons ce qu'il faut.

(1) **Existence** Nous posons $f(a,b)=f_a(b)$, et nous prouvons les deux conditions.

(1a) **Condition (1)** Nous avons $f(a,0)=f_a(0)=a$ par (1.128).

(1b) **Condition (2)** Nous avons :

$$f\big(a,s(b)\big)=f_a\big(s(b)\big)=s\big(f_a(b)\big)=s\big(f(a,b)\big). \tag{1.129}$$

(2) **Unicité** Soient f et g deux applications vérifiant les conditions. Nous posons

$$\begin{aligned} f_a\colon \mathbb{N}&\to\mathbb{N}\\ x&\mapsto f(a,x) \end{aligned} \tag{1.130}$$

et $g_a\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ de la même manière. Nous prouvons que f_a et g_a vérifient tous deux les conditions (1.125). Cela donnera $f_a=g_a$ et donc $f=g$.

D'abord

$$f_a\big(s(b)\big)=f\big(a,s(b)\big)=s\big(f(a,b)\big)=s\big(f_a(b)\big). \tag{1.131}$$

Ensuite nous prouvons par récurrence que $f_a(0)=a$ pour tout $a\in\mathbb{N}$. D'abord $f(0,0)=0$, ensuite

$$f\big(0,s(a)\big)=s\big(f(0,a)\big)=s(a). \tag{1.132}$$

De même g_a vérifie les conditions.

□

LEMooMJMTooOtUuJT

Lemme 1.126 ([35]).
Pour tout $a\in\mathbb{N}$ nous avons $s(a)=a+1$.

Démonstration. Nous avons :

$$\begin{aligned} s(a)&=s(a+0) && \text{(1.133a)}\\ &=a+s(0) && \text{(1.133b)}\\ &=a+1. && \text{(1.133c)} \end{aligned}$$

SUBEQooMNBLooTOruhE

SUBEQooAGUSooGjiYGj

SUBEQooUZQDooWtNBHQ

Justifications.

(1) Pour (1.133a) c'est dans la définition 1.125(1) de la somme.

(2) Pour (1.133b), c'est dans la définition 1.125(2) de la somme.

(3) Pour (1.133c). Le symbole « 1 » désigne l'élément $s(0)$ dans $\mathbb{N}$.

□

PROPooTLTSooGNMTmV

Proposition 1.127 ([35]).
En ce qui concerne la somme dans $\mathbb{N}$.

ITEMooIFFPooXfftfG

(1) La somme est associative et commutative.

ITEMooSGRVooPAVFYK

(2) L'élément 0 est neutre.

ITEMooNUTHooJWWzGv

(3) Tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont réguliers[50] *par rapport à l'addition.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Associative** Nous devons prouver que $(a+b)+c=a+(b+c)$ pour tout $a,b,c\in\mathbb{N}$. Pour ce faire, nous fixons $a,b\in\mathbb{N}$ et nous prouvons l'égalité demandée par récurrence sur c.

Pour $c=0$, nous avons $(a+b)+c=a+b$ et $a+(b+c)=a+b$. Donc nous sommes d'accord[51].

Nous vérifions avec $s(c)$:

$$\begin{aligned} (a+b)+s(c)&=s\big((a+b)+c\big) && \text{(1.134a)}\\ &=s\big(a+(b+c)\big) && \text{(1.134b)}\\ &=a+s(b+c) && \text{(1.134c)}\\ &=a+\big(b+s(c)\big). && \text{(1.134d)} \end{aligned}$$

SUBEQooDDUBooAjuuZq

Justifications.

[50] Élément régulier pour une opération, définition 1.63.

[51] Notez que nous n'avons pas utilisé le fait que 0 était neutre des deux côtés – chose que nous n'avons pas encore démontré. Nous avons seulement utilisé $a+0=a$, qui est dans la définition de la somme.

- Pour (1.134b). C'est l'hypothèse de récurrence. À ce stade, je vous conseille d'être capable de rédiger complètement la récurrence et l'appel au théorème 1.122.

(2) **Neutre** La définition de l'addition contient déjà $a+0=a$. Nous prouvons par récurrence que $0+a=a$ pour tout $a\in\mathbb{N}$.

Pour $a=0$, l'égalité demandé est correcte : $0+0=0$ parce que pour tout x dans $\mathbb{N}$, $0+x=x$. Pour $s(a)$ nous avons

$$0+s(a)=s(0+a)=s(a). \tag{1.135}$$

La dernière égalité est l'hypothèse de récurrence.

Nous posons

$$A=\{a\in\mathbb{N}\text{ tel que }0+a=a\}. \tag{1.136}$$

Nous avons prouvé que $0\in A$ et que $s(A)\subset A$. Le théorème 1.122 nous assure alors que $A=\mathbb{N}$.

(3) **Commutativité** Nous fixons $a\in\mathbb{N}$ et nous prouvons par récurrence sur b que $a+b=b+a$ pour tout $b\in\mathbb{N}$. Cela va être décomposé en plusieurs étapes.

(4) $a+0=0+a$ Pour $b=0$ c'est correct, car $b+0=0+b=b$ parce que 0 est neutre.

(5) $a+1=1+a$ Nous démontrons par récurrence sur a que $a+1=1+a$. Avec $a=0$ c'est déjà fait. Pour les autres,

$$\begin{aligned}
s(a)+1&=(a+1)+1 && \text{lemme 1.126} && \text{(1.137a)}\\
&=(1+a)+1 && \text{hypothèse récurrence} && \text{(1.137b)}\\
&=1+(a+1) && \text{associativité} && \text{(1.137c)}\\
&=1+s(a). && && \text{(1.137d)}
\end{aligned}$$

(6) $a+b=b+a$ Nous y voici. Nous fixons a et nous prouvons par récurrence que $a+b=b+a$. Pour $b=0$ c'est déjà fait. Pour les autres,

$$\begin{aligned}
a+s(b)&=a+(b+1) && && \text{(1.138a)}\\
&=(a+b)+1 && && \text{(1.138b)}\\
&=(b+a)+1 && \text{hypothèse récurrence} && \text{(1.138c)}\\
&=b+(a+1) && && \text{(1.138d)}\\
&=b+(1+a) && \text{commutativité avec 1} && \text{(1.138e)}\\
&=(b+1)+a && \text{associativité} && \text{(1.138f)}\\
&=s(b)+a. && && \text{(1.138g)}
\end{aligned}$$

Récurrence terminée.

(7) **Régularité** Nous devons prouver que, pour tout $a,x,y\in\mathbb{N}$, si $a+x=a+y$ alors $x=y$. Nous allons procéder par récurrence en posant

$$A=\{a\in\mathbb{N}\text{ tel que }\forall x,y\in\mathbb{N},a+x=a+y\Rightarrow x=y\}. \tag{1.139}$$

Puisque $0+x=x$ et $0+y=y$, nous avons $0\in A$. Supposons à présent que $a\in A$ et montrons que $s(a)\in A$. Soient $x,y\in\mathbb{N}$ tels que $a+x=a+y$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
&s(a)+x=s(a)+y && \text{(1.140a)}\\
\Rightarrow\quad &s(a+x)=s(a+y) && \text{(1.140b)}\\
\Rightarrow\quad &a+x=a+y && \text{(1.140c)}\\
\Rightarrow\quad &x=y && \text{(1.140d)}
\end{aligned}$$

SUBEQooNJHZooSIKPxN
SUBEQooWDJLooJhzIFe
SUBEQooTLYZooFsMaJD

Justifications.

- Pour (1.140b). En utilisant la définition de l'addition et la commutativité, nous avons $s(a)+x=s(a+x)$.
- Pour (1.140c). Parce que s est injective ; c'est dans la définition 1.116 d'un triplet naturel.
- Pour (1.140d). Parce que $a\in A$.

Nous avons prouvé que $s(A)\subset A$, et donc que $A=\mathbb{N}$.

□
LEMooCOMSooEWrumL

Lemme 1.128.
Nous avons $0 \neq 1$.

Démonstration. Par définition $1 = s(0)$. Comme s est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous ne pouvons pas avoir $s(0) = 0$. □
LEMooQBHFooCuCusQ

Lemme 1.129 ([1])**.**
Si $a + b = 0$*, alors* $a = b = 0$.

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a + b = 0$, et supposons que $b \neq 0$. Par la définition 1.116(2), nous avons $b = s(c)$ pour un certain $c \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas nous avons $a + b = a + s(c) = s(a + c) \neq 0$ parce que l'image de s ne contient pas 0. Hélas, par hypothèse nous avons $a + b = 0$. Nous avons obtenu une contradiction, et nous déduisons que $b = 0$.

Maintenant que nous savons que $b = 0$, il reste $0 = a + b = a + 0 = a$. □

1.5.4 Ordre sur les naturels

DEFooBaXZSooNHMjeV

Définition 1.130 ([35])**.**
Pour $a, b \in \mathbb{N}$*, nous notons* $a \leqslant b$ *si il existe* $x \in \mathbb{N}$ *tel que* $a + x = b$.

Nous notons également $a < b$ *si* $a \leqslant b$ *et* $a \neq b$.
LEMooWMYPooLTMyWb

Lemme 1.131.
Nous avons $a \leqslant s(a)$ *pour tout* $a \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Cela est une conséquence du lemme 1.126 : $s(a) = a + 1$. □
PROPooVXBBooZcghrA

Proposition 1.132.
La relation $\leqslant$ *est une relation d'ordre compatible avec l'addition.*

Démonstration. Plusieurs choses à vérifier.

(1) **Réflexive** Nous avons $a \leqslant a$ parce que $a + 0 = a$.

(2) **Antisymétrique** Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$. Il existe $x, y \in \mathbb{N}$ tels que

$$b = a + x \tag{1.141a}$$
$$a = b + y. \tag{1.141b}$$

En substituant la seconde équation dans la première, $b = (b + y) + x$ que nous récrivons, en utilisant l'associativité[52],

$$0 + b = b + (x + y). \tag{1.142}$$

En utilisant la régularité, $0 = x + y$ et donc $x = y = 0$ par le lemme 1.129. Cela donne alors $a = b$.

(3) **Transitive** Si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, nous avons $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $b = a + n$ et $c = b + p$. Donc

$$c = (a + n) + p = a + (n + p), \tag{1.143}$$

ce qui signifie que $a \leqslant c$. Notez l'utilisation de l'associativité de la somme, démontrée en la proposition 1.127(1).

(4) **Compatibilité** Soient $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $a \leqslant b$. Nous devons montrer que $a + n \leqslant b + n$. Puisque $a \leqslant b$, il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $b = a + x$. Par conséquent,

$$b + n = a + x + n = (a + n) + x, \tag{1.144}$$

qui signifie bien que $a + n \leqslant b + n$.

□
LEMooPVRQooXPMKTt

Lemme 1.133.
À propos d'ordre et de stricte inégalité.

[52] Proposition 1.127(1).

ITEMooGWWFooYGPCZw

(1) *Si $x \leqslant a$ et $b \neq 0$, alors $x < a + b$.*

ITEMooRWGWooAfkrri

(2) *Si $x \leqslant a$, alors $x < s(a)$.*

ITEMooWCOIooMWrCag

(3) *Si $x < a$, alors $s(x) \leqslant a$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Si $x \leqslant a$, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $x + d = a$. Nous avons alors aussi

$$x + d + b = a + b, \tag{1.145}$$

ce qui signifie que $x \leqslant a + b$. Mais si x était égal à $a + b$, nous aurions $d + b = 0$, ce qui impliquerait[53] $d = b = 0$, alors que l'hypothèse stipule que $b \neq 0$. Donc $x \neq a + b$.

(2) **Pour (2)** Il s'agit seulement d'utiliser le point (1) avec $b = 1$ et le fait que $s(a) = a + 1$ par le lemme 1.126.

(3) **Pour (3)** Par hypothèse, il existe $b \neq 0$ tel que $x + b = a$. Puisque $b \neq 0$, il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $b = s(c)$ et donc, tel que

$$x + s(c) = a. \tag{1.146}$$

En utilisant le fait que $s(c) = c + 1$ ainsi que l'associativité et la commutativité de l'addition (proposition 1.127(1)) nous avons

$$a = x + s(c) = s(x) + c, \tag{1.147}$$

ce qui prouve que $s(x) \leqslant a$.

□

LEMooCSIXooHeuWEd

Lemme 1.134.
L'élément 0 est l'unique plus petit élément de $\mathbb{N}$.

Démonstration. Puisque 0 est neutre pour l'addition[54], nous avons $a + 0 = a$ pour tout $a \in \mathbb{N}$ et donc $0 \leqslant a$ pour tout a. Cela veut dire que 0 est plus petit que tout élément de $\mathbb{N}$.

En ce qui concerne l'unicité, soit $z \in \mathbb{N}$ tel que $z \leqslant a$ pour tout $a \in \mathbb{N}$. Si $z \neq 0$, il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $z = s(x)$. Nous avons donc $z \geqslant x$ en même temps que $x \leqslant z$. Cela implique $z = x$ (parce qu'une relation d'ordre est symétrique) et donc $z = z + 1$. En utilisant la régularité de z pour l'addition nous en déduisons que $0 = 1$, ce qui est impossible par le lemme 1.128. □

LEMooJRZKooOMhOkH

Lemme 1.135.
Si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, alors $a = b$.

Démonstration. L'inégalité $a \leqslant b$ dit qu'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $a + x = b$. En mettant cela dans l'inégalité $b \leqslant a$ nous trouvons $a + x \leqslant a$ qui donne, via la proposition 1.132 : $x \leqslant 0$. Nous en déduisons que $x = 0$ parce que zéro est l'unique minimum de $\mathbb{N}$ par le lemme 1.134. □

PROPooGCCRooFBYrlo

Proposition 1.136.
Le couple $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est totalement ordonné[55].

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{N}$. Nous devons prouver que pour tout $x \in \mathbb{N}$ nous avons $x \leqslant a$ ou $a \leqslant x$ (non exclusifs). Nous posons

$$A = \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \leqslant a\} \tag{1.148a}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } a \leqslant x\}, \tag{1.148b}$$

et nous prouvons que $A \cup B = \mathbb{N}$ en montrant que $0 \in A \cup B$ et que $s(A \cup B) \subset A \cup B$.

Nous avons $0 \in A \subset A \cup B$ par le lemme 1.134.

Pour étudier $s(A \cup B)$, nous considérons $x \in A \cup B$ et nous subdivisons en deux cas selon que $x \in A$ ou $x \in B$.

(1) **Si $x \in B$** Si $x \in B$, alors $a \leqslant x \leqslant s(x)$ parce que $x \leqslant s(x)$ par le lemme 1.131. Donc $s(x) \in B \subset A \cup B$.

[53] Par le lemme 1.129.
[54] Proposition 1.127(2).
[55] Définition 1.24.

(2) **Si $x \in A$** Si $x \in A$, il y a deux possibilités : $x = a$ et $x \neq a$. Si $x = a$, alors $a \leqslant s(x)$ et donc $s(x) \in A \subset A \cup B$.

Si $x \neq a$, alors le lemme 1.133(3) nous indique que $s(x) \leqslant a$ et donc $s(x) \in A \subset A \cup B$.

Nous avons donc prouvé que $s(A \cup B) \subset A \cup B$, et donc que $A \cup B = \mathbb{N}$. □

PROPooMZOWooHmsXzI

Proposition 1.137 ([35, 1]).
L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leqslant)$ vérifie les propriétés suivantes.

ITEMooJLAHooDKukfH

(1) L'élément 0 est l'unique minimum de $\mathbb{N}$.

ITEMooYAJIooEFmOpB

(2) Toute partie non vide a un unique plus petit élément.

ITEMooSRGOooNYJJHY

(3) L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

ITEMooKIHZooDRTCdx

(4) Toute partie non vide majorée a un unique plus grand élément.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** C'est le lemme 1.134.

(2) **Pour (2)** Soit une partie A non vide dans $\mathbb{N}$. Si $0 \in A$, nous avons fini.

(2a) **L'ensemble B** Nous supposons donc que A ne contient pas zéro et nous définissons

$$B = \{n \in \mathbb{N} \setminus A \text{ tel que } n \leqslant a, \forall a \in A\}. \tag{1.149}$$

(2b) **Un élément particulier dans B** L'ensemble B vérifie :

- $0 \in B$
- $B \neq \mathbb{N}$ parce que A est non vide.

La contraposée de la condition (3) de la définition 1.116 d'un triplet naturel implique que $s(B) \notin B$. Autrement dit, il existe $b \in B$ tel que $s(b) \notin B$.

(2c) **Deux fonctions sur A** Puisque $b \in B$, nous avons une application $c\colon A \to \mathbb{N}$ telle que $b + c(a) = a$. Nous avons $c(a) \neq 0$ parce que $c(a) = 0$ signifierait $b = a$, ce qui est impossible parce que $a \in A$ et $b \in B$.

Comme pour tout $a \in A$, l'élément $c(a)$ est non nul, il existe une fonction $d\colon A \to \mathbb{N}$ telle que $c(a) = d(a) + 1$.

(2d) **$s(b) \in A$** Supposons que $s(b) \notin A$. Alors il existe $a \in A$ tel que $s(b) \leqslant a$ est faux. Puisque l'ordre est total (proposition 1.136), nous avons

$$a \leqslant s(b). \tag{1.150}$$

EQooYQSFooPSPJMt

Comme $b \in B$ nous avons aussi

$$b \leqslant a. \tag{1.151}$$

EQooIPAWooDBSJEa

Et enfin nous avons

$$b \neq a \tag{1.152}$$

EQooWFHRooGDSBFD

parce que $a \in A$ et $b \in B$.

Les conditions (1.151) et (1.152) se résument en $b < a$. Le lemme 1.133(3) nous indique alors que $s(b) \leqslant a$. Cela mis à côté de (1.150) conclut que $a = s(b)$, et donc que $s(b)$ est dans A. Contradiction. Nous en concluons que $s(b) \in A$.

(2e) **$s(b)$ est un minimum de A** En utilisant la commutativité et l'associativité de la somme nous avons, pour tout $a \in A$:

$$a = b + c(a) = b + \big(d(a) + 1\big) = (b + 1) + d(a) = s(b) + d(a). \tag{1.153}$$

Donc $s(b) \leqslant a$ pour tout $a \in A$. Mais comme $s(b) \in A$, l'élément $s(b)$ est bien un minimum de A.

(2f) **Unicité** Si a et a' sont des minimums de A, alors $a \leqslant a'$ et $a' \leqslant a$. Nous en déduisons que $a = a'$.

(3) **Pour (3)** Si $M \in \mathbb{N}$ majore tous les éléments de $\mathbb{N}$, alors en particulier $M \geqslant s(M)$. Mais le lemme 1.131 nous indique que $M \leqslant s(M)$. Nous avons donc $s(M) = M$, c'est-à-dire $M = M + 1$. En utilisant la régularité de M[56], nous trouvons $0 = 1$, ce qui est impossible par le lemme 1.128.

[56] Dit plus simplement : en simplifiant par M.

(4) **Pour (4)** Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$.

(4a) **L'ensemble B** Nous posons

$$B = \{n \in \mathbb{N} \setminus A \text{ tel que } a \leqslant n, \forall a \in A\}. \tag{1.154}$$

(4b) **B est non vide** Soit un majorant M de A : pour tout $a \in A$ nous avons $a \leqslant M$. Nous avons $s(M) \notin A$, parce que si $s(M)$ était dans A, ce serait un élément de A strictement plus grand que tout $a \in A$. Donc B est non vide parce qu'il contient $s(M)$.

(5) **Minimum** Puisque B est non vide, il possède un plus petit élément que nous notons b. Nous savons que $b \neq 0$ parce que sinon A serait vide. Il existe donc $c \in \mathbb{N}$ tel que $b = s(c)$.

(6) **$a \leqslant c$ pour tout $a \in A$** Comme $s(c) \in B$ nous avons $a < s(c)$ pour tout $a \in A$. Donc, par le lemme 1.133(3) nous avons $s(a) \leqslant s(c)$, c'est-à-dire $a + 1 \leqslant c + 1$. Par régularité nous avons $a \leqslant c$.

Nous avons prouvé que $a \leqslant c$ pour tout $a \in A$.

(7) **$c \in A$** Si c n'est pas dans A, alors il est dans B et il contredit la minimalité de b. Donc c est dans A.

(8) **Conclusion** L'élément c est dans A tout en étant plus petit que tout élément de A.

(9) **Unicité** Si x est un élément minium de A, alors nous avons $x \leqslant c$ parce que x est minimum et $c \leqslant x$ parce que c est minimum, et donc $x = c$.

□

PROBooUCQFooTugfDl

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 1.138

Je ne suis pas certain qu'il y ait moyen de prouver le lemme 1.216 sans d'abord définir les naturels. Une raison est que la véracité de ce lemme est à peu près équivalente au théorème 1.122 qui donne l'existence de $\mathbb{N}$.

J'ai essayé un certain nombre de choses avec le lemme de Zorn sans succès.
Si vous avez une idée, n'hésitez pas à me la partager, ou à l'écrire ici :

https://math.stackexchange.com/questions/5019157/every-non-empty-dedekind-finite-totally-ordered-set-has-a-maximum-using-zorns

Dans la réponse de Asaf Karagila, il y a seulement le fait que $f : D \to D$ que je ne comprends pas. C'est d'ailleurs ma dernière question dans les commentaires.

LEMooYMRJooYIAhBb

Lemme 1.139 ([1]).
Quelques affirmations sur l'ordre dans $\mathbb{N}$.

ITEMooTLOIooTWNtod

(1) Il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < 0$.

ITEMooPJKQooGfLCUM

(2) Si $a, b \in \mathbb{N}$ vérifient $a > b$, alors il n'existe pas de x dans $\mathbb{N}$ tel que $a + x = b$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Nous savons par la proposition 1.137(1) que 0 est l'unique minimum de $\mathbb{N}$. Nous avons donc forcément $0 \leqslant n$. Si n vérifie de plus $n \leqslant 0$ alors nous avons $n = 0$ par symétrie de la relation d'ordre $\leqslant$. Il n'est donc pas possible d'avoir $n \neq 0$.

(2) **Pour (2)** Si $b \leqslant a$ il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $b + c = a$. Et comme $a \neq b$, c n'est pas nul et il existe $y \in \mathbb{N}$ tel que $c = s(y)$. Bref, nous avons

$$b + s(y) = a. \tag{1.155}$$

Si de plus il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $a + x = b$ nous aurions

$$a + x + s(y) = a. \tag{1.156}$$

Comme a est régulier pour l'addition[57], nous avons

$$x + s(y) = 0, \tag{1.157}$$

ce qui signifie, par le lemme 1.129 que $x = s(y) = 0$. Puisque s prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, cela est impossible.

[57] Proposition 1.127(3).

□
DEFooKBUFooLvMHrf

Définition 1.140.
Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a \leqslant b$. Nous notons par $\{a, \dots, b\}$ l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } a \leqslant x \leqslant b\}. \tag{1.158}$$

PROPooFYMJooWihvhk

Proposition 1.141.
Toute application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante est injective.

Démonstration. Soit une application strictement croissante $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $f(a) = f(b)$. Puisque l'ordre est total[58], nous supposons que $a \leqslant b$. Si $a = b$ nous avons terminé. Nous supposons donc que $a \neq b$, c'est-à-dire que $a < b$. Par stricte croissance nous avons alors $f(a) < f(b)$ qui signifie $f(a) \leqslant f(b)$ et $f(a) \neq f(b)$. Contradiction. Il n'existe donc pas de $a \neq b$ tels que $f(a) = f(b)$. L'application f est donc injective. □

LEMooFKLPooPrmeUU

Lemme 1.142 ([1])**.**
Si S n'est pas majoré dans $\mathbb{N}$, alors il existe une bijection $\mathbb{N} \to S$.

Démonstration. Nous considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} g : S &\to S \\ n &\mapsto \min\{x \in S \text{ tel que } x > n\}. \end{aligned} \tag{1.159}$$

Cette application est bien définie parce que tout partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément[59]. Maintenant nous définissons $f : \mathbb{N} \to S$ par

$$\begin{cases} f(0) = \min(S) & \text{(1.160a)} \\ f(n+1) = g\big(f(n)\big). & \text{(1.160b)} \end{cases}$$

C'est le théorème 1.122 qui nous permet de le faire. Nous montrons que f est bijective.

(1) **Injective** Nous avons

$$f(n+1) \in \{x \in S \text{ tel que } x > f(n)\}. \tag{1.161}$$

Donc f est strictement croissante. Elle est donc injective.

(2) **Surjective** Soit $a \in S$. Nous allons voir que a est dans l'image de f. Pour cela nous posons

$$A = \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } f(x) < a\}. \tag{1.162}$$

Cet ensemble est majoré par a. En effet si $x \in A$ nous avons $x \leqslant f(x) < a$. La partie A de $\mathbb{N}$ possède un maximum. Nous notons $M = \max(A)$. Ce M a deux propriétés intéressantes.

(2a) **D'abord** Puisque $M \in A$, nous avons $f(M) < a$. Une autre façon de dire cela est de dire que

$$a \in \{x \in S \text{ tel que } x > f(M)\}. \tag{1.163}$$

Or $f(M+1) = \min\{x \in S \text{ tel que } x > f(M)\}$. Donc $f(M+1) \leqslant a$.

(2b) **Ensuite** Puisque M est le maximum de A, $M+1$ majore A, c'est-à-dire que $f(M+1) \geqslant a$.

(2c) **Les deux ensemble** Nous avons prouvé que $f(M+1) \leqslant a$ et $f(M+1) \geqslant a$. Nous en déduisons, par le lemme 1.135, que $f(M+1) = a$.

□
NORMooQXASooMXqhjI

1.143.
Durant la preuve du lemme 1.142, nous n'avons pas été loin de prouver que

$$\big(\min(S), S, g\big) \tag{1.164}$$

est un triplet naturel.

Toute partie non bornée de $\mathbb{N}$ donne lieu à un triplet naturel.

LEMooLDKQooSTiVlW

Lemme 1.144 ([1])**.**
Si $A \subset \mathbb{N}$, alors

$$\min\big(A \setminus \{\min(A)\}\big) > \min(A). \tag{1.165}$$

[58] Proposition 1.136.
[59] Proposition 1.137(2).

1.5.5 Multiplication dans les naturels

SUBooDEbqAZaYooVjNmds

Définition 1.145 ([1]).
Soit un ensemble muni d'une loi de composition interne $(A,+)$. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $a\in A$. Nous définissons $n\times A$ par

$$\begin{cases} 0\times a=0 & (1.166a)\\ (n+1)\times a=n\times a+a. & (1.166b)\end{cases}$$

DEFooLCWLooYrToFv

Définition 1.146.
*Un ensemble totalement ordonné muni d'une loi de composition interne $(A,+,\leqslant)$ est **archimédien** si pour tout $x,y\in A$ avec $x>0$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\times x\geqslant y$ (voir la définition 1.145).*

PROPooBBQPooRgPOjf

Proposition-Définition 1.147.
Il existe une unique fonction $f\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que

ITEMooNTUUooDAUVsV

(1) $f(a,0)=0$ pour tout $a\in\mathbb{N}$

ITEMooPPZZooQQabwn

(2) $f\big(a,s(b)\big)=f(a,b)+a$ pour tout $a,b\in\mathbb{N}$.

*Cette fonction est la **multiplication** et nous notons $f(a,b)=a\times b$, voire ab quand il n'y a pas d'ambigüité. Le nombre $a\times b$ est nommé le **produit** de a par b.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Fonctions définies par récurrence** Soit $a\in\mathbb{N}$. Par le théorème 1.122, il existe une unique application $f_a\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que EQSooWVCTooNTVjKU

$$\begin{cases} f_a(0)=0 & (1.167a)\\ f_a\big(s(b)\big)=f_a(b)+a & (1.167b)\end{cases}$$

(2) **Existence** Nous considérons, pour chaque $a\in\mathbb{N}$ la fonction f_a définie par les conditions (1.167). En posant $f(a,b)=f_a(b)$, nous avons une application qui vérifie toutes les conditions.

(3) **Unicité** Soient des applications f et g vérifiant les propriétés demandées. Soit $a\in\mathbb{N}$. Nous pouvons définir $f_a\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ et $g_a\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ par $f_a(n)=f(a,b)$ et $g_a(b)=g(a,b)$.

Les applications f_a et g_a vérifient toutes deux les conditions (1.167), et sont donc égales : $f_a=g_a$ pour tout a. Donc $f=g$.

□

NORMooPrioriteOperations

1.148.
Nous supposons que le lecteur connait déjà la priorité des opérations. Il saura donc interpréter des expressions comme $a\times b+c$ comme voulant dire $(a\times b)+c$ sans que nous ayons à ajouter des parenthèses.

PROPooGHDOooFYRmon

Proposition 1.149 ([35, 1]).
La multiplication dans $\mathbb{N}$ possède les propriétés suivantes.

ITEMooHFWRooDCEpjj

(1) $n\times 1=n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

ITEMooRSYMooSUrRsl

(2) $1\times n=n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

ITEMooWJPOooRUYjwQ

(3) La multiplication est commutative.

ITEMooNBYKooXnGRrf

(4) $0\times n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

ITEMooLJQBooVpUxUv

(5) L'élément 1 est neutre pour la multiplication.

ITEMooDYLIooETIBEL

(6) La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

ITEMooQBFSooWGDQYX

(7) La multiplication est associative.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Nous avons $n\times 1=n\times s(0)=(n\times 0)+n=0+n=n$. Donc $n\times 1=n$.

(2) **Pour (2)** Nous le faisons par récurrence. Par définition c'est vrai pour $n=0$. En ce qui concerne la récurrence, nous supposons que $1\times n=n$, et nous prouvons que $1\times s(n)=s(n)$:

$$1\times s(n)=(1\times n)+1=n+1=s(n). \tag{1.168}$$

(3) **Pour (3)** Soit $a \in \mathbb{N}$. Nous prouvons par récurrence sur $b \in \mathbb{N}$ que $a \times b = b \times a$. Pour $b = 0$ c'est bon. Pour la récurrence, nous supposons que $a \times b = b \times a$ et nous prouvons que $a \times s(b) = s(b) \times a$:

$$\begin{aligned}
a \times s(b) &= a \times b + a && && (1.169a)\\
&= b \times a + a && \text{récurrence} && (1.169b)\\
&= (b \times a) + (1 \times a) && \text{par (2)} && (1.169c)\\
&= (b + 1) \times a && \text{distributivité} && (1.169d)\\
&= s(b) \times a. && && (1.169e)
\end{aligned}$$

(4) **Pour (4)** C'est vrai pour $n = 0$ par la définition 1.147(1). En ce qui concerne $s(n)$, nous avons

$$0 \times s(n) = (0 \times n) + 0 = 0. \tag{1.170}$$

(5) **Pour (5)** C'est la combinaison de (1) et (2).

(6) **Pour (6)** Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Nous prouvons par récurrence sur $c \in \mathbb{N}$ que[60]

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c. \tag{1.171}$$

Pour $c = 0$, nous avons $(a + b) \times 0 = 0$ ainsi que $a \times 0 = b \times 0 = 0$ en vertu des points précédents sur la multiplication par zéro. Pour la récurrence nous utilisons associativité et commutativité de la somme :

$$\begin{aligned}
(a + b) \times s(c) &= (a + b) \times c + (a + b) && (1.172a)\\
&= a \times c + b \times c + a + b && (1.172b)\\
&= (a \times c + a) + (b \times c + b) && (1.172c)\\
&= \big(a \times s(c)\big) + \big(b \times s(c)\big). && (1.172d)
\end{aligned}$$

On devrait aussi prouver que $c(a + b) = ca + cb$: c'est peu ou prou la même chose.

(7) **Pour (7)** Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Nous démontrons par récurrence sur $c \in \mathbb{N}$ que $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. Pour $c = 0$ l'égalité est triviale. Nous supposons que l'égalité est correcte pour c, et nous la prouvons pour $s(c)$:

$$\begin{aligned}
(a \times b) \times s(c) &= \big((a \times b) \times c\big) + a \times b && && (1.173a)\\
&= \big(a \times (b \times c)\big) + a \times b && \text{récurrence} && (1.173b)\\
&= \big((b \times c) \times a\big) + b \times a && \text{commutativité} && (1.173c)\\
&= (b \times c + b) \times a && \text{distributivité} && (1.173d)\\
&= \big(b \times s(c)\big) \times a && \text{définition 1.147(2)} && (1.173e)\\
&= a \times \big(b \times s(c)\big) && \text{commutativité.} && (1.173f)
\end{aligned}$$

□

LEMooCompatMultiplicationOrdre

Lemme 1.150 ([1])**.**
La multiplication est compatible avec l'ordre :

$$a \leqslant b \Rightarrow a \times n \leqslant b \times n \tag{1.174}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Par la définition 1.130 de l'ordre, si $a \leqslant b$, il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $b = a + c$. En utilisant la distributivité[61], nous avons

$$b \times n = (a + c) \times n = a \times n + c \times n. \tag{1.175}$$

Nous en déduisons que $a \times n \leqslant b \times n$ parce que $c \times n \in \mathbb{N}$. □

LEMooEHYEooLDudfn

Lemme 1.151.
Si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$ (ou les deux).

[60] Nous n'écrivons pas toutes les parenthèses parce que les règles de priorité des opérations sont supposées connues. J'invite cependant le lecteur à remarquer qu'une formalisation de ces règles n'est probablement pas facile. Pour que tout soit rigoureux, il faudrait un algorithme qui parcourt une suite de caractères et l'interprète en ajoutant correctement les parenthèses.

[61] Proposition 1.149(6).

Démonstration. Supposons que $a \neq 0$. Alors il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $a = s(c)$. Nous avons

$$0 = a \times b = s(c) \times b = c \times b + b. \tag{1.176}$$

Le lemme 1.129 nous dit alors que $c \times b = b = 0$. □

LEMooGUXGooBcKJdS

Lemme 1.152 ([1]).
Soit a, b, n trois entiers naturels. Si $a < b$ et si $n \neq 0$, alors

$$a \times n < b \times n. \tag{1.177}$$

Démonstration. L'hypothèse $a \leqslant b$ implique qu'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $a + c = b$. De plus $c \neq 0$ parce que $a \neq b$. En utilisant la distributivité[62], nous avons

$$b \times n = (a + c) \times n = (a \times n) + (c \times n). \tag{1.178}$$

Cela prouve que $a \times n \leqslant b \times n$. Et comme c et n ne sont pas nuls, nous avons même[63] $c \times n \neq 0$ et donc $a \times n < b \times n$. □

REMooultiplicationNaturelsOrdreStrictZ

Remarque 1.153.
Une version du lemme 1.152 dans $\mathbb{Z}$ sera le lemme 1.193.

LEMooSFUKooBNAple

Lemme 1.154 ([1]).
Soient $a \neq 0$ et $b > 1$ dans $\mathbb{N}$. Alors

$$ab > a. \tag{1.179}$$

Démonstration. Il s'agit d'une application du lemme 1.152 en partant de l'inégalité $1 < b$ et en la « multipliant » par a. □

PROPooNaturelsReguliersMultiplication

Proposition 1.155 ([1]).
Tous les naturels non nuls sont réguliers par rapport à la multiplication. Autrement dit, si $a \neq 0$, alors nous avons

$$a \times x = a \times y \Rightarrow x = y. \tag{1.180}$$

Démonstration. Soit $a \neq 0$ dans $\mathbb{N}$. Nous supposons que $a \times x = a \times y$. Puisque l'ordre sur $\mathbb{N}$ est total (proposition 1.136), nous pouvons supposer que $y \geqslant x$; sinon il suffit de permuter les rôles de x et y dans tout ce qui suit.

Il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $y = x + d$. En utilisant l'hypothèse $a \times y = a \times x$ et la distributivité[64],

$$a \times x = a \times y = a \times (x + d) = (a \times x) + (a \times d). \tag{1.181}$$

Puisque $(a \times x)$ est régulier pour la somme[65] nous en déduisons que

$$0 = a \times d. \tag{1.182}$$

Le lemme 1.151 dit alors que $a = 0$ ou que $d = 0$. Étant donné que $a \neq 0$ par hypothèse, nous déduisons que $d = 0$, c'est-à-dire que $x = y$. □

1.5.6 Presque unicité des triplets naturels

NORSuiteNombresUniciteTripletsNaturels

1.156.
Il existe de nombreux triplets naturels ; l'existence d'un triplet naturel est un théorème de la théorie des ensembles que nous avons accepté. Nous avons déjà à peu près montré que toute partie non bornée de $\mathbb{N}$ donne lieu à un nouveau triplet naturel. Voir 1.143.

Nous voyons maintenant que tous les triplets naturels sont équivalents au moins pour l'ordre.

THOooFUXMooJuigHK

Théorème 1.157 ([1]).
Soient des triplets naturels $(\mathcal{N}_1, o_1, s_1)$ et $(\mathcal{N}_2, o_2, s_2)$. Alors

(1) il existe une unique application $f : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ telle que

(1a) $f(o_1) = o_2$

[62] Proposition 1.149(6).
[63] Lemme 1.151.
[64] Proposition 1.149(6).
[65] Proposition 1.127(3).

(1b) $f \circ s_1 = s_2 \circ f$.

(2) Une telle application est une bijection croissante.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Existence** Nous voyons $(\mathcal{N}_1, o_1, s_1)$ comme un triplet naturel, et $\mathcal{N}_2$ comme un simple ensemble. Nous pouvons appliquer le théorème 1.122 à $(\mathcal{N}_1, o_1, s_1)$. L'élément o_1 va jouer le rôle de 0 alors que o_2 va jouer le rôle de b. L'application g est s_2. Bref, il existe une unique application $f: \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ telle que

(1a) $f(o_1) = o_2$

(1b) $f\big(s_1(n)\big) = s_2\big(f(n)\big)$

pour tout $n \in \mathcal{N}_1$.

(2) **Unicité** Le théorème 1.122 donne déjà l'unicité. Nous la faisons quand même, juste pour vous faire plaisir. Soit g, une autre application vérifiant les mêmes conditions. Pour faire la récurrence de façon très explicite, nous posons

$$\begin{aligned} P: \mathcal{N}_1 &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) = f(x) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.183}$$

Notre but est de prouver que $P(x) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{N}_1$, en utilisant la récurrence telle que décrite dans la proposition 1.121.

Nous avons $f(o_1) = o_2 = g(o_1)$. Donc $P(o_1) = 1$. Nous supposons que, pour un certain $a \in \mathcal{N}_1$, nous ayons $P(a) = 1$, et nous prouvons que $P\big(s_1(a)\big) = 1$.

Nous avons $g(a) = f(a)$, et nous prenons s_2 des deux côtés, nous avons successivement

$$(s_2 \circ g)(a) = (s_2 \circ f)(a) \tag{1.184a}$$
$$(g \circ s_1)(a) = (f \circ s_1)(a) \tag{1.184b}$$
$$g\big(s_1(a)\big) = f\big(s_1(a)\big). \tag{1.184c}$$

La dernière égalité signifie que $P\big(s_1(a)\big) = 1$. La proposition 1.121 implique que $P(x) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{N}_1$.

(3) **Bijection, définir l'inverse** Nous allons trouver un inverse et le lemme 1.18 nous dit que c'est suffisant. La partie « existence », en inversant les rôles de $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ nous donne une application $g: \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N}_1$ telle que

(3a) $g(o_2) = o_1$

(3b) $g \circ s_2 = s_1 \circ g$.

Nous allons prouver que g est un inverse de f.

(4) $f \circ g = \mathrm{Id}$ Nous posons $A = \{x \in \mathcal{N}_2 \text{ tel que } (f \circ g)(x) = x\}$. Nous avons

$$f\big(g(o_2)\big) = f(o_1) = o_2, \tag{1.185}$$

et donc $o_2 \in A$.

Supposons que $x \in A$. Alors

$$(f \circ g)\big(s_2(x)\big) = (f \circ \underbrace{g \circ s_2}_{s_1 \circ g})(x) \tag{1.186a}$$
$$= (\underbrace{f \circ s_1}_{= s_2 \circ f} \circ g)(x) \tag{1.186b}$$
$$= (s_2 \circ f \circ g)(x) \tag{1.186c}$$
$$= s_2\big((f \circ g)(x)\big) \tag{1.186d}$$
$$= s_2(x) \tag{1.186e}$$

Donc $s_2(x) \in A$. Nous en déduisons que $A = \mathcal{N}_2$ par le point (3) de la définition 1.116 d'un triplet naturel.

(5) $\underline{g \circ f = \mathrm{Id}}$ J'imagine que c'est la même chose que dans l'autre sens (ci-dessus)[66].

□

PROPooCCVNooYUYcqG

Proposition 1.158.
L'ensemble structuré $(\mathbb{N}, +, \times, \leqslant)$ est archimédien[67]. En d'autres termes, pour tout $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$b < n \times a. \tag{1.187}$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \neq 0$.

Si $a > b$, nous avons le résultat avec $n = 1$.

Si $a = b$, en prenant $n = s(1)$ nous avons le résultat. En effet $s(1) \times a = a + a$. Puisque $a \neq 0$, nous avons $a + a \geqslant a$ et $a + a \neq a$, donc $s(1) \times a > a$.

La vraie vie est avec $a < b$. Nous posons

$$X = \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } 1 \leqslant x \times a \leqslant b\} \tag{1.188}$$

et

$$B = \{x \times a \text{ tel que } x \in X\}. \tag{1.189}$$

L'ensemble X est non vide parce que $1 \in X$. L'ensemble B est alors également non vide, et majoré par b. La proposition 1.137(4) nous indique alors que B possède un plus grand élément que nous allons noter $x_0 \times a$ ($x_0 \in X$).

Nous posons $n = s(x_0)$, et nous avons

$$x_0 \times a < x_0 \times a + a = s(x_0) \times a = n \times a. \tag{1.190}$$

Nous en déduisons que $n \times a$ n'est pas dans B parce que $x_0 \times a$ est le plus grand élément de B. Donc x_0 n'est pas dans X ; nous n'avons donc pas les inégalités

$$1 \leqslant n \times a \leqslant b. \tag{1.191}$$

Laquelle des deux inégalités est fausse ? Puisque $n = s(x_0) \geqslant 1$ et que $a \geqslant 1$, nous avons $1 \leqslant n \times a$. Donc c'est la seconde inégalité qui est fausse. Nous avons donc $n \times a > b$. □

DEFooNEVNooJlmJOC

Proposition-Définition 1.159.
Soit A un ensemble muni d'une loi de composition interne[68] notée $+$. Si nous avons une application $\alpha : \mathbb{N} \to A$, alors il existe une unique application $f : \mathbb{N} \to A$ telle que

SUBEQSooKJOFooOOxDKH

$$\begin{cases} f(0) = \alpha(0) & \text{(1.192a)} \\ f(k) = f(k-1) + \alpha(k). & \text{(1.192b)} \end{cases}$$

La valeur de $f(k)$ est notée $\sum_{i=0}^{k} \alpha(i)$.

Démonstration. Application du théorème 1.122. □

NORooNotationSommeNaturels

1.160.
Les équations de définition (1.192) signifient que nous définissons la notation $\sum_{i=0}^{N} \alpha(i)$ par récurrence par les conditions suivantes :

ITEMooIPDTooEhOxea

(1) $\sum_{i=0}^{0} \alpha(i) = \alpha(0)$,

ITEMooSommeNaturelsSucc

(2) $\sum_{i=0}^{k} \alpha(i) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha(i) + \alpha(k)$.

PROPooXXGHooLafGsI

Proposition 1.161 (La multiplication est une somme itérée[35])**.**
Pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} a = a \times n. \tag{1.193}$$

[66] Je n'ai pas fait les calculs ; écrivez-moi si ça pose un problème.
[67] Définition 1.146.
[68] Peut-être un anneau, mais comme nous avons l'intention, dans les propositions 1.161 et suivantes, de faire des sommes vers $(\mathbb{N}, +)$, plutôt un monoïde.

Démonstration. Nous le faisons par récurrence en partant de $n = 1$. Avec $n = 1$ nous avons $\sum_{i=1}^{1} a = a$, et $a \times 1 = a$. Donc c'est bon.

Pour la récurrence nous avons :

$$a \times s(n) = a \times n + a = \sum_{i=1}^{n} a + a = \sum_{i=1}^{n+1} a = \sum_{i=1}^{s(n)} a. \tag{1.194}$$

□
LEMooIETGooMyrilW

Lemme 1.162.
Soit $a > 1$ dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant 1$ nous avons $na \leqslant a^n$.

Démonstration. Par récurrence. Avec $n = 1$ nous avons bien $a \leqslant a$; pas de problème. Supposons que $na \leqslant a^n$, et montrons le pas de récurrence. Nous avons :

$$\begin{aligned}
(n+1)a &= na + a && && (1.195a)\\
&\leqslant na + na && \text{parce que } a \leqslant na && (1.195b)\\
&= 2na && && (1.195c)\\
&\leqslant 2a^n && \text{récurrence} && (1.195d)\\
&\leqslant aa^n && \text{parce que } a \geqslant 2 && (1.195e)\\
&= a^{n+1}. && && (1.195f)
\end{aligned}$$

□
PROPooSuiteGeometriqueCroissante

Proposition 1.163 ([35]).
Soit $a > 1$. Alors

(1) l'application $n \mapsto a^n$ est strictement croissante ;

(2) l'ensemble $\{a^n \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas majoré.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
a^{n+1} &= a^n \times a && && (1.196a)\\
&> a^n \times 1 && \text{lemme 1.154} && (1.196b)\\
&= a^n. && && (1.196c)
\end{aligned}$$

Cela prouve le premier point.

Pour le second point, soit $m \in \mathbb{N}$. Nous devons trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $a^N \geqslant m$. Puisque $\mathbb{N}$ est archimédien[69], nous pouvons considérer N tel que $Na > m$. Le lemme 1.129 nous assure alors que

$$m < Na \leqslant a^N. \tag{1.197}$$

□
THOooKDJVooRIJRHP

Théorème 1.164 (division euclidienne [35]).
Pour tout $a \in \mathbb{N}$, pour tout $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

Démonstration. Existence puis unicité.

(1) **Existence**

Nous posons

$$A = \{bx \text{ tel que } x \in \mathbb{N}, bx \leqslant a\}. \tag{1.198}$$

L'ensemble A contient 0 (avec $x = 0$) et est majoré par a. Donc il possède un plus grand élément que nous notons bq. Puisque $bq \in A$, nous avons $bq \leqslant a$ et donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$bq + r = a. \tag{1.199}$$

EQooIUICooLenNBP

Il reste à montrer que $r < b$. Supposons que $r \geqslant b$. Il existerait alors un x tel que $b + x = r$. En mettant ça dans (1.199),

$$bq + b + x = a, \tag{1.200}$$

c'est-à-dire $b(q+1) + x = a$, qui signifierait $b(q+1) \leqslant a$, ce qui est faux parce que bq est le plus grand élément de A.

[69] Proposition 1.158.

(2) **Unicité** Supposons que nous ayons

$$a = bq + r = bq' + r' \tag{1.201}$$

avec $0 \leqslant r < b$ et $0 \leqslant r' < b$. Il y a trois possibilités : $q' < q$, $q' = q$ et $q' > q$.

(2a) **Si $q' < q$** Alors il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $q' + x = q$, et nous avons

$$b(q' + x) + r = bq' + bx + r, \tag{1.202}$$

ce qui, après distribution et simplification, donne $r' = bx + r$. Puisque nous avons $x \geqslant 1$, il vient

$$r' = bx + r \geqslant b + r \geqslant b. \tag{1.203}$$

Cela n'est pas possible parce que $r' < b$. Le cas $q' < q$ n'est pas possible.

(2b) **Si $q' = q$** Nous avons alors immédiatement $bq + r = bq + r'$ et donc $r = r'$. Unicité.

(2c) **Si $q' > q$** En posant $q + x = q'$ nous trouvons la même impossibilité que dans le cas $q' < q$.

□

DEFooDivisibleNombrePairImpair

Définition 1.165.
Quelques définitions associées au théorème 1.164. Soit a et b deux entiers naturels.

(1) *Dans le couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$, fourni par ce théorème, q est appelé **quotient** et r est appelé **reste**.*

(2) *Si $r = 0$ (et donc s'il existe un $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq$, nous disons que a est **divisible** par b.*

(3) *Si n est divisible par 2, alors nous disons qu'il est **pair**.*

ITEMooDLHHooTmWSnN

(4) *Si n n'est pas divisible par 2, alors nous disons qu'il est **impair**.*

1.5.7 Écriture d'un naturel dans une base

SCBooEcritureNChiffres

1.166.
Nous avons déjà donné la notation $1 = s(0)$. Nous continuons avec $2 = s(1)$, $3 = s(2)$, $4 = s(3)$, $5 = s(4)$, $6 = s(5)$, $7 = s(6)$, $8 = s(7)$ et $9 = s(8)$.

Nous allons maintenant voir comment écrire des nombres plus grands.

NORooTuplesChiffres

1.167.
Si $b > 1$ et $N \in \mathbb{N}$ sont donnés, nous notons

$$C_{b,N} = \big\{u \in \{0, \dots, b-1\}^{N+1} \text{ tel que } u_N \neq 0\big\}. \tag{1.204}$$

où les u_i sont numérotés à partir de 0 ; donc dire $u_N \neq 0$ revient à dire que le *dernier* est non nul, et non l'avant dernier. Nous définissons[70]

$$\begin{aligned} \varphi_{b,N} \colon C_{b,N} &\to \mathbb{N} \\ u &\mapsto \sum_{i=0}^{N} u_i b^i. \end{aligned} \tag{1.205}$$

EQooWWTUooHAnSEv

Cette application $\varphi_{b,N}$ sera encore bien étudiée pour la partie décimale d'un réel. Voir la définition 10.495.

LEMooJUGKooGsbrhi

Lemme 1.168 ([35]).
Soient $b > 1$, $N \geqslant 0$ ainsi que $u \in C_{b,N}$. Alors

$$b^N \leqslant \varphi_{b,N}(u) < b^{N+1}. \tag{1.206}$$

EQooYHTLooNwqIIq

Démonstration. En séparant la somme nous avons

$$\varphi_{b,N}(u) = u_N b^N + \sum_{i=0}^{N-1} u_i b^i. \tag{1.207}$$

Puisque $u_N \geqslant 1$ nous avons $b^N \leqslant u_N b^N$, et donc

$$b^N \leqslant u_N b^N \leqslant \varphi_{b,N}(u). \tag{1.208}$$

Voilà qui prouve la première inégalité de (1.206).

Pour prouver que $\varphi_{b,N}(u) < b^{N+1}$, nous faisons une récurrence sur N.

[70] Le symbole de sommation est défini par 1.159.

(1) **Pour $N = 0$** Nous devons prouver que $\varphi_{b,0}(u) < b$. Par définition $\varphi_{b,N}(u) = u_0 b^0$. Puisque $u \in \{0, \dots, b-1\}^{N+1}$, nous avons $u_0 \leqslant b - 1 < b$.

(2) **Récurrence** Nous supposons que pour tout $u \in C_{b,N}$ nous avons $\varphi_{b,N}(u) < b^{N+1}$. Et nous devons montrer que pour tout $v \in C_{b,N+1}$ nous avons $\varphi_{b,N+1}(v) < b^{N+2}$.

Nous posons $u = (v_0, \dots, v_N)$; nous avons alors

$$\begin{aligned}
\varphi_{b,N+1}(v) &= v_{N+1} b^{N+1} + \sum_{i=0}^{N} v_i b^i && && (1.209a)\\
&= v_{N+1} b^{N+1} + \varphi_{b,N}(u) && && (1.209b)\\
&< v_{N+1} b^{N+1} + b^{N+1} && \text{récurrence} && (1.209c)\\
&= (v_{N+1} + 1) b^{N+1} && && (1.209d)\\
&\leqslant b b^{N+1} && \text{parce que } v_{N+1} \leqslant b - 1 && (1.209e)\\
&= b^{N+2}. && && (1.209f)
\end{aligned}$$

□
LEMooKDKJooSkhcJS

Lemme 1.169 ([1]).
Soient $x \in \mathbb{N}$ ainsi que $b \geqslant 2$. Nous posons

$$N = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } b^k \leqslant x\}. \tag{1.210}$$

Alors

(1) Si $n > N$ alors $\varphi_{b,n}(u) > x$ pour tout $u \in C_{b,n}$.

(2) Si $n < N$ alors $\varphi_{b,n}(u) < x$ pour tout $u \in C_{b,n}$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Si $n > N$** Nous avons, par définition de $C_{b,n}$ que $u_n \neq 0$, de telle sorte que

$$\varphi_{b,n}(u) \geqslant u_n b^n \geqslant b^n > x. \tag{1.211}$$

La dernière inégalité est due au fait que $n \notin \{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } b^k \leqslant x\}$.

(2) **Si $n < N$** Nous avons

$$x \geqslant b^N > \varphi_{b,n}(u). \tag{1.212}$$

Le seconde inégalité est une conséquence du lemme 1.168.

□
THMooUniciteEcritureChiffres

Théorème 1.170 ([35]).
Soit $b \geqslant 2$. Si $x \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique $N \in \mathbb{N}$ et un unique $u \in C_{b,N}$ tels que

$$x = \varphi_{b,N}(u). \tag{1.213}$$

Démonstration. Nous commençons par $x < b$. Dans ce cas, $N = 0$ parce que si $u_k \neq 0$ avec $k \neq 0$, nous avons

$$\sum_{i=0}^{N} u_i b^i \geqslant u_k b^k \geqslant b > x. \tag{1.214}$$

Donc $x = x_0 b^0 = u_0$. Bref, dans le cas $x < b$ nous avons obligatoirement $N = 0$ et $u_0 = x$.
Nous étudions à présent le cas $x \geqslant b$ que nous subdivisons en plusieurs étapes.

(1) $N \geqslant 1$ Si $N = 0$, alors $\varphi_{b,0}(u) = u_0 < b \leqslant x$. Donc $N \geqslant 1$.

Notons incidemment que nous pouvons parler de $N - 1$ à partir de maintenant.

(2) **Unicité, préambule** Le lemme 1.169 nous indique que si $x = \varphi_{b,N}(u)$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$ et un certain $u \in C_{b,N}$, alors

$$N = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } b^k \leqslant x\}. \tag{1.215}$$

Nous posons

$$X_k = \sum_{i=k}^{N} u_i b^{i-k}, \tag{1.216}$$

et nous allons montrer que le couple (X_{k+1}, u_k) est le résultat de la division euclidienne[71] de X_k par b.

D'abord, $u_k < b$, donc ça a bien la tête d'un reste. Ensuite, pour le quotient,

$$bX_{k+1} + u_k = b \sum_{i=k+1}^{N} u_i b^{i-(k+1)} + u_k \tag{1.217a}$$

$$= \sum_{i=k+1}^{N} u_i b^{i-k} + u_k \tag{1.217b}$$

$$= \sum_{i=k}^{N} u_i b^{i-k} \tag{1.217c}$$

$$= X_k. \tag{1.217d}$$

(3) **Unicité** En quoi cela fait-il avancer la choucroute ? Supposons que $\varphi_{b,N}(u) = \varphi_{b,M}(v)$. Alors nous avons déjà prouvé que

$$M = N = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } b^k \leqslant x\}. \tag{1.218}$$

Ensuite nous devons montrer que $u = v$. Nous posons $X_k = \sum_{i=k}^{N} u_i b^{i-k}$ et $Y_k = \sum_{i=k}^{N} v_i b^{i-k}$. Notez que

$$X_0 = Y_0 = x. \tag{1.219}$$

Si $X_k = Y_k$, alors par unicité de la division euclidienne nous avons $X_{k+1} = Y_{k+1}$ et $u_k = v_k$. Par récurrence nous avons $X_k = Y_k$ et $u_k = v_k$ pour tout k.

(4) **Existence** Soit $x \in \mathbb{N}$. Nous posons $y_0 = x$ et

$$y_k = by_{k+1} + u_k \tag{1.220}$$

avec $u_k < b$. Vus l'unicité dans la division euclidienne et le théorème[72] 1.122 permettant la définition par récurrence, ces conditions définissent deux suites (u_k) et (y_k) dans $\mathbb{N}$.

Montrons qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $y_n = 0$ pour tout $n \geqslant N + 1$. Nous avons :

$$2y_{k+1} \leqslant by_{k+1} \qquad \text{parce que } b \geqslant 2 \tag{1.221a}$$

$$\leqslant y_k \qquad \text{pcq } by_{k+1} + u_k = y_k. \tag{1.221b}$$

Bref : $2y_{k+1} \leqslant y_k$. Par récurrence[73] nous trouvons que

$$2^k y_k \leqslant x \tag{1.222}$$

parce que $y_0 = x$. Par le lemme 1.162, si k est assez grand,

$$2ky_k \leqslant 2^k y_k \leqslant x. \tag{1.223}$$

Puisque $\mathbb{N}$ est archimédien[74], nous pouvons considérer $s \in \mathbb{N}$ tel que $2s > x$. À ce moment nous avons

$$y_n = 0 \tag{1.224}$$

pour tout $n \geqslant s$. Nous posons

$$N = \max\{k \text{ tel que } y_k \neq 0\}. \tag{1.225}$$

Prouvons par récurrence sur l que

$$y_{N-l} = \sum_{i=N-l}^{N} u_i b^{(i+l)-N}. \tag{1.226}$$

EQooZBKQooFqcckr

Notez que $i + l \geqslant N - l + l = N$, donc $(i + l) - N$ a un sens.

[71] Théorème 1.164.
[72] Nous ne citerons pas toujours ce théorème à chaque fois que nous définissons quelque chose par récurrence.
[73] Faut-il citer la proposition 1.121 et donner explicitement la fonction P ?
[74] Proposition 1.158.

(4a) **Pour $l = 0$** Avec $l = 0$ nous avons $\sum_{i=N-l}^{N} u_i b^{(i+l)-N} = u_N$. Il faut donc voir que $y_N = u_N$. Nous avons

$$y_N = by_{N+1} + u_N. \tag{1.227}$$

En se rappelant que $y_{N+1} = 0$, nous avons le résultat.

(4b) **Pour $l + 1$** Pour la récurrence nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} y_{N-l-1} &= by_{N-l} + u_{N-l-1} && (1.228a)\\ &= b \sum_{i=N-l}^{N} u_i b^{(i+l)-N} + u_{N-l-1} && (1.228b)\\ &= \sum_{i=N-l}^{N} u_i b^{(i+l)-N+1} + u_{N-l-1} && (1.228c)\\ &= \sum_{i=N-l-1}^{N} u_i b^{(i+l+1)-N}. && (1.228d) \end{aligned}$$

La récurrence est prouvée. L'égalité (1.226) est validée pour tout l.

En posant $l = N$ dans (1.226) nous trouvons

$$y_0 = \sum_{i=0}^{N} u_i b^i. \tag{1.229}$$

Mais la définition de la suite (y_k) contient $y_0 = x$. Donc nous avons prouvé que

$$x = \sum_{i=0}^{N} u_i b^i = \varphi_{b,N}(u). \tag{1.230}$$

□

EXooEcritureDix

Exemple 1.171.
Comment écrire le nombre b en base b ? Nous devons trouver un N et une suite (u_i) tels que

$$b = \sum_{i=0}^{N} u_i b^i. \tag{1.231}$$

Il est facile de voir que le choix $N = 1$ et $u = (0, 1)$ fonctionne bien : $b = 1 \times b^1 + 0$. Nous avons donc

$$b = \varphi_{b,1}(1, 0). \tag{1.232}$$

Nous écrivons cela plus sobrement $b = 10$. △

NORooBaseStandardDix

1.172.
À part des cas très exceptionnels, nous utilisons toujours la base $b = s(9) = s^9(0)$. Nous nous permettons donc d'écrire « 64 » le nombre $\varphi_{s(9),2}(6, 4)$. Vous saviez que tout groupe simple d'ordre $\varphi_{s(9),2}(6, 0)$ est isomorphe au groupe alterné $A_{\varphi_{s(9),0}(5)}$? C'est la proposition 5.55.

PROPooComparaisonNaturelsParChiffres

Proposition 1.173 ([35])**.**
Soit $b > 2$ un entier naturel fixé, et $M > N$ deux entiers naturels. Si $u \in C_{b,N}$ et $v \in C_{b,M}$, alors $\varphi_{b,N}(u) < \varphi_{b,M}(v)$.

De manière plus intuitive : à base fixée, le nombre qui a le plus de chiffres est le plus grand.

Démonstration. Le lemme 1.168 nous dit que

$$b^N \leqslant \varphi_{b,N}(u) < b^{N+1} \tag{1.233}$$

et

$$b^M \leqslant \varphi_{b,M}(v) < b^{M+1}. \tag{1.234}$$

Puisque $M > N$ nous avons $b^{N+1} \leqslant b^M$ et donc

$$\varphi_{b,N}(u) < b^{N+1} \leqslant b^M \leqslant \varphi_{b,M}(v). \tag{1.235}$$

□

PROPooComparaisonNaturelsParChiffresIdentiques

Proposition 1.174.
Soient $u, v \in C_{b,N}$ tels que $u_i = v_i$ pour $i = r+1, \dots, N$. Si $u_r > v_r$ alors $\varphi_{b,N}(u) > \varphi_{b,N}(v)$.

De manière intuitive : avec le même nombre de chiffres, le plus grand est celui dont le premier chiffre différent est le plus grand.

Autrement dit, les nombres en écriture de position se classent par ordre lexicographique.

Démonstration. En découpant les sommes nous avons

$$\varphi_{b,N}(u) = \sum_{i=r+1}^{N} u_i b^i + u_r b^r + \sum_{i=0}^{r-1} u_i b^i \tag{1.236}$$

et

$$\varphi_{b,N}(v) = \sum_{i=r+1}^{N} u_i b^i + v_r b^r + \sum_{i=0}^{r-1} v_i b^i. \tag{1.237}$$

Puisque $b^r > \sum_{i=0}^{r-1} u_i b^i$ (lemme 1.168), nous avons aussi

$$b^r + \sum_{i=0}^{r-1} u_i b^i > \sum_{i=0}^{r-1} v_i b^i. \tag{1.238}$$

EQooTZPBooTeauhX

Et le calcul final :

$$\begin{aligned}
\varphi_{b,N}(v) &< \sum_{i=r+1}^{N} v_i b^i + v_r b^r + b^r + \sum_{i=0}^{r-1} u_i b^i && \text{pcq (1.238)} && \text{(1.239a)}\\
&= \sum_{i=r+1}^{N} u_i b^i + (v_r+1) b^r + \sum_{i=0}^{r-1} u_i b^i && && \text{(1.239b)}\\
&\leqslant \sum_{i=r+1}^{N} u_i b^i + u_r b^r + \sum_{i=0}^{r-1} u_i b^i && \text{pcq } u_r \geqslant v_r + 1 && \text{(1.239c)}\\
&= \sum_{i=0}^{N} u_i b^i && && \text{(1.239d)}\\
&= \varphi_{b,N}(u). && && \text{(1.239e)}
\end{aligned}$$

Et voilà. □

1.6 Les entiers relatifs

PROPooNombresEntiers

Proposition-Définition 1.175 ([35]).
Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{N}$. Nous disons que $(a, b) \sim (a', b')$ si et seulement si

$$a + b' = b + a' \tag{1.240}$$

(1) $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$.

ITEMooZQSHooSDfdvK

(2) Si $(a, b) \sim (a', b')$ et $(x, y) \sim (x', y')$ alors

$$(a + x, b + y) \sim (a' + x', b' + y'). \tag{1.241}$$

*L'ensemble des **entiers** est*

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim, \tag{1.242}$$

et nous notons $\overline{a, b} \in \mathbb{Z}$ la classe de $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Symétrie** C'est la commutativité de la somme dans $\mathbb{N}$, proposition 1.127(1).

(2) **Réflexive** Immédiat.

(3) **Transitive** Nous supposons que $(a,b)\sim(u,v)$ et que $(u,v)\sim(x,y)$. Alors nous avons

$$a+v=u+b \tag{1.243a}$$
$$u+y=v+x. \tag{1.243b}$$

En additionnant membre à membre,

$$a+v+u+y=u+b+v+x. \tag{1.244}$$

La commutativité nous permet de mettre u et v à droite dans chacun des deux membres. Ensuite la proposition 1.127(3) nous permet de simplifier par $u+v$. Il reste $a+y=b+x$, qui signifie $(a,b)\sim(x,y)$.

(4) **Pour (2)** L'hypothèse donne les égalités

$$a+b'=b+a' \tag{1.245a}$$
$$x+y'=y+x' \tag{1.245b}$$

En sommant, et en utilisant l'associativité,

$$(a+x)+(b'+y')=(b+y)+(a'+x'). \tag{1.246}$$

Cela signifie bien que $(a+x,b+y)\sim(a'+x',b'+y')$.

□

LEMooEntiersEquivalentsZero

Lemme 1.176.
Soient $a,b\in\mathbb{N}$. Nous avons $(a,b)\sim(0,0)$ si et seulement si $a=b$.

Démonstration. Dire que $(a,b)\sim(0,0)$ est équivalent à dire que $a+0=b+0$, ou encore que $a=b$. □

PROPooDEFAdditionEntiersRelatifs

Proposition-Définition 1.177 ([35])**.**
Soient $a,b,x,y\in\mathbb{N}$. L'application

$$\begin{aligned} f\colon \overline{(a,b)}\times\overline{(x,y)}&\to\mathbb{Z}\\ \big((a',b'),(x',y')\big)&\mapsto(a'+x',b'+y')\end{aligned} \tag{1.247}$$

est constante.

Nous nommons sa valeur $\overline{(a,b)}+\overline{(x,y)}$.

Démonstration. Cela est une conséquence de la proposition 1.175(2). □

PROPooGroupeEntiersRelatifs

Proposition 1.178.
L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de l'addition telle que définie par la proposition 1.177, est un groupe commutatif admettant pour neutre l'élément $e=\overline{(0,0)}$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Neutre** Pour tous entiers naturels $a,\ b$, on a

$$\overline{(a,b)}+\overline{(0,0)}=\overline{(a+0,b+0)}=\overline{(a,b)}. \tag{1.248}$$

De même $e+\overline{(a,b)}=\overline{(a,b)}$ par commutativité de la somme dans $\mathbb{N}$.

(2) **Inverse** Il faut vérifier que $\overline{(b,a)}$ est l'inverse de $\overline{(a,b)}$.

(3) **Associativité** Calcul direct en utilisant l'associativité dans $\mathbb{N}$.

□

PROPooVMGYooUWsbSr

Proposition 1.179.
L'application

$$\begin{aligned}\iota\colon\mathbb{N}&\to\mathbb{Z}\\ n&\mapsto\overline{(n,0)}\end{aligned} \tag{1.249}$$

est un morphisme[75] *injectif.*

Démonstration. Le fait que ce soit un morphisme est le calcul

$$\iota(a+b)=\overline{(a+b,0)}=\overline{(a,0)}+\overline{(b,0)}=\iota(a)+\iota(b). \tag{1.250}$$

Pour l'injectivité, supposons que $\iota(a)=\iota(b)$. Alors $\overline{(a,0)}=\overline{(b,0)}$, c'est-à-dire $a+0=b+0$. Donc $a=b$. □

[75] Certes $\mathbb{N}$ n'est pas un groupe, donc le mot « morphisme » est un peu abusé, mais vous voyez ce que je veux dire.

1.6.1 Opposé

SUBooEEMorsRABNfsOZZDes

Lemme 1.180.
Tout élément de $\mathbb{Z}$ a un représentant de la forme $(a,0)$ ou $(0,b)$.

Démonstration. Soient $a,b\in\mathbb{N}$. Si $b\leqslant a$, alors nous avons

$$(a,b)\sim(a-b,0) \tag{1.251}$$

où la différence est calculée dans $\mathbb{N}$ et a un sens parce que nous avons supposé $b\leqslant a$. Si par contre $a\leqslant b$ alors

$$(a,b)\sim(0,b-a). \tag{1.252}$$

Puisque l'ordre sur $\mathbb{N}$ est total[76], tous les cas sont couverts. □

LEMooDEFRelatifOppose

Lemme-Définition 1.181.
Soit $z\in\mathbb{Z}$. L'application[77]

$$\begin{aligned} f\colon z&\to\mathbb{Z}\\ (a,b)&\mapsto\overline{(b,a)} \end{aligned} \tag{1.253}$$

est constante.

Nous nommons $-z$ sa valeur.

Démonstration. Soient (a,b) et (x,y) dans z. Nous avons successivement :

- $(a,b)\sim(x,y)$.
- $a+y=b+x$.
- $(b,a)\sim(y,x)$
- $\overline{(b,a)}=\overline{(y,x)}$
- $f(a,b)=f(x,y)$.

D'où la constance de f. □

PROPooJMETooHQGwnv

Proposition 1.182 ([1])**.**
Soient $a,b\in\mathbb{Z}$. Nous avons

ITEMooWNYGooMopPcq

(1) $(-a)b=-(ab)$

LEMooEntiersRelatifsSigne

Lemme 1.183.
Nous avons

ITEMooSQFGooQPgIMu

(1) $\mathbb{Z}=\iota(\mathbb{N})\cup-\iota(\mathbb{N})$

ITEMooHQUQooJeqULl

(2) $\iota(\mathbb{N})\cap-\iota(\mathbb{N})=\{0\}$.

Démonstration. Nous avons

SUBEQooVJGVooCUxtvk

$$\iota(\mathbb{N})=\{\overline{(n,0)}\text{ tel que }n\in\mathbb{N}\} \tag{1.254a}$$

SUBEQooAPGRooQCkYRr

$$-\iota(\mathbb{N})=\{\overline{(0,n)}\text{ tel que }n\in\mathbb{N}\}. \tag{1.254b}$$

Montrons à présent les deux points.

(1) **Pour (1)** Nous savons par le lemme 1.180 que tous les éléments de $\mathbb{Z}$ sont de la forme (1.254a) ou (1.254b).

(2) **Pour (2)** Si $z\in\iota(\mathbb{N})\cap-\iota(\mathbb{N})$, il existe $n,m\in\mathbb{N}$ tels que $\overline{(n,0)}=\overline{(0,m)}$, ce qui signifie en particulier que $(n,0)\sim(0,m)$ ou encore que $n+m=0$. Le lemme 1.129 dit alors que $n=m=0$.

Nous avons donc $z=\overline{(0,0)}=0$.

□

[76] Proposition 1.136.

[77] Pour rappel, z est une classe d'équivalence dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, c'est-à-dire une partie de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Ça a un sens de prendre z comme ensemble sur lequel on définit une fonction.

PROPooCHGRooRksGGO

Proposition 1.184.
L'application

$$\begin{aligned}\iota\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{Z}\\ n &\mapsto \overline{(n,0)}\end{aligned} \tag{1.255}$$

est un morphisme injectif qui respecte l'ordre.

Démonstration. Le fait que ce soit un morphisme injectif est la proposition 1.179.
Il faut encore prouver que ça respecte l'ordre[78] □

PROPooORABooXRbVoz

Proposition 1.185 ([1])**.**
Soit G, un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$. Alors

ITEMooUZBJooUeVmmz

(1) La partie $\{x > 0$ tel que $x \in G\}$ est non vide.

ITEMooIXXFooOWkbPb

(2) En posant

$$p = \min\{x > 0 \in G\}, \tag{1.256}$$

nous avons $G = p\mathbb{Z}$.

Démonstration. Vu que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, si $x, y \in G$ nous avons $x + y \in G$, $-x \in G$, etc.

(1) **Pour (1)** Soit $x \neq 0$ dans G. Si $x > 0$ c'est bon. Sinon $-x \in G$ et $-x > 0$.

(2) **Pour (2)** Nous posons

$$p = \min\{x \in G \text{ tel que } x > 0\}. \tag{1.257}$$

Vu que $p \in G$ nous avons $p\mathbb{Z} \subset G$. Nous devons montrer l'inclusion inverse.

Soit $y \in G$. Par la division euclidienne 1.164, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant r < p$ tels que $y = qp + r$. Vu que y et qp sont dans G nous avons $r = y - qp \in G$. Par minimalité de p, nous devons avoir $r = 0$, et donc $y = qp \in p\mathbb{Z}$.

□

1.6.2 Ordre sur $\mathbb{Z}$

NORMSUBRotationsRelationsOrdre

1.186.
Si $z \in \mathbb{Z}$, nous disons que $z \in \mathbb{N}$ lorsque $z \in \iota(\mathbb{N})$. C'est un abus de notation qu'il est difficile de ne pas faire. Le même abus sera fait pour passer de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$ puis $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{C}$.

DEFooYMRHooCyEKtr

Définition 1.187 (Positivité et ordre dans $\mathbb{Z}$[1])**.**
La positivité[79] *que nous considérons sur $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous considérons alors la relation d'ordre*[80] *$\leqslant$ donnée par $a \leqslant b$ si et seulement si $b - a \in \mathbb{N}$.*

Nous disons que

*(1) L'élément $z \in \mathbb{Z}$ est **positif** si $z \geqslant 0$.*

*(2) L'élément $z \in \mathbb{Z}$ est **strictement positif** si $z \geqslant 0$ et $z \neq 0$. Nous notons $z > 0$.*

*(3) L'élément $z \in \mathbb{Z}$ est **négatif** si $z \leqslant 0$.*

*(4) L'élément $z \in \mathbb{Z}$ est **strictement négatif** si $z \leqslant 0$ et $z \neq 0$. Nous notons $z < 0$.*

DEFooRelatifsPositifs

Définition 1.188 (Éléments positifs de $\mathbb{Z}$)**.**
*On dit qu'un élément $z \in \mathbb{Z}$ est **positif** si $z \in \mathbb{N}$. On note dans ce cas $z \geqslant 0$.*

*On dira qu'il est **négatif** quand $-z \in \mathbb{N}$. On note ainsi $z \leqslant 0$.*

*On dit qu'un entier relatif z est **strictement positif** s'il est positif et non nul; on note $z > 0$. Il est **strictement négatif**orsqu'il est négatif et non nul, et cela est noté $z < 0$.*

PROPooMYYDooOABOdB

Proposition-Définition 1.189 (Relation d'ordre [35])**.**
La paire[81] *$(\mathbb{Z}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.*

[78] Faites-le en envoyez-moi la preuve.
[79] Définition 1.99.
[80] De la proposition 1.100.
[81] Voir la définition 1.187 pour $\leqslant$.

1.190.
Une version de la proposition 1.189 dans $\mathbb{R}$ sera le lemme 1.549.

TODOooDefinirMultiplicationRelatifs

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 1.191
Définir ici la multiplication dans $\mathbb{Z}$ comme extension de celle de $\mathbb{N}$. Montrer que ça en fait un anneau totalement ordonné.

PROPooADGIooTioqdu

Proposition 1.192 ([1])**.**
L'anneau $\mathbb{Z}$ est totalement ordonné[82]

LEMooSVDDooWsyxNP

Lemme 1.193.
Soient $a > 0$ et $b \geqslant 1$ (resp. $b > 1$ dans $\mathbb{Z}$. Nous avons

$$ab \geqslant a \qquad (\text{resp. } ab > a). \tag{1.258}$$

Démonstration. On la fait seulement pour l'inégalité stricte : il suffit de recopier pour l'inégalité large. Par récurrence sur a qui se trouve être dans $\mathbb{N}$. Lorsque $a = 1$, on lit simplement $1b > 1$ qui est correct.

Si la propriété est vraie pour un certain a, alors

$$\begin{aligned}(a+1)b &= ab + b && \text{(distributivité)} && (1.259)\\ &> a + b \text{(hyp. de réc.)} && && (1.260)\\ &> a + 1 \text{(hyp. sur } b). && && (1.261)\end{aligned}$$

Et le principe de récurrence permet de conclure. □

NORMooLienRelatifsAnnTotOrdonne

1.194.
Cette proposition est en partie similaire à 1.108 qui parle d'anneau totalement ordonné.

PROPooYFUBooJUZgwH

Proposition 1.195 ([1])**.**
Quelques propriétés de l'ordre dans $\mathbb{Z}$. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

ITEMooULKWooLmKBse

(1) Si $a, b \geqslant 0$, alors $ab \geqslant 0$.

ITEMooSAJPooEDSgXJ

(2) Si $a, b > 0$, alors $ab > 0$.

ITEMooINGNooOgSGiF

(3) Si $a, b \leqslant 0$ alors $ab \geqslant 0$.

ITEMooOGFXooDvLKAE

(4) Si $a \geqslant 0$ et $b \leqslant 0$ alors $ab \leqslant 0$.

ITEMooRelatifsOrdreOppose

(5) Si $a > 0$, alors $-a < 0$.

ITEMooRelatifsOrdreCarrePositif

(6) Nous avons $a^2 \geqslant 0$ et $a^2 = 0$ si et seulement si $a = 0$.

ITEMooBUHIooLJOSLQ

(7) Si $ab \geqslant 0$ et si $a \geqslant 0$ alors $b \geqslant 0$.

ITEMooGDFPooBbpBgn

(8) Si $ab > 0$ alors soit $a, b > 0$, soit $a, b < 0$.

LEMooMYEIooNFwNVI

Lemme 1.196.
Toute partie bornée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

PROPooRelatifsValAbs

Proposition 1.197.
Si $z \in \mathbb{Z}$, alors :

(1) $|z|$ est bien définie et $|z| \in \mathbb{N}$;

(2) nous avons $|ab| = |a||b|$.

Démonstration. C'est le fait que $\mathbb{Z}$ est un anneau totalement ordonné[83] : donc la proposition-définition 1.113 s'applique, y compris l'équation (1.99). □

DEFooRelatifsDiviseurParite

Définition 1.198.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On étend les notions de divisibilité et de parité de la définition 1.165 en disant que :

(1) a est divisible par b si $|a|$ est divisible par $|b|$;

[82] Définition 1.107.
[83] Proposition 1.192.

(2) a est pair si $|a|$ est pair ;

(3) b est impair si $|b|$ est impair.

PROPooYJBMooZrzkNX

Proposition 1.199.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ non nuls, tels que a soit divisible par b. Alors $|a| \geqslant |b|$.

Démonstration. a est divisible b dans $\mathbb{Z}$ revient à dire que $|a|$ est divisible $|b|$ dans $\mathbb{N}$, donc par la définition 1.165, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $|a| = q\,|b|$. Comme a et b sont non nuls, $|a|$ et $|b|$ sont aussi non nuls, et donc $q \neq 0$: en effet, sinon, nous aurions $q\,|b| = 0 = |a|$ à cause de la proposition 1.149 point (4). Ainsi, $q \geqslant 1$, et grâce au lemme 1.193, on a $|a| = q\,|b| \geqslant |b|$. □

LEMooCMOEooSoeclk

Lemme 1.200 ([1])**.**
Soit $n \in \mathbb{Z}$.

(1) Si n est impair[84]*, alors $n-1$ et $n+1$ sont pairs.*

(2) Si n est pair, alors $n-1$ et $n+1$ sont impairs.

Démonstration. Selon que $n \geqslant 0$ ou que $n \leqslant 0$, on effectue la division euclidienne de n ou de $-n$ par 2.

(1) **Cas $n \geqslant 0$** Il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1\}$ tel que $n = 2q + r$.

- Quand n est pair, on a $r = 0$. Alors $n+1 = 2q+1$ et $n-1 = 2(q-1)+2-1 = 2(q-1)+1$ sont impairs.
- Quand n est impair, on a $r = 1$. Alors $n+1 = 2q+2 = 2(q+1)$ et $n-1 = 2q+1-1 = 2q$ sont pairs.

(2) **Cas $n \leqslant 0$** Il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1\}$ tel que $-n = 2q + r$.

- Quand n est pair, on a $r = 0$. Alors $-n+1 = 2q+1$ est impair, et $n-1 = -(-n+1)$ l'est aussi. De même, $-n-1 = 2(q-1)+2-1 = 2(q-1)+1$, et donc $n+1 = -(-n-1)$, sont impairs.
- Quand n est impair, on a $r = 1$. Alors $-n+1 = 2q+2 = 2(q+1)$ est pair, et $n-1 = -(-n+1)$ l'est aussi. De même, $-n-1 = 2q+1-1 = 2q$, et donc $n+1 = -(-n-1)$, sont pairs.

□

LEMooJNXIooBmdOVi

Lemme 1.201.
L'ensemble $\mathbb{Z}$ est infini dénombrable.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.262}$$

et nous montrons qu'elle est bijective.

(1) **f est injective** Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $f(x) = f(y)$. Il y a trois possibilités : $f(x) < 0$, $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$.

(1a) **Si $f(x) = 0$** Nous supposons que $f(x) = 0$. Si x est pair, c'est que $x/2 = 0$ et donc que $x = 0$. Si x est impair, c'est que $x + 1 = 0$ et donc que $x = -1$ qui n'est pas possible parce que $x \in \mathbb{N}$. Bref, la seule possibilité pour $f(x) = 0$ est $x = 0$.

(1b) **Si $f(x) < 0$** Alors x est pair et $x = 2f(x)$. Même raisonnement pour y : $y = 2f(y) = 2f(x) = x$.

(1c) **Si $f(x) < 0$** Alors x est impair et

$$f(x) = -\frac{x+1}{2} = f(y) = -\frac{y+1}{2}, \tag{1.263}$$

et donc $x = y$.

(2) **f est surjective** Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n > 0$, alors $n = f(2n)$. Si $n < 0$ alors $n = f(-2n-1)$. Notez que $-2n - 1 > 0$, donc c'est valide.

[84] Définition 1.198.

□

LEMooILYLooTDRtYj

Lemme 1.202 ([1]).
Soit un anneau[85] *A. Si une application $f\colon \mathbb{Z} \to A$ vérifie*

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{Z}$,

(2) $f(1) = 1$,

alors

ITEMooUQKWooByNDTK

(1) $f(0) = 0$

ITEMooYOEPooKOQQPH

(2) $f(-x) = -f(x)$

ITEMooKTSDooExAJHd

(3) f est un morphisme d'anneaux, c'est-à-dire que

$$f(xy) = f(x)f(y). \tag{1.264}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Prenons un x quelconque. Nous avons $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$. Donc $f(0) = 0$.

(2) **Pour (2)** L'inverse pour la somme de $f(-x)$ est $-f(x)$. En effet

$$f(-x) + f(x) = f(-x+x) = f(0) = 0. \tag{1.265}$$

(3) **Pour (3), si $y > 0$** Nous prouvons que $f(xy) = f(x)f(y)$ par récurrence sur y. D'abord pour $y = 1$ nous avons bien $f(xy) = f(x)f(y)$ parce que $f(1) = 1$. Ensuite nous avons :

$$\begin{aligned}
f\big(x(y+1)\big) &= f(xy + x) && && \text{(1.266a)}\\
&= f(xy) + f(x) && \text{morph pour } + && \text{(1.266b)}\\
&= f(x)f(y) + f(x) && \text{hyp. rec.} && \text{(1.266c)}\\
&= f(x)\big(f(y) + 1\big) && && \text{(1.266d)}\\
&= f(x)\big(f(y) + f(1)\big) && && \text{(1.266e)}\\
&= f(x)f(y+1) && && \text{(1.266f)}
\end{aligned}$$

(4) **Si $y < 0$** Nous posons $y' = -y$. Vu que $y' > 0$ nous avons

$$f(xy) = f(-xy') = -f(xy') = -f(x)f(y') = f(x)(-1)f(y') = f(x)f(-y') = f(x)f(y). \tag{1.267}$$

□

1.7 Quelques résultats de cardinalité

SECooResultatsCardinalite

1.7.1 Ensembles dénombrables

NORMSUBooEnsFiniEquivalenceDef

1.203.
La proposition suivante est à peu près prise comme définition d'un ensemble fini dans [39] qui donne également une preuve de l'équivalence avec notre définition.

PROPooBYKCooGDkfWy

Proposition 1.204.
L'ensemble $\mathbb{N}$ est infini[86].

Démonstration. Nous considérons la partie propre[87]

$$A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant 1\}. \tag{1.268}$$

Ensuite nous posons

$$\begin{aligned}
\sigma\colon \mathbb{N} &\to A\\
x &\mapsto s(x).
\end{aligned} \tag{1.269}$$

Le fait que σ prenne ses valeurs dans A est parce que s prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\} = A$.

[85] Définition 1.92.
[86] Définition 1.69.
[87] Le fait que ce soit une partie propre est dû au fait que 0 n'est pas dedans d'une part parce que le lemme 1.131 dit que $0 \leqslant 1$, et d'autre part parce que le lemme 1.129 donne $0 \neq 1$.

(1) σ **est injective** Parce que s l'est.

(2) σ **est surjective** C'est dans la définition 1.116(2)

Nous avons donc une bijection entre $\mathbb{N}$ et un sous-ensemble strict. □
LEMooYIWDooIQFSad

Lemme 1.205.
Si $a \leqslant b$ dans $\mathbb{N}$, alors la partie[88] $\{a, \dots, b\}$ *est finie.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour $a = 0$** Nous commençons par prouver que $\{0, \dots, b\}$ est fini. Par récurrence sur b. Avec $b = 0$, la partie $\{0\}$ est finie parce que son seul sous-ensemble propre est $\varnothing$ qui n'est pas en bijection avec $\{0\}$.

Supposons que $\{0, \dots, b\}$ est fini. Alors $\{0, \dots, b\} \cup \{b+1\}$ est fini par le lemme 1.73.

(2) **Cas général** Nous avons $\{a, \dots, b\} \subset \{0, \dots, b\}$. Donc $\{a, \dots, b\}$ est une partie d'un ensemble fini. Elle est finie par 1.71.

□
LEMooJDGOooHdyJnu

Lemme 1.206.
Si $p \neq q$, alors il n'existe pas de bijection entre $\{0, \dots, p\}$ et $\{0, \dots, q\}$.

Démonstration. Supposons pour fixer les idées que $p \leqslant q$. Dans ce cas $\{0, \dots, p\}$ est une partie stricte de $\{0, \dots, q\}$. Vu que $\{0, \dots, q\}$ est fini (lemme 1.205), il n'y a pas de bijection avec ses parties strictes. □
PROPooJLGKooDCcnWi

Proposition-Définition 1.207 (Cardinal d'un ensemble fini[1])**.**
Soit un ensemble non vide I.
ITEMooMNMTooEOIjdo

(1) L'ensemble I est fini[89] *si et seulement si il existe une bijection entre I et $\{0, \dots, N\}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$.*
ITEMooZJFUooSNUSIk

(2) Si I est fini, il existe un unique $N \in \mathbb{N}$ tel que I soit en bijection avec $\{0, \dots, N\}$.

Dans ce cas, le nombre $N+1$ est le ***cardinal*** *de I, et est noté* $\mathrm{Card}(I)$*. Pour l'ensemble vide, nous définissons* $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1), $\Leftarrow$** Soit un ensemble A en bijection avec $\{0, \dots, N\}$. Nous avons vu que $\{0, \dots, N\}$ est fini dans le lemme 1.205. Le lemme 1.75(2) conclut que A est fini.

(2) **(1), $\Rightarrow$** Le vrai sport est de faire l'implication inverse. Nous supposons que A est un ensemble fini, et nous allons prouver qu'il est en bijection avec $\{0, \dots, N\}$ pour un N bien choisi. Nous allons utiliser le lemme de Zorn. Soit

$$\mathcal{A} = \{(N, \varphi) \text{ tel que } \varphi\colon \{0, \dots, N\} \to A \text{ est injective}\}. \tag{1.270}$$

Nous mettons sur $\mathcal{A}$ la relation d'ordre donnée par $(N_1, \varphi_1) \leqslant (N_2, \varphi_2)$ lorsque

(2a) $N_1 \leqslant N_2$

(2b) φ_2 étend φ_1, c'est-à-dire que $\varphi_2 = \varphi_1$ sur $\{0, \dots, N_1\}$.

(2a) **$\mathcal{A}$ est inductif** Soit une partie $\mathcal{F}$ totalement ordonnée de $\mathcal{A}$. Nous considérons la partie suivante de $\mathbb{N}$:

$$S = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \exists \varphi \text{ tel que } (n, \varphi) \in \mathcal{F}\}. \tag{1.271}$$

Si S est majoré, alors il a un maximum (proposition 1.137(4)). Si M est le maximum de S, le (M, φ) de $\mathcal{F}$ qui correspond à ce maximum est un majorant de $\mathcal{F}$.

Supposons –pour l'absurde– que $\mathcal{F}$ n'est pas majoré dans $\mathcal{A}$; en particulier S n'est pas majoré dans $\mathbb{N}$. Pour chaque $n \in S$, il existe une application φ_n telle que $(n, \varphi_n) \in \mathcal{F}$. Cela nous permet de définir

$$\begin{aligned} \phi\colon S &\to A \\ n &\mapsto \varphi_n(n). \end{aligned} \tag{1.272}$$

[88] Définition 1.140.
[89] Ensemble fini, définition 1.69.

Montrons que ϕ est injective. Si $\phi(m)=\phi(n)$, alors $\varphi_m(m)=\varphi_n(n)$. Supposons pour fixer les idées que $n\leqslant m$. Vu que (n,φ_n) et (m,φ_m) sont dans $\mathcal{F}$ qui est totalement ordonné, φ_m prolonge φ_n ; en particulier $\varphi_n(n)=\varphi_m(n)$. Mais comme φ_m est injective, $m=n$.

Nous avons donc une injection $\phi\colon S\to A$. Mais S est non borné et donc infini[90]. La proposition 1.74 conclut que A est infini, ce qui est contraire aux hypothèses.

Donc $\mathcal{F}$ a un majorant et $\mathcal{A}$ est inductif.

(2b) **Lemme de Zorn** Le lemme de Zorn dit que $\mathcal{A}$ a un élément maximal.

(2c) **Conclusion** Soit (N,φ) un élément maximal de $\mathcal{A}$. Nous allons prouver que $\varphi\colon\{0,\dots,N\}\to A$ est une bijection. Que φ soit injective est une conséquence du fait que (N,φ) est dans $\mathcal{A}$.

Pour prouver que φ est surjective, nous supposons qu'elle ne l'est pas. Soit $a\in A$ qui n'est pas dans l'image de φ. En posant

$$\begin{aligned}\phi\colon\{0,\dots,N+1\}&\to A\\ x&\mapsto\begin{cases}\varphi(x) & \text{si } x\neq N+1\\ a & \text{si } x=N+1,\end{cases}\end{aligned}\tag{1.273}$$

le couple $(N+1,\phi)$ majore strictement (N,φ). Ce qui est une contradiction.

(3) **(2) existence** L'existence est ce que nous venons de montrer ci-dessus.

(4) **(2) unicité** Supposons que I soit en bijection avec $\{0,\dots,M\}$ et avec $\{0,\dots,N\}$. Il existe donc une bijection entre $\{0,\dots,M\}$ et $\{0,\dots,N\}$. Par le lemme 1.206, cela implique que $M=N$.

□

Nous ne définissons pas ce qu'est le cardinal d'un ensemble infini ; c'est très compliqué et ça ne nous servira pas.

LEMooRWUDooTgoRXH

Lemme 1.208.
Si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, alors pour tout n, la partie $A\setminus\{0,\dots,n\}$ est non vide.

Démonstration. Si $A\setminus\{0,\dots,n\}$ était vide, cela signifierait que A est une partie de $\{0,\dots,n\}$. Or nous savons que $\{0,\dots,n\}$ est fini (lemme 1.205), et que toute partie d'un ensemble fini est finie (lemme 1.71). Donc nous aurions que A est fini, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

PROPooOTHMooPzPzdW

Proposition 1.209 ([1]).
À propos d'ensembles finis.

ITEMooFIEUooRmDcfo

(1) Si I est un ensemble fini et si $\{A_i\}_{i\in I}$ sont des ensembles finis, alors $\bigcup_{i\in I}A_i$ est fini.

ITEMooLVSVooHEwNWA

(2) Si A et B sont finis, alors $A\times B$ est fini.

LEMooVFNOooZenJSl

Lemme 1.210 ([1]).
Si A est un ensemble fini, alors

$$\sum_{i\in A}1=\operatorname{Card}(A).\tag{1.274}$$

LEMooRURDooRIGJnY

Lemme 1.211 ([1]).
Si $\operatorname{Card}(A)=n$ et si $a\in A$ alors $\operatorname{Card}(A\setminus\{a\})=n-1$.

1.212.
En termes de notations, si I et A sont des ensembles et si $\sigma\colon I\to A$ est une injection, nous notons souvent

$$\{a_i\}_{i\in I}\tag{1.275}$$

l'ensemble $\sigma(I)$ en écrivant a_i pour $\sigma(i)$.

La proposition 1.213 dira entre autres que $\operatorname{Card}\big(\{a_1,\dots,a_n\}\big)=n$ ou que

$$\operatorname{Card}\big(a_i\text{ tel que }i\in I\big)=\operatorname{Card}(I)\tag{1.276}$$

pourvu que les a_i sont tous différents.

La proposition 1.214 permettra de dire, si $\operatorname{Card}(A)=k$, que $A=\{a_1,\dots,a_k\}$.

[90] Le lemme 1.142 dit qu'il existe une bijection entre S et $\mathbb{N}$. De là nous concluons que S est infini parce qu'un ensemble en bijection avec un ensemble infini est infini par la proposition 1.74.

PROPooTJVUooZDxMpU

Proposition 1.213 ([1]).
Si il existe une injection $\sigma\colon I \to E$ alors $\mathrm{Card}\big(\sigma(I)\big) = \mathrm{Card}(I)$.

Démonstration. L'application σ est une bijection entre I et son image $\sigma(I)$. □

PROPooFRKAooAnqKEh

Proposition 1.214 ([1]).
Soient un ensemble fini E tel que $\mathrm{Card}(E) = n$ *et une partie finie $A \subset E$ telle que* $\mathrm{Card}(A) = k$. *Nous considérons une bijection $\sigma\colon \{1,\dots,n\} \to E$. Alors il existe $S \subset \{1,\dots,n\}$ tel que*

(1) $\mathrm{Card}(S) = k$

(2) $A = \sigma(S)$.

Démonstration. Il suffit de poser $S = \sigma^{-1}(A)$. □

LEMooVFPNooVmdUXY

Lemme 1.215 ([1]).
Union d'ensembles finis.

ITEMooBUCZooYLCuIe

(1) Si A et B sont des ensembles finis disjoints, alors $A \cup B$ est fini et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B). \tag{1.277}$$

ITEMooCCWOooYwgGBp

(2) Si A et B sont des ensembles finis, alors $A \cup B$ est fini.

ITEMooYJSZooXQXkOX

(3) Si A est fini et si $B \subset A$ alors

$$\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(B). \tag{1.278}$$

ITEMooSWJCooEpBVkG

(4) Si A et B sont des ensembles quelconques, alors

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B). \tag{1.279}$$

ITEMooJDUUooVMvAOn

(5) Si les $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ sont des ensembles deux à deux disjoints, alors

$$\mathrm{Card}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i). \tag{1.280}$$

ITEMooNMFSooBvsNyq

(6) Si I ou J est infini, alors $I \cup J$ est infini.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Puisque A et B sont finis, la proposition 1.207 nous dit qu'il existe des naturels N et M ainsi que des bijections $\varphi_A\colon \{0,\dots,N\} \to A$ et $\varphi_B\colon \{0,\dots,M\} \to B$. Maintenant l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \{0,\dots,M+N+1\} &\to A \cup B \\ n &\mapsto \begin{cases} \varphi_A(n) & \text{si } n \leqslant N \\ \varphi_B(n-N-1) & \text{si } n > N \end{cases} \end{aligned} \tag{1.281}$$

est une bijection. Le fait que A et B soient disjoints est important pour l'injectivité. La proposition 1.207 nous dit qu'alors $A \cup B$ est fini. De plus, par définition le cardinal de $A \cup B$ est $N + M$.

(2) **Pour (2)** Nous ne supposons plus que A et B sont disjoints. Nous posons $I = A$ et $J = B \setminus A$. Avec ça, I et J sont disjoints et finis (comme parties des ensembles finis, lemme 1.71), et vérifient $I \cup J = A \cup B$. Le point (1) indique que $I \cup J$ est fini.

(3) **Pour (3)**
L'ensemble A peut être écrit sous la forme d'une union disjointe : $A = B \cup (A \setminus B)$. Les ensembles B et $A \setminus B$ étant disjoints, nous avons

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(A \setminus B). \tag{1.282}$$

(4) **Pour (4)** Nous utilisons quelques égalités d'ensembles pour ramener $A\cup B$ à des cas déjà traités :

$$A\cup B=A\cup(B\setminus A)=A\cup\big(B\setminus(A\cap B)\big).\tag{1.283}$$

EQooSZDYooPBOdYy

Nous avons en particulier utilisé $B\setminus A=B\setminus(A\cap B)$. La chose intéressante dans (1.283) est que l'union est disjointe et que $A\cap B\subset B$. Nous pouvons donc écrire

$$\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}\big(B\setminus(A\cap B)\big)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B).\tag{1.284}$$

(5) **Pour (5)** Récurrence en utilisant le point (4).

(6) **Pour (6)** Toute partie d'un ensemble fini est finie (lemme 1.71). Donc si $I\cup J$ était fini, I et J devraient l'être.

□

1.7.2 Minimum, maximum

Une démonstration sans utilisation des naturels est dans la proposition 1.72.

LEMooPCRFooXRGrUr

Lemme 1.216 ([40])**.**
Si E est un ensemble ordonné et si A est une partie finie non vide totalement ordonnée de E, alors A possède un unique minimum et un unique maximum[91]*.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Existence maximum** Soit un ensemble E totalement ordonné. Nous faisons par récurrence[92] sur le cardinal de la partie finie (proposition 1.207 pour la définition du cardinal).

Si $\mathrm{Card}(A)=1$, alors nous avons $A=\{a\}$ pour un certain $a\in E$ et ce a est un maximum de A.

Sinon nous passons à la récurrence. Nous supposons que pour toute partie B totalement ordonné de cardinal n, il existe un $m_B\in B$ tel que $m_B\geqslant x$ pour tout $x\in B$. Soit une partie A totalement ordonnée de cardinal $n+1$. Nous prouvons que A possède un maximum.

Soit $a\in A$. La partie $B=A\setminus\{a\}$ est de cardinal $n-1$ (lemme 1.215(3)). Par hypothèse de récurrence, l'ensemble B admet un maximum que nous notons b. Il y a deux possibilités : $a>b$ ou $a<b$.

(1a) **Si $a>b$** Alors nous avons $a\geqslant x$ pour tout $x\in A=B\cup\{a\}$. En effet si $x\in B$ nous avons $x<b<a$. Et si $x=a$ nous avons $a=x$.

(1b) **Si $b>a$** Alors $b\geqslant x$ pour tout $x\in A=B\cup\{a\}$. En effet si $x\in B$ nous avons $b\geqslant x$ par définition de b et si $x=a$ nous avons $b>x$ par hypothèse.

(2) **Unicité maximum** En ce qui concerne l'unicité, si a et b sont des maximums d'une partie A, alors $a\geqslant b$ parce que $b\in A$ et $b\geqslant a$ parce que $a\in A$. La définition 1.23(2) de la relation d'ordre conclu que $a=b$.

Pour l'existence et l'unicité du minimum, nous adaptons juste ce que nous venons de faire[93]. □

LEMooOEJOooOgaxzi

Lemme-Définition 1.217 ([1])**.**
Si A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, il existe un unique élément $m\in\mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} m\in A & (1.285a)\\ m\leqslant x\ \forall x\in A. & (1.285b)\end{cases}$$

Cet élément est noté $\min(A)$ *et nommé* ***minimum de*** *A.*

Si A est majoré, il existe un unique élément $M\in\mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} M\in A & (1.286a)\\ M\geqslant x\ \forall x\in A. & (1.286b)\end{cases}$$

Cet élément est noté $\max(A)$ *et nommé* ***maximum de*** *A.*

Démonstration. En plusieurs parties.

[91] Définition 1.29.
[92] Proposition 1.121.
[93] Je n'ai pas vérifié. Faites-le et écrivez-moi si ça pose un problème.

(1) **Existence minimum** Soit $a \in A$. Nous considérons $E = A \cap \{0, \dots, a\}$. C'est un en semble non vide (il contient a) et fini en tant que partie de $\{0, \dots, a\}$ (utilisation des lemmes 1.71 et de 1.205). Donc 1.216 dit que E possède un minimum. Soit m ce minimum.

Si $x \in A$ alors soit $x \in E$ (et alors $l \leqslant x$), soit x n'est pas dans E et alors $x \geqslant a \geqslant m$.

(2) **Existence maximum** Soit un majorant M de A. Si $M \in A$ alors on est bon. Sinon nous posons

$$E = \bigcap_{a \in A} \{a, \dots, M\}. \tag{1.287}$$

C'est un ensemble non vide parce qu'il contient M. Et il est fini parce qu'il est contenu dans $\{0, \dots, M\}$ qui est fini.

Nous considérons le minimum μ de E. Pour tout $a \in A$ nous avons $\mu \in \{a, \dots, M\}$ et donc $\mu \geqslant a$.

Nous devons encore prouver que $\mu \in A$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors pour tout $a \in A$ nous avons $\mu \in \{a, \dots, M\}$. Mains $\mu \neq a$, donc $\mu \in \{a+1, \dots, M\}$. Autrement dit, $\mu \in \{a+1, \dots, M\}$. Donc

$$\mu - 1 \in \bigcap_{a \in A} \{a, \dots, M\} = E. \tag{1.288}$$

Contradiction à propos de la minimalité de μ.

(3) **Unicité minimum** Soient des minima m_1 et m_2. Nous avons $m_1 \leqslant m_2$ parce que $m_2 \in A$ et m_1 est une minimum de A. De même $m_2 \leqslant m_1$. Donc $m_1 = m_2$.

(4) **Unicité maximum** De même que l'unicité du minimum.

□
LEMooKUWUooPLWelf

Lemme 1.218.
Toute partie finie non vide de $\mathbb{N}$ est majorée et minorée.

Démonstration. Cas particulier du lemme 1.216. □
LEMooGQUWooYJQfJB

Lemme 1.219.
Une partie de $\mathbb{N}$ admet un maximum si et seulement si elle est finie.

DefEnsembleDenombrable

Définition 1.220.
*Un ensemble est **dénombrable** si il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$. Il est **non dénombrable** si il est infini et ne peut pas être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.*

Une chose vraiment amusante avec cette définition que l'on met en rapport avec la définition 1.69, c'est qu'un ensemble fini n'est ni dénombrable ni non dénombrable[94].

1.7.3 Dénombrabilité et ensemble des naturels

PROPooOBKMooWEGCvM

Proposition 1.221 ([1, 15]).
Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration. Soit A, une partie infinie de $\mathbb{N}$.

(1) **Définition de σ** Nous voulons construire une application $\sigma : \mathbb{N} \to A$ telle que

$$\begin{cases} \sigma(0) = \min(A) & \text{SUBEQooEIEMooZcTOWT} \quad (1.289a) \\ \sigma(k+1) = \min\Big(A \setminus \sigma\big(\{0, \dots, k\}\big)\Big) & \text{SUBEQooWWOAooAEfrPx} \quad (1.289b) \end{cases}$$

Les lâches, par prudence, diront juste que c'est défini par récurrence et n'insisteront pas. Nous, nous insistons.

Nous allons définir $\sigma(n)$ à l'aide du théorème 1.122. Pour cela nous posons $E = \mathcal{P}(A)$, $b = \varnothing$ et

$$\begin{aligned} g : E &\to E \\ Z &\mapsto \begin{cases} A & \text{si } Z = A \\ Z \cup \{\min(A \setminus Z)\} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.290}$$

[94] Beaucoup de sources disent qu'un ensemble est dénombrable lorsqu'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Cela laisse la porte ouverte aux ensembles finis. Par exemple Wikipédia[41].

Notons que la proposition 1.137(2) nous indique que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum ; la définition de g a donc un sens. Le théorème 1.122 donne alors une application $f\colon \mathbb{N} \to E$ telle que

(1a) $f(0) = b = \varnothing$

(1b) $f(n+1) = g\big(f(n)\big)$ pour tout $n \geqslant 0$.

Prouvons par récurrence que $f(n)$ est un ensemble fini pour tout n. D'abord $f(0) = \varnothing$. Ensuite, si $n \geqslant 0$ est tel que $f(n)$ est fini, alors en particulier $f(n) \neq A$ et nous avons

$$f(n+1) = g\big(f(n)\big) = f(n) \cup \{\min\big(A \setminus f(n)\big)\}. \tag{1.291}$$

Dans ce cas, $f(n+1)$ est également fini comme union de deux ensembles finis.

Nous posons

$$\sigma(n) = \min\big(A \setminus f(n)\big). \tag{1.292}$$ EQooGHQHooRnXDdo

Avec $n = 0$, nous avons $\sigma(0) = \min\big(A \setminus \varnothing\big) = \min(A)$. La condition (1.289a) est donc déjà satisfaite.

Nous devons encore prouver (1.289b). Pour tout n, la relation entre $f(n)$ et $\sigma(n)$ est donnée par

$$\begin{cases} f(0) = \varnothing & \text{(1.293a)} \\ f(n+1) = f(n) \cup \sigma(n). & \text{(1.293b)} \end{cases}$$

Par récurrence nous avons alors

$$f(n) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{\sigma(k)\} = \sigma\big(\{0, \dots, n-1\}\big) \tag{1.294}$$ EQooPXFEooYzhtBe

pour tout $n \geqslant 1$. Nous avons alors la condition 1.289b en substituant (1.294) dans la définition (1.292) écrite avec $n+1$:

$$\sigma(n+1) = \min\big(A \setminus f(n+1)\big) = \min\Big(A \setminus \sigma\big(\{0, \dots, n\}\big)\Big). \tag{1.295}$$

(2) **σ est strictement croissante** Vu que $A \setminus \sigma\{0, \dots, k\} \subset A \setminus \sigma\{0, \dots, k-1\}$, le minimum est plus grand ou égal : $\sigma(k+1) \geqslant \sigma(k)$. Mais $\sigma(k+1)$ est sélectionné dans l'ensemble $A \setminus \sigma\{0, \dots, k\}$, qui ne contient justement pas $\sigma(k)$. Donc $\sigma(k+1) \neq \sigma(k)$.

(3) **σ est définie sur $\mathbb{N}$** Il faut montrer que pour tout k, l'ensemble $A \setminus \sigma\{0, \dots, k\}$ est non vide. Si il l'était, cela signifierait que $A \subset \sigma\{0, \dots, k\}$. Par le lemme 1.75(1), la partie $\sigma\{0, \dots, k\}$ est finie dans $\mathbb{N}$. Le lemme 1.71 dit alors qu'en tant que partie de $\sigma\{0, \dots, k\}$, l'ensemble A est fini. Mais comme les hypothèses disent que A est infini, nous avons une contradiction et nous concluons que σ est bien définie sur tout $\mathbb{N}$.

(4) **σ est injective** Une application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante est injective par la proposition 1.141.

(5) **σ est surjective** Soit $a \in A$. Vu que σ est strictement croissante et que $\sigma(0) \geqslant 0$, nous avons $\sigma(a) \geqslant a$. Si $\sigma(a) = a$ nous avons terminé. Supposons $\sigma(a) > a$. Alors

$$\min\big(A \setminus \sigma\{0, \dots, a\}\big) > a. \tag{1.296}$$ EQooNHTBooQexzwV

Si $\sigma\big(\{0, \dots, a\}\big)$ ne contenait pas a, alors $A \setminus \sigma(\{0, \dots, a\})$ le contiendrait et nous n'aurions pas l'inégalité (1.296). Donc $a \in \sigma\big(\{0, \dots, a\}\big)$ et a est bien dans l'image de σ.

□ NORMooPartieDenombrableParCantorBernstein

1.222.
La proposition 1.221 pourrait être prouvée plus facilement en acceptant le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein 1.77. Il existe une injection $A \to \mathbb{N}$ parce que A est une partie de $\mathbb{N}$. Mais puisque A est infini, il possède une partie dénombrable. Cela donne une surjection $A \to \mathbb{N}$ et donc une injection $\mathbb{N} \to A$. Le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein conclut.

Cela dit, une telle preuve demanderait des outils plus complexes.

NORMooBijectionNNMadore

1.223.
La proposition suivante donne une bijection explicite entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Elle n'a rien de transcendante, mais je ne résiste pas à la donner ici parce qu'elle est utilisée dans l'article *Un peu de programmation transfinie* de David Madore[95]. Son utilité est de pouvoir créer un langage de programmation pouvant traiter des paires d'entiers rien qu'en traitant des entiers.

[95] Et comme j'aime beaucoup cet article, il me fallait une excuse pour le placer ici.
http://www.madore.org/~david/weblog/d.2017-08-18.2460.html.

PROPooLPKUooAlsYJg

Proposition 1.224 (Une bijection $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$)**.**
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}&\to\mathbb{N}\\ (x,y)&\mapsto\begin{cases} y^2+x & si\ x<y\\ x^2+x+y & si\ y\leqslant x. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.297}$$

est une bijection.

Démonstration. Il s'agit de prouver qu'elle est injective et surjective. Dans la suite, tous les nombres sont des entiers positifs.

(1) **f est injective**

Pour $k\in\mathbb{N}$ donné, nous allons prouver que

(1a) l'équation $f(x,y)=k$ possède au maximum une solution avec $x<y$,

(1b) l'équation $f(x,y)=k$ possède au maximum une solution avec $y\leqslant x$,

(1c) si $k=y^2+x$ avec $x<y$ alors il est impossible que $k=x'^2+x'+y'$ avec $y'\leqslant x'$.

On y va.

(1a) Nous supposons $y^2+x=t^2+z$ avec $x<y$ et $z<t$. Pour fixer les idées, nous supposons $t>y$ et nous posons $t=y+s$ ($s\geqslant 1$). En substituant, et en isolant z,

$$\begin{aligned} z&=x-2sy-s^2 && \text{(1.298a)}\\ &<x-2sy && \text{(1.298b)}\\ &<x-2sx && \text{(1.298c)}\\ &=x(1-2s) && \text{(1.298d)}\\ &<0. && \text{(1.298e)} \end{aligned}$$

Impossible parce que $z\geqslant 0$.

(1b) De même nous supposons $x^2+x+y=z^2+z+t$ avec $y\leqslant x$ et $t\leqslant z$. Nous posons $z=x+s$, et nous déballons le même genre de calculs en isolant t.

(1c) Enfin nous supposons $y^2+x=z^2+z+t$ avec $x<y$ et $t\leqslant z$. Les plus courageux diviseront en trois cas : $y<z$, $y=z$ et $y>z$ et feront les calculs. Par exemple, pour le cas $y>z$ nous posons $y=z+s$ et nous substituons :

$$(y+s)^2+x=z^2+z+t \tag{1.299}$$

qui donne

$$x=z+t-2zs-s^2<2z-2zs-s^2=2z(1-s)-s^2\leqslant -s<0 \tag{1.300}$$

parce que $s\geqslant 1$, donc $1-s\leqslant 0$.

(2) **f est surjective**

Nous devons prouver que tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont dans l'image de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ par f. En premier lieu, $0=f(0,0)$. C'est un bon début. Soit $a\in\mathbb{N}$ non nul ; nous montrons que tous les nombres de a^2 à $(a+1)^2$ sont des images de f. D'abord $a^2=f(0,a)$, ensuite les nombres

$$f(1,a),f(2,a),\ldots,f(a-1,a) \tag{1.301}$$

prennent les valeurs a^2+1, ..., a^2+a-1. Enfin nous avons $f(a,0)=a^2+a$ et les nombres $f(a,1),\ldots,f(a,a)$ prennent les valeurs de a^2+a+1 à $a^2+2a=(a+1)^2-1$.

□

REMooBijectionNNOrdinaux

Remarque 1.225.
Sachez que cette fonction s'étend aux ordinaux (mais là ce n'est plus pour rigoler).

CORooNRPIooZPSmqa

Corolaire 1.226.
Il existe des parties $\{\mathbb{N}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ telles que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{N}_i=\mathbb{N}$ et que chaque $\mathbb{N}_i$ soit en bijection avec $\mathbb{N}$

Démonstration. Nous considérons la bijection $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ donnée par (l'inverse de celle donnée) par la proposition 1.224, et nous posons

$$\mathbb{N}_i = f^{-1}(i,\mathbb{N}). \tag{1.302}$$

L'application

$$f\colon \mathbb{N}_i\to\{(i,k)\}_{k\in\mathbb{N}} \tag{1.303}$$

est une bijection. Or l'ensemble $\{(i,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est évidemment en bijection avec $\mathbb{N}$. Par composition nous avons le résultat. □

LEMooDLWFooNAJbbq

Lemme 1.227 ([1]).
Si il existe une surjection $\mathbb{N}\to A$, alors A est fini ou dénombrable.

Démonstration. Pour chaque $a\in A$, l'ensemble $f^{-1}(a)$ est une partie de $\mathbb{N}$.

(1) **Une application** La proposition 1.137(2) nous permet de poser

$$\begin{aligned}\sigma\colon A&\to\mathbb{N}\\ a&\mapsto\min\big(f^{-1}(a)\big).\end{aligned} \tag{1.304}$$

(2) **σ est injective** Supposons que $\sigma(a)=\sigma(b)$. Nous appelons x ce nombre :

$$x=\min\big(f^{-1}(a)\big)=\min\big(f^{-1}(b)\big). \tag{1.305}$$

Nous avons $x\in f^{-1}(a)\cap f^{-1}(b)$, ce qui implique que $f(x)=a$ et que $f(x)=b$; donc $a=b$.

Donc σ est une injection.

(3) **A est infini** Si A est fini, le lemme est prouvé. Donc à partir de maintenant nous supposons que A est infini. Le but est de prouver qu'il est dénombrable, c'est-à-dire de construire une bijection $A\to\mathbb{N}$.

(4) **$\sigma(A)$ est dénombrable** Puisque $\sigma\colon A\to\mathbb{N}$ est injective et que A est infini, la proposition 1.74 dit que $\sigma(A)$ est infini dans $\mathbb{N}$. La proposition 1.221 nous dit alors que $\sigma(A)$ est dénombrable.

Soit une bijection $\varphi\colon\sigma(A)\to\mathbb{N}$.

(5) **La candidate bijection** Nous posons

$$f=\varphi\circ\sigma\colon A\to\mathbb{N} \tag{1.306}$$

et nous allons prouver que c'est une bijection.

(6) **Injective** Puisque φ et σ sont injectives, l'égalité $(\varphi\sigma)(a)=(\varphi\sigma)(b)$ implique immédiatement $a=b$.

(7) **Surjective** Soit $k\in\mathbb{N}$. Puisque φ et σ sont des injections, nous pouvons poser $a=(\sigma^{-1}\varphi^{-1})(k)$. Il est alors immédiat que $f(a)=k$.

□

PROPooENTPooSPpmhY

Proposition 1.228 ([1, 41]).
Une union dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Démonstration. Soient A_i des ensembles finis ou dénombrables. Nous posons $A=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i$, et nous considérons les parties $\mathbb{N}_i$ du corolaire 1.226. Puisque A_i est dénombrable ou fini et que $\mathbb{N}_i$ est dénombrable, il existe une surjection $\varphi_i\colon\mathbb{N}_i\to A_i$.

Nous définissons $s\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ par $n\in\mathbb{N}_{s(n)}$, et nous posons enfin

$$\begin{aligned}\varphi\colon\mathbb{N}&\to A\\ n&\mapsto\varphi_{s(n)}(n).\end{aligned} \tag{1.307}$$

Nous prouvons que φ est surjective.

Soit $a\in A_i$. Il existe $n\in\mathbb{N}_i$ tel que $a=\varphi_i(n)$. Mais comme $n\in\mathbb{N}_i$, nous avons $s(n)=i$. Donc

$$a=\varphi_i(n)=\varphi_{s(n)}(n)=\varphi(n). \tag{1.308}$$

Donc $\varphi\colon\mathbb{N}\to A$ est surjective.

Le lemme 1.227 conclut que A est fini ou dénombrable. □

LEMooDTAEooIBdHyo

Lemme 1.229.
Si A est dénombrable et si il existe une surjection $f\colon A\to B$, alors B est fini ou dénombrable.

Démonstration. Étant donné que A est dénombrable, il existe une bijection $\varphi\colon\mathbb{N}\to A$. L'application $f\circ\varphi\colon\mathbb{N}\to B$ est donc une surjection de $\mathbb{N}$ vers B. Donc B est fini ou dénombrable par le lemme 1.227. □

<++>

LEMooSRZWooASgEfy

Lemme 1.230.
Si A est un ensemble fini ou dénombrable, alors il existe une surjection $\mathbb{N}\to A$.

LEMooKFBAooHxgOsg

Lemme 1.231 ([1]).
Si A est dénombrable, alors l'ensemble des parties finies de A est dénombrable.

LEMooRXSRooBUWOyb

Lemme 1.232 ([1]).
Si N est un ensemble dénombrable, alors il existe une bijection $g\colon\{1,2\}\times N\to N$.

Démonstration. D'abord nous définissons une bijection $\varphi\colon\{0,1\}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned}\varphi\colon\{0,1\}\times\mathbb{N}&\to\mathbb{N}\\(n,k)&\mapsto 2k+n.\end{aligned}\tag{1.309}$$

Ensuite si $f\colon\mathbb{N}\to N$ est une bijection, il suffit de poser $g(n,k)=f\big(\varphi(n,k)\big)$. □

PROPooDMZHooXouDrQ

Proposition 1.233 (Produit d'ensembles dénombrables[41]).
Deux résultats.

ITEMooWNBGooZjoIjZ

(1) Si A et B sont dénombrables, alors $A\times B$ est dénombrable.

(2) Si N est un ensemble dénombrable, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'ensemble N^n est dénombrable.

Démonstration. La proposition 1.224 donne une bijection $f\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Par hypothèse sur A et B nous avons des bijections $\varphi\colon A\to\mathbb{N}$ et $\sigma\colon B\to\mathbb{N}$. Nous posons

$$\begin{aligned}f\colon A\times B&\to\mathbb{N}\\(a,b)&\mapsto f\big(\varphi(a),\sigma(b)\big)\end{aligned}\tag{1.310}$$

et nous prouvons que c'est une bijection.

(1) **Injectif** Supposons que $g(a,b)=g(x,y)$. Vu que f est une bijection, nous avons $\varphi(a)=\varphi(x)$ et $\sigma(b)=\sigma(y)$. Étant donné que φ et σ sont des bijections, ça donne $a=x$ et $b=y$. Donc $(a,b)=(x,y)$).

(2) **Surjectif** Soit $n\in\mathbb{N}$. Nous posons $(a,b)=f^{-1}(n)$ puis $x=\varphi^{-1}(a)$ et $y=\sigma^{-1}(b)$. Avec ça nous avons

$$n=f(a,b)=f\big(\varphi(x),\sigma(y)\big)=g(a,b).\tag{1.311}$$

Donc n est bien dans l'image de g.

En ce qui concerne le fait que A^n soit dénombrable, nous le faisons par récurrence. Pour $n=1$, nous savons que $A^n=A$ est dénombrable. Si nous supposons que A^{n-1} est dénombrable, alors nous avons $A^n=A^{n-1}\times A$ qui est dénombrable en tant que produit cartésien de deux ensembles dénombrables. □

NORMooDenombrablesPlusPetitsInfinis

1.234.
Les ensembles dénombrables sont les plus petits ensembles infinis possibles, comme en témoigne la proposition suivante.

PROPooUIPAooCUEFme

Proposition 1.235.
Tout ensemble infini contient une partie en bijection avec $\mathbb{N}$.

Démonstration. Soient un ensemble infini E_0 et une partie propre E_1 en bijection avec E_0. Nous notons $\varphi\colon E_0\to E_1$ une bijection.

Soit $x_0\in E_0\setminus E_1$ (axiome du choix et tout ça). Nous définissons

$$\begin{aligned}\psi\colon\mathbb{N}&\to\{\varphi^k(x_0)\}\\n&\mapsto\varphi^n(x_0)\end{aligned}\tag{1.312}$$

et nous allons prouver que c'est une bijection. Que ce soit surjectif est immédiat. Pour l'injectivité, soit $\varphi^k(x_0) = \varphi^l(x_0)$ avec $k \neq l$. Supposons pour fixer les notations que $k > l$. Alors, vu que φ est inversible nous pouvons écrire

$$x_0 = \varphi^{k-l}(x_0) = \varphi\big(\varphi^{k-l-1}(x_0)\big) \tag{1.313}$$

où il est entendu que $\varphi^0(x_0) = x_0$. Cela signifie que x_0 est dans l'image de φ, c'est-à-dire dans E_1, ce que nous avons exclu par choix de x_0 dans $E_0 \setminus E_1$. Donc en réalité $\varphi^k(x_0) \neq \varphi^l(x_0)$ dès que $k \neq l$. □

PropQEPoozLqOQ

Proposition 1.236.
Toute partie d'un ensemble fini est finie, et toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.

Démonstration. Soient un ensemble E ainsi qu'une partie infinie $A \subset E$. Nous notons $\varphi\colon A \to A'$ une bijection entre A et une partie propre A' de A. Dans ce cas, l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon E &\to (E \setminus A) \cup A' \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in E \setminus A \\ \varphi(x) & \text{si } x \in A \end{cases} \end{aligned} \tag{1.314}$$

est une bijection entre E et une partie propre de E. Donc E est infini.

Par contraposée nous déduisons que toute partie d'un ensemble fini est finie.

En ce qui concerne les parties d'ensembles dénombrables, soit une partie A d'un ensemble dénombrable E. Nous avons une bijection $t\varphi\colon E \to \mathbb{N}$. La restriction $\varphi\colon A \to \varphi(A)$ est une bijection entre A est une partie de $\mathbb{N}$.

- Si $\varphi(E)$ est infinie, elle est dénombrable (proposition 1.221). Dans ce cas A est en bijection avec un ensemble dénombrable. Il est donc dénombrable.
- Si $\varphi(E)$ est fini, alors le lemme 1.75(2) nous dit que A est fini.

□

LEMooGTOTooFbpvzU

Lemme 1.237.
Soit un ensemble E non dénombrable ainsi qu'une application $f\colon E \to F$ où F est un ensemble quelconque. Si $f(E)$ est dénombrable (ou fini), alors il existe $y \in f(E)$ tel que $f^{-1}(y)$ est indénombrable.

Démonstration. Nous avons

$$E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(y). \tag{1.315}$$

Si tous les $f^{-1}(y)$ sont dénombrables, alors E est une union dénombrable (F est dénombrable) d'ensembles dénombrables. Il serait donc dénombrable (proposition 1.228), ce qui est contraire à l'hypothèse. □

1.7.4 Ajouter ou soustraire des cardinalités

NOTATIONSRNTooOperationsCardinaux

1.238.
Nous allons prouver une série de résultats que nous pourrions résumer en « ajouter ou retrancher des parties de cardinalité plus petite ne change pas la cardinalité ».

LEMooUFCAooSyZtZj

Lemme 1.239 ([1])**.**
Si A est infini et B est fini, alors $A \cup B \approx A$.

Démonstration. Nous supposons que A et B sont disjoints[96]. La proposition 1.207 nous permet de considérer une bijection $\psi\colon \{1, \dots, n\} \to B$.

Puisque A est infini, la proposition 1.235 nous permet de considérer $N \subset A$ et une bijection $\varphi\colon \mathbb{N} \to N$.

Maintenant, il s'agit seulement d'insérer B dans A en le mettant « au début » de N et en décalant les autres éléments. La bijection est

$$\begin{aligned} f\colon A \cup B &\to A \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in A \setminus N \\ \varphi\big(\varphi^{-1}(x) + n\big) & \text{si } x \in N \\ \varphi\big(\psi^{-1}(x)\big) & \text{si } x \in B. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.316}$$

□

[96] Adaptez la démonstration au cas où l'intersection n'est pas vide.

LEMooXMVDooIWLWis

Lemme 1.240.
Si A est infini et si A est surpotent à B, alors $A \approx A \cup B$.

Démonstration. Il existe évidemment une injection $A \to A \cup B$. Donc le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein 1.77 nous indique que trouver une injection $A \cup B \to A$ suffira pour la peine.

Nous allons utiliser le lemme de Zorn 1.37 avec l'ensemble

$$\mathcal{A} = \left\{ (X, \varphi_X) \text{ tel que } \begin{cases} X \subset B \\ \varphi_X : A \cup X \to A \text{ est injective.} \end{cases} \right\} \tag{1.317}$$

muni de l'ordre de l'inclusion : $(X, \varphi_X) < (Y, \varphi_Y)$ si $X \subset Y$ et $\varphi_Y(x) = \varphi_X(x)$ pour tout $x \in A \cup X$.

(1) **$\mathcal{A}$ est inductif** Soit une famille $\mathcal{F} = \{(X_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ complètement ordonnée indexée par l'ensemble I. En posant $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ et $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ dès que $x \in A \cup X_i$, l'élément (X, φ) majore $\mathcal{F}$.

(2) **Un maximum** Le lemme de Zorn nous assure que $\mathcal{A}$ possède (au moins) un élément maximal. Soit un tel élément maximum (X, φ).

(3) **$X \approx B$** Ah oui, vous auriez aimé avoir $X = B$. Mais non ; il n'y a pas de garantie. Nous allons montrer que $X \approx B$, et ça suffira.

Vu que $X \subset B$, si X n'est pas équipotent à B, il est strictement inclus dans B. Nous pouvons donc considérer

$$b \in B \setminus X \tag{1.318a}$$
$$a \in A \setminus \varphi(X). \tag{1.318b}$$

Nous considérons alors l'élément $(Y, \psi) \in \mathcal{A}$ défini par

$$Y = X \cup \{b\} \tag{1.319a}$$
$$\psi(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = b \\ \varphi(x) & \text{sinon .} \end{cases} \tag{1.319b}$$

Cet élément majore (X, φ).

Donc $X \approx B$.

(4) **Résumé de la situation** Nous avons $A \approx A \cup X$ ainsi qu'une injection $\varphi : A \cup X \to A$ et une bijection $\psi : B \to X$.

(5) **Conclusion si A est disjoint de B** Si A et B sont disjoints, nous avons une bijection

$$\begin{aligned} l : A \cup B &\to A \\ x &\mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in A \\ \varphi\big(\psi(x)\big) & \text{si } x \in B. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.320}$$

(6) **Conclusion si A n'est pas disjoint de B** Il suffit de poser $C = B \setminus A$ et nous avons

$$A \cup B = [A \cup (A \cap B)] \cup C. \tag{1.321}$$

Cette union est disjointe, $A \cup (A \cap B)$ est surpotent à A et C est subpotent à B. La conclusion est donc encore valable.

□

NORMooBijectionApplicThMesure

1.241.
La proposition suivante sera utilisée en théorie de la mesure, dans l'exemple 14.73.

PropVCSooMzmIX

Proposition 1.242 ([42, 15])**.**
Si S est un ensemble infini alors il existe une bijection $\varphi : \{0,1\} \times S \to S$.

Démonstration. Nous posons $A = \{0\} \times S$ et $B = \{1\} \times S$. L'ensemble A est infini et surpotent à B (pas strictement, mais quand même).

Donc A est idempotent à $A \cup B$ par le lemme 1.240. Mais A est idempotent à S, donc

$$S \approx A \approx A \cup B = \{0,1\} \times S. \tag{1.322}$$

□

COROojJCSIooOeOICJ

Corolaire 1.243.
Si A est un ensemble infini, alors A possède deux sous-ensembles disjoints A_1 et A_2 qui sont tous deux en bijection avec A.

Démonstration. La proposition 1.242 donne une bijection $\varphi\colon \{0,1\} \times A \to A$. Il suffit de poser $A_1 = \varphi(0, A)$ et $A_2 = \varphi(1, A)$. □

NORMooInfiniteCopies

1.244.
Maintenant que nous pouvons mettre dans A deux copies disjointes de A, il n'est pas très étonnant que nous puissions en mettre une infinité dénombrable. Nous verrons ça dans 1.245.

PROPooFKBEooKXqujV

Proposition 1.245.
Si A est infini, alors $A \times \mathbb{N} \approx A$.

Démonstration. La démonstration se base sur le fait qu'à l'intérieur de A, nous pouvons construire autant de copies de A deux à deux disjointes que nous le voulons. La k^{e} « copie » sera naturellement l'image de $k \times A$.

Voyons tout cela en détail.

(1) **Ce que nous allons faire** Nous allons construire, pour tout $i \geqslant 1$ des parties $A_i, B_i \subset A$ telles que

- $A_i \cap B_i = \varnothing$,
- $A_i, B_i \subset B_{i-1}$,
- $A_i \approx B_i \approx A$,
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$

(2) **La construction** Nous commençons à zéro en utilisant le corolaire 1.243 pour construire des parties disjointes A_0 et B_0 de A telles que $A_0 \approx B_0 \approx A$.

Ensuite, puisque $B_0 \approx A$, il existe A_1 et B_1 dans B_0 tels que $A_1 \cap B_1 = \varnothing$ et $A_1 \approx B_1 \approx B_0 \approx A$. Cela est notre construction pour $i = 1$.

Pour la récurrence, puisque $A_i \approx B_i \approx A$, nous considérons A_{i+1} et B_{i+1} dans B_i tels que $A_{i+1} \cap B_{i+1} = \varnothing$ et $A_{i+1} \approx B_{i+1} \approx B_i \approx A$. C'est encore le corolaire 1.243 qui fait le travail.

(3) **Les propriétés** Nous avons $A_i \cap A_{i+1} = \varnothing$ parce que $A_i \cap A_{i+1} \subset A_i \cap B_i = \varnothing$.

Nous devons encore montrer que $A_i \cap A_j = \varnothing$ dès que $i \neq j$. Supposons que $j > i$. Nous avons les inclusions

$$A_j \subset B_{j-1} \subset B_{j-2} \subset \ldots \subset B_i. \tag{1.323}$$

Donc $A_j \cap A_i \subset B_i \cap A_i = \varnothing$.

(4) **Une injection** Nous pouvons à présent écrire une injection qui termine presque la preuve. Pour cela nous considérons pour tout i, une bijection $\psi_i\colon A \to A_i$. Ensuite nous posons

$$\begin{aligned} \varphi\colon A \times \mathbb{N} &\to A \\ (a,k) &\mapsto \psi_k(a). \end{aligned} \tag{1.324}$$

Si $\varphi(a,k) = \varphi(b,l)$, alors $\psi_k(a) = \psi_l(b)$. L'élément $\psi_k(a)$ est donc dans $A_k \cap A_l$; ce n'est possible que si $k = l$. Donc $\psi_l(a) = \psi_l(b)$. Cette dernière égalité n'est possible que si $a = b$ parce que ψ_l est une bijection.

Donc φ est une injection, et nous avons prouvé que $A \times \mathbb{N} \preceq A$.

(5) **La bijection** Nous venons de prouver que $A \times \mathbb{N} \preceq A$. La surpotence $A \times \mathbb{N} \succeq A$ étant évidente, le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein 1.77 conclut que $A \times \mathbb{N} \approx A$.

□

LEMooDHWSooFqhano

Lemme 1.246 ([1]).
Soit un ensemble A muni de deux sous-ensembles B et B' équipotents et disjoints. Alors $A \setminus B$ est équipotent à $A \setminus B'$.

Démonstration. Soit une bijection $\psi\colon B' \to B$. L'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon A \setminus B &\to A \setminus B' \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \notin B' \\ \psi(x) & \text{si } x \in B'. \end{cases}\end{aligned} \tag{1.325}$$

est la bijection cherchée. □

LEMooIVCBooHWQiZB

Lemme 1.247 ([43]).
Si A est un ensemble infini et si $B \prec A$, alors $A \approx A \setminus B$.

Démonstration. Nous pouvons écrire

$$A = (A \setminus B) \cup B. \tag{1.326}$$

Le théorème de comparabilité cardinale 1.79 nous indique que soit $A \setminus B \preceq B$, soit $A \setminus B \succeq B$. Nous allons étudier les deux cas.

(1) **Si $A \setminus B \succeq B$** Dans ce cas, $(A \setminus B) \cup B \approx A \setminus B$ par le lemme 1.240. Alors, notre résultat est prouvé parce que $A = (A \setminus B) \cup B \approx A \setminus B$.

(2) **Si $A \setminus B \preceq B$** Dans ce cas, le lemme 1.240 nous indique que $A = (A \setminus B) \cup B \approx B$. Mais $A \approx B$ est exclu par l'hypothèse. Ce cas est donc impossible.

□

LEMooMRVQooUZSSyL

Lemme 1.248 ([1]).
Si A est infini et si B est une partie strictement subpotente de A, alors il existe $U \subset A$ disjoint de B et équipotent à B.

Démonstration. Le lemme 1.247 nous donne une bijection $\varphi\colon A \to A \setminus B$. Il suffit alors de poser $U = \varphi(B)$. Cette partie est disjointe de B parce que φ prend ses valeurs dans $A \setminus B$. □

Lemme 1.249 ([44]).
Soit un ensemble infini A ainsi qu'un sous-ensemble $B \subset A$. Nous supposons l'existence d'une fonction surjective $f\colon B \to B \times B$.
Alors $B \preceq B \times B \preceq B \preceq A$.

Démonstration. La première est l'hypothèse sur f. La seconde est l'existence (évidente) d'une surjection $B \times B \to B$. La troisième est le fait que B soit inclus dans A. □

LEMooPOEFooXaifhT

Lemme 1.250 ([44]).
Soit un ensemble infini A ainsi qu'un sous-ensemble strictement subpotent $B \subset A$. Nous supposons l'existence d'une fonction surjective $f\colon B \to B \times B$.
Alors f peut être étendue en une injection $f\colon D \to D \times D$ où $D \subset A$ contient strictement B.

Démonstration. Par le lemme 1.248, nous considérons une partie $U \subset A$ disjointe de B et équipotente à B. Nous pouvons écrire le développement

$$(B \cup U) \times (B \cup U) = (B \times B) \cup (B \times U) \cup (U \times B) \cup (U \times U). \tag{1.327}$$

Nous savons que B est surpotent à U (il est même équipotent) ; donc le lemme 1.240 nous dit que $B \cup U \approx B$. De plus il existe une bijection $B \to U$, donc

$$U \approx B \approx B \times B \approx B \times U \approx U \times B \approx U \times U. \tag{1.328}$$

Chacun des ensembles $U \times B$, $B \times U$ et $U \times U$ est équipotent à U. Leur union est donc équipotente[97] à U et nous avons une bijection

$$\varphi\colon U \to U \times B \cup (B \times U) \cup (U \times U). \tag{1.329}$$

[97] Lemme 1.240.

Et enfin nous définissons

$$g\colon B\cup U\to (B\times U)\times(B\cup U)$$
$$x\mapsto\begin{cases}f(x) & \text{si } x\in B\\ \varphi(x) & \text{si } x\in U.\end{cases}\tag{1.330}$$

Cette définition est bonne parce que U et B sont disjoints, et g est injective. □

NORMooBijectionAA

1.251.
Le théorème suivant est une généralisation de la proposition 1.242. Elle implique, entre autres choses, qu'il existe une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Pour le cas de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\approx\mathbb{N}$, il y a la proposition 1.224 qui donne une bijection explicite et donc sans axiome du choix et sans lemme de Zorn.

THOooDGOVooRdURVi

Théorème 1.252.
Si A est infini, alors $A\approx A\times A$.

Démonstration. Une fois de plus, ce sera le lemme de Zorn qui va s'y coller. Soit l'ensemble

$$\mathcal{A}=\Big\{(X,\varphi)\text{ tel que }\begin{cases}X\subset A\\ \varphi\colon X\to X\times X\text{ est surjective.}\end{cases}\Big\}\tag{1.331}$$

Cet ensemble est non vide parce que A est infini ; il contient donc une partie dénombrable N, et nous connaissons la surjection $\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ du lemme 1.224.

Nous ordonnons $\mathcal{A}$ par l'inclusion : $(X,\varphi)\leqslant(Y,\phi)$ lorsque $X\subset Y$ et $\phi|_X=\varphi$. La tambouille usuelle montre que $\mathcal{A}$ est un ensemble inductif et le lemme de Zorn 1.37 donne l'existence d'un élément maximal que nous notons (B,φ).

Puisque B est subpotent à A (parce qu'il est inclus), soit il est strictement subpotent, soit il est équipotent. Nous commençons par montrer que B ne peut pas être strictement subpotent à A.

En effet, si nous avions une surjection $B\to B\times B$, alors que B est strictement subpotent à A. Le lemme 1.250 nous dit alors que φ peut être étendue, ce qui contredirait la maximalité de (B,φ).

Donc la partie B est équipotente à A : il existe une bijection $g\colon A\to B$. Mais nous avons une surjection $B\to B\times B$ et donc aussi une injection $B\times B\to B$. Vu que nous avons par ailleurs une injection $B\to B\times B$, le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein 1.77 nous donne une bijection $\phi\colon B\times B\to B$. Avec ça, l'application

$$f\colon A\times A\to A$$
$$(a,b)\mapsto\phi\big(g(a),g(b)\big)\tag{1.332}$$

est une bijection. Donc les ensembles A et $A\times A$ sont équipotents. □

LEMooNKKDooUvSYPO

Lemme 1.253.
Si A est infini, et si pour tout $i\in\mathbb{N}$ nous avons $A_i\approx A$, alors

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\approx A.\tag{1.333}$$

Démonstration. Pour chaque $i\in\mathbb{N}$ nous avons une bijection $\varphi_i\colon A_i\to A$. Nous posons

$$\varphi\colon A\times\mathbb{N}\to\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$$
$$(a,i)\mapsto\varphi_i(a).\tag{1.334}$$

EQooCHJAooRpHypV

Cette application est surjective mais peut-être pas injective parce que les A_i peuvent avoir des intersections non vides. Nous avons alors le calcul

$$A\approx A\times\mathbb{N}\tag{1.335a}$$
$$\succeq\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i\tag{1.335b}$$
$$\succeq A\tag{1.335c}$$

SUBEQooICFEooTLuFHZ
SUBEQooRVPRooJJevkv
SUBEQooFJRGooJnervy

Justifications :

- Pour (1.335a), c'est la proposition 1.245.
- Pour (1.335b), c'est la surjection (1.334).
- Pour (1.335c), c'est le fait que seulement A_0 possède déjà une surjection vers A.

Donc $\bigcup_i A_i$ est à la fois surpotent et subpotent à A. Il est donc équipotent par le théorème 1.77. □

1.8 Groupes

1.8.1 Définition, unicité du neutre

La définition d'un groupe est la définition 1.85.

LEMooECDMooCkWxXf

Lemme-Définition 1.254 (Unicités)**.**
Dans un groupe, l'inverse et le neutre sont uniques. Plus précisément, si G est un groupe nous avons :

(1) il existe un unique élément $e \in G$ tel que $eg = ge = g$ pour tout $g \in G$,

ITEMooOIWTooYqmMPP

(2) pour tout $g \in G$, il existe un unique élément $h \in G$ tel que $gh = hg = e$.

*Le e ainsi défini est nommé **neutre** de G. Le h tel que $gh = hg = e$ est nommé l'**inverse** de g et est noté g^{-1}.*

Démonstration. Chaque point séparément.

(1) Supposons que e_1 et e_2 vérifient la propriété. Nous avons pour tout $g \in G$: $e_1 g = g e_1 = g$. En particulier pour $g = e_2$ nous écrivons $e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2$. Mais en partant dans l'autre sens : $e_2 g = g e_2 = g$ avec $g = e_1$ nous avons $e_2 e_1 = e_1 e_2 = e_1$. En égalant ces deux valeurs de $e_2 e_1$ nous avons $e_1 = e_2$.

Pour la suite de la preuve nous écrivons e l'unique neutre de G.

(2) Supposons que k_1 et k_2 soient deux inverses de g. On considère alors le produit $k_1 g k_2$. Puisque $k_1 g = e$, on a $k_1 g k_2 = e k_2 = k_2$; mais, comme $g k_2 = e$, on a aussi $k_1 g k_2 = k_1 e = k_1$. Le produit est donc à la fois égal à k_1 et à k_2, et donc $k_1 = k_2$.

□

LEMooWYLRooNOdZnp

Lemme 1.255 ([45])**.**
Soient deux groupes G et H. Si $\alpha : G \to H$ est un morphisme de groupes[98]*, alors*

(1) $\alpha(e_G) = e_H$.

(2) $\alpha(g^{-1}) = \alpha(g)^{-1}$.

Démonstration. Pour le premier point, soit $g \in G$. Nous avons

$$\alpha(g) = \alpha(ge) = \alpha(g)\alpha(e). \tag{1.336}$$

En multipliant les deux côtés par $\alpha(g)^{-1}$ nous trouvons $e = \alpha(e)$.

Pour le second point, nous vérifions que $\alpha(g^{-1})\alpha(g) = e$. C'est le cas parce que

$$\alpha(g^{-1})\alpha(g) = \alpha(g^{-1}g) = \alpha(e) = e. \tag{1.337}$$

□

LEMooBIBFooBHxFYC

Lemme 1.256.
Si G est un groupe et si $h \in G$, alors les applications

$$\begin{aligned} L_h : G &\to G \\ g &\mapsto hg \end{aligned} \tag{1.338}$$

et

$$\begin{aligned} R_h : G &\to G \\ g &\mapsto gh \end{aligned} \tag{1.339}$$

sont des bijections.

Démonstration. D'abord si $L_h(g_1) = L_h(g_2)$, alors $hg_1 = hg_2$ et en multipliant à gauche par h^{-1} nous avons $g_1 = g_2$; donc L_h est injective. Ensuite L_h est surjective parce que si $g \in G$, alors $g = L_h(h^{-1}g)$.

Pour l'application R_h, la preuve est une simple adaptation. □

[98] Définition 1.88.

1.8.2 Ordre d'un groupe et d'un élément

L'ordre d'un groupe et l'ordre d'un élément d'un groupe sont deux choses différentes.

DEFooKWBCooMlmpCP

Définition 1.257 (Ordre d'un groupe)**.**
Soit un groupe G.

*(1) Si G est un ensemble fini, l'**ordre** de G est son cardinal*[99]*, et nous le notons $|G|$.*

(2) Si l'ensemble G est infini, nous disons que $|G| = \infty$ et qu'il est d'ordre infini.

Oui : nous pourrions simplement toujours dire « cardinalité » et écrire $\mathrm{Card}(G)$*. Au lieu de ça, dans le cas particulier des groupes, il y a une tradition de dire « ordre » et d'écrire $|G|$.*

DEFooKSTVooOObpgC

Définition 1.258 (Ordre d'un élément)**.**
*L'**ordre** d'un élément g de G est le naturel*

$$\min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tel que } g^n = e\}, \tag{1.340}$$

si il existe ; dans le cas contraire, nous disons que l'ordre de g est infini.

1.259.
Nous verrons que le corolaire 2.15 au théorème de Lagrange dira que l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.

1.8.3 Groupe ordonné

DEFooEUHFooYvhnLQ

Définition 1.260 ([46])**.**
*Soient un groupe $(G, +)$, ainsi qu'une relation d'ordre $\leqslant$ sur G. Nous disons que la relation d'ordre est **compatible** avec la structure de groupe si pour tout $x, y, z \in G$, si $x \leqslant y$ alors $x + z \leqslant y + z$ et $z + x \leqslant z + y$. Dans ce cas, le triple $(G, +, \leqslant)$ est un **groupe ordonné**.*

Si $(G, \leqslant)$ est totalement ordonné, nous disons que le groupe est totalement ordonné.

1.8.4 Classes de conjugaison

DEFooOLXPooWelsZV

Définition 1.261 (classe de conjugaison)**.**
*Soit un groupe G et un élément $g \in G$. La **classe de conjugaison** de g est la partie*

$$C_g = \{kgk^{-1} \text{ tel que } k \in G\}. \tag{1.341}$$

LEMooQYBJooYwMwGM

Lemme 1.262.
Un groupe est commutatif si et seulement si ses classes de conjugaison sont des singletons.

Démonstration. Supposons que G soit commutatif. Alors

$$C_g = \{kgk^{-1} \text{ tel que } k \in G\} = \{g\}. \tag{1.342}$$

Donc les classes de conjugaison sont des singletons.

Dans l'autre sens, si les classes sont des singletons, on a $kgk^{-1} = g$ pour tous $k, g \in G$. Cela signifie immédiatement que G est commutatif. □

defGroupeCentre

Définition 1.263 (centralisateur[47])**.**
*Soient un groupe G, un sous-groupe H et un élément $h \in H$. Le **centralisateur** de h dans G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec h :*

$$Z_G(h) = \{z \in G \text{ tel que } hz = zh\}. \tag{1.343}$$

Le centralisateur de H dans G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de H :

$$Z_G(H) = \bigcap_{h \in H} Z_G(h). \tag{1.344}$$

*Le **centre** d'un groupe G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres :*

$$Z_G = Z_G(G) = \{z \in G \text{ tel que } gz = zg, \forall g \in G\}. \tag{1.345}$$

[99] Définition 1.207.

DEFooZTSMooBislIy

Définition 1.264 (normalisateur[47]).
*Soient un groupe G et un sous-groupe H. Le **normalisateur** de H dans G est*

$$\mathcal{N}_G(H) = \{g \in G \text{ tel que } gH = Hg\}. \tag{1.346}$$

DEFooNIIMooFkZgvX

Définition 1.265 (Sous-groupe normal).
*Un sous-groupe N de G est **normal** ou **distingué** si pour tout $g \in G$ et pour tout $n \in N$, $gng^{-1} \in N$. Autrement dit lorsque $gNg^{-1} \subset N$.*

Lorsque N est normal dans G il est parfois noté $N \lhd G$.

DEFooUXXTooCCLmQe

Définition 1.266.
*Un sous-groupe H de G est un sous-groupe **caractéristique** si $\alpha(H) \subset H$ pour tout automorphisme[100] α de G.*

Lemme 1.267 ([48]).
Si H est un sous-groupe caractéristique de G, alors $\alpha(H) = H$ pour tout automorphisme α de G.

Démonstration. Si α est un automorphisme de G, alors α^{-1} est encore un automorphisme de G. En particulier $\alpha^{-1}(H) \subset H$.

Soit $h \in H$. Nous devons prouver que $h \in \alpha(H)$. Pour cela :

$$h = \alpha\big(\alpha^{-1}(h)\big) \in \alpha\big(\alpha^{-1}(H)\big) \subset \alpha(H). \tag{1.347}$$

□

DefGroupeSimple

Définition 1.268 (Groupe simple).
*Un groupe est dit **simple** si il est non trivial et si les seuls sous-groupes normaux qu'il admet sont lui-même et le sous-groupe réduit à l'élément neutre.*

1.8.5 Permutations, groupe symétrique

Nous donnons ici quelques éléments à propos du groupe symétrique. Beaucoup de choses supplémentaires sont reportées à la section 5.6. Voir aussi le thème 8.

DEFooJNPIooMuzIXd

Définition 1.269.
*Soit un ensemble E. Une **permutation** de l'ensemble E est une bijection $E \to E$. Le **groupe symétrique** de E est le groupe des bijections $E \to E$; il est noté S_E.*

*Le **groupe symétrique** S_n est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. C'est donc l'ensemble des bijections $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.*

DEFooSupportPermutation

Définition 1.270.
*Le **support** d'une permutation σ est l'ensemble constitué des éléments modifiés par σ :*

$$\operatorname{supp}\sigma = \{i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \sigma(i) \neq i\}.$$

DEFooMVFKooMpXMQy

Définition 1.271 ([49]).
*Soient une permutation $\sigma \in E$ ainsi que $a \in E$. La σ-**orbite** de a est l'ensemble*

$$\Omega_\sigma(a) = \{\sigma^i(a)\}_{i \in \mathbb{N}}. \tag{1.348}$$

LEMooSGWKooKFIDyT

Lemme 1.272 ([50]).
Le groupe symétrique S_n est un ensemble fini contenant $n!$ éléments :

$$\operatorname{Card}(S_n) = n!. \tag{1.349}$$

LEMooUPBOooWbwMTx

Lemme 1.273 ([51]).
Deux résultats.

(1) Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique.

(2) Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n.

[100] Automorphisme de groupe, définition 1.88.

Démonstration. Soit, pour $g \in G$ donné, l'application

$$\begin{aligned} \tau_g \colon G &\to G \\ x &\mapsto gx. \end{aligned} \tag{1.350}$$

Commençons par prouver que cela est une bijection. D'une part, $\tau_g(x) = y$ pour $x = g^{-1}y$ (surjection) et, d'autre part, $\tau_g(x) = \tau_g(y)$ implique $gx = gy$ et donc $x = y$ (injection).

Nous avons donc $\tau_g \in S_G$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi \colon G &\to S_G \\ g &\mapsto \tau_g \end{aligned} \tag{1.351}$$

est un morphisme de groupe[101] :

$$\varphi(gh)x = ghx = \varphi(g)(hx) = \varphi(g)\Big(\varphi(h)x\Big) = \Big(\varphi(g) \circ \varphi(h)\Big)x. \tag{1.352}$$

Elle est injective parce que si $\tau_g = \tau_h$ alors $gx = hx$ pour tout x. En particulier $g = h$. Donc $\varphi \colon G \to \text{Image}(\varphi)$ est un isomorphisme entre G et un sous-groupe de S_G (proposition 1.89).

Un groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous-groupe de S_G ; or S_G est isomorphe à un des S_n. □

1.8.6 Décomposition en cycles

DEFooRWYSooYmKwph

Définition 1.274 (cycle[49])**.**
Soit E un ensemble de cardinal[102] *n. Soit un entier $1 \leqslant k \leqslant n$. Un élément $\sigma \in S_E$ est un k-**cycle** si il ne possède qu'une seule orbite*[103] *non réduite à un élément et qu'elle est de cardinal k.*

LEMooADNGooDZpdTb

Lemme 1.275 ([1])**.**
Soient un k-cycle σ et $a \in \Omega$. Alors

$$\Omega_\sigma(a) = \{a, \sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)\} \tag{1.353}$$

et $\sigma^k(a) = a$.

En particulier, les éléments $\sigma^q(a)$ avec $q = 0, \dots, k-1$ sont tous distincts.

Démonstration. Soit l le plus grand entier tel que les $\sigma^i(a)$ avec $0 \leqslant i \leqslant l$ soient tous distincts, et notons $A = \{\sigma^i(a)\}_{i=0,\dots,l}$. Cet ensemble satisfait

- $\text{Card}(A) = l + 1$
- $A \subset \Omega_\sigma(a)$, et donc $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(\Omega_\sigma(a)) = k$ par le lemme 1.215(3).

Que vaut $\sigma^{l+1}(a)$? Par maximalité de l, $\sigma^{l+1}(a)$ est un des $\sigma^i(a)$ avec $i \leqslant l$. Par injectivité de σ, nous avons donc forcément $\sigma^{l+1}(a) = a$.

Donc pour tout $i > l$ il existe $j \leqslant l$ tel que $\sigma^i(a) = \sigma^j(a)$ (parce que $\sigma^i(a) = \sigma^{i-l-1}(a)$). Nous en déduisons que

$$\Omega_\sigma(a) = \{\sigma^i(a)\}_{0 \leqslant i \leqslant l} = A. \tag{1.354}$$

Le cardinal de $\Omega_\sigma(a)$ étant k par hypothèse nous avons $k = l + 1$, et donc $l = k - 1$. □

LEMooANVHooOQiTwY

Lemme 1.276.
Si σ est une cycle de longueur k, et si $b \in \Omega_\sigma(a)$, alors

$$\Omega_\sigma(a) = \Omega_\sigma(b) = \{\sigma^i(b)\}_{i=0,\dots,k-1}. \tag{1.355}$$

Démonstration. Comme $b \in \Omega_\sigma(a)$, il existe $l \leqslant k - 1$ tel que $b = \sigma^l(a)$. Pour tout i nous avons $\sigma^i(a) = \sigma^{k-l+1}(b)$, et donc $\Omega_\sigma(a) \subset \Omega_\sigma(b)$.

Mais pour tout i nous avons aussi $\sigma^i(b) = \sigma^{l+1}(a)$ et donc $\Omega_\sigma(b) \subset \Omega_\sigma(a)$.

Nous avons donc montré que $\Omega_\sigma(a) = \Omega_\sigma(b)$. La seconde égalité est le lemme 1.275 appliqué à b. □

LEMooMIHGooQfALbc

Lemme 1.277 ([1])**.**
Soient un ensemble fini E, une permutation $\sigma \in S_E$ ainsi que $a \in E$. Si $b \in \Omega_\sigma(a)$, alors $\Omega_\sigma(b) = \Omega_\sigma(a)$.

[101] Définition 1.88.
[102] Définition 1.207.
[103] Définition 1.271.

LEMooGWZNooXFezrg

Lemme 1.278 ([49]).
Tout k-cycle est d'ordre[104] *k.*

Démonstration. Soit le cycle $\{a, \sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)\}$. Tous les $\sigma^i(a)$ avec $i \leqslant k-1$ sont distincts et $\sigma^k(a) = a$. Donc σ^k est l'identité, et l'ordre de σ est plus petit ou égal à k.

Si $i \leqslant k-1$, alors $\sigma^i(a) \neq a$ parce que les éléments du cycle sont distincts. Donc $\sigma^i \neq \text{Id}$ pour $i \leqslant k-1$. Nous en déduisons que l'ordre de σ est k. □

LEMooQLSAooBrXDXw

Lemme 1.279 ([49, 52]).
Tout élément du groupe symétrique S_n peut être décomposé en un nombre fini de cycles de supports disjoints.

Cette décomposition est unique à l'ordre près de l'écriture des cycles.

Plus précisément, si σ est une permutation, alors il existe un unique ensemble fini $\{\omega_i\}_{i\in I}$ de cycles de supports disjoints tels que[105] *$\sigma = \prod_{i\in I} \omega_i$.*

Démonstration. Soit $\sigma \in S_E$. Si les éléments $\{a, \sigma(a), \dots \sigma^k(a)\}$ sont distincts, alors soit $\sigma^{k+1}(a)$ est distincts des autres, soit $\sigma^{k+1}(a) = a$. Il n'est en effet pas possible d'avoir $\sigma^{k+1}(a) = \sigma^l(a)$ avec $l < k$ parce que ça contredirait l'injectivité de σ.

Soit donc $a \in E$. Nous considérons le cycle $\big(a, \sigma(a), \dots, \sigma^k(a)\big)$ où k est maximum tel que tous les éléments sont distincts.

Soit ce cycle contient tous les éléments de E, soit il existe un élément b hors de ce cycle. Dans le second cas, nous considérons le cycle commençant par b.

Et ça continue… □

LEMooWXXLooIzrwJT

Lemme 1.280 ([49]).
Deux cycles de support disjoint commutent.

LEMooVVPWooMkRjyR

Lemme 1.281 ([53]).
Tout cycle de longueur r est le produit de $r-1$ transpositions.

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$(a_1, \dots, a_r) = (a_1, a_r)(a_1, a_{r-1}) \dots (a_1, a_2). \tag{1.356}$$

□

LEMooGGLUooUSzuAx

Lemme 1.282 ([1]).
Soit une permutation $\sigma \in S_E$. Soit un cycle c et une permutation s de supports disjoints telles que $\sigma = s \circ c$. Alors

LEMooUHWTooFptoZU

(1) Si $a \in \text{supp}(\sigma)$, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$ nous avons $c^q(a) = \sigma^q(a)$.

ITEMooHSDLooIAKYZA

(2) Si $a \in \text{supp}(c)$, alors

$$\Omega_\sigma(a) = \Omega_c(a) = \text{supp}(c). \tag{1.357}$$

(3) Si $a \in \text{supp}(c)$, alors

$$c(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \Omega_\sigma(a) \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.358}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Si $a \in \text{supp}(c)$, alors $c(a) = \sigma(a)$** Soit $a \in \text{supp}(c)$. Nous savons que $c(a) \neq a$, et vu que c est injective, nous devons aussi avoir $c\big(c(a)\big) \neq c(a)$. Donc a et $c(a)$ sont dans $\text{supp}(c)$. Étant donné que les supports de c et de s sont disjoints, nous déduisons que $c(a)$ n'est pas dans le support de s, et donc que

$$\sigma(a) = (s \circ c)(a) = s\big(c(a)\big) = c(a). \tag{1.359}$$

(2) $\sigma^q(a) = c^q(a)$ Juste une récurrence sur le point précédent : si $b \in \text{supp}(a)$, alors $\sigma(b) = c(b) \in \text{supp}(a)$.

(3) **Si $a \in \text{supp}(c)$, alors $\Omega_\sigma(a) = \Omega_c(a)$** Utilisant le point précédent, ainsi que la définition 1.271 d'une orbite,

$$\Omega_\sigma(a) = \{\sigma^q(a)\} = \{c^q(a)\} = \Omega_c(a). \tag{1.360}$$

[104] Définition 1.258.
[105] Ici I est un ensemble fini et vu que les supports sont disjoints, le produit est commutatif.

(4) $\underline{\text{supp}(c) \subset \Omega_c(a)}$ Comme toujours, a est un élément de $\text{supp}(c)$. Nous considérons $b \in \text{supp}(c)$ et nous montrons que $b \in \Omega_c(a)$. Étant donné que $b \in \text{supp}(c)$, nous avons $c(b) \neq b$, de telle sorte que $\Omega_c(b)$ contienne au moins deux éléments distincts.

Même chose pour a : l'ensemble $\Omega_c(a)$ contient au moins a et $c(a)$. Vu que c est un cycle, il n'existe qu'une seule orbite non triviale. Donc $\Omega_c(a) = \Omega_c(b)$. En particulier $b \in \Omega_c(b) = \Omega_c(a)$.

(5) $\underline{\Omega_c(a) \subset \text{supp}(c)}$ Soit $b \in \Omega_c(a)$. Le lemme 1.276 nous permet de dire que $\Omega_c(a) = \Omega_c(b)$. Comme $\Omega_c(b)$ contient au moins deux éléments (parce qu'il est égal à $\Omega_c(a)$ et que a est dans le support de c), nous savons que $c(b) \neq b$ et donc que $b \in \text{supp}(c)$.

(6) $\underline{\textbf{La formule pour } c(x)}$ Si $x \in \Omega_\sigma)(a)$, alors $c(x) = \sigma(x)$ par le point (1). Si x n'est pas dans $\Omega_c(a) = \text{supp}(c)$, alors x n'est pas dans le support de c et donc $c(x) = x$.

□

Le lemme suivant permet d'extraire le cycle de σ associé à un élément de E.

LEMooFFTBooCZsaFu

Lemme 1.283 ([1]).
Soient un ensemble fini E ainsi que $\sigma \in S_E$, et $a \in E$ tel que $\sigma(a) \neq a$. Nous posons

$$\begin{aligned} c\colon E &\to E \\ x &\mapsto \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \Omega_\sigma(a) \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.361}$$

Alors

(1) Si $b \in \Omega_\sigma(a)$, nous avons $\Omega_c(b) = \Omega_\sigma(a)$.

(2) Si $b \notin \Omega_\sigma(a)$, nous avons $\Omega_c(b) = \{b\}$.

(3) c est un cycle.

Démonstration. Si $b \in \Omega_\sigma(a)$, alors $\sigma^q(b) \in \Omega_\sigma(a)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, et donc

$$c^q(b) = \sigma^q(b) \in \Omega_\sigma(a) \tag{1.362}$$

pour tout q. Donc nous avons

$$\Omega_c(b) = \{c^q(b) \text{ tel que } q \in \mathbb{N}\} = \{\sigma^q(b) \text{ tel que } q \in \mathbb{N}\} = \Omega_\sigma(b) = \Omega_\sigma(a). \tag{1.363}$$

La dernière égalité est le lemme 1.277.

Si $b \notin \Omega_\sigma(a)$, alors $c(b) = b$ et $\Omega_c(b) = \{b\}$.

Nous avons prouvé que c a une seule orbite de taille plus grands ou égale à 2. Donc c est un cycle. □

Théorème 1.284 ([52]).
Soit un ensemble fini E de cardinal au moins deux. Soit une permutation $\sigma \in S_E$.

(1) Il existe des cycles $c_1, \dots, c_m$ à support disjoints tels que $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_m$.

(2) Cette décomposition est unique à l'ordre près.

Démonstration. Plusieurs points.

(1) $\underline{\textbf{Existence}}$ Nous choisissons des éléments $\{a_i\}_{i=1,\dots,p}$ tels que les $\Omega_\sigma(a_i)$ forment une partition de E en sous-ensembles disjoints. En posant $l_k = \min\{r \text{ tel que } \sigma^r(a_k) = a_k\}$, nous avons

$$\Omega_\sigma(a_k) = \{\sigma^q(a_k)\}_{q=1,\dots,l_k-1} \tag{1.364}$$

et tous les $\sigma^q(a_k)$ sont distincts pour $q = 1, \dots, l_k - 1$.

Posons

$$\begin{aligned} c_k\colon E &\to E \\ x &\mapsto \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \Omega_\sigma(a_k) \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.365}$$

Le lemme 1.282 dit que c_k est un cycle. Vu que $c(a_k) = \sigma(a_k)$, le cycle c est un l_k-cycle.

Nous montrons à présent que $\sigma = c_1 \circ \dots c_p$. Soit $x \in E$. Il existe un $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que

$$x \in \Omega_\sigma(a_k) = \Omega_{c_k}(a_k) = \Omega_{c_k}(x), \tag{1.366}$$

la dernière égalité est parce que $x \in \Omega_{c_k}(a_k)$. Nous en déduisons que $c_k(x) \neq x$. D'autre part si $l \neq k$, alors x n'est pas dans $\Omega_\sigma(a_l)$, et donc $c_l(x) = x$. Au final,

$$(c_1 \circ \dots c_p)(x) = c_k(x) = \sigma(x). \tag{1.367}$$

(2) **Unicité** Nous supposons avoir $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_p = \gamma_1 \circ \gamma_q$ où les c_i et les γ_j sont deux ensembles de cycles de supports disjoints. Nous avons

$$\text{supp}(\sigma) = \bigcup_{i=1}^{p} \text{supp}(c_i) = \bigcup_{j=1}^{q} \text{supp}(\gamma_j). \tag{1.368}$$

Montrons que si $\text{supp}(c_i) \cap \text{supp}(\gamma_j) \neq \varnothing$, alors $\text{supp}(c_i) = \text{supp}(\gamma_j)$. En effet si $a \in \text{supp}(c_i) \cap \text{supp}(\gamma_j)$, alors

$$\text{supp}(c_i) = \Omega_{c_i}(a) = \Omega_\sigma(a) = \Omega_{\gamma_j}(a) = \text{supp}(\gamma_j). \tag{1.369}$$

Et comme les $\text{supp}(\gamma_j)$ sont disjoints, l'ensemble $\text{supp}(c_i)$ n'a d'intersection qu'avec un et un seul des $\text{supp}(\gamma_j)$. Cela définit donc une application

$$\begin{aligned} u\colon \{1, \dots, p\} &\to \{1, \dots, q\} \\ i &\mapsto \text{l'unique } j \text{ tel que } \text{supp}(c_i) = \text{supp}(\gamma_j). \end{aligned} \tag{1.370}$$

Autrement dit, l'application u permet d'écrire

$$\text{supp}(c_i) = \text{supp}\left(\gamma_{u(i)}\right). \tag{1.371}$$

L'application u est injective. En effet si $u(i) = u(l)$, nous avons

$$\text{supp}(c_i) = \text{supp}\left(\gamma_{u(i)}\right) \tag{1.372a}$$
$$\text{supp}(c_l) = \text{supp}\left(\gamma_{u(l)}\right) \tag{1.372b}$$
$$u(i) = u(l). \tag{1.372c}$$

Donc $\text{supp}(c_i) = \text{supp}(c_l)$. Et comme les supports sont disjoints, $i = l$.

L'application u est surjective. En effet, soit $j \in \{1, \dots, q\}$. Soit $a \in \text{supp}(\gamma_j)$. Il existe un i tel que $a \in \text{supp}(c_i)$. Nous avons alors $a \in \text{supp}(\gamma_j) \cap \text{supp}(c_i)$, autrement dit $u(i) = j$.

Maintenant l'application $u\colon \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, q\}$ est bijective. Nous en déduisons que $p = q$. Concluons en montrant que $c_i = \gamma_{u(i)}$. Soit $a \in \text{supp}(c_i) = \text{supp}\left(\gamma_{u(i)}\right)$.

Nous avons

$$c_i(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \Omega_\sigma(a) \\ x & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.373}$$

et

$$\gamma_j(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \Omega_\sigma(a) \\ x & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.374}$$

et donc $c_i = \gamma_j$.

□

LemmvZFWP

Lemme 1.285 ([54]).
Soit $\sigma = (i_1, \dots, i_k) \in S_n$, un cycle de longueur k et $\theta \in S_n$. Alors

$$\theta\sigma\theta^{-1} = \big(\theta(i_1), \dots, \theta(i_k)\big). \tag{1.375}$$

Tous les cycles de longueur k sont conjugués entre eux.

PropEAHWXwe

Proposition 1.286 (Classes de conjugaison et structure en cycles[55]).
Une classe de conjugaison[106] *dans S_n est formée des permutations ayant une décomposition en cycles disjoints de même structure. Autrement dit, deux permutations σ et σ' sont conjuguées si et seulement si le nombre k_i de cycles de longueur i dans σ est le même que le nombre k'_i de cycles de longueur i dans σ'.*

[106] Définition 1.261.

Démonstration. Soit $\sigma = c_1 \dots c_m$ la décomposition de σ en cycles c_i de supports disjoints. Si τ est une permutation, alors

$$\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1} = (\tau c_1 \tau^{-1}) \dots (\tau c_m \tau^{-1}), \tag{1.376}$$

mais $\tau c_i \tau^{-1}$ est un cycle de même longueur que c_i, puisque le lemme 1.285 nous dit que si $\sigma = (a_1, \dots, a_k)$, alors $\tau c \tau^{-1} = \big(\tau(a_1), \dots, \tau(a_k)\big)$. Notons encore que les cycles $\tau c_i \tau^{-1}$ restent à support disjoints.

Donc tous les éléments de la classe de conjugaison de σ sont des permutations de même structure que σ.

Réciproquement, si $\sigma' = c'_1 \dots c'_m$ est une décomposition de σ' en cycles disjoints tels que la longueur des c_i est la même que la longueur des c'_i, alors il suffit de construire des permutations τ_i telles que $\tau_i c_i \tau_i^{-1} = c'_i$, à travers le lemme 1.285. Comme les supports des c_i et des c'_i sont disjoints, la permutation $\tau_1 \dots \tau_m$ conjugue σ et σ'. □

EXooQAXRooBsPURs

Exemple 1.287.
Voyons les classes de conjugaison de S_3. Étant donné que ce groupe agit par définition sur un ensemble à 3 éléments, aucun élément de S_3 ne possède un cycle de plus de 3 éléments. Il y a donc seulement des cycles de longueur deux ou trois (à part les triviaux). Aucun élément de S_3 n'a une décomposition en cycles disjoints contenant deux cycles de deux ou un cycle de deux et un de trois.

En résumé il y a trois classes de conjugaison dans S_3. La première est celle contenant seulement l'identité. La seconde est celle contenant les cycles de longueur deux et la troisième contient les cycles de longueur 3.

Ce sont donc

$$C_1 = \{\mathrm{Id}\} \tag{1.377a}$$
$$C_2 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\} \tag{1.377b}$$
$$C_3 = \{(1,2,3), (2,1,3)\}. \tag{1.377c}$$

△

DEFooXNAFooGTbTTJ

Définition 1.288 (transposition)**.**
*Une **transposition** est une permutation*[107] *qui échange deux éléments de E. Plus précisément, une bijection $\sigma : E \to E$ est une transposition si il existe $a, b \in E$ tels que*

$$\sigma(x) = \begin{cases} a & si\ x = b \\ b & si\ x = a \\ x & sinon. \end{cases} \tag{1.378}$$

ExVYZPzub

Exemple 1.289.

△

PROPooQRZYooKVZTCJ

Proposition 1.290 ([1])**.**
Les classes de conjugaison de S_4 sont :

ITEMooZIYYooCqpicx

(1) *Le cycle vide qui représente la classe constituée de l'identité seule.*

ITEMooVDLGooFOkgzc

(2) *Les transpositions (de type (a, b)) qui sont au nombre de 6.*

ITEMooWKUIooTedZAA

(3) *Les doubles transpositions (de type $(a, b)(c, d)$) qui sont au nombre de 6.*

ITEMooMHRWooSkUveJ

(4) *Les 3-cycles qui sont au nombre de 8.*

ITEMooCBYNooZmFsBd

(5) *Les 4-cycles qui sont au nombre de 6.*

ITEMooGCMYooKZgFHX

(6) *Les doubles transpositions, du type $(a, b)(c, d)$ qui sont au nombre de 3.*

Démonstration. Nous savons que les classes de conjugaison dans S_4 sont caractérisées par la structure des décompositions en cycles (proposition 1.286). Avec 4 éléments, il n'y a pas des tonnes de cycles qu'on peut faire.

On peut faire des cycles de taille 1, 2, 3 ou 4. Les seules façons de faire 4 avec ces nombres sont :

(1) $1 + 1 + 1 + 1$

(2) $2 + 1 + 1$

(3) $2 + 2$

[107] Une permutation est une bijection, définition 1.269.

(4) $3+1$

(5) 4

Comptons combien il y a de possibilités dans chaque cas.

(1) **Pour (1)** À propos de la possibilité $1+1+1+1=4$. Il y a une seule possibilité de fixer tous les éléments.

(2) **Pour (2)** À propos de $2+1+1=4$. Il y a 4 possibilités pour a, et 3 pour b. Mais $(a,b)=(b,a)$, donc il faut diviser par deux. Donc 6 en tout.

(3) **Pour (3)** À propos de $2+2=4$. Nous cherchons les possibilités pour $(a,b)(c,d)$. Nous venons de voir qu'il y a 6 possibilités pour (a,b). Les deux autres sont fixés.

(4) **Pour (4)** Pour savoir quel est leur nombre nous commençons par remarquer qu'il y a 4 façons de prendre 3 nombres parmi 4 et ensuite 2 façons de les arranger. Il y a donc 8 éléments dans cette classe de conjugaison.

(5) **Pour (5)** Le premier est arbitraire (parce que c'est cyclique). Pour le second il y a 3 possibilités, et deux possibilités pour le troisième ; le quatrième est alors automatique. Cette classe de conjugaison contient donc 6 éléments.

(6) **Pour (6)** Dans ce cas, tous les nombres sont permutés, et l'image de 1 détermine la double transposition. Il y a 3 images possibles, et donc 3 éléments dans cette classe.

□

PropPWIJbu

Proposition 1.291.
Tout élément de S_n peut être écrit sous la forme d'un produit fini de transpositions.

Si E est un ensemble fini, tout élément de S_E pour être écrit sous forme d'un produit fini de transposition de E.

Démonstration. Un élément de S_n se décompose en un nombre fini de cycles par le lemme 1.279 et chacun des cycles peut être décomposé en un nombre fini de transpositions par le lemme 1.281. □

Cette décomposition n'est pas à confondre avec celle en cycles de support disjoints. Par exemple $(1,2,3)=(1,3)(1,2)$.

1.8.7 Parité d'une permutation, signature

La notion de parité d'une permutation est la clef pour savoir quelles positions du jeu de taquin sont possibles ou impossibles[56, 57].

DEFooYDUHooKIXGNW

Définition 1.292 ([58]).
*Soit une permutation $\sigma\in S_E$ où $\mathrm{Card}(E)=n$. Si k est le nombre de σ-orbites dans E, nous définissons la **signature** par*

$$\epsilon(\sigma)=(-1)^{n-k}. \tag{1.379}$$

PROPooWCHBooTgMokj

Proposition 1.293 ([58]).
Soient une transposition τ et une permutation σ de l'ensemble fini E. Nous avons

$$\epsilon(\sigma\tau)=-\epsilon(\sigma). \tag{1.380}$$

Démonstration. Soient $a,b\in E$ tels que $\tau(a)=b$ et $\tau(b)=a$. Nous allons comparer la liste des orbites de σ avec celle de $\sigma\tau$. Il y a deux possibilités : soit a et b sont dans la même orbite de σ, soit ils sont dans des orbites séparées.

Nous notons[108]

(1) I l'ensemble des orbites de σ ne contenant ni a ni b.

(2) I' l'ensemble des orbites de $\tau\sigma$ ne contenant ni a ni b.

(3) $\mathcal{O}_a$ la σ-orbite de a, $\mathcal{O}_b$ la σ-orbite de b.

(4) $\mathcal{O}'_a$ la $\sigma\tau$-orbite de a, $\mathcal{O}'_b$ la $\sigma\tau$-orbite de b.

[108] Parce que nous adorons à la fois les notations et les listes énumérées.

Il est tout à fait possible à priori d'avoir $\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_b$ ou $\mathcal{O}'_a = \mathcal{O}'_b$. Je vous laisse méditer un instant sur le fait que $\text{Card}\{\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b\}$ vaut 1 ou 2 et que le nombre d'orbites de σ est $\text{Card}(I) + \text{Card}\{\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b\}$.

(1) $\underline{I = I'}$

Soit une orbite $\mathcal{O}$ de σ ne contenant ni a ni b. Alors pour tout $y \in \mathcal{O}$ nous avons $(\sigma\tau)(y) = \sigma(y)$, et donc $\mathcal{O}$ est également une orbite de $\sigma\tau$. Cela prouve que $I = I'$.

(2) $\underline{\textbf{Si } \mathcal{O}_a = \mathcal{O}_b}$ Nous supposons que a et b sont dans la même orbite de σ que nous écrivons

$$\mathcal{O} = \{a, x_1, \dots, x_r, b, x_{r+1}, \dots, x_s\} \tag{1.381}$$

avec $\sigma(x_s) = a$. Étudions la $\sigma\tau$-orbite de a. Nous avons $(\sigma\tau)(a) = \sigma(b) = x_{r+1}$, et $(\sigma\tau)(x_s) = \sigma(x_s) = a$, donc

$$\mathcal{O}'_a = \{a, x_{r+1}, \dots, x_s\} \tag{1.382}$$

ne contient pas b. De même la $(\sigma\tau)$-orbite de b est

$$\mathcal{O}'_b = \{b, x_1, \dots, x_r\} \tag{1.383}$$

et ne contient pas a. Autrement dit, $\mathcal{O}'_a \neq \mathcal{O}'_b$.

(3) $\underline{\textbf{Si } \mathcal{O}_a \neq \mathcal{O}_b}$ Disons que $\mathcal{O}_a = \{a, x_1, \dots, x_r\}$ et $\mathcal{O}_b = \{b, y_1, \dots, y_s\}$ avec $\sigma(y_s) = b$ et $\sigma(x_r) = a$. Nous étudions la $(\sigma\tau)$-orbite de a. Nous avons $(\sigma\tau)(a) = \sigma(b) = y_1$, et ensuite $(\sigma\tau)(y_1) = \sigma(y_1) = y_2$, et ainsi de suite jusqu'à $(\sigma\tau)(y_s) = \sigma(y_s) = b$, et $(\sigma\tau)(b) = \sigma(a) = x_1$. Bref nous avons

$$\mathcal{O}'_a = \{a, y_1, \dots, y_s, b, x_1, \dots, x_r\}, \tag{1.384}$$

et donc $\mathcal{O}'_a = \mathcal{O}'_b$.

Nous avons prouvé que si $\text{Card}\{\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b\} = 1$, alors $\text{Card}\{\mathcal{O}'_a, \mathcal{O}'_b\} = 2$ et que si $\text{Card}\{\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b\} = 2$, alors $\text{Card}\{\mathcal{O}'_a, \mathcal{O}'_b\} = 1$. Donc $\sigma\tau$ a une orbite en plus ou une orbite en moins que σ suivant les cas. Dans les deux cas, $\epsilon(\sigma\tau) = -\epsilon(\sigma)$. □

THOooUILDooRUAZfW

Théorème 1.294 ([58]).
À propos de signature.

ITEMooOLVOooWJKSDY

(1) Soient des transpositions $\tau_1, \dots, \tau_s$. Nous avons

$$\epsilon(\tau_1 \dots \tau_s) = (-1)^s. \tag{1.385}$$

ITEMooWRONooJQkhzG

(2) L'application

$$\epsilon \colon S_E \to \big(\{-1, 1\}, \times\big) \tag{1.386}$$

est un morphisme de groupe surjectif.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) $\underline{\textbf{Pour (1)}}$ D'abord si τ est une transposition, alors $\epsilon(\tau) = -1$ parce que τ possède $n - 1$ orbite dans $\{1, \dots, n\}$. Ensuite une récurrence en utilisant la proposition 1.293 donne le résultat.

(2) $\underline{\textbf{Pour (2)}}$ L'application ϵ est surjective parce que $\epsilon(\tau) = -1$ et $\epsilon(\text{Id}) = 1$. En ce qui concerne le morphisme, si $\sigma, \sigma' \in S_E$, ils peuvent être décomposés en transpositions[109] : $\sigma = \tau_1 \dots \tau_s$ et $\sigma' = \tau_{s+1} \dots \tau_{s+r}$. Nous avons alors

$$\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\tau_1 \dots \tau_s \tau_{s+1} \dots \tau_{s+r}) = (-1)^{s+r} = (-1)^s(-1)^r = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma'). \tag{1.387}$$

□

PROPooKRHEooAxtmRv

Proposition-Définition 1.295 (parité d'une permutation).
À propos de décomposition ne permutations.

(1) Si une permutation peut être écrite sous forme d'un produit d'un nombre pair de transpositions, alors toute décomposition en transpositions sera en quantité paire.

(2) Si une permutation peut être écrite sous forme d'un produit d'un nombre impair de transpositions, alors toute décomposition en transpositions sera en quantité impaire.

[109] Par la proposition 1.291.

Une permutation qui se décompose en une quantité paire de transpositions est une ***permutation paire*** *(et* ***impaire*** *sinon).*

Démonstration. Si $\sigma = \tau_1 \dots \tau_s$ et $\sigma = \tau'_1 \dots \tau'_r$, alors le théorème 1.294(1) dit que $\epsilon(\sigma) = (-1)^s$ et $\epsilon(\sigma) = (-1)^r$, ce qui signifie que $(-1)^r = (-1)^s$ et donc que r et s ont la même parité. □

PROPooXIQOooCcoekP

Proposition 1.296.
La signature de $\sigma \in S_E$ est donné par

$$\begin{aligned} \epsilon\colon S_E &\to \{-1,1\} \\ \sigma &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ est paire} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est impaire.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.388}$$

Démonstration. Si σ est paire, alors, par la définition 1.295, $\sigma = \tau_1 \dots \tau_s$ avec s pair. Dans ce cas[110], $\epsilon(\sigma) = (-1)^s = 1$. Même chose si σ est impaire. □

LEMooWGRXooHWyzLC

Lemme 1.297.
Nous disons qu'un élément $\sigma \in S_n$ est une ***inversion*** *pour les nombres $i < j$ si $\sigma(i) > \sigma(j)$. Soit N_σ le nombre d'inversions que $\sigma \in S_n$ possède (c'est le nombre de couples (i,j) avec $i < j$ tels que $\sigma(i) > \sigma(j)$). Nous avons*

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{N_\sigma} \tag{1.389}$$

où ϵ est la signature[111] dans S_n.

LemhxnkMf

Lemme 1.298 ([49])**.**
Un k-cycle[112] est une permutation impaire si k est pair et paire si k est impair.

Démonstration. Il faut remonter à la définition 1.292 de la signature. Si σ est un k-cycle, alors il possède une orbite de cardinal k et $n-k$ orbites singleton. Donc $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-(n-k+1)} = (-1)^{k-1}$. Donc la parité de la signature est toujours opposée à la parité de k. □

ProphIuJrC

Proposition 1.299 ([54])**.**
Soit S_n le groupe symétrique.

ITEMooBQKUooFTkvSu

(1) L'application $\epsilon\colon S_n \to \{1,-1\}$ est l'unique homomorphisme[113] surjectif de S_n sur $\{-1,1\}$.

(2) Si $s = t_1 \cdots t_k$ est le produit de k transpositions, alors $\epsilon(s) = (-1)^k$.

Démonstration. La seule partie à prouver est l'unicité. Le reste est dans le théorème 1.294.

Soit un homomorphisme surjectif $\varphi\colon S_n \to \{-1,1\}$ et τ, une transposition telle que $\varphi(\tau) = -1$ (qui existe parce que sinon φ ne serait pas surjectif[114]). Si τ' est une autre transposition, il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$ (lemme 1.285). Dans ce cas, $\varphi(\tau') = \varphi(\tau) = -1$, et si $\sigma = (\tau_1 \dots \tau_k)$,

$$\varphi(\sigma) = (-1)^k = \epsilon(\sigma). \tag{1.390}$$

□

COROooZLUKooBOhUPG

Corolaire 1.300.
Si $\sigma \in S_n$, alors

$$\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1}). \tag{1.391}$$

Démonstration. Comme énoncé par la proposition 1.299, ϵ est un homomorphisme, donc

$$\epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \epsilon(\mathrm{Id}) = 1. \tag{1.392}$$

Puisque $\epsilon(\sigma)$ et $\epsilon(\sigma^{-1})$ ne peuvent valoir que ± 1, ils doivent être tous les deux égaux à 1 ou tous les deux à -1 pour que le produit soit 1. □

[110] Par le théorème 1.294(1)
[111] Définition 1.292.
[112] Définition 1.274.
[113] Voir -1.1.
[114] Nous utilisons ici le fait que tous les éléments de S_n sont des produits de transpositions, proposition 1.291.

1.8.8 Permutations un peu ordonnées

LEMooEOTGooPslULz

Lemme 1.301 ([1]).
Deux énoncés.

ITEMooQZDRooUYjcgX

(1) Soit $\pi \in S_k$ satisfaisant $\pi(1) = 1$. Nous définissons $\tau \in S_{k-1}$ par $\tau(i) = \pi(i+1) - 1$.
Alors $\epsilon(\tau) = \epsilon(\pi)$.

ITEMooBUGZooVCVhKz

(2) L'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \{\pi \in S_k \text{ tel que } \pi(1) = 1\} &\to S_{k-1} \\ \pi &\mapsto \Big[\tau(i) = \pi(i+1) - 1\Big] \end{aligned} \tag{1.393}$$

est une bijection.

Démonstration. Nous nommons π' la restriction de π à $\{2, \dots, k\}$. Cela est encore une bijection, de telle sorte que π' puisse être écrite sous forme d'un produit de n transpositions de $\{2, \dots, k\}$ (proposition 1.291) :

$$\pi = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n. \tag{1.394}$$

Les σ_i étant des transpositions de $\{2, \dots, k\}$, elles sont des transpositions de $\{1, \dots, k\}$. Tout cela pour dire que π peut être écrite comme produit de transpositions ne faisant pas intervenir 1.

Nous introduisons la bijection

$$\begin{aligned} \psi\colon \{2, \dots, k\} &\to \{1, \dots, k-1\} \\ i &\mapsto i - 1. \end{aligned} \tag{1.395}$$

En termes de ψ, la définition de τ s'écrit $\psi(\pi) = \psi \circ \pi \circ \psi^{-1}$, et nous avons

$$\tau = \psi \circ \pi \circ \psi^{-1} \tag{1.396a}$$
$$= \psi \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n \circ \psi^{-1} \tag{1.396b}$$
$$= \psi \circ \sigma_1 \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \psi \circ \sigma_n \circ \psi^{-1}. \tag{1.396c}$$

Bref, en notant $\sigma'_i = \psi\sigma_i\psi^{-1}$ nous avons $\tau = \sigma'_1 \circ \dots \circ \sigma_n$.

Il suffit maintenant de remarquer que σ'_i est une transposition dans $\{1, \dots, k-1\}$. On vérifie pour cela que si $\sigma = (a, b)$ alors $\sigma' = \big(\psi(a), \psi(b)\big)$. En effet, pour $i = 1, \dots, k-1$, il y a trois possibilités : soit $i = \psi(a)$, soit $i = \psi(b)$ soit i n'est ni l'un ni l'autre.

Si $i = \psi(a)$, alors $\sigma'(i) = (\psi\sigma\psi^{-1})\big(\psi(a)\big) = \psi\sigma(a) = \psi(b)$. Même vérification pour montrer que $\sigma'\big(\psi(b)\big) = \psi(a)$. Si i n'est ni $\psi(a)$ ni $\psi(b)$, alors $\psi^{-1}(i)$ n'est ni a ni b et dans ce cas

$$(\psi\sigma\psi^{-1})(i) = \psi\sigma\big(\psi^{-1}(i)\big) = \psi\big(\psi^{-1}(i)\big) = i. \tag{1.397}$$

Donc la décomposition $\tau = \sigma'_1 \circ \dots \circ \sigma'_n$ est une décomposition de τ en n transpositions. Autrement dit le nombre de transpositions est le même pour τ que pour π.

En particulier les signatures de τ et de π sont les mêmes. Cela finit la preuve du point (1).

Prouvons le point (2).

(1) **Injectif** Supposons que $\varphi(\pi) = \varphi(\sigma)$. Alors pour tout $i = 1, \dots, k-1$ nous avons

$$\pi(i+1) - 1 = \sigma(i+1) - 1, \tag{1.398}$$

c'est-à-dire $\pi(j) = \sigma(j)$ pour tout $j = 2, \dots, k$. Vu que $\pi(1) = \sigma(1)$ nous avons bien $\pi = \sigma$.

(2) **Surjectif** Soit $\tau \in S_{k-1}$. En posant

$$\pi(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ \tau(i-1) + 1 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.399}$$

nous avons bien $\tau = \varphi(\pi)$.

□

DEFooDFBEooFElghU

Définition 1.302 ([1, 59]).
Nous notons

$$S_{(k,l)} = \{\pi \in S_{k+l} \text{ tel que } \pi(1) < \dots \pi(k),\ \pi(k+1) < \dots < \pi(k+l)\}, \tag{1.400}$$

et

$$A_{(k,l)} = \{\pi \in S_{(k,l)} \text{ tel que } \pi(1) = 1\}. \tag{1.401}$$

LEMooCKJAooBIAyVs

Lemme 1.303 ([1]).
Deux énoncés.

ITEMooCNWMooIbnHnz

(1) *Soit $\pi \in A_{(k,l)}$. En posant $\tau(i) = \pi(i+1) - 1$ nous avons $\tau \in S_{(k-1,l)}$.*

ITEMooKNKRooWbLYrF

(2) *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi\colon A_{(k,l)} &\to S_{(k-1,l)} \\ \pi &\mapsto \Big[\tau(i) = \pi(i+1) - 1\Big] \end{aligned} \tag{1.402}$$

est une bijection.

(3) *En ce qui concerne la signature, $\epsilon\big(\varphi(\pi)\big) = \epsilon(\pi)$.*

Démonstration. Pour prouver (1), soit d'abord $1 \leqslant i < j \leqslant k-1$. Nous avons

$$\tau(i) = \pi(i+1) - 1 < \pi(i+j) - 1 = \tau(j) \tag{1.403}$$

parce que $i+1$ et $j+1$ sont entre 1 et k. Le même raisonnement tient pour $k+1 \leqslant i < j \leqslant k+l$.

Pour (2). Même preuve que la partie correspondante du lemme 1.301. □

1.9 Symbole de sommation

1.9.1 Somme à valeurs dans un groupe commutatif

Si S est un ensemble fini, nous savons de la proposition 1.207 qu'il existe un unique $N \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe une bijection $\varphi\colon \{0,\dots,N\} \to S$. Cette bijection n'est à priori pas unique.

DEFooLNEXooYMQjRo

Lemme-Définition 1.304 ([1]).
Soient un groupe commutatif $(G,+)$ ainsi qu'un ensemble fini I contenant n éléments. Soit une application $f\colon I \to G$. Si $\sigma_1, \sigma_2\colon \{1,\dots,n\} \to I$ sont deux bijections, alors[115]

$$\sum_{i=1}^{n} f\big(\sigma_1(i)\big) = \sum_{i=1}^{n} f\big(\sigma_2(i)\big). \tag{1.404}$$

La valeur commune est notée

EQooWTTJooIJEbrV

$$\sum_{i\in I} f(i) \tag{1.405}$$

Démonstration. Nous commençons par considérer une transposition σ (qui permute k et l avec $k < l$). Nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{k-1} f(i) + f(k) + \sum_{i=k+1}^{l-1} f(i) + f(l) + \sum_{i=l+1}^{n} f(i) \tag{1.406a}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} f(i) + f(l) + \sum_{i=k+1}^{l-1} f(i) + f(k) + \sum_{i=l+1}^{n} f(i) \tag{1.406b}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\big(\sigma(i)\big). \tag{1.406c}$$

Pour cela nous avons utilisé le fait que G est commutatif pour permuter $f(l) \in G$ et $f(k) \in G$ avec $\sum_{i=k+1}^{l-1} f(i) \in G$.

Une permutation quelconque est un produit de telles transpositions (proposition 1.291). Donc pour toute permutation σ nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} f\big(\sigma(i)\big) = \sum_{i=1}^{n} f(i). \tag{1.407}$$

□

La définition 1.304 donne lieu à un certain nombre de remarques.

[115] Pour rappel, le symbole $\sum_{i=1}^{n}$ est défini par 1.159.

(1) Elle donne la somme sur un ensemble fini. Un problème avec les ensembles infinis (outre la convergence) est l'ordre de sommation. Si vous voulez sommer sur $\mathbb{Z}$, dans quel ordre le faire ?

(2) Pour aller plus loin, et sommer sur des ensembles infinis, rendez-vous dans le thème 53.

PROPooJBQVooNqWErk

Proposition 1.305.
Soient un groupe commutatif $(G,+)$, un ensemble fini I, une application $f\colon I\to G$ et une bijection $\sigma\colon I\to I$. Alors

$$\sum_{i\in I} f(i)=\sum_{i\in I} f\big(\sigma(i)\big). \tag{1.408}$$

Démonstration. Par définition 1.304, si $\varphi\colon\{1,\dots,n\}\to G$ est une bijection, alors

$$\sum_{i\in I} f(i)=\sum_{i=1}^{n}(f\circ\varphi)(i) \tag{1.409}$$

et

$$\sum_{i\in I}(f\circ\sigma)(i)=\sum_{i=1}^{n}(f\circ\varphi\circ\sigma)(i). \tag{1.410}$$

Vu que φ et $\varphi\circ\sigma$ sont des bijections, les deux sont égaux par le lemme 1.304. □

Si nous avons une application $L\colon S\to S$, nous notons

$$\sum_{s\in S} f\big(L(s)\big)=\sum_{s\in S}(f\circ L)(s). \tag{1.411}$$

Cette façon d'écrire donne une interprétation pour la notation $\sum_{g\in G} f(hg)$ qui arrive dans la proposition 1.309. Il s'agit de considérer l'application L_h du lemme 1.256, de considérer[116]

EQooQQBEooFDQBVG

$$\sum_{g\in G} f(hg)=\sum_{g\in G}(f\circ L_h)(g) \tag{1.412}$$

et de faire tourner la définition 1.304. La même chose tient pour définir $\sum_{g\in G}(gh)$ à l'aide de R_h.

LEMooGAMAooOAFhrc

Lemme 1.306 (Changement de variables dans une somme[1])**.**
Soient deux ensembles finis I,J ainsi qu'une bijection $\varphi\colon I\to J$. Soient un groupe abélien G et une application $f\colon I\to G$. Alors

$$\sum_{i\in I} f(i)=\sum_{j\in J} f\big(\varphi^{-1}(j)\big). \tag{1.413}$$

LEMooQDFLooVTwJQq

Lemme 1.307 ([1])**.**
Soit un groupe G ainsi qu'une application $f\colon E\to G$. Soient deux parties $A,B\subset E$ telles que $A\cup B=E$ et $A\cap B=\varnothing$. Alors

$$\sum_{i\in E} f(i)=\sum_{i\in A} f(i)+\sum_{i\in B} f(i). \tag{1.414}$$

LEMooNDBYooAGEkmw

Lemme 1.308.
Soit un ensemble A fini pouvant être écrit comme une union disjointe $A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$; nous supposons que les A_i sont non vides. Soient un groupe commutatif $(G,+)$ et une application $f\colon A\to G$. Alors

$$\sum_{a\in A} f(a)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{a\in A_k} f(a). \tag{1.415}$$

Démonstration. Le lemme 1.71 nous indique que les parties A_k sont des ensembles finis. Nous notons

(1) $N_0=0$, et $N_k=\mathrm{Card}(A_k)$,

(2) $S_k=\sum_{i=1}^{k}N_k$.

(3) $\varphi_k\colon\{1,\dots,N_k\}\to A_k$, une bijection (l'existence est dans la proposition 1.207).

[116] Le fait que L_h soit une bijection n'a pas d'importance ici.

Nous avons $\text{Card}(A) = S_n$ par le lemme 1.215(4). Nous définissons une belle bijection comme il faut :

$$\begin{aligned} \alpha\colon \{1,\dots,S_n\} &\to A \\ i &\mapsto \varphi_{k+1}(i-S_k) \end{aligned} \tag{1.416}$$

pour $i \in]S_k, S_{k+1}]$.

(1) **α est bien définie** Puisque $i > S_k$ et $i \leqslant S_{k+1}$ nous avons $i - S_k \in \{1,\dots,N_{k+1}\}$, et donc φ_{k+1} s'applique bien à $i - S_k$.

(2) **α est injective** Supposons que $\alpha(i) = \alpha(j)$. Si $i \in]S_k, S_{k+1}]$ et $j \in]S_l, S_{l+1}]$, alors $\alpha(i) = \varphi_{k+1}(i - S_k) \in A_{k+1}$ et $\alpha(j) = \varphi_{l+1}(j - S_l) \in A_{l+1}$. Vu que les A_i sont disjoints, nous avons $k = l$, et donc

$$\varphi_{k+1}(i - S_k) = \varphi_{k+1}(j - S_k). \tag{1.417}$$

Étant donné que φ_{k+1} est injective, nous avons $i - S_k = j - S_k$, ce qui montre que $i = j$.

(3) **α est surjective** Soit $a \in A$. Il existe k tel que $a \in A_k$. Nous avons donc un $s \in \{1,\dots,N_k\}$ tel que $a = \varphi_k(s)$. En posant $i = s + S_k$, nous avons bien $a = \alpha(s + S_k)$ parce que $s + S_k \in]S_{k-1}, S_k]$.

Vu que α est une bijection, nous avons l'égalité

$$\sum_{a\in A} f(a) = \sum_{i=1}^{S_n} (f\circ\alpha)(i). \tag{1.418}$$

Nous avons encore besoin d'introduire une bijection. Nous posons

$$\begin{aligned} \beta_k\colon]S_{k-1}, S_k] &\to A_k \\ i &\mapsto \varphi_k(i - S_{k-1}). \end{aligned} \tag{1.419}$$

C'est une bijection parce que φ_k en est une, et que $i \mapsto i - S_{k-1}$ est une bijection de $]S_{k-1}, S_k]$.

Nous pouvons maintenant terminer :

$$\sum_{a\in A} f(a) = \sum_{i=1}^{S_n} (f\circ\alpha)(i) \tag{1.420a}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=S_{k-1}-1}^{S_k} (f\circ\alpha)(i) \right) \tag{1.420b}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i\in]S_{k-1},S_k]} f\big(\varphi_k(i - S_{k-1})\big) \right) \tag{1.420c}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i\in]S_{k-1},S_k]} f\big(\beta_k(i)\big) \right) \tag{1.420d}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{a\in A_k} f(a) \right). \tag{1.420e}$$

Justifications :

- Pour (1.420b). Associativité de la somme.

□

PROPooWJQQooFINSEc

Proposition 1.309 ([1]).
Soient un groupe fini G et une fonction $f\colon G \to A$ où A est un anneau commutatif. Alors

$$\sum_{g\in G} f(g) = \sum_{g\in G} f(gh) = \sum_{g\in G} f(hg) \tag{1.421}$$

pour tout $h \in G$.

Démonstration. Nous avons une bijection $\varphi\colon \{0,\dots,N\}\to G$ garantie par la proposition 1.207. Sa définition est

$$\sum_{g\in G} f(g)=\sum_{i=0}^{N} f\big(\varphi(i)\big). \tag{1.422}$$

Par ailleurs, le lemme 1.256 donne une bijection $L_h\colon G\to G$ et permet de considérer la composée

$$\begin{aligned}\varphi'\colon \{0,\dots,N\}&\to G\\ \varphi'&=L_h\circ\varphi.\end{aligned} \tag{1.423}$$

La proposition 1.304 nous permet d'utiliser la bijection φ' au lieu de φ pour exprimer la somme $\sum_{g\in G}$. Ensuite un jeu de notation utilisant (1.412) donne

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G} f(g)&=\sum_{i=0}^{N} f\big(\varphi(i)\big)=\sum_{i=0}^{N} f\big(\varphi'(i)\big)=\sum_{i=0}^{N}(f\circ L_h\circ\varphi)(i)\\ &=\sum_{i=0}^{N}(f\circ L_h)\big(\varphi(i)\big)=\sum_{g\in G}(f\circ L_h)(g)=\sum_{g\in G} f(hg).\end{aligned} \tag{1.424}$$

En ce qui concerne $\sum_{g\in G} f(gh)$, c'est la même chose, en utilisant R_h au lieu de L_h. □

LEMooKSVWooIFsfwm

Lemme 1.310.
Soit un groupe totalement ordonné[117] $(A,+,\leqslant)$. *Soient deux suites* (a_i) *et* (b_i) *dans* G *telles que* $a_i\leqslant b_i$ *pour tout* i. *Alors pour tout* n *nous avons*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\leqslant\sum_{i=0}^{n} b_i. \tag{1.425}$$

Tout cela nous permet de définir une somme sympathique et bien connue.

Lemme 1.311.
Soit $n\in\mathbb{N}$. *Nous avons*

$$\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.426}$$

Démonstration. La preuve est pratiquement immédiate par récurrence. Nous allons donner une preuve plus « constructive », qui formalise l'idée classique d'écrire la somme à l'endroit et à l'envers.

Nous notons S la somme $\sum_{k=0}^{n} k$. Le lemme 1.304 dit que si les $\sigma_i\colon\{0,\dots,n\}\to\{0,\dots,n\}$ sont des bijections, alors $\sum_{k=0}^{n} f\big(\sigma_1(k)\big)=\sum_{k=0}^{n} f\big(\sigma_2(k)\big)$. Nous sommes intéressé au cas $f(i)=i$.

En prenant $\sigma_1(k)=k$ et $\sigma_2(k)=n-k$, nous avons

$$S=\sum_{k=0}^{n} k=\sum_{k=0}^{n}(n-k). \tag{1.427}$$

Donc

$$2S=\sum_{k=0}^{n}\big(k+(n-k)\big)=\sum_{k=0}^{n} n=n\sum_{k=0}^{n} 1=n(n+1). \tag{1.428}$$

En divisant par deux, nous obtenons le résultat annoncé. □

1.9.2 Symbole de produit

NORMooDBOFooQCwbOY

1.312.
Si $(G,\ \cdot\ )$ est un groupe et si $H\subset G$, nous notons le produit des éléments de H par

$$\prod_{g\in H} g=\sum_{g\in H} g \tag{1.429}$$

où à droite, c'est la somme déjà définie. La différence entre $\prod$ et $\sum$ est que nous utilisons $\prod$ pour les groupes notés « multiplicativement » comme $(G,\ \cdot\ )$ alors que nous utilisons $\sum$ lorsque le groupe est noté « additivement » comme $(G,+)$.

[117] Définition 1.260.

Dans le cas d'un anneau $(A,+,\cdot)$, la distinction est importante pour savoir quelle opération est sous-entendue.

La définition 1.159(1) signifie qu'une somme vide vaut zéro : $\sum_{x\in\varnothing} x = 0$. Vu que zéro est la façon usuelle de noter le neutre pour une opération notée « + », lorsque l'opération est notée $\cdot$ nous avons

EQooCSDSooTxdfzQ
$$\prod_{x\in\varnothing} x = 1 \tag{1.430}$$

parce que 1 est la façon usuelle de noter le neutre d'une opération notée « $\cdot$ ».

Notez que (1.430) n'est pas une nouvelle définition ou une nouvelle convention. C'est seulement l'égalité $\sum_{x\in\varnothing x} x = 0$, avec des notations adaptées à un groupe dont l'opération est notée multiplicativement.

PROPooQMUDooQQVRIe
Proposition 1.313.
Si E est un ensemble fini et si G est un groupe commutatif, alors pour toute fonction $f\colon E\to G$ et pour toute permutation[118] σ de E,

$$\prod_{i\in E} f(i) = \prod_{i\in E} f\big(\sigma(i)\big) \tag{1.431}$$

Démonstration. C'est exactement la proposition 1.304, sauf qu'ici la loi de groupe est notée multiplicativement au lieu d'additivement. □

1.10 Anneaux

Nous avons déjà parlé d'anneaux dans la définition 1.92.

DEFooKWKGooIOwGTA
Définition 1.314.
*Un **isomorphisme d'anneaux** est un morphisme d'anneaux[119], bijectif.*

Soit X un ensemble et un anneau $(A,+,\times)$. Nous considérons $\mathrm{Fun}(X,A)$ l'ensemble des applications $X\to A$. Cet ensemble devient un anneau avec les définitions

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \tag{1.432a}$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x). \tag{1.432b}$$

C'est la **structure canonique** d'anneau sur $\mathrm{Fun}(X,A)$.

Définition 1.315.
*Le **centralisateur** de $x\in A$ dans A est l'ensemble*

$$\{y\in A \text{ tel que } xy=yx\}, \tag{1.433}$$

*le **centre** de A est*

$$\{y\in A \text{ tel que } xy=yx, \forall x\in A\}. \tag{1.434}$$

1.10.1 Idéal dans un anneau

DefooQULAooREUIU
Définition 1.316 (Idéal dans un anneau)**.**
*Un sous-ensemble $I\subset A$ est un **idéal à gauche** si*

(1) I est un sous-groupe pour l'addition,

(2) pour tout $a\in A$, $aI\subset I$.

*De même nous disons que $I\subset A$ est une **idéal à droite** lorsque I est un sous-groupe pour l'addition et $Ia\subset I$ pour tout $a\in A$.*

*Lorsqu'un ensemble est idéal à gauche et à droite, nous disons que c'est un **idéal bilatère**. Lorsque nous parlons d'idéal sans précision, nous parlons d'idéal bilatère.*

DEFooZFYSooJGZndS
Définition 1.317 (Idéaux premiers entre eux[60])**.**
Deux définitions.

*(1) Deux idéaux I et J de l'anneau A sont **premiers entre eux** si $I+J=A$.*

[118] Une permutation est une bijection, définition 1.269.
[119] Définition 1.98.

(2) *Des idéaux I_1,..., I_n sont* ***premiers dans leur ensemble*** *si $I_1 + \ldots + I_n = A$.*

LEMooMAHXooXSowdn

Lemme 1.318.
Les seuls idéaux d'un corps sont $\{0\}$ et le corps lui-même.

1.10.2 Idéal engendré

Démonstration. Soient un corps $\mathbb{K}$ et un idéal I dans A. Si $I = \{0\}$, c'est un idéal, pas de problèmes. Si $I \neq \{0\}$, alors $0 \in I$ parce qu'un idéal doit contenir le neutre de l'addition.

Soit $x \neq 0$ dans I. Alors pour tout $a \in \mathbb{K}$ nous avons $ax \in I$. En particulier avec $a = x^{-1}$ nous voyons que $1 \in I$. De là, $I = \mathbb{K}$ parce que si $x \in \mathbb{K}$, nous avons $x = x \cdot 1 \in xI \subset I$. □

DefSKTooOTauAR

Proposition-Définition 1.319 (Idéal engendré par un élément)**.**
Soit un anneau A et une partie $S \subset A$. Nous notons (S) l'intersection de tous les idéaux de A contenant S. C'est un idéal.

*Nous nommons (S) l'****idéal engendré*** *par S,*

Démonstration. Nous prouvons que (S) est un idéal. En deux parties.

(1) **Somme** Soient $a, b \in (S)$. Nous devons prouver que $a + b \in (S)$ c'est-à-dire que que si I est un idéal de A, alors $a + b \in I$. Soit donc un idéal I. Vu que $(S) \subset I$ nous avons $a, b \in I$. Et comme I est un idéal, $a + b \in I$.

(2) $a(S) \subset (S)$ Soit $a \in A$. Nous prouvons que $a(S) \subset (S)$. Soit $x \in (S)$ et un idéal I de A. Nous avons $x \in (S) \subset I$. Donc $ax \in I$.

□

PROPooDTYUooJPzPZV

Proposition 1.320 ([61, 1])**.**
Soient un anneau A et une partie $S \subset A$. L'idéal engendré par S est la partie

$$P = \{\sum_{i=1}^{r} a_i s_i b_i \text{ tel que } a_i, b_i \in A, s_i \in S\}. \tag{1.435}$$

Démonstration. Nous commençons par remarquer que P est un idéal. Ensuite nous prouvons

(1) $P \subset (S)$ Il faut montrer que P est inclus dans tous les idéaux contenant S. Soit I un tel idéal. Soit un élément $\sum_{i=1}^{r} a_i s_i b_i$ dans P. Vu que $s_i \in S \subset I$, nous avons $s_i \in I$ et donc $a_i s_i b_i \in I$.

(2) $(S) \subset P$ Nous savons que P est un idéal contenant S. Comme (S) est l'intersection de tous les idéaux contenant S, en particulier $(S) \subset P$.

□

PROPooFDJXooYbXEpo

Proposition 1.321 ([1])**.**
Soient un anneau A ainsi que $a, b, x \in A$.

ITEMooVFXMooPljoHf

(1) La partie $(a) + (b)$ est un idéal.

ITEMooMXHAooHPnAdu

(2) Si $a \in (x)$, alors $(a) \subset (x)$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soient $u, v \in (a) + (b)$. Nous avons $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$ avec $u_1, v_1 \in (a)$ et $u_2, v_2 \in (b)$. Donc

$$u + v = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in (a) + (b) \tag{1.436}$$

parce que $u_1 + v_1 \in (a)$ du fait que (a) est un idéal.

(2) **Pour (2)** Si $s =\in (x)$, alors la proposition 1.320 dit qu'il existe $a, b \in A$ tels que $s = axb$. Donc un élément général de (s) est de la forme $\alpha s \beta$ avec $\alpha, \beta \in A$. Mais $\alpha s \beta = \alpha a x b \beta \in (x)$.

□

LEMooSEIAooYVIvPK

Lemme 1.322 ([])**.**
Soit un anneau A.

(1) Toute union d'idéaux est un idéal.

(2) Une somme finie d'idéaux est un idéal.

LEMooHSVYooRjhGUU

Lemme 1.323 ([1]).
Soient un anneau commutatif A ainsi que $S \subset A$. Les parties

$$I = \bigcap_{s\in S} sA \tag{1.437}$$

et

$$J = \bigcup_{\alpha \text{ fini dans } S} \sum_{s\in\alpha} sA \tag{1.438}$$

sont des idéaux.

Démonstration. Nous faisons pour J. Soient $x, y \in J$. Il existe α, β finis dans S et des élements $a_s, b_s \in A$ pour chaque $s \in \alpha \cup \beta$ tels que $x = \sum_{s\in\alpha} sa_s$ et $y = \sum_{s\in\beta} sb_s$.

Nous posons $a_s = 0$ quand $s \notin \alpha$ et $b_s = 0$ lorsque $s \notin \beta$ et ensuite $\gamma = \alpha \cup \beta$. Nous avons alors

$$x + y = \sum_{s\in\gamma} s(a_s + b_s) \in J. \tag{1.439}$$

De plus si $a \in A$, alors $xa = \sum_{s\in\alpha} sAa \subset \sum_{s\in A} sA$. □

PROPooMMHPooZYzvdK

Proposition 1.324 ([62, 1]).
Soit un anneau commutatif A. Soit une partie S de A.

ITEMooJKGMooCqWYOq

(1) Un élément μ est un ppcm de S si et seulement si il est générateur de l'idéal[120] *$I = \bigcap_{s\in S} sA$.*

ITEMooZUCVooRIpnhU

(2) Si δ est un générateur de l'idéal $J = \bigcup_{\alpha \text{ fini dans } S} \sum_{s\in\alpha} sA$, alors $\delta \in \text{pgcd}(S)$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** En deux parties.

(1a) $\Rightarrow$ Soit $m \in \text{ppcm}(S)$. Nous allons montrer que $\mu A = I$, et ce sera suffisant par la proposition 1.320 et le fait que A est commutatif.

(1a.i) $\mu A \subset I$ Vu que $\mu \in \text{ppcm}(S)$, pour tout $s \in S$, il existe $a_s \in A$ tel que $\mu = sa_s$. Donc $\mu A \subset sA$ pour tout $s \in S$. Autrement dit, $\mu A \subset \bigcup_{s\in S} sA = I$.

(1a.ii) $I \subset \mu A$ Soit $m \in I$. Donc m est un multiple de tout élément de S. Vu que μ est un ppcm de S, il existe $a \in A$ tel que $m = \mu a$. Et donc $m \in \mu A$, et donc $I \subset \mu A$.

(1b) $\Leftarrow$ Soit un générateur μ de I, c'est-à-dire que $\mu A = I$.

(1b.i) $S \mid \mu$. Soit $s \in S$. Vu que $\mu \in I$, nous avons $\mu \in \bigcap_{s\in S} sA$, et donc il existe $a \in A$ tel que $\mu = sa$, c'est-à-dire que $s \mid \mu$. Bref, tout élément de S divise μ.

(1b.ii) **Si $S \mid m$, alors $\mu \mid m$** Nous supposons que m est un multiple de tout élément de S. Donc pour tout $s \in S$, il existe a_s tel que $m = sa_s$. Donc $m \in I$, et donc μ divise m.

(2) **Pour (2)** Nous considérons un générateur δ de J, et nous prouvons que $\delta \in \text{pgcd}(S)$.

(2a) **δ divise S** Soit $s \in S$. Nous avons $s \in J$ et donc il existe $a_s \in A$ tel que $\delta a_s = s$. Donc $\delta \mid s$.

(2b) **Si $d \mid S$ alors $d \mid \delta$** Vu que $\delta \in J$, il existe une partie fine $\alpha \subset S$ et des $b_s \in A$ tels que $\delta = \sum_{s\in\alpha} sb_s$. En même temps, nous savons que $s = da_s$. Donc

$$\delta = \sum_{s\in\alpha} sb_s = \sum_{s\in\alpha} da_s b_s = d \sum_{s\in\alpha} a_s b_s, \tag{1.440}$$

c'est-à-dire que d divise δ.

□

[120] Lemme 1.323.

1.10.3 Autres trucs sur les idéaux

PROPooGXMRooTcUGbi

Proposition-Définition 1.325.
Soit A, un anneau, I un idéal bilatère[121] *de A. Nous considérons la relation d'équivalence $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in I$. Sur le quotient*[122]

$$A/\sim = A/I, \tag{1.441}$$

nous mettons les opérations

(1) $[x] + [y] = [x + y]$

(2) $[x][y] = [xy]$.

Nous avons alors les résultats suivants :

ITEMooEJPEooRKAqmS

(1) Les opérations sont bien définies,

ITEMooYBEGooTlHgNz

(2) l'ensemble A/I, muni de ces opérations, est un anneau. Le neutre pour l'addition est $[0]$, l'inverse de $[a]$ est $[-a]$ que nous noterons $-[a]$.

ITEMooLNRLooMkoWXZ

(3) la surjection canonique $\pi : A \to A/I$ est un morphisme.

Cet anneau est appelé ***anneau quotient****.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Nous savons que, par définition,

$$\bar{x} = \{x + i \text{ tel que } i \in I\}. \tag{1.442}$$

Calculons le produit de représentants génériques de $\bar{x}$ et de $\bar{y}$:

$$(x + i_1)(y + i_2) = xy + xi_2 + yi_1 + i_1 i_2. \tag{1.443}$$

Puisque I est un idéal, nous avons $xi_2 + yi_1 + i_1 i_2 \in I$ et donc bien

$$(x + i_1)(y + i_2) \in \overline{xy}. \tag{1.444}$$

(2) **Pour (2)** Il s'agit de vérifier les conditions de la définition 1.92.

D'abord A/I est un groupe de neutre $[0]$. En effet, vu que $(A, +)$ est un groupe commutatif de neutre 0, nous avons

(2a) Neutre : $[a] + [0] = [a + 0] = [a]$.

(2b) Associativité : $[a] + ([b] + [c]) = [a] + [b + c] = [a + b + c] = [a + b] + [c] = \big([a] + [b]\big) + [c]$.

(2c) Inversibilité : l'inverse de $[a]$ est $[-a]$ parce que $[a] + [-a] = [a - a] = [0]$.

Nous pouvons noter $-[a]$ l'élément $[-a]$. Le groupe A/I est commutatif :

$$[a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a]. \tag{1.445}$$

Donc $(A/I, +)$ est un groupe commutatif de neutre $[0]$.

L'associativité de A donne l'associativité dans A/I :

$$\big([a][b]\big)[c] = [ab][c] = [abc] = [a][bc] = [a]\big([b][c]\big). \tag{1.446}$$

Et enfin pour la distributivité,

$$[a]\big([b] + [c]\big) = [a][b + c] = [a(b + c)] = [ab + ac] = [ab] + [ac] = [a][b] + [a][c]. \tag{1.447}$$

Nous avons prouvé que A/I est un anneau de neutre $[0]$ et d'unité $[1]$.

(3) **Pour (3)** Nous devons vérifier les trois conditions de la définition 1.98. Cela est immédiat parce que $\overline{\pi(x)} = [x]$.

□

[121] Définition 1.316.
[122] Définition 1.51.

1.10.4 Élément irréductible et premier

DEFooZCRQooWXRalw

Définition 1.326 ([63]).
*Soit un anneau commutatif A. Un élément $p \in A$ est **premier** si il est*

(1) non nul,

(2) non inversible,

ITEMooPMTTooCVHPIm

(3) si p divise un produit ab, alors il divise soit a soit b (ou les deux).

DeirredBDhQfA

Définition 1.327 (Élément irréductible[64]).
*Un élément d'un anneau commutatif est **irréductible** si il n'est ni inversible, ni le produit de deux éléments non inversibles.*

1.328.
Nous allons voir dans la section 3.6 que le concept d'élément irréductible n'est vraiment utile que dans le cas des anneaux intègres.

Exemple 1.329.
Un corps n'a pas d'élément irréductible parce qu'à part zéro, tous les éléments sont inversibles. Mais 0 n'est pas irréductible parce qu'il peut être écrit comme produit d'éléments non inversibles : $0 = 0 \cdot 0$. △

LEMooJBUJooScsiGc

Lemme 1.330 ([1]).
Si p est irréductible et si u est inversible, alors pu est irréductible.

Démonstration. D'abord pu n'est pas inversible parce que p ne l'est pas.

Ensuite supposons que $pu = ab$. Vu que u est inversible, nous avons $p = a(bu^{-1})$. Comme p est irréductible, soit a, soit bu^{-1} est inversible.

Si c'est a, c'est gagnée. Sinon, soit k un inverse de bu^{-1} : $bu^{-1}k = 1$. Nous voyons que $u^{-1}k$ est un inverse de b. Donc b est inversible. □

PROPooKDWQooTtScrN

Proposition 1.331.
Les éléments irréductibles de l'anneau $\mathbb{Z}$ sont les nombres premiers[123].

Démonstration. Les seuls inversibles de $\mathbb{Z}$ sont ± 1.

Si p est premier et $p = ab$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, alors nous avons soit $a = \pm 1$ soit $b = \pm 1$. Donc p n'est pas le produit de deux éléments non inversibles.

Dans le sens inverse, supposons que p soit irréductible dans $\mathbb{Z}$. D'abord p ne peut pas être ± 1 parce que ± 1 sont inversibles. Ensuite supposons que $p = ab$. Vu que p est irréductible, nous avons $a = \pm 1$ ou $b = \pm 1$. Autrement dit, dans $p = ab$, soit a soit b est un inversible. □

1.10.5 Anneau intègre

DEFooHRRYooTmbUTH

Définition 1.332 (Éléments nilpotents, unipotents).
*On dit que $a \in A$ est **nilpotent** si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$. Il est dit **unipotent** si $a - 1$ est nilpotent, c'est-à-dire si $(a-1)^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.*

DEFooCIHVooAhpJxy

Définition 1.333 (Éléments inversibles).
*Un élément $a \in A$ est dit **inversible** si il existe $b \in A$ tel que $ab = 1$.*

L'ensemble $U(A)$ des éléments inversibles de A est un groupe pour la multiplication. Nous notons $A^* = A \setminus \{0\}$.

Conformément à la définition 1.101 de diviseur, nous posons la définition suivante pour les diviseurs de zéro.

DEFooCIYLooFkhVOc

Définition 1.334 (diviseur de zéro[65]).
*Un élément $a \neq 0$ est un **diviseur de zéro à gauche** si il existe $x \neq 0$ tel que $ax = 0$. L'élément a est un diviseur de zéro **à droite** si il existe $y \neq 0$ tel que $ya = 0$.*

*Nous disons que a est un **diviseur de zéro** si il est un diviseur de zéro à gauche ou à droite.*

DEFooTAOPooWDPYmd

Proposition-Définition 1.335 (Anneau intègre[1]).
Soit A un anneau non réduit à $\{0\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

[123] Nombre premier, définition 1.326.

ITEMooMXMKooXMYpkN

(1) *A ne possède pas de diviseurs de zéro*[124].

ITEMooLAJCooFwxXrV

(2) *La règle du produit nul s'applique dans A : pour tous $a, b \in A$, si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.*

ITEMooQNTFooSRrVPK

(3) *On peut simplifier par un même élément non-nul, deux expressions produit dans A qui sont égales : pour tous $a, b, c \in A$ avec $a \neq 0$, si $ab = ac$, alors $b = c$.*

Un anneau non réduit à $\{0\}$ qui vérifie ces propriétés est dit ***intègre****.*

Démonstration. En trois implications.

(1) **(1) implique (2)**
Si $ab = 0$ avec $b \neq 0$ alors a est un diviseur de zéro. Vu que nous supposons que A n'a pas de diviseurs de zéros, a est nul. De même, si $a \neq 0$ b devrait être nul.

(2) **(2) implique (3)**
Si $ab = ac$, alors $a(b - c) = 0$ et l'hypothèse dit que soit $a = 0$, soit $b - c = 0$. Donc si $a \neq 0$, alors $b - c = 0$.

(3) **(3) implique (1)** Si $A = \{0\}$, le point (3) n'est pas applicable.
Si $a \neq 0$ et $ax = 0$, alors nous avons aussi $ax = a \times 0$. Par propriété de simplification, $x = 0$. Donc a n'est pas un diviseur de zéro à gauche. Nous prouvons de la même façon qu'il n'y a pas de diviseurs de zéro à droite.

□

LEMooIKNMooMfvQnu

Lemme 1.336.
Un corps est un anneau intègre[125]*. Tout corps satisfait la règle du produit nul.*

Démonstration. Nous vérifions la définition 1.335, et nous nommons $\mathbb{K}$ le corps considéré.

(1) **Pour (1)** Soit $a \in \mathbb{K}$. Si $ax = 0$ avec $x \neq 0$ alors en multipliant par x^{-1} nous trouvons $a = 0$. Donc a n'est pas un diviseur de zéro non nul.

(2) **Pour (2)** Idem à ce que nous venons de faire. Si dans $ab = 0$ l'un des deux est non nul, en multipliant par son inverse, nous trouvons que l'autre est nul.

(3) **Pour (3)** Si $ab = ac$ avec $a \neq 0$, alors il suffit de multiplier à gauche par a^{-1} (qui existe parce que nous sommes dans un corps) pour obtenir $b = c$.

□

Conséquence : dans un corps nous avons toujours la règle du produit nul, et l'élément nul n'est jamais inversible.

PROPooZBTIooRhAhvg

Proposition 1.337 ([62])**.**
Soit un anneau unitaire et intègre A. Soit $p \in A$.

ITEMooJWRYooHndNpV

(1) *p est premier si et seulement si l'idéal pA est premier.*

ITEMooGHGCooRkJilg

(2) *p est irréductible si et seulement si il n'existe pas d'idéal principal I tel que $pA \subsetneq I \subsetneq A$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1)⇒**
Supposons que p est premier. Soient $a, b \in A$ tels que $ab \in pA$. En particulier $p \mid ab$, et p étant premier[126], nous avons soit $p \mid a$ soit $p \mid b$. Supposons que $p \mid a$. Il existe $k \in A$ tel que $pk = a$, et donc

$$a = pk \in pA. \tag{1.448}$$

De même si $p \mid b$ nous avons $b \in pA$.

[124] Définition 1.334.
[125] Définition 1.335.
[126] Définition 1.326.

(2) **(1)⇐**
Nous supposons que l'idéal pA est premier, et nous prouvons que p est premier. Soient $a, b \in A$ tels que $p \mid ab$. Il existe $k \in A$ tel que $pk = ab$. Donc $ab \in pA$. L'idéal pA étant premier, nus avons soit $a \in pA$ soit $b \in pA$. Donc soit $a \mid a$ soit $b \mid p$.

(3) **(2)⇒**
Supposons que p est irréductible. Soit un idéal principal I vérifiant $pA \subset I$. Nous allons montrer que soit $I = pA$ soit $I = A$. Vu que I est principal, il existe $a \in A$ tel que $I = aA$. Nous avons $pA \subset aA$, et en particulier $p \in aA$. Notons $b \in A$ un élément tel que $ab = p$.

Vu que p est irréductible, il n'est pas le produit de deux non inversibles. Donc soit a soit b est inversible.

Si a est inversible, alors $I = A$.

Si b est inversible, alors $a = pb^{-1}$, de telle sorte que $a \in pA$. De ce fait $I = pA$.

(4) **(2)⇐**
Enfin, nous supposons qu'il n'existe pas d'idéal principal I tel que $pA \subsetneq I \subsetneq A$, et nous montrons que p est irréductible. Soient $a, b \in A$ tels que $p = ab$.

Nous avons $p \in aA$ et donc $pA \subset aA$. Donc soit $aA = pA$ soit $aA = A$.

Si $aA = pA$, alors il existe $k \in A$ tel que $pk = a$. En multipliant l'égalité $ab = p$ par k nous trouvons $abk = pk = a$. Vu que A est intègre, nous pouvons simplifier par a et trouver $bk = 1$, de telle sorte que b soit inversible.

Si $aA = A$, alors a est inversible parce que $1 \in A = aA$.

□
LEMooSFHMooQoKsPV

Lemme 1.338 ([1]).
Soient un anneau intègre A, et une partie $S \subset A$. Si un des pgcd *de S est inversible*[127]*, alors ils le sont tous.*

Démonstration. Pour rappel, les pgcd d'une partie de A sont définis dans 1.105. Soit un pgcd inversible de S, ainsi qu'un autre pgcd que nous nommons δ'. Vu que δ' divise tous les éléments de S, il est divisé par δ : $\delta \mid \delta'$. Réciproquement, $\delta' \mid \delta$.

Soient x et y définis par $\delta = x\delta'$ et $\delta' = y\delta$. Nous avons

$$\delta = x\delta' = xy\delta. \tag{1.449}$$

Comme l'anneau A est intègre, nous pouvons simplifier par δ et voir $xy = 1$, ce qui signifie que x et y sont inversibles. Donc si δ est inversible, alors $\delta' = y\delta$ est inversible. □
LEMooMHZQooIcSNSf

Lemme 1.339 ([1, 66]).
Soient un anneau intègre, A, une partie $S \subset A$ et un élément $a \in A$. Nous avons[128]

$$\operatorname{pgcd}(aS) = a \operatorname{pgcd}(S). \tag{1.450}$$

Démonstration. Deux inclusions à prouver.

(1) $\operatorname{pgcd}(aS) \subset a \operatorname{pgcd}(S)$ Soit un pgcd δ de aS. Nous devons trouver un $\delta' \in \operatorname{pgcd}(S)$ tel que $\delta = a\delta'$. En termes de notations, nous notons $S = \{s_i\}_{i \in I}$. Pour chaque i nous avons $\delta \mid as_i$: il existe $x_i \in A$ tel que

$$\delta x_i = as_i. \tag{1.451}$$

Vu que a divise tous les éléments de aS, il divise n'importe quel pgcd de aS, et en particulier $a \mid \delta$: il existe $\delta' \in A$ tel que $\delta = a\delta'$. Nous montrons que $\delta' \in \operatorname{pgcd}(S)$.

Nous savons que $\delta x_i = as_i$. En remplaçant δ par $a\delta'$, $a\delta' x_i = as_i$. Vu que nous sommes dans un anneau intègre, nous pouvons simplifier par a (définition 1.335(3)) :

$$\delta' x_i = s_i. \tag{1.452}$$

Donc δ' divise tous les éléments de S, et vérifie la première condition pour être un pgcd de S. Pour la seconde condition, nous supposons que d divise tous les éléments de S. Nous avons $d \mid S$, donc $ad \mid aS$. Et comme δ est un pgcd de aS, nous déduisons que ad divise δ. Il existe $y \in A$ tel que

$$ady = \delta. \tag{1.453}$$

[127] Définition 1.333.
[128] Définition du pgcd : 1.105.

Nous remplaçons δ par sa valeur $a\delta'$: $ady = a\delta'$. Encore une fois nous simplifions par a et nous trouvons $dy = \delta'$, c'est-à-dire que δ divise δ'.

(2) $a\,\mathrm{pgcd}(S) \subset \mathrm{pgcd}(aS)$

Soit un pgcd δ de S. Nous voulons que $a\delta \in \mathrm{pgcd}(aS)$. Vu que $\delta \in \mathrm{pgcd}(S)$ nous avons $\delta x_i = s_i$ pour tout i, et donc aussi $a\delta x_i = as_i$, de telle sorte que $a\delta$ divise tous les éléments de aS.

Soit maintenant $d \in A$ divisant tous les éléments de aS. Nous devons prouver que $d \mid a\delta$.

(2a) **Travail préliminaire**

Nous considérons $\delta' \in \mathrm{pgcd}(aS)$. Vu que $\delta \mid s$ pour tout $s \in S$, nous avons aussi $a\delta \mid as$ pour tout $s \in S$. Comme δ' est un est un pgcd de aS, nous avons donc

$$a\delta \mid \delta'. \tag{1.454}$$

Soit $u \in A$ tel que $\delta' = a\delta u$.

En utilisant la première partie de la preuve, nous avons

$$\delta' \in \mathrm{pgcd}(aS) \subset a\,\mathrm{pgcd}(S). \tag{1.455}$$

Donc il existe $\delta_1 \in \mathrm{pgcd}(S)$ tel que $\delta' = a\delta_1$. En écrivant l'égalité $\delta' = a\delta u$ avec cette valeur de δ', nous trouvons

$$a\delta_1 = a\delta u, \tag{1.456}$$

EQooVHSSooDdVUeW

et donc $\delta_1 = \delta u$ parce que A est intègre. Vu que $\delta_1 \in \mathrm{pgcd}(S)$, nous avons aussi $\delta u \in \mathrm{pgcd}(S)$. En particulier δu divise tous les éléments de S, et donc divise δ qui est un pgcd de S : $\delta u \mid \delta$. En multipliant par a,

$$\delta' = a\delta u \mid a\delta. \tag{1.457}$$

(2b) **Résumé** Nous avons considéré $\delta \in \mathrm{pgcd}(S)$ et nous sommes en train de prouver que $a\delta \in \mathrm{pgcd}(aS)$. Nous avons déjà prouvé que si $\delta' \in \mathrm{pgcd}(aS)$, alors nous avons $\delta' \mid a\delta$.

Nous posons $y \in A$ tel que $\delta' y = a\delta$.

(2c) **Et enfin** Soit d divisant tous les éléments de $a\delta$. Donc $d \mid \delta'$: il existe $x \in A$ tel que $dx = \delta'$. En multipliant par y,

$$dxy = \delta' y = a\delta. \tag{1.458}$$

Nous avons montré que d divise $a\delta$, ce qu'il nous fallait.

□

LEMooZSUNooUmYmgt

Lemme 1.340 ([67]).
Soient un anneau intègre A et une partie $S \subset A$. Si $\delta \in \mathrm{pgcd}(S)$, alors $\mathrm{pgcd}(S/\delta)$ ne contient que des inversibles.

Démonstration. En utilisant le lemme 1.339, nous avons

$$\mathrm{pgcd}(S) = \mathrm{pgcd}\big(\delta(S/\delta)\big) = \delta\,\mathrm{pgcd}(S/\delta). \tag{1.459}$$

Soit $d \in \mathrm{pgcd}(S/\delta)$. Notre but est de montrer que d est inversible. D'abord

$$\delta d \in \delta\,\mathrm{pgcd}(S/\delta) = \mathrm{pgcd}(S). \tag{1.460}$$

Donc δd divise tous les éléments de S. Étant donné que δ est un pgcd de S, la définition 1.105(2) nous dit que δd divise δ. Il existe donc $d' \in A$ tel que $\delta dd' = \delta$, c'est-à-dire

$$\delta(dd' - 1) = 0. \tag{1.461}$$

Étant donné que $\delta \neq 0$ et que A est intègre nous avons $dd' - 1 = 0$ (définition 1.335(2)), c'est-à-dire $dd' = 1$. Cela montre que d' est un inverse de d, et donc que d est inversible. □

LEMooZKASooKstTuK

Lemme 1.341 ([1]).
Soit un anneau intègre A. Si $\delta \in \mathrm{pgcd}(S)$ et si $u \in A$ est inversible, alors $\delta u \in \mathrm{pgcd}(S)$.

Démonstration. Soit $s \in S$. Si $\delta x = s$, alors $u\delta(u^{-1}x) = s$. Donc $u\delta$ divise tous les éléments de S. De plus si $d \mid S$, alors $d \mid \delta$. Dans ce cas il existe y tel que $dy = \delta$. Nous avons alors aussi

$$dxu = \delta u, \tag{1.462}$$

de telle sorte que d divise δu. □

1.10.6 Fonction puissance

Voici une première définition de la fonction puissance. Il y en aura d'autres, de plus en plus générales. Voir le thème 52.

DEFooGVSFooFVLtNo

Définition 1.342.
Si A est un anneau, si $a \in A$ et si $n \in \mathbb{N}$, nous définissons a^n par récurrence :

(1) $a^0 = 1$ *(l'unité pour la multiplication dans A),*

(2) $a^{k+1} = a \cdot a^k$.

ITEMooOUIPooGjAgQb

Si vous n'êtes pas sure de vous, ne citez pas le théorème 1.122. Il est indispensable pour faire fonctionner cette définition, mais vous pouvez faire comme si vous n'avez rien vu.

Le lemme suivant dit que le point (2) de la définition 1.342 aurait pu être écrit $a^k \cdot a$ au lieu de $a \cdot a^k$.

LEMooWPARooYLZlzr

Lemme 1.343 ([1]).
Si A est un anneau, si $a \in A$ et si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$a^n = a \cdot a^{n-1} = a^{n-1} \cdot a. \tag{1.463}$$

Démonstration. Cela se prouve par récurrence. Pour $n = 1$ c'est l'égalité $a = a^0 a$ qui est correcte parce que par définition $a^0 = 1$.

Supposons que le résultat soit bon pour n et voyons ce que ça donne pour $n + 1$:

$$\begin{aligned}
a^{n+1} &= aa^n && \text{Définition de } a^{n+1} && (1.464a)\\
&= a(a^{n-1}a) && \text{hypothèse de récurrence pour } a^n && (1.464b)\\
&= (aa^{n-1})a && \text{associativité} && (1.464c)\\
&= a^n a && \text{Définition de } a^n. && (1.464d)
\end{aligned}$$

□

PROPooPLLSooUpiLKa

Proposition 1.344 ([1]).
Soit un naturel $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit un naturel $m > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b^n > m$.

1.10.7 Anneau euclidien

DefAXitWRL

Définition 1.345 (Wikipédia).
Soit A un anneau intègre[129]*. Un **stathme euclidien** sur A est une application $\alpha : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ tel que*

ITEMooLVJAooEpjgEz

(1) $\forall a, b \in A \setminus \{0\}$, *il existe $q, r \in A$ tel que*

$$a = qb + r \tag{1.465}$$

et $\alpha(r) < \alpha(b)$.

(2) Pour tout $a, b \in A \setminus \{0\}$, $\alpha(b) \leqslant \alpha(ab)$.

*Un anneau est **euclidien** si il accepte un stathme euclidien.*

Le stathme est la fonction qui donne le « degré » à utiliser dans la division euclidienne. La contrainte est que le degré du reste soit plus petit que le degré du dividende.

LEMooFUSTooDCcBDb

Lemme 1.346.
L'ensemble $\mathbb{Z}$ avec les opérations usuelles est un anneau intègre[130]*.*

ExwqlCwvV

Exemple 1.347.
Le stathme de $\mathbb{N}$ pour la division euclidienne usuelle est $\alpha(n) = n$. Si $a, b \in \mathbb{N}$ nous écrivons

$$a = qb + r \tag{1.466}$$

où q est l'entier le plus proche *inférieur* à a/b (on veut que le reste soit positif) et $r = a - qb$. Nous avons donc

$$r - b = a - b(q + 1) < a - b\frac{a}{b} = 0, \tag{1.467}$$

ce qui montre que $r < b$. △

[129] Défnition 1.335.
[130] Anneau intègre, définition 1.335.

Cet exemple ne fonctionne pas avec $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{N}$ parce que le stathme doit avoir des valeurs dans $\mathbb{N}$. Cela ne veut cependant pas dire qu'il n'existe pas de stathme sur $\mathbb{Z}$; cela veut seulement dire que $\alpha(x) = x$ ne fonctionne pas.

1.10.8 Anneau principal et idéal premier

DEFooMZRKooBPLAWH

Définition 1.348 (Idéal principal[68]).
Soit un idéal[131] I *dans* A.

(1) *Il est* ***principal à gauche*** *si il existe* $a \in I$ *tel que* $I = Aa$.

(2) *Il est* ***principal à droite*** *si il existe* $a \in I$ *tel que* $I = aA$.

(3) *Nous disons qu'il est* ***principal*** *bilatère si il existe* $a \in I$ *tel que*

$$I = \{\sum_{i=1}^{r} x_i a y_i \text{ tel que } x_i, y_i \in A\}. \tag{1.468}$$

DEFooGWOZooXzUlhK

Définition 1.349.
Un anneau est ***principal*** *si*

(1) *il est commutatif et intègre*

(2) *tous ses idéaux*[132] *sont principaux*[133].

Souvent pour prouver qu'un anneau est principal, nous prouvons qu'il est euclidien (définition 1.345) et nous utilisons la proposition 1.350 qui dit qu'un anneau euclidien est principal.

Une manière de prouver qu'un anneau n'est pas principal est de prouver qu'il n'est pas factoriel, théorème 3.68.

Propkllxnv

Proposition 1.350 ([69]).
Tout anneau euclidien[134] *est principal*[135].

Démonstration. Soit A un anneau euclidien et α un stathme sur A. Nous considérons un idéal I non nul de A. Nous devons montrer que I est généré par un élément. En l'occurrence nous allons montrer qu'un élément $a \in I \setminus \{0\}$ qui minimise $\alpha(a)$ va générer[136] I.

Soit $x \in I$. Par construction, il existe $q, r \in A$ tels que $x = aq + r$ avec $r = 0$ ou $\alpha(r) < \alpha(a)$. Étant donné que $x, a \in I$, $r \in I$. Si $r \neq 0$, alors r contredirait la minimalité de $\alpha(a)$. Donc $r = 0$ et $x = aq$, ce qui signifie que I est principal. □

PROPooPJGLooQSrJTU

Proposition 1.351.
L'anneau $\mathbb{Z}$ *est principal*[137] *et euclidien*[138].

Démonstration. Nous allons seulement montrer que $\alpha(x) = |x|$ est un stathme euclidien. Ainsi $\mathbb{Z}$ sera euclidien et donc principal par la proposition 1.350.

D'abord $\mathbb{Z}$ est intègre, c'est le lemme 1.346.

La condition $\alpha(b) \leqslant \alpha(ab)$ est immédiate : $|a| \leqslant |ab|$ pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$.

Soient maintenant $a, b \in \mathbb{Z}$. Nous définissons $q_0, r_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|a| = q_0|b| + r_0 \tag{1.469}$$

avec $r_0 < |b|$. Cela existe parce que $\alpha(x) = x$ est un stathme sur $\mathbb{N}$ par l'exemple 1.347.

(1) **Si $a > 0$ et $b > 0$**

Alors $a = q_0 b + r_0$ et le couple (q_0, r_0) vérifie les conditions de la définition 1.345(1).

(2) **Si $a > 0$ et $b < 0$**

Alors $a = -q_0 b + r_0$, et le couple $(-q_0, r_0)$ vérifie les conditions de la définition 1.345(1).

[131] Idéal, définition 1.316.
[132] Idéal, définition 1.348.
[133] Définition 1.348.
[134] Euclidien, définition 1.345.
[135] Principal, définition 1.348
[136] Un tel élément existe…
[137] Définition 1.349.
[138] Définition 1.345.

(3) **Si $a<0$ et $b>0$** Alors $a=-q_0b-r_0$, et le couple $(-q_0,-r_0)$ vérifie les conditions de la définition 1.345(1) parce que
$$\alpha(-r_0)=r_0<|b|=\alpha(b). \tag{1.470}$$

(4) **Si $a<0$ et $b<0$** Alors $a=q_0b-r_0$, et le couple $(q_0,-r_0)$ vérifie les conditions de la définition 1.345(1).

□

1.11 Le groupe et anneau des entiers

Certes $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe mais en ajoutant la multiplication, $(\mathbb{Z},+,\times)$ devient un anneau[139].

1.11.1 Division euclidienne

ThoDivisEuclide

Théorème-Définition 1.352 (Division euclidienne[70])**.**
Soient $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q,r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, avec $0\leqslant r<b$, tel que
$$a=bq+r. \tag{1.471}$$
*L'opération $(a,b)\mapsto(q,r)$ ainsi définie est la **division euclidienne**. Le nombre q est le **quotient** et r est le **reste** de la division de a par b.*

Démonstration. Remarquons que $r=a-bq$, et donc, une fois l'existence et l'unicité de q établie, celle de r suivra.

(1) **Unicité** Nous supposons avoir $(q,r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ tels que
$$\begin{cases} 0\leqslant r<b & \text{(1.472a)}\\ a=qb+r. & \text{(1.472b)}\end{cases}$$
Ce système implique que
$$0\leqslant a-qb<b. \tag{1.473}$$
En ajoutant qb dans les trois membres de cette inégalité,
$$qb\leqslant a<(q+1)b. \tag{1.474}$$
Cela implique que
$$q=\max\{k\in\mathbb{Z}\text{ tel que }kb\leqslant a\}. \tag{1.475}$$
Donc q est unique et la relation $a=bq+r$ implique que r est également unique.

Soit
$$E=\{q\in\mathbb{Z}|bq\leqslant a\}.$$
La partie E est non vide (parce qu'elle contient $-|a|$) et admet un majorant : l'élément $|a|$. Elle admet donc un maximum q par le lemme 1.196. Ce maximum vérifie
$$bq\leqslant a<b(q+1). \tag{1.476}$$
Cela donne $0\leqslant a-bq<b$ et le résultat, en posant $r=a-qb$.

□

Le lemme suivant est souvent pris pour la définition d'un nombre premier lorsqu'on parle de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

Lemme 1.353 ([71, 1])**.**
Dans $\mathbb{N}$, un nombre est premier si et seulement si il admet exactement deux diviseurs entiers distincts.

Démonstration. En deux parties.

[139] Définition 1.92.

(1) $\Rightarrow$ Soit un élément premier $p \in \mathbb{N}$. Il y a trois possibilités : $p = 0$, $p = 1$ et $p > 1$.

Le nombre $p = 0$ n'est pas premier parce qu'il est nul. Le nombre $p = 1$ n'est pas premier parce qu'il est inversible. Donc nous savons que si p est premier, alors $p > 1$.

Un élément $p > 1$ dans $\mathbb{N}$ a toujours au moins deux diviseurs distincts : 1 et p. Soit un diviseur k de p. Il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $p = kl$. Vu que p est premier et divise le produit kl, il divise k ou l. Disons que p divise k. De cette façon p divise k et k divise p.

Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = np$. En y substituant $p = kl$, on trouve $k = np = nkl$. En simplifiant par k, il vient

$$1 = nl, \tag{1.477}$$

ce qui prouve que $n = l = 1$ et donc que $k = p$ et donc que p n'a pas d'autres diviseurs que 1 et p.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $p \in \mathbb{N}$ ait exactement deux diviseurs entiers distincts. Nous vérifions que p vérifie les trois conditions de la définition 1.326.

(2a) $p \neq 0$ parce que 0 a nettement plus que deux diviseurs distincts.

(2b) $p \neq 1$ parce que 1 a exactement un diviseur. Donc p n'est pas inversible dans $\mathbb{N}$.

(2c) Soit p admettant exactement deux diviseurs distincts. Soit p divisant le produit ab' pour certains a et b' dans $\mathbb{N}$. Nous supposons que p ne divise pas a, et nous allons prouver que p divise b' en supposant d'abord que p ne divise pas b'.

(2c.i) **Un ensemble** Pour cela nous posons

$$E = \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } p \mid ax, p \nmid x\}. \tag{1.478}$$

Nous posons $b = \min(E)$. Nous avons pour hypothèse que E est non vide ; en particulier $0 < b$.

(2c.ii) $b < p$ On vérifie que si $p + k \in E$ alors $k \in E$. Donc b ne peut pas être plus grand que p. Vu que p lui-même n'est pas dans E, nous avons $b < p$.

(2c.iii) **Division euclidienne** Nous effectuons la division euclidienne du théorème 1.352 :

$$p = mb + r. \tag{1.479}$$

En multipliant par a, $ar = ap - mab$. Vu que ab est un multiple de p $ap - mab$ est un multiple de p. En particulier ar est divisible en p.

(2c.iv) **La contradiction** Nous avons donc $r \in E$, alors que $r < b$. Impossible.

□

PROPooWMNPooZdvOBt

Proposition 1.354 ([72]).
Dans un anneau intègre[140] *tout élément premier est irréductible*[141].

Démonstration. Soit p, un élément premier dans un anneau intègre A.

(1) p **n'est pas inversible** Cela fait partie de la définition d'un élément premier.

(2) p **n'est pas un produit d'inversibles** Soient $a, b \in A$ tels que $p = ab$. Par le point (3) de la définition 1.326, p divise soit a soit b. Supposons que p divise a. Alors il existe $x \in A$ tel que $a = px$. En remettant dans $p = ab$ nous avons :

EQooPYBGooLFHMJZ

$$p = pxb. \tag{1.480}$$

Mais l'anneau est intègre et permet donc des simplifications par tout élément non nul. La relation 1.480 donne donc

$$1 = xb, \tag{1.481}$$

ce qui signifie que b est inversible.

Un travail similaire montre que a est inversible si p divise b.

□

Exemple 1.355.
Si nous avons l'égalité $7 = ab$ dans $\mathbb{Z}$, alors soit a soit b vaut 1. Mettons $a = 1$. Dans ce cas, $b = 7$ et n'est donc pas inversible. △

[140] Si pas intègre, voir l'exemple 1.356.
[141] Toutes les définitions dans le thème 6.

Sur un anneau non intègre, la notion d'élément premier n'est pas aussi intéressante que sur un anneau intègre. Par exemple la proposition 1.354 devient fausse.

EXooEIUEooCZCPMC

Exemple 1.356.
Soit l'anneau $\mathbb{Z}^2$. L'élément $(1,0)$ est premier mais pas irréductible.

(1) $(1,0)$ **est premier** L'élément $(1,0)$ est non nul ; ça c'est pas cher. Pour qu'il soit inversible, il faudrait $\overline{(1,0)(x,y) = (1,1)}$. Entre autres, $0 \times y = 1$, ce qui est impossible. Donc il n'est pas inversible.

Supposons que $(1,0)$ divise le produit $(a,b)(c,d) = (ac,bd)$. Alors il existe (x,y) tel que $(1,0)(x,y) = (ac,bd)$. Cela signifie que $x = ac$ et $0 \times y = bd$. En particulier, soit $b = 0$ soit $d = 0$. Si $b = 0$, nous avons $(a,b) = (a,0)$ et effectivement, $(1,0)$ le divise.

(2) $(1,0)$ **n'est pas irréductible** Nous avons $(1,0) = (1,0)(1,0)$. Donc l'élément $(1,0)$ est le produit de deux éléments non inversibles.

△

1.11.2 Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$

PropSsgpZestnZ

Proposition 1.357 (liste des sous groupes de $\mathbb{Z}$)**.**
À propos de sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

(1) Une partie H du groupe $(\mathbb{Z},+)$ est un sous-groupe si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.
1TEMooOWNZooUsYRok

(2) Si H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$, il existe un unique n tel que $H = n\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $H \neq \{0\}$ un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. L'ensemble $H \cap \mathbb{N}^*$ contient un élément minimum que nous notons n. Nous avons certainement $n\mathbb{Z} \subset H$ parce que H est un groupe (donc $n+n$ et $-n$ sont dans H dès que n est dans H). Nous devons prouver que $H \subset n\mathbb{Z}$.

Si $x \in H$, par le théorème de division euclidienne 1.352, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$, uniques, tels que $x = nq + r$ et $0 \leqslant r < n$. Nous savons déjà que $nq \in H$, donc $r = x - nq \in H$. Le nombre r est donc un élément de H strictement plus petit que n. Mais nous avions décidé que n serait le plus petit élément de $H \cap \mathbb{N}^*$. Par conséquent $r = 0$ et $x = nq \in n\mathbb{Z}$.

En ce qui concerne l'unicité, supposons que $n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. Le nombre n divise m (parce que $m \in m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$) et le nombre m divise n parce que $n \in m\mathbb{Z}$. Par conséquent $n = m$. □

1.11.3 Théorème de Bézout

Une généralisation de Bézout 1.358 à plus de 2 variables et dans un anneau principal : proposition 3.59.

ThoBuNjam

Théorème 1.358 (Théorème de Bézout[142][73], thème 3)**.**
Si $\{a_i\}_{i=1,\dots,N}$ sont des entiers non nuls. Nous avons $\operatorname{pgcd}(a1,\dots,a_N) = 1$ *si et seulement si il existe $u_1,\dots,u_N$ tels que*

$$\sum_i a_i u_i = 1. \tag{1.482}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Soit $E = \{\sum_{i=1}^N a_i u_i \text{ tel que } u_i \in \mathbb{Z}\}$. Cet ensemble est non vide. Il contient par exemple a_1. Nous posons $m = \min\big(E \setminus \{0\}\big)$, et nous considérons des $v_i \in \mathbb{Z}$ tels que

$$m = \sum_j a_j v_j. \tag{1.483}$$
EQooQSJLooOGbTzx

Nous prouvons à présent que m divise tous les a_i. Nous nous fixons $i \in \{1,\dots,N\}$ et nous considérons la division euclidienne[143] $a_i = mq + r$ avec $0 \leqslant r < m$. En remplaçant dedans la valeur de m de (1.483) nous trouvons $a_i = \sum_j a_j v_j q + r$, et en isolant r :

$$r = a_i - \sum_j a_j v_j q = a_i(1 - v_i q) - \sum_{j \neq i} a_j v_j q \in E. \tag{1.484}$$

Mais comme $0 \leqslant r < m$ et $r \in E$ et $m = \min(E \setminus \{0\})$ nous avons $r = 0$, ce qui signifie que m divise a_i.

[142] Il y a une super application ici : https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/dvt/mauvais_prix.pdf.
[143] Théorème 1.164.

Donc $m = 1$ parce que 1 est le seul diviseur commun des tous les a_i. Donc $1 \in E$, ce qu'il fallait démontrer.

(2) $\Leftarrow$ Supposons qu'il existe des nombres u_i tels que $\sum_i a_i u_i = 1$. Si δ divise tous les a_i, alors il existe v_i tels que $a_i = \delta v_i$ et donc tels que

$$\sum_i a_i u_i = \sum_i \delta v_i u_i = \delta \sum_i v_i u_i, \tag{1.485}$$

ce qui montre que $\delta \mid 1$ et donc que $\delta = 1$. Nous avons démontré que 1 est le seul diviseur commun des tous les a_i.

□
CorgEMtLj

Corolaire 1.359.
Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Alors

$$p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = \mathbb{Z}; \tag{1.486}$$

en particulier, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, il existe u_x, v_x entiers tels que $u_x p + v_x q = x$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Le théorème de Bézout nous donne k et l tels que $kp + lq = 1$. Alors, $(xk)p + (xl)q = x$. □

Notons que l'application $p\mathbb{Z}+q\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ n'est évidemment pas injective : les u_x et v_x ne sont pas uniques à x fixé, car si $\alpha p + \beta q = x$, alors $(\alpha + kq)p + (\beta - kp)q = x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
CORooLINXooBlUKPG

Corolaire 1.360.
Les groupes quotients du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ sont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Démonstration. Tous les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$. En effet en vertu de la proposition 1.357, les seuls sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (en tant que groupe additif) sont les $n\mathbb{Z}$. Tous les idéaux sont donc de cette forme. De plus les $n\mathbb{Z}$ sont effectivement tous des idéaux[144] : si $a \in n\mathbb{Z}$ et si $k \in \mathbb{Z}$ alors $ak \in n\mathbb{Z}$. □
PropZpintssiprempUzn

Proposition 1.361.
Soient $n \geqslant 2$ un entier et $\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la surjection canonique. Nous noterons $\overline{a} = \phi(a)$. Alors l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donné par

$$U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \phi(P_n) = \{\overline{x} \text{ tel que } 0 \leqslant x \leqslant n \text{ tel que } \operatorname{pgcd}(x, n) = 1\}. \tag{1.487}$$

où P_n est l'ensemble $P_n = \{x \in \{0, \dots, n-1\} \text{ tel que } \operatorname{pgcd}(x, n) = 1\}$.
De plus,

$$\operatorname{Card}\big(U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\big) = \phi(n). \tag{1.488}$$

Démonstration. Soit $0 \leqslant x \leqslant n$ tel que $\operatorname{pgcd}(x, n) = 1$. Il existe donc[145] $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $ux + vn = 1$. En passant aux classes,

$$\overline{ux} = \overline{1}, \tag{1.489}$$

donc $\overline{u}$ est l'inverse de $\overline{x}$. Cela prouve que $\phi(P_n) \subset U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Nous prouvons maintenant l'inclusion inverse. Soient $\overline{x}$ et $\overline{y}$ inverses l'un de l'autre : $\overline{xy} = \overline{1}$. Il existe donc $q \in \mathbb{Z}$ tel que $xy - qn = 1$, ce qui prouve[146] que $\operatorname{pgcd}(x, n) = 1$. □

1.11.4 PGCD, PPCM

Puisque $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre, nous avons la définition 1.105 de pgcd et de ppcm.
PROPooAVRGooUfhjwF

Proposition 1.362 (PPCM et PGCD)**.**
Soient $p, q \in \mathbb{Z}^*$.

(1) Le pgcd de p et q est le plus grand diviseur commun de p et q.

(2) Le ppcm de p et q est leur plus petit multiple commun.

[144] Définition 1.316.
[145] Théorème de Bézout 1.358
[146] À nouveau avec le Théorème de Bézout.

Démonstration. Démontrons le premier point. Notons δ le pgcd de p et q. Si d est un diviseur commun de p et q, alors d divise δ. Dans $\mathbb{Z}$, $d \mid \delta$ implique $d \leqslant \delta$ (proposition 1.199). □

Lemme 1.363.
Soient $p, q \in \mathbb{Z}^*$. Les entiers $\operatorname{ppcm}(p,q)$ *et* $\operatorname{pgcd}(p,q)$ *fournissent les isomorphismes de groupes suivants :*

$$p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z} = \operatorname{ppcm}(p,q)\mathbb{Z} \tag{1.490a}$$
$$p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = \operatorname{pgcd}(p,q)\mathbb{Z}. \tag{1.490b}$$

DEFooXSPFooPumQSy

Définition 1.364.
Nous disons que deux éléments d'un anneau principal[147] *sont* ***premiers entre eux*** *si leurs diviseurs communs sont inversibles.*

Vu que $\mathbb{Z}$ est un anneau principal (proposition 1.351), la définition 1.364 d'éléments premiers entre eux s'applique.

LEMooLKLTooXUdsgB

Lemme 1.365.
Dans $\mathbb{Z}$, les nombres p et q sont premiers entre eux si et seulement si $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$.

DefZHRXooNeWIcB

Définition 1.366.
Soit un anneau A. Nous disons que les éléments $a_1, \dots, a_n$ sont Si nous avons un ensemble d'entiers a_i, nous disons qu'ils sont premiers ***dans leur ensemble*** *si*

$$\operatorname{pgcd}(a_1, \dots, a_n) = 1. \tag{1.491}$$

Les nombres 2, 4 et 7 ne sont pas premiers deux à deux (à cause de 2 et 4), mais ils sont premiers dans leur ensemble parce qu'il n'y a pas de diviseurs communs plus grand que 1, au triplet $(2, 4, 7)$.

La proposition suivante établit que si x est assez grand, alors il peut même être écrit comme une combinaison de p et q à coefficients positifs. Elle sera utilisée pour démontrer que les états apériodiques d'une chaine de Markov peuvent être atteints à tout moment (assez grand), voir la définition 38.33 et ce qui suit.

PropLAbRSE

Proposition 1.367.
Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}$ premiers entre eux. Il existe $N > 0$ tel que tout $x > N$ appartient à $a\mathbb{N} + b\mathbb{N}$.

Démonstration. Soient a et b, premiers entre eux, et $x \in \mathbb{N}$. Disons tout de suite, pour éviter les cas triviaux et pénibles, que x, a et b sont strictement positifs.

(1) **Une décomposition pour x**

On applique le théorème 1.352 de division euclidienne à x et $a+b$: il existe des entiers p_x, r_x, uniques, tels que

$$\begin{cases} x = (p_x - 1)(a+b) + r_x & (1.492a) \\ 0 \leqslant r_x < a + b. & (1.492b) \end{cases}$$

En d'autres termes, $p_x(a+b)$ est le premier multiple de $a+b$ supérieur ou égal à x. De plus, p_x est strictement positif car x l'est. Il existe alors des entiers u et v tels que

$$ua + vb = p_x(a+b) - x \tag{1.493}$$

EQooXYSZooJqxPui

par le corolaire 1.359. Ainsi, x peut s'écrire

$$x = (p_x - u)a + (p_x - v)b. \tag{1.494}$$

(2) **Des maximums**

Il s'agit maintenant de savoir si nous pouvons être assuré d'avoir $p_x > u$ et $p_x > v$ dès que x est assez grand. Pour cela, grâce au corolaire 1.359, nous considérons les nombres u_i et v_i définis par

$$u_i a + v_i b = i \tag{1.495}$$

pour $i = 1, \dots, a+b$. Nous posons $u^* = \max\{u_i\}$, $v^* = \max\{v_i\}$, et $p^* = \max\{u^*, v^*\}$. Nous posons alors $N = p^*(a+b)$, et considérons $x > N$.

[147] Anneau principal, définition 1.349.

(3) **Nouvelle décomposition pour x**

Nous voulons écrire

EQooIKNWooBKItYz

$$x = (p_x - u_k)a + (p_x - v_k)b \tag{1.496}$$

pour un certain k. Cela demande $u_k a + v_k b = ua + vb = p_x(a+b) - x$ par l'équation (1.493). Vu que $p_x(a+b) - x > 0$, les nombres u_k et v_k existent : il suffit de prendre $k = p_x(a+b) - x$.

(4) **Conclusion**

Avec tous ces choix, nous avons d'abord $x > p^*(a+b)$ et donc

$$x = (p_x - 1)(a+b) + r_x > p^*(a+b), \tag{1.497}$$

ce qui donne

$$(p_x - 1)(a+b) > p^*(a+b) - r_x > (p^* - 1)(a+b). \tag{1.498}$$

ou encore $p_x > p^*$. Nous avons finalement

$$p_x \geqslant p^* \geqslant u^* \geqslant u_k \tag{1.499}$$

et

$$p_x \geqslant p^* \geqslant v^* \geqslant v_k. \tag{1.500}$$

De ce fait, la décomposition (1.496) est celle que nous voulions.

□

1.368.
Une méthode pour obtenir les entiers naturels u et v qui permettent la décomposition $x = au + bv$ est d'abord de choisir u_0 et v_0 tels que au_0 et bv_0 soient les plus proches possibles de $x/2$, puis de décomposer le nombre (relativement petit) $x - au_0 - bv_0$ en $au_1 + bv_1$. Deux nombres u et v qui fonctionnent sont alors $u = u_0 + u_1$ et $v = v_0 + v_1$.

Exemple 1.369.
Écrivons $1000 = u \cdot 7 + v \cdot 5$ avec $u, v \in \mathbb{N}$. D'abord $72 \cdot 7 = 504$ et $100 \cdot 5 = 500$. Nous avons donc

$$1004 = 72 \cdot 7 + 100 \cdot 5. \tag{1.501}$$

Ensuite $4 = 25 - 21 = -3 \cdot 7 + 5 \cdot 5$. Au final,

$$1000 = 75 \cdot 7 + 95 \cdot 5. \tag{1.502}$$

△

1.11.5 Décomposition en facteurs premiers

LemPRuUrsD

Lemme 1.370 (Lemme de Gauss)**.**
Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que a divise bc. Si a est premier avec c, alors a divise b.

Démonstration. Puisque a est premier avec c, nous avons $\operatorname{pgcd}(a,c) = 1$ et le théorème de Bézout 1.358 nous donne donc $s, t \in \mathbb{Z}$ tels que $sa + tc = 1$. En multipliant par b, nous avons $sab + tbc = b$. Mais les deux termes du membre de gauche sont multiples de a parce que a divise bc. Par conséquent b est somme de deux multiples de a et donc est multiple de a. □

Il y a une généralisation du lemme de Gauss pour les anneaux principaux dans 3.60.

LemAXINooOeuMJZ

Lemme 1.371 (Lemme d'Euclide[74])**.**
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Si le nombre premier p divise le produit ab, alors p divise a ou b.

Démonstration. Comme p est premier, si il ne divise pas a c'est que $\operatorname{pgcd}(a,p) = 1$. Dans ce cas le lemme de Gauss 1.370 implique que p divise b. □

LEMooSRFMooHgEMwj

Lemme 1.372.
Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que a divise b et b divise a. Alors $a = b$.

LEMooFVSJooRysGAm

Lemme 1.373 ([1]).
Soient $k, n, p \in \mathbb{Z}$. Le nombre kp divise kn si et seulement si p divise n.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $kp \mid kn$. Il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $kpl = kn$. On peut simplifier par k : $pl = n$, ce qui signifie que $p \mid n$.

(2) $\Leftarrow$ Si $p \mid n$, alors il existe l tel que $lp = n$. Avec ça, $kn = klp$, et donc $kp \mid kn$.

□

Le théorème fondamental de l'arithmétique permet de décomposer des nombres en facteurs premiers.

ThoAJFJooAveRvY

Théorème 1.374 (Décomposition en facteurs premiers[75]).
Tout entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon, à l'ordre près des facteurs.

En d'autres termes, pour tout entier $n > 1$, il existe une unique suite finie unique $(p_1, k_1),\ldots(p_r, k_r)$ telle que :

(1) les p_i sont des nombres premiers tels que, si $i < j$, alors $p_i < p_j$;

(2) les k_i sont des entiers naturels non nuls ;

(3) $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}$.

Démonstration. Soit n un entier positif. Nous prouvons l'existence d'une décomposition en facteurs premiers par récurrence. Le nombre $n = 1$ est le produit d'une famille finie de nombres premiers : la famille vide[148].

Supposons que tout entier strictement inférieur à un certain entier $n > 1$ est produit de nombres premiers. Deux possibilités apparaissent pour n : il est premier ou non. Si n est premier, et donc produit d'un unique entier premier, à savoir lui-même, le résultat est vrai. Si n n'est pas premier, il se décompose sous la forme kl avec k et l strictement inférieurs à n. Dans ce cas, l'hypothèse de récurrence implique que les entiers k et l peuvent s'écrire comme produits de nombres premiers. Leur produit aussi, ce qui fournit une décomposition de n en produit de nombres premiers. Par application du principe de récurrence, tous les entiers naturels peuvent s'écrire comme produit de nombres premiers.

Nous prouvons maintenant l'unicité. Prenons deux produits de nombres premiers qui sont égaux. Prenons n'importe quel nombre premier p du premier produit. Il divise le premier produit, et, de là, aussi le second. Par le lemme d'Euclide 1.371, p doit alors diviser au moins un facteur dans le second produit. Mais les facteurs sont tous des nombres premiers eux-mêmes, donc p doit être égal à un des facteurs du second produit. Nous pouvons donc simplifier par p les deux produits. En continuant de cette manière, nous voyons que les facteurs premiers des deux produits coïncident précisément. □

LEMooDTQQooYoJABt

Lemme 1.375 ([1]).
Nous notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers dans $\mathbb{N}$. Soient des suites finies $(a_p)_{p\in\mathcal{P}}$ et $(b_p)_{p\in\mathcal{P}}$. Nous posons

$$a = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{a_p} \quad et \quad b = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{b_p}. \tag{1.503}$$

Alors $a \mid b$ si et seulement si $a_p \leqslant b_p$ pour tout p.

Démonstration. Dire que $a \mid b$ signifie qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $as = b$; le théorème 1.374 nous permet de décomposer s en $s = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{s_p}$. Puisque le produit dans $\mathbb{N}$ est commutatif et associatif,

$$b = as = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{s_p+a_p}. \tag{1.504}$$

Par unicité de la décomposition de b (toujours le théorème 1.374), nous en déduisons que $b_p = s_p + a_p \geqslant a_p$.

Dans l'autre sens, l'hypothèse $a_p \leqslant b_p$ implique l'existence de $s_p \geqslant 0$ tels que $b_p = a_p + s_p$. En posant $s = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{s_p}$, nous avons

$$as = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{s_p+a_p} = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{b_p} = b. \tag{1.505}$$

Donc $a \mid b$. □

[148] Voir 1.312.

LEMooGLZHooUcRNgu

Lemme 1.376.
Soient un nombre premier q ainsi que $a \in \mathbb{Z}$. Soit un entier $n \geqslant 1$. Le nombre q divise a si et seulement si il divise a^n.

Démonstration. Nous numérotons les nombres premiers p_i pour que p_1 soit q. La décomposition en nombre premiers du théorème 1.374 nous dit que

$$a = q^{a_1} \prod_{i \neq 1} p_i^{a_i} \tag{1.506}$$

et

$$a^n = q^{na_1} \prod_{i \neq 1} p_i^{na_i} \tag{1.507}$$

Nous avons équivalence entre les énoncés suivants :

- q divise a
- $a_1 \neq 0$
- $na_1 \neq 0$ (parce que $n \neq 0$)
- q divise a^n.

□

CORooWBSQooQOEmaC

Corolaire 1.377.
Si $n \in \mathbb{N}$ n'est pas une puissance d'un nombre premier, alors il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $n = ab$.

Démonstration. Si n n'est pas une puissance d'un nombre premier, alors le théorème 1.374 de décomposition en nombres premiers dit que

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i} \tag{1.508}$$

avec au moins $r = 2$, et les k_i non nuls. En prenant $a = p_1^{k_1}$ et $b = \prod_{i=2}^{r} p_i^{k_i}$ nous avons bien $n = ab$. Montrons que a et b n'ont pas de diviseurs communs. Soit, par l'absurde, q un diviseur premier commun à a et b.

Vu que q divise $p_1^{k_1}$, le nombre q divise p_1 par le lemme 1.376. Étant donné que q divise $\prod_{i=2}^{r} p_i^{k_i}$, il divise au moins un des facteurs (lemme d'Euclide 1.371). Disons que q divise $p_i^{k_i}$. Dans ce cas q divise p_i.

Donc q divise p_i et p_1 et donc $q = 1$ parce que p_i et p_1 sont des nombres premiers distincts. □

1.11.6 Double comptage

Lorsqu'on veut compter le nombre d'éléments d'un ensemble, il arrive souvent d'entendre « nous partitionnons cet ensemble en telles parties, mais ce faisant nous avons compté chaque élément 3 fois. Donc on doit diviser par 3 ». Cela arrive très souvent en combinatoire et dans les problèmes de dénombrement. La proposition suivante est ce qui se cache derrière ce raisonnement.

PROPooURPFooYSdyKW

Proposition 1.378 ([1]).
Soit un ensemble $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Nous considérons des parties $A_j \subset A$ $(j = 1, \dots, s)$ telles que

(1) $\bigcup_{j=1}^{s} A_j = A$,

(2) Pour chaque $a \in A$, nous avons $\text{Card}\{j \text{ tel que } a \in A_j\} = k$, c'est-à-dire que chaque élément de A se trouve dans exactement k des parties A_j.

Alors

$$\text{Card}(A) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{s} \text{Card}(A_j). \tag{1.509}$$

Démonstration. Nous allons mettre les éléments de A un par un dans un ensemble E et les retirer au fur et à mesure des différents A_j. Nous commençons par poser

$$\begin{cases} E_0 = \varnothing & \text{(1.510a)} \\ A_j^{(0)} = A_j. & \text{(1.510b)} \end{cases}$$

Ensuite, pour chaque $i = 1, \dots, n$ nous posons

$$\begin{cases} E_i = \{a_1, \dots, a_i\} & (1.511a) \\ A_j^{(i)} = A_j^{(i-1)} \setminus \{a_i\}. & (1.511b) \end{cases}$$

Première remarque facile : $\text{Card}(E_i) = i$.

Ensuite fixons nous un i pour voir comment évoluent les cardinaux des $A_j^{(i)}$ avec i. Nous posons $S = \{j = 1, \dots, s \text{ tel que } a_i \in A_j\}$. Par hypothèse $\text{Card}(S) = k$. Le lemme 1.307 nous permet de couper la somme sur $j = 1, \dots, n$ en une somme sur $j \in S$ et une sur $j \neq S$:

$$\sum_{j=1}^{n} \text{Card}(A_j^{(i)}) = \sum_{j\in S} \text{Card}\left(A_j^{(i-1)} \setminus \{a_i\}\right) + \sum_{j\notin S} \text{Card}\left(A_j^{(i-1)} \setminus \{a_i\}\right) \quad (1.512a)$$

$$= \sum_{j\in S} \Big(\text{Card}\left(A_j^{(i-1)}\right) - 1 \Big) + \sum_{j\notin S} \text{Card}(A_j^{(i-1)}) \qquad \text{prop. 1.211} \quad (1.512b)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \text{Card}(A_j^{(i-1)}) - k. \quad (1.512c)$$

Avec une récurrence sur i nous trouvons cette intéressante formule :

$$\sum_{j=1}^{s} \text{Card}(A_j^{(i)}) = \sum_{j=1}^{s} \text{Card}(A_j) - ki. \quad (1.513)$$

Nous évaluons cela en $i = n$:

$$\sum_{j=1}^{s} \text{Card}(A_j^{(n)}) = \sum_{j=1}^{s} \text{Card}(A_j) - kn. \quad (1.514)$$

EQooGWBXooDqXwTW

Mais $A_j^{(n)} = A_j \setminus \{a_1, \dots, a_n\} = \varnothing$. Donc le membre de gauche de (1.514) est nul. Donc

$$n = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{s} \text{Card}(A_j), \quad (1.515)$$

c'est-à-dire ce que nous voulions. □

1.11.7 Binôme de Newton

DEFooHXNFooOBKgqD

Définition 1.379 (Coefficient binomial)**.**
Soient des entiers n et k avec $k \leqslant n$. Nous définissons ***coefficients binomiaux*** *par*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.516)$$

EQooJJYGooTvmSAt

Lorsque α est un multiindice, la factorielle $\alpha!$ et les coefficients binomiaux sont définis en 3.36.

LEMooHWMNooIINsxu

Lemme 1.380.
Un formule pour les coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad (1.517)$$

Démonstration. Simple mise au même dénominateur :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!}. \quad (1.518)$$

□

LEMooUFXEooUaFGjD

Lemme 1.381 (Formule d'itération de Pascal[76])**.**
Nous avons

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}. \quad (1.519)$$

LEMooUTDTooXAmvdF

Lemme 1.382 ([1]).
Deux énoncés de dénombrement.

(1) Soit un ensemble E de cardinal n. Nous posons

$$B_k = \big\{\text{parties de cardinal } k \text{ dans } E\big\}. \tag{1.520}$$

(2) Soit $A_k = \{I = (i_1, \dots, i_k) \in \{0, \dots, n\}^k$ tel que $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n\}$.

(3) Soit $C_k = \{s \in \{0,1\}^n$ tel que $\sum_i s_i = k\}$.

Alors

$$\operatorname{Card}(A_k) = \operatorname{Card}(B_k) = \operatorname{Card}(C_k) = \binom{n}{k}. \tag{1.521}$$

Démonstration. Nous faisons en détail la démonstration pour B_k, en utilisant la proposition 1.378. Nous fixons n et nous faisons une récurrence sur k.

(1) **Le partitionnement de B_{k+1}** D'abord nous posons

$$\begin{aligned} f\colon B_k &\to \mathcal{P}(B_{k+1}) \\ A &\mapsto \{A \cup \{a\} \text{ tel que } a \in E \setminus A\}. \end{aligned} \tag{1.522}$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des parties. Notez que

$$B_{k+1} = \bigcup_{A \in B_k} f(A). \tag{1.523}$$

(2) **Combien de multi-compatage (1)** Prouvons que

$$\{A \in B_k \text{ tel que } S \in f(A)\} = \{S \setminus \{a\} \text{ tel que } q \in S\}. \tag{1.524}$$

Pour prouver la première inclusion, nous considérons $A \in B_k$ tel que $S \in f(A)$. Alors $S = A \cup \{a\}$ pour un certain $a \in E \setminus A$ et donc $S \setminus \{a\} = A$.

Pour l'inclusion dans l'autre sens, nous considérons $a \in S$. Alors $S \setminus \{a\} \in B_k$, ce qui fait que $a \in E \setminus \big(S \setminus \{a\}\big)$ et donc $S \in f\big(S \setminus \{a\}\big)$.

(3) **Combien de multi-compatage (2)** Nous avons donc

$$\operatorname{Card}\big(\{A \in B_k \text{ tel que } S \in f(A)\}\big) = \operatorname{Card}\{S \setminus \{a\} \text{ tel que } a \in S\} = \operatorname{Card}(S) = k+1 \tag{1.525}$$

(4) **Le cardinal recherché** La proposition 1.378 nous donne alors

$$\operatorname{Card}(B_{k+1}) = \frac{1}{k+1} \sum_{A \in B_k} \operatorname{Card}\big(f(A)\big). \tag{1.526}$$

Mais $\operatorname{Card}\big(f(A)\big) = n - k$ et par hypothèse de récurrence $\operatorname{Card}(B_k) = \binom{n}{k}$ Donc

$$\operatorname{Card}(B_{k+1}) = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1} \tag{1.527a}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)}{k+1} \tag{1.527b}$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \tag{1.527c}$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!\big(n-(k+1)\big)!} \tag{1.527d}$$

$$= \binom{n}{k+1}. \tag{1.527e}$$

En ce qui concerne la démonstration pour A_k, c'est du même tonneau. Si $I \in A_k$, alors pour chaque $l \in \{0, \dots, n\} \setminus I$ nous avons un élément de A_{k+1} en l'insérant « au bon endroit » dans I. Je te laisse te débrouiller pour construire la fonction f correspondante et pour vérifier que tout va bien[149].

Maintenant nous montrons que $\text{Card}(C_k) = \binom{n}{k}$ en donnant une bijection entre C_k et B_k. Il existe une bijection

$$\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to E \tag{1.528}$$

et nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon C_k &\to \mathcal{P}(E) \\ s &\mapsto \{\sigma(i) \text{ tel que } s_i = 1\}. \end{aligned} \tag{1.529}$$

Nous allons voir que $\varphi(C_k) \subset B_k$ et que $\varphi\colon C_k \to B_k$ est une bijection.

(1) $\varphi(C_k) \subset B_k$ Soit $s \in C_k$. Vu que σ est une bijections, $\text{Card}(U) = \text{Card}\big(\sigma^{-1}(U)\big)$ pour tout $U \subset E$. En particulier

$$\text{Card}\big(\{\sigma(i) \text{ tel que } s_i = 1\}\big) = \text{Card}\big(\{i \text{ tel que } s_i = 1\}\big). \tag{1.530}$$

EQooXBIMooDaFHMZ

Nous posons $S = \{i \text{ tel que } s_i = 1\}$ et nous calculons

SUBEQooIQKMooUfRNcK

$$\begin{aligned} k = \sum_{i=1}^{n} s_i &= \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} s_i && \text{not. (1.405)} && (1.531a)\\ &= \sum_{i \in S} s_i + \sum_{i \notin S} s_i && \text{lem. 1.307} && (1.531b)\\ &= \sum_{i \in S} 1 && && (1.531c)\\ &= \text{Card}(S) && \text{lem. 1.210} && (1.531d) \end{aligned}$$

En remettant avec (1.530) nous avons prouvé que

$$k = \text{Card}(S) = \text{Card}\big(\{\sigma(i) \text{ tel que } s_i = 1\}\big) = \text{Card}\big(\varphi(s)\big) \tag{1.532}$$

(2) **φ est injective** Si $\varphi(s) =^v p(t)$ alors

$$\{\sigma(i) \text{ tel que } s_i = 1\} = \{\sigma(i) \text{ tel que } t_i = 1\}, \tag{1.533}$$

et en prenant σ^{-1} des deux côtés,

$$\{i \text{ tel que } s_i = 1\} = \{i \text{ tel que } t_i = 1\}, \tag{1.534}$$

c'est-à-dire $s = t$.

(3) **φ est surjective** Soit $A \in B_k$. Nous considérons $s\colon \{1, \dots, n\} \to \{0, 1\}$ donnée par

$$s(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.535}$$

EQooOWYDooOAwqTa

(3a) $\varphi(s) = A$ Nous devons prouver que $\{\sigma(i) \text{ tel que } s_i = 1\} = A$. En deux inclusions.
D'abord soit $x \in \{\sigma(i) \text{ tel que } s_i = 1\}$. Alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x = \sigma(i)$ et $s_i = 1$. Mais $s_i = 1$ implique $\sigma(i) \in A$. Donc $x \in A$.
Dans l'autre sens, soit $a \in A$. Alors en prenant $i = \sigma^{-1}(a)$, nous avons $\sigma(i) = a \in A$ et donc $s_i = 1$. Donc $a \in \{\sigma(j) \text{ tel que } s_j = 1\}$.

(3b) $s \in C_k$ Nous devons voir que pour l'application s définie en (1.535), $\sum_{i=1}^{n} s_i = k$. Posons $S = \sigma^{-1}(A)$. Vu que σ est une bijection, $\text{Card}(S) = \text{Card}(A) = k$. Nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i \in S} s_i + \sum_{i \notin S} s_i. \tag{1.536}$$

EQooQHGEooEDYEna

Mais si $i \in \sigma^{-1}(A)$ alors $s_i = 1$ et si $i \notin \sigma^{-1}(A)$ alors $s_i = 0$. Bref, la somme (1.536) vaut

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i \in S} 1 + 0 = \text{Card}\big(\sigma^{-1}(A)\big) = \text{Card}(A) = k. \tag{1.537}$$

[149] Moi j'ai pas vérifié ni même essayé. Donc écrivez-moi si ça bloque réellement quelque part.

□

PROPooRBMVooIGkctj

Proposition 1.383 ([77]).
Soient $n, k \in \mathbb{N}$. Nous considérons

$$\Lambda_k^{(n)} = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k\}. \tag{1.538}$$

EQooEHSRooUnhFsl

Alors

$$\text{Card}(\Lambda_k^{(n)}) = \binom{n+k-1}{n-1}. \tag{1.539}$$

Démonstration. Nous nommons $\Lambda_{k,i}$ la partie de Λ_k telle que $\alpha_n = i$, c'est à dire

$$\Lambda_{k,i}^{(n)} = \{(\beta, i) \text{ tel que } \beta \in \Lambda_{k-1}^{(n-1)}\}. \tag{1.540}$$

Vu que tous les éléments de $\Lambda_k^{(n)}$ ont une dernière composante entre 0 et k, nous avons

$$\text{Card}(\Lambda_k^{(n)}) = \sum_{i=0}^{k} \text{Card}(\Lambda_{k-i}^{(n-1)}). \tag{1.541}$$

Voilà déjà une belle relation de récurrence.

Nous prouvons que la relation (1.538) tient pour tout k par récurrence sur n en partant de $n = 1$. Pour $n = 1$ nous avons $\text{Card}(\Lambda_k^{(1)}) = 1$ pour tout k et en même temps,

$$\binom{k}{0} = \frac{k!}{0!(k!)} = 1. \tag{1.542}$$

Ok pour $n = 1$. Ensuite nous supposons avoir un n tel que (1.538) est correcte pour tout k. Et nous calculons

$$\begin{aligned}
\text{Card}(\Lambda_k^{(n+1)}) &= \sum_{i=0}^{k} \text{Card}(\Lambda_{k-i}^{(n)}) && \text{(1.543a)}\\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n+(k-i)-1}{n-1} && \text{(1.543b)}\\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{n-1+j}{n-1} && \text{(1.543c)}\\
&= \sum_{l=n-1}^{n-1+k} \binom{l}{n-1} && \text{(1.543d)}\\
&= \binom{n+k}{n} && \text{prop. 1.381.} \quad \text{(1.543e)}
\end{aligned}$$

□

1.11.8 Divisibilité des coefficients binomiaux

LEMooYBOIooEtVfDQ

Lemme 1.384 (Formule du pion[78]).
Soient n et k deux nombres entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Nous avons

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}. \tag{1.544}$$

EQooDNBYooZfJEAe

PROPooVPOYooNNugWU

Proposition 1.385 ([79, 80]).
Un entier $n \geqslant 2$ est premier si et seulement si il divise $\binom{n}{k}$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que n est un nombre premier. La formule du pion (1.544) nous dit que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}. \tag{1.545}$$

Donc n divise le produit $k\binom{n}{k}$; vu que n est premier, le lemme d'Euclide 1.371 dit qu'il divise un des deux facteurs. Le nombre n ne peut pas diviser k parce que $k < n$. Donc il divise l'autre. C'est-à-dire que n divise $\binom{n}{k}$.

(2) $\Leftarrow$ Nous allons à la contraposée : nous supposons que n n'est pas premier, et nous allons montrer qu'il y a (au moins) un des $\binom{n}{k}$ que n ne divise pas.

Posons $n = lp$ où p est premier. Nous montrons que n ne divise pas $\binom{n}{p}$. Pour cela nous utilisons encore la formule du pion :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = l\frac{(n-1)\dots(n-p+1)}{(p-1)!}. \tag{1.546}$$

Le lemme 1.373 dit que le tout est divisible par lp si et seulement si

$$\frac{(n-1)\dots(n-p+1)}{(p-1)!} \tag{1.547}$$

EQooIHXGooIQorMC

est divisible par p. Vu que p divise n, il ne divise aucun des nombres $n-1$,...,$n-p+1$. Et comme p est premier, il ne peut pas diviser le produit sans diviser aucun des facteurs. Et vlan, p ne divise pas (1.547).

□

1.11.9 Coefficients binomiaux et polynômes

NORMooROXXooXOybXN

1.386.
Une convention d'écriture. Si A est un anneau, et si $\lambda \in \mathbb{N}$ alors nous notons

$$\lambda a = \sum_{i=1}^{\lambda} a. \tag{1.548}$$

Et nous posons également $0a = 0$. À gauche : le 0 de $\mathbb{N}$ et à droite celui de A.

Si $\lambda \in \mathbb{Z}$, alors lorsque $\lambda < 0$ nous posons $\lambda a = -(-\lambda a)$

PropBinomFExOiL

Proposition 1.387 (Formule binomiale[81])**.**
Soit un anneau commutatif A. Pour tout $x, y \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k \tag{1.549}$$

EqNewtonB

où les coefficients binomiaux sont donnés dans le lemme 1.382, et où nous utilisons les conventions d'écriture de 1.386.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. La vérification pour $n = 0$ et $n = 1$ se fait aisément pour peu que l'on se rappelle que $x^0 = 1$ et que $0! = 1$, ce qui donne entre autres $\binom{0}{0} = 1$.

Supposons que la formule (1.549) soit vraie pour $n \geqslant 1$, et prouvons la pour $n+1$. Nous avons

EqBinTrav

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \tag{1.550a}$$

SUBEQooBEUCooHSBtug

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \tag{1.550b}$$

SUBEQooRURMooGVIbbI

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + y^{n+1}. \tag{1.550c}$$

Notez le passage de (1.550a) à (1.550b) qui demande la commutativité de la multiplication. La formule binomiale ne se généralise pas de façon directe à un anneau non commutatif.

La seconde grande somme peut être transformée en posant $i = k+1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}x^{n-(i-1)}y^{i-1+1}, \tag{1.551}$$

dans lequel nous pouvons immédiatement renommer i par k. En remplaçant dans la dernière expression de (1.550), nous trouvons

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n-k+1} y^k. \tag{1.552}$$

La thèse découle maintenant de la formule du lemme 1.380. □

LEMooLPCXooYIzJsD

Lemme 1.388 ([1]).
Si $n \geqslant k$ nous avons

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \leqslant \frac{n^{k-1}}{k!}. \tag{1.553}$$

Démonstration. Nous décomposons le produit définissant $n!$ en les facteurs entre 1 et $n-k$ et ceux entre $n-k+1$ et n :

$$n! = (n-k)! \prod_{i=n-k+1}^{n} i \leqslant n^{k-1}(n-k)!. \tag{1.554}$$

Donc

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \leqslant \frac{n^{k-1}}{k!}. \tag{1.555}$$

□

Tant que nous sommes à démontrer des égalités, en voici une.

LEMooLPOQooICJYdV

Lemme 1.389 ([82]).
Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$a^n + (-1)^{n-1} b^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k. \tag{1.556}$$

Démonstration. C'est un simple calcul :

$$(a+b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-k-1} b^{k+1} \tag{1.557a}$$

$$= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k a^{n-k-1} b^{k+1} + (-1)^{n-1} b^n \tag{1.557b}$$

SUBEQooLUCIBooKsuEbh

$$= a^n + (-1)^{n-1} b^n \tag{1.557c}$$

SUBEQooLTIHooZPMwVF

Justifications.

- Pour (1.557b). Dans la première somme, nous avons séparé le terme $k = 0$ et dans la seconde nous avons séparé le terme $k = n-1$
- Pour (1.557c). Dans la seconde somme, décaler les termes pour sommer de 1 à $n-1$ et remarquer que ce qu'on obtient annule la première somme.

□

1.12 Idéal dans un anneau

La définition d'un idéal dans un anneau est la définition 1.316.

DefTMNooKXHUd

Définition 1.390 ([83]).
*Un **corps** est un anneau*[150] *$(A, +, \times)$ dans lequel tout élément non nul est inversible pour l'opération $\times$ (pour l'opération $+$, tous les éléments sont inversibles parce que $(A, +)$ est un groupe).*

1.391.
Dans le Frido, nous ne parlons que de corps commutatifs ; nous ne le répéterons pas toujours.

[150] Définition 1.92.

1.392.
Pour savoir ce qu'est un « *ring* » ou « *field* » en anglais, voir -1.3.

DefAJVTPxb

Définition 1.393.
Un sous-ensemble $B \subset A$ d'un anneau est un ***sous anneau*** *si*

(1) $1 \in B$

(2) B *est un sous-groupe pour l'addition*

(3) B *est stable pour la multiplication.*

Remarque 1.394.
Un idéal n'est pas toujours un anneau parce que l'identité pourrait manquer. Un idéal qui contient l'identité est l'anneau complet.

LEMooQAYSooCYJXkC

Lemme 1.395.
La partie $2\mathbb{Z}$ est un idéal[151] *de $\mathbb{Z}$. On peut aussi le noter (2).*

PROPooPZGFooEbSBXD

Proposition 1.396 ([84] Premier théorème d'isomorphisme)**.**
Soit des anneaux A et B ainsi qu'un idéal bilatère[152] *I. Nous considérons la projection canonique $\pi : A \to A/I$.*

Soit un morphisme d'anneaux[153] *$f : A \to B$ vérifiant $f(I) = \{0\}$. Alors il existe un unique morphisme $\tilde{f} : A/I \to B$ tel que $\tilde{f} \circ \pi = f$.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow_{\tilde{f}} & \\ A/I & & \end{array} \tag{1.558}$$

Démonstration. Soient $a, b \in A$ tels que $\pi(a) = \pi(b)$. Alors $a - b \in I$ et donc $f(a - b) = 0$. Vu que f est un morphisme nous en déduisons que $f(a) = f(b)$. La proposition 1.53 dit qu'il existe alors une unique application $\tilde{f} : A/I \to B$ telle que

$$\tilde{f}\big(\pi(a)\big) = f(a) \tag{1.559}$$

pour tout $a \in A$.

Nous devons prouver que cette application est un morphisme d'anneaux. Le neutre de A/I est la classe $[1]$ et nous avons $\tilde{f}([1]) = 1$. En ce qui concerne la somme, soient $\alpha, \beta \in A/I$. Si $a \in \alpha$ et $b \in \beta$ nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\alpha + \beta) &= \tilde{f}([a + b]) && \text{(1.560a)}\\ &= f(a + b) && \text{(1.560b)}\\ &= f(a) + f(b) && \text{(1.560c)}\\ &= \tilde{f}([a]) + \tilde{f}([b]) && \text{(1.560d)}\\ &= \tilde{f}(\alpha) + \tilde{f}(\beta). && \text{(1.560e)} \end{aligned}$$

Pour la multiplication c'est le même genre de vérifications. □

PROPooJALPooHFIObB

Proposition 1.397 (Premier théorème d'isomorphisme pour les anneaux)**.**
Soient A et B des anneaux et un morphisme $f : A \to B$. Nous considérons l'injection canonique $j : f(A) \to B$ et la surjection canonique $\phi : A \to A/\ker f$. Alors il existe un unique isomorphisme

$$\tilde{f} : A/\ker f \to f(A) \tag{1.561}$$

tel que $f = j \circ \tilde{f} \circ \phi$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ A/\ker f & \xrightarrow[\tilde{f}]{} & f(A) \subset B \end{array} \tag{1.562}$$

[151] Idéal, définition 1.316.
[152] Définition 1.316.
[153] Morphisme d'anneaux, définition 1.98.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer la proposition 1.396 au cas particulier $I = \ker(f)$. Vérifions que $\tilde{f}$ est alors bien injective. Supposons que $\alpha, \beta \in A/\ker(f)$ vérifient $\tilde{f}(\alpha) = \tilde{f}(\beta)$. Soient $a \in \alpha$ et $b \in \beta$. Nous avons

$$f(a) = \tilde{f}(\alpha) = \tilde{f}(\beta) = f(b). \tag{1.563}$$

Donc $f(a-b) = 0$, ce qui signifie $a - b \in \ker(f)$ et donc $\alpha = \beta$. □

PropIJJIdsousphi

Proposition 1.398.
Soient I un idéal de A et la projection canonique

$$\phi\colon A \to A/I. \tag{1.564}$$

C'est une bijection entre les idéaux de A contenant I et les idéaux de A/I.

Dit de façon imagée :

$$\{\text{idéaux de } A \text{ contenant } I\} \simeq \{\text{idéaux de } A/I\}. \tag{1.565}$$

EqKbrizu

Démonstration. Si $I \subset J$ et si J est un idéal de A, alors $\phi(J)$ est un idéal dans A/I. En effet un élément de $\phi(J)$ est de la forme $\phi(j)$ et un élément de A/I est de la forme $\phi(i)$. Leur produit vaut

$$\phi(i)\phi(j) = \phi(ij) \in \phi(J). \tag{1.566}$$

Soit maintenant K un idéal dans A/I et soit $J = \phi^{-1}(K)$. Étant donné qu'un idéal doit contenir 0 (parce qu'un idéal est un groupe pour l'addition), $[0] \in K$ et par conséquent $I \subset \phi^{-1}(K)$. □

PROPooUOCVooGZGpMd

Proposition 1.399 ([1])**.**
Si A est un anneau, nous avons les équivalences

ITEMooLAAVooXhTcMe

(1) A est un corps[154]*.*

ITEMooDGZIooRopYGx

(2) A est non nul et ses seuls[155] *idéaux à gauche sont $\{0\}$ et A.*

ITEMooLPWHooDJpTbR

(3) A est non nul et ses seuls idéaux à droite sont $\{0\}$ et A.

Démonstration. Nous allons montrer que le point (1) est équivalent aux deux autres.

(1) **(1) implique (2)** Si I est un idéal à gauche différent de $\{0\}$, alors il contient un certain $a \neq 0$. Puisque A est un corps, il contient un inverse a^{-1}, et comme I est un idéal, $a^{-1}I \subset I$. En particulier $a^{-1}a \in I$. Donc $1 \in I$ et $I = A$.

(2) **(2) implique (1)** Supposons que les seuls idéaux de A soient $\{0\}$ et A. Soit $a \in A$. Si a est non nul, alors aA est un idéal de a. Vu qu'il contient $a \neq 0$, nous avons $aA = A$ (par hypothèse, un idéal qui n'est pas $\{1\}$ est A). En particulier, $1 \in aA$, c'est-à-dire qu'il existe $b \in A$ tel que $ab = 1$. L'élément a est donc inversible.

(3) **(1) implique (3)** Comme pour (1) implique (2).

(4) **(3) implique (1)** Comme pour (2) implique (1).

Notez que je n'ai pas vérifié les deux derniers points. Donc vous devriez le vérifier et m'écrire si il y a un problème. □

DEFIdealMax

Définition 1.400 ([85])**.**
*Soit un anneau A. Un idéal $I \neq A$ est dit **idéal maximal** si il n'existe pas d'idéal $J \neq A$ contenant strictement I.*

PROPooSHHWooCyZPPw

Proposition 1.401 (Thème 18)**.**
Un idéal I dans un anneau A est maximum si et seulement si A/I est un corps.

Démonstration. Soit un idéal maximum $I \subset A$. Alors les idéaux contenant I sont A et I. L'application ϕ de la proposition 1.398 est une bijection, donc l'ensemble des idéaux de A/I ne contient que deux éléments. Les seuls idéaux de A/I sont donc $\{0\}$ et A/I ; donc A/I est un corps par la proposition 1.399.

Dans l'autre sens, c'est la même chose : si A/I est un corps, il possède exactement deux idéaux, donc A ne contient que deux idéaux contenant I. Donc I est un idéal maximum. □

[154] Définition 1.390.
[155] Je vous laisse vous poser de grandes questions sur le fait que le vide est un idéal ou non.

THOooFWYLooOofaPa

Théorème 1.402 (Théorème de Krull[86])**.**
Pour tout idéal propre I d'un anneau commutatif A, il existe au moins un idéal maximal de A contenant I.

DEFooAQSZooVhvQWv

Définition 1.403.
*Nous disons qu'un idéal I dans A est **premier** si I est strictement inclus dans A et si pour tout $a, b \in A$ tels que $ab \in I$ nous avons $a \in I$ ou $b \in I$.*

LEMooYRPBooYxXXsi

Lemme 1.404.
L'idéal nul (réduit à $\{0\}$) est premier si et seulement si A est intègre[156]*.*

Démonstration. En deux sens.

(1) **Si $\{0\}$ est premier** Alors $A \neq \{0\}$ parce que $I = \{0\}$ est propre (définition d'idéal premier).

De plus, si $ab = 0$, alors $ab \in I$ qui est un idéal premier. Donc soit a soit b est dans I, c'est-à-dire que soit a soit b est nul. Donc A est intègre.

(2) **Si A est intègre** Alors $A \neq \{0\}$ et l'idéal $I = \{0\}$ est strictement inclus dans A. Si $ab \in I$, alors $ab = 0$ et comme A est intègre, soit a soit b est nul, c'est-à-dire appartient à I.

□

PROPooRUQKooIfbnQX

Proposition 1.405 ([85])**.**
Soit un anneau commutatif[157] *et un idéal I dans A.*

ITEMooUGBTooOGrnWl

(1) I est un idéal premier[158] *si et seulement si A/I est un anneau intègre.*

ITEMooGLXSooUjINqR

(2) I est un idéal maximal[159] *si et seulement si A/I est un corps.*

ITEMooTFFQooOUajFw

(3) Tout idéal maximal propre est premier.

Démonstration. En plein d'étapes.

(1) **(1), $\Rightarrow$** Évacuons le cas trivial pour être sûr. Si $I = \{0\}$ alors A est intègre par le lemme 1.404. Donc $A/I = A/\{0\} = A$ est intègre également.

Soient $a, b \in A$ tels que $[a][b] = [0]$. Donc $[ab] = [0]$, c'est-à-dire $ab \in I$. Puisque I est un idéal premier nous avons $a \in I$ ou $b \in I$, c'est-à-dire $[a] = 0$ ou $[b] = 0$; nous en déduisons que A/I est un anneau intègre.

(2) **(1), $\Leftarrow$**

Soit $ab \in I$. Alors $[ab] = 0$, ce qui signifie que $[a][b] = 0$ donc que $[a] = 0$ ou que $[b] = 0$ parce que A/I est intègre. Mais la condition $[a] = 0$ signifie $a \in I$, et $[b] = 0$ signifie $b \in I$. Nous avons donc prouvé que soit a soit b est dans I, c'est-à-dire que I est premier.

(3) **(2), $\Rightarrow$**

Nous devons montrer que tout élément non nul de A/I est inversible. Un élément non nul de A/I est $[x]$ avec $x \in A \setminus I$.

Nous considérons $J = Ax + I$, qui est un idéal parce que pour tout $a \in A$, $aAx + aI \in Ax + I$. Mais comme I est maximal, $J = I$ ou $J = A$.

Si $J = I$, nous aurions que pour tout $a \in A$ et pour tout $i \in I$, $ax + i \in I$. En particulier pour $a = 1$ et $i = 0$ nous aurions $x \in I$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur x.

Donc $J = A$. En particulier, $1 \in J$, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ et $i \in I$ tels que $ax + i = 1$. En passant aux classes, $[ax] = 1$, c'est-à-dire $[a][x] = 1$ qui signifie que $[a]$ est un inverse de $[x]$ dans A/I.

Nous avons prouvé que A/I est un corps.

(4) **(2), $\Leftarrow$** Si $x \in A \setminus I$, il faut prouver que tout idéal contenant I et x est A.

[156] Définition 1.335 d'anneau intègre.
[157] Tous les anneaux du Frido sont commutatifs
[158] Idéal premier, définition 1.403.
[159] Idéal maximal, définition 1.400.

Un idéal contenant I et x doit contenir l'idéal $J = Ax + I$. Comme $x \notin I$, nous avons $[x] \neq 0$ dans A/I. Donc $[x]$ est inversible et il existe $a \in A$ tel que $[ax] = [1]$. C'est-à-dire que $ax - 1 \in I$. Nous avons alors

$$1 = ax + \underbrace{(1 - ax)}_{\in I}. \tag{1.567}$$

C'est-à-dire que $1 \in Ax + I$ et donc $Ax + I = A$.

Enfin nous prouvons que tout idéal maximal propre est premier.

Si I est maximal, A/I est un corps par le point (2), et vu que I est propre, le corps A/I n'est pas réduit à $\{0\}$. Donc le lemme 1.336 dit que A/I est un anneau intègre. Le point (1) dit alors que I est un idéal premier. □

Remarque 1.406.
Puisqu'un corps peut être réduit à $\{0\}$, dans (2), l'idéal peut être A. Mais pas dans (3), parce qu'un idéal premier est propre, ça fait partie de la définition 1.403.

PROPooHABIooBZZQMj

Proposition 1.407 ([87]).
Si A est un anneau commutatif intègre, alors un idéal I dans A est premier si et seulement si A/I est intègre.

Démonstration. Supposons que I soit un idéal premier. Si $[a], [b] \in A/I$ sont tels que $[a][b] = 0$, alors $[ab] = 0$, ce qui signifie que $ab \in I$. Mais alors, puisque I est premier, soit a soit b est dans I. Cela signifie que soit $[a]$ soit $[b]$ est nul dans A/I. Cela prouve que A/I est un anneau intègre.

Dans l'autre sens, nous supposons que A/I est intègre. Cela implique immédiatement que $I \neq A$ parce que A/A n'est pas un anneau intègre (tout le monde est évidemment diviseur de zéro).

Soient donc $a, b \in A$ tels que $ab \in I$. Alors $[a][b] = [ab] = 0$ dans A/I, mais comme A/I est intègre, cela implique que soit $[a]$ soit $[b]$ est nul. Autrement dit, soit a soit b est dans I. □

PROPooSGLNooBYKNyo

Proposition 1.408.
Dans un idéal principal, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) *L'élément p est premier.*

(2) *L'élément p est irréductible.*

(3) *L'idéal pA est un idéal maximal.*

1.13 Anneau intègre

LEMooZZSAooUnbSXW

Lemme 1.409.
Un corps[160] *est un anneau intègre.*

Démonstration. En effet, soient un corps $\mathbb{K}$ et deux éléments $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $xy = 0$. Si y est inversible, alors nous pouvons multiplier par y^{-1} pour trouver $x = 0$. Cela prouve que $\mathbb{K}$ est un anneau intègre. □

Exemple 1.410.
L'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas intègre parce que $3 \cdot 2 = 0$ alors que ni 3 ni 2 ne sont nuls. △

Nous verrons au théorème 3.92 que l'anneau A est intègre si et seulement si $A[X]$ est intègre.

CorZnInternprem

Corolaire 1.411.
L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est premier.

Démonstration. Supposons que n soit premier. La proposition 1.361 donne les inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par

$$U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{\overline{x} \text{ tel que } 0 \leqslant x \leqslant n \text{ tel que } \operatorname{pgcd}(x, n) = 1\}. \tag{1.568}$$

Mais comme n est premier, $\operatorname{pgcd}(x, n) = 1$ pour tout x, et donc tous les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont inversibles. Donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre.

Si n n'est pas premier, alors $n = pq$ avec $1 < p \leqslant q < n$. Alors

$$[p]_n[q]_n = [pq]_n = [0]_n. \tag{1.569}$$

Donc lorsque n n'est pas premier, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède des diviseurs de zéro et n'est alors pas intègre. □

[160] Définition 1.390.

PropomqcGe

Proposition 1.412 (Thème 18, [1]).
Soit A un anneau principal[161] *qui n'est pas un corps. Pour un idéal propre I de A, les conditions suivantes sont équivalentes :*

ITEMooNOVFooEHtcwE

(1) I est un idéal maximal[162] *;*

ITEMooMQWVooNocVEU

(2) I est un idéal premier non nul[163] *;*

ITEMooJBXGooEISNuW

(3) il existe p irréductible[164] *dans A tel que $I = (p)$.*

Démonstration. En plusieurs implications.

(1) **(1) implique (2)** Par hypothèse, I est un idéal propre, de plus il n'est pas égal à $\{0\}$, parce que lorsque A et $\{0\}$ sont les seuls idéaux, nous avons un corps (proposition 1.399). Étant donné que I est un idéal maximal, le quotient A/I est un corps par la proposition 1.401.

Soient maintenant, pour entrer dans le vif du sujet, des éléments $a, b \in A$ tels que $ab \in I$. Dans le corps A/I nous avons $[ab] = 0$, et par définition du produit dans le quotient, $[a][b] = 0$. Par intégrité de l'anneau A/I (un corps est un anneau intègre, lemme 1.409) nous avons soit $[a] = 0$, soit $[b] = 0$, soit les deux en même temps. Dans tous les cas, soit a soit b est dans I.

(2) **(2) implique (3)** Maintenant I est un idéal premier non réduit à $\{0\}$. Puisque A est un anneau principal, il existe $x \in A$ tel que $I = (x)$. Nous devons prouver que x peut être choisi irréductible ; et nous allons faire plus : nous allons prouver que x ne peut être que irréductible[165].

Supposons que x ne soit pas irréductible. Alors il existe $a, b \in A$ non inversibles tels que $x = ab$. Si $a \in (x)$ alors il existe $k \in A$ tel que $a = xk$, et en particulier, $a = abk$, c'est-à-dire $1 = bk$ (parce que A est principal et donc intègre). Cela signifie que b est inversible alors que nous avions dit qu'il ne l'était pas. Nous en déduisons que a n'est pas dans (x). On montre de manière similaire que b n'est pas dans (x) non plus.

Nous nous retrouvons donc avec $a, b \in A$ tel que $ab \in I$ sans que ni a ni b ne soient dans I. Cela contredit le fait que I soit un idéal premier. En conclusion, x est irréductible.

(3) **(3) implique (1)** Nous avons $I = (p)$ avec p irréductible dans A. Supposons que J est un idéal différent de A contenant I. Comme A est principal, il existe $y \in A$ tel que $J = (y)$. En particulier $p \in J$, donc $p = ay$ pour un certain $a \in A$. Mais p est irréductible, donc soit a est inversible, soit y est inversible. Si y est inversible, alors $J = A$, ce qui est exclu. Si a est inversible, alors $(y) = (p)$, et $I = J$.

□

1.413.
Dans la proposition 1.412, l'hypothèse d'idéal propre est importante. En effet dans le cas $I = A$, nous avons évidemment que I est un idéal maximum. Mais A n'est d'abord pas un idéal premier parce qu'un idéal premier doit être strictement inclus dans l'anneau. Et ensuite, A est en général loin d'être garanti d'être égal à (p) pour un de ses éléments p.

PropoTMMXCx

Proposition 1.414.
Soit A un anneau principal, et soit $p \in A$ un élément irréductible. Alors

ITEMooKPJQooWuPZXS

(1) (p) est un idéal maximum.

(2) $A/(p)$ est un corps.

Démonstration. Nous notons $I = (p)$. Soit un idéal J contenant I. Comme A est principal, J est monogène : $J = (q)$. Mais comme p est dans I qui est dans J, il existe $a \in A$ tel que $p = qa$.

Puisque p est irréductible, soit q, soit a est inversible. Si q est inversible, alors $J = A$. Si a est inversible, alors nous avons $p = qa$, donc $q = pa^{-1}$, ce qui signifie que $q \in (p)$ et donc que $J = I$.

Cela prouve que (p) est un idéal maximum.

Le fait que $A/(p)$ soit un corps est maintenant la proposition 1.401. □

[161] Définition 1.349.
[162] Définition 1.400.
[163] Définition 1.403.
[164] Définition 1.327.
[165] ça me semble un peu trop facile. Lisez attentivement, et écrivez-moi pour dire si vous êtes d'accord ou pas.

Exemple 1.415.
L'anneau $\mathbb{Z}$ est principal parce qu'il est intègre et que ses seuls idéaux sont les $n\mathbb{Z}$ qui sont principaux : $n\mathbb{Z}$ est engendré par n. △

EXooCJRPooYkWdyr

Exemple 1.416 (Les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)**.**
Les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont principaux, mais l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas principal lorsque n n'est pas premier. Nous allons voir ça.

(1) **Les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont principaux** Soit un idéal S dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous considérons la projection canonique $\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La proposition 1.398 dit que $S = \phi(J)$ où J est un idéal de $\mathbb{Z}$ contenant $n\mathbb{Z}$. Mais le corolaire 1.360 nous dit qu'alors $J = m\mathbb{Z}$ pour un certain m. Pour que $m\mathbb{Z}$ contienne $n\mathbb{Z}$, il faut que m divise n.

Bref, $S = \phi(m\mathbb{Z})$ avec $m \mid n$. Nous montrons maintenant que S est engendré par $[m]_n$. D'abord, l'élément $[m]_n$ est bien dans $\phi(m\mathbb{Z})$. Ensuite un élément de $\phi(m\mathbb{Z})$ est de la forme

$$[km]_n = k[m]_n \in ([m]_n). \tag{1.570}$$

Donc $S \subset ([m]_n)$. Et l'inclusion dans l'autre sens est tout aussi immédiate : un élément de $([m]_n)$ est de la forme

$$k[m]_n = [km]_n = \phi(km) \in \phi(m\mathbb{Z}). \tag{1.571}$$

(2) **Si n n'est pas premier, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas principal** Le fait est que lorsque n n'est pas premier, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas intègre (corolaire 1.411).

(3) **Moralité** Un anneau comme $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est un anneau dont tous les idéaux sont principaux, mais qui n'est pas principal.

△

Exemple 1.417.
Nous verrons dans la proposition 26.68 que l'anneau des fonctions holomorphes sur un compact de $\mathbb{C}$ est principal. △

1.14 Théorèmes chinois et idéaux

PROPooFGDKooPiDCAE

Proposition 1.418 ([60])**.**
Soit un anneau A. Soient des idéaux $I_1, \dots, I_n$ premiers deux à deux[166]*. Nous posons*

$$J_i = \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} I_j. \tag{1.572}$$

Alors les idéaux J_i sont premiers dans leur ensemble.

Démonstration. Nous y allons par récurrence. Pour $n = 2$ c'est facile parce que $J_1 = I_2$ et $J_2 = I_1$. Donc $J_1 + J_2 = I_2 + I_1 = A$.

Supposons que la propriété soit vraie pour n, et voyons pour $n + 1$. Soient donc des idéaux I_1,..., I_{n+1} premiers deux à deux. Pour $i = 1, \dots, n$ nous posons

$$K_i = \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} I_j. \tag{1.573}$$

Par hypothèse de récurrence les K_i sont premiers dans leur ensemble. Il existe $(k_1, \dots, k_n) \in K_1 \times \dots \times K_n$ tels que

$$k_1 + \dots + k_n = 1. \tag{1.574}$$

Par ailleurs I_i est premier avec I_{n+1}, donc il existe $a_i \in I_i$ et $b_i \in I_{n+1}$ tels que $a_i + b_i = 1$. Nous avons donc l'égalité

$$k_1(a_1 + b_1) + \dots + k_n(a_n + b_n) = 1 \tag{1.575}$$

que nous réarrangeons en

$$(k_1a_1 + \dots + k_na_n) + k_1b_1 + \dots + k_nb_n = 1. \tag{1.576}$$

EQooDOFHooQUWtss

[166] Définition 1.317.

Vu que $k_i \in K_i$ et $a_i \in I_i$ et vu que les idéaux sont absorbants,

$$k_i a_i \in I_i \cap \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} I_j = \bigcap_{j=1}^{n} I_j = \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq n+1}}^{n+1} I_j = J_{n+1}. \tag{1.577}$$

Vu que cela est vrai pour chaque i, et vu que les idéaux sont stables par somme, nous avons

$$k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n \in J_{n+1}. \tag{1.578}$$

De même pour chaque i nous avons $k_i \in I_i$ et $b_i \in I_{n+1}$, et donc

$$k_i b_i \in K_1 \cap I_{n+1} = I_{n+1} \cap \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} I_j = \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} I_j = J_i. \tag{1.579}$$

Nous pouvons revenir à l'équation (1.576) :

$$\underbrace{(k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n)}_{\in J_{n+1}} + \underbrace{k_1 b_1}_{\in J_1} + \ldots + \underbrace{k_n b_n}_{\in J_n} = 1. \tag{1.580}$$

Nous avons donc démontré que $1 \in J_1 + \ldots + J_{n+1}$ et donc que ces idéaux sont premiers dans leur ensemble. □

PROPooKWZLooCHhSjs

Proposition 1.419 (Théorème des restes chinois version congruence[60])**.**
Soit un anneau A. Soient $a_1, \ldots, a_n \in A$. Soient des idéaux premiers entre eux $I_1, \ldots, I_n$. Nous considérons l'ensemble

$$S = \{x \in A \text{ tel que } x \in [a_i]_{I_i}\ \forall i\}. \tag{1.581}$$

Alors

ITEMooTGOEooZfsiKG

(1) S est non vide.

ITEMooCECDooQzGovx

(2) Si $x \in S$ alors $S = [x]_{I_1 \cap \ldots \cap I_n}$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Nous commençons par poser

$$J_i = \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} I_j \tag{1.582}$$

qui sont des idéaux premiers dans leur ensemble par 1.418. Il existe donc $(j_1, \ldots, j_n) \in J_1 \times J_n$ tel que $j_1 + \ldots + j_n = 1$. Nous posons alors

$$x = a_1 j_1 + \ldots + a_n j_n, \tag{1.583}$$

et nous vérifions que $x \in S$. Pour cela nous fixons un i et nous calculons un petit peu :

$$\begin{aligned} x - a_i &= a_1 j_1 + \ldots + a_n j_n - (a_i j_1 + \ldots + a_i j_n) && \text{(1.584a)}\\ &= (a_1 - a_i) j_1 + \ldots + (a_n - a_i) j_n. && \text{(1.584b)} \end{aligned}$$

SUBEQooKDVXooKfVntq

Notez que dans la dernière somme, le coefficient de j_i est $(a_i - a_i) = 0$. Pour les autres termes $(k \neq i)$ nous avons

$$(a_k - a_i) j_k \in J_k = \bigcup_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} I_l \subset I_i. \tag{1.585}$$

La dernière inclusion est parce que $i \neq k$, donc il y a un terme $l = i$ dans l'intersection. Nous avons démontré que chaque terme de la somme (1.584b) est dans I_i.

Donc $x - a_i \in I_i$. Cela étant valable pour tout i, nous avons bien prouvé que $x \in S$.

(2) **Pour (2)** Soit $x \in S$. Nous prouvons les deux inclusions.

(2a) $S \subset [x]_{I_1\cap\ldots\cap I_n}$ Soit $s \in S$. Vu que x et s sont dans S, pour chaque i nous avons

$$s - a_i = e_i \tag{1.586a}$$
$$x - a_i = f_i \tag{1.586b}$$

pour certains éléments $e_i, f_i \in I_i$. En soustrayant, $s - x = e_i - f_i \in I_i$. Un tel calcul étant valable pour chaque I, nous avons $s - x \in I_1 \cap \ldots \cap I_n$, c'est-à-dire $s \in [x]_{I_1\cap\ldots\cap I_n}$.

(2b) $[x]_{I_1\cap\ldots\cap I_n} \subset S$ Nous posons $s = x + e$ avec $e \in I_1 \cap \ldots \cap I_n$, et nous prouvons que $s \in S$. Nous avons

$$s - a_i = \underbrace{x - a_i}_{\in I_i} - \underbrace{e}_{\in I_i} \in I_i. \tag{1.587}$$

Donc $s \in [a_i]_{I_i}$ pour chaque i. Donc $s \in S$.

□

THOooCBWWooEGjeSV

Théorème 1.420 (Théorème des restes chinois version anneaux quotients, thème 3[60, 88]).
Soient un anneau A et des idéaux $I_1, \ldots, I_n$ premiers entre eux deux à deux.

ITEMooPNFZooInhOQo

(1) Il existe une unique application $f\colon A/I_1 \cap \ldots \cap I_n \to A/I_1 \times \ldots \times A/_n$ vérifiant

$$f\big([x]\big) = \big([x]_{I_1}, \ldots, [x]_{I_n}\big) \tag{1.588}$$

pour tout $x \in A$.

ITEMooYSDNooSpMVcB

(2) Cette application est un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Existence et unicité** Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} g\colon A &\to A/I_1 \times \ldots \times A/I_n \\ x &\mapsto \big([x]_{I_1}, \ldots, [x]_{I_n}\big). \end{aligned} \tag{1.589}$$

Afin d'utiliser la proposition 1.53 nous vérifions que si $u \in [x]_{I_1\cap\ldots\cap I_n}$ alors $g(x) = g(y)$. En effet dire $y \in [x]$ signifie $x - y \in I_1 \cap \ldots \cap I_n$ et donc pour tout j nous avons $x - y \in I_j$. Du coup pour tout j nous avons $[x]_{I_j} = [y]_{I_j}$. Voilà. Donc la proposition 1.53 prouve le point (1).

(2) **Injective** Soient $\alpha, \beta \in A/I_1 \cap \ldots \cap I_n$ tels que $f(\alpha) = f(\beta)$. Nous considérons $x \in \alpha$ et $y \in \beta$. Nous avons

$$f(\alpha) = \big([x]_{I_1}, \ldots, [x]_{I_n}\big) \tag{1.590a}$$
$$f(\beta) = \big([y]_{I_1}, \ldots, [y]_{I_n}\big). \tag{1.590b}$$

Donc $[x]_{I_i} = [y]_{I_i}$ pour tout i. Pour chaque i, il existe un $e_i \in I_i$ tel que $x - y = e_i$. Forcément tous les e_i sont égaux et nous avons donc $x - y \in I_1 \cap \ldots \cap I_n$. Cela prouve que $\alpha = \beta$ et donc que f est injective.

(3) **Surjective** Soient $\alpha_i \in A/I_i$. Nous avons besoin de trouver $\alpha \in A/I_I \cap \ldots \cap I_n$ tel que $f(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Pour chaque α_i nous considérons $a_i \in \alpha_i$ et nous cherchons $x \in A$ tel que

$$x \in [a_i]_{I_i} \tag{1.591}$$

pour tout i. La version congruence du théorème chinois (proposition 1.419) dit qu'un tel x existe. En prenant $\alpha = [x]_{I_1\cap\ldots\cap I_n}$ nous avons bien $f(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

(4) **Morphisme** L'application f est un morphisme d'anneaux parce que si $\alpha, \beta \in A/I_1 \cap \ldots \cap I_n$ et si $x \in \alpha$ et $y \in \beta$, alors

$$f(\alpha + \beta) = f([x] + [y]) = f([x + y]) = \big([x + y]_1, \ldots,\big) = \big([x]_1 + [y]_1, \ldots,\big) = f(\alpha) + f(\beta). \tag{1.592}$$

Le même genre de vérification marche pour le produit.

□

Pour la suite nous rappelons que $[x]_a$ est la classe de x pour le quotient par l'idéal (a). Donc

$$[x]_a = \{y \in A \text{ tel que } x - y \in (a)\}. \tag{1.593}$$

Notez au passage que

$$[xa]_a = [0]_a \tag{1.594}$$

EQooJAAQooJCcmVE

Nous avons vu dans 1.351 que $\mathbb{Z}$ est principal ; le lemme suivant nous dit que $\mathbb{Z}[X]$ n'est lui, pas principal.

LEMooDJSUooJWyxCL

Lemme 1.421 ([89]).
Si A est un anneau intègre[167] *qui n'est pas un corps, alors $A[X]$ n'est pas principal.*

Démonstration. Soit un élément non nul $a \in A$.

(1) **Un idéal principal contenant a et X est A[X]**
Soit (P) un idéal principal contenant a et X. Puisque $a \in (P)$, il existe Q tel que $a = QP$. Donc P divise a dans $\mathbb{Z}[X]$. L'égalité des degrés indique que P est un polynôme constant, c'est-à-dire en réalité un élément de A. Soit $P = k \in A$.

Comme P divise X, nous avons aussi $X = kQ$ pour un certain $Q \in \mathbb{Z}[X]$. L'égalité des degrés dit qu'il existe $k' \in A$ tel que $Q = k'X$ et donc $Q = k'X = k'kQ$, ce qui implique que $kk' = 1$. L'idéal engendré par k contient donc en particulier $kk' = 1$ et donc contient $A[X]$ en entier :

$$1 = k'k \in k'(P) = (P). \tag{1.595}$$

(2) **Si $(a, X) = A[X]$ alors a est inversible**
Si $(a, X) = A[X]$, en particulier, $1 \in (a, X)$, ce qui signifie qu'il existe des polynômes $U, V \in A[X]$ tels que

$$1 = UX + Va. \tag{1.596}$$

Nous évaluons cette égalité en 0 : comme $(UX)(0) = 0$, nous avons $1 = V(0)a$, ce qui signifie que $V(0)$ est un inverse de A. Donc a est inversible.

(3) **Si a n'est pas inversible alors (a, X) n'est pas principal**
Si (a, X) était principal, alors nous aurions, par ce qui est dit plus haut, $(a, X) = A[X]$. Mais cette dernière égalité impliquerait que a soit inversible.

En conclusion, si A n'est pas un corps, il possède un élément ni nul ni inversible. Dans ce cas, l'idéal (a, X) n'est pas principal dans $A[X]$ et nous en déduisons que $A[X]$ n'est pas un anneau principal. □

Nous verrons dans le lemme 3.98 que si $\mathbb{K}$ est un corps, alors $\mathbb{K}[X]$ est principal.

1.15 Sous-groupe normal

propGroupeNormal

Proposition 1.422.
Soit N un sous-groupe de G. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

ITEMooDYEUooOuKEqQ
(1) N est normal[168] *dans G.*

ITEMooPYTEooZhvrUa
(2) N est une union de classes de conjugaison[169] *de G,*

ITEMooJWTLooBRmriQ
(3) $gNg^{-1} \subseteq N$ pour tout $g \in G$,

ITEMooVRZIooAorhRY
(4) $gNg^{-1} = N$ pour tout $g \in G$,

ITEMooJGUOooYshOZa
(5) $gN = Ng$ pour tout $g \in G$,

ITEMooMRYRooZifCCe
(6) Le normalisateur[170] *de N est G : $\mathcal{N}_G(N) = G$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) implique (3)** C'est la définition de sous-groupe normal.

[167] Définition 1.335.
[168] Définition 1.265.
[169] Définition 1.261.
[170] Définition 1.264.

(2) **(3) implique (4)** Soit $g \in G$. Nous avons $gNg^{-1} \subset N$, mais aussi (en appliquant l'hypothèse à g^{-1}) $g^{-1}Ng \subset N$. En combinant nous avons

$$N \subset g(g^{-1}Ng)g^{-1} \subset gNg^{-1}. \tag{1.597}$$

Nous avons l'inclusion dans les deux sens. Donc l'égalité.

(3) **(4) implique (5)** Soit $g \in G$. Un élément général de gN est de la forme gn avec $n \in N$. Nous devons trouver un $n' \in N$ tel que $gn = n'g$. En posant $n' = gng^{-1}$ nous avons

$$n' = gng^{-1} \in gNg^{-1} \subset N. \tag{1.598}$$

Il est immédiat de prouver que $gn = n'g$. Cela prouve que $gN \subset Ng$.

Le même raisonnement donne $Ng \subset gN$.

(4) **(5) implique (3)** Un élément de gNg^{-1} est $a = gng^{-1}$ avec $n \in N$. Nous devons prouver que $a \in N$. Puisque $gn \in gN$, par hypothèse il existe n' tel que $gn = n'g$. En remplaçant dans la définition de a,

$$a = gng^{-1} = n'gg^{-1} = n' \in N. \tag{1.599}$$

(5) **(5) implique (2)** Pour chaque $a \in G$ nous notons C_a la classe de conjugaison de a dans G :

$$C_a = \{gag^{-1} \text{ tel que } g \in G\}. \tag{1.600}$$

EQooJIEVooCAshfe

Comme $a \in C_a$ (prendre $g = e$ dans (1.600).) nous avons forcément

$$N \subset \bigcup_{n \in N} C_n. \tag{1.601}$$

Prouvons maintenant l'inclusion inverse. Nous avons déjà prouvé que (5) implique (3). Donc si $n \in N$, alors $gng^{-1} \in N$. Nous avons alors

$$C_n = \{gng^{-1} \text{ tel que } g \in G\} \subset N. \tag{1.602}$$

Donc il est vrai que $N = \bigcup_{n \in N} C_n$.

(6) **(2) implique (1)** Nous supposons que $N \subset G$ est un sous-groupe de la forme

$$N = \bigcup_{a \in I} C_a \tag{1.603}$$

où I est une partie de G. Nous devons montrer que pour tout $g \in G$ et pour tout $n \in N$ nous avons $gng^{-1} \in N$. Puisque $n \in N$, il existe $a \in I$ tel que $n \in C_a$ et donc il existe $k \in G$ tel que $n = kak^{-1}$. Nous avons donc

$$gng^{-1} = g(kak^{-1})g^{-1} = (gk)a(gk)^{-1} \in C_a \subset N. \tag{1.604}$$

Le lecteur attentif aura remarqué l'utilisation de l'axiome du choix. La prudence l'incitera à ne pas le faire remarquer au jury.

(7) **(6) si et seulement si (5)** C'est la définition du normalisateur.

□

Définition 1.423.
Soit $g \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$. Nous définissons g^n par

(1) $g^0 = e$ et $g^n = gg^{n-1}$ si n est positif.

(2) si $n < 0$, nous posons $g^n = (g^{-1})^{-n}$.

LemHUkMxp

Lemme 1.424 ([49, 15])**.**
Soient un groupe G et deux sous-groupes normaux[171] *H et K tels que $H \cap K = \{e\}$. Alors :*

ITEMooDFVBooSnnlgR

(1) Tout élément de H commute avec tout élément de K.

[171] Sous-groupe normal, définition 1.265.

ITEMooVVBGooZSJqjp

(2) *HK est un sous-groupe de G.*

IMTEooPCBZooQoZFOD

(3) *L'application*

$$\begin{aligned}\varphi\colon H\times K&\to HK\\ (h,k)&\mapsto hk\end{aligned}\tag{1.605}$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. Point par point.

(1) **(1)** Soient $h\in H$ et $k\in K$. Nous voulons montrer que $hk=kh$. Pour cela nous considérons l'élément $a=hkh^{-1}k^{-1}$. Comme H est normal dans G, nous avons

$$kh^{-1}k^{-1}\in H\tag{1.606}$$

et donc $a\in H$. De même K étant normal dans G, nous avons $hkh^{-1}\in K$ et donc $a\in K$. Au final $a\in H\cap K=\{e\}$. Nous avons prouvé que

$$hkh^{-1}k^{-1}=e,\tag{1.607}$$

et donc que $hk=kh$.

(2) **(2)** Puisque H et K sont des sous-groupes, $\{e\}$ est dans les deux, de telle sorte que $e\in HK$. De plus si $h_i\in H$ et $k_i\in K$, la commutativité du point (1) donne

$$(h_1k_1)(h_2k_2)=h_1h_2k_1k_2\in HK.\tag{1.608}$$

Donc le produit de deux éléments de HK est dans HK.

(3) **(3)** En trois sous-parties.

(3a) **Morphisme** Soient $h_i\in H$ et $k_i\in K$. En utilisant la commutativité du point (1) nous avons

$$\begin{aligned}\varphi\big((h_1,k_1)(h_2,k_2)\big)&=\varphi(h_1h_2,k_1k_2)&(1.609a)\\ &=(h_1h_2)(k_1k_2)&(1.609b)\\ &=(h_1k_1)(h_2k_2)&(1.609c)\\ &=\varphi(h_1,k_1)\varphi(h_2,k_2).&(1.609d)\end{aligned}$$

(3b) **Injectif** Si $\varphi(h_1,k_1)=\varphi(h_2,k_2)$ nous avons successivement

$$\begin{aligned}h_1k_1&=h_2k_2&(1.610a)\\ h_1k_1h_2^{-1}&=k_2&(1.610b)\\ h_1k_1h_2^{-1}k_1^{-1}&=k_2k_1^{-1}&(1.610c)\\ h_1h_2^{-1}&=k_2k_1^{-1}.&(1.610d)\end{aligned}$$

Le membre de gauche est un élément de H et le membre de droite un élément de K. Comme $H\cap K=\{e\}$ nous avons $h_1h_2^{-1}=e$ et $k_2k_1^{-1}=e$, c'est-à-dire $h_1=h_2$ et $k_1=k_2$.

(3c) **Surjectif** Un élément général de HK est hk avec $h\in H$ et $k\in K$, c'est-à-dire $\varphi(h,k)$.

□

DefvtSAyb

Définition 1.425.
*L'**exposant** du groupe G est le plus petit entier non nul n tel que $g^n=e$ pour tout $g\in G$. S'il n'existe pas un tel n, nous disons que l'exposant du groupe est infini.*

PROPooSWHHooOzqWkw

Proposition 1.426.
À propos d'exposant de groupe et de ppcm.

ITEMooFIPBooFOaPkU

(1) *Si l'ensemble des ordres de tous les éléments d'un groupe est majoré, alors l'exposant du groupe est le plus petit commun multiple des ordres des éléments du groupe.*

ITEMooLIREooYEtcdL

(2) *Pour un groupe fini, l'exposant est le* ppcm *des ordres des éléments du groupe.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soit p le ppcm des ordres de tous les éléments du groupe. Si g est d'ordre a, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = ak$. Avec ça nous avons $g^p = (g^a)^k = e^k = e$. Donc p a bien la propriété $g^p = e$ pour tout $g \in G$.

Si $q < p$, nous montrons que q ne peut pas avoir cette propriété. Il existe un élément g dont l'ordre a ne divise pas q. Par la division euclidienne 1.352, nous avons des entiers u et v tels que $q = ua + v$ avec $v < a$. Nous avons alors

$$g^q = g^{ua}g^v = g^v \neq e \tag{1.611}$$

parce que $v < a$ et que a est le plus petit n tel que $g^n = e$.

(2) **Pour (2)** Même chose. Pour un groupe fini, le ppcm existe toujours.

□

Le théorème de Burnside 8.310 nous donnera un bon paquet d'exemples de groupes d'exposant fini dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

PropSRMJooIDPBoW

Proposition 1.427.
Soit un groupe G. Nous considérons un sous-groupe normal H de G ainsi qu'un morphisme $\psi\colon G \to H$. Alors

(1) $\psi(H)$ est normal dans $\psi(G)$

(2) Si G/H est abélien alors $\psi(G)/\psi(H)$ est abélien.

Démonstration. Soient $h \in H$ et $g \in G$. Alors $\psi(g)\psi(h)\psi(g)^{-1} = \psi(ghg^{-1}) \in \psi(H)$. Donc $\psi(H)$ est normal dans $\psi(G)$.

Pour la seconde partie nous notons $[\dots]$ les classes par rapport à $\psi(H)$ et $\overline{\dots}$ celles par rapport à H. Nous avons

$$\begin{aligned}
[\psi(g_1)][\psi(g_2)] &= \big[\psi(g_1)\psi(g_2)\big] && \text{(1.612a)}\\
&= \big[\psi(g_1g_2)\big] && \text{(1.612b)}\\
&= \{\psi(g_1g_2)\psi(h) \text{ tel que } h \in H\} && \text{(1.612c)}\\
&= \{\psi(g_1g_2h) \text{ tel que } h \in H\} && \text{(1.612d)}\\
&= \psi\Big(\{g_1g_2h \text{ tel que } h \in H\}\Big) && \text{(1.612e)}\\
&= \psi\big(\overline{g_1g_2}\big) && \text{(1.612f)}\\
&= \psi(\overline{g_2g_1}) && \text{(1.612g)}\\
&= \text{refaire à l'envers} && \text{(1.612h)}\\
&= [\psi(g_2)][\psi(g_1)]. && \text{(1.612i)}
\end{aligned}$$

Par conséquent $\psi(G)/\psi(H)$ est abélien. □

1.16 Corps

La définition d'un corps est 1.390.

1.16.1 Définitions, morphismes

La proposition suivante donne une caractérisation d'un corps, en disant un tout petit peu plus que la définition 1.390.

Proposition 1.428.
L'anneau A est un corps si et seulement si $U(A) = A^*$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct** Nous supposons que A est un corps. D'une part tous les éléments non nuls sont inversibles, c'est-à-dire $A^* \subset U(A)$.

Pour l'inclusion inverse, nous montrons qu'une élément inversible ne peut pas être nul. Cela n'est autre que le lemme 1.93 couplé à la proposition 1.94 : $a \cdot 0 = 0 \neq 1$ pour tout a.

(2) **Sens inverse** Si $U(A) = A^*$, nous avons immédiatement que tous les éléments non nuls sont inversibles et donc que A est un corps.

□
LEMooJNIBooAURhrt

Lemme 1.429.
Si $\mathbb{K}$ est un corps et si $a \in \mathbb{K}$ vérifie $a^2 = 1$, alors $a = \pm 1$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{K}$ tel que $a^2 = 1$. Alors $a^2 - 1 = 0$. Il est facile de vérifier[172] que $(a+1)(a-1) = a^2 - 1$. Bref, on a le produit nul

$$(a+1)(a-1) = 0. \tag{1.613}$$

Le lemme 1.336 dit que tout corps respecte la règle du produit nul. Donc soit $a+1=0$ soit $a-1=0$. Donc $a \in \{1, -1\}$. □
DEFooWGKFooJaakjf

Définition 1.430 (Morphisme de corps)**.**
*Un corps étant un anneau sans plus de structure, un **morphisme de corps** n'est qu'un morphisme des anneaux*[173]*.*

Le lemme suivant montre que définir un morphisme de corps comme étant simplement un morphisme des anneaux est une bonne idée.
LEMooWBOPooZnsZgQ

Lemme 1.431.
Si $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ est un morphisme de corps, alors

(1) pour tout $a \in \mathbb{K}$ nous avons $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$;

(2) le morphisme φ est injectif.

Démonstration. Vu que $\varphi(1) = 1$, nous avons aussi

$$1 = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}). \tag{1.614}$$

Donc, par unicité de l'inverse[174], $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

Pour l'injectivité nous supposons $\varphi(a) = \varphi(b)$. Étant donné que $\mathbb{K}'$ est un corps, nous pouvons multiplier par $\varphi(b)^{-1}$:

$$\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = 1. \tag{1.615}$$

En utilisant le premier point nous avons $1 = \varphi(a)\varphi(b^{-1})$, puis le morphisme d'anneaux : $1 = \varphi(ab^{-1})$, et encore le morphisme d'anneaux nous permet de déduire $ab^{-1} = 1$ et donc $a = b$. □

1.16.2 Sous-groupe engendré

DefooRDRXooEhVxxu

Définition 1.432 (Sous-groupe engendré)**.**
*Soit A une partie du groupe G. Le sous-groupe **engendré** par A est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant A. Nous notons ce groupe $\mathrm{gr}_G(A)$.*

Lorsque A est fini (disons $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$), on note aussi le sous-groupe engendré $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

1.433.
Un sous-groupe engendré n'est jamais vide parce qu'il contient toujours au moins le neutre (parce que c'est un sous-groupe). Si G est un groupe, le sous-groupe $\mathrm{gr}_G(\varnothing)$ lui-même contient e[175].

1.434.
Dans de nombreux cas, le groupe « ambiant » G est entendu par le contexte et nous noterons $\mathrm{gr}(A)$ au lieu de $\mathrm{gr}_G(A)$.

Si par exemple A est la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, le groupe $\mathrm{gr}(A)$ est à comprendre dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Il faudrait être fou pour avoir en tête un autre groupe que $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ sans le préciser.

D'ailleurs, connaissez-vous un groupe contenant la matrice A et n'étant pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$?

Lemme 1.435.
Si G est un groupe et A une partie de G, alors $\mathrm{gr}(A)$ est un sous-groupe de G.

[172] Parce que tous les corps du Frido sont commutatifs.
[173] Définition 1.98.
[174] Lemme 1.254 (2).
[175] Demandez-vous si il est possible que $\mathrm{gr}(\varnothing)$ contienne d'autres éléments que e.

Le sous-groupe engendré par A est le plus petit (pour l'inclusion) groupe de G contenant A. Plus formellement, nous avons le résultat suivant :

Lemme 1.436.
Tout sous-groupe de G contenant A contient $\mathrm{gr}(A)$.

Démonstration. Si H est un sous-groupe de G contenant A, alors $\mathrm{gr}(A)$ est l'intersection de H avec tous les autres sous-groupes de G contenant A. Il contient donc $\mathrm{gr}(A)$. □

LemFUIZooBZTCiy

Lemme 1.437 ([90])**.**
Si A est une partie du groupe G, alors le sous-groupe $\mathrm{gr}(A)$ *engendré*[176] *par A est l'ensemble de tous les produits finis d'éléments de A et de A^{-1} (l'identité est le produit à zéro éléments).*

C'est-à-dire que tout élément de $\mathrm{gr}(A)$ *peut être écrit sous la forme*[177]

$$\prod_{i=1}^{n} g_i^{a_i} \tag{1.616}$$

où $a_i \in \mathbb{Z}$ et $g\colon \mathbb{N} \to A$ n'est pas spécialement injective : il peut arriver que $g_i = g_j$.

Démonstration. Puisqu'un produit vide est égal à l'identité[178], le lemme est vrai (un peu trivialement) dans le cas où $A = \varnothing$. À partir de maintenant, nous supposons que A est non vide.

Nous nommons $\mathrm{gr}(A)$ le groupe engendré par A et H, l'ensemble

$$H = \{g_1 \dots g_n \text{ tel que } g_i \in A \cup A^{-1}\}. \tag{1.617}$$

Nous commençons par prouver que H est un groupe.

- Puisque A est non vide, nous considérons $a \in A$. Dans ce cas, $e = aa^{-1} \in H$. Donc $e \in H$.
- L'inverse de $g_1 \dots g_n$ est $g_n^{-1} \dots g_1^{-1}$ qui est également dans H.
- Le produit de $g_1 \dots g_n$ par $h_1 \dots h_n$, tous éléments de H, est également dans H[179].

Comme H est un groupe contenant A, nous avons $\mathrm{gr}(A) \subset H$ parce que $\mathrm{gr}(A)$ est une intersection dont un des éléments est H.

Par ailleurs tout groupe contenant A doit contenir les inverses et les produits finis, donc $H \subset \mathrm{gr}(A)$.

Au final, $H = \mathrm{gr}(A)$, ce qu'il fallait. □

LEMooCFTVooKvmyKN

Lemme 1.438.
Soit un groupe G et un sous-groupe $H = \mathrm{gr}(h_1, \dots, h_n)$. Si $\alpha \in G$, alors

$$\alpha H \alpha^{-1} = \mathrm{gr}(\alpha h_1 \alpha^{-1}, \dots, \alpha h_n \alpha^{-1}). \tag{1.618}$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du lemme 1.437. Un élément de $\mathrm{gr}(\alpha h_1 \alpha^{-1}, \dots, \alpha h_n \alpha^{-1})$ est un produit d'éléments de G de la forme $\alpha h_i \alpha^{-1}$ ou $(\alpha h_j \alpha^{-1})^{-1} = \alpha h_j^{-1} \alpha^{-1}$. Or nous avons

$$\alpha h_i \alpha^{-1} \alpha h_j \alpha^{-1} = \alpha h_i h_j \alpha^{-1} \in \alpha H \alpha^{-1}. \tag{1.619}$$

Donc

$$\mathrm{gr}(\alpha h_1 \alpha^{-1}, \dots, \alpha h_n \alpha^{-1}) \subset \alpha H \alpha^{-1}. \tag{1.620}$$

L'inclusion dans l'autre sens est du même tonneau. □

DEFooWMFVooLDqVxR

Définition 1.439 (Partie génératrice, groupe monogène)**.**
Soient un groupe G, et une partie $A \subset G$. Si $\mathrm{gr}(A) = G$, *alors nous disons que A est une* ***partie génératrice*** *du groupe G.*

Un groupe est ***monogène*** *si il a une partie génératrice réduite à un seul élément.*

DefHFJWooFxkzCF

Définition 1.440 (Groupe cyclique)**.**
Un élément $a \in G$ est un ***générateur*** *de G si tous les éléments de G s'écrivent sous la forme a^n pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Un groupe fini et monogène est dit* ***cyclique****.*

[176] Définition 1.432.
[177] Les a_i négatifs correspondent aux inverses. Notons que si $g \in A$, il n'y a pas de garanties que g^{-1} soit également dans A.
[178] Voir 1.312.
[179] Et c'est ici qu'on se rend compte que la décomposition n'est probablement que rarement unique.

1.441.
La différence entre un groupe monogène et un groupe cyclique est qu'un groupe cyclique est fini. Dans un groupe cyclique, à force d'itérer le générateur, nous finissons par tourner en rond – d'où le nom.

Exemple 1.442.
Soit le groupe $\big(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z},+\big)$. L'élément $[2]_{10}$ n'est pas générateur parce que ses puissances[180] sont

$$\mathrm{gr}([2]_{10}) = \{[2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}, [0]_{10}\}. \tag{1.621}$$

Par contre l'élément $[3]_{10}$ est générateur : ses puissances sont dans l'ordre

$$[3]_{10}, [6]_{10}, [9]_{10}, [2]_{10}, [5]_{10}, [8]_{10}, [1]_{10}, [4]_{10}, [7]_{10}, [0]_{10}. \tag{1.622}$$

△

Un exemple presque identique, mais un peu masqué sera l'exemple 18.155.

LEMooTHBIooJPjBlp

Lemme 1.443 ([1])**.**
Si $n = dr$, alors

(1) *$r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe.*

LEMooSAAXooMezYui

(2) *Le groupe $r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique*[181]*.*

ITEMooGCGQooIfZULt

(3) $\mathrm{Card}(r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = d = n/r$.

1.17 Module sur un anneau

DEFooHXITooBFvzrR

Définition 1.444 (module sur un anneau[91])**.**
*Soit un anneau A. Un **module à gauche** sur A est la donnée d'un triplet $(M, +, \cdot)$ où*

(1) *$+$ est une loi de composition interne à M, c'est-à-dire $+ : M \times M \to M$,*

(2) *$\cdot$ est une loi de composition externe, c'est-à-dire $\cdot : A \times M \to M$*

telles que

(1) *$(M, +)$ est un groupe*[182]*.*

(2) *$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$,*

(3) *$(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$,*

(4) *$(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$*

(5) *$1 \cdot x = x$.*

pour tout $a, b \in A$ et $x, y \in M$.

*Si M et N sont des A-modules, un **morphisme** de M vers N est une application $f : M \to N$ qui*

(1) *est un morphisme de groupes entre $(M, +)$ et $(N, +)$*

(2) *vérifie $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$ pour tout $a \in A$, $x \in M$.*

L'ensemble des morphismes entre M et N est noté $\mathrm{Hom}_A(M, N)$. Si B est un sous-anneau de A, nous parlons de $\mathrm{Hom}_B(M, N)$ pour parler des morphismes de groupes qui ne vérifient $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$ que pour $a \in B$.

PROPooGARGooDiMqtN

Proposition 1.445.
Si M est un module sur un anneau, alors $(M, +)$ est un groupe commutatif.

[180] Attention aux notations ; en général on écrit la loi de groupe de façon multiplicative et on parle des puissances d'un élément, mais ici on écrit la loi de groupe additivement, donc les « puissances » sont en réalité les multiples.
[181] Définition 1.440.
[182] Nous verrons dans la proposition 1.445 qu'il est forcément commutatif.

Démonstration. Il suffit de calculer $(1+1)\cdot(x+y)$ de deux façons différentes :

$$(1+1)\cdot(x+y)=1\cdot(x+y)+1\cdot(x+y)=x+y+x+y \tag{1.623}$$

d'une part et

$$(1+1)\cdot(x+y)=(1+1)\cdot x+(1+1)\cdot y=x+x+y+y, \tag{1.624}$$

d'autre part. En égalant les deux expressions, il vient

$$x+y+x+y=x+x+y+y, \tag{1.625}$$

qui se simplifie (nous sommes dans un groupe) en $y+x=x+y$. □

DEFooKHWZooIfxdNc

Définition 1.446.
*Un **espace vectoriel** est un module*[183] *sur un corps commutatif*[184].

DEFooRUKVooLnXxdS

Définition 1.447 ([92]).
*Soient un A-module M et un ensemble I. Une famille $\{m_i\}_{i\in I}$ est **libre** si les m_i sont **linéairement indépendants**, c'est-à-dire si pour tout choix d'une partie finie J dans I et d'éléments $(a_j)_{j\in J}$ dans A, si nous avons*

$$\sum_{j\in J}a_jm_j=0, \tag{1.626}$$

alors $a_j=0$ pour tout j.

DEFooWBOBooJNyyBF

Définition 1.448 ([93]).
*Soit S, une partie du A-module M. Le **sous-module engendré** par S est l'ensemble des éléments de M qui sont des combinaisons linéaires finies d'éléments de S, c'est-à-dire de sommes de la forme*

$$\sum_{t\in T}a_tt \tag{1.627}$$

où T est fini dans S et $a_t\in A$.

1.17.1 Module produit

DEFooLCJEooBvVmkV

Lemme-Définition 1.449 ([92]).
*Soient un anneau A et un ensemble I. Le A-**module produit** A^I est l'ensemble des applications $I\to A$.*

En termes de notations, nous écrivons ceci :

$$A^I=\{(a_i)_{i\in I},a_i\in A\}. \tag{1.628}$$

L'ensemble A^I devient un module par les définitions, pour $x,y\in A^I$ et $a\in A$:

EQooPLBSooFuQXrj

$$ax=(ax_i)_{i\in I} \tag{1.629a}$$

EQooODBMooQKLUgd

$$x+y=(x_i+y_i)_{i\in I}. \tag{1.629b}$$

En d'autres termes, $A^I=\mathrm{Fun}(I,A)$.

Démonstration. Il faut vérifier toutes les conditions de la définition 1.444. En guise d'exemple, nous vérifions la distributivité. Soient $a\in A$ et $x,y\in A^I$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\big[a\cdot(x+y)\big]_i&=a(x+y)_i && (1.629a) && (1.630a)\\
&=a(x_i+y_i) && (1.629b) && (1.630b)\\
&=ax_i+ay_i && \text{distrib. dans } A && (1.630c)\\
&=(ax+ay)_i && (1.629b). && (1.630d)
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.450.
Pour chaque $i\in I$ nous considérons l'élément $e_i\in A^I$ donné par

$$\begin{aligned}e_i\colon I&\to A\\ j&\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } j=i\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{1.631}$$

[183] Définition 1.444.
[184] La condition de commutativité n'est pas indispensable, mais comme nous ne parlerons que de corps commutatifs…

La famille $\{e_i\}_{i\in I}$ est libre[185] *dans A^I.*

Démonstration. Soient J fini dans I ainsi que des éléments $a_j \in A$ ($j \in J$). Nous supposons que[186] $\sum_{j\in J} a_j e_j = 0$. Calculons un peu :

$$\sum_{j\in J} a_j e_j = \sum_{j\in J} (a_j\delta_{ji})_{i\in I} = \left(\sum_{j\in J} a_j\delta_{ji} \right)_{i\in I}. \tag{1.632}$$

Pour que le tout soit nul dans A^I, il faut que

$$\sum_{j\in J} a_j\delta_{ji} \tag{1.633}$$

soit nul pour tout $i \in I$. Si nous fixons $i \in I$, la somme sur j possède un seul terme non annulé par δ_{ji}, et c'est le terme $j = i$. Nous avons donc $a_i = 0$. □

DEFooBMEPooFsCHgb

Définition 1.451.
Nous notons $A^{(I)}$ le sous-module de A^I engendré[187] *par les e_i.*

Lemme 1.452 ([1])**.**
L'ensemble $A^{(I)}$ est l'ensemble des applications $I \to A$ de support fini.

Démonstration. En deux sens.

(1) **Si $x \in A^{(I)}$** Pour rappel, la définition 1.449 nous dit que x est une application $I \to A$. Vu que x est dans le sous-module engendré par les e_i, il existe une partie finie $J \subset I$ telle que

$$x = \sum_{j\in J} x_j e_j. \tag{1.634}$$

Pour $i \in I$ nous avons

$$x(i) = \sum_{j\in J} x_j\delta_{ij} = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.635}$$

Donc le support de x est dans J qui est fini. Vu que toute partie d'un ensemble fini est fini (lemme 1.71), le support de x est fini.

(2) **Si x est de support fini** Supposons que le support de $x\colon I \to A$ soit la partie finie $J \subset I$. En notant $x_j = x(j)$ pour tout $j \in J$, nous avons

$$x = \sum_{j\in J} x_j e_j. \tag{1.636}$$

□

THOooPDZCooJnHbOd

Théorème 1.453 (Propriété universelle de $A^{(I)}$[92])**.**
Soient un anneau A ainsi qu'un A-module P. Pour $\phi \in \mathrm{Hom}_A(A^{(I)}, P)$, nous considérons

$$\begin{aligned} \phi|_I\colon I &\to P \\ i &\mapsto \phi(e_i). \end{aligned} \tag{1.637}$$

(1) L'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{Hom}_A(A^{(I)}, P) &\to \mathrm{Fun}(I, P) \\ \phi &\mapsto \phi|_I \end{aligned} \tag{1.638}$$

est une bijection.

(2) L'application inverse est $g\colon \mathrm{Fun}(I, P) \to \mathrm{Hom}_A(A^{(I)}, P)$ donnée par

$$g(\psi)\big(\sum_{j\in J} a_j e_j\big) = \sum_{j\in J} a_j\psi(j) \tag{1.639}$$

pour tout J fini dans I et choix de $a_j \in A$.

[185] Définition 1.447.
[186] Pour rappel, les sommes finies sont définies par 1.304.
[187] Définition 1.448.

Démonstration. Nous allons montrer que $g\big(f(\phi)\big) = \phi$ et que $f\big(g(\psi)\big) = \psi$ pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_A(A^{(I)}, P)$ et pour tout $\psi \in \mathrm{Fun}(I, P)$.

Dans un premier sens nous avons :

$$\begin{aligned} g\big(f(\phi)\big)\big(\sum_j a_j e_j\big) &= \sum_j a_j f(\phi)(j) && \text{(1.640a)}\\ &= \sum_j a_j \phi(e_j) && \text{(1.640b)}\\ &= \phi\Big(\sum_j a_j e_j\Big). && \text{(1.640c)} \end{aligned}$$

SUBALIGNooBWPLooHeIaQg

SUBALIGNooUOQPooCwLgZo

Justifications :

- Pour (1.640b), nous avons utilisé le fait que $f(\phi)(i) = \phi|_I(i) = \phi(e_i)$.
- Pour (1.640c), nous utilisons le fait que ϕ est un morphisme de modules.

Et pour l'autre sens,

$$f\big(g(\psi)\big)(i) = g(\psi)(e_i) = \psi(i). \tag{1.641}$$

Vérifions que cela est suffisant pour que f soit une bijection.

(1) **Surjectif** Soit $\psi \in \mathrm{Fun}(I, P)$. Nous avons $f\big(g(\psi)\big) = \psi$, ce qui prouve que ψ est dans l'image de f.

(2) **Injectif** Supposons que $f(\phi_1) = f(\phi_2)$. Alors en appliquant g des deux côtés, il vient $\phi_1 = \phi_2$.

□

1.17.2 Sous-module

Soient M un A-module et $x = (x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de M paramétrée par l'ensemble I. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \mu_x \colon A^{(I)} &\to M \\ (a_i)_{i\in I} &\mapsto \sum_{i\in I} a_i x_i. \end{aligned} \tag{1.642}$$

Ici $A^{(I)}$ désigne l'ensemble de toutes les applications $I \to A$ de support fini (définition 1.451).

DefBasePouyKj

Définition 1.454.
À l'instar des espaces vectoriels, les modules ont une notion de partie libre, génératrice et de bases :

*(1) Si μ_x est surjective, nous disons que x est une partie **génératrice**.*

*(2) Si μ_x est injective, nous disons que la partie x est **libre**.*

*(3) Si μ_x est bijective, nous disons que la partie x est une **base**.*

Définition 1.455.
*Un sous-ensemble $N \subset M$ est un **sous-module** si $(N, +)$ est un sous-groupe de $(M, +)$ et si $a \cdot x \in N$ pour tout $x \in N$ et pour tout $a \in A$.*

Exemple 1.456.
Un anneau A est lui-même un A-module et ses sous-modules sont les idéaux. △

DEFooZACWooWydFDp

Définition 1.457 (Projecteur)**.**
*Soit M un module sur un anneau commutatif A. Un **projecteur** est une application linéaire $p \colon M \to M$ telle que $p^2 = p$.*

*Une famille $(p_i)_{i\in I}$ sur M est **orthogonale** si $p_i \circ p_j = 0$ pour tout $i \neq j$. La famille est **complète** si $\sum_{i\in I} p_i = \mathbb{1}$.*

ThoProjModpAlsUR

Théorème 1.458.
Soient des sous-modules $M_1, \dots, M_n$ du module M tels que $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$. Les applications p_i définies par

$$p_i(x_1 + \dots + x_n) = x_i \tag{1.643}$$

forment une famille orthogonale de projecteurs et $p_1 + \dots + p_n = \mathrm{Id}$.

Inversement, si $(p_1, \dots, p_n)$ *est une famille orthogonale de projecteurs dans un module* $\mathcal{E}$ *tel que* $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}$*, alors*

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} p_i(M). \tag{1.644}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) **Première partie** Les p_i sont des projecteurs parce que $p_i^2(x_1 + \dots + x_n) = p_i(x_i) = x_1 = p_i(x_1 + \dots + x_n)$. Ils sont orthogonaux parce que

$$(p_i \circ p_j)(x_1 + \dots + x_n) = p_i(x_j) = 0 \tag{1.645}$$

lorsque $i \neq j$. De plus nous avons

$$(p_1 + \dots + p_n)(x_1 + \dots + x_n) = x_1 + \dots + x_n, \tag{1.646}$$

donc la somme est l'identité.

(2) **L'autre sens** Tout élément de M doit pouvoir être écrit de façon unique comme somme d'éléments des $p_i(M)$. Avant de nous lancer dans la preuve proprement dite, notons que que si $i \neq j$, alors $p_j(x_i) = 0$. En effet il existe $m \in M$ tel que $x_i = p_i(m)$; donc $p_j(x_i) = (p_j \circ p_i)(m) = 0$.

Pour l'existence, soit $x \in M$. Nous avons

$$x = (p_1 + \dots + p_n)(x) = p_1(x) + \dots + p_n(x). \tag{1.647}$$

En ce qui concerne l'unicité, si $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$ avec $x_i, y_i \in p_i(M)$, en prenant p_i des deux côtés, nous obtenons

$$x_i = p_i(x_1 + \dots + x_n) = p_i(y_1 + \dots + y_n) = y_i. \tag{1.648}$$

Donc $x_i = y_i$ pour tout i et nous avons l'unicité.

□

Définition 1.459.
Un module est ***simple*** *ou* ***irréductible*** *si il n'a pas d'autres sous-modules que* $\{0\}$ *et lui-même. Un module est* ***indécomposable*** *si il ne peut pas être écrit comme somme directe de sous-modules.*

Un module simple est a fortiori indécomposable. L'inverse n'est pas vrai comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.460.
Soit $\mathcal{E} = \mathbb{C}[X]/(X^2)$ vu comme $\mathbb{C}[X]$-module. C'est le $\mathbb{C}[X]$-module des polynômes de la forme $aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. L'ensemble des polynômes de la forme aX est un sous-module. Le module $\mathcal{E}$ n'est donc pas simple. Il est cependant indécomposable parce que $\{aX\}$ est le seul sous-module non trivial. En effet si $\mathcal{F}$ est un sous-module de $\mathcal{E}$ contenant $aX + b$ avec $b \neq 0$, alors $\mathcal{F}$ contient $X(aX + b) = bX$ et donc contient tout $\mathcal{E}$. △

DefAEbnJqI

Définition 1.461 (Algèbre[94])**.**
Si $\mathbb{K}$ *est un corps commutatif*[188]*, une* $\mathbb{K}$***-algèbre*** A *est un espace vectoriel*[189] *muni d'une opération bilinéaire* $\times : A \times A \to A$*, c'est-à-dire telle que pour tout* $x, y, z \in A$ *et pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*,*

(1) $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$

(2) $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$

(3) $(\alpha x) \times (\beta y) = (\alpha\beta)(x \times y)$.

Si A *et* B *sont deux* $\mathbb{K}$*-algèbres, une application* $f : A \to B$ *est un* ***morphisme d'algèbres*** *entre* A *et* B *si pour tout* $x, y \in A$ *et pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$*,*

(1) $f(xy) = f(x)f(y)$

(2) $f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$

[188] Définition 1.390
[189] Définition 1.446.

où nous avons noté xy pour $x \times y$.

LEMooVKLKooSAHmpZ

Lemme 1.462 ([1]).
Soient une algèbre A et une famille $(X_i)_{i\in I}$ de sous-algèbres de A (ici I est un ensemble quelconque). Alors la partie $X = \bigcap_{i\in I} X_i$ est une sous-algèbre de A.

Démonstration. Nous devons prouver que si x et y sont dans X et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors xy, $x+y$ et λx sont dans X. Pour tout $i \in I$ nous avons $x, y \in X_i$ et donc $xy \in X_i$, $x+y \in X_i$ et $\lambda x \in X_i$ (parce que X_i est une algèbre). Donc xy, $x+y$ et λx sont dans X_i pour tout I, et donc dans X. □

DefkAXaWY

Définition 1.463.
*L'**algèbre engendrée** par X est l'intersection de toutes les sous-algèbres de A contenant X (qui est une algèbre par le lemme 1.462).*

1.18 Caractéristique d'un anneau

LEMDEFooVEWZooUrPaDw

Lemme-Définition 1.464.
Soit l'application

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathbb{Z} &\to A \\ n &\mapsto n \cdot 1_A \end{aligned} \tag{1.649}$$

où $n \cdot 1_A$ est expliqué dans 1.386.

ITEMooPBWYooAWaCKJ

(1) C'est un morphisme d'anneaux.

ITEMooOQWMooFYcmFf

(2) Le noyau est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$

ITEMooWDWEooMSMxfN

(3) Il existe un unique $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\ker(\mu) = p\mathbb{Z}$.

*Ce p est la **caractéristique** de A.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Nous avons $\mu(1) = 1$ et $\mu(0) = 0$. De plus

$$\mu(n+m) = \sum_{i=1}^{n+m} 1_A = \sum_{i=1}^{n} 1_A + \sum_{i=n+1}^{n+m} 1_A = \mu(n) + \sum_{i=1}^{m} 1_A = \mu(n) + \mu(m). \tag{1.650}$$

Notez le passage délicat de $\sum_{i=n+1}^{n+m} 1_A = \sum_{i=1}^{m} 1_A$. Vu que ce qui est dans la somme sur i ne dépend pas de i, seul le cardinal de l'ensemble parcouru par i compte.

Nous avons donc $\mu(m+n) = \mu(n) + \mu(m)$. Notez que c'est également valide pour les négatifs grâce aux différentes conventions prises.

Le lemme 1.202 conclu que μ est un morphisme.

(2) **Pour (2)** Nous avons $\mu(0) = 0$ et donc $0 \in \ker(\mu)$. Si $k, l \in \ker(\mu)$, alors

$$\mu(k+l) = \mu(k) + \mu(l) = 0 + 0 = 0, \tag{1.651}$$

donc $k + l \in \ker(\mu)$.

(3) **Pour (3)** La proposition 1.185 montre que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $p\mathbb{Z}$.

□

Par exemple la caractéristique de $\mathbb{Q}$ est zéro parce qu'aucun multiple de l'unité n'est nul.
À propos de diagonalisation en caractéristique 2, voir l'exemple 8.221.

Lemme 1.465.
Si A est de caractéristique nulle, alors A est infini.

Démonstration. En effet, $\ker \mu = \{0\}$ implique que $n1_A \neq m1_A$ dès que $n \neq m$ et par conséquent A contient $\mathbb{Z}1_A$, et est infini. □

LemHmDaYH

Lemme 1.466.
Soit un anneau A de caractéristique p.

ITEMooPKSEooPKChGM

(1) *Si $p > 0$, alors nous avons l'isomorphisme d'anneaux*

$$\mathbb{Z}1_A \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}. \tag{1.652}$$

ITEMooBTUIooYzOycc

(2) *Si $p = 0$, alors nous avons l'isomorphisme d'anneaux*

$$\mathbb{Z}1_A \simeq \mathbb{Z} \tag{1.653}$$

Démonstration. Pour (1), l'isomorphisme est donné par l'application $n1_A \mapsto \phi(n)$ si ϕ est la projection canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Pour (2), la preuve est encore à faire. Écrivez-moi. □

PropGExaUK

Proposition 1.467.
La caractéristique d'un anneau fini divise son cardinal.

Démonstration. Si A est un anneau, le groupe $\mathbb{Z}$ agit sur A par

$$n \cdot a = a + n1_A. \tag{1.654}$$

Chaque orbite de cette action est de la forme

$$\mathcal{O}_a = \{a + n1_A \text{ tel que } n = 0, \dots, p-1\} \tag{1.655}$$

où p est la caractéristique de A. Les orbites ont p éléments et forment une partition de A, donc le cardinal de A est un multiple de p. □

LEMooJQIKooQgukqn

Lemme 1.468 ([95]).
Un anneau totalement ordonné est de caractéristique nulle.

Démonstration. Le morphisme $\mu\colon \mathbb{Z} \to A$, $n \mapsto n1_A$ est strictement croissant, en particulier $\mu(x) \neq \mu(y)$ dès que $x \neq y$. Donc $\ker(\mu) = \{0\}$. □

L'ensemble typique de caractéristique p est $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1.18.1 Endomorphisme de Frobenius

PropFrobHAMkTY

Proposition 1.469 (Endomorphisme de Frobenius[96]).
Soit A un anneau commutatif unitaire dont la caractéristique est un nombre premier p. L'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Frob}_A\colon A &\to A \\ x &\mapsto x^p \end{aligned} \tag{1.656}$$

est un automorphisme d'anneau unitaire.

En particulier nous avons

$$(a+b)^p = a^p + b^p. \tag{1.657}$$

*Cet automorphisme est nommé **morphisme de Frobenius**. Nous utiliserons aussi les itérés du morphisme de Frobenius :* $\mathrm{Frob}^k\colon x \mapsto x^{p^k}$.

Démonstration. Nous utilisons la formule du binôme de la proposition 1.387 :

$$\mathrm{Frob}_A(x,y) = (x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k}b^k. \tag{1.658}$$

Nous savons par le lemme 1.464 que si $\lambda \in p\mathbb{Z}$ et $x \in A$, alors $\lambda x = 0$ (attention aux notations, c'est expliqué dans 1.386). La proposition 1.385 dit que tous les termes de la somme (sauf le premier et le dernier) sont de la forme λx avec $\lambda \in p\mathbb{Z}$ et $x \in a$. Bref, tous ce coefficients sont divisibles par p et donc les éléments de A correspondants sont nuls :

$$\mathrm{Frob}_A(x,y) = x^p + y^p = \mathrm{Frob}_A(x) + \mathrm{Frob}_A(y) \tag{1.659}$$

Le lemme 1.464 conclu que Frob_A est un morphisme. □

Exemple 1.470.
Soit à factoriser $X^p - 1$ dans $\mathbb{F}_p$. Grâce au morphisme de Frobenius, nous avons immédiatement

$$X^p - 1 = (X - 1)^p. \tag{1.660}$$

△

LemCaractIntergernbrcartpre

Lemme 1.471.
La caractéristique[190] *d'un anneau intègre est zéro ou un élément premier*[191].

Démonstration. Si A est intègre, alors $\mathbb{Z}1_A$ est a fortiori intègre. Notons p la caractéristique de A. Si $p = 0$, la preuve est finie ; supposons donc que $p \neq 0$. Alors, l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}1_A$, et est donc intègre. Or, la proposition 1.411 dit que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si p est premier, ce qui conclut la preuve. □

Exemple 1.472.
Il existe des corps dont la caractéristique n'est pas égale au cardinal (contrairement à ce que laisserait penser l'exemple des $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). En effet les matrices $n \times n$ inversibles sur $\mathbb{F}_3$ forment un corps qui n'est pas de cardinal trois alors que la caractéristique est 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{1.661}$$

△

1.18.2 Caractéristique deux

Beaucoup de résultats demandent une caractéristique différente de deux. Qu'a donc de particulier la caractéristique deux ?

Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique 2, alors l'égalité $x = -x$ n'implique pas $x = 0$, puisque $2x = 0$ est vérifiée pour tout x. Cela se répercute sur un certain nombre de résultats. Par exemple, en caractéristique deux, une forme antisymétrique n'est pas toujours alternée : voir le lemme 8.7.

1.19 Polynômes

1.19.1 Polynômes d'une variable

Et voilà la définition que tout le monde attendait ; la définition des anneaux de polynômes. Pour ne pas taper trop fort du premier coup, nous commençons par les polynômes d'une seule variable[192].

L'ensemble des polynômes sur A sera simplement $A^{(\mathbb{N})}$ (notation 1.451). Puisque $\mathbb{N}$ est un ensemble bien particulier possédant plein de structure, nous allons pouvoir installer sur $A^{(\mathbb{N})}$ une structure non seulement de A-module (ça c'est déjà fait), mais en plus d'anneau, ainsi qu'une évaluation.

DEFooFYZRooMikwEL

Définition 1.473.
L'ensemble des ***polynômes*** *en une indéterminée sur l'anneau A est l'anneau*

$$\mathcal{P}(A) = A^{(\mathbb{N})} \tag{1.662}$$

défini en 1.451.

1.474.
En ce qui concerne la notation $A[X]$, voir 1.19.2. Pour $\mathbb{K}(X)$ lorsque $\mathbb{K}$ est un corps, voir 6.84.

DefDegrePoly

Proposition-Définition 1.475 ([97])**.**
Soit P non nul dans $\mathcal{P}(A)$. Nous notons a_n la valeur[193] *de P en $n \in \mathbb{N}$: $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(1) L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0\}$ est fini dans $\mathbb{N}$.

(2) Cet ensemble possède un minimum et un maximum.

[190] Définition 1.464.
[191] Définition 1.326.
[192] Pour les polynômes à plusieurs variables, voir la définition 3.39.
[193] Ici il y a une énorme subtilité de terminologie. Formellement, P est une application $\mathbb{N} \to A$. Cela n'a rien à voir avec le fait que P puisse être évalué sur A avec des formules du type $P(x) = \sum_n a_n x^n$. D'ailleurs nous n'avons pas encore vu cette évaluation.

*Le **degré** de P est*

$$\deg(P) = \max\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n \neq 0\}, \tag{1.663}$$

*et la **valuation** de P est*

$$\text{val}(P) = \min\{n \text{ tel que } a_n \neq 0\}. \tag{1.664}$$

Nous notons

$$\mathcal{P}_n(A) = \{P \in \mathcal{P}(A) \text{ tel que } \deg(P) \leqslant n\}, \tag{1.665}$$ EQooAULWooDgogWT

Dans le cas du polynôme nul, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n \neq 0\}$ est vide, et les définitions ne s'appliquent pas. Nous convenons que

$$\text{val}(0) = +\infty \tag{1.666a}$$
$$\deg(0) = -\infty. \tag{1.666b}$$

Démonstration. Le fait que P soit non nul implique que $A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n \neq 0\}$ est non vide. De plus cet ensemble est fini parce que $P \in A^{(\mathbb{N})}$. Toute partie finie non vide de $\mathbb{N}$ étant majorée et minorée (lemme 1.218), le lemme 1.217 définit correctement le minimum et le maximum de A. □

Vu que $A^{(\mathbb{N})}$ est engendré par les e_i, tout polynôme sur A s'écrit $P = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.

DEFooNXKUooLrGeuh

Définition 1.476.
Nous ajoutons deux structures à $A^{(\mathbb{N})}$.

L'évaluation *Si $\alpha \in A$ et si $P \in A^{(\mathbb{N})}$, nous définissons $P(\alpha)$ par*

$$P(\alpha) = (\sum_{i=0}^{n} a_i e_i)(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i, \tag{1.667}$$ EQooDJISooTEkMOw

étant entendu que $\alpha^0 = 1$ dans A.

Cette définition s'étend immédiatement au cas où B est un anneau qui étend A. Dans ce cas nous pouvons définir $P(b)$ pour tout $P \in A^{(\mathbb{N})}$ et $b \in B$ avec la même formule (1.667).

Le produit *C'est ici que la structure particulière de $\mathbb{N}$ est utilisée. Nous définissons le produit $A^{\mathbb{N}} \times A^{(\mathbb{N})} \to A^{(\mathbb{N})}$ de la façon suivante. Si $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite (presque partout nulle) d'éléments de A qui définit P et si $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est celle de Q, nous notons*

$$(PQ)_n = \sum_{k=0}^{n} P_k Q_{n-k}, \tag{1.668}$$ EQooTNCSooKklisb

et donc $PQ = \sum_i (PQ)_i e_i$. Plus explicitement,

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i e_i)(\sum_{j=0}^{m} b_j e_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j=k}} a_i b_j \Big) e_k. \tag{1.669}$$ EQooCIBUooAgpxjL

Notons qu'à droite, la somme sur k est une somme finie.

PROPooGDQCooHziCPH

Proposition 1.477.
Soit un anneau A. À propos de structure sur $A^{(\mathbb{N})}$.

(1) Avec le produit, l'ensemble $A^{(\mathbb{N})}$ devient un anneau.

(2) L'application

$$\begin{aligned} g\colon A^{(\mathbb{N})} &\to A \\ P &\mapsto P(\alpha) \end{aligned} \tag{1.670}$$

est un morphisme d'anneaux[194]. En particulier, $(PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)$.

Démonstration. En plusieurs points

(1) **Anneau** L'identité pour le produit dans $A^{(\mathbb{N})}$ est le polynôme donné par $a_0 = 1$ et $a_i = 0$ pour $i \neq 0$. Cela se vérifie en utilisant directement la définition (1.669). La distributivité aussi[195].

[194] Définition 1.98.
[195] Je n'ai pas fait les calculs, écrivez-moi pour me dire si ça va facilement.

(2) **Le morphisme** Nous notons P_k les éléments de la suite définissant P et Q_k ceux de Q. Alors nous avons

$$(P+Q)(\alpha)=\sum_k(P_k+Q_k)\alpha^k=\sum_k P_k\alpha^k+\sum_k Q_k\alpha^k=P(\alpha)+Q(\alpha). \tag{1.671}$$

Vous aurez noté que la première égalité était la définition (1.629b). De même,

$$P(\alpha)Q(\alpha)=\big(\sum_n P_n\alpha^n\big)\big(\sum_k Q_k\alpha^k\big)=\sum_k Q_k\big(\sum_n P_n\alpha^n\big)\alpha^k=\sum_k\sum_n Q_kP_n\alpha^{n+k} \tag{1.672a}$$

$$=\sum_m\big(\sum_{l=0}^{m}P_lQ_{m-l}\big)\alpha^m=\sum_m(PQ)_m\alpha^m=(PQ)(\alpha). \tag{1.672b}$$

□

LEMooWVUXooQlaepO

Lemme 1.478.
Si A est un anneau commutatif, alors $A^{(\mathbb{N})}$ est commutatif.

Démonstration. Soient $P,Q\in A^{(\mathbb{N})}$; pour rappel, le produit est donné par la définition 1.668. L'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon\{0,\dots,n\}&\to\{0,\dots,n\}\\ k&\mapsto n-k\end{aligned} \tag{1.673}$$

est une bijection. Voici maintenant le calcul :

$$(PQ)_n=\sum_{k=0}^{n}P_kQ_{n-k} \tag{1.674a}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}P_{\varphi(k)}Q_{n-\varphi(k)} \tag{1.674b}$$

SUBEQooISTNooLPvSIv

$$=\sum_{k=0}^{n}P_{n-k}Q_k \tag{1.674c}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}Q_kP_{n-k} \tag{1.674d}$$

SUBEQooCUMAooFjqqHW

$$=(QP)_n. \tag{1.674e}$$

Justifications

- Pour (1.674b). Lemme 1.304 et le fait que φ soit une bijection.
- Pour (1.674d). Commutativité de A.

□

1.19.2 La notation $A[X]$

SUBSECooLEKVooFBPSJz

Si A est un anneau, nous avons déjà défini les polynômes en une indéterminée sur A comme étant le module $A^{(\mathbb{N})}$ qui est devenu un anneau par la proposition 1.477.

Le polynôme donné par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est souvent notée

$$\sum_k a_kX^k. \tag{1.675}$$

Par exemple avec $a=(4,2,8)$ nous avons $a=8X^2+2X+4$. Nous utiliserons souvent cette notation, qui est très pratique parce qu'elle s'adapte bien aux règles de multiplication et d'addition, en particulier la distributivité.

Il y a (au moins) deux façons de comprendre ce que signifie réellement « X » dans cette notation.

1.19.2.1 Première façon (qui botte en touche)

La première est de dire qu'il n'a pas de significations, et que X^2 est un simple abus de notations pour écrire $(0,0,1,0,\cdots)$. Avec cette façon de voir, nous notons l'anneau des polynômes sur A par « $A[X]$ » où le X n'a pas d'autres raisons d'être que d'avertir le lecteur que nous réservons la lettre « X » pour utiliser la notation pratique des polynômes.

1.19.2.2 Seconde façon (la bonne)

SUBSUBSECTIONSHOWMORENOWWORKHere

1.479.
La seconde façon de voir le « X » est de nous rappeler que $A^{(\mathbb{N})}$ a une base en tant que module : les e_k dont nous avons parlé plus haut. Nous posons $X = e_1$, et nous prenons la convention $X^0 = 1$. Alors nous avons $e_k = X^k$ et nous notons $A[X]$ l'anneau $A^{(\mathbb{N})}$ exprimé avec X.

Dans les deux cas, il n'est pas vraiment légitime d'écrire des égalités comme « $P(X) = X^2 + 2X - 3$ », et encore moins de dire « Le polynôme P, *évalué* en X vaut $X^2 + 2X - 3$ » : il est plus correct d'écrire « $P = X^2 + 2X - 3$ ».

Le lemme suivant montre que ces notations tombent vraiment à point. La véritable difficulté de l'énoncé est de comprendre qu'il n'est pas trivial.

Nous avons vu dans la définition 1.476 que si B est un anneau qui étend A, et si $P \in A[X]$, alors nous avons une définition de $P(b)$ pour tout $b \in B$. Nous appliquons cela à $B = A[X]$, qui est un anneau qui étend A. Autrement dit, si P et Q sont des polynômes, ça a un sens d'écrire $P(Q)$ et le résultat sera un élément de $A[X]$.

Dans le cas particulier $Q = X$, nous avons une chouette formule.

LEMooGKWQooVOyeDX

Lemme 1.480.
Nous avons

$$P(X) = P \tag{1.676}$$

pour tout $P \in A[X]$.

Démonstration. Si $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ alors par définition $P(\alpha) = \sum_k a_k\alpha^k$ dès que α est dans un anneau B qui étend A. Nous considérons le cas particulier $B = A[X]$ et $\alpha = X$, c'est-à-dire $Q = (0, 1, 0, \ldots)$, l'élément $P(X)$ de $A[X]$ vaut

EQooABULooFCEasf

$$\sum_k a_k X^k, \tag{1.677}$$

qui est exactement P lui-même. □

Mais il faut bien comprendre que si P est le polynôme $(-3, 2, 1, 0, \ldots)$, noté X^2+2X-3, écrire $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est une pirouette de notations que rien ne justifie par rapport à simplement écrire $P = X^2 + 2X - 3$.

1.19.3 Action du groupe symétrique

DefActionGroupe

Définition 1.481 (Action de groupe Thème 9)**.**
*Une **action de groupe** G sur un ensemble E est une application $\phi\colon G \times E \to E$ telle que*

$$\begin{aligned} \phi(e, x) &= x, \qquad \forall x \in E; \\ \phi(gh, x) &= \phi\big(g, \phi(h, x)\big) \qquad \forall g, h \in G, \forall x \in E. \end{aligned}$$

*On dit dans ce cas que G **agit** sur E.*

Nous allons souvent noter l'élément $\phi(g, x)$ pourra être noté de plein de façons :

$$\phi(g, x) = \phi_g(x) = \phi_x(g) = g \cdot x. \tag{1.678}$$

La définition d'un groupe agissant continument sera la définition 13.3.

Par souci de notations, nous notons $\mathcal{P}_n(A)$ l'anneau des polynômes de n variables sur A. La propriété universelle de $\mathcal{P}_n(A) = A^{(\mathbb{N}^n)}$ du théorème 1.453 nous donne une application

$$g\colon \text{Fun}\big(\mathbb{N}^n, \mathcal{P}_n(A)\big) \to \text{Hom}_A\big(\mathcal{P}_n(A), \mathcal{P}_n(A)\big) \tag{1.679}$$

Avec cela nous pouvons énoncer et démontrer le lemme qui donne l'action de S_n[196] sur $\mathcal{P}_n(A)$.

LEMooIRVQooHvoNBq

Lemme 1.482 ([98])**.**
Pour $\sigma \in S_n$ nous définissons

$$\begin{aligned} \phi_\sigma\colon \mathbb{N}^n &\to \mathcal{P}_n(A) \\ m &\mapsto e_{\sigma(m)}. \end{aligned} \tag{1.680}$$

Alors l'application

$$\begin{aligned} \rho\colon S_n &\to \text{Hom}_A\big(\mathcal{P}_n(A), \mathcal{P}_n(A)\big) \\ \sigma &\mapsto g(\phi\sigma) \end{aligned} \tag{1.681}$$

[196] Définition du groupe symétrique S_n en 1.269.

est une action[197].

Démonstration. Nous commençons par donner une expression à notre ρ. Un élément de $\mathcal{P}_n(A)$ est de la forme $\sum_{m\in\mathbb{N}^n} a_m e_m$, et nous avons[198]

$$\rho(\sigma)\big(\sum_{m\in\mathbb{N}^n} a_m e_m\big) = \sum_m a_m \phi_\sigma(m) = \sum_m a_m e_{\sigma(m)}. \tag{1.682}$$

Nous avons tout de suite $\rho(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$.
En ce qui concerne la composition, nous avons d'une part

$$\rho(\sigma_1\sigma_2)\big(\sum_m a_m e_m\big) = g(\phi_{\sigma_1\sigma_2})\big(\sum_m a_m e_m\big) = \sum_m a_m e_{\sigma_1\sigma_2(m)}, \tag{1.683}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
\rho(\sigma_1)\rho(\sigma_2)\big(\sum_m a_m e_m\big) &= \rho(\sigma_1)\big(\sum_m a_m e_{\sigma_2(m)}\big) && \text{(1.684a)}\\
&= \rho(\sigma_1)\big(\sum_m a_{\sigma_2^{-1}(m)} e_m\big) && \text{(1.684b)}\\
&= \sum_m a_{\sigma_2^{-1}(m)} e_{\sigma_1(m)} && \text{(1.684c)}\\
&= \sum_m a_m e_{\sigma_1\sigma_2(m)} && \text{(1.684d)}
\end{aligned}$$

SUBEQooTSCYooCUWiRz

SUBEQooQPGPooVvqJdT

La proposition 1.305 est utilisée pour (1.684b) et pour (1.684d). □

1.19.4 Corps des fractions

DEFooGJYXooOiJQvP

Proposition 1.483 ([99]).
Soit un anneau commutatif et intègre[199] *A. Nous posons $E = A \times A \setminus \{0\}$, et nous définissons les deux opérations suivantes sur E :*

ITEMooWBWHooYsXFkO

(1) $(a,b) + (c,d) = (ad + cb, bd)$;

ITEMooGOOIooCHqLRl

(2) $(a,b)(c,d) = (ac, bd)$.

Nous notons a/b la classe de (a,b). Alors

ITEMooRXFAooUqQfIV

(1) La relation $(a,b) \sim (c,d)$ si et seulement si $ad = bc$ est une relation d'équivalence[200].

ITEMooSFZEooUqFGIB

(2) La somme passe au quotient : si $(x,y) \sim (a,b)$ et $(z,t) \sim (c,d)$, alors

$$(x,y) + (z,t) \sim (a,b) + (c,d). \tag{1.685}$$

ITEMooIZDTooEoALGh

(3) Le produit passe au quotient : si $(x,y) \sim (a,b)$ et $(z,t) \sim (c,d)$, alors

$$(x,y)(z,t) \sim (a,b)(c,d). \tag{1.686}$$

ITEMooOTZJooMkarjT

(4) Le quotient

$$\mathrm{Frac}(A) = \big(A \times A \setminus \{0\}\big)/\sim \tag{1.687}$$

muni des sommes et produit passées au quotient est un corps dont

ITEMooLFSEooAIrbFK

(4a) La classe de $(0,1)$ est neutre pour la somme.

ITEMooYUNEooAKZJEh

(4b) La classe de $(1,1)$ est neutre pour la multiplication.

ITEMooOGPCooAZGWoF

(4c) L'opposé de a/b est $(-a)/b$.

ITEMooECDBooJdJEza

(4d) Si $a \neq 0$, alors l'inverse de a/b est b/a.

[197] Définition 1.481.
[198] La somme est définie par 1.304, et ça va être important. Ah oui, en réalité partout, les sommes sont finies parce que les a_m ($m \in \mathbb{N}^n$) sont presque tous nuls. Il faudrait écrire sur la somme sur $\{m \in \mathbb{N}^2$ tel que $a_m \neq 0\}$, mais vous vous imaginez la complication dans la notation.
[199] Définition 1.335.
[200] Définition 1.50.

ITEMooZOTMooMaIblt

(5) *Soit un couple $(\mathbb{K}, \epsilon)$ où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et $\epsilon\colon A \to \mathbb{K}$ est un morphisme injectif d'anneaux tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe $(a,b) \in A \times A^*$ tels que*

$$\lambda = \epsilon(a)\big(\epsilon(b)\big)^{-1} \tag{1.688}$$

Alors il y a un isomorphisme de corps entre $\mathbb{K}$ et $\text{Frac}(A)$.

*Un corps $\mathbb{K}$ ayant les propriétés de (5) est est un **corps des fractions** de A. Lorsque nous parlons du corps des fractions de A sans précisions*[201]*, nous parlons de $\text{Frac}(A)$.*

Démonstration. En plein de parties.

(1) **Pour (1) : relation d'équivalence** Il faut vérifier les conditions de la définition 1.50. Vu que $ab = ba$ nous avons $(a,b) \sim (a,b)$. Pour la symétrie c'est la même chose. Pour la transitivité, si $(a,b) \sim (c,d)$ et $(c,d) \sim (x,y)$ alors $ad = bc$ et $cy = dx$.

Si $c = 0$ alors comme $d \neq 0$ et $ad = bc$, nous avons $a = 0$ (par 1.335(2)) et comme $cy = dx$, nous avons $x = 0$. Donc $ay = 0 = bx$.

Si $c \neq 0$, alors nous multiplions les deux égalités entre elles : $adcy = bcdx$. Nous pouvons simplifier par d et c en vertu de la définition 1.335(3) d'un anneau intègre. Il reste $ay = bx$, c'est-à-dire $(a,b) \sim (x,y)$.

(2) **Pour (2)** L'hypothèse est que $xb = ya$ et $zd = tc$. Nous avons

$$(a,b) + (c,d) = (ad + cb, bd) \tag{1.689a}$$
$$(x,y) + (z,t) = (xt + yz, yt). \tag{1.689b}$$

Pour voir qu'ils sont équivalents, nous vérifions que $(ad+cb)(yt) = bd(xt+yz)$. Il suffit de développer et de substituer xb par ya et zd par tc là où vous les trouvez.

(3) **Pour (3)** L'hypothèse est que $xb = ya$ et $zd = tc$. Nous avons

$$(x,y)(z,t) = (xz, yt) \tag{1.690a}$$
$$(a,b)(c,d) = (ax, bd). \tag{1.690b}$$

Encore une fois, on vérifie que $xzbd = ytac$.

(4) **Pour (4)** Il y a quelques vérifications à faire pour l'associativité et la distributivité[202].

Nous nous concentrons sur les sous-points.

(4a) **Pour (4a)** Simple vérification : $(a,b) + (0,1) = (a+0, b) = (a,b)$.

(4b) **Pour (4b)** Nous devons prouver que si $(x,y) \in 1/1$, alors $(a,b)(x,y) \sim (1,1)$. L'hypothèse est que $(x,y) \sim (1,1)$, c'est-à-dire $x = y$. À partir de là il suffit de calculer $(a,b)(x,y))$ et de voir que $ayb = bxa$.

(4c) **Pour (4c)** Nous avons $(a,b) + (-a,b) = (0,b^2) \sim (0,1)$. Donc

$$\overline{(a,b)} + \overline{(-a,b)} = \overline{(a,b) + (-a,b)} = \overline{0,1}. \tag{1.691}$$

(4d) **Pour (4d)** Nous avons simplement le calcul

$$(a,b)(b,a) = (ab, ab) \sim (1,1). \tag{1.692}$$

(5) **Morphisme de corps** Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon A \times A^* &\to \mathbb{K} \\ (a,b) &\mapsto \epsilon(a)\epsilon(a)^{-1}, \end{aligned} \tag{1.693}$$

et nous prouvons que $f(a,b) = f(x,y)$ si et seulement si $(a,b) \sim (x,y)$.

[201] Par exemple lorsque nous dirons que $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.

[202] Je vous invite à les faire parce que je n'ai pas vérifié.

(5a) $\Rightarrow$ Si $f(a,b)=f(x,y)$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
\epsilon(a)\epsilon(b)^{-1}&=\epsilon(x)\epsilon(y)^{-1} && && (1.694a)\\
\epsilon(a)\epsilon(y)&=\epsilon(x)\epsilon(b) && && (1.694b)\\
\epsilon(ay)&=\epsilon(xb) && && (1.694c)\\
ay&=xb && \epsilon \text{ est injectif} && (1.694d)\\
(a,b)&\sim(x,y) && && (1.694e)
\end{aligned}$$

(5b) $\Leftarrow$ Même calcul, à l'envers, en partant de $ay=bx$.

Nous pouvons donc définir

$$\begin{aligned}\varphi\colon \text{Frac}(A)&\to\mathbb{K}\\ \overline{(a,b)}&\mapsto f(a,b)=\epsilon(a)\epsilon(b)^{-1}.\end{aligned}\tag{1.695}$$

(5a) φ **est injectif** Si $\varphi\big(\overline{(a,b)}\big)=\varphi\big(\overline{(x,y)}\big)$, alors $f(a,b)=f(x,y)$, c'est-à-dire $(a,b)\sim(x,y)$ par ce qui a été fait juste au-dessis.

(5b) φ **est un morphisme** D'abord

$$\varphi\big(\overline{(a,b)(c,d)}\big)=\varphi\big(\overline{(ad,bc)}\big)=f(ad,bc)=\epsilon(ad)\epsilon(bc)^{-1}.\tag{1.696}$$

Et en même temps,

$$\varphi\big(\overline{(a,b)}\big)\varphi\big(\overline{(c,d)}\big)=f(a,b)f(c,d)=\epsilon(a)\epsilon(b)^{-1}\epsilon(c)\epsilon(d)^{-1}.\tag{1.697}$$

Le fait que ce soit égal provient de

$$\epsilon(bc)^{-1}=[\epsilon(b)\epsilon(c)]^{-1}=\epsilon(b)^{-1}\epsilon(c)^{-1}.\tag{1.698}$$

□

DEFooXHKGooCcJbTR

Définition 1.484 ([1]).
Lorsque A est un anneau de polynômes[203]*, alors les éléments de* Frac(A) *sont des* ***fractions rationnelles****.*

PROPooUULNooKbwuEw

Proposition 1.485.
Soit un anneau commutatif A. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}i\colon A&\to\text{Frac}(A)\\ a&\mapsto a/1.\end{aligned}\tag{1.699}$$

(1) Elle est injective.

(2) Elle est un morphisme d'anneaux[204]*.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Injective** Supposons que $f(a)=f(b)$, c'est-à-dire que $a/1=b/1$. En vertu de la relation d'équivalence donnée en 1.483, nous avons $a1=b1$, c'est-à-dire $a=b$.

(2) **Morphisme d'anneaux** D'abord nous avons

$$\begin{aligned}i(a)+i(b)&=(a/1)+(b+1) && (1.700a)\\ &=(a1+1b)/1 && (1.700b)\\ &=i(a+b). && (1.700c)\end{aligned}$$

Ensuite,

$$i(a)i(b)=(a/1)(b/1)=ab/1=i(ab).\tag{1.701}$$

Et enfin $i(1)=1/1$ est bien l'unité de Frac(A) par 1.483(4b).

□

[203] Définition 1.473.
[204] Définition 1.98.

NORMooFBKEooBQuATg

1.486.
Si $a \in A$, nous nous permettrons de noter également a l'élément $a/1$ de $\mathrm{Frac}(A)$. Ce sera toujours clair dans le contexte.

NORMooVYEMooUiUfnE

1.487.
En vertu de la proposition 1.485, à partir de maintenant, nous allons identifier la partie $i(\mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}$. Nous nous autorisons donc à dire que $4 \in \mathbb{Q}$ ou que $-7 \in \mathbb{Q}$, et même que $0 \in \mathbb{Q}$.

PROPooTXGUooRvViwT

Proposition 1.488 (Règle de simplification de fraction[1])**.**
Soit un anneau commutatif A. Si $a, x, y \in A$ avec $a, y \neq 0$, nous avons

(1)

$$ax/a = x/1. \tag{1.702}$$

Si vous avez suivi 1.486, cela signifie que $ax/a = x$ dans $\mathrm{Frac}(A)$.

(2)

$$ax/ay = x/y \tag{1.703}$$

dans $\mathrm{Frac}(A)$.

LEMooBJRCooIZnaid

Lemme 1.489.
Soient un anneau A ainsi que $a, b, x, y \in A$. Si $b, y \neq 0$, nous avons $ay = bx$ dans A si et seulement si nous avons $ab^{-1} = xy^{-1}$ dans $\mathrm{Frac}(A)$[205].

Démonstration. Deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons avoir $ay = bx$ dans A. En passant aux classes, cela donne l'égalité $ay/1 = bx/1$ dans $\mathrm{Frac}(A)$. Nous multiplions les deux membres par $(b/1)^{-1}(y/1)^{-1}$. En utilisant les différents points de la définition 1.483, et en particulier (4d), nous avons$(b/1)^{-1}(y/1)^{-1} = 1/by$. Nous avons donc

$$(ay/1)(1/by) = (bx/1)(1/by). \tag{1.704}$$

En utilisant les relations de simplification de la proposition 1.488, nous avons $ay/by = a/b$ à gauche et $bx/by = x/y$ à droite. Bref, nous avons

$$a/b = x/y. \tag{1.705}$$

Le membre de gauche peut être récrit $a/b = (a/1)(b/1)^{-1}$, ce qui peut s'écrire ab^{-1}.

$\Leftarrow$ L'hypothèse s'écrit, sans abus de notations sous la forme

$$(a/1)(b/1)^{-1} = (x/1)(y/1)^{-1}. \tag{1.706}$$

En multipliant les deux côtés par $(b/1)(y/1)$ nous trouvons

$$ay/1 = xb/1. \tag{1.707}$$

Nous pouvons écrire cela explicitement avec la relation d'équivalence qui définit $\mathrm{Frac}(A)$ (définition 1.483) :

$$(ay, 1) \sim (xb, 1), \tag{1.708}$$

c'est-à-dire $ay1 = 1xb$, ce que nous voulions. □

La proposition suivante montre encore que le corps des fractions est le plus petit corps que l'on puisse imaginer à partir d'un anneau.

PROPooIJBEooDjsoHr

Proposition 1.490 ([15, 1])**.**
Soit un anneau commutatif A. Tout corps commutatif contenant un sous-anneau isomorphe[206] *à A contient un sous-corps isomorphe à* $\mathrm{Frac}(A)$.

Démonstration. Soit un corps $\mathbb{K}$ contenant un sous-anneau A' isomorphe à A. Nous notons $\sigma : A' \to A$ un isomorphisme d'anneaux entre A' et A.

[205] Rappel de 1.487 : si $a \in A$, nous nommons $a \in \mathrm{Frac}(A)$ l'élément $a/1$, c'est-à-dire la classe de $(a, 1)$
[206] Morphisme d'anneaux, définition 1.98.

(1) **Une partie bien choisie**

Nous considérons la partie suivante de $\mathbb{K}$:

$$S = \{ab^{-1} \text{ tel que } a, b \in A'\}. \tag{1.709}$$

(2) **S est un corps** Deux éléments arbitraires de S sont ab^{-1} et xy^{-1}. Nous devons prouver plusieurs choses.

(2a) **Neutres** En prenant $a = b = 1$ nous avons $ab^{-1} = 1 \in S$. En prenant $a = 0$ et $b = 1$ nous avons $ab^{-1} = 0 \in S$.

(2b) **Somme** Il faut remarquer que $ab^{-1} + xy^{-1} = (ay + xb)(by)^{-1}$. En effet,

$$\begin{aligned}(ay + xb)(by)^{-1} &= (ay + xb)y^{-1}b^{-1} && \text{(1.710a)}\\ &= ayy^{-1}b^{-1} + xby^{-1}b^{-1} && \text{(1.710b)}\\ &= ab^{-1} + xy^{-1} && \text{(1.710c)}\end{aligned}$$

SUBEQooRGPSooXaBGyx
SUBEQooOHJGooWrfPow

Justifications :

- Pour (1.710b). Distributivité.
- Pour (1.710c). Commutativité dans A.

(2c) **Produit** Il s'agit du même genre de calculs en utilisant les mêmes propriétés. Nous avons

$$(ab^{-1})(xy^{-1}) = (ax)(by)^{-1}. \tag{1.711}$$

(3) **Ce qui va être notre isomorphisme**

Ensuite nous montrons que l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon S &\to \text{Frac}(A)\\ ab^{-1} &\mapsto \sigma(a)/\sigma(b)\end{aligned} \tag{1.712}$$

est bien définie et est un isomorphisme de corps.

(4) **Bien définie**

Si $ab^{-1} = xy^{-1}$ alors $ay = xb$. Puisque σ est un isomorphisme nous avons aussi $\sigma(a)\sigma(y) = \sigma(x)\sigma(b)$ et donc $\sigma(a)/\sigma(b) = \sigma(x)/\sigma(y)$ par définition des classes de $\text{Frac}(A)$.

(5) **Morphisme** Deux éléments arbitraires de S sont ab^{-1} et xy^{-1}. Calculons un peu :

$$\begin{aligned}\varphi\big((ab^{-1})(xy^{-1})\big) &= \varphi(axy^{-1}b^{-1}) && \text{(1.713a)}\\ &= \varphi\big((ax)(by)^{-1}\big) && \text{(1.713b)}\\ &= \sigma(ax)/\sigma(by) && \text{(1.713c)}\\ &= \big(\sigma(a)/\sigma(b)\big)\big(\sigma(x)/\sigma(y)\big) && \text{(1.713d)}\\ &= \varphi(ab^{-1})\varphi(xy^{-1}). && \text{(1.713e)}\end{aligned}$$

SUBEQooRONTooKVTRdZ
SUBEQooNOTAooZVJymC
SUBEQooVQUOooVyVjEU

Justifications :

- Pour (1.713a). Commutativité dans A.
- Pour (1.713b). Associativité dans A.
- Pour (1.713d). Définition 1.483(2) de la multiplication de fractions.

(6) **Surjectif**

Tout élément de $\text{Frac}(A)$ est de la forme a'/b' avec $a', b' \in A$, et donc de la forme $\sigma(a)/\sigma(b)$ avec $a, b \in A'$. Un tel élément est l'image par φ de $ab^{-1} \in S$.

(7) **Injectif**

Si $\varphi(ab^{-1}) = \varphi(xy^{-1})$ alors $\sigma(a)/\sigma(b) = \sigma(x)/\sigma(y)$, et par définition des classes nous avons $\sigma(a)\sigma(y) = \sigma(b)\sigma(x)$. De là nous avons $\sigma(ay) = \sigma(bx)$ et donc $ay = bx$ (parce que σ est un isomorphisme). Nous en déduisons que $ab^{-1} = xy^{-1}$.

□

1.491.
Soit un anneau A et son anneau des polynômes $\mathcal{P}(A)$. Si $\alpha \in A$, nous avons la définition 1.476 qui donne l'évaluation $P(\alpha)$.

Si par contre P et Q sont des polynômes sur A, nous n'avons pas encore défini ce que serait l'évaluation de la fraction rationnelle P/Q en α. Nous comblons à présent ce manque.

DEFooLBIWooCPCaSY

Définition 1.492 (Évaluation d'une fraction rationnelle)**.**
Soit un corps $\mathbb{K}$ contenant l'anneau A. Si $R = P/Q \in \text{Frac}(A)$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$ nous définissons[207]

$$R(\alpha) = (P/Q)(\alpha) = P(\alpha)Q^{-1}(\alpha). \tag{1.714}$$

Dans cette formule, les polynômes, l'inverse et le produit sont calculés dans $\mathbb{K}$ et non dans A.

1.19.5 Corps totalement ordonné

Rappel. Vu qu'un corps est un anneau, nous avons déjà défini la notion d'être totalement ordonné en 1.107 valeur absolue sur un corps en 1.113.

DefKCGBooLRNdJf

Définition 1.493.
Ordre et choses reliées dans un corps.

ItemVXOZooTYpcYN

(1) *La suite (x_n) dans le corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ est **de Cauchy** si pour tout $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{K}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q \geqslant N$ alors $|x_p - x_q| \leqslant \epsilon$.*

ITEMooDERQooLmJwFR

(2) *La suite (x_n) dans le corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ est **convergente** si il existe $q \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{K}$, il existe N tel que si $k \geqslant N$ alors $|x_k - q| \leqslant \epsilon$.*

ITEMooKZZYooDaidGU

(3) *Un corps totalement ordonné est **complet** si toute suite de Cauchy y est convergente.*

ITEMooMWASooEzhVyh

(4) *Si $a, \epsilon \in \mathbb{K}$ avec $\epsilon > 0$ alors nous définissons la **boule ouverte** de centre a et de rayon ϵ par*

$$B(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{K} \text{ tel que } |a - x| < \epsilon\}, \tag{1.715}$$

*et la **boule fermée** par*

$$\overline{B(a, \epsilon)} = \{x \in \mathbb{K} \text{ tel que } |a - x| \leqslant \epsilon\}. \tag{1.716}$$

Lemme 1.494.
Une suite (x_k) converge vers q si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $x_k \in B(q, \epsilon)$ pour tout $k \geqslant N$.

Démonstration. Il s'agit de mettre côte à côte les points (2) et (4) de la définition 1.493. □

1.495.
Ces boules prendront une nouvelle force avec le super-théorème 7.142.

PROPooJZIMooHOimlv

Proposition 1.496 ([1])**.**
Soit une suite de Cauchy (x_n) dans $\mathbb{Q}$. Nous supposons que (x_n) admette une sous-suite convergente vers $q \in \mathbb{Q}$. Alors $x_n \to q$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons $N > 0$ tel que si $n, k \geqslant N$ alors $|x_k - q| < \epsilon/2$. Soit $k > N$ tel que $|x_k - q| < \epsilon/2$. Cela existe ; il suffit de prendre k assez loin dans la sous-suite qui converge vers q. Pour tout $n \geqslant k$ nous avons alors

$$|x_n - q| \leqslant |x_n - x_k| + |x_k - q| = \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \tag{1.717}$$

□

Parmi ces définitions, celles de suite convergente, de Cauchy et de corps complet seront utilisées dans le cas de $\mathbb{Q}$ (et de $\mathbb{R}$ pour la complétude). Elles seront prouvées être équivalentes aux définitions topologiques dans le cas particulier de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ lorsque la topologie métrique sera définie. Dans cet état d'esprit nous n'allons pas démontrer tout de suite que $\mathbb{R}$ est un corps complet. Nous allons directement démontrer que c'est un espace topologique complet.

LEMooQXDCooPEABBm

Lemme 1.497 (À propos de boules)**.**
Soient un corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ et des éléments $x, y \in \mathbb{K}$. Soit aussi $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{K}$. Nous avons :

[207] Les fractions rationnelles, définition 1.483.

ITEMooXJGVooSebiip

(1) $y \in B(x,\epsilon)$ *si et seulement si* $x-\epsilon < y < x+\epsilon$.

ITEMooRUBBooRayiMs

(2) *Si* $y \in \overline{B(x,\epsilon)}$ *alors* $y \in B(x,\epsilon')$ *pour tout* $\epsilon' > \epsilon$.

Démonstration. Pour rappel,

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{si } x-y \geqslant 0 \\ y-x & \text{si } x-y \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.718}$$

Nous pouvons maintenant démontrer nos assertions.

(1) **(1)** En deux parties.

(1a) $\Rightarrow$ Nous supposons que $|x-y| < \epsilon$.
Si $x-y \geqslant 0$ alors l'hypothèse signifie $x-y < \epsilon$, ce qui donne $y > x-\epsilon$. Mais l'inégalité $x-y \geqslant 0$ donne également $x \geqslant y$ et donc $x+\epsilon \geqslant y+\epsilon > y$. Notez le jeu de l'inégalité non stricte qui se change en inégalité stricte.
Si $x-y \leqslant 0$ nous pouvons faire le même raisonnement.

(1b) $\Leftarrow$ Des inégalités $x-\epsilon < y$ et $y < x+\epsilon$ nous tirons $x-y < \epsilon$ et $y-x < \epsilon$. Donc quel que soit le signe de $x-y$ nous avons toujours $|x-y| < \epsilon$.

(2) **(2)**
C'est immédiat parce que

$$|x-y| \leqslant \epsilon < \epsilon'. \tag{1.719}$$

□

LEMooVZNCooRJatKK

Lemme 1.498 ([100]).
Tout anneau totalement ordonné est de caractéristique nulle.

Démonstration. Si $x \in A$ vérifie $x > 0$, alors la définition 1.107(1) nous permet d'écrire

$$x + 1_A > 1_A > 0. \tag{1.720}$$

Nous avons tenu compte de 1.109(4). Il n'existe en particulier aucun p tel que $p1_A = 0$. Sinon nous aurions $(p-1)1_A + 1_A = 0$. □

1.20 Les rationnels

Note : pour l'existence et l'unicité de l'écriture $q = k/d$, il faut voir le théorème 3.29.
Une construction très explicite est faite dans [35]. Ici nous allons prendre plus court :

Définition 1.499.
Le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ *(définition 1.483) est noté* $\mathbb{Q}$ *et ses éléments sont les* ***rationnels****.*

La proposition suivante provient de 1.485.

PROPooKUIYooCxMHTX

Proposition 1.500 ([1]).
L'application

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Q} \\ a &\mapsto a/1 \end{aligned} \tag{1.721}$$

est un morphisme injectif.

PROPooDHIAooZysvNs

Proposition 1.501.
L'ensemble des rationnels est infini dénombrable[208].

Démonstration. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est infini[209] et la proposition 1.485 donne une injection $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Donc $f(\mathbb{Z})$ est infini.
L'ensemble $\mathbb{Q}$ contient une partie infinie. Il est donc infini par le lemme 1.71.

[208] Ouais, je sais, dans les définitions prises ici, un ensemble dénombrable est toujours infini. Mais l'excès de précision ne tue pas, loin s'en faut.
[209] Lemme 1.201.

L'application

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{Z}^2 &\to \mathbb{Q} \\ a,b &\mapsto a/b \end{aligned} \tag{1.722}$$

est surjective alors que $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable. Le lemme 1.229 dit alors que $\mathbb{Q}$ est fini ou dénombrable. Vu que nous avons déjà prouvé que $\mathbb{Q}$ était infini, nous déduisons que $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable. □

1.20.1 Relation d'ordre

PROPooEBCHooYEQkIO

Proposition 1.502 ([1]).
Soient $a,b\in\mathbb{Z}$ tels que $ab\geqslant 0$[210]. Alors si $(x,y)\sim(a,b)$, nous avons $xy\geqslant 0$.

Démonstration. L'hypothèse $(x,y)\sim(a,b)$ dit que $ab=ya$. L'astuce est de calculer $(xy)(bb)$ en nous servant de $xb=ya$:

$$(xy)b^2=yayb=aby^2. \tag{1.723}$$

Vu que $ab\geqslant 0$ et $y^2\geqslant 0$, le membre de droite est positif (proposition 1.195). Nous avons donc aussi $xyb^2\geqslant 0$. La proposition 1.195(7) dit encore que dans ce cas $xy\geqslant 0$. □

PROPooEOZWooLxRPXa

Proposition 1.503 ([1]).
La partie

$$\mathbb{Q}^+=\{a/b \text{ tel que } ab>0\}\subset\mathbb{Q} \tag{1.724}$$

est bien définie et est une positivité[211]

Démonstration. Le fait que ce soit bien défini est la proposition 1.502.

(1) Supposons pour le plaisir de la contradiction que $a/b\in\mathbb{Q}^+$ et $-(a/b)\in\mathbb{Q}^+$. En utilisant la propriété 1.483(4c) nous avons $ab>0$ et $(-a)b>0$. En utilisant 1.182(1) nous avons

$$\begin{cases} (ab)>0 & \text{(1.725a)}\\ -(ab)>0. & \text{(1.725b)} \end{cases}$$

En utilisant 1.195(2) nous trouvons $ab(-ab)>0$. En utilisant encore une des nombreuses propriétés déjà citées, nous trouvons $-a^2b^2>0$, c'est-à-dire

$$a^2b^2<0, \tag{1.726}$$

ce qui est faux parce que $a^2b^2\geqslant 0$.

(2) Supposons que $a/b\in\mathbb{Q}^+$ et $x/y\in\mathbb{Q}^+$ (b et y sont non nuls). Cette hypothèse signifie que $ab>0$ et $xy>0$. Nous devons prouver que $(a/b)+(x/y)\in\mathbb{Q}^+$. Nous avons

$$\frac{a}{b}+\frac{x}{y}=\frac{ay+bx}{by}. \tag{1.727}$$

Nous avons un petit calcul à faire :

EQooLGUJooYAUXPJ

$$by(ay+bx)=aby^2+b^2xy. \tag{1.728}$$

Par hypothèse, $ab>0$. Nous savons aussi que $y^2\geqslant 0$. Mais dans notre cas nous avons $y^2\neq 0$. Donc $aby^2>0$. Même raisonnement pour b^2xy. Bref ce que nous avons dans (1.728) est strictement positif.

□

DEFooZEXXooUtOhqB

Proposition-Définition 1.504 (Ordre sur $\mathbb{Q}$[35]).
Nous considérons l'ensemble

$$\mathbb{Q}^+=\{a/b \text{ tel que } ab>0\}\subset\mathbb{Q}. \tag{1.729}$$

ITEMooUSILooIfkVsR

(1) $\mathbb{Q}^+$ est une positivité sur $\mathbb{Q}$.

ITEMooSDSVooEOTRLY

(2) Pour $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ nous disons $\alpha\leqslant\beta$ si et seulement si

$$\beta-\alpha\in\mathbb{Q}^+\cup\{0\}. \tag{1.730}$$

Cela définit un ordre total[212].

[210] Définition 1.189 pour l'ordre dans $\mathbb{Z}$.
[211] Définition 1.99.
[212] Définition 1.24.

Démonstration. Plusieurs points.

(1) **Pour (1)** C'est la proposition 1.503.

(2) **Pour (2)** C'est la proposition 1.100.

□

PROPooNSICooAQczDh

Proposition 1.505 ([1]).
Soient $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tels que

$$\begin{cases} q_1 \geqslant r_1 & (1.731a) \\ q_2 \geqslant r_2. & (1.731b) \end{cases}$$

Alors $q_1 + q_2 \geqslant r_1 + r_2$.

PROPooCILQooOuyrfI

Proposition 1.506 ([1]).
Soit $q \in \mathbb{Q}$.

(1) Nous avons $q^2 \geqslant 0$.

(2) Nous avons $q^2 = 0$ si et seulement si $q = 0$.

PROPooXNBVooIvBmkW

Proposition 1.507 ([1]).
L'application

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Q} \\ a &\mapsto a/1 \end{aligned} \tag{1.732}$$

est un morphisme injectif qui respecte l'ordre.

Démonstration. Le fait que ce soit un morphisme injectif est la proposition 1.500.

Le respect de l'ordre doit encore être fait[213]. □

1.508.
Le lemme suivant 1.511 dit que tout rationnel est majoré par un naturel. Vu que les naturels et les rationnels ne sont pas du tout les mêmes ensembles (les entiers sont des classes de naturels et les rationnels des classes d'entiers), l'énoncé n'a à priori pas de sens.

La réalité est que nous identifions $\mathbb{N}$ à une partie de $\mathbb{Q}$ via les propositions 1.184 et 1.507. L'énoncé exact serait que si $q \in \mathbb{Q}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $i\big(\iota(n)\big) > q$.

PROPooTEREooZgblWu

Proposition 1.509 ([1]).
Si $q > 0$ dans $\mathbb{Q}$, alors il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $q = a/b$.

Démonstration. Posons $q = a/b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a, b > 0$, c'est bon. Si $a = 0$ alors $q = 0 = 0/1$ c'est bon aussi. Supposons que ce ne soit pas le cas. L'hypothèse $q > 0$ dit que $q = a/b$ avec $ab > 0$. La proposition 1.195(8) dit qu'il n'y a que deux possibilités : soit $a, b > 0$, soit $a, b < 0$.

Supposons que $a, b < 0$. En vertu des classes d'équivalence, nous avons $a = a/b = (-a)/(-b)$. Vu que nous avons $-a > 0$ et $-b > 0$, c'est bon. □

PROPooPSGBooLuMXoI

Proposition 1.510 ([1]).
Soit $a > 0$ et $b > 1$. Alors $a > a/b$.

Démonstration. Pour prouver que $a > a/b$, nous devons calculer

$$a - \frac{a}{b} = \frac{a}{1} - \frac{a}{b} = \frac{ab - a}{b}. \tag{1.733}$$

Nous devons donc évaluer la quantité $b(ab-a)$. Vu que $b > 1$, le lemme 1.193 dit que $ab > a$. Donc $ab-a > 0$. Le produit $b(ab - a)$ est donc le produit de deux entiers strictement positifs. En vertu de la proposition 1.195(2) nous avons donc $b(ab - a) > 0$, et donc $a > a/b$. □

LEMooEBTIooGMoHsj

Lemme 1.511.
Tout rationnel est strictement majoré par un naturel.

[213] Rédigez une preuve, faites un scan de votre feuille et envoyez-moi.

Démonstration. Si $q<0$, alors $n=0$ fait l'affaire. Si $q=0$, alors $n=1$ fonctionne. Supposons donc que $q=a/b>0$ avec $ab>0$ ainsi que $a,b\in\mathbb{N}$[214]. Si $b=1$, alors $n=a+1$ fonctionne.

Si $b>1$, alors la proposition 1.510 dit que $a>a/b$, et donc $n=a$ fonctionne. □

PROPooBTCCooVVvaeL

Proposition 1.512.
Si $q<1$ dans $\mathbb{Q}$, alors $ql<l$ pour tout $l\in\mathbb{Q}^+$.

Démonstration. Si $q<0$ c'est facile. Supposons que $0<q<1$. Vu que $q-1<0$ et $l>0$, nous avons

$$ql-l=(q-1)l<0. \tag{1.734}$$

Mais dire $ql-l<0$ signifie $ql<l$. □

LEMooMUYAooDLgDcf

Lemme 1.513.
Si $q\in\mathbb{Q}$, alors il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $kq\in\mathbb{Z}$.

PROPooMXGPooDUkOuv

Proposition 1.514.
Le corps $\mathbb{Q}$ est archimédien[215].

Démonstration. Soit $x,y\in\mathbb{Q}$ avec $x>0$. Si $y\leqslant 0$, nous avons directement $x\geqslant y$. Sinon, il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que $mx\in\mathbb{N}$ (lemme 1.513). Vu que $\mathbb{N}$ est archimédien (proposition 1.158), il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $nmx>y$. □

1.20.2 Caractéristique

LEMooYCPUooNxEPhB

Lemme 1.515.
Le corps $\mathbb{Q}$ est de caractéristique[216] *nulle.*

Démonstration. Il s'agit de comprendre le noyau de l'application définie dans la définition 1.464. Pour $n\in\mathbb{Z}$ nous avons $\mu(n)=n\in\mathbb{Q}$. La seule façon d'avoir $\mu(n)=0$ est d'avoir $n=0$. Donc $\ker(\mu)=\{0\}$ et $\mathbb{Q}$ est de caractéristique nulle. □

1.21 Suite de Cauchy dans un corps totalement ordonné

LEMooLTBIooSZnvsQ

Lemme 1.516 ([95, 1])**.**
Tout corps commutatif de caractéristique nulle contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Soit un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Nous savons du lemme 1.464 que

$$\begin{aligned}\mu\colon\mathbb{Z}&\to\mathbb{K}\\ n&\mapsto n1_{\mathbb{K}}\end{aligned} \tag{1.735}$$

est un morphisme d'anneaux vérifiant $\ker(\mu)=\{0\}$. Nous posons $Z=\mu(\mathbb{Z})$. L'application $\mu\colon\mathbb{Z}\to Z$ est un isomorphisme d'anneaux. Prouvons cela :

(1) **Morphisme** L'application μ est un morphisme par le lemme 1.464.

(2) **Surjectif** Par définition les éléments de Z sont dans l'image de $\mathbb{Z}$.

(3) **Injectif** Si $x,y\in\mathbb{Z}$ vérifient $\mu(x)=\mu(y)$, alors $\mu(x-y)=0$ parce que μ est un morphisme. Mais $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, c'est-à-dire $\ker(\mu)=\{0\}$. Donc $x-y=0$.

Le corps $\mathbb{K}$ contient donc un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$. Puisque $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}$ sont commutatifs, la proposition 1.490 s'applique et $\mathbb{K}$ contient un sous-corps isomorphe à $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z})=\mathbb{Q}$. □

La proposition suivante donne des précisions à propos du lemme 1.516.

PROPooKNROooFdgIeQ

Proposition 1.517 ([1])**.**
Soit un corps totalement ordonné $\mathbb{K}$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\mu\colon\mathbb{Z}&\to\mathbb{K}\\ n&\mapsto n\cdot 1_{\mathbb{K}}\end{aligned} \tag{1.736}$$

[214] Existe pas la proposition 1.509.
[215] Définition 1.146.
[216] Définition 1.464.

et ensuite

$$\begin{aligned}\sigma\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{K}\\ a/b &\mapsto \mu(a)\mu(b)^{-1}.\end{aligned} \tag{1.737}$$

Alors

(1) L'application σ est bien définie.

(2) L'application σ est un morphisme de corps.

(3) Si $q \leqslant q'$ dans $\mathbb{Q}$, alors $\sigma(q) \leqslant \sigma(q')$.

Démonstration. En plusieurs morceaux.

(1) **σ est bien définie** Montrons que σ est bien définie. Pour cela nous considérons $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $a/b = x/y$ dans $\mathbb{Q}$. Par définition des classes (définition 1.483 du corps des fractions), nous avons $ay = bx$ dans $\mathbb{Q}$. Vu que μ est un morphisme nous avons alors

$$\mu(a)\mu(y) = \mu(b)\mu(x) \tag{1.738}$$

et donc $\mu(a)\mu(b)^{-1} = \mu(x)\mu(y)^{-1}$, c'est-à-dire $\sigma(a/b) = \sigma(x/y)$. L'application σ est donc bien définie.

(2) **Morphisme pour la somme**

L'application μ est un morphisme d'anneaux, comme déjà dit depuis le lemme 1.464. Notons aussi que, parce que $\mathbb{K}$ est commutatif,

$$\mu(qy)^{-1} = \mu(q)^{-1}\mu(y)^{-1}. \tag{1.739}$$

En utilisant la définition 1.483(1) de la somme nous avons

$$\begin{aligned}\sigma(p/q + x/y) &= \sigma\big((py + qx)/qy\big) && \text{(1.740a)}\\ &= \big[\mu(py) + \mu(qx)\big]\mu(qy)^{-1} && \text{(1.740b)}\\ &= \mu(py)\mu(qy)^{-1} + \mu(qx)\mu(qy)^{-1} && \text{(1.740c)}\\ &= \mu(p)\mu(q)^{-1} + \mu(x)\mu(y)^{-1} && \text{(1.740d)}\\ &= \sigma(p/q) + \sigma(x/y). && \text{(1.740e)}\end{aligned}$$

(3) **Morphisme pour le produit** Même genre de calculs que pour la somme.

(4) **Croissante**

Nous savons aussi par le lemme 1.109(4) que $1 \geqslant 0$. Puisque μ est un morphisme d'anneaux,

$$\mu(n+1) = \mu(n) + \mu(1) = \mu(n) + 1 \tag{1.741}$$

La définition 1.493(1) dit alors que $\mu(n) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons pour la même raison que si $m \geqslant n$ dans $\mathbb{N}$, alors $\mu(m) \geqslant \mu(n)$ dans $\mathbb{K}$.

Soient maintenant $p, q \in \mathbb{N}$, et prouvons que $\sigma(p/q) \geqslant 0$. D'abord

$$\sigma(p/q) = \mu(p)\mu(q)^{-1} \tag{1.742}$$

où $\mu(p) \geqslant 0$ et $\mu(q) \geqslant 0$. Ensuite le lemme 1.109(5) nous indique que $\mu(q)^{-1} \geqslant 0$. Enfin la condition 1.493(2) nous permet de conclure que $\sigma(p/q) \geqslant 0$.

Finalement, si $q_1 \geqslant q_2$ dans $\mathbb{Q}$, alors $q_1 - q_2 \geqslant 0$, et nous avons

$$\sigma(q_1) = \sigma(q_2 + q_1 - q_2) = \sigma(q_2) + \sigma(q_1 - q_2) \geqslant \sigma(q_2) \tag{1.743}$$

par la condition 1.493(1).

□

NORMooJRRZooTwTVYG

1.518.
Si $\mathbb{K}$ est un corps totalement ordonné, la proposition 1.517 nous donne un morphisme de corps $\sigma\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ qui respecte l'ordre. Pour $q \in \mathbb{Q}$ et $k \in \mathbb{K}$ nous notons

$$qk = \sigma(q)k. \tag{1.744}$$

EQooERFIooMpZVEs

Nous pourrons donc écrire $\frac{k}{2}$ pour $\sigma(1/2)k$.

Le lemme suivant explique que la notation (1.744) n'est pas complètement idiote.

LEMooWIONooGTKfcJ

Lemme 1.519.
Soit un corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{K}$. Soit $k \in \mathbb{K}$. Nous avons

$$k + k = 2k. \tag{1.745}$$

Démonstration. Vu que $\sigma : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ est un morphisme, il vérifie $\sigma(1) = 1$, donc

$$\begin{aligned} k + k &= \sigma(1)k + \sigma(1)k && (1.746a)\\ &= \big(\sigma(1) + \sigma(1)\big)k && (1.746b)\\ &= \sigma(2)k && (1.746c)\\ &= 2k. && (1.746d) \end{aligned}$$

□

PROPooTFVOooFoSHPg

Proposition 1.520.
Toute suite convergente dans un corps totalement ordonné est de Cauchy[217].

Démonstration. Soit un corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ et une suite $x_n \xrightarrow{\mathbb{K}} x$. Soit $\epsilon > 0$. Il est important de se rendre compte que $\epsilon \in \mathbb{K}$ et que l'inégalité est au sens de l'ordre dans $\mathbb{K}$; en particulier ce n'est pas $\epsilon \in \mathbb{R}$ ni $\epsilon \in \mathbb{Q}$. D'ailleurs nous n'avons pas encore défini $\mathbb{R}$.

Vu que (x_n) converge vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k > N$,

$$|x_k - x| < \epsilon. \tag{1.747}$$

Soient $p, q > N$. Alors en utilisant la majoration du lemme 1.114(4),

$$|x_p - x_q| = \big|(x_p - x) + (x - x_q)\big| \leqslant |x_p - x| + |x - x_q| \leqslant 2\epsilon. \tag{1.748}$$

EQooMQYGooLpgEQO

En analyse en général, on s'arrête là et on dit que (x_n) est de Cauchy parce qu'il n'y a pas vraiment de différence entre réaliser une majoration avec ϵ ou avec 2ϵ. Détaillons toutefois comment ça se passe dans le cas où ϵ est un élément d'un corps totalement ordonné.

Le 2ϵ arrivant à la fin de (1.748) est en réalité $\epsilon + \epsilon = \sigma(2)\epsilon$ en vertu de ce qui est raconté en 1.518 et en vertu du lemme 1.519.

Considérons $\epsilon' = \sigma(1/2)\epsilon$, que nous pouvons noter $\epsilon' = \epsilon/2$. Vu que $\epsilon' > 0$, il existe un N' tel que pour tout $p, q > N'$ nous ayons

$$|x_p - x_q| \leqslant 2\epsilon' = \sigma(2)\sigma(1/2)\epsilon = \sigma(1)\epsilon = \epsilon. \tag{1.749}$$

Ce dernier ϵ étant bien celui fixé au début de la preuve, nous en déduisons que (x_n) est de Cauchy. □

1.21.1 Suites de Cauchy dans les rationnels

PropFFDJooAapQlP

Proposition 1.521 ([35]).
Principales propriétés des suites de Cauchy[218] *dans $\mathbb{Q}$.*

ItemRKCIooJguHdji

(1) *Toute suite convergente est de Cauchy*[219].

ItemRKCIooJguHdjii

(2) *Toute suite de Cauchy est bornée.*

ItemRKCIooJguHdjiii

(3) *Si $x_n \to 0$ et si (y_n) est bornée, alors $x_n y_n \to 0$*

(4) *Si (x_n) et (y_n) sont de Cauchy alors $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont également de Cauchy.*

ITEMooIAFSooA1UpAN

(5) *Si il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $x_n \to a$ et $y_n \to b$ alors $x_n + y_n \to a + b$, $x_n - y_n \to a - b$ et $x_n y_n \to ab$.*

ItemRKCIooJguHdjvi

(6) *Soit (x_n) une suite de Cauchy qui ne converge pas vers zéro. Alors il existe n_0 tel que la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ soit de Cauchy.*

Démonstration. Point par point.

(1) C'est la proposition 1.520.

[217] Définition 1.493(1).
[218] Définition 1.493(1).
[219] Et non la réciproque, qui sera justement la grande innovation des nombres réels.

(2) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Avec $\epsilon = 1$ dans la définition, si $q > N$, nous avons

$$|x_q - x_N| \leqslant 1. \tag{1.750}$$

Et donc pour tout q plus grand que N, $x_N - 1 \leqslant x_q \leqslant x_N + 1$, ou encore, pour tout n :

$$|x_n| \leqslant \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |x_N + 1|\}. \tag{1.751}$$

La suite est donc bornée.

(3) Soit $\epsilon > 0$. Les hypothèses disent qu'il existe un N tel que $|x_n| \leqslant \epsilon$ dès que $n \geqslant N$. Et il existe aussi $M \geqslant 0$ tel que $|y_n| \leqslant M$ pour tout n. Du coup, lorsque $n \geqslant N$ nous avons $|x_n y_n| \leqslant M\epsilon$.

(4) En ce qui concerne la somme,

$$|x_p + y_p - x_q - y_q| \leqslant |x_p - x_q| + |y_p - y_q|. \tag{1.752}$$

EqDCNBooAzrrBi

Soit N_1 tel que si $p, q \geqslant N_1$ alors $|x_p - x_q| \leqslant \epsilon$ et N_2 de même pour la suite (y_n). En prenant $N = \max\{N_1, N_2\}$, la somme (1.752) est plus petite que 2ϵ dès que $p, q \geqslant N$.

Passons à la démonstration du fait que le produit de deux suites de Cauchy est de Cauchy. Les suites (x_n) et (y_n) sont bornées et quitte à prendre le maximum, nous disons qu'elles sont toutes les deux bornées par le nombre M : pour tout n nous avons $|x_n| \leqslant M$ et $|y_n| \leqslant M$. Nous avons :

$$|x_p y_p - x_q y_q| \leqslant |x_p y_p - x_q y_p| + |x_q y_p - x_q y_q| \leqslant |y_p||x_p - x_q| + |x_q||y_p - y_q|. \tag{1.753}$$

Puisque (x_n) et (y_n) sont de Cauchy, si p et q sont assez grands, les deux différences sont majorées par ϵ et nous avons

$$|x_p y_p - x_q y_q| \leqslant M\epsilon + M\epsilon = 2M\epsilon, \tag{1.754}$$

ce qui prouve que $(x_n y_n)$ est de Cauchy.

(5) En ce qui concerne la somme, nous pouvons tout de suite calculer

$$|x_n + y_n - (a + b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b|. \tag{1.755}$$

Il existe une valeur de n à partir de laquelle le premier terme est plus petit que ϵ et une à partir de laquelle le second terme est plus petit que ϵ. En prenant le maximum des deux, la somme est plus petite que 2ϵ.

En ce qui concerne le produit,

$$|x_n y_n - ab| \leqslant |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \leqslant |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|. \tag{1.756}$$

Les suites $|x_n - a|$ et $|y_n - b|$ convergent vers zéro ; la suite (y_n) est bornée parce que convergente (combinaison des points (1) et (2)) et a (la suite constante) est également bornée. Donc par le point (3), nous avons

$$y_n|x_n - a| + a|y_n - b| \to 0. \tag{1.757}$$

Au passage nous avons également utilisé la propriété de la somme que nous venons de démontrer.

(6) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ ne convergeant pas vers zéro : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $|x_n| > \alpha$. Mais notre suite est de Cauchy, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q \geqslant n_0$ alors

$$|x_p - x_q| \leqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{1.758}$$

En fixant $N = n_0$, on obtient un naturel $n \geqslant n_0$ tel que $|x_n| \geqslant \alpha$. De plus, comme la suite est de Cauchy, si $p > n$ nous avons aussi $|x_n - x_p| \leqslant \frac{\alpha}{2}$. Cela implique $|x_p| \geqslant \frac{\alpha}{2}$ et en particulier $x_p \neq 0$.

Nous venons de prouver que la suite ne s'annule plus à partir de l'indice n, et même que $|x_k| \geqslant \alpha/2$ pour tout $k \geqslant n$. La suite $(1/x_k)_{k \geqslant n}$ est donc bien définie.

Soit $\epsilon > 0$. Soit n_0 tel que $|x_p - x_q| < \epsilon$ pour tout $p, q > n_0$. Soit K plus grand que n_0 et que n. En prenant $p, q \geqslant K$, nous avons $|x_p| > \frac{\alpha}{2}$ et $|x_q| > \frac{\alpha}{2}$. Nous en déduisons que

$$\left|\frac{1}{x_p} - \frac{1}{x_q}\right| \leqslant \frac{|x_q - x_p|}{|x_p x_q|} \leqslant \frac{4}{\alpha^2}|x_q - x_p| \leqslant \frac{4}{\alpha^2}\epsilon. \tag{1.759}$$

Donc $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ est de Cauchy.

□

1.22 Insuffisance des rationnels

Nous allons voir qu'il n'existe pas de nombres rationnels x tels que $x^2 = 2$, mais que pourtant il existe une infinité de suites de rationnels (x_n) tels que $x_n^2 \to 2$.

LemJPIUooWFHaFM

Lemme 1.522.
Un entier x est pair si et seulement si l'entier x^2 est pair.

Démonstration. Si x est un nombre pair, alors il existe un entier a tel que $x = 2a$ alors $x^2 = 4a^2$ est pair.

Inversement, si x est impair alors il existe un entier a tel que $x = 2a + 1$ et alors $x^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$ est impair. □

Le théorème 3.32 nous dira que tous les $\sqrt{n}$ sont irrationnels dès que n n'est pas un carré parfait. Voici déjà le résultat pour $n = 2$. Le fait que $\sqrt{2}$ existe dans $\mathbb{R}$ sera la proposition 1.593.

PropooRJMSooPrdeJb

Proposition 1.523 (Irrationalité de $\sqrt{2}$)**.**
Il n'existe pas de fractions d'entiers dont le carré soit égal à 2.

Démonstration. Nous supposons que la fraction d'entiers a/b est telle que $a^2/b^2 = 2$, et nous allons construire une suite d'entiers strictement décroissante et strictement positive, ce qui est impossible.

Grâce au lemme 1.522 nous avons successivement les affirmations suivantes :

- $\frac{a^2}{b^2} = 2$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
- $a^2 = 2b^2$, donc a^2 est pair.
- a est alors pair et a^2 est divisible par 4. Soit $a^2 = 4k$.
- $4k/b^2 = 2$, donc $4k = 2b^2$, donc $b^2 = 2k$ et b^2 est pair.
- Nous déduisons que b est pair.

La fraction $\frac{a/2}{b/2}$ est alors une nouvelle fraction d'entiers dont le carré vaut 2. En procédant de la même façon, en remplaçant a par $a/2$ et b par $b/2$, on obtient que la fraction d'entiers $\frac{a/4}{b/4}$ a la même propriété.

En particulier, tous les nombres de la forme $a/2^n$ sont des entiers. Ils forment une suite strictement décroissante d'entiers strictement positifs. Impossible, me diriez-vous ? Et vous auriez bien raison : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément[220]. Il n'y a donc pas de fractions d'entiers dont le carré vaut 2. □

LEMooOTVUooImvusn

Lemme 1.524 (Série géométrique)**.**
Si $q \neq 1$ dans $\mathbb{Q}$ et $p \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\sum_{k=0}^{p} q^k = \frac{1 - q^{p+1}}{1 - q}. \tag{1.760}$$

Démonstration. En posant $S_p = 1 + q + q^2 + \cdots + q^p$, nous avons $S_p - qS_p = 1 - q^{p+1}$ et donc

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} q^k = \frac{1 - q^{p+1}}{1 - q}. \tag{1.761}$$

□

Proposition 1.525.
La suite donnée par

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \tag{1.762}$$

est de Cauchy et ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

[220] Voir [35], et attention : ce n'est pas tout à fait évident.

Démonstration. Si $p > q > 0$ nous avons

$$x_p - x_q = \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k!} \tag{1.763a}$$

$$\leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{(q+1)!} \frac{1}{(q+1)^{k-q-1}} \tag{1.763b}$$

$$\leqslant \frac{1}{(q+1)!} \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{(q+1)^k} \tag{1.763c}$$

$$\leqslant \frac{1}{(q+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} \tag{1.763d}$$

$$\leqslant \frac{1}{(q+1)!} \frac{q+1}{q} \tag{1.763e}$$

$$\leqslant \frac{1}{q!q}. \tag{1.763f}$$

Justifications :

- Pour (1.763b), il s'agit de remplacer dans $k!$ tous les facteurs plus grands que $(q+1)$ par $q+1$. Cela rend le dénominateur plus petit.
- Pour (1.763c), il y a une inégalité parce que la suite $p \mapsto \sum_{k=0}^{p} 1/(q+1)^k$ est une suite strictement croissante.
- Pour (1.763d), le lemme 1.524 donne la valeur de la somme finie. En ce qui concerne la limite, nous avons demandé $p > q > 0$ et donc $q + 1 > 1$. Dans ce cas la limite fonctionne.

Cette inégalité une fois établie nous permet de prouver les assertions. La suite (x_n) est de Cauchy car, pour tout $\epsilon \in \mathbb{Q}$ s'écrivant $\epsilon = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$, en prenant $p, q > b$, nous avons

$$x_p - x_q \leqslant \frac{1}{b!b} < \frac{1}{b} < \frac{a}{b} = \epsilon. \tag{1.764}$$

Montrons par l'absurde que cette suite ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Pour cela, nous supposons que $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Pour tout $p > q$ nous avons établi

$$0 < x_p - x_q < \frac{1}{qq!}. \tag{1.765}$$

Prenons la limite $p \to \infty$; par stricte croissance de la suite, les inégalités restent strictes :

$$0 < \frac{a}{b} - x_q < \frac{1}{qq!}. \tag{1.766}$$

Si $n > b$ alors nous pouvons écrire

$$\frac{a}{b} - x_n = \frac{\alpha}{n!} \tag{1.767}$$

avec $\alpha \in \mathbb{Z}$ parce que le dénominateur commun entre $\frac{a}{b}$ et x_n est dans $n!$. En prenant donc $q > n$ dans (1.766) nous pouvons écrire

$$0 < \frac{\alpha}{q!} < \frac{1}{qq!}, \tag{1.768}$$

c'est-à-dire $0 < \alpha < \frac{1}{q}$, ce qui est impossible pour $\alpha \in \mathbb{Z}$. □

Lemme 1.526.
Soit $A > 0$ dans $\mathbb{Q}$. Il existe un rationnel $q > 0$ tel que $q^2 < A$.

Démonstration. Vu que $\mathbb{Q}$ est archimédien (proposition 1.514), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 < nA$. Pour ce n, nous avons

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 < \frac{1}{n} < A. \tag{1.769}$$

□

La proposition suivante donne une suite de rationnels qui convergerait dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{A}$ (non encore défini à ce stade). Il est expliqué dans [101] que la suite peut être vue comme une forme de méthode de Newton 34.54 ; voir l'exemple 34.57. Si vous aimez les dessins et les approches géométriques, il y a une explication sur Wikipédia[102].

PROPooSTQXooHlIGVf

Proposition 1.527 ([101]).
Soient $A > 0$ dans $\mathbb{Q}$ et $x_0 \in \mathbb{Q}$. La suite (x_k) définie par

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{A}{x_k}\right) \tag{1.770}$$

EQooOUIVooUqWhXe

a les propriétés suivantes :

(1) *La suite $y_k = x_k^2$ converge dans $\mathbb{Q}$ vers A.*

(2) *La suite (x_k) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.*

(3) *La suite (x_k) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ dans le cas de $A = 2$.*

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **La suite s_k** En posant $y_k = x_k^2$ nous calculons que

$$y_{k+1} - A = \frac{(y_k - A)^2}{4y_k}. \tag{1.771}$$

Autrement dit, la suite $s_k = y_k - A$ vérifie

$$s_{k+1} = \frac{s_k^2}{4(A + s_k)}. \tag{1.772}$$

Quelle que soit la valeur de $s_0 = x_0^2 - A$, nous avons

$$s_1 = \frac{s_0^2}{4(A + s_0)} = \frac{(x_0^2 - A)^2}{4(A + x_0^2 - A)} = \frac{(x_0^2 - A)^2}{4x_0^2} > 0. \tag{1.773}$$

Donc à partir de s_1, tous les éléments sont positifs. Vu que $A > 0$ nous avons aussi

$$s_{k+1} < \frac{s_k^2}{4s_k} = \frac{s_k}{4} \tag{1.774}$$

et donc $s_k < s_0/4^k$. Donc $s_k \to 0$.

(2) **La suite (y_k)** Nous venons de prouver que si $y_k = A + s_k$, alors $s_k \to 0$. Autrement dit, la suite y_k converge vers A dans $\mathbb{Q}$.

La suite (y_k) est donc de Cauchy par la proposition 1.521(1).

(3) **La suite (x_k) est de Cauchy** Soit $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{Q}$. Puisque (y_k) est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_r^2 - x_s^2| < \epsilon \tag{1.775}$$

pour tout $r, s \geqslant n_0$.

Soit par ailleurs $q \neq 0$ dans $\mathbb{Q}$ tel que $q^2 < A$, assuré par le lemme 1.526. Quitte à augmenter la valeur de n_0, nous supposons que $x_r, x_s > q$, et en particulier que $x_r + x_s \neq 0$. Cela permet d'écrire d'abord

$$x_r^2 - x_s^2 = (x_r + x_s)(x_r - x_s) \tag{1.776}$$

et ensuite de prendre la valeur absolue et de diviser par $|x_r + x_s|$:

$$|x_r - x_s| = \frac{|x_r^2 - x_s^2|}{|x_r + x_s|} < \frac{\epsilon}{2q}. \tag{1.777}$$

Donc (x_k) est une suite de Cauchy.

(4) **Pas de convergence pour $A = 2$** Supposons que $x_k \to a \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas nous aurions $x_k^2 \to a^2 = A = 2$ (proposition 1.521(5)). Mais nous savons par la proposition 1.523 que $a^2 = 2$ est impossible dans $\mathbb{Q}$.

□

Notons que cette proposition ne présume en rien de l'existence ou de la non-existence dans $\mathbb{Q}$ d'un élément qui pourrait décemment être nommé $\sqrt{A}$. Il se fait que le théorème 3.32 dira que $\sqrt{n}$ est soit entier, soit irrationnel.

1.528.
Un petit programme en Python pour explorer la suite de la proposition 1.527.

```
#!/usr/bin/python3

def rec(A,x):
    return ((x**2+A)/x)/2

A = 3        # Compute square root of 3
x = 1000     # Initial guess: 1000

for i in range(1,100):
    print(i, x, x**2, x**2-A)
    x = rec(A, x)
```

tex/frido/codeSnip_4.py

1.23 Les réels

Une construction des réels via les coupures de Dedekind est donnée dans [103].

NormooHRDZooRGGtCd

1.529.
La construction des réels va nécessiter un petit « bootstrap » au niveau de la topologie. En effet la notion de suite de Cauchy est une notion topologique (définition 7.310) alors que la topologie métrique (celle entre autres de $\mathbb{Q}$) ne sera définie que par le théorème 7.142. Nous avons donc dû définir en la définition 1.493 *ex nihilo* les notions de

- suite de Cauchy
- suite convergente
- complétude

Nous allons ensuite construire $\mathbb{R}$ comme ensemble de classes d'équivalence de suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Ce ne sera que plus tard, après avoir défini la notion d'espace métrique que nous allons voir que sur $\mathbb{R}$, ces trois notions coïncident avec celles topologiques[221]. Et par conséquent que $\mathbb{R}$ sera un espace métrique complet[222].

Dans cette optique, il est intéressant de lire ce que dit Wikipédia à propos des suites de Cauchy dans l'article consacré à la construction des nombres réels[104].

1.23.1 L'ensemble

DEFooGXOPooFReesm

Définition 1.530.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites de Cauchy[223] dans $\mathbb{Q}$. Soit aussi l'ensemble $\mathcal{E}_0$ constituée des suites qui convergent vers zéro[224].

PROPooCYPMooRwMUnI

Proposition 1.531 ([1])**.**
En posant

$$x + y = (x_n + y_n) \tag{1.778}$$

et

$$xy = (x_n y_n), \tag{1.779}$$

l'ensemble $\mathcal{E}$ devient un anneau[225] commutatif dont le neutre de l'addition est la suite constante $x_n = 0$ et le neutre pour la multiplication est la suite constante $x_n = 1$.

[221] Proposition 7.322.
[222] Théorème 1.571 pour la complétude en tant que corps et théorème 1.520 pour la complétude en tant que espace métrique.
[223] Définition 1.493(1)
[224] Nous rappelons qu'à ce niveau nous n'avons pas encore prouvé que toutes les suites de Cauchy convergent.
[225] Définition 1.92.

PROPooNUQVooAAkicK

Proposition 1.532.
La partie $\mathcal{E}_0$ est un idéal[226] *de l'anneau $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Nous savons par la proposition 1.521(1) que les suites convergentes sont de Cauchy ; par conséquent $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$.

L'ensemble structuré $(\mathcal{E}_0, +)$ est un sous-groupe de $\mathcal{E}$ par les propriétés de la proposition 1.521 (il s'agit du fait que la somme de deux suites convergeant vers zéro est une suite convergente vers zéro).

En ce qui concerne la propriété fondamentale des idéaux, si $x \in \mathcal{E}_0$ et $y \in \mathcal{E}$ nous devons prouver que $xy \in \mathcal{E}_0$. Puisque $(\mathcal{E}_0, \cdot\ )$ est commutatif, cela suffira pour être un idéal bilatère. Vu que y est une suite de Cauchy, elle est bornée ; et étant donné que $x \to 0$ nous avons alors $xy \to 0$ (par la proposition 1.521(3)). □

DefooFKYKooOngSCB

Théorème-Définition 1.533 (L'anneau des réels[35])**.**
Sur l'ensemble quotient $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$, les opérations

(1) $\bar{u} + \bar{v} = \overline{u+v}$

(2) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \overline{uv}$

sont bien définies et donnent à $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ une structure de corps commutatif appelé ***corps des réels*** *et noté $\mathbb{R}$*

Démonstration. Nous divisons la preuve en plusieurs parties.

(1) **Les opérations sont bien définies** La partie $\mathcal{E}_0$ est un idéal par la proposition 1.532. Le quotient est donc bien défini et est un anneau par la proposition 1.325(2).

(2) **Caractérisation des classes** Soit $q \in \mathbb{Q}$ et une suite x convergente vers q. Cette suite est de Cauchy comme toute suite convergente. Montrons que

$$\bar{x} = \{\text{suites qui convergent vers } q\}. \tag{1.780}$$

Si $y \in \bar{x}$ alors $y = x + h$ avec $h \in \mathcal{E}_0$, et comme $h_n \to 0$, on a $y_n \to q$. Réciproquement, si $y_n \to q$ alors pour chaque n nous avons

$$y_n = x_n + (y_n - x_n), \tag{1.781}$$

mais $y_n - x_n \to 0$. Donc la suite $y - x \in \mathcal{E}_0$ ce qui signifie que $y \in \bar{x}$.

(3) **Neutre et unité** Il est vite vérifié que $\bar{0}$, la classe de la suite constante égale à zéro est neutre pour l'addition. De même, $\bar{1}$, est un neutre pour la multiplication.

(4) **Corps** Nous devons prouver que tout élément non nul est inversible. C'est-à-dire que si $x \in \mathcal{E}$ ne converge pas vers zéro[227] alors il existe $y \in \mathcal{E}$ tel que $xy \in \bar{1}$.

Nous savons par la proposition 1.521(6) que x étant une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de Cauchy. Nous posons alors

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leqslant n_0 \\ \frac{1}{x_n} & \text{si } n > n_0. \end{cases} \tag{1.782}$$

Nous avons alors

$$(xy)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leqslant n_0 \\ 1 & \text{si } n > n_0 \end{cases} \tag{1.783}$$

et donc $xy \in \bar{1}$.

□

NORMooWBYNooBQaPPk

1.534 (Quelques notations entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$)**.**
Si $k \mapsto x_k$ est une suite, nous notons (x_k) avec des parenthèses la suite elle-même. Le k dans (x_k) est un indice muet, et dans les cas où il peut y avoir une ambiguïté, nous pouvons noter $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Cette dernière notation est plus lourde, mais plus exacte.

Le mieux est d'écrire simplement x la suite, mais alors il faut être prudent et ne pas noter x la limite. Nous éviterons donc d'écrire $x_k \to x$.

[226] Définition 1.316.
[227] $x \in \mathcal{E}$ peut soit ne pas converger du tout, soit converger vers autre chose que zéro.

Si (x_k) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, nous notons $\bar{x}$ l'élément de $\mathbb{R}$ qui lui correspond. En fait $\bar{x} = (x_k)$: $\bar{x}$ est la suite-elle même, mais pour nous souvenir de l'origine nous allons adopter cette notation.

D'autre part nous définissons

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto \overline{[k \mapsto q]}, \end{aligned} \tag{1.784}$$

c'est-à-dire que $\varphi(q)$ est la classe de la suite constante $x_k = q$.

PropooEPFCooMtDOfP

Proposition 1.535.
Soit l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto \bar{q}. \end{aligned} \tag{1.785}$$

où par $\bar{q}$ nous entendons la classe de la suite constante égale à q (qui est de Cauchy).

(1) C'est un homomorphisme[228] *de corps injectif.*

(2) Image(φ) *est un sous-corps de* $\mathbb{R}$

(3) $\varphi\colon \mathbb{Q} \to$ Image(φ) *est un isomorphisme de corps.*

Démonstration. Le fait que ce soit un homomorphisme est simplement

- $\varphi(q + q') = \overline{q + q'} = \bar{q} + \overline{q'}$
- $\varphi(qq') = \overline{qq'} = \bar{q}\overline{q'}$.

En ce qui concerne l'injectivité, si q est tel que $\varphi(q) = \bar{0} = \mathcal{E}_0$, c'est que

$$\varphi(q) = \{\text{suites de Cauchy qui convergent vers zéro}\} \tag{1.786}$$

Mais nous savons aussi que[229]

$$\varphi(q) = \bar{q} = \{\text{suites de Cauchy qui convergent vers } q\} \tag{1.787}$$

Nous en déduisons que $q = 0$. □

Lorsque dans la suite nous parlerons d'un élément de $\mathbb{Q}$ comme étant un réel, nous aurons en tête l'image de cet élément par φ.

LEMooYLQBooFistHs

Lemme 1.536.
Soient $q, l \in \mathbb{Q}$ tels que $\bar{q} = \bar{l}$. Alors $q = l$ dans $\mathbb{Q}$.

Démonstration. La suite constante $x_n = q$ est un représentant de $\bar{q}$, et la suite constante $y_n = l$ est représentant de $\bar{l}$. Dire que $\bar{l} = \bar{q}$ signifie qu'il existe une suite $z \in \mathcal{E}_0$ tel que

$$x = y + z. \tag{1.788}$$

Pour tout n nous avons donc $x_n = y_n + z_n$, ou encore

$$z_n = q - l \tag{1.789}$$

pour tout n. Puisque z est une suite constante, elle ne peut appartenir à $\mathcal{E}_0$ que si elle est la suite constante nulle, c'est-à-dire si $q = l$. □

1.23.2 Relation d'ordre

Définition 1.537.
Nous définissons les parties $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ de $\mathcal{E}$ par

(1) $x \in \mathcal{E}^+$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ (ϵ est dans $\mathbb{Q}$), il existe N_ϵ tel que $n > N_\epsilon$ implique $x_n > -\epsilon$.

(2) $x \in \mathcal{E}^-$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe N_ϵ tel que $n > N_\epsilon$ implique $x_n < \epsilon$.

Nous notons aussi $\mathcal{E}^{++} = \mathcal{E}^+ \setminus \mathcal{E}_0$.

[228] Voir -1.1.
[229] Voir dans la démonstration du théorème 1.533.

LEMooJOYQooCDlhHW

Lemme 1.538 (À propos du zéro)**.**
Les parties $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ partitionnent $\mathcal{E}$ de la façon suivante :

ITEMooKRBYooZGhhch

(1) $\mathcal{E}^+ \cap \mathcal{E}^- = \mathcal{E}_0$

ITEMooRCIZooHUIymE

(2) Le neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}$ est $\bar{\mathcal{E}}_0$ c'est-à-dire la classe de la suite constante nulle.

ITEMooZRVXooANHspZ

(3) $\mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^- = \mathcal{E}$

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** On prouve d'abord que $\mathcal{E}^+ \cap \mathcal{E}^- \subset \mathcal{E}_0$, l'inclusion inverse est évidente. Soit $\epsilon > 0$ et $x \in \mathcal{E}^+ \cap \mathcal{E}^-$. Il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n > -\epsilon$ et $x_n < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Par conséquent, $|x_n| \leqslant \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$ et la suite x converge vers zéro, c'est-à-dire $x \in \mathcal{E}_0$.

(2) **Pour (2)** Soit $a \in \mathbb{R}$. Nous montrons que si $x_n = 0$ pour tout n, alors $a + \bar{x} = a$. Nous notons y un représentant de a. Par définition, $a + \bar{x} = \overline{y + x}$. Et donc

$$a + \bar{x} = \overline{y + x} = \bar{y} = a. \tag{1.790}$$

(3) **Pour (3)** Soit $x \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^-$, et prouvons que $x \in \mathcal{E}^+$. La condition $x \notin \mathcal{E}^-$ donne qu'il existe un $\alpha > 0$ (dans $\mathbb{Q}$) tel que pour tout n, il existe $p > n$ avec $x_p > \alpha$. Mais x est une suite de Cauchy, donc nous avons un n_0 tel que si $n, p \geqslant n_0$ alors $|x_n - x_p| \leqslant \frac{\alpha}{2}$. En particulier, si $n \geqslant n_0$, et si $p > n$ est tel que $x_p > \alpha$, on obtient

$$x_n > \frac{\alpha}{2} > 0 \tag{1.791}$$

Par conséquent $x \in \mathcal{E}^+$ parce que $x \in \mathcal{E}$ et les x_n sont tous positifs à partir d'un certain rang.

□

LEMooXNWSooHbNcAV

Lemme 1.539 ([1])**.**
Si $x \in \mathcal{E}^{++}$, alors il existe N tel que $x_n > 0$ pour tout $n > N$.

Démonstration. La suite x ne tend pas vers zéro. Donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $N > 0$ il existe $n > N$ vérifiant $x_n > \delta$.

Mais la suite x est également de Cauchy. Écrivons cette condition pour $\delta/2$. Il existe $N_2 > 0$ tel que $p, q > N_2$ implique $|x_p - x_q| < \delta/2$.

Nous fixons $n > N_2$ tel que $x_n > \delta$. Alors pour tout $p > N_2$ nous avons aussi

$$|x_p - x_n| < \frac{\delta}{2}. \tag{1.792}$$

Cela implique que $x_p > \delta/2 > 0$ pour tout $p > N_2$. □

La proposition suivante est une version plus précise du lemme 1.539. Elle peut également être démontrée en utilisant la proposition 1.496.

PROPooZRCCooFGdtll

Proposition 1.540 ([15])**.**
Soit une suite de Cauchy (x_n) dans $\mathbb{Q}$. Nous supposons que

(1) $x \in \mathcal{E}^+$

(2) x ne converge pas vers 0.

Note : ces hypothèses signifient que $x \in \mathcal{E}^{++}$.

Alors il existe $r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x_n \geqslant r \tag{1.793}$$

pour tout $n \geqslant N$.

Démonstration. Fixons $\epsilon \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$, et procédons par l'absurde. Du coup nous savons trois choses sur la suite (x_n).

ITEMooTNZDooHKZdBe

(1) Hypothèse absurde : pour tout $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p \geqslant N$ vérifiant $x_p < q$.

(2) Vu que $x \in \mathcal{E}^{++} \subset \mathcal{E}^+$, il existe $P_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n > -\epsilon$ pour tout $n \geqslant P_1$.

(3) La suite x est de Cauchy. Donc il existe $P_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n \geqslant P_2$, nous avons $|x_m - x_n| < \epsilon/2$.

Nous considérons $P \geqslant \max\{P_1, P_2\}$ et nous prenons $q = \epsilon/2$, $N = P$ dans la propriété (1). Il existe donc $p > P$ tel que $x_p < \epsilon/2$.

Prenons aussi $n > p$ et écrivons les deux autres propriétés :

(1) $x_n > -\epsilon$ parce que $n > p > P > P_1$.

(2) $|x_n - x_p| < \epsilon/2$ parce que $n, p > P > P_2$.

Du coup nous avons

$$x_n < x_p + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \tag{1.794}$$

et donc $-\epsilon < x_n < \epsilon$.

Au final, nous avons prouvé que pour tout $\epsilon \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$, il existe P tel que $n > P$ implique $|x_n| < \epsilon$. Cela signifie que

$$x_n \xrightarrow{\mathbb{Q}} 0, \tag{1.795}$$

c'est-à-dire $x \in \mathcal{E}_0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

LEMooRKSXooFsIohe

Lemme 1.541 ([35]).
Quelques propriétés du partitionnement.

ITEMooRQVKooCnwWOY

(1) $x \in \mathcal{E}^-$ *si et seulement si* $(-x) \in \mathcal{E}^+$

ITEMooJUPOooOBubqA

(2) $x \in \mathcal{E}^+$ *et* $y \in \mathcal{E}^+$ *implique* $x + y \in \mathcal{E}^+$

ITEMooDQLJooPViuVC

(3) $x \in \mathcal{E}^+$ *et* $y \in \mathcal{E}^+$ *implique* $xy \in \mathcal{E}^+$

(4) Si $x, y \in \mathcal{E}$ *sont tels que* $x - y \in \mathcal{E}_0$ *alors soit* $x, y \in \mathcal{E}^+$ *soit* $x, y \in \mathcal{E}^-$.

Démonstration. Point par point.

(1) Définition de $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$.

(2) Pour $n \geqslant N_{\epsilon/2}$ nous avons $x_n > -\epsilon/2$ et $y_n > -\epsilon/2$. Donc $x_n + y_n > -\epsilon$.

(3) Si x ou y est dans $\mathcal{E}_0$ alors $xy \in \mathcal{E}_0$ et c'est bon. Si par contre $x, y \in \mathcal{E}^{++}$ alors le lemme 1.539 nous indique que pour n suffisamment grand, $x_n > 0$ et $y_n > 0$. Et dans ce cas, $(xy)_n > 0$, c'est-à-dire $xy \in \mathcal{E}^+$.

(4) Supposons que $x - y \in \mathcal{E}_0$ avec $x \in \mathcal{E}^+$ et prouvons qu'alors $y \in \mathcal{E}^+$. Soit donc $\epsilon > 0$; il existe n_1 tel que $x_n > -\frac{\epsilon}{2}$ dès que $n \geqslant n_1$. Mais $x - y \in \mathcal{E}_0$, donc il existe n_2 tel que $|x_n - y_n| < \frac{\epsilon}{2}$ dès que $n \geqslant n_2$. En prenant n plus grand que n_1 et n_2, nous avons en même temps

$$\begin{cases} x_n > -\frac{\epsilon}{2} & \text{(1.796a)} \\ |x_n - y_n| < \frac{\epsilon}{2}. & \text{(1.796b)} \end{cases}$$

Cela implique que $y_n > -\epsilon$ et donc que $y \in \mathcal{E}^+$.

Nous pouvons de même prouver que si $x \in \mathcal{E}^-$ alors $y \in \mathcal{E}^-$.

□

DefooLMQIooTgzZXd

Définition 1.542 (Positivité dans $\mathbb{R}$).
Vocabulaire et notations. Rappel que $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}_0$ *sont définis dans 1.530.*

(1) Nous notons $\mathbb{R} = \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$.

(2) Nous notons $\mathbb{R}^+ = \bar{\mathcal{E}}^+ = \mathcal{E}^+/\mathcal{E}_0$.

(3) Nous notons $\mathbb{R}^- = \bar{\mathcal{E}}^-$.

(4) Un élément de $\mathbb{R}$ *est* ***positif*** *si il est la classe d'une suite de Cauchy appartenant à* $\mathcal{E}^+$.

(5) Un élément de $\mathbb{R}$ *est* ***négatif*** *si il est la classe d'une suite de Cauchy appartenant à* $\mathcal{E}^-$.

(6) Lorsque nous parlons de nombres réels, le symbole « 0 » signifie $\mathcal{E}_0$ *ou plus précisément la classe d'un élément de* $\mathcal{E}_0$ *modulo* $\mathcal{E}_0$.

REMooOCXLooKQrDoq

1.543.
Avec les conventions de la définition 1.542, et en anticipant sur nos connaissances à propos des réels,

(1) zéro est positif et négatif.

(2) L'intersection entre $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ est le singleton $\{0\}$.

(3) L'ensemble des nombres *strictement* positifs est noté $(\mathbb{R}^+)^*$ ou $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

(4) Le mot « positif » signifie « positif ou nul » ; le mot « négatif » signifie « négatif ou nul ». Ce sont des conventions qui sont également celles de Wikipédia[105].

DEFooBXHJooOEYPRI

Définition 1.544 (Ordre sur $\mathbb{R}$)**.**
Si $x, y \in \mathbb{R}$ nous notons $x \leqslant y$ si et seulement si $y - x \in \overline{\mathcal{E}^+}$.

PROPooYMJVooNAsXae

Proposition 1.545.
Le couple $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est un corps totalement ordonné[230]

Démonstration. Il s'agit de vérifier, dans l'ordre, les définitions 1.23, 1.24 et 1.107. Pour la suite nous considérons $x, y, z \in \mathbb{R}$ et des suites de Cauchy a, b, c représentant x, y, z, c'est-à-dire telles que $x = \bar{a}$, $y = \bar{b}$ et $z = \bar{c}$.

(1) **Réflexivité** Pour savoir si $x \geqslant x$, nous devons nous demander si $x - x \in \overline{\mathcal{E}^+}$. Nous avons $x - x = \bar{a} - \bar{a} = \bar{0} = 0$.

(2) **antisymétrie** Nous supposons que $x \geqslant y$ et $y \geqslant x$. Du côté des suites de Cauchy, cela signifie que $a - b \in \mathcal{E}^+$ et $b - a \in \mathcal{E}^+$. Le lemme 1.541(1) nous indique alors que $a - b = -(b - a) \in \mathcal{E}^-$. Donc

$$a - b \in \mathcal{E}^+ \cap \mathcal{E}^- = \{\bar{0}\}. \tag{1.797}$$

Donc le réel $x - y$ est la classe de la suite constante 0. Le lemme 1.538(2) dit alors que $x - y = 0$ ou encore que $x = y$.

(3) **transitivité** Nous supposons que $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$. L'hypothèse $x \leqslant y$ signifie $y - x \in \bar{\mathcal{E}}^+$ ou encore que $b - a \in \mathcal{E}^+$. Même chose pour $y \leqslant z$ qui signifie que $c - b \in \mathcal{E}^+$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} c - a &= c - b + b - a && \text{(1.798a)}\\ &= (c - b) + (b - a) && \text{(1.798b)}\\ &\in \mathcal{E}^+ + \mathcal{E}^+ && \text{(1.798c)}\\ &\subset \mathcal{E}^+ && \text{(1.798d)} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le lemme 1.541(2). Puisque $c - a \in \mathcal{E}^+$, nous avons $z - x = \overline{c - a} \geqslant 0$.

(4) **Ordre total** Nous devons prouver que pour $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons toujours $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. Supposons que nous n'ayons pas $x \leqslant y$, c'est-à-dire $\overline{b - a} \notin \mathcal{E}^+$. Vu le lemme 1.538(3) nous avons $\overline{b - a} \in \mathcal{E}^-$, ce qui donne, par le lemme 1.541(1) que $\overline{a - b} \in \mathcal{E}^+$, c'est-à-dire $y \leqslant x$.

(5) **Corps ordonné** Enfin nous devons vérifier les deux conditions de la définition 1.107.

Pour la première condition, nous supposons $x \leqslant y$, c'est-à-dire $b - a \in \mathcal{E}^+$. Nous avons donc

$$(b + c) - (a + c) = b + x - a - c = b - a \in \mathcal{E}^+, \tag{1.799}$$

donc $\overline{a + c} \leqslant \overline{b + c}$, c'est-à-dire $x + z \leqslant y + z$.

Pour la seconde condition, c'est le lemme 1.541(3).

□

Définition 1.546.
Puisque $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné (proposition 1.545), si $x \in \mathbb{R}$, nous définissons $|x|$ conformément à 1.113.

[230] Corps totalement ordonné, définition 1.493.

LEMooTJAXooKEqPCG

Lemme 1.547.
L'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R}\\ q &\mapsto \bar{q}\end{aligned} \tag{1.800}$$

dont nous avons déjà parlé dans la proposition 1.535 est strictement croissante.

Démonstration. Nous supposons $q < l$ dans $\mathbb{Q}$. Nous devons montrer que $\bar{q} \leqslant \bar{l}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\bar{q} \leqslant \bar{l}$ et $\bar{q} \neq \bar{l}$.

Considérons la suite constante $x_n = l - q \in \mathbb{Q}$. Pour tout $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{Q}$ nous avons

$$x_n = l - q > 0 > -\epsilon, \tag{1.801}$$

et donc $x_n \in \mathcal{E}^+$. Donc $\overline{l-q} \geqslant 0$. Cela signifie $\bar{q} \leqslant \bar{l}$.

D'autre part le lemme 1.536 dit que $\bar{q} = \bar{l}$ uniquement si $q = l$, ce qui est exclu parce que $q < l$. Donc $\bar{q} \neq \bar{l}$. □

LEMooNHMTooEdtBnQ

Lemme 1.548.
Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ satisfont $a + b = 0$, alors $a = b = 0$.

Démonstration. Par hypothèse nous avons $a \in \mathcal{E}^+\mathcal{E}_0$ et $b \in \mathcal{E}^+/\mathcal{E}_0$. Nous considérons $x, y \in \mathcal{E}^+$ tels que $a = \bar{x}$ et $b = \bar{y}$. Par 1.533 nous avons $a + b = \overline{x+y}$. L'hypothèse $a + b = 0$ signifie donc que

$$x + y \in \mathcal{E}_0. \tag{1.802}$$

EQooYMZTooZYuAaK

Supposons que x n'est pas dans $\mathcal{E}_0$. Alors x ne converge[231] pas vers 0. Par la proposition 1.540, il existe $r > 0$ dans $\mathbb{Q}$ et $N_1 > 0$ dans $\mathbb{N}$ tels que $x_n > r$ pour tout $n > N_1$.

Vu que $y \in \mathcal{E}^+$, il existe $N_2 > 0$ dans $\mathbb{N}$ tel que $y_n > -r/2$ pour tout $n > N_2$.

Donc pour $n > \max\{N_1, N_2\}$ nous avons[232] :

$$x_n + y_n \geqslant r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0. \tag{1.803}$$

Donc la suite $x + y$ ne peut pas converger vers zéro et nous n'avons pas $x + y \in \mathcal{E}_0$. Contradiction avec (1.802). Nous en déduisons que $a = 0$.

Nous déduisons que $b = 0$ alors immédiatement parce que $a + b = 0$ avec $a = 0$ donne $b = 0$. □

Voici une version dans $\mathbb{R}$ du lemme 1.193.

LEMooKAXFooIPyzJC

Lemme 1.549.
Soient $a > 0$ et $b > 1$ dans $\mathbb{R}$. Nous avons

$$ab > a. \tag{1.804}$$

Remarque 1.550.
Comme déjà mentionné plus haut, à chaque fois que nous parlerons d'un élément de $\mathbb{Q}$ comme étant un élément de $\mathbb{R}$, nous considérons la classe de la suite constante.

PROPooWYPNooCcBERG

Proposition 1.551 ([1]).
Soient $a \leqslant b$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Si $\lambda > 0$ alors $\lambda a \leqslant \lambda b$.

(2) Si $\lambda < 0$ alors $\lambda a \geqslant \lambda b$.

LemooYNOVooOwoRwD

Lemme 1.552.
Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$ sont tels que $z > y/x$ alors $zx > y$.

Démonstration. Nous savons que

$$z - \frac{y}{x} \in \mathcal{E}^+ \setminus \{0\} = \mathcal{E}^{++}. \tag{1.805}$$

Puisque $x \in \mathcal{E}^{++}$, multiplier par x fait rester dans $\mathcal{E}^{++}$:

$$zx - x\frac{y}{x} \in \mathcal{E}^{++}. \tag{1.806}$$

Un représentant de $x\frac{y}{x}$ est la suite $n \mapsto x_n \frac{y_n}{x_n} = y_n$. Donc $x\frac{y}{x} = y$. Cela signifie que $zx - y \in \mathcal{E}^{++}$ et donc que $zx > y$. □

[231] Je rappelle que x et y sont des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.
[232] Notez l'utilisation de la proposition 1.505.

LemooMWOUooVWgaEi

Lemme 1.553.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > a$.

Démonstration. Nous allons donner deux preuves différentes de ce lemme.

(1) **Première façon**

L'élément a de $\mathbb{R}$ admet un représentant (a_n) qui est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. C'est donc une suite bornée, c'est-à-dire qu'il existe $m, q \in \mathbb{N}$ tels que $|a_n| \leqslant m/q$ pour tout n (proposition 1.521(2)). Soit M un naturel strictement plus grand que m/q[233].

La suite de Cauchy $(M - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de rationnels positifs et est donc dans $\mathcal{E}^+$. La classe de $M - a$ est donc un réel positif[234]. Par définition de la relation d'ordre, $M \geqslant a$.

(2) **Seconde façon**

La suite (a_n) est majorée par $\frac{m}{q}$, donc on a dans $\mathbb{Q}$ et pour tout n :

$$a_n \leqslant \frac{m}{q} = M \leqslant qM. \tag{1.807}$$

L'application $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est croissante, donc

$$\varphi\big((a_n)\big) \leqslant \varphi(qM). \tag{1.808}$$

□

En corolaire, nous avons

LEMooMWOUooVWgbFi

Lemme 1.554.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $q < x$.

Démonstration. Utilisation du lemme précédent avec $a = -x$: on prend $q = -p$. □

ThoooKJTTooCaxEny

Théorème 1.555 ([35])**.**
Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien[235]*.*

Démonstration. La proposition 1.545 dit que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$; posons $a = \frac{y}{x}$. Le lemme 1.553 nous donne un $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > a$. Nous concluons alors avec le lemme 1.552 :

$$px > ax = \frac{y}{x}x = y. \tag{1.809}$$

□

Le lemme suivant n'est pas loin de dire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, à part que nous n'avons pas encore donné de topologie sur $\mathbb{R}$.

LemooHLHTooTyCZYL

Lemme 1.556.
À propos de rationnels entre des réels.

ITEMooGVTMooQsoTCi

(1) Si $x, y \in \mathbb{R}$ sont tels que $x < y$, alors il existe $s \in \mathbb{Q}$ tel que $x < s < y$.

ITEMooCVDSooAjimCL

(2) Si $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \epsilon$.

ITEMooASUXooImjqzK

(3) Si $a \in \mathbb{R}$ vérifie $|a| < \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, alors $a = 0$.

Démonstration. Nous avons par hypothèse que $y - x > 0$ et donc le fait que $\mathbb{R}$ soit archimédien (théorème 1.555) nous donne $q \in \mathbb{N}$ tel que $q(y - x) > 1$. Soit

$$E = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{n}{q} \leqslant x\}. \tag{1.810}$$

Cet ensemble n'est pas vide à cause du lemme 1.554 ; de plus, comme $|x|q \leqslant n_0$ pour un certain n_0 (à cause du lemme 1.553), l'ensemble E est majoré par n_0. Donc E possède un plus grand élément[236] p qui vérifie

$$\frac{p}{q} \leqslant x < \frac{p+1}{q}. \tag{1.811}$$

[233] Lemme 1.511.
[234] Et nous allons d'ailleurs arrêter de toujours préciser « la classe de » lorsque ce n'est pas nécessaire.
[235] Définition 1.146.
[236] Lemme 1.196.

De plus $(p+1)/q < y$ parce que

$$\frac{p+1}{q} = \frac{p}{q} + \frac{1}{q} \leqslant x + \frac{1}{q} < x + y - x = y \tag{1.812}$$

où nous avons utilisé l'inégalité stricte $y - x > \frac{1}{q}$.

Nous avons donc

$$x < \frac{p+1}{q} < y, \tag{1.813}$$

et le nombre $(p+1)/q$ convient comme s. Le point (1) est prouvé.

Pour le point (2), par le point (1) nous considérons $s \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < s < \epsilon$. Si $s = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ nous avons

$$0 < \frac{1}{q} \leqslant \frac{p}{q} < \epsilon. \tag{1.814}$$

Pour (3), supposons $a \neq 0$. Alors $|a| > 0$. Par le point (1), il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $0 < m < |a|$, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

REMooXOIOooHjwMvA

Remarque 1.557.
Le lemme 1.556 a également pour conséquence que des ensembles comme $[-1, 1]$ ne sont pas bien ordonnés (définition 1.24). En effet la partie $]0, 1[$ ne possède pas de minimum parce que si $x \in]0, 1[$ alors $0 < x$ et il existe $s \in \mathbb{Q}$ (a fortiori $s \in \mathbb{R}$) tel que $0 < s < x$, c'est-à-dire que x n'est pas un minimum de $]0, 1[$.

Tant que nous y sommes dans les encadrements de réels…

1.558.
Soit $q_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $0 \leqslant q_0 < 1$. On définit alors $d_1 \in \{0, 1\}$ comme valant 1 si $2q_0 \geqslant 1$ et 0 sinon. Puis on pose $q_1 = 2q_0 - d_1$.

Poursuivant de la sorte, on crée une suite $(d_n)_{n \geqslant 1}$: c'est le **développement dyadique** de q_0.

PROPooSZZBooUmsPeM

Proposition 1.559 ([1])**.**
Si $q \neq q'$, alors leurs développement dyadiques sont différents.

LEMooRSLIooVrZMxM

Lemme 1.560 ([1])**.**
Soit q, q' deux rationnels tels que $0 \leqslant q < q' < 1$. Il existe deux entiers naturels a et N tels que $q < \frac{a}{2^N} < q'$.

Démonstration. On crée les développements dyadiques de q et q', que l'on note respectivement $(d_n)_{n \geqslant 1}$ et $(d'_n)_{n \geqslant 1}$. Notons

$$E = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } d_n \neq d'_n\}. \tag{1.815}$$

Comme $q \neq q'$, les développements dyadiques sont différents[237], l'ensemble E est non-vide, et il admet un plus petit élément N. Or, $q < q'$, et donc nécessairement $d_N < d'_N$. On construit alors $a = \sum_{i=1}^{N} d_i 2^i$. □

CorDensiteDyadiques

Corolaire 1.561.
Deux choses.

(1) *Pour tous réels x, y tels que $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, il existe un nombre de la forme $d = a/2^n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$, $a \leqslant 2^n$, tel que $x < d < y$.*

(2) *La partie*

$$D = \{\frac{a}{2^b} \text{ tel que } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\} \tag{1.816}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

*Ce D est nommé l'ensemble des **fractions dyadiques**.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Le lemme 1.556(1) nous permet de considérer un rationnel q tel que $x < q < y$. Une utilisation combinée de 1.556(2) et de 1.344 permet de choisir n tel que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Nous posons

$$a = \min\{s \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{s}{2^n} > q\}. \tag{1.817}$$

Nous avons $a/2^n < q + \epsilon$, sinon prendre $a - 1$ aurait convenu. Nous avons donc

$$x < q \leqslant \frac{a}{2^n} < a + \epsilon < y. \tag{1.818}$$

[237] Proposition 1.559.

En ce qui concerne la densité, soient $r \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Nous considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/2^n < \epsilon$. Ensuite nous posons

$$a = \min\{a \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{a}{2^n} \geqslant r\}. \tag{1.819}$$

Nous avons alors $\frac{a}{2^n} - r < \epsilon$. Cela prouve que $B(r, \epsilon) \cap D \neq \varnothing$. □

LEMooEGYLooCGrDrl

Lemme 1.562 ([1]).
Soient des réels a, b, x, y tels que

$$a \leqslant x \leqslant b \tag{1.820}$$

et

$$a \leqslant y \leqslant b, \tag{1.821}$$

alors $|x - y| \leqslant |b - a|$.

LEMooNLGSooSGdvAo

Lemme 1.563.
Si $a \in \mathbb{R}$.

(1) $a^2 \geqslant 0$

(2) $a^2 = 0$ si et seulement si $a = 0$.

Démonstration. Il a trois possibilités : $a < 0$, $a = 0$ et $a > 0$. Nous les faisons une par une.

(1) **Si $a = 0$** Alors en posant $a = \bar{x}$ nous avons $x_n \xrightarrow{\mathbb{Q}} 0$. La définition 1.533 dit que $a^2 = \bar{x}\bar{x} = \overline{xx}$. Mais $(xx)_n \to 0$. Donc $a^2 = \overline{xx} = \bar{0} = 0$. Nous avons donc prouvé que $a^2 = 0$.

(2) **Si $a > 0$** Nous avons encore $a^2 = \overline{xx}$. La proposition 1.540 dit qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x_n > r$ pour tout n assez grand. Nous avons, pour ces n que $(xx)_n > r^2 > 0$ (utilisation de 1.506), et donc $xx \in \mathcal{E}^+ \setminus \mathcal{E}_0$. Donc $a^2 = \overline{xx} > 0$.

(3) **Si $a < 0$** Même raisonnement, mais avec $x_n < r$ pour n assez grand. Ensuite nous avons quand même $(xx)_n > r^2$.

□

PROPooRJOWooGbieCA

Proposition 1.564 ([1]).
Si $x, y \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$|x - y| = \max\big(|x| - |y|, |y| - |x|\big). \tag{1.822}$$

LEMooFQMVooDNaTDT

Lemme 1.565.
Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ tels que $a + x = b + x$. Alors $a = b$.

PROPooVIDJooSzXPLP

Proposition 1.566.
Si $a > b$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}. \tag{1.823}$$

1.23.3 Complétude

Le théorème 17.135 donne une complétion de tout espace métrique en un espace complet. Il serait tentant de l'utiliser ici pour définir $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Cette méthode ne fonctionne cependant pas parce que la démonstration de 17.135 utilise le fait que $\mathbb{R}$ est complet.

LEMooXCVRooOSZYWv

Lemme 1.567.
Nous avons

$$|\varphi(q)| = \varphi(|q|) \tag{1.824}$$

pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{Q}$. Si $q \geqslant 0$ alors nous avons d'une part $|q| = q$ dans $\mathbb{Q}$, et d'autre part $\varphi(q) \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$. Donc au final

$$|\varphi(q)| = \varphi(q) = \varphi(|q|). \tag{1.825}$$

Supposons au contraire que $q < 0$. Alors $|q| = -q$ dans $\mathbb{Q}$, mais aussi $\varphi(q) \leqslant 0$. Donc

$$|\varphi(q)| = -\varphi(q) = \varphi(-q) = \varphi(|q|). \tag{1.826}$$

□

LemooRTGFooYVstwS

Lemme 1.568 ([35, 1]).
Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers le réel qu'elle représente.

Plus précisément, en suivant les notations de 1.534, si (x_k) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, alors

(1) $\varphi(x_k)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

(2) $\varphi(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} \bar{x}$.

Ici $\bar{x}$ est la classe de la suite x. C'est donc un élément de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire que $x_k \in \mathbb{Q}$ pour tout k et qu'elle est de Cauchy. Elle représente un réel $\bar{x} \in \mathbb{R}$, et nous voulons prouver que pour la topologie de $\mathbb{R}$ nous avons $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \bar{x}$.

(1) $\varphi(x_k)$ **est de Cauchy**

Soit $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$. Nous considérons $\epsilon' \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < \epsilon' < \epsilon$. Plus précisément tel que

$$0 < \varphi(\epsilon') < \epsilon. \tag{1.827}$$

Soit $N > 0$ tel que $|x_p - x_q| < \epsilon'$ pour tout $p, q \geqslant N$. Cela existe parce que (x_k) est dans Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} |\varphi(x_p) - \varphi(x_q)| &= |\varphi(x_p - x_q)| && \text{(1.828a)}\\ &= \varphi\big(|x_p - x_q|\big) && \text{(1.828b)}\\ &\leqslant \varphi(\epsilon') && \text{(1.828c)}\\ &\leqslant \epsilon. && \text{(1.828d)} \end{aligned}$$

SUBEQooZPTIooYsiEqh
SUBEQooDOFUooUmCZpp

Justifications :

- Pour (1.828b). C'est le lemme 1.567.
- Pour (1.828c). L'application φ est croissante, lemme 1.547.

Donc la suite $\varphi(x_k)$ est de Cauchy.

(2) $\varphi(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} \bar{x}$ Nous devons prouver que pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, il existe N tel que $n > N$ implique $\varphi(x_n) \in B\big(\bar{x}, \epsilon\big)$. Nous allons faire ça en deux parties. D'abord $\epsilon \in \mathbb{Q}$ et ensuite $\epsilon \in \mathbb{R}$.

(2a) **Avec $\epsilon \in \mathbb{Q}$** Soit $\epsilon \in \mathbb{Q}$. Puisque x est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, il existe N tel que si $p, n > N$ nous avons

$$x_p - \epsilon < x_n < x_p + \epsilon. \tag{1.829}$$

EQooJURNooQoSzDZ

Ces inégalités sont dans $\mathbb{Q}$. Nous fixons p et nous commençons par écrire plus en détail la première inéquation :

$$x_p - \epsilon - x_n < 0. \tag{1.830}$$

Autrement dit, pour tout n nous avons

$$(\overline{x_p - \epsilon})_n < x_n. \tag{1.831}$$

Pour rappel, la suite $\overline{x_p - \epsilon}$ est la suite constante dans $\mathbb{Q}$. La suite

$$n \mapsto x_n - (\overline{x_p - \epsilon})_n \tag{1.832}$$

est dans $\mathcal{E}^+$. Donc, en vertu de la définition 1.544 nous avons

$$\bar{x} - \overline{x_p - \epsilon} \geqslant 0. \tag{1.833}$$

Nous pouvons aussi bien écrire

$$\bar{x} \geqslant \varphi(x_p) - \varphi(\epsilon). \tag{1.834}$$

En prenant l'autre inégalité de (1.829) nous trouvons de la même manière que

$$\bar{x} \leqslant \varphi(x_p) + \varphi(\epsilon). \tag{1.835}$$

Ces deux inégalités ensemble montrent que

$$\varphi(x_p) \in B\big(\bar{x}, \varphi(\epsilon)\big). \tag{1.836}$$

(2b) **Avec $\epsilon \in \mathbb{R}$** Nous considérons $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $\epsilon' \in \mathbb{Q}$ tel que $\varphi(\epsilon') < \epsilon$. Par le point précédent, il existe N tel que $p > N$ implique

$$\varphi(x_p) \in B\big(\bar{x}, \varphi(\epsilon')\big). \tag{1.837}$$

Étant donné que $\varphi(\epsilon') < \epsilon$ nous avons

$$\varphi(x_p) \in B\big(\bar{x}, \varphi(\epsilon')\big) \subset B\big(\bar{x}, \epsilon\big). \tag{1.838}$$

□

PROPooZSQYooWRKNGY

Proposition 1.569.
Soit une suite convergente $x_k \xrightarrow{\mathbb{Q}} q$. Alors

$$\varphi(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(q) \tag{1.839}$$

où φ est la fonction qui à un rationnel fait correspondre la classe de la suite constante correspondante[238].

Démonstration. Le fait d'avoir une convergence $x_k \to q$ dans $\mathbb{Q}$ implique que la suite (x_k) est de Cauchy, par la proposition 1.521(1).

Le lemme 1.568 nous indique que $\varphi(x_k)$ est une suite dans $\mathbb{R}$ qui converge vers $\bar{q}$, la classe de la suite (x_k).

À prouver : $\varphi(x) = \bar{q}$. Autrement dit, nous devons prouver que la classe de la suite constante $a_k = q$ et la classe de la suite x sont les mêmes.

La suite $(x_k - q)$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et converge vers zéro par hypothèse. Donc les suites x et (q) sont dans la même classe. □

PROPooFGBOooHiZqbs

Proposition 1.570 ([1]).
Deux choses à propos de suites de rationnels convergeant vers un réel.

ITEMooMAVYooKFtqlx

(1) Soit un réel x. Il existe une suite de rationnels strictement croissante qui converge vers x.

ITEMooVOVYooFUbccG

(2) Si de plus $x > 0$, alors la suite (toujours strictement croissante) peut être choisie parmi les rationnels strictement positifs.

Démonstration. Le lemme 1.556 nous sera d'une grande aide. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $q_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $x - 1 < q_0 < x$. Ensuite nous construisons la suite par récurrence : q_k est choisi tel que $q_{k-1} < q_k < x$. Cela règle le point (1).

Pour (2). Il suffit de faire la même chose, en partant de $0 < q_0 < x$. □

Notez la grande similitude entre ce théorème et le théorème 7.340. Ils ne sont pas équivalents, ne parlent pas exactement du même objet « $\mathbb{R}$ », ni des mêmes notions de suites de Cauchy et de complétude.

THOooUFVJooYJlieh

Théorème 1.571 (Complétude de $\mathbb{R}$, critère de Cauchy[35]).
Nous avons :

(1) Le corps $\mathbb{R}$ est un corps complet (définition 1.493(3))

(2) Une suite dans $\mathbb{R}$ est convergente (définition 1.493(2)) si et seulement si elle est de Cauchy (définition 1.493(1)).

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Pour chaque n, il existe par le lemme 1.556 un $y_n \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n}. \tag{1.840}$$

(1) **(y_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$** Nous prouvons que (y_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ (définition 1.493(1)). Vu que (x_n) est de Cauchy pour le corps $\mathbb{R}$, si $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$ est donné, il existe n_ϵ tel que si $p, q \geqslant n_\epsilon$, alors $|x_p - x_q| < \epsilon$.

Nous avons :

$$|y_p - y_q| \leqslant |y_p - x_p| + |x_p - x_q| + |x_q - y_q| < \frac{1}{p} + \epsilon + \frac{1}{q}. \tag{1.841}$$

En choisissant $N_\epsilon > \max\{n_\epsilon, \frac{1}{\epsilon}\}$ (ce qui est possible par le lemme 1.553), et en prenant $p, q > N_\epsilon$, nous avons

$$|y_p - y_q| \leqslant 3\epsilon, \tag{1.842}$$

ce qui prouve que (y_p) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, pour la notion de suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

[238] Voir les notations en 1.534.

(2) **Le réel représenté**

Puisque (y_p) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, elle représente un réel que nous notons $\bar{y}$.

(3) **Convergence de (x_n)**

Nous prouvons que $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \bar{y}$.

Nous savons qu'une suite de Cauchy de rationnels converge dans $\mathbb{R}$ vers le réel qu'elle représente, c'est-à-dire : $y_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \bar{y}$ où chaque $y_n \in \mathbb{Q}$ est vu comme la suite constante (cela est le lemme 1.568). Autrement dit, pour $\epsilon > 0$, il existe un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $p > N_\epsilon$ alors $|\bar{y} - y_p| < \epsilon$. Pour un tel p nous avons

$$|\bar{y} - x_p| \leqslant |\bar{y} - y_p| + |y_p - x_p| \leqslant \epsilon + \frac{1}{p}. \tag{1.843}$$

Donc dès que p est plus grand que $\max\{N_\epsilon, \frac{1}{\epsilon}\}$, nous avons $|\bar{y} - x_p| < 2\epsilon$, ce qui signifie que la suite (x_n) converge vers $\bar{y}$ dans $\mathbb{R}$.

Ceci achève de prouver que $\mathbb{R}$ est un corps complet.

En ce qui concerne l'équivalence entre les suites convergentes et de Cauchy, nous venons de prouver que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente. La réciproque est la proposition 1.520.

□

Nous avons terminé avec la construction des réels. Les propriétés topologiques arrivent en la section 9.3. En particulier le théorème 7.340 pour la complétude de $\mathbb{R}$ en tant qu'espace métrique.

LEMooSWBTooSkmheK

Lemme 1.572 ([1])**.**
Soit $\epsilon > 0$. Si $a, x \in \mathbb{R}$ vérifient $|x - a| < \epsilon$ alors $x < a + \epsilon$ et $x > a - \epsilon$.

1.23.4 Intervalles

Nous avons déjà défini la notion d'intervalle pour un espace totalement ordonné en 1.27. Nous posons quelques notations dans $\mathbb{R}$.

DEFooAQBUooKLChOW

Définition 1.573.
Soient $a \neq b$ dans $\mathbb{R}$. Nous définissons les parties suivantes de $\mathbb{R}$:

(1) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x < b\}$

(2) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leqslant x < b\}$

(3) $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x \leqslant b\}$

(4) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leqslant x \leqslant b\}$

(5) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leqslant a\}$

(6) $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x < a\}$

(7) $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x > a\}$

(8) $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geqslant a\}$.

(9) $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$.

La proposition 1.584 nous dira que tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont d'une de ces formes.

LEMooCZLZooTtkXgR

Lemme 1.574 ([1])**.**
Si I et J sont des intervalles, alors $I \setminus J$ est une union de 0, 1 ou 2 intervalles.

PROPooJEXCooHwHAKq

Proposition 1.575 ([1])**.**
Soient un intervalle I et des intervalles $\{I_k\}_{k=1,\dots,n}$ tels que $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$. Alors il existe des intervalles $\{J_i\}_{i=1,\dots,m}$ tels que

(1) $I = \bigcup_{i=1}^{m} J_i$,

(2) les J_i sont disjoints,

(3) pour tout $i = 1, \dots, m$, il existe un $k = 1, \dots, n$ tel que $J_i \subset I_k$.

Démonstration. Nous posons

$$\begin{cases} A_1 = I_1 & (1.844a) \\ A_k = I_k \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} A_l. & (1.844b) \end{cases}$$

Les A_k sont par construction disjoints. Avec une récurrence utilisant le lemme 1.574, on démontre que si A_k est une union finie disjointe d'intervalles, alors A_{k+1} aussi.

Finalement $I = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ est donc une union finie d'intervalles disjoints. □

1.23.5 Maximum, supremum et compagnie

Ce n'est un secret pour personne que $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné[239] : il y a des éléments plus grands que d'autres, et mieux : à chaque fois que je prends deux éléments différents dans $\mathbb{R}$, il y en a un des deux qui est plus grand que l'autre. Il n'y a pas d'*ex æquo* dans $\mathbb{R}$.

La définition du maximum d'une partie est la définition 1.28.

Proposition 1.576.
Soient $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$. Alors nous avons

$$\frac{1}{\min(x_i)} = \max\left(\frac{1}{x_i}\right). \tag{1.845}$$

Démonstration. En effet notons $y = \min(x_i)$. Nous avons alors $1/x_i \leqslant 1/y$ pour tout i. □

Définition 1.577.
Soit A, une partie de $\mathbb{R}$.

(1) *Un nombre M est un **majorant** de A si M est plus grand que tous les éléments de A : pour tout $x \in A$, $M \geqslant x$.*

(2) *Un nombre m est un **minorant** de A si m est plus petit que tous les éléments de A : pour tout $x \in A$, $m \leqslant x$.*

Nous parlons de majorant ou de minorants stricts *lorsque les inégalités sont strictes.*

Nous insistons sur le fait que l'inégalité n'est pas stricte. Ainsi, 1 est un majorant de $[0, 1]$. Dès qu'un ensemble a un majorant, il en a plein. Si s majore l'ensemble A, alors $s+1$, $s+4$, et $s+\frac{3}{7}$ majorent également A.

Exemple 1.578.
Une petite galerie d'exemples de majorants.

- L'intervalle fermé $[4, 8]$ admet entre autres 8 et 130 comme majorants,
- l'intervalle ouvert $]4, 8[$ admet également 8 et 130 comme majorants,
- 7 n'est pas un majorant de $[1, 5] \cup]8, 32]$,
- 10/10 majore les notes qu'on peut obtenir à un devoir.
- l'intervalle $[4, \infty[$ n'a pas de majorant.

△
DefSupeA

Proposition-Définition 1.579 (Least-upper-bound property[106])**.**
Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. Il existe un unique élément $M \in \mathbb{R}$ tel que

(1) *$M \geqslant x$ pour tout $x \in A$,*

(2) *pour tout ε, le nombre $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, c'est-à-dire qu'il existe un élément $x \in A$ tel que $x > M - \varepsilon$.*

*Cet élément est nommé **supremum** de A et est noté* $\sup(A)$*. De la même façon, **l'infimum** de A, noté* $\inf A$ *est l'unique réel $m \in \mathbb{R}$ vérifiant*

[239] Proposition 1.545.

(1) $m \leqslant a$ *pour tout* $a \in A$,

(2) pour tout $\epsilon > 0$, *le nombre* $m + \epsilon$ *n'est pas un minorant : il existe* $a \in A$ *tel que* $a \leqslant m + \epsilon$.

Par convention, si la partie n'est pas bornée vers le haut, nous dirons que son supremum n'existe pas, ou bien qu'il est égal à $+\infty$, suivant les contextes. Pour votre culture générale, sachez toutefois que $\infty \notin \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous faisons la preuve pour l'infimum.

(1) **Unicité**

En ce qui concerne l'unicité, soient m_1 et m_2, deux infimums de A. Supposons $m_1 > m_2$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $m_2 < m_2 + \epsilon < m_1$ (c'est le lemme 1.556). Cela prouve que $m_2 + \epsilon$ est un minorant de A et donc que m_2 n'est pas un infimum.

(2) **Existence**

Soit A, une partie de $\mathbb{R}$. Nous allons trouver son infimum en suivant une méthode de dichotomie. Pour cela nous allons construire trois suites en même temps de la façon suivante. D'abord nous choisissons un point x_0 de A et un point x_1 qui minore A (qui existe par hypothèse) :

$$\begin{aligned} &x_0 \text{ est un élément de } A,\\ &x_1 \text{ est un minorant de } A,\\ &a_0 = x_0\\ &b_0 = x_1\\ &b_1 = x_1. \end{aligned} \tag{1.846}$$

Ensuite, nous faisons la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2},\\ a_{n+1} &= \begin{cases} a_n & \text{si } x_{n+1} \text{ minore } A\\ x_{n+1} & \text{sinon,} \end{cases}\\ b_{n+1} &= \begin{cases} x_{n+1} & \text{si } x_{n+1} \text{ minore } A\\ b_n & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.847}$$

Nous allons montrer que (a_n) et (b_n) sont des suites convergentes de même limite et que cette limite est l'infimum de A.

Soit $n \in \mathbb{N}$; il y a deux possibilités. Soit $a_n = a_{n-1}$ et $b_n = x_n$, soit $a_n = x_n$ et $b_n = b_{n-1}$. Supposons que nous soyons dans le premier cas (le second se traite de façon similaire). Alors nous avons

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= |a_{n-1} - x_n|\\ &= \left| a_{n-1} - \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right|\\ &= \frac{1}{2}|a_{n-1} - b_{n-1}|, \end{aligned} \tag{1.848}$$

ce qui prouve que $|a_n - b_n| \to 0$. Nous montrons maintenant que la suite (a_n) est de Cauchy. En effet nous avons

$$|a_n - a_{n-1}| = \begin{cases} 0 & \\ \left|\frac{a_n - b_n}{2}\right| & \end{cases} \leqslant \frac{1}{2n}. \tag{1.849}$$

Il en est de même pour la suite (b_n). Ce sont deux suites de Cauchy (donc convergentes par la proposition 1.520) qui convergent vers la même limite. Soit ℓ cette limite.

Le nombre ℓ minore A. En effet si $a \in A$ est plus petit que ℓ, les éléments b_n tels que $|b_n - \ell| < |a - \ell|$ ne peuvent pas minorer A. D'autre part, pour tout ϵ, le nombre $\ell + \epsilon$ ne peut pas minorer A. En effet, ℓ est la limite de la suite décroissante (a_n), donc il existe a_n entre ℓ et $\ell + \epsilon$. Mais a_n ne minore pas A, donc $\ell + \epsilon$ ne minore pas non plus A.

Nous avons prouvé que toute partie minorée de $\mathbb{R}$ possède un infimum.

La preuve que toute partie majorée possède un supremum se fait de la même façon. □

LEMooSSVKooDPhSkq

Lemme 1.580.
Soit une partie A de $\mathbb{R}$. Si M est un majorant de A, alors $M \geqslant \sup(A)$.

Démonstration. Si $M < \sup(A)$, alors en posant $\epsilon = \sup(A) - M$, le nombre $\sup(A) - \epsilon$ est encore un majorant de A, ce qui est impossible par définition d'un supremum. □

PROPooGOPOooYyZSuU

Proposition 1.581 ([1])**.**
Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors

ITEMooAQNRooXFnsrA

(1) Si $\lambda \geqslant 0$, nous avons $\inf(\lambda A) = \lambda \inf(A)$.

ITEMooPCDXooRJraYV

(2) Si $\lambda \geqslant 0$, nous avons $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

ITEMooHPBEooGaKRDf

(3) Si $\lambda \leqslant 0$, nous avons $\inf(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

(1.850)

Démonstration. En plusieurs parties. Vérification des conditions de la définition 1.579.

(1) **Pour (1)** Nous posons $m = \inf(A)$, et nous prouvons que $\lambda m = \inf(\lambda A)$. Si $a \in A$, alors $m \leqslant a$ et donc $\lambda m \leqslant \lambda a$ par la proposition 1.551. Donc λm minore λA.

Vu que $m = \inf(A)$, si $\epsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $m + \epsilon/\lambda \geqslant a$. Donc, en multipliant par λ, $\lambda m + \epsilon \geqslant \lambda a$. Et donc $\lambda m + \epsilon$ ne minore pas λA.

(2) **Pour (2)** Même raisonnement que pour (1)[240].

(3) **Pour (3) avec $\lambda = -1$** Nous posons $s = \sup(A)$, et nous pouvons que $-s = \inf(-A)$. Soit $a \in A$. Nous avons $s \geqslant a$, et donc $-s \leqslant -a$, de telle sorte que $-s$ minore $-A$.

Soit $\epsilon > 0$. Nous voulons un $a \in A$ tel que $-s + \epsilon \geqslant a$. Vu que $s = \sup(A)$, il existe $a \in A$ tel que $a > s - \epsilon$, et donc, en multipliant par -1 : $-a < -s + \epsilon$.

(4) **Pour (3), cas général** Nous posons $\lambda = -\lambda'$ avec $\lambda' > 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\inf(\lambda A) &= \inf\big(-(\lambda' A)\big) && && (1.851a)\\
&= -\sup(\lambda' A) && \text{cas } \lambda = -1 && (1.851b)\\
&= -\lambda' \sup(A) && \text{par (2)} && (1.851c)\\
&= \lambda \sup(A). && && (1.851d)
\end{aligned}$$

□

LEMooTRJZooSTuHWs

Lemme 1.582.
Soit une partie bornée A dans $\mathbb{R}$. Si (x_n) est une suite dans A convergente vers $\sup(A)$, alors il existe une sous-suite croissante qui converge également vers $\sup(A)$.

Démonstration. Nous posons $s = \sup(A)$, et nous construisons en parallèle une suite (y_n) et une application $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par récurrence. D'abord nous posons

$$\begin{cases} y_1 = \min\{x_k \text{ tel que } x_k \in B(s,1)\} & (1.852a)\\ \varphi(1) = \min\{k \text{ tel que } x_k = y_1\}. & (1.852b) \end{cases}$$

et ensuite la récurrence :

$$\begin{cases} y_{n+1} = \min\{x_k \text{ tel que } k > \varphi(n), x_k \in B(s, 1/(n+1))\} & (1.853a)\\ \varphi(n+1) = \min\{k > \varphi(n) \text{ tel que } x_k = y_{n+1}\}. & (1.853b) \end{cases}$$

Voyons que ces définitions fonctionnent. D'abord y_{n+1} est bien défini quelle que soit la valeur $\varphi(n)$ parce qu'à partir d'un certain rang, tous les x_k sont dans $B(s, 1/(n+1))$. De plus (y_n) est bien une suite croissante parce que le minimum est pris sur des ensembles de plus en plus petits. Et enfin $y_n \to s$ parce que $y_n \in B(s, 1/n)$. □

[240] J'ai pas vraiment vérifié. Écrivez-moi si ça pose problème.

1.23.5.1 Intervalles

LEMooRMUCooMKiTGr

Lemme 1.583 ([1]).
Soit une partie A de $\mathbb{R}$.

ITEMooIQECooFjJFKz

(1) Nous supposons que A admette un supremum qui n'est pas dans A. Si x est un élément de A strictement plus petit que $\sup(A)$, alors il existe $y \in A$ tel que $x < y < \sup(A)$.

(2) Nous supposons que A admette un infimum qui n'est pas dans A. Si x est un élément de A strictement plus grand que $\inf(A)$, alors il existe $y \in A$ tel que $\inf(A) < y < x$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par définition 1.579 d'un supremum, le nombre $\sup(A) - \epsilon$ n'est pas un majorant de A. Autrement dit, il existe $y \in A$ tel que $y > \sup(A) - \epsilon$. Vu que $\sup(A)$ est plus grand que tous les éléments de A et qu'il n'est pas lui-même dans A, nous avons aussi $\sup(A) > y$. En mettant bout à bout :

$$x < \sup(A) - \epsilon < y < \sup(A). \tag{1.854}$$

□

PROPooHPMWooQJXCAS

Proposition 1.584 ([1]).
Tous les intervalles[241] *de $\mathbb{R}$ sont d'une des formes listées dans la définition 1.573.*

Démonstration. Il y a beaucoup de cas, et nous ne les feront pas tous[242].

(1) **Si I est borné vers le haut et vers le bas** Il y a 4 possibilités suivant que $\inf(I)$ et $\sup(I)$ soient ou non dans I.

(2) **Si $\inf(I) \in I$ et $\sup(I) \in I$** Nous prouvons que $I = [\inf(I), \sup(I)]$.

(2a) **Dans un sens** Si $x \in I$ nous avons $\inf(I) \leqslant x \leqslant \sup(I)$ parce que $\inf(I)$ est un minorant de toute élément de I alors que $\sup(I)$ est un majorant de tout élément de I. Donc $x \in [\inf(I), \sup(I)]$.

(2b) **Dans l'autre sens** Soit $\inf(I) \leqslant x \leqslant \sup(I)$. Vu que I est un intervalle et que $\sup(I)$ et $\inf(I)$ sont deux éléments de I, nous avons $x \in I$.

(3) $\inf(I) \in I$ **et** $\sup(I) \notin I$ Nous allons démontrer que $I = [\inf(I), \sup(I)[$.

(3a) **Dans un sens** Soit $x \in I$. Nous savons (par définition de l'infimum et du supremum) que $\inf(I) \leqslant x \leqslant \sup(x)$. Mais nous sommes dans un cas où $\sup(I) \neq x$ parce que $\sup(I)$ n'est pas dans I. Donc

$$\inf(I) \leqslant x < \sup(I), \tag{1.855}$$

ce qui montre que $I \subset [\inf(I), \sup(I)[$.

(3b) **Dans l'autre sens** Soit $x \in [\inf(I), \sup(I)[$. Nous utilisons le lemme 1.583(1) : il existe $y \in I$ tel que $\inf(I) \leqslant x < y < \sup(I)$. Vu que $\inf(I) \in I$, que $y \in I$ et que I est un intervalle, nous avons aussi $x \in I$ et donc $I \subset [\inf(I), \sup(I)[$.

(4) $\inf(I) \notin I$ **et** $\sup(I) \in I$ C'est le même raisonnement, mais en utilisant l'autre partie du lemme.

(5) $\inf(I) \notin I$ **et** $\sup(I) \notin I$ Nous prouvons que $I =]\inf(I), \sup(I)[$.

(5a) **Dans un sens** Nous avons

$$I \subset \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \inf(I) \leqslant x \leqslant \sup(I)\}. \tag{1.856}$$

Mais comme $\inf(I)$ et $\sup(I)$ ne sont pas dans I, nous pouvons les enlever dans le membre de droite :

$$I \subset \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \inf(I) < x < \sup(I)\} =]\inf(I), \sup(I)[. \tag{1.857}$$

(5b) **Dans l'autre sens** Si $x \in I$, nous avons $\inf(I) < x < \sup(I)$. En utilisant les deux parties du lemme, nous avons y_1 et y_2 dans I tels que

$$\inf(I) < y_1 < x < y_2 < \sup(I). \tag{1.858}$$

Vu que I est un intervalle, nous en déduisons que $x \in I$.

[241] Définition 1.27.
[242] Si vous avez un doute, écrivez-moi.

(6) $\inf(I) = -\infty$, $\sup(I) \in I$ Nous prouvons que $I =]-\infty, \sup(I)]$.

(6a) **Dans un sens** L'inclusion $I \subset \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leqslant \sup(I)\}$ est automatique : $\sup(I)$ majore tous les éléments de I.

(6b) **Dans l'autre sens** Soit $x \leqslant \sup(I)$. Vu que I n'a pas d'infimum, il existe $y \in I$ tel que $y < x < \sup(I)$. Comme I est un intervalle nous déduisons que $x \in I$.

Je vous laisse voir les autres cas. □

PROPooBWXYooDcwXrp

Proposition 1.585 ([1]).
Si I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $I = [a, b]$.

1.23.5.2 Quelques exemples

En matière de notations, le maximum de l'ensemble A est noté $\max A$, le supremum est noté $\sup A$. Le minimum et l'infimum sont notés $\min A$ et $\inf A$.

Exemple 1.586.
Exemples de différence entre majorant, supremum et maximum.

- Le nombre 10 est un supremum, majorant et maximum de l'intervalle fermé $[0, 10]$,
- Le nombre 10 est un majorant et un supremum, mais pas un maximum de l'intervalle ouvert $]0, 10[$,
- Le nombre 136 est un majorant, mais ni un maximum ni un supremum de l'intervalle $[0, 10]$.

△

En utilisant les notations concises, ces différents cas s'écrivent ainsi :

$$10 = \max[0, 10] = \sup[0, 10] \quad 10 = \sup[0, 10[\tag{1.859}$$

Exemple 1.587.
Si on dit qu'un pont s'effondre à partir d'une charge de 10 tonnes, alors 10 tonnes est un *supremum* des charges que le pont peut supporter : si on met $9,999999$ tonnes dessus, il tient encore le coup, mais si on ajoute un gramme, alors il s'effondre (on sort de l'ensemble des charges acceptables). △

Exemple 1.588.
Si on dit qu'un pont résiste jusqu'à 10 tonnes, alors 10 tonnes est un *maximum* de la charge acceptable. Sur ce pont-ci, on peut ajouter le dernier gramme. Mais à partir de là, le moindre truc qu'on ajoute, il s'effondre. △

LEMooWCUXooFqTwDK

Lemme 1.589.
À propos de bornes d'un intervalle dans $\mathbb{R}$.

(1) La borne inférieure[243] *d'un intervalle est son infimum,*

(2) la borne supérieure est le supremum.

(3) Si de plus l'intervalle est fermé, l'infimum est un minimum et le supremum est un maximum.

Démonstration. Soit I un des intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$. Nous allons montrer que dans tous ces cas, a est l'infimum de I.

Nous allons prouver que dans tous ces cas, $a = \int(I)$ en vérifiant les deux conditions de la définition 1.579. D'abord par définition d'un intervalle, pour tout $t \in I$ nous avons $t \geqslant a$. Première condition vérifiée. Ensuite, nous prenons $\epsilon > 0$. Si $a + \epsilon \geqslant b$, alors n'importe quel élément de I est plus petit que $a + \epsilon$. Si $a + \epsilon < b$, alors nous avons

$$a < a + \epsilon < b. \tag{1.860}$$

Dans ce cas, le lemme 1.556 donne un réel t tel que $a < t < a + \epsilon < b$. Donc $t \in I$ et $a + \epsilon$ n'est pas un minorant de I. □

Exemple 1.590.
Quelques exemples dans les intervalles.

[243] Ici par « borne inférieure » nous entendons le a dans les intervalles du type $]a, b]$, $[a, b]$, etc.

(1) $A = [1, 2]$. Tous les nombres plus petits ou égaux à 1 sont minorants, 1 est infimum et minimum. Le nombre 2 est un majorant, le maximum et le supremum.

(2) $B =]3, \pi[$. Le nombre π est le supremum et est un majorant, mais n'est pas le maximum (parce que $\pi \notin B$). L'ensemble B n'a pas de maximum. Bien entendu, -1000 est un minorant.

Dans les deux cas, le nombre 53 est un majorant. △

Il existe évidemment de nombreux exemples plus vicieux.

Exemple 1.591.
Prenons $E = \{\frac{1}{n} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}_0\}$, dont les premiers points sont indiqués sur la figure 1.1. Cet ensemble est constitué des nombres 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, … Le plus grand d'entre eux est 1 parce que tous les nombres de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \geqslant 1$ sont plus petits ou égaux à 1. Le nombre 1 est donc maximum de E.

L'ensemble E n'a par contre pas de minimum parce que tout élément de E s'écrit $\frac{1}{n}$ pour un certain n et est plus grand que $\frac{1}{n+1}$ qui est également dans E.

Prouvons que zéro est l'infimum de E. D'abord, tous les éléments de E sont strictement positifs, donc zéro est certainement un minorant de E. Ensuite, nous savons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un n tel que $\frac{1}{n}$ est plus petit que ε. L'ensemble E possède donc un élément plus petit que $0 + \varepsilon$, et zéro est bien l'infimum. △

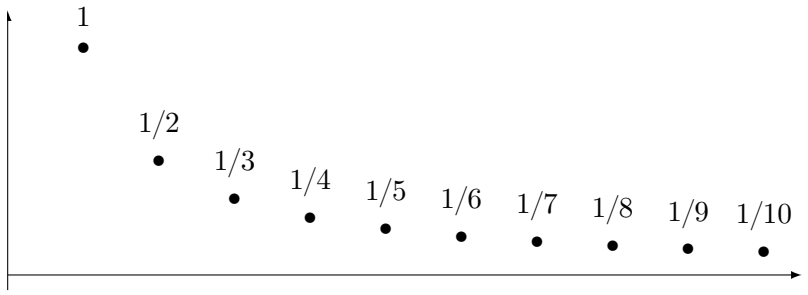


FIGURE 1.1 : Les premiers points du type $x_n = 1/n$. LabelFigSuiteUnSurn

L'exemple suivant est une source classique d'erreurs en ce qui concerne l'infimum.

Exemple 1.592.
Les premiers points de l'ensemble $F = \{\frac{(-1)^n}{n} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}_0\}$ sont représentés à la figure 1.2. Bien que (comme nous le verrons plus tard) la limite de la suite $x_n = (-1)^n/n$ soit zéro, il n'est pas correct de dire que zéro est l'infimum de l'ensemble F. Le dessin, au contraire, montre bien que -1 est le minium (aucun point est plus bas que -1), tandis que le maximum est $1/2$.

Nous reviendrons avec cet exemple dans la suite. Pour l'instant, ayez bien en tête que zéro n'est rien de spécial pour l'ensemble F en ce qui concerne les notions de maximum, minimum et compagnie. △

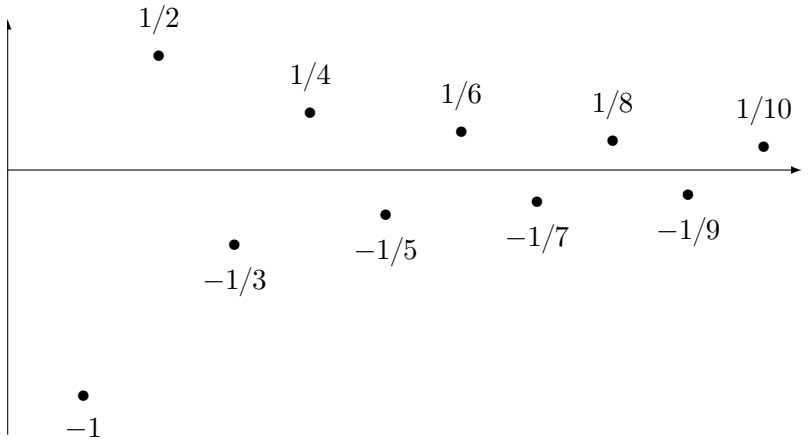


FIGURE 1.2 : Les quelques premiers points du type $(-1)^n/n$. LabelFigSuiteInverseAlterne

1.23.6 Racines

SUBSECooMBCNooEqjjTY

Dans cette section, nous définissons $\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{Q}^+$. Vous notez que c'est fait de façon assez algébrique[244], ou en tout cas, en restant proche des définitions. Des définitions plus technologiques utilisant la continuité de $x \mapsto x^n$ et qui prouvent que l'application est bijective sur un domaine choisi avec prudence existent (voir la définition 12.405). Il est même expliqué dans [101] que la méthode décrite ici permet de définir $\sqrt[n]{x}$ pour tout n entier, et pas seulement pour $n = 2$.

PROPooUHKFooVKmpte

Proposition 1.593.
Soit $q \in \mathbb{Q}^+$. Il existe un unique $r \in \mathbb{R}$ tel que $r^2 = q$.

Plus précisément, en termes des notations de 1.534, pour tout $q \in \mathbb{Q}^+$, il existe un unique $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $r^2 = \varphi(q)$.

Démonstration. En deux parties : d'abord l'existence et ensuite l'unicité.

(1) **Existence** Si $q = 0$, c'est $r = 0$. Nous supposons $q > 0$. La suite (x_k) de la proposition 1.527 a la propriété d'être de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Donc il existe un réel r qui est la classe de cette suite. Nous posons donc

$$r = \bar{x}. \tag{1.861}$$

En ce qui concerne r^2, nous avons, par définition du produit dans $\mathbb{R}$,

EQooPHLFooAZhebM

$$r^2 = \bar{x}^2 = \overline{(x_k^2)}, \tag{1.862}$$

c'est la classe de la suite de Cauchy donnée par les x_k^2. Posons $y_k = x_k^2$; la relation (1.862) s'écrit

$$r^2 = \bar{y}. \tag{1.863}$$

La proposition 1.527 nous dit également que y est une suite de Cauchy et que

$$y_k \xrightarrow{\mathbb{Q}} q \tag{1.864}$$

La proposition 1.569 donne alors $\bar{y} = \bar{q}$, et finalement

$$r^2 = \bar{q} = \varphi(q). \tag{1.865}$$

Ici tout n'est pas encore terminé avec l'existence parce qu'il faut nous assurer que $r \geqslant 0$. Ce n'est pas très compliqué : si $r < 0$, alors nous pouvons faire le choix $-r$ qui convient tout aussi bien : $(-r)^2 = r^2$.

(2) **Unicité** Supposons $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tels que $r_1^2 = r_2^2$. La proposition 1.545 dit que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné ; disons pour fixer les idées que $r_1 \leqslant r_2$. Cela signifie, par définition de l'ordre sur $\mathbb{R}$, que $r_2 - r_1 \geqslant 0$. En posant $s = r_2 - r_1$ nous avons $r_2 = r_1 + s$. Passons au carré ; la distribution dans le calcul suivant provient du fait que $\mathbb{R}$ est un corps :

$$r_2^2 = (r_1 + s)^2 = r_1^2 + 2r_1 s + s^2. \tag{1.866}$$

Vu que $r_1^2 = q = r_2^2$, nous avons $2r_1 s + s^2 = 0$ ou encore

$$s(2r_1 + s) = 0. \tag{1.867}$$

Puisque $\mathbb{R}$ est un corps, c'est un anneau intègre[245] et la règle du produit nul s'applique : soit $s = 0$, soit $2r_2 + s = 0$. Puisque $r_2 > 0$ et que $s \geqslant 0$, nous avons $2r_2 + s > 0$ et donc $s = 0$.

Nous en déduisons que $r_1 = r_2$.

□

1.23.7 Partie entière, partie fractionnaire

LEMooLEXTooGAQxGB

Lemme-Définition 1.594 ([107]).
Pour tout réel x, il existe un unique entier n vérifiant

$$n \leqslant x < n + 1. \tag{1.868}$$

Dans ce cas nous avons $x - n \in [0, 1[$.

*Le nombre n ainsi défini est la **partie entière** de x, et il sera noté* $\mathrm{int}(x)$. *Le nombre $x - \mathrm{int}(x)$ est la **partie fractionnaire** de x que nous notons* $\mathrm{frac}(x)$.

[244] Discutable parce que des limites sont utilisées.
[245] Lemme 1.336.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Existence** Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous posons $A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \leqslant x\}$. Le lemme 1.553 dit qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > x$. Donc $A \subset \{0, \dots, p\}$ et A est fini.

Le lemme 1.216 dit alors que A possède un maximum. En posant $n = \max(A)$ nous avons $n \leqslant x$ mais aussi $x < n + 1$ parce que si $x \leqslant n + 1$ nous aurions $n + 1 \in A$, et n ne serait pas le maximum.

(2) **Unicité** Supposons que m et n aient les propriétés d'être une partie entière de x. Nous avons

$$\begin{cases} n \leqslant x & \text{EQooBVZLooQGJgTm} \quad (1.869a)\\ x < n + 1 & \text{EQooLXPSooEkiSee} \quad (1.869b)\\ m \leqslant x & \text{EQooJQTDooSUowlT} \quad (1.869c)\\ x < m + 1 & \text{EQooPFJWooPoeyoT} \quad (1.869d) \end{cases}$$

Supposons pour fixer les ides que $m \geqslant n$. Nous avons

$$\begin{aligned} m - n &\leqslant x - n && \text{par (1.869c)} && (1.870a)\\ &< n + 1 - n && \text{par (1.869b)} && (1.870b)\\ &= 1 && && (1.870c) \end{aligned}$$

Donc $m - n$ est un entier positif strictement inférieur à 1. Donc $m - n = 0$.

(3) **L'encadrement** En partant de $n \leqslant x < n+1$ et en soustrayant n à tous les membres, nous trouvons $0 \leqslant x - n < 1$, qui signifie $x - n \in [0, 1[$.

□

1.595.
Il est toutefois à noter que la partie fractionnaire de x n'est pas garantie d'être une fraction : elle pourrait être irrationnelle. Cette dénomination est donc un peu trompeuse.

LEMooMMSAooFiRkQd

Lemme 1.596.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ n'est pas un entier, alors $\text{int}(\lambda) + 2 > \lambda$.

1.23.8 Le tore

1.597.
Cette section sur le tore est juste un avant-gout pour insister sur les classes d'équivalences. Ce que vous voulez réellement savoir est dans 10.0.4. Notez que la fonction τ qui sera définie là-bas n'est pas exactement la même que celle sur laquelle nous travaillons ici.

Bref, je crois que vous pouvez sauter cette partie sur le tore.

DEFooRWLLooHkdFDN

Définition 1.598 ([1]).
Nous considérons la relation d'équivalence $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$. Et la relation $(x, y) \sim (x', y')$ si $x - x' \in \mathbb{Z}$ et $y - y' \in \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$.

DEFooTSSTooOFPxzu

Définition 1.599 ([1]).
*Le **tore** de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2/\sim$. Nous le notons T.*

Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \tau\colon \mathbb{R} &\to]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\\ x &\mapsto \begin{cases} \text{frac}(x) & \text{si } \text{frac}(x) \leqslant 1/2\\ \text{frac}(x) - 1 & \text{si } \text{frac}(x) < 1/2 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.871}$$

où $\text{frac}\colon \mathbb{R} \to [0, 1[$ est la partie fractionnaire définie par le lemme 1.594. Nous posons aussi

$$\begin{aligned} \tau\colon \mathbb{R}^2 &\to]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\\ (x, y) &\mapsto \big(\tau(x), \tau(y)\big). \end{aligned} \tag{1.872}$$

Notez que si $y = x + k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, nous avons $\tau(y) = \tau(x)$, donc nous pouvons poser

$$\begin{aligned} \tau\colon \mathbb{R}/\sim &\to]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \\ [x] &\mapsto \tau(x). \end{aligned} \tag{1.873}$$

Et enfin nous posons

$$\begin{aligned} \tau\colon T &\to]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \\ [(x,y)] &\mapsto \big(\tau(x),\tau(y)\big). \end{aligned} \tag{1.874}$$

EQooCRZHooMNPBDo

Tout cela pour rapporter le tore au carré de côté 1 centré en $(0,0)$.

PROPooNRNGooJahxQv

Proposition 1.600 ([1]).
Soit $x \in \mathbb{R}$. Parmi les éléments de $A_x = \{x + k \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\}$, l'élément le plus proche de 0 est $\tau(x)$.

Démonstration. Nous avons $\tau(x) \in]-1/2, 1/2]$. Nommons y l'élément de A_x le plus proche de zéro. Si $1/2 \in A_x$, alors c'est lui le plus proche : $y = 1/2$. Dans ce cas nous avons $|\tau(x)| \leqslant 1/2 = y$.

Si $1/2$ n'est pas dans A_x, alors l'hypothèse $|y| \leqslant |\tau(x)|$ donne $|y| < 1/2$. Nous avons alors

$$|\tau(x) - y| \leqslant |\tau(x)| + |y| < 1, \tag{1.875}$$

ce qui est impossible parce que $\tau(x) - y \in \mathbb{Z}$. □

LEMooQAQPooGGumSe

Lemme 1.601 ([1]).
Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in T$ nous avons

$$d(\alpha + \gamma, \beta + \gamma) = d(\alpha, \beta). \tag{1.876}$$

Démonstration. Soient $x \in \alpha$, $y \in \beta$ et $z \in \gamma$. Nous avons $\alpha + \gamma = [a + z]$ et $\beta + \gamma = [b + z]$, de telle sorte que

$$\begin{aligned} d(\alpha + \gamma, \beta + \gamma) &= \inf_{\substack{a\in\alpha+\gamma\\ b\in\beta+\gamma}} f(a,b) && \text{(1.877a)}\\ &= \inf_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathbb{Z}^2}} d(a+z+k, b+z+l) && \text{(1.877b)}\\ &= \inf_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathbb{Z}^2}} d(a+k, b+l) && \text{(1.877c)}\\ &= d(\alpha,\beta). && \text{(1.877d)} \end{aligned}$$

□

LEMooQNDHooFXYjtj

Lemme 1.602 ([1]).
Soit $\beta \in T$. Nous avons

$$d(0,\beta) = d\big(0,\tau(\beta)\big) \tag{1.878}$$

où à gauche nous avons la « distance »[246] *sur T et à droite nous avons la distance usuelle sur $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration. Nous choisissons $b \in \beta$ et nous avons

$$\begin{aligned} d(0,\beta) &= \min_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathbb{Z}^2}} d(k, b+l) && \text{(1.879a)}\\ &= \min_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ l\in\mathbb{Z}^2}} f(0, b-k+l) && \text{(1.879b)}\\ &= \min_{k\in\mathbb{Z}^2} f(0, b+k) && \text{(1.879c)}\\ &= d\big(0,\tau(b)\big) && \text{prop. 1.600} \quad \text{(1.879d)}\\ &= d\big(0,\tau(\beta)\big). && \text{(1.879e)} \end{aligned}$$

□

[246] Qui n'en est pas une d'ailleurs.

1.24 Les complexes

La notion de module d'un nombre complexe $|z|$ sera donnée beaucoup plus tard, dans le lemme 9.103. La raison est que le module demande la racine carrée.

Définition 1.603 (Nombres complexes[108]).
L'ensemble des ***nombres complexes*** $\mathbb{C}$ *est l'ensemble* $\mathbb{R}^2$ *muni des opérations suivantes :*

(1)

$$\begin{aligned} \times_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ \big((x,y),(x',y')\big) &\mapsto (xx'-yy',xy'+yx') \end{aligned} \tag{1.880}$$

EQooIJWOooZBiKEW

(2)

$$\begin{aligned} +_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ \big((x,y),(x',y')\big) &\mapsto (x+x',y+y') \end{aligned} \tag{1.881}$$

(3)

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ \big(\lambda,(x,y)\big) &\mapsto (\lambda x,\lambda y). \end{aligned} \tag{1.882}$$

Lemme 1.604.
Le triplet $(\mathbb{C},+_{\mathbb{C}},\times_{\mathbb{C}})$ *est un anneau*[247] *commutatif dont le neutre pour l'addition est* $(0,0)$ *et le neutre pour la multiplication est* $(1,0)$.

Démonstration. Ce ne sont que des calculs. Juste pour vous montrer, voici la première partie pour l'associativité :

$$\big((a,b)(x,y)\big)(s,t) = (ax-by,ay+bx)(s,t) \tag{1.883a}$$
$$= (axs-bys-ayt-bxt,axt-byt+ays+bxs). \tag{1.883b}$$

Nous avons utilisé la distributivité sur $\mathbb{R}$, provenant du fait que $\mathbb{R}$ est un corps par le théorème 1.533. □

LEMooXTDDooFAjWRm

Lemme 1.605.
L'anneau $\mathbb{C}$ *est un corps.*

Démonstration. Il suffit de trouver un inverse pour chaque élément non nul. Soit un élément non nul $(a,b) \in \mathbb{C}$. En combinant les lemmes 1.548 et 1.563 nous savons que $a^2+b^2>0$. En particulier, cet élément est inversible dans $\mathbb{R}$, et nous pouvons considérer l'élément suivant de $\mathbb{C}$:

$$z = \Big(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\Big). \tag{1.884}$$

Prouver que $z(a,b)=(1,0)$ est maintenant juste un calcul. □

Lemme 1.606.
L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto (x,0) \end{aligned} \tag{1.885}$$

est un morphisme d'anneaux[248].

Démonstration. Simples calculs. Par exemple

$$\varphi(xx') = (xx',0) = (x,0)(x',0) = \varphi(x)\varphi(x'). \tag{1.886}$$

□

1.607.
Admirez …

- Un nombre complexe est un couple de réels.
- Un réel est une classe d'équivalence de suites de Cauchy de rationnels.

[247] Définition 1.92.
[248] Définition 1.98.

- Une suite de Cauchy de rationnels est une application $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ vérifiant certaines propriétés.
- Un rationnel est une classe d'équivalences d'éléments de $\mathbb{Z}$.
- Un élément de $\mathbb{Z}$ est une classe d'équivalence de couples de naturels.
- Un naturel sera … là c'est plus compliqué. Une construction vraiment rigoureuse des naturels risque d'être en dehors du cadre du Frido.

Bref, les objets que nous manipulons sont d'une effroyable complexité.

1.608.
À partir de maintenant, lorsque nous parlons de $\mathbb{R}$, nous parlons en réalité de $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$.

Lemme 1.609.
Nous avons $(0,1)^2 = (-1,0)$. *Nous notons* $i = (0,1)$.

Démonstration. Calcul direct à partir de la définition 1.880. □

DEFooQDDVooRYDsAJ

Définition 1.610.
Si $z = a + bi$ *est un nombre complexe (avec* $a, b \in \mathbb{R}$*), son* ***complexe conjugué*** *est le nombre* $a - bi$.

L'étude de la série géométrique est reportée à (beaucoup) plus tard, à la proposition 10.172. Dans l'immédiat il nous est possible de calculer la somme partielle.

LEMooAFSCooWEVlvp

Lemme 1.611 (Somme partielle de la série géométrique)**.**
Soit $q \in \mathbb{C}$. *Nous avons*

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}. \tag{1.887}$$

Démonstration. Posons $S_N = 1 + q + \ldots + q^N$. Nous avons évidemment $S_N - qS_N = 1 - q^{N+1}$ et donc

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}. \tag{1.888}$$

EqASYTiCK

□

1.24.1 Norme et inégalités

Rien ici. La norme sur $\mathbb{C}$ demande la racine carrée qui sera vue plus tard. Voir par exemple la proposition 10.2 pour $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Si vous cherchez des propriétés de la valeur absolue, c'est la proposition 1.114.

Chapitre 2

Théorie des groupes

Pour rappel, la notion de groupe est définie en 1.85.

LEMooQYETooZsTFMg

Lemme 2.1 ([1]).
Soient un groupe G ainsi qu'une partie $S \subset G$. Nous notons $i : G \to G$ l'application $x \mapsto x^{-1}$. Si nous posons $W = A \cap i(A)$, alors $W = W^{-1}$.

Démonstration. Nous montrons que $W^{-1} \subset W$. Un élément de W^{-1} est de la forme x^{-1} avec $x \in W$. Nous avons

$$x \in W \Rightarrow x \in i(A) \Rightarrow x^{-1} \in A, \tag{2.1}$$

et

$$x \in W \Rightarrow x \in A \Rightarrow x^{-1} \in i(A). \tag{2.2}$$

Nous avons prouvé que $x^{-1} \in A \cap i(A) = W$. □

2.1 Groupe dérivé

DEFooVHZAooUgmesE

Définition 2.2.
*Si G est un groupe et si $g, h \in G$, nous notons $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ le **commutateur** de g et h.*

L'élément neutre est toujours un commutateur : pour $g = h$, $[g, g] = ggg^{-1}g^{-1} = e$.

DEFooBNLPooShKYXa

Définition 2.3.
*Le **groupe dérivé** de G est le sous-groupe noté $D(G)$ ou $[G, G]$ engendré[1] par les commutateurs.*

Autrement dit, $D(G)$ est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant tous les commutateurs. Le groupe $D(G)$ contient toujours au moins le neutre parce que c'est un groupe.

En vertu du lemme 1.437, le groupe dérivé de G est l'ensemble des produits finis de commutateurs. C'est-à-dire que si S_m est l'ensemble des produits de m commutateurs, alors

$$D(G) = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m. \tag{2.3}$$

LemMMOCooDJJJhy

Lemme 2.4.
Le groupe dérivé est un sous-groupe caractéristique[2], et un sous-groupe normal[3].

Démonstration. Il est évident que si $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ alors

$$\alpha\big([g, h]\big) = \big[\alpha(g), \alpha(h)\big], \tag{2.4}$$

c'est-à-dire que $D(G)$ est un sous-groupe caractéristique. En particulier si c est un commutateur, alors xcx^{-1} en est encore un, ce qui montre que $D(G)$ est normal dans G. Plus spécifiquement,

$$x(ghg^{-1}h^{-1})x^{-1} = (xgx^{-1})(xhx^{-1})(xg^{-1}x^{-1})(xh^{-1}x^{-1}) \tag{2.5a}$$
$$= (xgx^{-1})(xhx^{-1})(xgx^{-1})^{-1}(xhx^{-1})^{-1}. \tag{2.5b}$$

□

[1] Définition 1.432.
[2] Définition 1.266.
[3] Définition 1.265.

PropAPRGooHBkELf

Proposition 2.5.
Le groupe quotient $G/D(G)$ est abélien.

Démonstration. En ce qui concerne le fait que $G/D(G)$ soit abélien, nous savons que pour tout $g, h \in G$ nous avons $h^{-1}g^{-1}hg \in D(G)$ et donc

$$[g][h] = [gh] = [ghh^{-1}g^{-1}hg] = [hg] = [h][g]. \tag{2.6}$$

□

Le groupe quotient $G/D(G)$ est appelé l'**abélianisé** de G et est parfois noté G^{ab}.

Si $f\colon G \to A$ est un morphisme entre le groupe G et un groupe abélien A, alors $f\big(D(G)\big) = \{0\}$. Du coup f passe au quotient de G par $D(G)$, et il existe une unique application $\bar{f}\colon G/D(G) \to A$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$ où $\pi\colon G \to G/D(G)$ est la projection canonique.

2.2 Théorèmes d'isomorphismes

DEFooWBIYooGNRYOp

Définition 2.6.
*Soient un groupe G, un ensemble X et une application $f\colon X \to G$. Le **noyau** de f est la partie*

$$\ker(f) = \{x \in X \text{ tel que } f(x) = e\} \tag{2.7}$$

où e est l'élément neutre de G.

Si G est un groupe et si N est un sous-groupe normal, alors l'ensemble G/N a une structure de groupe et la projection canonique $\pi\colon G \to G/N$ est un morphisme surjectif de noyau N.

ThoPremierthoisomo

Théorème 2.7 (Premier théorème d'isomorphisme)**.**
Soit $\theta\colon G \to H$ un morphisme de groupe. Alors

(1) $\ker(\theta)$ *est normal dans G,*

(2) $\operatorname{Image}\theta$ *est un sous-groupe de H*

ItemWLCLdk

(3) nous avons un isomorphisme

$$\frac{G}{\ker(\theta)} \simeq \operatorname{Image}\theta \tag{2.8}$$

Démonstration. Point par point.

(1) Le fait que $\ker(\theta)$ soit un sous-groupe de G est clair ; montrons qu'il est normal. Si $g \in G$ et $u \in \ker(\theta)$, alors $\theta(g^{-1}ug) = \theta(g^{-1})\theta(u)\theta(g) = \big(\theta(g)\big)^{-1}\theta(g) = 1_H$, et donc $g^{-1}ug \in \ker(\theta)$.

(2) Il suffit de remarquer que si $h = \theta(g)$ et $h' = \theta(g')$, alors $h^{-1}h' = \theta(g^{-1}g')$.

(3) Si $[g]$ représente la classe de g dans $G/\ker(\theta)$, l'isomorphisme est donné par $\varphi([g]) = \theta(g)$.

□

THOooURXUooQJvkjx

Théorème 2.8 (Deuxième théorème d'isomorphisme)**.**
Soient H et N deux sous-groupes de G et supposons que N soit normal[4]*. Alors*

(1) $NH = HN$ est un sous-groupe.

(2) Le groupe N est normal dans NH.

(3) Le groupe $N \cap H$ est normal dans H.

ItemjRPajc

(4) Nous avons l'isomorphisme

$$\frac{HN}{N} \simeq \frac{H}{H \cap N}. \tag{2.9}$$

Démonstration. Point par point.

[4] Si N n'est pas normal, il y aura la proposition 2.9.

(1) Il est clair que $1_G \in NH$. Soient nh et $n'h'$ deux éléments de NH ; alors en tenant compte du fait que N est normal,

$$nhn'h' = n\underbrace{hn'h^{-1}}_{\in N}hh' \in NH. \tag{2.10}$$

Cela prouve que NH est un groupe.

De la même façon, nous prouvons que HN est un groupe par

$$hnh'n' = hh'\underbrace{h'^{-1}nh'}_{\in N}n' \in HN \tag{2.11}$$

Nous devons encore prouver que $HN = NH$. Pour cela, $nh \in HN$, car $nh = hh^{-1}nh$, les trois derniers facteurs formant un élément de N par normalité ; de même $hn \in NH$, montrant que $NH = HN$. Enfin, comme $(nh)^{-1} = h^{-1}n^{-1}$, les inverses de NH sont dans $HN = NH$.

(2) N est normal dans G, a fortiori dans l'un de ses sous-groupes.

(3) Il suffit de voir que, si $h \in H$ et $n \in N \cap H$, alors $hnh^{-1} \in N \cap H$. Or, $hnh^{-1} \in H$ puisque H est un sous-groupe ; et $hnh^{-1} \in N$ car N est un sous-groupe normal de G.

(4) Il faut d'abord remarquer que H et N étant des groupes et le produit NH étant un groupe, nous avons $NH = HN$. Soit le morphisme injectif

$$\begin{aligned} j\colon H &\to HN \\ h &\mapsto h \end{aligned} \tag{2.12}$$

et la surjection canonique

$$\sigma\colon HN \to HN/N \tag{2.13}$$

Nous considérons ensuite l'application composée

$$\begin{aligned} f\colon H &\to HN/N \\ h &\mapsto hN. \end{aligned} \tag{2.14}$$

(4a) **f est surjective** L'application f est surjective parce que l'élément $hnN \in HN/N$ est l'image de h, étant donné que $hnN = hN$.

(4b) $\ker(f) = H \cap N$ Si $a \in H \cap N$, nous avons $f(a) = aN = N$, et donc $H \cap N \subset \ker(f)$. D'autre part, si $h \in H$ vérifie $h \in \ker(f)$, alors $f(h) = hN = N$, ce qui est uniquement possible lorsque $h \in N$.

Le premier théorème d'isomorphisme[5] implique alors que $H/\ker(f) \simeq \text{Image}\, f$, c'est-à-dire

$$H/N \cap H \simeq HN/N. \tag{2.15}$$

□

PROPooVBGMooPTlyLF

Proposition 2.9 (Deuxième théorème d'isomorphisme (suite))**.**
Soient N et H des sous-groupes de G. Si H normalise N, c'est-à-dire si $hNh^{-1} \in N$ pour tout $h \in H$, alors nous avons l'isomorphisme

$$\frac{HN}{N} \simeq \frac{H}{H \cap N}. \tag{2.16}$$

ThoezgBep

Théorème 2.10 (Troisième théorème d'isomorphisme)**.**
Soient N et M deux sous-groupes normaux de G avec $M \subset N$. Alors N/M est normal dans G/M et

$$(G/M)/(N/M) \simeq G/N. \tag{2.17}$$

Démonstration. Afin de montrer que N/M est normal dans G/M, nous considérons $g \in G$, $nM \in N/M$ et nous calculons

$$gnMg^{-1} = gng^{-1}\underbrace{gMg^{-1}}_{=M} = \underbrace{gng^{-1}}_{\in N}M \in N/M. \tag{2.18}$$

[5] Théorème 2.7.

Pour prouver l'isomorphisme nous considérons le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi\colon G/M &\to G/N \\ gM &\mapsto gN. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ce morphisme est surjectif et son noyau est N/M, parce que $\varphi(gM) = N$ uniquement si $g \in N$. Nous pouvons appliquer le premier théorème d'isomorphisme à φ en écrivant

$$(G/M)/\ker(\varphi) \simeq \text{Image}\,\varphi, \tag{2.20}$$

c'est-à-dire

$$(G/M)/(N/M) \simeq G/N. \tag{2.21}$$

□

2.3 Indice d'un sous-groupe et ordre des éléments

LEMooFNVRooRCkjLc

Lemme 2.11.
Lorsque H est normal dans G, alors la définition

EQooEUESooSeUWHK

$$[a] \cdot [b] = [ab] \tag{2.22}$$

définit une loi de groupe sur l'ensemble G/H.

Démonstration. Le neutre est $[e]$ et l'associativité ne pose pas plus de problème que l'existence d'un inverse. Le point à vérifier est que la formule (2.22) est une bonne définition : $[ah] \cdot [bh'] = [ab]$ pour tout $h, h' \in H$. Nous avons :

$$[ah] \cdot [bh'] = [ahbh'] = [ahb]. \tag{2.23}$$

Pour montrer que c'est $[ab]$, l'astuce est d'introduire bb^{-1} à côté du a :

$$[ahb] = [abb^{-1}hb] = [ab] \tag{2.24}$$

parce que $b^{-1}hb \in H$ du fait que H soit normal dans G. □

EXooFNIKooHxePSs

Exemple 2.12 ([109]).
Il ne faudrait pas croire que le groupe quotient G/H est forcément un sous-groupe de G. Par exemple le quotient $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'ensemble $\{0, 1\}$ muni de l'addition. En particulier $1+1 = 0$, ce qui est évidemment faux dans $\mathbb{Z}$. Le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ ne possède aucun élément d'ordre 2.

Il n'en est pas moins vrai que l'application

$$\begin{aligned} f\colon G &\to G/H \\ g &\mapsto [g] \end{aligned} \tag{2.25}$$

est un morphisme de groupes. △

DEFooMPIAooIeZNaR

Définition 2.13.
*Si H est un sous-groupe d'un groupe fini, l'**indice** de H dans G est le nombre $|G|/|H|$, souvent noté $|G : H|$.*

Le théorème de Lagrange dira en particulier que l'indice est toujours un nombre entier. C'est à ne pas confondre avec le degré d'une extension de corps (définition 6.61).

ThoLagrange

Théorème 2.14 (Théorème de Lagrange).
Soit H un sous-groupe du groupe fini G. Alors

ITEMooDPKSooNpOusd

(1) L'ordre de H divise l'ordre de G.

(2) Les trois nombres suivants sont égaux :

- *le nombre de classes de H à gauche,*
- *le nombre de classes de H à droite,*
- *l'indice de H dans G.*

En particulier si H est distingué dans G, nous avons

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|}. \tag{2.26}$$

Démonstration. Nous commençons par montrer que les classes de H ont toutes le même nombre d'éléments que H. En effet pour chaque $g \in G$ nous avons la bijection

$$\begin{aligned} \varphi\colon H &\to gH \\ h &\mapsto gh. \end{aligned} \tag{2.27}$$

L'injectivité de φ est le fait que $gh = gh'$ implique $h = h'$. La surjectivité est par définition de la classe.

Les classes à gauche formant une partition de G, le cardinal de G est le produit de la taille des classes par le nombre de classes :

$$|G| = |H| \cdot \text{ nombre de classes.} \tag{2.28}$$

En particulier nous voyons que $|H|$ divise $|G|$.

La dernière formule exprime simplement que G/H est par définition le nombre de classes de H à gauche (ou à droite) dans G. □

CorpZItFX

Corolaire 2.15.
L'ordre d'un élément[6] *d'un groupe fini divise l'ordre du groupe. En particulier dans un groupe d'ordre n tous les éléments vérifient $g^n = e$.*

Démonstration. Soit G un groupe fini et considérons, à $g \in G$ fixé, le sous-groupe

$$H = \{g^k \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}. \tag{2.29}$$

Par le théorème de Lagrange 2.14, l'ordre de H divise $|G|$, mais l'ordre de H est le plus petit k tel que $g^k = e$, c'est-à-dire l'ordre de g. □

D'autres résultats à propos d'ordres et d'indices de groupes finis dans la proposition 3.26 et le lemme 3.28. En particulier le théorème de Cauchy 3.22 qui dit : si le groupe est cyclique et si p divise l'ordre du groupe G, alors G contient au moins un élément d'ordre p.

2.4 Suite de composition

DefJWZSooNcntfK

Définition 2.16 (Suite de composition)**.**
Soit un groupe G.

*(1) Une **suite de composition** dans G est une suite finie de sous-groupes $(G_i)_{i=0,\dots,n}$ telle que*

$$\{e\} = G_n \subseteq G_{n-1} \subseteq \dots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G \tag{2.30}$$

et telle que G_{i+1} est normal[7] *dans G_i.*

*(2) Les groupes G_i/G_{i+1} sont les **quotients** de la suite de composition.*

*(3) Une suite de **Jordan-Hölder** est une suite de composition dont tous les quotients sont simples.*

L'objet de nos prochaines pérégrinations mathématiques est de montrer que tout groupe fini admet une suite de Jordan-Hölder (théorème 2.22).

LemsKpXCG

Lemme 2.17 (du papillon ou de Zassenhaus[110])**.**
Soient G un groupe et des sous-groupes A et B. Soient A' normal dans A et B' normal dans B. Alors

(1) $A'(A \cap B')$ est normal dans $A'(A \cap B)$

(2) $(A' \cap B)B'$ est normal dans $(A \cap B)B'$

(3) Nous avons les isomorphismes de groupes

$$\frac{A'(A \cap B)}{A'(A \cap B')} \simeq \frac{(A \cap B)B'}{(A' \cap B)B'} \simeq \frac{B'(A \cap B)}{B'(A' \cap B)}. \tag{2.31}$$

[6] Ordre d'un élément, définition 1.258.
[7] Nous rappelons au cas où, que « normal » signifie « distingué ».

Démonstration. Nous n'allons pas démontrer chacun des points ; pour plus de détails, nous dirons simplement que « la preuve est très similaire dans les autres cas ».

Commençons par montrer que $A'(A\cap B')$ est un groupe. Si $a,b\in A'$ et $x,y\in A\cap B'$,

$$axby=xx^{-1}axbx^{-1}xy \tag{2.32}$$

En utilisant la normalité, $x^{-1}ax\in A'$, donc $xx^{-1}axbx^{-1}\in A'$ et donc le tout est dans $A'(A\cap B')$. L'ensemble $A'(A\cap B')$ est également stable pour l'inverse parce que

$$x^{-1}a^{-1}=\underbrace{x^{-1}a^{-1}x}_{\in A'}x^{-1}. \tag{2.33}$$

Nous montrons maintenant que $A'(A\cap B')$ est normal dans $A'(A\cap B)$. Soient $a,b\in A'$, $x\in A\cap B'$ et $f\in A\cap B$. Alors

$$\begin{aligned}(bf)^{-1}(ax)(bf)&=(bf)^{-1}(a\underbrace{xbx^{-1}}_{=c\in A'}xf) &(2.34a)\\ &=f^{-1}b^{-1}acxf &(2.34b)\\ &=f^{-1}b^{-1}acf\underbrace{f^{-1}xf}_{=y\in A\cap B'} &(2.34c)\\ &=\underbrace{f^{-1}b^{-1}acf}_{\in A'}y &(2.34d)\\ &\in A'(A\cap B'). &(2.34e)\end{aligned}$$

Pour prouver l'isomorphisme

$$\frac{A'(A\cap B)}{A'(A\cap B')}\simeq\frac{(A\cap B)B'}{(A'\cap B)B'}, \tag{2.35}$$

nous allons utiliser le deuxième théorème d'isomorphisme (2.9) que nous appliquons à $H=A\cap B$ et $N=A'(A\cap B')$. La vérification que H normalise N est usuelle. Nous commençons par écrire

$$\frac{A'(A\cap B')(A\cap B)}{A'(A\cap B')}\simeq\frac{A\cap B}{A\cap B\cap A'(A\cap B')}. \tag{2.36}$$ EqkphNsF

Pour simplifier un peu cette expression nous prouvons d'abord que

$$(A\cap B)\cap A'(A\cap B')=(A'\cap B)(A\cap B'). \tag{2.37}$$ EqkhsyNh

L'inclusion $\supset$ est facile. Pour l'autre sens, étant donné que $A'(A\cap B')\subset A$ nous avons

$$A\cap B\cap A'(A\cap B)=B\cap A'(A\cap B). \tag{2.38}$$ EQooEEVIooHCbasF

Un élément de $B\cap A'(A\cap B)$ est un élément de B qui s'écrit sous la forme $s=ax$ avec $a\in A'$ et $x\in A\cap B$. Nous avons alors $a=sx^{-1}$ avec $s\in B$ et $x^{-1}\in A\cap B$. Par conséquent $a\in B$ et donc $a\in A'\cap B$. Donc un élément de $B\cap A'(A\cap B)$ s'écrit sous la forme ax avec $a\in A'\cap B$ et $x\in A\cap B$. Autrement dit

$$B\cap A'(A\cap B)\subset(A'\cap B)(A\cap B) \tag{2.39}$$

et nous avons

$$(A\cap B)\cap A'(A\cap B)=B\cap A'(A\cap B)\subset(A'\cap B)(A\cap B'), \tag{2.40}$$

et donc l'égalité (2.37). Toujours dans l'idée de simplifier (2.36) nous remarquons que $A\cap B'$ est un sous-ensemble de $A\cap B$, donc $A'(A\cap B')(A\cap B)=A'(A\cap B)$. Il reste donc

$$\frac{A'(A\cap B)}{A'(A\cap B')}=\frac{A\cap B}{(A'\cap B)(A\cap B')}. \tag{2.41}$$

Étant donné que les hypothèses sur A et B sont symétriques, le membre de droite peut aussi s'écrire en inversant A et B. Nous en sommes à

$$\frac{B'(A\cap B)}{B'(A'\cap B)}=\frac{A'(A\cap B)}{A'(A\cap B')}. \tag{2.42}$$

Nous devons encore justifier $B'(A\cap B)=(A\cap B)B'$ et $B'(A'\cap B)=(A'\cap B)B'$. Vérifions la première égalité, et laissons la seconde au lecteur. Si $b\in B'$ et $x\in A\cap B$, alors

$$bx=x\underbrace{x^{-1}bx}_{\in B'}\in(A\cap B)B'. \tag{2.43}$$

□

PROPooUIXNooJdKuAs

Proposition 2.18.
Si G est un groupe fini et si (G_i) est une suite de composition pour G, alors l'ordre de G est le produit des ordres de ses quotients.

Démonstration. Étant donné que G_{i+1} est toujours normal dans G_i, le théorème de Lagrange 2.14 s'applique et, à chaque pas de la suite de composition, nous avons :

$$\left|\frac{G_i}{G_{i+1}}\right| = \frac{|G_i|}{|G_{i+1}|}. \tag{2.44}$$

Il suffit maintenant d'écrire $|G|$ de façon télescopique :

$$|G| = \prod_{0\leqslant i\leqslant n-1} \frac{|G_i|}{|G_{i+1}|} \tag{2.45}$$

□

DEFooSZZSooCrgDyo

Définition 2.19.
*Nous disons que les deux suites de composition $(G_i)_{0\leqslant i\leqslant r}$ et $(H_j)_{0\leqslant j\leqslant s}$ sont **équivalentes** si $r = s$ et si il existe une permutation $\sigma \in S_{r-1}$ telle que*

$$\frac{G_i}{G_{i+1}} \simeq \frac{H_{\sigma(i)}}{H_{\sigma(i)+1}}. \tag{2.46}$$

Proposition 2.20 (Schreider)**.**
Deux suites de composition d'un même groupe admettent des raffinements équivalents.

Démonstration. Soient les suites de composition

$$\{e\} = G_m \subseteq \ldots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G \tag{2.47a}$$
$$\{e\} = H_n \subseteq \ldots \subseteq H_1 \subseteq H_0 = G \tag{2.47b}$$

Nous raffinons la suite (G_i) en ajoutant, entre G_{i+1} et G_i, les sous-groupes

$$G_{i+1} = G_{i+1}(G_i \cap H_n) \subset G_{i+1}(G_i \cap H_{n-1}) \subseteq \ldots \subseteq G_{i+1}(G_i \cap H_0) = G_i, \tag{2.48}$$

et de même pour (H_j). Le groupe $G_{i+1}(G_i \cap H_k)$ est normal dans $G_{i+1}(G_i \cap H_{k-1})$ parce que G_{i+1} étant normal dans G_i, et H_k dans H_{k-1}, le lemme 2.17 s'applique. Nous avons donc bien défini un raffinement.

Nous devons maintenant prouver que les deux raffinements ainsi construits sont des suites de composition équivalentes. D'abord elles ont la même longueur mn parce que chacun des m éléments de la suite (G_i) a été remplacé par n éléments et inversement, chacun des n éléments de la suite (H_j) a été remplacé par m éléments.

Par ailleurs, les quotients du raffinement de (G_i) sont de la forme

$$\frac{G_{i+1}(G_i \cap H_k)}{G_{i+1}(G_i \cap H_{k+1})} \simeq \frac{H_{k+1}(H_k \cap G_i)}{H_{k+1}(H_k \cap G_{i+1})} \tag{2.49}$$

EqPAYTCB

en vertu du lemme du papillon (2.17). Le membre de droite de (2.49) est un des quotients du raffinement de (H_j). □

LemBSicRJ

Lemme 2.21 (Schreider strictement décroissant)**.**
Soient Σ_1 et Σ_2, deux suites de composition strictement décroissantes du groupe G. Alors elles admettent des raffinements équivalents strictement décroissants.

Démonstration. Par hypothèse, Σ_1 et Σ_2 n'ont pas de répétitions. Soient Σ_1'' et Σ_2'', des raffinements équivalents donnés par le lemme de Schreider. Étant donné que ce sont des suites de composition équivalentes, elles ont le même nombre de quotients réduits à $\{e\}$, c'est-à-dire le même nombre de répétitions.

Les suites Σ_1' et Σ_2' obtenues en retirant les répétitions de Σ_1'' et Σ_2'' sont des raffinements équivalents de Σ_1 et Σ_2 et strictement décroissants. □

ThoLgxWIC

Théorème 2.22 (Jordan-Hölder)**.**
À propos de suites de Jordan-Hölder dans un groupe fini.

ITEMooRSDDooNHkFYO

(1) Tout groupe fini admet une suite de Jordan-Hölder.

ITEMooGBOCooBAgnyt

(2) Toutes les suites de Jordan-Hölder dans un groupe fini sont équivalentes.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)**

(2) **Pour (2)**

Par définition, une suite de Jordan-Hölder n'a pas de raffinement strictement décroissant (à part elle-même) parce que G_{i+1} est normal maximum dans G_i. Si Σ_1 et Σ_2 sont des suites de Jordan-Hölder nous pouvons considérer les raffinements équivalents strictement décroissants Σ_1' et Σ_2' du lemme de Schreider 2.21. Nous avons $\Sigma_1' \sim \Sigma_2'$, mais par ce que nous venons de dire à propos de la maximalité, $\Sigma_1' = \Sigma_1$ et $\Sigma_2' = \Sigma_2$. D'où le résultat.

□

2.5 Groupes résolubles

DefOSYNooTROIKs

Définition 2.23 (Groupe résoluble[111, 112])**.**
*Le groupe G est **résoluble** si il existe une suite finie de sous-groupes G_i*

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G \tag{2.50}$$

avec G_i normal dans G_{i+1} et G_{i+1}/G_i abélien.

Il s'agit d'un groupe qui admet une suite de composition[8] dont les quotients sont abéliens.

LemOARMooYhYmbH

Lemme 2.24 ([113])**.**
Soit G un groupe et H un sous-groupe normal. Le groupe G/H est abélien si et seulement si[9] *$D(G) \subset H$.*

Démonstration. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- Le groupe G/H est abélien
- pour tout $x, y \in G$, $[x][y] = [y][x]$
- $[x][y][x^{-1}][y^{-1}] = [e]$
- $[xyx^{-1}y^{-1}] = [e]$
- $[x, y] \in H$, voir la définition 2.2.
- $D(G) \subset H$.

□

PropRWYZooTarnmm

Proposition 2.25 ([113])**.**
Un groupe est résoluble si et seulement si sa suite dérivée termine sur $\{e\}$.

Démonstration. Grâce au lemme 2.4 et à la proposition 2.5, si la suite dérivée termine sur $\{e\}$ alors la suite dérivée est une suite qui répond aux conditions de la définition 2.23 de groupe résoluble.

Il faut donc encore montrer le sens direct. Nous supposons que G est un groupe résoluble et nous étudions sa suite dérivée. Nous avons une suite

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G \tag{2.51}$$

avec G_i normal dans G_{i+1} et G_{i+1}/G_i abélien. Nous allons prouver par récurrence que $D^i(G) \subset G_{n-i}$.

Pour $i = 0$ nous avons bien $G \subset G_n$.

Notre hypothèse de récurrence est :

EqEAQEooEaeIEo

$$D^i(G) \subset G_{n-i}. \tag{2.52}$$

Vu que G_{n-i}/G_{n-i-1} est abélien, le lemme 2.24 dit que

EqEDJXooLQLQcr

$$D(G_{n-i}) \subset G_{n-i-1}. \tag{2.53}$$

[8] Voir définition 2.16.
[9] Ici $D(G)$ est le groupe dérivé de G, voir 2.3.

En dérivant (2.52) et en tenant compte de (2.53),

$$D^{i+1}(G) \subset D(G_{n-i}) \subset G_{n-i-1}. \tag{2.54}$$

Nous avons donc bien $D^i(G) \subset G_{n-i}$ pour tout i. En particulier pour $i = n$, nous trouvons $D^n(G) \subset G_0 = \{e\}$. □

PropBNEZooJMDFIB

Proposition 2.26.
Soient des groupes G et H. Nous supposons que G est résoluble[10] *et nous considérons un morphisme $\psi : G \to H$. Alors $\psi(G)$ est résoluble.*

Démonstration. Puisque G est résoluble, il existe une suite de sous-groupes G_i tels que

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G \tag{2.55}$$

avec G_i normal dans G_{i+1} et G_{i+1}/G_i abélien. Nous posons $\psi(G)_i = \psi(G_i)$ et nous avons $\psi(G)_0 = \psi\big(\{e\}\big) = \{e\}$ ainsi que $\psi(G)_0 = \psi(G)$; donc

$$\{e\} = \psi(G)_0 \subset \psi(G)_1 \subset \ldots \subset \psi(G)_{n-1} \subset \psi(G)_n = \psi(G). \tag{2.56}$$

La proposition 1.427 nous indique que $\psi(G)_i$ est normal dans $\psi(G)_{i+1}$, et que $\psi(G)_{i+1}/\psi(G)_i$ est abélien. □

2.6 Action de groupes

Le concept d'action d'un groupe est donné par la définition 1.481

Lemme 2.27.
Pour tout $g \in G$,

(1) L'application $\phi_g : E \to E$ est injective,

(2) Pour l'inverse : $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$.

Démonstration. Si $x, y \in E$ sont tels que $\phi_g(x) = \phi_g(y)$ alors en appliquant $\phi_{g^{-1}}$ aux deux membres nous trouvons

$$(\phi_{g^{-1}}\phi_g)(x) = (\phi_{g^{-1}}\phi_g)(y), \tag{2.57}$$

ce qui donne $x = y$ parce que $\phi_{g^{-1}}\phi_g = \phi_{g^{-1}g} = \phi_e = \mathrm{Id}$.
Les trois dernières égalités écrites disent que $\phi_{g^{-1}}$ est l'inverse[11] de ϕ_g. □

Pour alléger les notations, on convient d'écrire $g \cdot x$, voire plus simplement gx au lieu de $\phi_g(x)$. Le deuxième axiome d'action de groupe dit que la notation ghx ne souffre d'aucune ambiguïté.

DEFooMZXFooXbwGjj

Définition 2.28 (Orbite)**.**
*Si G agit sur un ensemble E, nous notons $G \cdot x$ l'**orbite** de $x \in E$ sous l'action de G :*

$$\mathrm{Orb}(x) = G \cdot x = \{gx \text{ tel que } g \in G\}.$$

DEFooMDYGooLrOERP

Définition 2.29 (Stabilisateur)**.**
*Si G est un groupe agissant sur l'ensemble E, et si $x \in E$, nous notons G_x ou $\mathrm{Stab}(x)$ le **stabilisateur** de x :*

$$\mathrm{Stab}(x) = G_x = \{g \in G \text{ tel que } g \cdot x = x\}. \tag{2.58}$$

Définition 2.30 (Fixateur)**.**
*Si G est un groupe agissant sur l'ensemble E, et si $g \in G$, nous notons enfin $\mathrm{Fix}(g)$ le **fixateur** de g :*

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in E \text{ tel que } g \cdot x = x\}. \tag{2.59}$$

DefuyYJRh

Définition 2.31.
*L'action de G sur E est **fidèle** si l'élément neutre est le seul élément de G à fixer tous les points de E, c'est-à-dire si*

$$(gx = x \quad \forall x \in E) \Rightarrow g = e. \tag{2.60}$$

[10] Définition 2.23.
[11] Si vous décidez de dire ça à un jury dans un concours, soyez prêts à préciser les domaines.

Un exemple d'action fidèle tout à fait non trivial sera donné avec l'action du groupe modulaire sur le plan de Poincaré dans le théorème 23.96.

Le groupe G agit toujours sur lui même à gauche et à droite. L'action à gauche est $g \cdot h = gh$; celle à droite est $g \cdot h = hg^{-1}$.

DEFooCORTooEeOLPT

Définition 2.32.
L'action ***adjointe*** *définie par $g \cdot h = ghg^{-1}$ est une manière pour un groupe d'agir sur lui-même par automorphismes. Cela est souvent noté $\mathbf{Ad}(g)h = ghg^{-1}$.*

En effet pour tout $g \in G$, l'application $\mathbf{Ad}(g)\colon G \to G$ est un automorphisme de G.

Si H est un sous-groupe de G, nous notons G/H le quotient de G par la relation $g \sim gh$ pour tout $h \in H$. Lorsque la distinction est importante, nous noterons $(G/H)_g$ pour les classes à gauche et $(G/H)_d$ pour les classes à droite.

Nous avons une relation d'équivalence à gauche et une à droite. D'abord

$$x \sim_g y \Leftrightarrow xh = y \tag{2.61}$$

pour un certain $h \in H$. Ensuite

$$x \sim_d y \Leftrightarrow hx = y \tag{2.62}$$

pour un certain $h \in H$.

Le lemme suivant est une généralisation du théorème de Lagrange 2.14.

Lemme 2.33.
L'ensemble $(G/H)_g$ est fini si et seulement si l'ensemble $(G/H)_d$ est fini. Si il en est ainsi, alors $(G/H)_g$ et $(G/H)_d$ ont même cardinal, qui vaut l'indice de H dans G.

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} f\colon (G/H)_g &\to (G/H)_d \\ [x]_g &\mapsto [x^{-1}]_d \end{aligned} \tag{2.63}$$

est une bijection bien définie. En effet si $x \sim_g y$, nous avons $h \in H$ tel que $y^{-1}h = x^{-1}$, c'est-à-dire que $x^{-1} \sim_d y^{-1}$ et f est bien définie. Le fait que f soit surjective est évident. Pour l'injectivité, soient $x, y \in G$ tels que

$$f([x]_g) = f([y]_g). \tag{2.64}$$

Alors $x^{-1} \sim_d y^{-1}$, ce qui implique l'existence de $h \in H$ tel que $hx^{-1} = y^{-1}$, ou encore que $xh^{-1} = y$, ce qui signifie que $x \sim_g y$.

Pour l'énoncé à propos de l'indice, nous procédons en plusieurs étapes simples.

(1) Les classes (les éléments de $(G/H)_g$) forment une partition de G.

(2) Toutes les classes ont le même nombre d'éléments par la bijection

$$\begin{aligned} f\colon [x]_g &\to [y]_g \\ xh &\mapsto yh. \end{aligned} \tag{2.65}$$

(3) Le nombre d'éléments dans une classe est égal à $|H|$ par la bijection

$$\begin{aligned} g\colon [x]_g &\to H \\ xh &\mapsto h. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Par conséquent

$$|G| = |H| \cdot \text{nombre de classes} = |H| \cdot \text{Card}\big((G/H)_g\big), \tag{2.67}$$

et nous avons bien

$$\text{Card}\big((G/H)_g\big) = \frac{|G|}{|H|} = |G : H|. \tag{2.68}$$

□

Propszymlr

Proposition 2.34 (Orbite-stabilisateur[54])**.**
Soient G un groupe agissant sur un ensemble E et $x \in E$.

(1) Les ensembles $G \cdot x$ et G/G_x sont équipotents.

ITEMooCWUGooCOFHYk

(2) *L'orbite de x est finie si et seulement si* $\mathrm{Stab}(x)$ *est d'indice fini dans G. Dans ce cas nous avons*

$$\mathrm{Card}(G \cdot x) = |G : \mathrm{Stab}(x)|, \tag{2.69}$$

EqnLCHCE

et

$$|G| = |\mathrm{Stab}(x)||\mathcal{O}_x|. \tag{2.70}$$

EqCewSXT

La formule (2.69) est nommée ***formule des classes****[114].*

Démonstration. En deux points.

(1) Soit l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon G \cdot x &\to G/G_x \\ a \cdot x &\mapsto [a]. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Cette application est bien définie parce que si $a \cdot x = b \cdot x$, alors il existe $h \in G_x$ tel que $b = ah$, et par conséquent $[a] = [b]$. Cette application est une bijection et par conséquent $G \cdot x$ est équipotent à G/G_x.

(2) Soit $y \in \mathcal{O}_x$ et $A_y = \{g \in G \text{ tel que } g \cdot x = y\}$. Nous avons

$$A_y = s\,\mathrm{Stab}(x). \tag{2.72}$$

En effet, si $a \in A_y$, alors $a \cdot x = y$ et $s^{-1}a \cdot x = s^{-1} \cdot y = x$. Par conséquent $s^{-1}a \in \mathrm{Stab}(x)$. Dans l'autre sens, supposons $a \in s\,\mathrm{Stab}(x)$. Soit $g \in \mathrm{Stab}(x)$ tel que $a = sg$. Alors nous avons $a \cdot x = sg \cdot x = s \cdot x = y$. Donc $a \in A_y$.

Nous venons de prouver que la partie A_y est une classe à gauche de $\mathrm{Stab}(x)$, par conséquent $|A_y| = |\mathrm{Stab}(x)|$ pour tout $y \in \mathcal{O}_x$. Les A_y pour différents y sont disjoints et nous avons de plus

$$\bigcup_{y \in \mathcal{O}_x} A_y = G. \tag{2.73}$$

Les ensembles A_y divisent donc G en $|\mathcal{O}_x|$ paquets de $|\mathrm{Stab}(x)|$ éléments. D'où la formule (2.70).

□

CORooRRVHooTyCjZZ

Corolaire 2.35.
Soit C_g la classe de conjugaison d'un élément g du groupe fini G. Alors

$$\mathrm{Card}(C_g) = |G : Z_G(g)| \tag{2.74}$$

où $Z_G(g)$ est le centralisateur de g dans G[12] *de G.*

Démonstration. C'est une application de la proposition 2.34 (formule (2.69)) dans le cas de l'action adjointe de G sur lui-même.

En effet, si nous considérons l'action adjointe, l'orbite est la classe de conjugaison : $C_g = G \cdot g$. Et le stabilisateur de g pour l'action adjointe n'est autre que le centralisateur de g :

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}(g) &= \{h \in G \text{ tel que } h \cdot g = g\} && \text{(2.75a)} \\ &= \{h \in G \text{ tel que } hgh^{-1} = g\} && \text{(2.75b)} \\ &= \{h \in G \text{ tel que } gh = hg\} && \text{(2.75c)} \\ &= Z_G(g). && \text{(2.75d)} \end{aligned}$$

Donc la formule $\mathrm{Card}(G \cdot g) = |G : G_g|$ devient, dans le cas de l'action adjointe de G sur lui-même : $\mathrm{Card}(C_g) = |G : Z_G(g)|$. □

LEMooVGOJooSBpIag

Lemme 2.36.
Soit G un groupe agissant sur l'ensemble E. On définit $x \sim x'$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = x'$. Alors

(1) la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

[12] Définition 1.263.

(2) la classe $[x]$ est l'orbite $\mathcal{O}_x$ de x sous G.

CorARFVMP

Corolaire 2.37 (Équation des orbites)**.**
Soient G un groupe agissant sur l'ensemble E et $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$ la liste des orbites (distinctes). Alors

(1) $E = \bigcup_i \mathcal{O}_i$, l'union est disjointe,

(2) $\text{Card}(E) = \sum_i \text{Card}(\mathcal{O}_i)$.

DefcSuYxz

Définition 2.38.
*Soit G un groupe agissant sur l'ensemble E. Un **domaine fondamental** ou une **transversale** est une partie de E contenant un et un seul élément de chaque orbite.*

Autrement dit, les images des éléments d'un domaine fondamental F forment une partition de l'ensemble :

$$E = \bigsqcup_{g\in G} g(F) \tag{2.76}$$

où $g(F) = \phi_g(F) = \{\phi_g(x) \text{ tel que } x \in F\}$. L'union est disjointe, c'est-à-dire que si $g \neq g'$, alors $g(F) \cap g'(F) = \varnothing$.

PropUyLPdp

Proposition 2.39 (Équation des classes[115])**.**
Soit G, un groupe fini opérant sur un ensemble E. Si E'' est un ensemble contenant exactement un élément de chaque orbite dans $E \setminus \text{Fix}_G(E)$, alors

$$|G| = |\,\text{Fix}_G(E)| + \sum_{x\in E''} \frac{|G|}{|\,\text{Fix}_G(x)|}. \tag{2.77}$$

EqobuzfK

Si de plus G est un p-groupe, alors

$$|E| = |\,\text{Fix}_G(E)| \mod p. \tag{2.78}$$

EqbzLFVJ

Démonstration. Par le corolaire 2.37, nous avons $|G| = \sum_{x\in E'} |\mathcal{O}_x|$ où E' est une transversale. En séparant la somme entre les orbites à un élément et les autres,

$$|G| = \text{Card}(\text{Fix}_G(E)) + \sum_{x\in E''} \frac{|G|}{|\,\text{Fix}_G(x)|} \tag{2.79}$$

EqeggkBs

EqDgYbhm
où nous avons utilisé le fait que $|G| = |\,\text{Fix}_G(x)||\mathcal{O}_x|$.

Si G est un p-groupe alors si $x \in E''$, $\text{Fix}_G(x)$ est un sous-groupe propre de G et donc $|\,\text{Fix}_G(x)|$ est un diviseur propre de $|G|$. Du coup la fraction $|G|/|\,\text{Fix}_G(x)|$ est une puissance non nulle de p et l'équation (2.77) devient immédiatement (2.78). □

Corolaire 2.40 (Équation des classes)**.**
Soient G un groupe, et C_1,..., C_l la liste de ses classes de conjugaison contenant plus d'un élément. Alors

$$\text{Card}(G) = \text{Card}\big(Z(G)\big) + \sum_i |G : Z_{g_i}| = \text{Card}\big(Z(G)\big) + \sum_i \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}\big(\text{Fix}(g_i)\big)} \tag{2.80}$$

EqkgGmoq

si $g_i \in C_i$.

Démonstration. Étant donné que les classes de conjugaison sont disjointes, le cardinal de G est bien la somme des cardinaux de ses classes. Les classes ne contenant qu'un seul élément sont celles des éléments de $Z(G)$. En ce qui concerne les autres orbites, $\text{Card}(C_{g_i}) = |G : Z_{g_i}|$ par le théorème orbite-stabilisateur (proposition 2.34). □

THOooEFDMooDfosOw

Théorème 2.41 (Formule de Burnside)**.**
Si G est un groupe fini agissant sur l'ensemble fini E et si Ω est l'ensemble des orbites, alors

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \text{Card}\big(\text{Fix}(g)\big). \tag{2.81}$$

EqTUsblv

Démonstration. Nous considérons l'ensemble

$$A = \{(g, x) \in G \times E \text{ tel que } gx = x\}, \tag{2.82}$$

et nous en calculons le cardinal de deux façons. D'abord

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A) &= \sum_{x\in E}\mathrm{Card}\{g\in G \text{ tel que } gx=x\} && (2.83a)\\ &= \sum_{x\in E}\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(x)) && (2.83b)\\ &= \sum_{\omega\in\Omega}\sum_{x\in\omega}\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(x)) && (2.83c)\\ &= \sum_{\omega\in\Omega}\frac{|G|}{\mathrm{Card}(\omega)} && (2.83d)\\ &= |G|. && (2.83e)\end{aligned}$$

EqvVtkyf

Pour obtenir (2.83d) nous avons utilisé l'équation des classes (2.70). L'autre façon de calculer $\mathrm{Card}(A)$ est de regrouper ainsi :

$$\mathrm{Card}(A)=\sum_{g\in G}\mathrm{Card}\{x\in E \text{ tel que } gx=x\}=\sum_{g\in G}\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g)). \tag{2.84}$$

En égalisant les deux expressions de $\mathrm{Card}(A)$ nous trouvons

$$|G|\,\mathrm{Card}(\Omega)=\sum_{g\in G}\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g)). \tag{2.85}$$

□

PROPooMYKKooLetZWi

Proposition 2.42 ([116]).
Soient G un groupe, et H, un sous-groupe du centre de G.

(1) H est normal dans G.

(2) Si G/H est monogène, alors G est abélien.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Normal** Si $g\in G$ et si $h\in H$, alors $ghg^{-1}=gg^{-1}h=h\in H$.

(2) **Abélien** Soit $g_0\in G$ tel que $[g_0]$ engendre G/H. Soient $g\in G$ et $s\in[g]$. Il existe $h\in H$ tel que $s=gh^{-1}$, et donc tel que $g=sh$. Il existe aussi $n\in\mathbb{N}$ tel que $[s]=[g_0^n]$, et donc un $h_2\in H$ tel que $s=g_0^nh_2$.

Nous avons prouvé que pour tout $g\in G$, il existe $n\in\mathbb{N}$ et $h\in H$ tel que $g=g_0^nh$.

Soient $g_1,g_2\in G$. Nous avons $n,m\in\mathbb{N}$ et $h_1,h_2\in H$ tels que $g_1=g_0^nh_1$ et $g_2=g_0^mh_2$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}g_1g_2a &= g_0^nh_1g_0^mh_2 && (2.86a)\\ &= g_0^ng_0^mh_1h_2 && \text{pcq.} h_1\in H\subset Z(G) \quad (2.86b)\\ &= g_0^mg_0^nh_1h_2 && (2.86c)\\ &= g_0^mh_2g_0^nh_1 && (2.86d)\\ &= g_2g_1, && (2.86e)\end{aligned}$$

et donc G est bien abélien.

□

PROPooWPQTooECUPLK

Proposition 2.43 ([117]).
L'indice du centre d'un groupe n'est jamais un nombre premier.

LEMooZJGVooRYrujB

Lemme 2.44 ([118]).
Soient un groupe cyclique G et un sous groupe H.

ITEMooUNOEooZoElYL

(1) Il existe $r,n\in\mathbb{N}$ tels que $r\mid n$ et $H\simeq r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

ITEMooMUSSooBmNXEd

(2) $\mathrm{Card}(H)=n/r$

ITEMooVPEKooKdPibk

(3) H *est cyclique.*

En particulier, tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Soit un générateur a de G. L'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\to G \\ k &\mapsto a^k \end{aligned} \tag{2.87}$$

est un morphisme de groupe surjectif.

La partie $f^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. La proposition 1.357(2) dit qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $f^{-1}(H) = r\mathbb{Z}$. De même $\ker(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, de telle sorte qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f) = n\mathbb{Z}$.

Nous avons

$$n\mathbb{Z} = \ker(f) = f^{-1}(e) \subset f^{-1}(H) = r\mathbb{Z}. \tag{2.88}$$

Étant donné que $n\mathbb{Z} \subset r\mathbb{Z}$, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $n = dr$.

Nous considérons maintenant

$$\begin{aligned} g\colon r\mathbb{Z} &\to H \\ k &\mapsto a^k, \end{aligned} \tag{2.89}$$

qui est encore un morphisme de groupes. En utilisant le premier théorème d'isomorphismes 2.7(3), nous avons

$$\frac{r\mathbb{Z}}{\ker(g)} \simeq \text{Image}(g). \tag{2.90}$$

Mais $\ker(g) = n\mathbb{Z}$ et $\text{Image}(g) = H$. Donc nous avons bien $H \simeq r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(2) **Pour (2)** En ce qui concerne le cardinal, vu que nous avons un isompshisme,

$$\text{Card}(H) = \text{Card}(r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n/r \tag{2.91}$$

par le lemme 1.443(3).

(3) **Pour (3)** Le fait que H soit cyclique est le lemme 1.443(2).

□

THOooRGSTooIWyhqt

Théorème 2.45 (Sous-groupe d'un groupe cyclique[118])**.**
Soit G un groupe cyclique[13] *d'ordre n. Pour chaque $d \in \mathbb{N}$ nous posons*

$$H_d = \{x \in G \text{ tel que } x^d = e\}. \tag{2.92}$$

(1) Ces H_d sont des sous-groupes de G.

(2) $\text{Card}(H_d) = d$.

ITEMooMJCXooCIWSmK

(3) L'ensemble des sous-groupes de G est $\{H_d \text{ tel que } d \mid n\}$.

ITEMooIEGUooPQWEep

(4) Si g est un générateur de G, alors H_d peut être décrit des façons suivantes :

$$H_d = \{x \in G \text{ tel que } x^d = e\} = \text{gr}(g^{n/d}). \tag{2.93}$$

Démonstration. Point par point.

(1) **H_d est un sous-groupe** ITEMooYAMOooVtbCrS Si $g, h \in H_d$, alors $(gh)^d = g^d h^d = ee = e$. De plus $(g^{-1})^d = (g^d)^{-1} = e^{-1} = e$.

[13] Définition 1.440.

(2) **Tout sous-groupe est un H_d avec $d \mid n$** ITEMooXEXFooIrFOTj Soit un sous-groupe H de G. Nous notons $\text{Card}(H) = d$. Le lemme 2.44(3) nous indique que H est cyclique. Soit un générateur $a \in H$; son ordre est le cardinal de H : $\text{ord}(a) = \text{Card}(H) = d$.

Tout élément de H vérifie $x^{\text{ord}(a)} = (a^k)^{\text{ord}(a)} = (a^{\text{ord}(a)})^k = e$. Donc $H \subset H_d$. En particulier $\text{Card}(H) \leqslant \text{Card}(H_d)$.

Tout sous-groupe de G est cyclique. En particulier H_d est cyclique, et nous pouvons considérer un générateur : il existe $a \in H_d$ tel que $\text{ord}(a) = \text{Card}(H_d)$. Étant donné que $a \in H_d$, il vérifie $a^d = e$, et donc

$$\text{ord}(a) \mid d. \tag{2.94}$$

Vu que $\text{ord}(a) = \text{Card}(H_d)$ et que $d = \text{Card}(H)$, nous avons $\text{Card}(H_d) \mid \text{Card}(H)$ et en particulier $\text{Card}(H_d) \leqslant \text{Card}(H)$. Donc $\text{Card}(H) = \text{Card}(H_d)$ et au final $H = H_d$.

Nous avons prouvé au passage que $\text{Card}(H_d) = d$. Vu que le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe[14], nous avons $d \mid n$.

(3) $\text{Card}(H_d) = d$ C'est contenu dans ce que nous avons fait dans la partie (2).

(4) **Si $d \mid n$ alors H_d est un sous-groupe de G** C'est un cas particulier de la partie (1).

(5) **Note** Le point (3) est prouvé. Cela ne contredit pas le fait que H_d soit un sous-groupe de G pour tout d, et pas seulement pour les d qui divisent n. En effet si d ne divise pas n, il existe d' divisant n tel que $H_d = H_{d'}$. Pas besoin de chercher une preuve de ce fait : la preuve est déjà faite. Il s'agit de dire que H_d est un sous-groupe de G pour tout d (partie (1)), et que tous les sous-groupes de G sont de la forme H_d avec $d \mid n$.

(6) **Pour (4)** Soit un générateur g de G. Nous avons d'une part $g^{n/d} \in H_d$ parce que $(g^{n/d})^d = g^n = e$. D'autre part, les éléments

$$g^{n/d}, g^{2n/d}, \dots, g^{(d-1)n/d}, g^n = e \tag{2.95}$$

sont distincts. En effet si $g^{kn/d} = g^{ln/d}$ avec $0 < l < k < d$, alors $g^{(k-l)n/d} = e$. Comme $k - l < d$, nous avons $(k-l)n/d < n$ et donc $g^{(k-l)n/d} \neq e$ parce que g est générateur.

Bref, les $g^{kn/d}$ avec $k = 1, \dots, d$ sont d éléments distincts, tous dans H_d dont le cardinal est d. Donc

$$H_d = \{g^{kn/d}\}_{1,\dots,d}. \tag{2.96}$$

□ DEFooQDHPooCfDEuL

Définition 2.46.
*Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Nous disons que l'action est **transitive** si elle possède une seule orbite. L'action est **libre** si $g \cdot x = g' \cdot x$ implique $g = g'$.*

2.7 Produit semi-direct de groupes

Définition 2.47.
*Une **suite exacte** est une suite d'applications comme suit :*

$$\dots \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \dots \tag{2.97}$$

où pour chaque i, les applications f_i et f_{i+1} vérifient $\ker(f_{i+1}) = \text{Image}(f_i)$. Lorsque les ensembles A_i sont des groupes, alors nous demandons de plus que les f_i soient des morphismes.

Très souvent nous sommes confrontés à des suites exactes de la forme

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} B \longrightarrow 1 \tag{2.98}$$

où G, A et B sont des groupes, 1 est l'identité. La première flèche est l'application $\{1\} \to A$ qui à 1 fait correspondre 1. La dernière est l'application $B \to 1$ qui à tous les éléments de B fait correspondre 1. Le noyau de f étant l'image de la première flèche (c'est-à-dire $\{1\}$), l'application f est injective. L'image de g étant le noyau de la dernière flèche (c'est-à-dire B en entier), l'application g est surjective.

[14] Théorème de Lagrange 2.14(1).

DEFooKWEHooISNQzi

Définition 2.48.
*Soient N et H deux groupes et un morphisme de groupes $\phi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$. Le **produit semi-direct** de N et H relativement à ϕ, noté $N \times_\phi H$ est l'ensemble $N \times H$ muni de la loi (que l'on vérifiera être de groupe)*

EqDRgbBI
$$(n,h)\cdot(n',h') = (n\phi_h(n'),hh'). \tag{2.99}$$

Attention à l'ordre quelque peu contre-intuitif. Lorsque nous notons $N \times_\phi H$, c'est bien $\phi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$, c'est-à-dire H qui agit sur N et non le contraire.

Lorsque N et H sont des sous-groupes d'un même groupe, le plus souvent ϕ est l'action adjointe définie en 2.32.

Le théorème suivant permet de reconnaitre un produit semi-direct lorsqu'on en voit un.

THOooZNYTooPhnIdE

Théorème 2.49 ([13])**.**
Soit une suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{s} H \longrightarrow 1 \tag{2.100}$$

Si il existe un sous-groupe $\tilde{H}$ de G à partir duquel s est un isomorphisme, alors

$$G \simeq i(N) \times_\sigma \tilde{H} \tag{2.101}$$

où σ est l'action adjointe[15] *de $\tilde{H}$ sur $i(N)$.*

Démonstration. Nous posons $\tilde{N} = i(N)$ et nous allons subdiviser la preuve en petits pas.

(1) $\tilde{N}$ est normal dans G. En effet étant donné que la suite est exacte nous avons $\tilde{N} = \ker(s)$. Le noyau d'un morphisme est toujours un sous-groupe normal.

(2) $\tilde{N} \cap \tilde{H} = \{e\}$. L'application s étant un isomorphisme depuis $\tilde{H}$, il n'y a pas d'éléments de $\tilde{H}$ dans $\ker(s)$ autre que e.

ItemzIaXGM

(3) $G = \tilde{N}\tilde{H}$. Nous considérons $g \in G$ et $h \in \tilde{H}$ tel que $s(g) = s(h)$. L'existence d'un tel h est assurée par le fait que s est surjective depuis $\tilde{H}$. Du coup nous avons $e = s(gh^{-1})$, c'est-à-dire $gh^{-1} \in \ker(s) = \tilde{N}$. Nous avons donc bien la décomposition $g = (gh^{-1})h$, et donc $G = \tilde{N}\tilde{H}$.

ItemUGFjle

(4) L'écriture $g = nh$ avec $n \in \tilde{N}$ et $h \in \tilde{H}$ est unique. Si $nh = n'h'$, alors $n = n'h'h^{-1}$, ce qui signifierait que $h'h^{-1} \in \tilde{N}$. Mais étant donné que $\tilde{H} \cap \tilde{N} = \{e\}$, nous obtenons $h = h'$ et par suite $n = n'$.

ItemUZlrKo

(5) L'application
$$\begin{aligned}\phi\colon G &\to \tilde{N} \times \tilde{H}\\ nh &\mapsto (n,h)\end{aligned} \tag{2.102}$$
est une bijection. C'est une conséquence des points (3) et (4).

(6) Si sur $\tilde{N} \times \tilde{H}$ nous mettons le produit
$$(n,h)\cdot(n',h') = (n\sigma_h n', hh') \tag{2.103}$$
où σ est l'action adjointe du groupe sur lui-même, c'est-à-dire $\sigma_x(y) = xyx^{-1}$, alors ϕ est un isomorphisme. Si $g, g' \in G$ s'écrivent (de façon unique par le point (5)) $g = nh$ et $g' = n'h'$ alors

$$\begin{aligned}\phi(nhn'h') &= \phi(n\underbrace{hn'h^{-1}}_{\in\tilde{N}}hh') && (2.104a)\\ &= \phi\big((nhn'h^{-1})(hh')\big) && (2.104b)\\ &= (nhn'h^{-1}, hh') && (2.104c)\\ &= (n,h)\cdot(n',h') && (2.104d)\\ &= \phi(nh)\phi(n'h'). && (2.104e)\end{aligned}$$

□

[15] Le fait que H agisse sur $i(N)$ fait partie du théorème.

CoroGohOZ

Corolaire 2.50.
Soit G un groupe, et N, H des sous-groupes de G tels que

(1) H normalise N (c'est-à-dire que $\sigma_h(n) = hnh^{-1} \in N$ pour tout $h \in H$ et $n \in N$[16]),

(2) $H \cap N = \{e\}$,

(3) $HN = G$.

Alors l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon N \times_\sigma H &\to G \\ (n,h) &\mapsto nh \end{aligned} \tag{2.105}$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **ψ est un morphisme** Simple calcul en utilisant la formule (2.99) du produit dans $N \times_\sigma H$:

$$\psi\big((n,h)(n',h')\big) = \psi\big(n\sigma_h(n'), hh'\big) \tag{2.106a}$$
$$= nhn'h^{-1}hh' \tag{2.106b}$$
$$= nhn'h' \tag{2.106c}$$
$$= \psi(n,h)\psi(n',h'). \tag{2.106d}$$

(2) **ψ est injective** Supposons que $\psi(n,h) = \psi(n',h')$. Alors $nh = n'h'$ et

$$n = n'h'h^{-1}. \tag{2.107}$$

En multipliant par $(n')^{-1}$ nous trouvons

$$h'h^{-1} = (n')^{-1}n \in N. \tag{2.108}$$

Donc $h'h^{-1} \in H \cap N = \{e\}$. Nous en déduisons que $h = h'$ et donc que $n = n'$.

(3) **ψ est surjective** Nous savons que $HN = G$. Soit $g \in G$. Il existe $h \in H$ et $n \in N$ tel que $g^{-1} = h^{-1}n^{-1}$. Avec ces éléments nous avons

$$g = nh = \psi(n,h). \tag{2.109}$$

□

Dans les hypothèses, l'ordre entre N et H est important lorsqu'on dit que c'est N qui agit sur H ; mais l'hypothèse $NH = G$ est équivalente à $HN = G$ (passer à l'inverse pour s'en assurer).

Insistons encore un peu sur la notation : dans $N \times_\sigma H$, c'est H qui agit sur N par σ.

2.8 Groupe de torsion

Soit G un groupe. Un élément $g \in G$ est un **élément de torsion** si il est d'ordre fini. La **torsion** de G est l'ensemble de ses éléments de torsion. Nous disons qu'un groupe est un **groupe de torsion** si tous ses éléments sont de torsion.

Exemple 2.51.
Le groupe additif $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un groupe de torsion parce que si $[x] = [p/q]$, alors $q[x] = [p] = [0]$. △

2.9 Famille presque nulle

Soit $(G,+)$ un groupe abélien et $\mathcal{F} = \{g_i\}_{i\in I}$ une famille d'éléments de G indicés par un ensemble I. Le **support** de $\mathcal{F}$ est l'ensemble $\{i \in I \text{ tel que } g_i \neq 0\}$. La famille est dite **presque nulle** si le support est fini.

Nous disons que $\mathcal{F}$ est une **suite** si $I = \mathbb{N}$.

[16] Ou encore que H agit sur N par automorphismes internes.

Chapitre 3

Anneaux

Attention aux conventions. Dans le Frido, un corps peut être réduit à $\{0\}$ et un idéal premier ne peut pas être $\{0\}$. Ces conventions ont une série de conséquences un peu partout, par exemple dans la proposition 1.405 où nous parlons d'idéal maximum propre. Comparez par exemple avec [85]. Soyez attentif.

En cas de doutes, nous suivons les conventions de Wikipédia.

3.1 Inversibles et nilpotents

Le concept d'anneau est la définition 1.92.

LEMooOYZEooLivKWI

Lemme 3.1.
Si a et b commutent, nous avons, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $r > 0$, la formule

$$a^{r+1} - b^{r+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{r} a^{r-k}b^k\right). \tag{3.1}$$

Eqarpurmkbk

Démonstration. Démontrons cela par récurrence. Le cas $r = 0$ est évident. Pour un r donné, si (3.1) est vraie, alors

$$\begin{aligned}
a^{r+2} - b^{r+2} &= a^{r+1}a - a^{r+1}b + a^{r+1}b - b^{r+1}b \\
&= a^{r+1}(a-b) + (a^{r+1} - b^{r+1})b \\
&= a^{r+1}(a-b) + (a-b)\left(\sum_{k=0}^{r} a^{r-k}b^k\right)b \\
&= (a-b)\left(a^{r+1} + \left(\sum_{k=0}^{r} a^{r-k}b^k\right)b\right) \\
&= (a-b)\left(a^{r+1} + \sum_{k=0}^{r} a^{r-k}b^{k+1}\right) \\
&= (a-b)\left(a^{r+1} + \sum_{k'=1}^{r+1} a^{(r+1)-k'}b^{k'}\right) \\
&= (a-b)\left(\sum_{k'=0}^{r+1} a^{(r+1)-k'}b^{k'}\right).
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.
Si a est un élément nilpotent de l'anneau A, alors $1-a$ est inversible. Si a est nilpotent non nul, alors il est diviseur de zéro.

Démonstration. Soit n le minimum tel que $a^n = 0$. En vertu de la formule (3.1) nous avons

$$1 = 1 - a^n = (1-a)(1 + a + \cdots + a^{n-1}) = (1 + a + \cdots + a^{n-1})(1-a). \tag{3.2}$$

La somme $1 + a + \cdots + a^{n-1}$ est donc un inverse de $(1-a)$. □

PROPooQMZMooBrQhhr

Proposition 3.3 ([1]).
Soit un anneau (pas spécialement commutatif) A. Si $a_i \in A$, alors

$$\sum_i \sum_j a_i a_j = \sum_i a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j = (\sum_i a_i)^2 + \sum_{i<j} [a_i a_j] \tag{3.3}$$

où $[x, y]$ signifie $xy - yx$.

3.2 PGCD, PPCM et éléments inversibles

La définition de pgcd et ppcm dans un anneau commutatif est la définition 1.105. Dans la plus grande tradition, elle a été introduite sans motivation, et utilisée par-ci par-là. Nous revenons maintenant dessus.

Commençons par donner une autre vision de la divisibilité dans les anneaux intègres.

PropDiviseurIdeaux

Proposition 3.4.
Dans un anneau intègre[1] *A, on a l'équivalence suivante concernant deux éléments $a, b \in A$:*

$$a \mid b \Leftrightarrow (b) \subset (a). \tag{3.4}$$

Donc la divisibilité devient en réalité une relation d'ordre dont nous pouvons chercher un maximum et un minimum. Si S est une partie de A, nous notons $a \mid S$ pour exprimer que $a \mid x$ pour tout $x \in S$; de la même façon, $S \mid b$ signifie que $x \mid b$ pour tout $x \in S$.

Nous rappelons également la définition 1.98 de morphisme d'anneaux. Remarquons que si f est un morphisme, nous avons $f(0) = 0$ et $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$.

Lemme 3.5 ([119]).
Les éléments inversibles d'un anneau sont diviseurs de tous les éléments.

Démonstration. Soit k inversible d'inverse k' : $kk' = 1$; soit aussi $a \in A$. Alors $a = k(k'a)$, ce qui montre que k divise a. □

Lemme 3.6 ([119]).
Dans un anneau, 1 est un pgcd de a et b si et seulement si les seuls diviseurs communs sont les inversibles.

Démonstration. Supposons pour commencer que 1 est un pgcd de a et b. Un diviseur commun de a et b doit donc diviser 1. Or un diviseur de 1 est forcément inversible.

Dans l'autre sens, les diviseurs communs de a et b sont tous inversibles et donc diviseurs de 1. Donc 1 est un pgcd de a et b. □

3.2.1 Calcul effectif du PGCD et théorème de Bézout

subSecIpmnhO

Soient a et b, deux entiers que nous allons prendre positifs. Nous allons voir maintenant l'algorithme de **Euclide étendu** qui est capable, pour a et b donnés, de calculer le PGCD de a et b, et un couple de Bézout (u, v) tel que $ua + vb = \text{pgcd}(a, b)$. Ce calcul est indispensable si on veut implémenter RSA (19.2).

Cela se base sur le lemme suivant.

LemiVqita

Lemme 3.7.
Soient $a, b \in \mathbb{N}$ et des nombres q et r tels que $a = qb + r$. Alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(r, b)$.

Démonstration. Il suffit de voir que les diviseurs communs de a et b sont diviseurs de r et que les diviseurs communs de r et b divisent a.

Si s divise a et b, alors dans l'équation

$$\frac{a}{s} = \frac{qb}{s} + \frac{r}{s}$$

les termes a/s et qb/s sont entiers, donc r/s est aussi entier, et s divise r.

Inversement, si s divise r et b, alors il divise $qb + r$ et donc a. □

Remarque 3.8.
Ce lemme est surtout intéressant lorsque $a = qb + r$ est la division euclidienne de a par b : en effet, dans ce cas $r < b$, et le calcul du PGCD de deux nombres (a et b) est ramené à un calcul de PGCD de deux nombres plus petits (b et r).

[1] Définition 1.335.

L'algorithme pour calculer $\operatorname{pgcd}(a,b)$ consiste à écrire des divisions euclidiennes successives de la manière suivante :

$$a = q_2 b + r_2 \qquad r_2 < b \tag{3.5a}$$
$$b = q_3 r_2 + r_3 \qquad r_3 < r_2 \tag{3.5b}$$
$$\vdots \tag{3.5c}$$

en remarquant que $\operatorname{pgcd}(a,b) = \operatorname{pgcd}(b,r_2) = \operatorname{pgcd}(r_2,r_3)$. Étant donné que les inégalités $r_2 < b$ et $r_3 < r_2$ sont strictes, en continuant ainsi nous finissons sur zéro, c'est-à-dire qu'il existera un n pour lequel $r_{n+1} = 0$; et donc

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n,$$

et à ce moment nous avons $\operatorname{pgcd}(a,b) = \operatorname{pgcd}(r_{n-1},r_n) = r_n$.

3.2.1.1 Algorithme d'Euclide pour le PGCD

SUBSECooAEBLooFGJRkg

Écrivons l'algorithme[120] en détail (parce que Bézout, ça va être la même chose en cinq fois plus compliqué). On pose

$$r_0 = a \tag{3.6a}$$
$$r_1 = b \tag{3.6b}$$

(ce qui explique que nous n'ayons pas utilisé r_0 et r_1 précédemment). Ensuite on écrit la division euclidienne $a = q_2 b + r_2$, c'est-à-dire $r_0 = q_2 r_1 + r_2$. Cela donne r_2 et q_2 en termes de r_0 et r_1 :

$$r_2 = r_0 - q_2 r_1. \tag{3.7}$$

Ensuite, sachant r_2 nous pouvons continuer :

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \tag{3.8}$$

donne q_3 et $r_3 = r_1 - q_3 r_2$. On continue avec $r_2 = q_4 r_3 + r_4$. Tout cela pour poser la suite

$$\begin{aligned} r_0 &= a \\ r_1 &= b \\ r_k &= q_{k+2} r_{k+1} + r_{k+2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

SUBEQooDYUEooYNQnII

où la troisième équation définit r_{k+2} et q_{k+2} en fonction de r_k et r_{k+1}, à l'aide du théorème de la division euclidienne. La suite (r_k) ainsi construite est strictement décroissante et à chaque étape le lemme 3.7 et le principe de l'algorithme d'Euclide nous donnent

$$\begin{cases} \operatorname{pgcd}(r_k,r_{k+1}) = \operatorname{pgcd}(r_{k+1},r_{k+2}) = \operatorname{pgcd}(a,b) & \text{(3.10a)} \\ 0 \leqslant r_{k+1} < r_k. & \text{(3.10b)} \end{cases}$$

La suite étant strictement décroissante, nous prenons r_n, le dernier non nul : $r_{n+1} = 0$. Dans ce cas, en prenant $k = n-1$ dans la la dernière équation (3.9) devient :

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n \tag{3.11}$$

avec $\operatorname{pgcd}(a,b) = \operatorname{pgcd}(r_n,r_{n-1}) = r_n$.

Exemple 3.9.
Calculons le PGCD de 18 et 231. Pour cela nous écrivons les divisions euclidiennes en chaine :

$$231 = 18 \cdot 12 + 15 \tag{3.12a}$$
$$18 = 1 \cdot 15 + 3 \tag{3.12b}$$
$$15 = 5 \cdot 5 + 0. \tag{3.12c}$$

Donc le PGCD est 3 (le dernier reste non nul). △

3.2.1.2 Algorithme étendu : calcul effectif des coefficients de Bézout

SUBSECooRHSQooEuBWbd

La difficulté est de construire la suite qui donne des coefficients de Bézout. Elle va être construite à l'envers. Nous supposons déjà connaitre la liste complète des r_k jusqu'à $r_n = \text{pgcd}(a, b)$, ainsi que la liste complète des divisions euclidiennes

$$r_k = q_{k+2}r_{k+1} + r_{k+2}. \tag{3.13}$$

Nous voulons trouver les couples (u_k, v_k) de telle façon à avoir à chaque étape

$$r_n = u_k r_k + v_k r_{k-1}. \tag{3.14}$$

Notons que c'est à chaque fois r_n que nous construisons. La première équation de type Bézout à résoudre est

$$r_n = u_n r_n + v_n r_{n-1}, \tag{3.15}$$

sachant que $r_{n-1} = q_{n+1}r_n$. On pose $v_n = 0$ et $u_n = 1$ et c'est bon. Pour la récurrence, supposons les coefficients u_k et v_k connus, et déterminons les coefficients u_{k-1} et v_{k-1}. Pour ce faire, nous égalons les deux expressions pour r_n :

$$r_n = u_k r_k + v_k r_{k-1} = u_{k-1}r_{k-1} + v_{k-1}r_{k-2}; \tag{3.16}$$

dans laquelle nous substituons $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$:

$$\begin{aligned} u_k r_k + v_k r_{k-1} &= u_{k-1}r_{k-1} + v_{k-1}(q_k r_{k-1} + r_k) && (3.17)\\ &= (u_{k-1} + q_k v_{k-1})r_{k-1} + v_{k-1}r_k && (3.18) \end{aligned}$$

et nous égalons les coefficients de r_k et r_{k-1} pour obtenir

$$\begin{cases} v_{k-1} = u_k & (3.19a)\\ u_{k-1} = v_k - v_{k-1}q_k. & (3.19b) \end{cases}$$

Dès que u_k et v_k ainsi que q_k sont connus, on peut calculer u_{k-1} et v_{k-1}.

La dernière équation, celle avec $k = 1$, est

$$r_n = u_1 r_1 + v_1 r_0, \tag{3.20}$$

c'est-à-dire

EqNDMLooDvajAc

$$\text{pgcd}(a, b) = u_1 b + v_1 a. \tag{3.21}$$

Nous avons ainsi trouvé des coefficients de Bézout pour a et b.

3.2.2 Générateurs

3.10.

Les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ne sont pas des éléments de $\mathbb{Z}$; ce sont des parties de $\mathbb{Z}$. Pour rappel :

$$[a]_n = \{a + kn \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.22}$$

Pour écrire les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, nous pouvons écrire

$$\{[i]_n\}_{i=1,\dots,n} \tag{3.23}$$

ou

$$\{[i]_n \text{ tel que } 1 \leqslant i \leqslant n\}. \tag{3.24}$$

Mais attention : l'ensemble

$$\bigcup_{i=1}^{n} [i]_n \tag{3.25}$$

est très différent. Ce dernier ensemble est $\mathbb{Z}$.

PROPooEWREooUOSMsE

Proposition 3.11 ([121]).
Soit $n \geqslant 2$.

ITEMooHTRHooDWgXlk

(1) L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contient n éléments

(2) Nous avons $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[k]_n\}_{k=0,\dots,n-1}$.

Démonstration. Nous montrons que

$$\begin{aligned}\varphi\colon \{1,\dots,n\} &\to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\ k &\mapsto [k]_n\end{aligned} \tag{3.26}$$

est une bijection.

(1) **Injective** Supposons que $\varphi(k)=\varphi(l)$ pour $k,l\in\{1,\dots,n\}$. Il existe $t\in\mathbb{Z}$ tel que $l=l+tn$. Si $t>0$, alors nous avons

$$l+tn\geqslant 1+n>n, \tag{3.27}$$

ce qui est impossible parce que $k\in\{0,\dots,n\}$. Nous montrons de même que $t<0$ est impossible. Nous en déduisons que $t=0$ et donc que $k=l$.

(2) **Surjective** Soit $l\in\mathbb{Z}$. Nous allons montrer que $[l]_n$ est dans l'image de φ. Par la division euclidienne 1.352, il existe $q\in\mathbb{Z}$ et $r<n$ (dans $\mathbb{N}$) tels que $l=qn+r$. Nous venons de prouver que $[l]_n=[r]_n=\varphi(r)$.

Pour le point (2), c'est juste l'image de φ. □

PROPooMTWGooEMbvDi

Proposition 3.12 ([121]).
Soit $n\geqslant 2$ et $m\in\mathbb{Z}$. Nous avons équivalence entre

ITEMooMCIJooItgSHc

(1) $\operatorname{pgcd}(n,m)=1$,

ITEMooMNKCooPnpyye

(2) $[m]_n$ *engendre le groupe* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$

ITEMooBPWLooFLdJfr

(3) $[m]_n$ *est inversible dans* $\big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*,\ \cdot\ \big)$.

Démonstration. En trois parties.

(1) **(1) implique (2)**
Si $\operatorname{pgcd}(m,n)=1$, le théorème de Bézout 1.358 donne des $u,v\in\mathbb{Z}$ tels que $um+vn=1$, autrement dit $u[m]_n=[1]_n$. Si k est quelconque, nous avons

$$[k]_n=uk[m]_n, \tag{3.28}$$

ce qui signifie que $[k]_n$ est bien un multiple de $[m]_n$ qui est donc générateur.

(2) **(2) implique (3)**
Si $[m]_n$ engendre $\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+\big)$, il existe en particulier un multiple de $[m]_n$ qui vaut $[1]_n$: il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $k[m]_n=[1]_n$.
Nous voyons que $[k]_n$ est un inverse de $[m]_n$ dans $\big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*,\ \cdot\ \big)$.

(3) **(3) implique (1)**
Nous supposons que $[m]_n$ est inversible dans $\big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*,\ \cdot\ \big)$. C'est-à-dire qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $[k]_n[m]_n=[1]_n$. Cela signifie qu'il existe $l\in\mathbb{Z}$ tel que

$$km=1+ln. \tag{3.29}$$

Par le théorème de Bézout (pris dans l'autre sens), cela signifie que $\operatorname{pgcd}(m,n)=1$.

□

3.2.3 pgcd, ppcm dans $\mathbb{N}$

LEMooBJVJooFyuFeN

Lemme 3.13 ([1]).
Dans $\mathbb{N}$, le pgcd[2] et le ppcm sont uniques.

Démonstration. Supposons que δ_1 et δ_2 soient des pgcd de la partie S. Puisque $\delta_1\mid S$, nous avons $\delta_1\mid\delta_2$ parce que δ_2 est un pgcd. Le même raisonnement, inversant δ_1 et δ_2 montre que $\delta_2\mid\delta_1$. Si (a_p) sont les éléments de la décomposition de δ_1 et (b_p) ceux de δ_2, alors le lemme 1.375 nous indique que $a_p\leqslant b_p$ et $b_p\leqslant a_p$, ce qui implique que $a_p=b_p$.
La démonstration pour le ppcm s'effectue selon le même principe. □

[2] Le pgcd et ppcm sont définis dans 1.105.

LEMooWMZWooCmkOoD

Lemme 3.14.
Si $d \mid \delta$ dans $\mathbb{N}$ alors $d \leqslant \delta$.

Démonstration. Nous avons $k \in \mathbb{N}$ tel que $kd = \delta$. Le lemme 1.193 dit qu'alors $\delta \geqslant d$. □

NORMooNAMKooCKKZMc

3.15.
Rappel de ce que nous disions dans 1.106. Dans $\mathbb{Z}$, le pgcd n'est pas à proprement parler unique, mais nous faisons une exception en disant qu'on ne prend que les pgcd positifs.

LEMooJIGRooARiIPC

Lemme 3.16.
Soit une partie S de $\mathbb{N}$.

(1) Le pgcd de S est le plus grand élément de $\mathbb{N}$ divisant tous les éléments de S.

(2) Le ppcm de S est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ que tous les éléments de S divisent.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour le pgcd** Soit δ, le pgcd de S. Si d divise également tous les éléments de S, nous avons $d \mid \delta$ par définition du pgcd. Le lemme 3.14 dit qu'alors $d \leqslant \delta$.

(2) **Pour le ppcm** Soit le ppcm μ de S. Si m est également divisé par tous les éléments de S nous avons $\mu \mid m$ et donc $\mu \leqslant m$.

□

LEMooEVIZooPAkQZW

Lemme 3.17 ([1]).
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $ab = q^k$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$. Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $a = \alpha^k$ et $b = \beta^k$.

Démonstration. Nous décomposons a, b et q en facteurs premiers suivant le théorème 1.374 :

SUBEQooBJEQooDiWbYg

$$a = \prod_i p_i^{a_i} \tag{3.30a}$$
$$b = \prod_i p_i^{b_i} \tag{3.30b}$$
$$q = \prod_i p_i^{q_i}. \tag{3.30c}$$

D'un part, en utilisant la commutativité et l'associativité du produit,

$$ab = \prod_i p_i^{a_i + b_i}. \tag{3.31}$$

D'autre part, puisque $ab = q^k$, nous avons

$$ab = (\prod_i p_i^{q_i})^k = \prod_i p_i^{kq_i}. \tag{3.32}$$

En vertu de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, pour chaque i nous avons

$$a_i + b_i = kq_i. \tag{3.33}$$

Comme a et b sont premiers entre eux, si $a_i \neq 0$ alors $b_i = 0$ et inversement. Prenons un i tel que $a_i \neq 0$. Alors $b_i = 0$ et nous avons $a_i = kq_i$. Idem pour les b_i.

Donc tous les a_i et les b_i qui sont non nuls sont des multiples de k. Nous posons $a_i = ks_i$ et nous reportons dans (3.30a) :

$$a = \prod_i p_i^{ks_i} = (\prod_i p_i^{s_i})^k, \tag{3.34}$$

de telle sorte que a soit une puissance k^{e}. La même chose tient pour b. □

PROPooNQBOooHWqTvs

Proposition 3.18.
Soient $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ décomposés en $a = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{a_p}$ et $b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{b_p}$. En posant

$$m_p = \min\{a_p, b_p\} \tag{3.35a}$$
$$M_p = \max\{a_p, b_p\}, \tag{3.35b}$$

nous avons

$$\gcd(a,b)=\prod_{p\in\mathcal{P}}p^{m_p} \tag{3.36a}$$

$$\operatorname{ppcm}(a,b)=\prod_{p\in\mathcal{P}}p^{M_p}. \tag{3.36b}$$

Pour rappel, la définition de pgcd et ppcm sont dans 1.105.

Démonstration. Nous commençons par le pgcd. Nous notons $\delta=\prod_{p\in\mathcal{P}}p^{m_p}$ et nous prouvons que δ est un pgcd de $\{a,b\}$. Il y a deux propriétés à vérifier.

(1) **δ divise a et b** Puisque $m_p=\min\{a_p,b_p\}$, nous avons $m_p\leqslant a_p$ et $m_p\leqslant b_p$. Le lemme 1.375 nous dit alors que $\delta\mid a$ et $\delta\mid b$.

(2) **Si s divise a et b** De même, si $s\mid a$ et $s\mid b$, nous avons $s_p\leqslant a_p$ et $s_p\leqslant b_p$, ce qui montre que $s_p\leqslant m_p$ et donc que $s\mid\delta$.

Pour le ppcm, nous posons $\mu=\prod_{p\in\mathcal{P}}p^{M_p}$, et nous prouvons que μ est un ppcm de $\{a,b\}$.

(1) **a et b divisent μ** Pour tout p, nous avons $M_p\geqslant a_p$. Le lemme 1.375 implique que $a\mid\mu$. Idem pour b, donc tous les éléments de $\{a,b\}$ divisent μ.

(2) **Si a et b divisent r** Supposons que a et b divisent un certain nombre r. Alors $a_p\leqslant r_p$ et $b_p\leqslant r_p$. Donc $r_p\geqslant\max\{a_p,b_p\}=M_p$. Nous en déduisons que $\mu\mid r$.

Puisque les pgcd et ppcm sont uniques (lemme 3.13 et remarque 3.15), nous avons prouvé que δ et μ sont les nombres recherchés. □

CORooQIMHooUzLUJY

Corolaire 3.19.
Soit un nombre premier p. Un élément $m\in\mathbb{Z}^*$ vérifie $\gcd(m,p^n)\neq1$ si et seulement si $m=qp$ pour un certain q.

Démonstration. Nous considérons les décompositions en facteurs premiers $m=\prod_{s\in\mathcal{P}}s^{a_s}$ et $p^n=\prod_{s\in\mathcal{P}}s^{b_s}$. Par la partie unicité du théorème 1.374, nous savons que $b_s=0$ pour $s\neq p$ et $b_p=n$.

Nous prenons ensuite l'expression du pgcd donné par la proposition 3.18 :

$$\gcd(m,p^n)=\prod_{s\in\mathcal{P}}s^{\min\{a_s,b_s\}}. \tag{3.37}$$

Le minimum est toujours zéro lorsque $s\neq p$, donc $\gcd(m,p^n)=p^{\min\{a_s,n\}}$.

Nous avons donc $\gcd(m,p^n)\neq1$ si et seulement si $a_p\neq0$. Mais $a_p\neq0$ si et seulement si m est un multiple de p. □

LemheKdsa

Lemme 3.20.
Un entier $n\geqslant1$ se décompose de façon unique en produit de la forme $n=qm^2$ où q est un entier sans facteurs carrés et m, un entier.

Démonstration. Pour $n=1$, c'est évident. Nous supposons $n\geqslant2$.

En ce qui concerne l'existence, nous décomposons n en facteurs premiers[3] et nous séparons les puissances paires des puissances impaires :

$$n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{2\alpha_i}\prod_{j=1}^{s}q_j^{2\beta_j+1} \tag{3.38a}$$

$$=\underbrace{\left(\prod_{i=1}^{r}p_i^{2\alpha_i}\prod_{j=1}^{s}q^{2\beta_j}\right)}_{m^2}\underbrace{\prod_{j=1}^{s}q_j}_{q}. \tag{3.38b}$$

Nous passons à l'unicité. Supposons que $n=q_1m_1^2=q_2m_2^2$ avec q_1 et q_2 sans facteurs carrés (dans leur décomposition en facteurs premiers). Soit $d=\gcd(m_1,m_2)$ et k_1, k_2 définis par $m_1=dk_1$, $m_2=dk_2$. Par construction, $\gcd(k_1,k_2)=1$. Étant donné que

$$n=q_1d^2k_1^2=q_2d^2k_2^2, \tag{3.39}$$

EqWPOtto

[3] Théorème 1.374.

nous avons $q_1k_1^2 = q_2k_2^2$ et donc k_1^2 divise $q_2k_2^2$. Mais k_1 et k_2 n'ont pas de facteurs premiers en commun, donc k_1^2 divise q_2, ce qui n'est possible que si $k_1 = 1$ (parce que k_1^2 n'a que des facteurs premiers alors que q_2 n'en a pas). Dans ce cas, $d = m_1$ et m_1 divise m_2. Si $m_2 = lm_1$ alors l'équation (3.39) se réduit à $n = q_1m_1^2 = q_2l^2m_1^2$ et donc

$$q_1 = q_2l^2, \tag{3.40}$$

ce qui signifie $l = 1$ et donc $m_1 = m_2$. □

Les nombres premiers ne sont pas si rares que ça dans $\mathbb{N}$. Nous allons voir dans 15.134 que la somme des inverses des nombres premiers diverge. Pour comparaison, la somme des inverses des carrés converge par la proposition 15.141. Il y a donc, dans un certains sens, plus de nombres premiers que de carrés ; dans un autre sens, il y en a autant : une infinité dénombrable.

3.2.4 Ordre d'un élément dans un groupe fini

Voir plus d'informations dans la partie 5.2 sur les groupes monogènes.

LEMooRFKQooWTdYcr

Lemme 3.21 ([1]).
Si g est un élément d'ordre s, et si $g^r = e$, alors $s \mid r$.

THOooSUWKooICbzqM

Théorème 3.22 (Théorème de Cauchy[122, 123]).
Soit G, un groupe cyclique d'ordre n. Si d divise n, alors G possède un unique sous-groupe d'ordre d.
En particulier, G possède des éléments de tous les ordres divisant n.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Existence** L'hypothèse est que G est un groupe cyclique. Donc nous pouvons considérer une générateur g de G. Nous considérons $H_d = \text{gr}(g^{n/d})$, et nous prouvons que H_d est un sous-groupe d'ordre d.

D'abord nous avons $(g^{n/d})^d = g^n = e$. Donc $|H_d| \leqslant d$. Pour prouver que $|H_d| \geqslant d$, nous supposons par l'absurde qu'il existe $k < d$ tel que $(g^{n/d})^k = e$. Nous aurions alors $g^{nk/d} = e$ avec $nk/d < n$, ce qui contredirait que g est générateur d'un groupe d'ordre n.

(2) **Unicité** Soit H, un sous-groupe de G d'ordre d. Nous allons prouver que $H = \text{gr}(g^{n/d})$. Vu que H et H_d ont le même cardinal, il suffira de montrer que $H \subset H_d$ pour avoir $H = H_d$.

Vu que $\{e\}$ est l'unique sous-groupe d'ordre 1, nous supposons que $d > 1$. Soit $h \neq e$ dans H. Vu que g est générateur de G, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^k = h$. Vu que H est d'ordre d, nous avons $h^d = e$ (corolaire 2.15). Donc

$$g^{kd} = e. \tag{3.41}$$

Le lemme 3.21 dit alors que $n \mid kd$. Soit $t \in \mathbb{N}^*$ tel que $nt = kd$; nous pouvons écrire $k = tn/d$ et récrire $g^k = h$ avec cette valeur de k :

$$h = g^{tn/d} = (g^{n/d})^t \in \text{gr}(g^{n/d}). \tag{3.42}$$

Vu que h a été pris arbitrairement dans H, nous en déduisons que $H \subset \text{gr}(g^{n/d})$.

□

Le lemme suivant indique que sous hypothèse de commutativité, l'ordre d'un élément est une notion multiplicative.

LemyETtdy

Lemme 3.23 ([124]).
Soit G un groupe et $a, b \in G$ tels que $ab = ba$ d'ordres respectivement r et s, deux nombres premiers entre eux. Alors l'élément ab est d'ordre rs.

Démonstration. Étant donné que $(ab)^{rs} = a^{rs}b^{rs} = 1$, l'ordre de ab divise rs. Et comme r et s sont premiers entre eux, l'ordre de ab s'écrit sous la forme r_1s_1 avec $r_1 \mid r$ et $s_1 \mid s$. Nous avons

$$a^{r_1s_1}b^{r_1s_1} = (ab)^{r_1s_1} = 1, \tag{3.43}$$

que nous élevons à la puissance r_2 où r_2 est défini en posant $r = r_1r_2$:

$$a^{rs_1}b^{rs_1} = 1. \tag{3.44}$$

Et comme $a^{rs_1} = 1$, nous concluons que $b^{rs_1} = 1$. Donc $s \mid rs_1$. Par le lemme de Gauss 1.370, nous avons en fait $s \mid s_1$. Puisqu'on a aussi $s_1 \mid s$, nous avons $s = s_1$.

Le même type d'argument donne $r = r_1$, et finalement l'ordre de ab est $r_1s_1 = rs$. □

LemSkIOOG

Lemme 3.24 ([54]).
Un sous-groupe d'indice 2 est un sous-groupe normal.

Démonstration. Si H est un tel sous-groupe d'un groupe G, alors G possède exactement deux classes à gauche par rapport à H (théorème de Lagrange 2.14) et se partitionne donc en deux parties : $G = H \cup xH$ avec $x \notin H$. De même pour les classes à droite : $G = H \cup Hx$. Puisque la classe à droite Hx n'est pas H, on a $xH = Hx$, et H est normal dans G par la proposition 1.422. □

PropubeiGX

Lemme 3.25 ([125]).
Soit H, un sous-groupe normal d'indice m de G. Alors pour tout $a \in G$ nous avons $a^m \in H$.

Démonstration. Par définition de l'indice, le groupe G/H est d'ordre m. Donc si $[a] \in G/H$, nous avons $[a]^m = [e]$, ce qui signifie $[a^m] = [e]$, ou encore $a^m \in H$. □

PROPooVWVIooQzuAlA

Proposition 3.26 ([125]).
Soit un groupe fini G et H, un sous-groupe normal d'ordre n et d'indice m avec m et n premiers entre eux. Alors H est l'unique sous-groupe de G à être d'ordre n.

Démonstration. Soit H' un sous-groupe d'ordre n. Si $h \in H'$ alors $h^n = 1$ et $h^m \in H$ par le lemme 3.25. Étant donné que m et n sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout 1.358, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que

$$am + bn = 1. \tag{3.45}$$

Et donc, $h = h^1 = (h^m)^a(h^n)^b$. En tenant compte du fait que $h^n = 1$ et $h^m \in H$, nous avons $h \in H$. Ce que nous venons de prouver est que $H' \subset H$ et donc que $H = H'$ parce que $|H'| = |H| = |G|/m$. □

3.27.
Notons que cette proposition ne dit pas qu'il existe un sous-groupe d'ordre n et d'indice m. Il dit juste que si il y en a un et si il est normal, alors il n'y en a pas d'autre.

LemqAUBYn

Lemme 3.28.
L'ensemble des ordres d'un groupe commutatif est stable par PPCM[4].

Autrement dit, si $x \in G$ est d'ordre r et si $y \in G$ est d'ordre s, alors il existe un élément d'ordre $\text{ppcm}(r, s)$.

Démonstration. Soit $m = \text{ppcm}(r, s)$. Afin d'écrire m sous une forme pratique, nous considérons les décompositions en facteurs premiers de r et s :

$$r = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \tag{3.46a}$$

$$s = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i} \tag{3.46b}$$

où $\{p_i\}_{i=1,\dots,k}$ est l'ensemble des nombres premiers arrivant dans les décompositions de r et de s. Si nous posons

$$r' = \prod_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > \beta_i}}^{k} p_i^{\alpha_i} \tag{3.47a}$$

$$s' = \prod_{\substack{i=1 \\ \alpha_i \leqslant \beta_i}}^{k} p_i^{\beta_i}, \tag{3.47b}$$

alors $\text{ppcm}(r, s) = r's'$ et r' et s' sont premiers entre eux. L'élément $x^{r/r'}$ est d'ordre r' et l'élément $y^{s/s'}$ est d'ordre s'. Maintenant nous utilisons le fait que G soit commutatif et le lemme 3.23 pour conclure que l'ordre de $x^{r/r'}y^{s/s'}$ est $r's' = m$. □

3.2.5 Écriture des fractions

THOooWYQVooRBaAAM

Théorème 3.29 ([126]).
Tout élément de $\mathbb{Q}^+$ s'écrit de façon unique comme quotient de deux entiers premiers entre eux.

[4] Définition 1.105.

Démonstration. En deux parties[5]

(1) **Unicité** Supposons avoir $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ avec $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(c,d) = 1$. Nous avons

$$ad = bc \tag{3.48}$$

donc

(1a) a divise bc mais est premier avec b donc a divise c par le lemme de Gauss 1.370.

(1b) c divise ad mais est premier avec d donc c divise a par le lemme de Gauss 1.370.

En conclusion a divise c et c divise a, ergo[6] $a = c$. L'égalité $b = d$ est alors immédiate.

(2) **Existence** Soit le quotient $\frac{a}{b}$. Nous avons

$$\frac{a}{b} = \frac{a/\text{pgcd}(a,b)}{b/\text{pgcd}(a,b)}, \tag{3.49}$$

qui est encore un quotient d'entiers parce que $\text{pgcd}(a,b)$ divise aussi bien a que b. Il faut montrer que les nombres $a/\text{pgcd}(a,b)$ et $b/\text{pgcd}(a,b)$ sont premiers entre eux. Pour cela nous supposons que k est un diviseur commun. En particulier, les nombres $a/k\,\text{pgcd}(a,b)$ et $b/k\,\text{pgcd}(a,b)$ sont des entiers, ce qui fait que $k\,\text{pgcd}(a,b)$ est un diviseur commun de a et b. Étant donné que $\text{pgcd}(a,b)$ est le plus grand tel diviseur, nous devons avoir $k\,\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a,b)$ c'est-à-dire que $k = 1$. Donc les nombres $a/\text{pgcd}(a,b)$ et $b/\text{pgcd}(a,b)$ sont premiers entre eux.

□

PROPooWBFJooWisSZX

Proposition 3.30 ([1])**.**
Soient $l, l, d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{k}{d_1} = \frac{l}{d_2} \tag{3.50}$$

avec $\text{pgcd}(k, d_1) = 1$.
Alors

(1) $d_1 \leqslant d_2$

(2) $d_1 = \frac{d_2}{\text{pgcd}(l,d_2)}$.

PROPooRZDDooLJabov

Proposition 3.31.
Les entiers p et q sont premiers entre eux[7] *si et seulement si p^2 et q^2 sont premiers entre eux.*

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que p^2 et q^2 ne sont pas premiers entre eux. Donc il existe δ divisant p^2 et q^2. Si δ' est un facteur premier de δ, alors δ' divise δ et donc aussi p^2 et q^2. Le lemme 1.376 implique que δ divise p et q. Donc p et q ne sont pas premiers entre eux.

(2) $\Leftarrow$ Si p^2 et q^2 sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout 1.358 il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que

$$ap^2 + bq^2 = 1 \tag{3.51}$$

Dans ce cas, $(ap)p + (bq)q = 1$, ce qui montre (par encore Bézout, mais l'autre sens) que p et q sont premiers entre eux.

□

Une des conséquences de ces résultats sera le fait que $\sqrt{n}$ est irrationnelle dès que n n'est pas un carré parfait, théorème 3.32.

Nous avons déjà vu dans la proposition 1.523 que $\sqrt{2}$ était irrationnel. En fait le théorème suivant va nous montrer que le nombre $\sqrt{n}$ est soit entier, soit irrationnel.

THOooYXJIooWcbnbm

Théorème 3.32.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si n est un carré parfait.

[5] Définitions des pgcd et ppcm en 1.105.
[6] Lemme 1.372.
[7] Premiers entre eux, définition 1.364.

Démonstration. Supposons que $\sqrt{n}$ soit rationnel. Le théorème 3.29 nous donne $p, q \in \mathbb{N}$ premiers entre eux tels que $\sqrt{n} = p/q$. La proposition 3.31 nous enseigne de plus que p^2 et q^2 sont premiers entre eux. Nous avons

$$p^2 = nq^2. \tag{3.52}$$

Le nombre q est alors un diviseur commun de q^2 et de p. Donc $q = 1$ et $n = p^2$ est un carré parfait. □

3.2.6 Équation diophantienne linéaire à deux inconnues

subsecZVKNooXNjPSf

Soient a, b et c des entiers naturels donnés. Nous considérons l'équation

EqTOVSooJbxJIq

$$ax + by = c \tag{3.53}$$

à résoudre[127] pour $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

Si a ou b est nul, c'est facile ; nous supposons donc que a et b sont tous deux non nuls. Nous commençons par simplifier l'équation en cherchant les diviseurs communs. Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$ et notons $a = da'$, $b = db'$. Nous avons déjà l'équation

$$d(a'x + b'y) = c, \tag{3.54}$$

et donc si c n'est pas un multiple de d, il n'y a pas de solution[8]. Si par contre c est un multiple de d alors nous écrivons $c = c'd$ et l'équation devient

$$a'x + b'y = c' \tag{3.55}$$

C'est maintenant que nous utilisons le théorème de Bézout 1.358 : puisque a' et b' sont premiers entre eux, nous avons la relation $a'u + b'v = 1$ pour certains[9] nombres entiers u et v. Nous récrivons notre équation sous la forme $a'x + b'y = c'(a'u + b'v)$ et rassemblons les termes :

$$a'(x - c'u) = b'(c'v - y). \tag{3.56}$$

C'est-à-dire que si (x, y) est une solution, alors a' divise $b'(c'v - y)$. Mais comme a' et b' sont premiers entre eux, le nombre a' doit forcément[10] diviser $c'v - y$. Disons $c'v - y = ka'$. Alors $a'(x - c'u) = b'ka'$ et donc

$$x = b'k + c'u. \tag{3.57}$$

Nous trouvons alors une expression pour y en injectant ce résultat dans $a'x + b'y = c'$ et en utilisant le théorème de Bézout : $a'c'u = (1 - b'v)c'$. Au final nous avons prouvé que toutes les solutions sont de la forme

EqYCQVooZzHiuRq

$$\begin{cases} x = b'k + c'u & \text{(3.58a)} \\ y = vc' - a'k & \text{(3.58b)} \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Si nous ne voulons réellement que les solutions dans $\mathbb{N}$ et non dans $\mathbb{Z}$, il faut seulement un peu restreindre les valeurs de k. Il en reste un nombre fini parce que l'équation pour x borne k vers le bas tandis que celle pour y borne k vers le haut.

Par ailleurs, il est très vite vérifié que tous les couples (x, y) de la forme (3.58) sont solutions.

Exemple 3.33.
Résoudre l'équation $2x + 6y = 52$.

Nous pouvons factoriser 2 dans le membre de gauche et simplifier alors toute l'équation par 2 :

$$x + 3y = 26. \tag{3.59}$$

Nous cherchons une relation de Bézout pour $u+3v = 1$. Ce n'est heureusement pas très compliqué : $u = -5$, $v = 2$. Nous pouvons alors écrire

$$x + 3y = 26 \times (-5 + 3 \times 2), \tag{3.60}$$

et donc $x + 5 \times 26 = -3(y - 26 \times 2)$, et en posant $k = y - 26 \times 2$ nous avons

$$x = -3k - 130. \tag{3.61}$$

En injectant nous trouvons l'équation $3y - 3k - 130 = 26$ et donc

$$y = 52 + k. \tag{3.62}$$

△

[8] Exemple : $8x + 2y = 9$. Le membre de gauche est certainement un nombre pair et il n'y a donc pas de solution.
[9] Nous avons décrit un algorithme pour les trouver en démontrant l'équation 3.21.
[10] C'est Gauss 1.370 qui le dit, et vous savez que lorsque Gauss dit, c'est *forcément* vrai.

3.2.7 Quotients

Nous écrivons $a = b \mod p$ essentiellement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b + kp = a$. Plus généralement nous notons $[a]_p = \{a + kp | k \in \mathbb{Z}\}$ et l'écriture « $a = n \mod p$ » peut tout autant signifier $a = [b]_p$ que $a \in [b]_p$. La différence entre les deux est subtile mais peut de temps en temps valoir son pesant d'or.

Proposition 3.34.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est monogène. Si $n \neq 0$, il est cyclique d'ordre n.

Démonstration. Nous considérons la surjection canonique $\mu: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $\mu(a) = a\mu(1)$. Par conséquent $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \text{gr}\big(\mu(1)\big)$ parce que tout groupe contenant $\mu(1)$ contient tous les multiples de $\mu(1)$, et par conséquent contient $\mu(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et considérons x_0, le plus petit naturel représentant x. Nous notons $x = [x_0]$. Le théorème de la division euclidienne 1.352 donne l'existence de q et r avec $0 \leqslant r < n$ et $q \geqslant 0$ tels que

$$x_0 = nq + r. \tag{3.63}$$

Nous avons $[x_0] = [r] = \mu(r)$ parce que $x_0 - r$ est un multiple de n. Nous avons donc $[x_0] \in \mu(\mathbb{N}_{n-1})$. Par conséquent

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mu(\mathbb{Z}) = \mu(\mathbb{N}_{n-1}). \tag{3.64}$$

La restriction $\mu: \mathbb{N}_{n-1} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc surjective. Montrons qu'elle est également injective. Si $\mu(x_0) = \mu(x_1)$, alors $x_1 = x_0 + kn$. Si nous supposons que $x_1 > x_0$, alors $k > 0$ et si $x_0 \in \mathbb{N}_{n-1}$, alors $x_1 > n - 1$.

L'ordre de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc le même que le cardinal de $\mathbb{N}_{n-1}$, c'est-à-dire n. Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc fini, d'ordre n et monogène parce que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \text{gr}(\mu(1))$. Il est donc cyclique. □

Lemme 3.35 ([128]).
Soit $q \in \mathbb{N}$ avec $q \geqslant 2$. Soient $n, d \in \mathbb{N}$ tels que $q^d - 1 \mid q^n - 1$. Alors $d \mid n$.

Démonstration. Par le théorème de division euclidienne 1.352, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $n = ad + b$ avec $0 \leqslant b < d$. En remarquant que $q^d \in [1]_{q^d-1}$ nous avons

$$q^n = (q^d)^a q^b \in [1]_{q^d-1} q^b = [q^b]_{q^d-1}. \tag{3.65}$$

Pour cela nous avons utilisé d'abord le fait que si $a \in [z]_k$, alors $a^n \in [z^n]_k$ et ensuite le fait que $[1]_k x = [x]_k$. D'autre part l'hypothèse $q^d - 1 \mid q^n - 1$ implique

$$q^n \in [1]_{q^d-1}. \tag{3.66}$$

Par conséquent le nombre q^n est à la fois dans $[q^b]_{q^d-1}$ et dans $[1]_{q^d-1}$. Cela implique que

$$[1]_{q^d-1} = [q^b]_{q^d-1}, \tag{3.67}$$

ou encore que $q^b \in [1]_{q^d-1}$ ou encore que $q^d - 1 \mid q^b - 1$.

Étant donné que $b < d$ et que $q \geqslant 2$, nous avons que $q^b - 1 < q^d - 1$; donc pour que $q^d - 1$ divise $q^b - 1$, il faut que $q^b - 1$ soit zéro, c'est-à-dire $b = 0$.

Mais dire $b = 0$ revient à dire que $d \mid n$, ce qu'il fallait démontrer. □

3.3 Coefficients multinomiaux

3.3.1 Théorème multinomial

DEFooCQPRooFeWeOS

Définition 3.36 (multiindices[129]).
*Un **multiindice** pour $\mathbb{R}^n$ est un élément de $\mathbb{N}^n$. Sa taille est définie par*

$$|\alpha| = \sum_i \alpha_i. \tag{3.68}$$

Nous disons que $\beta \leqslant \alpha$ lorsque $\beta_i \leqslant \alpha_i$ pour tout i.

Nous définissons sa factorielle par

$$\alpha! = \prod_{k=1}^{n} (\alpha_k!) = \alpha_1! \times \ldots \times \alpha_n!. \tag{3.69}$$

EQooMZAMooMJuLKD

En ce qui concerne les coefficients binomiaux, nous posons

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} = \prod_{i=1}^{n} \binom{\alpha_i}{\beta_i}. \tag{3.70}$$

EQooKBURooKFBxnt

Si $x \in \mathbb{R}^n$ et si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, nous notons

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}. \tag{3.71}$$

THOooNHAUooQvuytn

Théorème 3.37 (Théorème multinomial[129])**.**
Soit $x \in \mathbb{R}^n$, et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Nous avons

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha. \tag{3.72}$$

Démonstration. Le cas $n = 2$ est la formule binomiale 1.387 :

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x_1^l x_2^{k-l} \tag{3.73a}$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} x_1^l x_2^{k-l} \tag{3.73b}$$

$$= \sum_{\alpha_1+\alpha_2=k} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \tag{3.73c}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha. \tag{3.73d}$$

Et maintenant, nous faisons une récurrence sur n, en tenant k fixé. Nous supposons que la formule est démontrée pour tout $n \leqslant N$, et nous allons avec $N+1$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_{N+1})$, et posons $y = (x_1, \ldots, x_N)$. Nous avons

$$(x_1 + \ldots + x_{N+1})^k = \big((x_1 + \ldots + x_N) + x_{N+1}\big)^k \tag{3.74a}$$

$$= \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} (x_1 + \ldots + x_N)^i x_{N+1}^j \tag{3.74b}$$

$$= \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^N \\ |\alpha|=i}} x_{N+1}^j \frac{i!}{\alpha!} y^\alpha \tag{3.74c}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^N \\ |\alpha|=k-j}} x_{N+1} \frac{k!}{j!} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \tag{3.74d}$$

$$= \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |\beta|=k}} \frac{k!}{\beta_{N+1}!\alpha!} x_{N+1}^{\beta_{N+1}} x_1^{\alpha_1} \ldots x_N^{\alpha_N} \tag{3.74e}$$

SUBEQooTQFGooHyUhCi cf. justif.

$$= \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |\beta|=k}} x^\beta \frac{k!}{\beta!}. \tag{3.74f}$$

Justification pour (3.74e). Les deux sommes ensemble font une somme sur tous $\beta = (\alpha, j) \in \mathbb{N}^{N+1}$ avec $|\beta| = |\alpha| + j = (k-j) + j = k$. □

LEMooBSYRooDboTor

Lemme 3.38 ([1])**.**
Soit une application $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$. Nous avons

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=2}} \frac{1}{\alpha!} f(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} f(e_k + e_l). \tag{3.75}$$

Démonstration. Nous avons

$$\{\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| = 2\} = \{e_k + e_l \text{ tel que } k, l = 1, \dots, n\}, \tag{3.76}$$

mais nous ne pouvons pas sommer en faisant $\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^2\\|\alpha|=2}} = \sum_{k,l}$ parce que à droite, les termes (k,l) et (l,k) sont identiques.

Au lieu de ça, remarquons que nous avons une bijection

$$\begin{aligned}\varphi\colon \{(k,l) \in \{1,\dots,n\}^2 \text{ tel que } k \leqslant n\} &\to \{e_k + e_l\}_{k,l=1,\dots,n}\\ (k,l) &\mapsto e_k + e_l.\end{aligned} \tag{3.77}$$

Prouvons que cette application est injective. Si $\varphi(k,l) = \varphi(s,t)$, alors $e_k + e_l = e_s + e_t$. Le produit scalaire avec e_k donne

$$1 + \delta_{kl} = \delta_{st} + \delta_{tk}. \tag{3.78}$$

(1) **Si $k < l$** Alors $1 = \delta_{sk} + \delta_{tk}$. Nous avons donc forcément $k = s$ ou $k = t$, mais pas les deux en même temps.

(1a) **Si $s = k$** Dans ce csa $t \neq k$, et nous avons $e_k + e_l = e_k + e_t$, donc $e_l = e_t$ et donc $l = t$. Nous avons donc $(k,l) = (s,t)$, ce qu'il fallait.

(1b) **Si $t = k$** Alors $e_l = e_s$ et donc $l = s$, ce qui donnerait $(k,l) = (l,k)$, ce qui est impossible parce que $k < l$.

(2) **Si $k = l$** Alors $2e_k = e_s + t_t$. Le produit scalaire avec e_k donne $2 = \delta_{sk} + \delta_{tk}$ et donc $s = t = k$.

Nous pouvons donc sommer de la façon suivante :

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=2}} \frac{1}{\alpha!} f(\alpha) = \sum_{k\leqslant l} \frac{1}{(e_k+e_l)!} f(e_k + e_l) \tag{3.79a}$$

$$= \sum_{k<l} f(e_k + e_l) + \sum_k \frac{1}{2} f(2e_k) \tag{3.79b}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k\neq l} f(e_k + e_l) + \sum_k \frac{1}{2} f(2e_k) \qquad \text{cf. justif.} \tag{3.79c}$$

SUBEQooZERNooOeAAgb

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,l} f(e_k + e_l). \tag{3.79d}$$

Justification pour (3.79c). Nous avons $f(e_l + e_l) = f(e_l + e_k)$. Donc $\sum_{k<l} f(e_k + e_l) = \sum_{k>l} f(e_k + e_l)$. □

3.4 Polynômes de plusieurs variables

DEFooZNHOooCruuwI

Définition 3.39.
*L'ensemble des **polynôme de** n **variables** sur l'anneau A est $A^{(\mathbb{N}^n)}$, c'est-à-dire l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^n$ et dont seulement une quantité finie de coefficients sont non nuls.*

Le produit sur $A[X_1, \dots, X_n]$ est défini par

$$(PQ)(k_1, \dots, k_n) = \sum_{\substack{(l_1,\dots,l_n),(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n\\ l_i+m_i=k_i}} P_{l_1,\dots,l_n} Q_{m_1,\dots,m_n}. \tag{3.80}$$

3.40.
Dans $A[X_1, \dots, X_n]$, la multiplication n'est pas la multiplication de fonctions $\mathbb{N}^n \to \mathbb{K}$, parce que le but est d'obtenir la multiplication usuelle au niveau des évaluations.

Définition 3.41.
*Si P est un polynôme de n variables sur A, et si $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$, **l'évaluation** de P sur $(x_1, \dots, x_n)$ est*

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} P_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}. \tag{3.81}$$

Notez que la somme, bien que sur $\mathbb{N}^n$, est une somme finie.

3.42.
Comme dans le cas des polynômes d'une seule variable, les X_i dans la notation $A[X_1, \dots, X_n]$ sont à prendre à la légère. L'anneau des polynômes de n variables sur A aurait mieux fait d'être noté par exemple par $\mathcal{P}_n(A)$.

Le fait est que nous avons les polynômes élémentaires définis par

$$X_1(k_1, \dots, k_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (k_1, \dots, k_n) = (1, 0 \dots, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.82}$$

et que l'anneau des polynômes peut être vu comme A (les polynômes constants) étendus par les X_i.

Quoi qu'il en soit, les X_i dans la notation $A[X_1, \dots, X_n]$ sont des indices muets. L'anneau $A[X_1, \dots, X_n]$ est exactement le même que $A[T_1, \dots, T_n]$.

3.4.1 Divisibilité et classes d'association

DivisibiliteAnneauDefIntegre

Définition 3.43.
*On dit de deux éléments $a, b \in A$ qu'ils sont **associés** si il existe un inversible $u \in A$ tel que $a = ub$.*

*La **classe d'association** d'un élément $a \in A$ est l'ensemble des éléments qui lui sont associés.*

LemRmVTRq

Lemme 3.44.
Si A est un anneau intègre et si $a, b \in A$ sont deux éléments vérifiant $a \mid b$ et $b \mid a$, alors ils sont associés, c'est-à-dire qu'il existe un inversible $u \in A$ tel que $a = ub$.

Démonstration. Les hypothèses à propos de la divisibilité nous indiquent que $a = xb$ et $b = ya$ pour certains $x, y \in A$. Alors,

$$b(1 - yx) = 0. \tag{3.83}$$

Étant donné que A est intègre, cela montre que $b = 0$ ou $1 - yx = 0$. Si $b = 0$ nous avons immédiatement $a = 0$ et le lemme est prouvé. Si au contraire $yx = 1$, c'est que y et x sont inversibles et inverses l'un de l'autre. □

Exemple 3.45.
Dans $\mathbb{Z}[i]$, les inversibles sont ± 1 et $\pm i$. Donc les éléments associés à z sont z, $-z$, iz et $-iz$.

Notons au passage que la notion de divisibilité dans $\mathbb{Z}[i]$ n'est pas immédiatement intuitive. En effet bien que 7 ne soit pas divisible par 2 (ni dans $\mathbb{Z}$ ni dans $\mathbb{Z}[i]$), le nombre $7 + 6i$ est divisible par $2 + i$ dans $\mathbb{Z}[i]$. En effet :

$$(2 + i)(4 + i) = 7 + 6i. \tag{3.84}$$

△

Exemple 3.46.
Si $\mathbb{K}$ est un corps, l'élément XY de $\mathbb{K}[X, Y]$ n'est pas premier parce que $XY \mid X^2Y^2$ alors que XY ne divise ni X^2 ni Y^2. △

LEMooLXPSooYjULCJ

Lemme 3.47 ([1])**.**
Si a et b sont associés, alors $(a) = (b)$.

Démonstration. Vu que a et b sont associés, il existe un inversible u tel que $a = ub$ et $b = va$ (en posant $v = u^{-1}$). Si $x \in (a)$, alors il existe $\alpha, \beta \in A$ tels que $x = \alpha a \beta = \alpha u b \beta \in AbA = (b)$. Donc $(a) \subset (b)$. L'inclusion dans l'autre sens se fait de la même manière. □

3.4.2 PGCD et PPCM

Pour le théorème de Bézout et autres opérations avec des modulo, voir le thème 3. Le pgcd et le ppcm sont définis en 1.105.

LEMooGWKMooLEepxz

Lemme 3.48.
Soient A un anneau intègre et $S \subset A$. Si δ est un PGCD de S, alors l'ensemble des PGCD de S est la classe d'association[11] de δ.

De la même façon si μ est un PPCM de S, alors l'ensemble des PPCM de S est la classe d'association de μ.

[11] Éléments associés, définition 3.43.

Démonstration. Soient δ un PGCD de S et u un inversible dans A. Si $x \in S$ nous avons $\delta \mid x$ et donc $x = a\delta$. Par conséquent $x = au^{-1}u\delta$ et donc $u\delta$ divise x. De la même manière, si d divise x pour tout $x \in S$, alors d divise δ et donc $\delta = ad$ et $u\delta = aud$, ce qui signifie que d divise $u\delta$.

Dans l'autre sens nous devons prouver que si δ' est un autre PGCD de S, alors il existe un inversible $u \in A$ tel que $\delta' = u\delta$. Comme δ' divise x pour tout $x \in S$, nous avons $\delta' \mid \delta$, et symétriquement nous trouvons $\delta \mid \delta'$. Par conséquent (lemme 3.44), il existe un inversible u tel que $\delta = u\delta'$.

Le même type de raisonnement tient pour le PPCM. □

Si δ est un PGCD de S, nous dirons *par abus de langage* que δ est *le* PGCD de S, gardant en tête qu'en réalité toute sa classe d'association est PGCD. Nous noterons aussi, toujours par abus que $\delta = \text{pgcd}(S)$.

Remarque 3.49.
La classe d'association d'un élément n'est pas toujours très grande. Les inversibles dans $\mathbb{Z}$ étant seulement ± 1, nous pouvons obtenir l'unicité du PGCD et du PPCM en imposant qu'ils soient positifs.

Pour les polynômes, nous obtenons l'unicité en demandant que le PGCD soit unitaire.

Dans les cas pratiques, il y a donc en réalité peu d'ambiguïté à parler du PGCD ou du PPCM d'un ensemble.

3.4.3 pgcd, ppcm dans un anneau principal

Juste pour ne pas l'oublier, un anneau principal est toujours commutatif.

PROPooPZXNooNpVZCm

Proposition 3.50 ([62, 1])**.**
Soit un anneau principal[12] *A. Soit une partie $S \subset A$ d'éléments non nuls. Alors :* ITEMooPTAGooXNHQut

(1) S admet un pgcd, ITEMooHCZAooNkFHqc

(2) S admet un ppcm, ITEMooMJPXooDadqdP

(3) L'élément $\delta \in A$ est un pgcd de S si et seulement si il engendre

$$J = \bigcup_{\alpha \text{ fini dans } S} \sum_{s \in \alpha} sA. \tag{3.85}$$

Démonstration. En ce qui concerne l'existence, nous savons que tout idéal est principal et admet donc un générateur. Les parties I et J de la proposition 1.324 sont des idéaux principaux et admettent donc des générateurs qui sont dont respectivement ppcm et pgcd de S. Les parties (1) et (2) sont prouvées.

Il reste à prouver (3). Le sens réciproque est déjà dans 1.324. Nous supposons donc que $\delta \in \text{pgcd}(S)$ et nous prouvons que $(\delta) = J$.

Vu que J est un idéal, il admet un générateur d, qui est également un pgcd de S. Les éléments d et δ sont donc associés par le lemme 3.48. Donc $(d) = (\delta)$ par 3.47. Et au final, $(\delta) = (d) = J$. □

Pour rappel, la notation (a) représente l'idéal engendré par a, c'est-à-dire

$$(a) = \{ax \text{ tel que } x \in A\} = aA. \tag{3.86}$$

3.4.4 Anneaux intègres et corps

Le fait d'être intègre pour un anneau n'assure pas le fait d'être un corps. Nous avons cependant ce résultat pour les anneaux finis.

PropanfinintimpCorp

Proposition 3.51.
Un anneau fini intègre est un corps.

Démonstration. Soit A un tel anneau. Soit $a \neq 0$. Les applications

$$l_a : x \mapsto ax \tag{3.87a}$$
$$r_a : x \mapsto xa \tag{3.87b}$$

sont injectives. En tant que applications injectives entre ensembles finis, elles sont surjectives. Il existe donc b et c tels que $1 = ba = ac$. Nous trouvons que b et c sont égaux parce que [13]

$$b = b(ac) = (ba)c = c. \tag{3.88}$$

[12] Définition 1.349.

[13] Il faut être un peu souple avec les notations communément employées dans les ouvrages mathématiques, et que nous reprenons telles quelles. Dans l'équation qui suit, $b(ac)$ est le produit de b par l'élément ac, et non quelque chose comme le produit de b avec l'idéal (ac) par exemple.

Par conséquent b est un inverse de a. □

PropzhFgNJ

Proposition 3.52.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) n est premier.

(2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau intègre.

(3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.

Démonstration. L'équivalence entre les deux premiers points est le contenu du corolaire 1.411. Le fait que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps lorsque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre est la proposition 3.51. Le fait que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit intègre lorsque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps est une propriété générale des corps : ce sont en particulier des anneaux intègres (lemme 1.336). □

3.5 Anneau factoriel

DEFooVCATooPJGWKq

Définition 3.53 (Anneau factoriel)**.**
*Un anneau commutatif A est **factoriel** si il vérifie les propriétés suivantes.*

(1) L'anneau A est intègre[14]*.*

(2) Si $a \in A$ est non nul et non inversible, alors il admet une décomposition en facteurs irréductibles : $a = p_1 \dots p_k$ où les p_i sont irréductibles[15]*.*

ITEMooKVDBooTASwVO

(3) Si $a = q_1 \dots q_m$ est une autre décomposition de a en irréductibles, alors $m = k$ et il existe une permutation[16] *$\sigma \in S_k$ telle que p_i et $q_{\sigma(i)}$ soient associés*[17]*.*

Un anneau factoriel permet de caractériser le pgcd et le ppcm de nombres.

LEMooLVKMooSLuzao

Lemme 3.54 ([130])**.**
Soit un anneau factoriel A et un élément irréductible $p \in A$. Si $p|xy$, alors p divise x ou y ou les deux.

Démonstration. Comme nous sommes dans un anneau factoriel, nous pouvons écrire q, x et y comme produits d'irréductibles, et profiter de la plus ou moins unicité de ces décompositions (la propriété 3.53(3)). Nous notons $q = q_1 \dots q_k$, $x = x_1 \dots x_m$ et $y = y_1 \dots y_l$. L'égalité $pq = xy$ devient :

$$pq_1 \dots q_k = x_1 \dots x_m y_1 \dots y_l. \tag{3.89}$$

Il existe un des x_j ou y_j qui est associé à p. Fixons un i et disons que c'est x_i (si c'est un des y_j, adaptez) : il existe un inversible u tel que $x_i = pu$. Nous avons alors[18]

$$x = pux_1 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_m. \tag{3.90}$$

Donc p divise x et fin de l'histoire. □

PROPooOQSXooYidPQv

Proposition 3.55 ([130])**.**
Dans un anneau factoriel, tout élément irréductible est premier[19]*.*

Démonstration. Soit un anneau factoriel A et un élément irréductible p dans A. Nous devons prouver qu'il est premier.

(1) **p est non nul** Si $p = 0$, nous avons $p = 0 \times 0$. Comme 0 n'est pas inversible (un anneau factoriel est par définition intègre), p serait un produit de deux non inversibles.

(2) **Non inversible** L'élément p est non inversible parce que c'est dans la définition d'un élément irréductible.

(3) **Si $p \mid xy$** Si p divise xy, alors il divise x ou y ; c'est le lemme 3.54.

[14] Anneau intègre, définition 1.335.
[15] Élément irréductible, définition 1.327.
[16] Définition 1.269.
[17] Définition 3.43.
[18] Le fait que A soit commutatif est utilisé partout.
[19] Élément premier, définition 1.326.

□
LEMooGKOSooRKtfDJ

Lemme 3.56 ([1]).
Si A est un anneau factoriel, et si p est irréductible dans A, alors :

(1) L'idéal pA est premier.

(2) L'anneau A/pA est intègre.

Démonstration. En deux parties.

(1) **pA est premier** D'abord pA est strictement inclus dans A parce que p n'étant pas inversible, l'élément 1 n'est pas dans pA.

Soient $a, b \in A$ tels que $ab \in pA$. Cela signifie qu'il existe $x \in A$ tel que $px = ab$, ou encore que p divise ab. Le lemme 3.54 dit alors que p divise a ou b. Supposons pour fixer les idées que $p \mid a$. Il existe y tel que $a = py \in pA$.

(2) **L'anneau A/pA est intègre** C'est la proposition 1.405.

□
PROPooOXQMooVEzlyG

Proposition 3.57.
Soit une famille $\{a_n\}$ d'éléments de A qui se décomposent en irréductibles comme

$$a_i = \prod_k p_k^{\alpha_{k,i}}. \tag{3.91}$$

Alors

$$\text{pgcd}\{a_n\} = \prod_k p_k^{\min_i\{\alpha_{k,i}\}}. \tag{3.92}$$

De plus le PGCD est :

(1) Un multiple de tous les diviseurs communs des a_i.

(2) Unique pour cette propriété à multiple près par un inversible[20].

De la même manière,

$$\text{ppcm}\{a_n\} = \prod_k p_k^{\max_i\{\alpha_{k,i}\}}. \tag{3.93}$$

Un anneau factoriel a une relation de préordre partiel donnée par $a < b$ si a divise b. En termes d'idéaux, cela donne l'ordre inverse de celui de l'inclusion[21] : $a < b$ si et seulement si $(b) \subset (a)$.
EXooCWJUooCDJqkr

Exemple 3.58.
L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ n'est pas factoriel parce que 4 a au moins deux décompositions distinctes en irréductibles :

$$4 = 2 \cdot 2, \tag{3.94}$$

et

$$4 = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}). \tag{3.95}$$

△

Nous allons voir dans l'exemple 3.76 que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est factoriel parce qu'il sera euclidien.

3.5.1 Autour du théorème de Bézout

Rappel de notations : si A est un anneau et si $p \in A$, nous notons (p) l'idéal engendré[22] par p.
PROPooXQKMooWJlEFq

Proposition 3.59 (Bézout dans un anneau principal[1, 131]).
Soit un anneau principal A. Soient $a_1, \ldots, a_n \in A$ et $\delta \in \text{pgcd}(a_1, \ldots, a_n)$. Alors il existe $u_1, \ldots, u_n \in A$ tels que

$$a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = \delta \tag{3.96}$$

[20] Soyez prudent avec cette affirmation : je n'en n'ai pas de démonstrations sous la main et ne suis pas certain que ce soit vrai.
[21] Voir proposition 3.4.
[22] Définition 1.319 et caractérisation 1.320.

Démonstration. Soit $\delta \in \text{pgcd}(a_1, \ldots, a_n)$. Nous utilisons la proposition 3.50 pour la partie $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dans notre cas, nous savons que δ engendre $J = a_1A + \ldots + a_nA$. En particulier $\delta \in a_1A + \ldots + a_nA$ et donc il existe $u_1, \ldots, u_n \in A$ tels que $\delta = u_1a_1 + \ldots + u_na_n$[23]. □

Le lemme de Gauss est une application immédiate du théorème de Bézout. Il y aura aussi un lemme de Gauss à propos de polynômes (lemme 6.51), et une généralisation directe au théorème de Gauss, théorème 6.50.

LemSdnZNX

Lemme 3.60 (Lemme de Gauss dans un anneau principal[132])**.**
Soit A un anneau principal et $a, b, c \in A$ tels que a divise bc. Si a est premier avec c, alors a divise b.

Démonstration. Comme a est premier avec c, nous avons $\text{pgcd}(a, c) = 1$ et Bézout (1.358) nous donne donc $s, t \in A$ tels que $sa + tc = 1$. En multipliant par b,

$$sab + tbc = b. \tag{3.97}$$

Mais les deux termes du membre de gauche sont multiples de a parce que a divise bc. Par conséquent b est somme de deux multiples de a et donc est multiple de a. □

LEMooQJGIooEtVnyj

Lemme 3.61 ([62])**.**
Soit un anneau principal A. Soient $a, b, c \in A$ tels que

(1) $\text{pgcd}(a, b) = 1$

(2) $\text{pgcd}(a, c) = 1$.

Alors $\text{pgcd}(a, bc) = 1$.

Démonstration. Le théorème de Bézout 3.59 donne des éléments $u, v, x, y \in A$ tels que $ua + vb = 1$ et $xa + yc = 1$. En multipliant ces équations l'une avec l'autre,

$$(ua + vb)(xa + yc) = 1. \tag{3.98}$$

En développant, nous trouvons

$$(uax + uc + vbx)a + (vy)bc = 1. \tag{3.99}$$

Donc le théorème de Bézout (dans l'autre sens) nous indique que $\text{pgcd}(a, bc) = 1$. □

PROPooYTMYooEYxuQc

Proposition 3.62 ([133, 77])**.**
Soient un anneau principal[24] *A ainsi que $a, b \in A$.*

(1) Nous avons $\delta \in \text{pgcd}(a, b)$ si et seulement si $(a) + (b) = (\delta)$.

(2) Nous avons $\mu \in \text{ppcm}(a, b)$ si et seulement si $(a) \cap (b) = (\mu)$.

Démonstration. En plusieurs parties. On commence par le pgcd.

(1) **Si $\sigma \in \text{pgcd}(a, b)$** Vu que $\delta \in \text{pgcd}(a, b)$, il existe $a_1, b_1 \in A$ tels que $a = \delta a_1$ et $b = \delta b_1$. Un élément général de $(a) + (b)$ s'écrit $ax + by$, c'est-à-dire

$$ax + by = \delta a_1 x + \delta b_1 y = \delta(a_1 x + b_1 y) \in (\delta). \tag{3.100}$$

Cela prouve que $(a) + (b) \subset (\delta)$.

Pour l'autre inclusion, nous faisons appel à 3.59 disant qu'il existe $u, v \in A$ tels que $au_1 + bu_2 = \delta$. Cela montre que $\delta \in (a) + (b)$ et donc que $(\delta) \subset (a) + (b)$.

(2) **Si $(a) + (b) = (\delta)$** Nous supposons que $(a) + (b) = (\delta)$. Nous devons montrer qu'alors $\delta \in \text{pgcd}(a, b)$. Vu que a et b sont dans $(a) + (b) = (\delta)$ il existe x, y tels que $a = \delta x$ et $b = \delta y$. Donc δ divise a et b.

Supposons que d divise également a et b. Nous avons $a = da_1$ et $b = db_1$. Tout élément de $(a) + (b)$ s'écrit $ra + sb$, c'est-à-dire, en utilisant le fait que A est commutatif :

$$ra + sb = rda_1 + rdb_1 = d(ra_1 + rb_1). \tag{3.101}$$

Donc d divise tout élément de $(a) + (b)$. En particulier $d \mid \delta$.

[23] Je rappelle que A est commutatif.
[24] Définition 1.349.

Et on continue avec le ppcm.

(1) **Si $(a)\cap(b)=(\mu)$** Vu que μ est dans (a), l'élément μ est multiple de a. Et idem pour b. Donc μ est un multiple commun de a et b.

Supposons que μ soit également un multiple commun de a et b. Nous avons alors $m\in(a)\cap(b)=(\mu)$, c'est-à-dire que $m\mid\mu$. Donc on a bien $\mu\in\text{ppcm}(a,b)$.

(2) **Si $\mu\in\text{ppcm}(a,b)$** Nous prouvons que $(a)\cap(b)=(\mu)$. Soit $x\in(a)\cap(b)$. Nous avons $x=aa_1$ et $x=bb_1$; donc x est multiple de a et de b. Vu que μ est un ppcm, nous avons $\mu\mid x$ et donc $x\in(\mu)$, ce qui signifie $(a)\cap(b)\subset(\mu)$.

Dans l'autre sens, vu que μ divise a et b nous avons $\mu\in(a)\cap(b)$ et donc $(\mu)\subset(a)\cap(b)$.

□

3.5.2 Théorème chinois

ThofPXwiM

Théorème 3.63 (Théorème des restes chinois[134])**.**
Soit un anneau principal A ainsi que des éléments $a_1,\dots,a_r\in A\setminus\{0\}$ deux à deux premiers entre eux. Nous notons a le produit $a=a_1\dots a_r$.

ITEMooWBSWooGWjnNx

(1) Il existe une unique application

$$f\colon A/(a)\to A/(a_1)\times\dots\times A/(a_r) \tag{3.102}$$

telle que

$$f([x]_a)=\big([x]_{a_1},\dots,[x]_{a_r}\big) \tag{3.103}$$

pour tout $x\in A$.

ITEMooANYPooGPgEQc

(2) Cette application f est un isomorphisme d'anneaux.

ITEMooTUOKooHcSwTD

(3) Il existe $u_1,\dots,u_r\in A$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r}u_i\frac{a}{a_i}=1. \tag{3.104}$$

Notez ici que a_i n'est pas spécialement inversible, mais a étant le produit de tous les a_i, ça va.

ITEMooGXOEooUdKmzU

(4) Si des $u_i\in A$ vérifient $\sum_{i=1}^{r}u_ia/a_i=1$ alors la réciproque

$$f^{-1}\colon A/(a_1)\times\dots\times A/(a_r)\to A/(a) \tag{3.105}$$

vérifie

$$f^{-1}\big([x_1]_{a_1},\dots,[x_r]_{a_r}\big)=\sum_{i=1}^{r}[x_iu_i\frac{a}{a_i}] \tag{3.106}$$

pour tout $x_1,\dots,x_r\in A$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Pour (1) et (2)** Vu que les a_i sont premiers entre eux, nous avons $a=a_1\dots a_r\in\text{ppcm}(a_1,\dots,a_r)$ et donc $(a)=\bigcap_{i=1}^{r}(a_i)$ par 3.62. Pour l'existence, l'unicité et fait que ce soit un isomorphisme d'anneaux, le théorème 1.420 fait tout le boulot.

(2) **Pour (3)** Les a_i sont premiers entre eux. Montrons que les a/a_i aussi. Supposons pour cela que p divise tous les a/a_i. En particulier $p\mid a/a_1=a_2\dots a_r$. Vu que les $a_2,\dots,a_r$ sont premiers entre eux, le lemme de Gauss 3.60 dit qu'il existe un $k=2,\dots,r$ tel que $p\mid a_k$. Mais p divise aussi a/a_k. Donc il existe $l\neq k$ tel que $p\mid a_l$. L'élément p est un diviseur commun de a_k et a_l. Pas possible parce que les a_i sont premiers deux à deux.

Nous avons $1\in\text{pgcd}(a_1,\dots,a_r)$ et donc Bézout 3.59 dit qu'il existe des u_i tels que

$$\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{a}{a_i}=1. \tag{3.107}$$

EQooMBGBooKoGKwJ

(3) **Pour (4)** Lorsque nous caculons

$$f\big(\sum_{i=1}^{r}[x_iu_ia/a_i]\big), \tag{3.108}$$

nous avons un vecteur d'éléments de la forme $[\sum_{i=1}^{r}x_iu_i\frac{a}{a_i}]_{a_k}$. En vertu de (1.594), tous les termes avec $i\neq k$ sont nuls et donc

$$f\big(\sum_{i=1}^{r}[x_iu_ia/a_i]\big)=\big([x_1u_1\frac{a}{a_1}]_{a_1},\dots,[x_ru_r\frac{a}{a_r}]_{a_r}\big). \tag{3.109}$$

EQooZBYVooAoUnfM

Par ailleurs nous prenons la classe par rapport à (a_k) des deux côtés de (3.107). Comme précédemment tous les termes $i\neq k$ sont nuls et il reste

$$[u_ka/a_k]_{a_k}=[1]_{a_k}. \tag{3.110}$$

Nous avons donc

$$[x_ku_k\frac{a}{a_k}]=[x_k]_{a_k}\underbrace{[u_k\frac{a}{a_k}]_{a_k}}_{=[1]_{a_k}}=[x_k]_{a_k}. \tag{3.111}$$

En remettant dans (3.109) nous trouvons ce qu'il faut :

$$f\big(\sum_{i=1}^{r}[x_iu_ia/a_i]\big)=\big([x_1]_{a_1},\dots,[x_k]_{a_k}\big). \tag{3.112}$$

□

3.5.3 Idéal premier

PROPooZICGooNmblhl

Proposition 3.64 ([135, 1], thème 6)**.**
Soit un anneau principal A et un élément $p\neq 0$ dans A. Nous avons équivalence de :

ITEMooBTEAooWlFUTX

(1) (p) est un idéal premier,

ITEMooKQRMooBNPDMX

(2) p est un élément premier,

ITEMooZYYJooCWiBhL

(3) p est un élément irréductible,

ITEMooHPAIooYoQzqD

(4) (p) est un idéal maximum propre[25].

Démonstration. En plusieurs implications.

(1) **(1) implique (2)** En plusieurs points.

- La condition $p\neq 0$ est dans les hypothèses de la proposition.
- Si p était inversible, nous aurions $(p)=A$ et donc pas que (p) est un idéal premier.
- Soient $a,b\in A$ tels que $p\mid ab$. En particulier, $(ab)\in(p)$. Mais comme (p) est un idéal premier, cela implique soit $a\in(p)$ soit $b\in(p)$. Donc soit p divise a soit p divise b.

(2) **(2) implique (3)** Un anneau principal est intègre ; c'est dans la définition 1.349. Dans un anneau intègre, tout élément premier est irréductible, c'est la proposition 1.354.

(3) **(3) implique (4)** Soit un idéal I contenant (p). Puisque A est principal, I est engendré par un seul élément ; soit $I=(a)$. Vu que $p\in I$, l'élément a divise p. Mais comme p est un élément premier, $a\mid p$ implique $a=p$ ou $a=1$. Dans le premier cas, $I=(a)=(p)$, et dans le second cas, $I=(a)=(1)=A$. Donc (p) est bien un idéal maximum.

De plus l'idéal (p) est propre. En effet avoir $(p)=A$ dirait en particulier que $1\in(p)$, c'est-à-dire qu'il existe $x\in A$ tel que $xp=1$. Or p étant irréductible, il est non inversible.

(4) **(4) implique (1)** C'est la proposition 1.405(3).

□

Un exemple d'élément premier non irréductible est $[4]_6$ dans l'anneau non principal $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Voir 3.74 et le lemme 3.75.

[25] Ce « propre » n'est pas dans l'énoncé sur Wikipédia. Je ne comprends pas pourquoi, et j'ai posé la question sur la page de discussion.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Idéal_premier

3.5.4 Anneau noethérien

DEFooPWMHooCnrQuJ

Définition 3.65.
Un anneau est dit ***noethérien*** *si toute suite croissante d'idéaux est stationnaire (à partir d'un certain rang).*

Montrer que tout anneau principal est noethérien est le premier pas pour montrer que tout anneau principal est factoriel.

LEMooHQPVooTfkhRV

Lemme 3.66.
Tout anneau principal[26] *est noethérien.*

Démonstration. Soit (J_n) une suite croissante d'idéaux et J la réunion. L'ensemble J est encore un idéal parce que les J_i sont emboités. Étant donné que l'idéal est principal nous pouvons prendre $a \in J$ tel que $J = (a)$. Il existe N tel que $a \in J_N$. Alors pour tout $n \geqslant N$ nous avons

$$J \subset J_N \subset J_n \subset J. \tag{3.113}$$

La première inclusion est le fait que $J = (a)$ et $a \in J_N$. La seconde est la croissance des idéaux et la troisième est le fait que J est une union. Par conséquent pour tout $n \geqslant N$ nous avons $J_N = J_n = J$. La suite est par conséquent stationnaire. □

Exemple 3.67.
Il y a moyen d'avoir un anneau noetherien non principal. C'est le cas de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ dont nous parlerons dans 3.75. △

THOooANCAooBChmwp

Théorème 3.68 ([136, 62])**.**
Tout anneau principal est factoriel.

Démonstration. Soit un anneau principal A. Nous devons prouver les trois points de la définition 3.53. D'abord A est intègre parce que ça fait partie de la définition 1.349 d'un anneau principal. Le gros morceau est l'existence et l'unicité d'une décomposition en irréductibles.

mini lemme

Nous prouvons que si a est ni nul ni inversible, il est divisible par un irréductible.

Soit $a \in A$ que nous supposons être ni nul ni inversible. L'idéal aA ne contient pas tout A parce que a n'est pas inversible ; par le théorème de Krull 1.402 il existe un idéal maximal M contenant aA. Tous les idéaux étant principaux dans A, l'idéal M est principal.

Par définition d'idéal principal, il existe $p \in A$ tel que $M = pA$. Résumé :

$$a \in aA \subsetneq M = pA. \tag{3.114}$$

Comme l'idéal pA est maximal, la proposition 1.337 dit que p est irréductible. Et donc $p \mid a$ avec p est irréductible.

Existence

Nous définissons des suites (a_n) et (p_n) par récurrence. D'abord $a_0 = a$, et en suite, si a_n est défini nous définissons a_{n+1} et p_{n+1} de la façon suivante.

(1) Si a_n est inversible, nous nous arrêtons et la suite est finie.

(2) Si a_n n'est pas inversible, nous définissons a_{n+1} et p_{n+1} par la relation donnée par le mini-lemme :

$$a_n = p_{n+1}a_{n+1} \tag{3.115}$$

avec p_{n+1} irréductible.

Pour tout n assez petit pour que la suite ne soit pas finie, nous avons

$$a = a_0 = p_1a_1 = p_1p_2a_2 = \ldots = p_1 \ldots p_na_n \tag{3.116}$$

où les p_i sont irréductibles.

Nous montrons à présent que la suite des (a_n) est finie. Considérons les idéaux $I_n = a_nA$, et montrons qu'ils sont croissants en montrant que a_{n+1} n'est pas dans I_n.

[26] Définition 1.349.

En effet supposons que $a_{n+1} \in I_n = a_n A$. Il existerait $k \in A$ tel que $a_n k = a_{n+1}$, c'est-à-dire $p_{n+1}a_{n+1}k = a_{n+1}$. Vu que l'anneau est intègre et que les a_i sont non nums, nous simplifions par a_{n+1} : $p_{n+1}k = 1$. Cela n'est pas possible parce que p_{n+1} n'est pas inversible. Bref, nous avons uns suite strictement croissante d'idéaux.

L'anneau A est principal et donc noetherien (lemme 3.66). Donc toute suite croissante d'idéaux est stationnaire. Oh mais ça c'est pas possible si la suite des (a_n) est infinie parce que nous venons de prouver qu'elle est toujours strictement croissante.

Bon. Ben c'est que la suite des (a_n) est finie. Il existe donc un N tel que a_N est inversible. Pour ce N nous avons

$$a = a_0 = p_1 a_1 = p_1 p_2 a_2 = \ldots = p_1 \ldots p_N a_N. \tag{3.117}$$

Il nous reste à prouver que $p_N a_N$ est irréductible.

D'abord $p_N a_N$ est non ivnersible parce que p_N n'est pas inversible et a_N est inversible. Ensuite supposons que $p_N a_N = st$ avec $s, t \in A$. Nous allons prouver qu'au moins s ou t est inversible. Nous avons

$$p_N = s(ta_N^{-1}). \tag{3.118}$$

Vu que p_N est irréductible, il n'est pas le produit de deux non-inversibles. Soit s est inversible (alors on a gagné), soit ta_N^{-1} est inversible, et alors t est inversible parce que a_N^{-1} est inversible.

Unicité

Soient des irréductibles $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_m$ tels que $a = p_1 \ldots p_k = q_1 \ldots q_m$. Nous utilisons le lemme 3.61 : si p_1 était premier avec tous chacun des q_j, il serait premier avec le produit, ce qui serait absurde parce que le produit est a et p_1 divise a. Bref, il y a un des q_j qui n'est pas premier avec p_1.

Nous considérons $\sigma_1 \in S_1$ tel que p_1 n'est pas premier avec $q_{\sigma_1(1)}$. Au passage, nous notons $q_k^{(1)} = q_{\sigma_1(k)}$. Soit un diviseur commun d non inversible entre p_1 et $q_1^{(1)}$. Nous avons des éléments u, v tels que

$$p_1 = du \quad q_1^{(1)} = dv. \tag{3.119}$$

Vu que p_1 et $q_1^{(1)}$ sont irréductibles, ils ne peuvent pas être produit de deux non inversibles. Donc u et v sont inversibles. Nous pouvons écrire $d = q_1^{(1)} v^{-1}$, et donc

$$p_1 = q_1^{(1)} u v^{-1}. \tag{3.120}$$

Nous récrivons $p_1 \ldots p_k = q_1 \ldots q_m$ avec ces valeurs :

$$dup_2 \ldots p_k = dvq_2^{(1)} \ldots q_m^{(1)}. \tag{3.121}$$

Nous simplifions par d et nous avons

$$(up_2)p_3 \ldots p_k = (vq_2^{(1)})q_3^{(1)} \ldots q_m^{(1)}. \tag{3.122}$$

Par récurrence nous construisons les σ_i et les $q_j^{(i)}$. □

PROPooPVFOooJvWRIh

Proposition 3.69.
Un corps est un anneau principal et un anneau factoriel.

Démonstration. Un anneau est principal quand :

- Commutatif
- intègre
- tous les idéaux sont principaux.

Un corps est toujours commutatif. Un corps est un anneau intègre par le lemme 1.336. Donc un corps, les seuls idéaux sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$. Le premier est principal parce que $0A = \{0\}$. Et le second est également principal parce que $\mathbb{K} = 1\mathbb{K}$.

Donc un corps est un anneau principal.

Le fait qu'un corps soit un anneau factoriel est maintenant le théorème 3.68. □

EXooYCTDooGXAjGC

Exemple 3.70 ($\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est ni factoriel ni principal)**.**
Puisque $(i\sqrt{5})^2 = -5$, les éléments de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ sont les éléments de $\mathbb{C}$ de la forme $a + bi\sqrt{5}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Nous définissons la **norme** sur $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ par[27]

$$\begin{aligned} N\colon \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] &\to \mathbb{N} \\ z &\mapsto z\bar{z}. \end{aligned} \tag{3.123}$$

Le fait que ce soit à valeurs dans $\mathbb{N}$ est un simple calcul :

$$N(x + iy\sqrt{5}) = (x + iy\sqrt{5})(x - iy\sqrt{5}) = x^2 + 5y^2. \tag{3.124}$$

De plus N est multiplicative : $N(z_1z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

Nous pouvons maintenant déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. Si α est inversible, alors il existe β tel que $\alpha\beta = 1$. Au niveau de la norme,

$$N(\alpha)N(\beta) = 1, \tag{3.125}$$

ce qui implique que $N(\alpha) = 1$. Or l'équation $x^2 + 5y^2 = 1$ dans $\mathbb{N}$ donne $y = 0$, $x = \pm 1$.

Au final, les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ sont ± 1.

L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est alors pas factoriel (définition 3.53) parce que

$$2 \times 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}). \tag{3.126}$$

Cela donne deux décompositions du nombre 6 en produit d'éléments non associés[28] (2 n'est associé qu'à 2 et -2) parce que les inversibles sont 1 et -1.

Le fait que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ne soit pas factoriel implique qu'il ne soit pas principal, théorème 3.68. △

3.6 Anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

SECooSWGKooEeOZTO

Nous allons donner quelques propriétés de cet anneau, et en particulier voir que dans cet anneau non intègre, la notion d'élément irréductible n'est pas très intéressante.

Voici pour commencer un calcul de la table de multiplication de $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Pour les multiples de (par exemple) $[4]_6$ nous écrivons

$$1 \times [4]_6 = [4_6] \tag{3.127}$$

et ensuite

$$2 \times [4]_6 = [8]_6 = [2]_6, \tag{3.128}$$

puis

$$3 \times [4]_6 = [2 + 4]_6 = [6]_6 = [0]_6, \tag{3.129}$$

et caetera. Le résultat est :

$\times$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[0]_6$	0	0	0	0	0	0
$[1]_6$	0	1	2	3	4	5
$[2]_6$	0	2	4	0	2	4
$[3]_6$	0	3	0	3	0	3
$[4]_6$	0	4	2	0	4	2
$[5]_6$	0	5	4	3	2	1

(3.130)

Pour ne pas alourdir, nous n'avons pas écrit $[x]_6$ partout au lieu de x.

3.71 (Inversibles)**.**
Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont ceux qui ont un $[1]_6$ dans leur table de multiplication. Ce sont donc

$$U(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) = \{[1]_6, [5]_6\}. \tag{3.131}$$

3.72 (Diviseurs de zéro)**.**
Les diviseurs de zéro sont ceux qui ont un $[0]_6$ dans leur table de multiplication, c'est-à-dire

$$\{[2]_6, [3]_6, [4]_6\}. \tag{3.132}$$

[27] C'est le carré de la norme usuelle, mais c'est l'usage dans le milieu.
[28] Définition 3.43.

3.73 (Irréductibles).
Les irréductibles sont ceux qui ne sont ni inversibles ni produit de deux éléments non inversibles. Les non inversibles sont :

$$\{[0]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6\}. \tag{3.133}$$

Ils sont candidats à être irréductibles. Les produits de ces éléments (on oublie les crochets) sont :

$$2 \times 2 = 4 \tag{3.134a}$$
$$2 \times 3 = 0 \tag{3.134b}$$
$$2 \times 4 = 2 \tag{3.134c}$$
$$3 \times 3 = 3 \tag{3.134d}$$
$$3 \times 4 = 0 \tag{3.134e}$$
$$4 \times 4 = 4. \tag{3.134f}$$

Donc $[0]_6$, $[2]_6$, $[3]_6$ et $[4]_6$ ne sont plus candidats à être irréductible. Bref, il ne reste aucun candidats.

L'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'a aucun élément irréductible.

NORMooAXOKooAQMXoB

3.74 (Éléments premiers).
Les éléments non nuls et non inversibles sont 2, 3 et 4.

(1) **Pour 2** L'élément $[2]_6$ divise 2, 4 et 0.

- Les (a, b) tels que $ab = 2$ sont : $(1, 2)$, $(2, 4)$ et $(5, 4)$. L'élément 2 divise donc toujours a ou b.
- Les (a, b) tels que $ab = 4$ sont : $(1, 4)$, $(2, 5)$ et $(4, 4)$. L'élément 2 divise donc toujours a ou b.
- Les (a, b) tels que $ab = 0$ sont : $(0, x)$, $(3, 2)$ et $(4, 3)$. L'élément 2 divise donc toujours a ou b. En particulier, $[2]_6$ divise $[0]_6$; c'est important.

Donc $[2]_6$ est un élément premier.

(2) **Pour 3** L'élément $[3]_6$ divise 3 et 0.

- Les (a, b) tels que $ab = 3$ sont : $(1, 3)$ et $(3, 5)$. L'élément 3 divise donc toujours a ou b.
- Les (a, b) tels que $ab = 0$ sont : $(0, x)$, $(3, 2)$ et $(4, 3)$. L'élément 3 divise donc toujours a ou b.

Donc $[3]_6$ est un élément premier. L'élément $[4]_6$ divise 4, 2 et 0.

- Les (a, b) tels que $ab = 4$ sont : $(1, 4)$, $(2, 5)$ et $(4, 4)$. L'élément 4 divise donc toujours a ou b.
- Les (a, b) tels que $ab = 2$ sont : $(1, 2)$, $(2, 4)$ et $(5, 4)$. L'élément 4 divise donc toujours a ou b.
- Les (a, b) tels que $ab = 0$ sont : $(0, x)$, $(3, 2)$ et $(4, 3)$. L'élément 4 divise donc toujours a ou b.

Donc $[4]_6$ est un élément premier.

Au final, les éléments premiers dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont

$$\{[2]_6, [3]_6, [4]_6\}. \tag{3.135}$$

Vous noterez que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ a des éléments premiers non irréductibles. Cela est un contre-exemple à la proposition 3.64 dans le cas d'un anneau non-intègre.

LEMooZSELooGOFEIz

Lemme 3.75 ([1]).
L'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est noetherien, mais ni intègre ni principal[29].

Démonstration. Comme c'est un anneau fini, toute suite croissante de quoi que ce soit devient stationnaire ; donc $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est noetherien.

Puisque $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ a des diviseurs de zéro, il n'est pas intègre. Et s'il n'est pas intègre, il n'est pas factoriel non plus. □

ExeDufyZI

Exemple 3.76.
Prouvons que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un anneau euclidien. Pour cela nous démontrons que

$$\begin{aligned} N\colon \mathbb{Z}[i\sqrt{2}] &\to \mathbb{N} \\ a + bi\sqrt{2} &\mapsto a^2 + 2b^2 \end{aligned} \tag{3.136}$$

EqOZUIooZGmHWl

[29] Toutes les définitions dans le thème 6.

est un stathme euclidien.

Soient $z = a + bi\sqrt{2}$, $t = a' + b'i\sqrt{2}$. Nous cherchons q et r tels que la division euclidienne s'écrive $z = qt + r$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tels que

$$\frac{z}{t} = \alpha + \beta i\sqrt{2}. \tag{3.137}$$

Nous désignons par $\alpha + \epsilon_1$ et $\beta + \epsilon_2$ les entiers les plus proches de α et β. Nous avons $|\epsilon_1|, |\epsilon_2| \leqslant \frac{1}{2}$. Nous posons alors naturellement

$$q = (\alpha + \epsilon_1) + (\beta + \epsilon_2)i\sqrt{2} \tag{3.138}$$

et nous calculons $r = z - qt$:

$$2b'\epsilon_2 - a'\epsilon_1 + i\sqrt{2}\big(\epsilon_1 b' - a'\epsilon_2\big). \tag{3.139}$$

Nous trouvons

$$N(r) = a'^2\epsilon_1^2 + 4b'^2\epsilon_2^2 + 2a'^2\epsilon_1^2 + 2b'^2\epsilon_2^2 \leqslant \frac{3}{4}a'^2 + \frac{3}{2}b'^2. \tag{3.140}$$

D'autre part $N(t) = a'^2 + 2b'^2$, et nous avons donc bien $N(r) < N(t)$.

En ce qui concerne la seconde propriété du stathme, un petit calcul montre que

$$N(zt) = (a^2 + 2b^2)(a'^2 + 2b'^2), \tag{3.141}$$

et tant que $t \neq 0$ nous avons bien $N(zt) > N(z)$. △

Notons en particulier que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est factoriel et principal.

ExluqIkE

Exemple 3.77 (Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$)**.**
Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont ± 1, donc deux éléments a et b sont associés (définition 3.43) si et seulement si $a = \pm b$.

De plus si p est irréductible[30], alors $-p$ est irréductible. Les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ arrivent donc par pairs d'éléments associés. Soit $\{p_i\}$ une sélection de un élément irréductible parmi chaque paire. Tout élément x de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ peut alors être écrit $x = \pm p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$. Cette écriture va être pratique pour comparer des décompositions en facteurs irréductibles d'éléments. △

Le lemme suivant fait en pratique partie de l'exemple 3.80, mais nous l'isolons pour plus de clarté[31].

LemTScCIv

Lemme 3.78.
Si a et b sont deux éléments premiers entre eux de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, et si il existe $y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $ab = y^3$, alors a et b sont des cubes (dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$).

Démonstration. D'après l'exemple 3.77 nous pouvons écrire

$$y = \pm p_1^{\sigma_1} \dots p_n^{\sigma_n} \tag{3.142a}$$
$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \tag{3.142b}$$
$$b = \pm p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n} \tag{3.142c}$$

où les p_i sont les irréductibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ « modulo ± 1 » au sens où la liste des irréductibles est $\{p_i\} \cup \{-p_i\}$ (union disjointe). Étant donné que a et b sont premiers entre eux, α_i et β_i ne peuvent pas être non nuls en même temps alors que leur somme doit faire $3\sigma_i$. Nous avons donc pour chaque i soit $\alpha_i = 3\sigma_i$ soit $\beta_i = 3\sigma_i$ (et bien entendu si $\sigma_i = 0$ alors $\alpha_i = \beta_i = 0$).

Étant donné que ± 1 sont également deux cubes, a et b sont bien des cubes.

Notons que nous avons utilisé de façon capitale le fait que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ était factoriel. □

3.6.1 Équations diophantiennes

ExZPVFooPpdKJc

Exemple 3.79.
L'équation diophantienne

$$x^2 = 3y^2 + 8 \tag{3.143}$$

n'a pas de solution. En effet si nous prenons l'équation modulo 3 nous obtenons

$$[x^2]_3 = [3y^2 + 8]_3 = [8]_3 = [2]_3. \tag{3.144}$$

Or dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, aucun carré n'est égal à deux : $0^2 = 0 \neq 2$, $1^2 = 1 \neq 2$ et $2^2 = 4 = 1 \neq 2$. △

[30] Définition 1.327

[31] Merci à Marvoir pour m'avoir souligné le manque.

ExmuQisZU

Exemple 3.80.
Résolvons l'équation diophantienne

$$x^2 + 2 = y^3. \tag{3.145}$$

Une première remarque est que x doit être impair. En effet si $x = 2k$, nous devons avoir y^3 pair. Mais un cube pair est divisible par 8. Donc $y^3 = 8l$ pour un certain l. L'équation devient $4k^2 + 2 = 8l$, c'est-à-dire $2k^2 + 1 = 4l$. Le membre de gauche est impair tandis que celui de droite est pair. Impossible.

Nous pouvons écrire l'équation sous la forme $x^2 + 2 = (x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})$. Et nous considérons $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ muni de son stathme N donné par (3.136).

L'élément $i\sqrt{2}$ est irréductible parce que $N(i\sqrt{2}) = 2$, et si nous avions $i\sqrt{2} = pq$, alors nous aurions $N(p)N(q) = 2$, ce qui n'est possible que si $N(p)$ ou $N(q)$ vaut 1.

Nous prouvons maintenant que les éléments $x + i\sqrt{2}$ et $x - i\sqrt{2}$ sont premiers entre eux. Supposons que d soit un diviseur commun ; alors il divise aussi la somme et la différence. Donc d divise à la fois $2x$ et $2i\sqrt{2}$.

Étant donné que $i\sqrt{2}$ est irréductible et que $2i\sqrt{2} = (-i\sqrt{2})^3$, les diviseurs de $2i\sqrt{2}$ sont les puissances de $(-i\sqrt{2})$. Alors nous devrions avoir $d = (i\sqrt{2})^\beta$ et donc

$$x = (i\sqrt{2})^\beta q \tag{3.146}$$

pour un certain $q \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. Dans ce cas nous avons $N(x) = 2^\beta N(q)$, mais nous avons déjà précisé que x ne pouvait pas être pair, donc $\beta = 0$ et nous avons $d = 1$.

Comme les nombres $x \pm i\sqrt{2}$ sont premiers entre eux et que leur produit doit être un cube, ils doivent être séparément des cubes (lemme 3.78). Nous devons donc résoudre séparément $x \pm i\sqrt{2} = y^3$.

Cherchons les x et y entiers tels que $x + i\sqrt{2} = y^3$. Si nous posons $z = a + bi\sqrt{2}$, il suffit de calculer z^3 :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.8, Release Date: 2012-01-20                         |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: var('a,b')
(a, b)
sage: z=a+I*sqrt(2)*b
sage: (z**3).expand()
3*I*sqrt(2)*a^2*b - 2*I*sqrt(2)*b^3 + a^3 - 6*a*b^2
```

En identifiant cela à $x + i\sqrt{2}$ nous trouvons le système

$$\begin{cases} x = a^3 - 6ab^2 & \text{(3.147a)} \\ 1 = 3a^2b - 2b^3 & \text{(3.147b)} \end{cases}$$

où, nous le rappelons, x, a et b sont des entiers. La seconde équation montre que b doit être inversible : $b(3a^2 - 2b^2) = 1$. Il y a donc les possibilités $b = \pm 1$. Pour $b = 1$ l'équation devient $3a^2 - 2 = 1$, c'est-à-dire $a = \pm 1$. Pour $b = -1$ l'équation devient $3a^2 - 2 = -1$, impossible. En conclusion les possibilités sont

$$(x, z) = (-5, 1 + i\sqrt{2}) \tag{3.148a}$$
$$(x, z) = (5, -1 + i\sqrt{2}) \tag{3.148b}$$
$$\tag{3.148c}$$

Le travail avec $x - i\sqrt{2}$ donne les mêmes résultats.

Les deux solutions de l'équation $x^2 + 2 = y^3$ sont alors $(5, 3)$ et $(-5, 3)$. △

3.6.2 Triplets pythagoriciens et équation de Fermat pour $n = 4$

Définition 3.81.
*Les solutions entières (positives) de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ sont appelés **triplets pythagoriciens**.*

Ils donnent toutes les possibilités de triangles rectangles dont les côtés ont des longueurs entières.

PROPooUWNPooDwsOtJ

Proposition 3.82 ([1]).
*Les éléments (x, y, z) d'un triplet pythagoricien sont premiers dans leur ensemble[32] si et seulement si ils sont premiers deux à deux. Dans ce cas nous disons que c'est une triplet **primitif***

[32] Définition 1.366.

Démonstration. Dans un sens si x, y, z sont premiers deux à deux, ils sont premiers dans leur ensemble.

Dans l'autre sens, si x, y, z sont premiers dans leur ensemble, nous montrons qu'ils sont premiers deux à deux. Supposons que x, y ne soient pas premiers entre eux. Soit p un facteur premier commun : $x = pk$, $y = pl$. Alors

$$p^2(k^2 + l^2) = z^2. \tag{3.149}$$

Donc p^2 divise z^2 et donc p divise z.

Exactement le même raisonnement tient si x, z ou y, z ont un facteur commun. □

LemTripletsPythagoriciensPrimitifs

Lemme 3.83.
Dans un triplet pythagoricien primitif (x, y, z), on a toujours z impair et :

- *soit x impair et y pair ;*
- *soit x pair et y impair.*

Démonstration. Remarquons que le fait d'imposer que le triplet soit primitif, interdit aux nombres x et y d'être pairs en même temps. En effet, si c'était le cas, alors x^2 et y^2 seraient aussi pairs, donc leur somme z^2 aussi, d'ou z serait pair et les trois nombres ne seraient pas premiers entre eux.

Nous montrons à présent que les nombres x et y ne sont pas tous les deux impairs. Par l'absurde, si $x = 2a + 1$, nous avons $x^2 = 4a^2 + 4a + 1 \in [1]_4$; de la même manière, $y^2 \in [1]_4$. On en déduit alors que $z^2 = x^2 + y^2 \in [2]_4$. Le nombre z^2 est donc pair, donc z est pair : disons $z = 2c$. Alors, $z^2 = 4c^2 \in [0]_4$. Comme les classes modulo 4 sont disjointes, nous aboutissons à une contradiction. □

PropXHMLooRnJKRi

Proposition 3.84 (Triplets pythagoriciens[137, 138])**.**
Un triplet $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ est solution de $x^2 + y^2 = z^2$ si et seulement si il existe $d \in \mathbb{N}$ et $u, v \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que

subeqLVHFooVgWsFx

$$\begin{cases} x = d(u^2 - v^2) & \text{(3.150a)} \\ y = 2duv & \text{(3.150b)} \\ z = d(u^2 + v^2) & \text{(3.150c)} \end{cases}$$

ou

SUBEQSooRQKBooCBsqYA

$$\begin{cases} x = 2duv & \text{(3.151a)} \\ y = d(u^2 - v^2) & \text{(3.151b)} \\ z = d(u^2 + v^2) & \text{(3.151c)} \end{cases}$$

La différence entre les deux est seulement d'inverser les rôles de x et y.

Démonstration. Montrons d'abord que les formules proposées sont bien des solutions ; nous vérifions (3.150) :

$$x^2 + y^2 = d^2(u^2 - v^2)^2 + 4d^2u^2v^2 = d^2(u^2 + v^2)^2, \tag{3.152}$$

qui correspond bien au z^2 proposé. Une vérification du même style fonctionne pour (3.151).

Réciproquement, supposons que (x, y, z) soit un triplet pythagoricien primitif. Sans perte de généralité[33], grâce au lemme 3.83, nous pouvons supposer que y est pair tandis que y et z seront impairs. Notons $y = 2k$, alors

$$y^2 = 4k^2 = (z - x)(z + x) = z^2 - x^2.$$

Plusieurs choses à dire sur cela.

- D'abord, $z - x$ et $z + x$ sont tous les deux pairs. On pose $z - x = 2a$ et $z + x = 2b$.
- Ensuite, on a $4k^2 = 4ab$, donc $k^2 = ab$.
- Enfin, a et b sont premiers entre eux. En effet, si d est un diviseur commun de a et de b, alors d divise $a + b = z$ et $a - b = x$. Sous cette même hypothèse, d^2 est aussi un diviseur de $ab = k^2$, donc aussi de y^2, et donc, d divise y. Or, comme le triplet pythagoricien $(x; y; z)$ est primitif, ce diviseur commun n'est autre que 1.

Supposons que p soit un diviseur premier de k. Alors p^2 est un diviseur de $k^2 = ab$. Comme a et b sont premiers entre eux, p^2 est soit un diviseur de a, soit un diviseur de b. En faisant cela pour tous les diviseurs premiers de k, on constate que a et b sont deux carrés d'entiers. On prend alors u et v tels que

$$u^2 = b \qquad \text{et} \qquad v^2 = a. \tag{3.153}$$

[33] En échangeant les rôles de x et y ici, nous obtenons à la fin la seconde forme des solutions.

Vérifions alors les égalités demandées :

$$u^2+v^2=b+a=\frac{1}{2}(z+x)+\frac{1}{2}(z-x)=z \tag{3.154}$$

$$u^2-v^2=b-a=\frac{1}{2}(z+x)-\frac{1}{2}(z-x)=x \tag{3.155}$$

$$2uv=2\sqrt{a}\sqrt{b}=2\sqrt{k^2}=2k=y. \tag{3.156}$$

□

Remarque 3.85.
Les solutions dans lesquelles x, y ou z sont nuls sont faciles à classer. La solution $(1,0,1)$ n'est pas dans les formes proposées. En effet elle ne peut pas être de la première forme : avoir $y=0$ demanderait qu'un nombre parmi d, u et v soit nul, ce qui est interdit. La solution $(1,0,1)$ ne peut pas non plus être de la seconde forme parce que x y est pair.

propFKKKooFYQcxE

Proposition 3.86 ([137])**.**
Les équations $x^4+y^4=z^2$ et $x^2+y^4=z^4$ n'ont pas de solution dans $(\mathbb{N}^*)^3$.

Démonstration. Si la première équation n'a pas de solution, alors la seconde n'en a pas non plus parce que z^4 est un carré. Nous nous concentrons donc sur l'équation $x^4+y^4=z^2$ et nous supposons qu'il existe au moins une solution dans $(\mathbb{N}^*)^3$. Nous en choisissons une (x,y,z) avec z minimum (les z dans différentes solutions étant dans $\mathbb{N}$, il en existe forcément un minimum[34]). Du coup, les trois nombres x, y et z sont premiers dans leur ensemble parce qu'une division par leur pgcd donnerait une nouvelle solution qui contredirait la minimalité de z.

Nous posons $x^4=\bar{x}^2$ et $y^4=\bar{y}^2$. Ils vérifient l'équation $\bar{x}^2+\bar{y}^2=z^2$ et par la proposition 3.84, il existe $u,v\in\mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que, sans perte de généralité[35], on ait

$$\begin{cases}\bar{x}=2uv & \text{(3.157a)}\\ \bar{y}=u^2-v^2 & \text{(3.157b)}\\ z=u^2+v^2. & \text{(3.157c)}\end{cases}$$

eqnFKKKooFYQcxE1 eqnFKKKooFYQcxE2

Si u est pair, alors v est impair (et inversement) parce que $\text{pgcd}(u,v)=1$ Si u est pair, alors $u=2a$ et $v=2b+1$, ce qui donne $\bar{y}=4a^2-4b^2-4b-1\in[-1]_4$. Or nous avons déjà vu qu'un carré est dans $[0]_4$ ou dans $[1]_4$. Il faut donc que u soit impair. Le lemme 3.83 implique alors que v soit pair.

De l'équation 3.157b, nous en déduisons que $v^2+\bar{y}=u^2$; de plus u^2, v^2 et $\bar{y}$ sont premiers dans leur ensemble : en effet, u et v sont premiers entre eux, et si l'un parmi u^2 et v^2 a un facteur commun avec $\bar{y}$, alors l'autre doit l'avoir aussi (dans une égalité $a+b=c$, si deux des nombres ont un diviseur commun, le troisième l'a aussi). Comme $\bar{y}=y^2$, le triplet (v,y,u) est un triplet pythagoricien primitif. Nous appliquons de nouveau la proposition 3.84, en se souvenant que v est pair : il existe donc deux nombres r et s premiers entre eux tels que

eqnFKKKooFYQcxE3

$$\begin{cases}v=2rs & \text{(3.158a)}\\ y=r^2-s^2 & \text{(3.158b)}\\ u=r^2+s^2. & \text{(3.158c)}\end{cases}$$

Avec cela, $\bar{x}=2uv=4rs(r^2+s^2)$. Remarquons que les trois nombres r, s et r^2+s^2 sont premiers entre eux dans leur ensemble ; or, comme $\bar{x}$ est un carré ces nombres doivent séparément être des carrés :

$$\begin{cases}r=\alpha^2 & \text{(3.159a)}\\ s=\beta^2 & \text{(3.159b)}\\ r^2+s^2=\gamma^2. & \text{(3.159c)}\end{cases}$$

En mettant les deux premiers dans la troisième équation, nous avons $\alpha^4+\beta^4=\gamma^2$. Donc $(\alpha^2,\beta^2,\gamma)$ est une solution. Nous allons montrer que $\gamma<z$, ce qui terminera la preuve, puisque z était supposé minimal. Nous avons :

$$\begin{aligned}z&=u^2+v^2 && \text{par 3.157c}\\ &=r^2+s^2+4r^2s^2 && \text{par 3.158}\\ &=\gamma^2+4r^2s^2\\ &>\gamma^2,\end{aligned}$$

[34] Voir quelque chose comme le lemme 1.236.
[35] En inversant les rôles de x et y au besoin.

et a fortiori $\gamma < z$. □

3.7 Polynômes à coefficients dans un anneau commutatif

LSECooXTMAooMBgHPN

Lemme 3.87.
Nous considérons un polynôme $P \in A[X]$, et le quotient $A[X]/(P)$. Pour tout polynôme $Q \in A[X]$ nous avons les égalités

$$Q(\bar{X}) = \overline{Q(X)} = \bar{Q}. \tag{3.160}$$

Démonstration. Si $Q = \sum_k a_k X^k$, alors par la linéarité de la prise de classes,

EQooXQRMooIPGFVM

$$\bar{Q} = \sum_k a_k \overline{X^k}. \tag{3.161}$$

Nous insistons sur le fait que cette égalité n'est rien d'autre que l'itération de la définition de la somme dans l'espace quotient : $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$ ainsi que du produit $k\bar{x} = \overline{kx}$ (définition 1.325). Toujours par définition du produit appliqué à l'élément $\bar{X}$ nous avons $(\bar{X})^2 = \overline{X^2}$; par récurrence $\overline{X^k} = \bar{X}^k$, et

$$\bar{Q} = \sum_k a_k \bar{X}^k = Q(\bar{X}). \tag{3.162}$$

Le fait que $\bar{Q} = \overline{Q(X)}$ n'est rien d'autre que le fait que dans $A[X]$ nous avons $Q = Q(X)$, comme expliqué dans le lemme 1.480. □

3.7.1 Monômes

3.88.
Les éléments de la forme λX^k avec $\lambda \in A$ et $k \in \mathbb{N}$ sont des **monômes**.

Nous allons aussi considérer

$$A_n[X] = \{P \in A[X] \text{ tel que } \deg(P) \leqslant n\}. \tag{3.163}$$

Cet ensemble est un sous-module libre.

3.7.2 Évaluation

Soit $P \in A[X]$. À priori, P n'est qu'une suite dans A indexée par $\mathbb{N}$.

Nous avons déjà défini son évaluation sur un élément $\alpha \in A$ dans la définition 1.476 :

$$P(\alpha) = \sum_k a_k \alpha^k. \tag{3.164}$$

Cette somme est toujours finie.

NORMooQFTJooLBcPxl

3.89.
L'ensemble $A[X]$ est une algèbre et donc un espace vectoriel. Il possède un unique élément nul qui est celui dont tous les coefficients sont nuls ; cela est immédiat par la construction en tant que suites presque nulles.

Il n'y a à priori pas équivalence entre le fait d'être un polynôme nul et le fait de s'évaluer à zéro sur tous les éléments de A. Cela sera discuté dans le théorème 6.110 et l'exemple 19.36.

DEFooRFBFooKCXQsv

Définition 3.90.
Soient un anneau A et un anneau B qui contient A (comme sous-anneau). Pour $\alpha \in B$ nous définissons $A[\alpha]_B$ comme étant l'intersection de tous les sous-anneaux de B contenant A.

Comme dit plus haut, nous nous permettons d'écrire $A[\alpha]$ sans préciser B lorsque ce dernier sera clair dans le contexte.

PROPooPMNSooOkHOxJ

Proposition 3.91.
Soient un anneau A et un anneau B qui contient A (comme sous-anneau). Pour tout $\alpha \in B$ nous avons

$$A[\alpha] = \{P(\alpha) \text{ tel que } P \in A[X]\} \tag{3.165}$$

où encore une fois, $P(\alpha)$ est calculé dans B ; le contexte est clair là-dessus.

Démonstration. Si A' est un sous-anneau de B contenant A et α, alors A' contient tous les $P(\alpha)$ avec $P \in A[X]$. Nous avons donc

$$\{P(\alpha) \text{ tel que } P \in A[X]\} \subset A[\alpha]. \tag{3.166}$$

Par ailleurs, $\{P(\alpha)$ tel que $P \in A[X]\}$ est un sous-anneau de B contenant A et α. Donc $A[\alpha]$ y est inclus. □

3.7.3 Polynômes sur un anneau intègre

ThoBUEDrJ

Théorème 3.92.
L'anneau A est intègre si et seulement si $A[X]$ est intègre.

Démonstration. Soient P et Q des éléments non nuls de $A[X]$. Puisque l'anneau A est intègre, nous avons

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \tag{3.167}$$

et le produit ne peut pas être nul. L'anneau $A[X]$ est donc intègre.

Si $A[X]$ est intègre, A est intègre parce qu'il peut être considéré comme sous-anneau de $A[X]$. □

3.93.
Si A n'est pas intègre, soient $\alpha, \beta \in A$ non nuls tels que $\alpha\beta = 0$. Le produit des polynômes $X \mapsto \alpha X$ et $X \mapsto \beta$ est $(\alpha X) \cdot (\beta) = 0$; le degré du produit n'est pas la somme des degrés.

Les personnes qui ont tout compris jusqu'ici remarqueront que la notation « $X \mapsto P(X)$ » n'est pas correcte parce que du point de vue que nous adoptons ici, un polynôme n'est pas une application.

Corolaire 3.94.
Si A est intègre, les inversibles de $A[X]$ sont les éléments inversibles de A.

Démonstration. Pour que Q soit inversible, il faut un P tel que $PQ = 1$. Mais l'anneau A étant intègre, les degrés s'additionnent. Par conséquent ils doivent être de degré zéro et il faut que $P, Q \in A$. Donc Q est un inversible de A. □

3.7.4 Division euclidienne

Le théorème suivant établit la **division euclidienne** dans $A[X]$ du polynôme P par un polynôme D.

ThodivEuclPsFexf

Théorème 3.95.
Soit $D \neq 0$ dans $A[X]$ de coefficient dominant inversible dans A. Pour tout $P \in A[X]$, il existe $Q, R \in A[X]$ tels que

$$P = QD + R \tag{3.168}$$

avec $\deg(R) < \deg(D)$.

Les polynômes Q et R sont déterminés de façon univoque par cette condition.

DefMPZooMmMymG

Définition 3.96.
*Le polynôme Q est le **quotient** et R est le **reste** de la division euclidienne de P par D. Si le reste de la division de P par D est nul on dit que D **divise** P et on note $D \mid P$. Autrement dit D divise P si il existe Q tel que $P = QD$.*[36]

3.97.
Le théorème 3.95 nous incite à utiliser le degré comme stathme euclidien sur $A[X]$ dès que A est un anneau intègre. Or cela ne fonctionne pas en général, parce que très peu de polynômes ont à priori un coefficient dominant inversible.

LEMooIDSKooQfkeKp

Lemme 3.98 (Thème 18)**.**
Si $\mathbb{K}$ est un corps[37]*, alors l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est euclidien et principal.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{K}$ est un corps, tous les éléments sont inversibles et le degré donne un stathme par le théorème 3.95. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est donc euclidien et par conséquent principal (proposition 1.350). □

Dans le théorème 6.43 nous donnerons une preuve directe du fait que $\mathbb{K}[X]$ est principal en montrant que tous ses idéaux sont principaux. Nous y démontrerons donc un peu moins pour un peu plus cher, mais avec le plaisir de ne pas devoir passer par un stathme.

[36] Ceci se rapproche tout naturellement des notions générales de divisibilité dans un anneau intègre, vues en sous-section 3.4.1.
[37] Définition 1.390.

DefDSFooZVbNAX

Définition 3.99 ([139]).
*Soit un anneau A. Deux polynômes P et Q dans $A[X]$ sont dits **étrangers** entre eux si 1 est un pgcd[38] de P et Q. Un ensemble de polynômes $(P_i)_{i\in I}$ est étranger **dans leur ensemble** si 1 est un* pgcd *des P_i.*

*Les polynômes P et Q sont **premiers entre eux** si les seuls diviseurs communs de P et Q sont les inversibles.*

Les notions de polynômes étrangers entre eux ou de polynômes premiers entre eux ne sont pas identiques, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.100 ([1]).
Soient dans $\mathbb{Z}[X]$ les polynômes $P(X) = 2X + 2$ et $Q(X) = 2X^2 + 2$. Le nombre 2 est diviseur commun et n'est pas un diviseur de 1. Donc 1 n'est pas un pgcd de P et Q. Ils ne sont pas étrangers.

Mais ils sont premiers entre eux parce qu'ils n'ont pas d'autres diviseurs communs que les inversibles (1 et -1). △

3.7.5 Polynôme primitif

DefContenuPolynome

Définition 3.101.
*Un **contenu** du polynôme $P = \sum_i a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ est un pgcd de ses coefficients : $c(P) = \text{pgcd}\left(\{a_i\}\right)$.*

NORooQITDooKsTMKm

3.102.
Quand il y a unicité du pgcd d'un ensemble, on peut parler du contenu au singulier.

Le contenu d'un polynôme sera surtout utilisé juste pour savoir si il est inversible ou non. Dans un anneau intègre, ça demande un peu d'abus de langage, mais comme le lemme 1.338 dit que si un pcgd est inversible, ils le sont tous, au moins discuter de l'inversibilité du contenu dans un anneau intègre a un sens et est bien défini.

DEFooDVOOooKaPZQC

Définition 3.103 (Polynôme primitif[140]).
Il existe deux notions de polynômes primitifs. Vu qu'il existe des anneaux unitaires qui sont des corps finis[39], il faut faire attention au contexte.

ITEMooCNHAooVfIYEW

*(1) Si A est un anneau unitaire, P est un **polynôme primitif** $c(P)$ est inversible[40].*

(2) Si $\mathbb{K}$ est un corps fini, un polynôme dans $\mathbb{K}[X]$ est primitif si il est le polynôme minimal d'un générateur du groupe commutatif du corps.

3.104.
Pour rappel, il y a plusieurs façons de périphraser le fait que les coefficients soient premiers entre eux. Nous pouvons dire …

(1) Le pgcd de ses coefficients est 1 parce que c'est la définition 1.364 pour avoir des nombres premiers entre eux.

(2) Le contenu de ses coefficients est 1. Parce que le contenu est précisément le pgcd, définition 3.101.

La notion de polynôme primitif au sens du pgcd est particulière aux polynômes à coefficients dans un anneau comme le montre le lemme suivant.

Lemme 3.105.
Si $\mathbb{K}$ est un corps, tout polynôme unitaire dans $\mathbb{K}[X]$ non nul est primitif au sens du pgcd.

Démonstration. Un polynôme unitaire a un 1 parmi ses coefficients, donc le pgcd est forcément 1. □

Lemme 3.106 ([141]).
Soit un anneau factoriel[41] A. Soient des polynômes primitifs P_1 et P_2 dans $A[X]$. Soient $a_1, a_2 \in A^*$ tels que

$$a_1 P_1 = a_2 P_2. \tag{3.169}$$

Alors

[38] Définition 1.105.
[39] Je pense à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, mais faites attention, j'ai pas vérifié. Écrivez-moi pour me dire si c'est un bon exemple.
[40] Pas mal d'auteurs disent que $c(P)$ soit être égal à 1. Mais en général ces auteurs se rétractent bien vite en disant que $c(P)$ n'est défini qu'à inversible près. Voir aussi 3.102.
[41] Définition 3.53. Je rappelle qu'un anneau factoriel est toujours commutatif.

(1) Les éléments a_1 et a_2 sont associés dans A.

(2) Les polynômes P_1 et P_2 sont associés dans $A[X]$.

Démonstration. Vu que les P_i sont primitifs, nous avons $c(a_iP_i) = u_ia_i$ où u_i est un inversible ($u_i = c(P_i)$). Les éléments u_1a_1 et u_2a_2 sont donc deux pgcd du même ensemble : les coefficients de a_1P_1 (qui sont les mêmes que ceux de a_2P_2). Le lemme 3.48 entre en jeu pour dire que u_1a_1 et u_2a_2 sont associés : il existe un inversible v tel que $u_1a_1 = vu_2a_2$. Au final, $a_1 = u_1^{-1}vu_2a_2$ et nous voyons que a_1 et a_2 sont associés.

Nous écrivons l'égalité $a_1P1 = a_2P_2$ avec la valeur trouvée de a_1 : $u_1^{-1}vu_2a_2P_1 = a_2P_2$. On voudrait simplifier par a_2 (surtout que A est commutatif), mais comme a_2 n'est pas spécialement inversible, il faut le justifier. L'anneau A est intègre ; donc l'anneau $A[X]$ l'est aussi (théorème 3.92). Et comme $A[X]$ est intègre, on peut faire la simplification.

Au final nous avons $u_1^{-1}vu_2P_1 = P_2$, et comme $u_1^{-1}vuy$ est inversible, P_1 et P_2 sont associés. □

LEMooHJECooTeELgN

Lemme 3.107 (de Gauss[141])**.**
Soit un anneau factoriel A. Soient $P, Q \in A[X]$.

ITEMooISPDooXdRywE

(1) Les polynômes P et Q sont primitifs si et seulement si le polynôme PQ est primitif.

ITEMooLWEEooLcDlfp

(2) Il existe un inversible $u \in A$ tel que $c(PQ) = uc(P)c(Q)$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) (1)⇒ Nous supposons que P et Q sont primitifs. Et, par l'absurde, nous supposons que PQ n'est pas primitif. Donc $c(PQ)$ n'est pas inversible dans A. Vu que A est factoriel, tout élément non inversible est un produit d'irréductibles ; c'est le cas de $c(PQ)$. Soit p un irréductible entrant dans la décomposition de $c(pQ)$.

Le lemme 3.56 dit que l'anneau $B = A/pA$ est intègre[42].

Considérons la surjection canonique $\pi\colon A \to B$ que nous prolongeons en un morphisme d'anneaux

$$\begin{aligned}\phi\colon A[X] &\to B[X]\\ \sum_i a_iX^i &\mapsto \sum_i \pi(a_i)X^i.\end{aligned} \tag{3.170}$$

Notons que p ne divise pas tous les coefficients de P. En effet, sinon $c(P)$ serait un multiple de p (proposition 3.57) et ne pourrait pas être inversible. Donc $\phi(P) \neq 0$ dans $B[X]$. De même nous savons que $\phi(Q) \neq 0$.

L'anneau B est intègre parce que A est intègre (proposition 3.92). Donc $\phi(P)\phi(A) \neq 0$, et comme ϕ est un morphisme, $\phi(PQ) \neq 0$, ce qui signifie que p ne divise pas tous les coefficients de PQ, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'absurde.

Nous en déduisons que $c(PQ)$ n'est pas inversible, et donc que PQ est primitif.

(2) (1)⇐

Nous supposons que PQ est primitif, et nous montrons que P et Q le sont. En factorisant un pgcd des coefficients de P nous pouvons écrire $P = c(P)P_1$ avec P_1 primitif (lemme 1.340). Par la partie précédente nous savons que P_1Q_1 est primitif. Nous avons donc l'égalité

$$PQ = c(P)c(Q)P_1Q_1 \tag{3.171}$$

où à la fois PQ et P_1P_2 sont primitifs. Vu que PQ est primitif, $c(P)c(Q)P_1Q_1$ est primitif, de telle sorte que[43]

$$c\Big(c(P)c(Q)P_1Q_1\Big) = c(P)c(Q)c(P_1Q_1) \tag{3.172}$$

est inversible. Vu que $c(P_1Q_1)$ est également inversible, nous en déduisons que $c(P)c(Q)$ est inversible. Si $u \in A$ vérifie $c(P)c(Q)u = 1$, alors $c(Q)u$ est un inverse de $c(P)$. De même $uc(P)$ est un inverse de $c(Q)$. Bref, ils sont inversibles et les polynômes P et Q sont primitifs.

(3) **Pour (2)**

[42] Ici, ma source [141] précise que p est premier. C'est vrai par la proposition 3.55, mais ça me semble inutile. Écrivez-moi pour me dire si le fait que p soit premier est important.

[43] Utilisation du lemme 1.339.

Soient $P, Q \in A[X]$. Nous considérons les polynômes primitifs P_1, Q_1 et R_1 définis par $P = c(P)P_1$, $Q = c(Q)Q_1$ et $PQ = c(PQ)R_1$. Nous avons

$$c(P)c(Q)P_1Q_1 = PQ = c(PQ)R_1. \tag{3.173}$$

En prenant le contenu des deux côtés nous avons

$$c\Big(c(P)c(Q)P_1Q_1\Big) = c\Big(c(PQ)R_1\Big), \tag{3.174}$$

et en tenant compte du lemme 1.339, cela devient

$$c(P)c(Q)c(P_1Q_1) = c(PQ)c(R_1) \tag{3.175}$$

où les éléments $c(P_1Q_1)$ et $c(R_1)$ sont inversibles. En posant $u = c(P_1Q_1)^{-1}c(R_1)$, nous avons bien

$$c(P)c(Q) = uc(PQ). \tag{3.176}$$

□

3.108.
Dans toute la démonstration, il y a une ambiguïté entre $c(P)$ qui serait le pgcd des coefficients de P, c'est-à-dire un ensemble et $c(P)$ qui serait un représentant de cet ensemble.

Grâce au lemme 1.341, nous savons que si δ est un pgcd et si u est inversible, alors $u\delta$ est un pgcd. Donc à partir de l'équation

$$c(P)c(Q) = uc(PQ), \tag{3.177}$$

en fait nous savons qu'il existe des représentants de $c(P)$, $c(Q)$ et $c(PQ)$ tels que

$$c(P)c(Q) = c(PQ). \tag{3.178}$$

3.7.6 Racines des polynômes

Définition 3.109 (Ordre d'un polynôme)**.**
Soit P un polynôme irréductible[44] *de degré n sur $\mathbb{F}_p[X]$. L'**ordre** de P est*

$$\min\{k \text{ tel que } P \mid X^k - 1\}. \tag{3.179}$$

Définition 3.110.
*Soient A un anneau et $P \in A[X]$. On appelle **racine** un élément $\alpha \in A$ tel que $P(\alpha) = 0$; c'est-à-dire que, en remplaçant toutes les occurrences de X par α dans l'expression de P, on obtient 0.*

PropHSQooASRbeA

Proposition 3.111.
Soient A un anneau et P un polynôme non nul dans $A[X]$. Si $\alpha \in A$ est une racine de P alors $X - \alpha$ divise P, et réciproquement.

Démonstration. Nous notons le polynôme $\mu = X - \alpha$ par analogie avec le polynôme minimal dont il sera question dans la très semblable proposition 6.101. Le sens réciproque est clair : si μ divise P, alors α est racine de P.

Pour le sens direct, remarquons que si α est racine de P, alors P est de degré au moins égal à 1, et nous pouvons donc effectuer la division euclidienne[45] de P par μ : il existe des polynômes Q et R tels que

PropHSQooASRbeA1

$$P = Q\mu + R \tag{3.180}$$

avec $\deg(R) < \deg(\mu)$. Donc R est une constante, élément de A : appelons-le a. En évaluant (3.180) en α, il vient

$$0 = P(\alpha) = Q(\alpha)\mu(\alpha) + a, \tag{3.181}$$

et nous en déduisons que $a = 0$, ce qui montre que $P = Q\mu$ et que μ divise P. □

DEFooTGZYooCYiKQa

Définition 3.112 (Racine simple et multiple d'un polynôme)**.**
*Soit A un anneau ainsi qu'un polynôme $P \in A[X]$ et $\alpha \in A$ racine de P. La **multiplicité** de α par rapport à P est l'entier h tel que P est divisible par $(X - \alpha)^h$ mais pas divisible par $(X - \alpha)^{h+1}$. Nous noterons $\theta_\alpha(P)$ la multiplicité de α par rapport à P.*

*Si la multiplicité d'une racine est égale à 1, nous disons que c'est une **racine simple**. Sinon, c'est une **racine multiple**.*

[44] Définition 1.327.
[45] Théorème 3.95.

3.113.
Pour une définition générale d'une racine simple de l'équation $f(x) = 0$, voir la définition 34.50. La proposition 3.111 nous indique que toute racine est de multiplicité au moins égale à 1.

LEMooZUUVooQgsdXs

Lemme 3.114.
Soient un anneau A ainsi que $x, r \in A$. Nous avons

$$x^n - r^n = (x - r) \sum_{k=0}^{n-1} x^k r^{n-k-1}. \tag{3.182}$$

Démonstration. Nous effectuons la distribution, et nous calculons un peu :

$$(x - r) \sum_{k=0}^{n-1} x^k r^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} r^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k r^{n-k} \tag{3.183a}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x^k r^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k r^{n-k} \tag{3.183b}$$

$$= -r^n + \sum_{k=1}^{n-1} (x^k r^{n-k} - x^k r^{n-k}) + x^n \tag{3.183c}$$

$$= x^n - r^n. \tag{3.183d}$$

□

PROPooQCZSooVokxXQ

Proposition 3.115 ([142]).
Soient un anneau A, un polynôme $P \in A[X]$ de degré n, ainsi qu'une racine $\alpha \in A$ de P. Alors il existe un polynôme $Q \in A[X]$ de degré $n - 1$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.

Démonstration. D'après le lemme 3.114, pour chaque k, nous avons $x^k - r^k = (x - r)S_k(x)$ où S_k est un polynôme de degré $k - 1$ (ou moins).

Soit un polynôme P tel que $P(\alpha) = 0$. Nous pouvons écrire

$$P(x) = P(x) - P(\alpha) \tag{3.184a}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \tag{3.184b}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k (x^k - \alpha^k) \tag{3.184c}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k (x - \alpha) S_k(x) \tag{3.184d}$$

$$= (x - \alpha) \sum_{k=1}^{n} a_l S_k(x) \tag{3.184e}$$

$$= (x - \alpha) Q(x) \tag{3.184f}$$

où Q est le polynômde de degré $n - 1$ donné par $Q = \sum_{k=1}^{n} a_k S_k$. □

PropahQQpA

Proposition 3.116.
L'élément $\alpha \in A$ est une racine de multiplicité[46] *h du polynôme P si et seulement si il existe $Q \in A[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^h Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.*

Démonstration. Par définition de la multiplicité de α, le polynôme P est divisible par $(X - \alpha)^h$ mais pas par $(X - \alpha)^{h+1}$. Il existe donc un polynôme Q tel que

$$P = (X - \alpha)^h Q. \tag{3.185}$$

Si $Q(\alpha)$ était nul, la proposition 3.115 nous dirait que $Q = (X - \alpha)S$ pour un cetain polynôme S. Cela ferait $P = (X - \alpha)^{h+1} S$, ce qui est contraire à l'hypothèse sur la multiplicité. □

LemIeLhpc

Lemme 3.117.
Soient P et Q des polynômes non nuls de $A[X]$ et $\alpha \in A$. Alors

[46] Multiplicité d'une racine, définition 3.112.

(1) $\theta_\alpha(P+Q) \leqslant \min\{\theta_\alpha(P), \theta_\alpha(Q)\}$, *et l'égalité a lieu si* $\theta_\alpha(P) \neq \theta_\alpha(Q)$;

(2) $\theta_\alpha(PQ) \geqslant \theta_{\alpha(P)} + \theta_\alpha(Q)$, *et l'égalité a lieu si* A *est intègre.*

ItemIeLhpciv

Dans le théorème suivant, la partie importante en pratique est le point (2) parce qu'il dit que, lorsque nous cherchons les racines d'un polynôme, nous pouvons nous arrêter lorsque nous en avons trouvé autant que le degré, multiplicité comprise.

ThoSVZooMpNANi

Théorème 3.118.
Soit A un anneau intègre et $P \in A[X] \setminus \{0\}$, un polynôme de degré n.

(1) *Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in A$ sont des racines deux à deux distinctes de multiplicités $k_1, \dots, k_p$, alors il existe $Q \in A[X]$, de degré $n - \sum_{i=1}^{p} k_i$, tel que*

$$P = Q \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{k_i} \tag{3.186}$$

et $Q(\alpha_i) \neq 0$ pour tout i.

ITEMooWGOBooGApPOo

(2) *La somme des multiplicités des racines de P est au plus* $\deg(P)$.

Démonstration. Si $p = 1$, soit α une racine de multiplicité k de P. La définition de la multiplicité d'une racine nous dit que P est divisible par $(X-\alpha)^k$ mais pas par $(X-\alpha)^{k+1}$. Donc il existe $Q \in A[X]$ tel que $P = Q(X-\alpha)^k$. Il reste à voir que $Q(\alpha) \neq 0$. Cela est une conséquence de la proposition 3.111 : si $Q(\alpha)$ était nul, on pourrait lui factoriser $(X-\alpha)$ et donc avoir $(X-\alpha)^{k+1}$ qui se factorise dans P, ce qui n'est pas possible.

Nous supposons que $p \geqslant 2$ et nous effectuons une récurrence sur p. Nous considérons donc les $p-1$ premières racines $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ et un polynôme $R \in A[X]$ tel que $R(\alpha_i) \neq 0$ pour $i = 1, \dots, p-1$ et

$$P = \underbrace{(X-\alpha_1)^{k_1} \dots (X-\alpha_{p-1})^{k_{p-1}}}_{S} R. \tag{3.187}$$

Par hypothèse $P(\alpha_p) = S(\alpha_p)R(\alpha_p) = 0$. L'anneau A étant intègre, $S(\alpha_p) \neq 0$ parce que $\alpha_i \neq \alpha_p$ pour $i \neq p$. Par conséquent, $R(\alpha_p) = 0$.

Nous devons encore vérifier que la multiplicité α_p est k_p par rapport à R. Pour cela nous utilisons le point (2) du lemme 3.117 afin de dire que le degré de α_p pour $P = SR$ est k_p. Par conséquent

$$R = (X - \alpha_p)^{k_p} T \tag{3.188}$$

avec $T(\alpha_p) \neq 0$ et enfin

$$P = \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i) T. \tag{3.189}$$

De plus $T(\alpha_i) \neq 0$, sinon $R(\alpha_i)$ serait nul. □

CORooUGJGooBofWLr

Corolaire 3.119.
Un polynôme de degré n sur un anneau intègre possède au maximum n racines distinctes.

Démonstration. Le théorème 3.118(2) dit que la somme des multiplicités des racines de P est au maximum n. Mais la proposition 3.111 dit que toutes les racines ont une multiplicité au moins égale à un. Donc il ne peut pas y en avoir plus de n. □

Proposition 3.120 ([143, 144])**.**
Soit un anneau intègre et $n > 0$. Les racines n^e de l'unité forment un groupe cyclique dont l'ordre divise n.

LEMooHDJIooPTpUCJ

Lemme 3.121.
Soit le polynôme $P = X^2 - 1$ sur l'anneau intègre[47] *A. Si $1 \neq -1$*[48]*, alors les racines de P sont ± 1.*

Démonstration. Le fait que ± 1 sont racines est le lemme 1.95(2)(5). Puisque par hypothèse $1 \neq -1$, le corolaire 3.119 termine la preuve. □

[47] Définition 1.335.

[48] À mon avis cette hypothèse n'est pas nécessaire. Et d'ailleurs j'ai un peu du mal à voir des exemples exotiques d'anneaux intègres dans lesquels $1 = -1$. Il y aurait $[0,1]$ modulo 2, certaines de ses parties, comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Et quoi d'autre ?

CORooZCSOooHQVAOV

Corolaire 3.122 (Conséquence du lemme de Gauss[145]).
Soient A un anneau factoriel et $\mathrm{Frac}(A)$ son corps des fractions. Un polynôme non constant $P \in A[X]$ est irréductible (sur A) si et seulement si il est irréductible et primitif au sens du pgcd[49] *sur $\mathrm{Frac}(A)[X]$.*

Exemple 3.123.
Il ne faudrait pas croire qu'être irréductible dans un anneau A implique d'être irréductible dans le corps des fractions. En effet soit $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ et $P = X^2 - X - 1$. Nous savons que sa factorisation est

$$P = \left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right). \tag{3.190}$$

Si vous ne le saviez pas, faites juste le calcul pour vous en assurer.
Ce polynôme est irréductible sur $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ mais pas irréductible sur $\mathrm{Frac}\big(\mathbb{Z}[\sqrt{5}]\big)$. △

3.7.7 Quelques identités

LemISPooHIKJBU

Lemme 3.124 ([1, 146]).
Quelques identités de polynômes.

ItemLTBooAcyMtN
ItemLTBooAcyMtNii
ITEMooILIVooHtmWLm

(1) Si n est impair, alors $1 + X$ divise $1 + X^n$.
(2) Pour tout n nous avons $X^n - 1 = (X - 1)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$.
(3) $X^n - a^n = (X - a)\sum_{i=0}^{n-1} a^i X^{n-1-i}$.

Démonstration. Plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Nous allons utiliser le lemme 3.1 avec $a = 1$, $b = -X$ et $r = n - 1$. Notez que n étant impair, $r = n-1$ est encore positif. En ce qui concerne le membre de gauche de (3.1), nous remarquons que $(-X)^n = (-1)^n X^n = -X^n$. Nous avons donc :

$$1 + X^n = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-kb^k} = (1 + X)(\cdots). \tag{3.191}$$

Cela prouve que $1 + X$ divise $1 + X^n$.

(2) **Pour (2)** Posons $P = X + \ldots + X^{n-1}$. Nous avons $XP = P - X + X^n$ et donc

$$(X - 1)(1 + P) = X + XP - 1 - P = X + (P - X + X^n) - 1 - P = X^n - 1. \tag{3.192}$$

(3) **Pour (3)** Déjà fait dans (3.1).

□

3.7.8 Générateurs pour le groupe multiplicatif

PROPooKSCRooPyInSv

Proposition 3.125 ([147]).
Si p est un nombre premier, tout sous-groupe de $\big((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \cdot\big)$ est cyclique[50].

Démonstration. Soit un sous-groupe H d'ordre $|H| = n$ de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Nous prouvons par récurrence sur n que H est cyclique.

(1) $n = 1$ Si H est un sous-groupe d'ordre 1, alors $H = \{[1]_p\}$ et c'est cyclique, pas de problèmes.

(2) **Récurrence** Nous supposons que tous les sous-groupes de $\big((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ d'ordre plus petit que n sont cycliques, et nous prouvons que H est également cyclique.

Nous allons faire deux cas suivant que n est la puissance d'un nombre premier ou non.

(2a) **Si $n = q^k$** Nous supposons que $n = q^k$ pour un certain nombre premier q. Nous supposons aussi, par l'absurde que H n'est pas cyclique. Les éléments de H ont un ordre qui divise q^k (corolaire 2.15), mais pas d'ordre q^k. Donc pour tout x dans H nous avons $x^{q^{k-1}} = 1$. En particulier le polynôme $P = X^{X^{q-1}} - 1$ a au moins q^k racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: les éléments de H.
Hélas le degré de P étant q^{k-1}, il ne peut pas avoir plus de q^{k-1} racines distinctes par 3.118. Contradiction. Donc H est cylcique.

[49] Définition 3.103.
[50] Définition 1.440.

(2b) **Cas général**

Nous supposons que $|H|$ n'est pas la puissance d'un nombre premier.

(2b.i) **Un morphisme** Le corolaire 1.377 nous indique que $n = ab$ pour deux nombres a, b tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon H &\to H \\ x &\mapsto x^a. \end{aligned} \tag{3.193}$$

Étant donné que H est abélien, f est un morphisme de groupes. Tout élément $x \in H$ vérifie $f(x)^b = x^{ab} = 1$. Donc

$$\text{Image}(f) \subset \{y \in H \text{ tel que } y^b = 1\}. \tag{3.194}$$

(2b.ii) **Ordre du noyau et de l'image** Par le coup des racines distinctes de polynôme $X^b - 1$, nous avons $|\text{Image}(f)| \leqslant b$. De même nous avons

$$\ker(f) = \{x \in H \text{ tel que } x^a = 1\}, \tag{3.195}$$

et donc $|\ker(f)| \leqslant a$.
Le premier théorème d'isomorphisme 2.7 nous indique que

$$\frac{H}{\ker(f)} \simeq \text{Image}(f), \tag{3.196}$$

et comme tout est abélien, tous les sous groupes sont normaux[51], et nous avons, par le théorème de Lagrange 2.14 que

$$ab = |H| = \underbrace{|\ker(f)|}_{\leqslant a}\underbrace{|\text{Image}(f)|}_{\leqslant b} \leqslant ab. \tag{3.197}$$

Le premier membre est égal au dernier. Donc toutes les inégalités sont des égalités. Nous avons donc $|\ker(f)| = a$ et $|\text{Image}(f)| = b$.

(2b.iii) **Hypothèse de récurrence** C'est le moment d'utiliser l'hypothèse de récurrence : les groupes $\ker(f)$ et $\text{Image}(f)$ sont cycliques. Soient des générateurs h et h'. Quel est l'ordre de hh' ? Le lemme 3.23 nous indique que hh' est d'ordre $ab = n$. Donc hh' est générateur de H qui est donc cyclique.

□

[51] « distingué » et « normal » sont synonymes.

Chapitre 4

Espaces vectoriels (début)

4.1 Parties libres, génératrices, bases et dimension

Nous avons déjà défini (dans 1.446) un espace vectoriel comme étant un module sur un corps commutatif. En explicitant un peu, cela donne ceci[148].

Un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni de deux opérations :

- une loi de composition interne $+ : E \times E \to E$,
- une loi de composition externe $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$

telles que

(1) $(E, +)$ soit un groupe abélien,

(2) pour tout $u, v \in E$ et pour tout $k, k' \in \mathbb{K}$,

(2a) $k(u + v) = (ku) + (kv)$

(2b) $(kk')u = k(k'u)$

(2c) $(k + k')u = (ku) + (k'u)$

(2d) $1u = u$

où 1 est le neutre de $\mathbb{K}$ et où nous avons directement adopté la notation ku pour $k \cdot u$.

Si $u \in E$, nous notons $-u$ l'inverse de u dans le groupe $(E, +)$.

DEFooDLHWooAvfhgc

Définition 4.1 (Partie libre)**.**
*Si E est un espace vectoriel, une partie A de E est **libre** si pour tout choix d'un nombre fini d'éléments $\{u_i\}_{i=1,\dots,n}$ de A, l'égalité*

$$a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = 0 \tag{4.1}$$

implique $a_i = 0$ pour tout i (ici les a_i sont dans le corps de base).

Remarque 4.2.
Notons que le vecteur nul n'est dans aucune partie libre, ne fût-ce que parce que $a0 = 0$ n'implique pas $a = 0$.

Si A est une partie de l'espace vectoriel E, nous notons $\text{Span}(A)$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A. Les coefficients de ces combinaisons linéaires sont dans le corps de base $\mathbb{K}$.

Définition 4.3 (Partie génératrice)**.**
*Une partie B d'un espace vectoriel E est **génératrice** si* $\text{Span}(B) = E$.

Remarque 4.4.
Ces définitions demandent des commentaires en dimension infinie[1].

(1) Tout élément peut être écrit comme combinaison linéaire finie d'une partie génératrice. Cela ne signifie pas que nous pouvons extraire une partie finie qui convient pour tous les éléments à la fois. Lorsque l'espace est de dimension infinie, ceci est particulièrement important.

[1] Nous n'avons pas encore défini le concept de dimension, mais nous nous adressons au lecteur trop pressé.

(2) La définition séparée de liberté dans le cas des parties infinies a son importance lorsqu'on parle d'espaces vectoriels de dimension infinie (en dimension finie, aucune partie infinie n'est libre) parce que cela fera une différence entre une base algébrique et une base hilbertienne par exemple.

DEFooNGDSooEDAwTh

Définition 4.5 (Base)**.**
*Une **base** de l'espace vectoriel E est une partie à la fois génératrice et libre.*

NORMooJGRNooAKtvWt

4.6.
Supposons que la partie $\{u_1, u_2, u_2\}$ soit une base d'un espace vectoriel E. Un ensemble étant quelque chose de non ordonné, la partie $\{u_3, u_2, u_1\}$ est la même, et $\{u_1, u_1, u_2, u_2, u_3, u_4\}$ est encore la même.

Lorsque l'ordre dans lequel nous numérotons les vecteurs d'une base est important (par exemple pour écrire explicitement la matrice d'une application linéaire), nous devrions écrire (u_1, u_2, u_3). Nous pourrions définir le concept de *base ordonnée* en disant qu'une base ordonnée de E est une application $u\colon I \to E$ où I est un ensemble totalement ordonné et telle que $u(I)$ soit une base de E.

À partir de là, il ne serait plus autorisé de dire « la matrice de f dans une base ». Il faudrait dire « la matrice de f dans une base ordonnée ». Dans ce contexte, une matrice pour une application linéaire d'un espace réel serait une application $I \times I \to \mathbb{R}$.

Bref, tout ça pour dire qu'il y a clairement des incohérences de notations à ce niveau dans le Frido. Il sera souvent écrit $\{u_1, u_2\}$ au lieu de (u_1, u_2) ou, mieux, $u\colon I \to \mathbb{R}$, et il sera souvent dit « base » au lieu de « base ordonnée ».

Nous prouvons à présent que tout élément non nul d'un espace vectoriel possédant une base[2] se décompose de façon unique en combinaison linéaire finie d'éléments d'une base.

PROPooEIQIooXfWDDV

Proposition 4.7 ([1])**.**
Soient un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ muni d'une base $\{e_i\}_{i\in I}$. Si $v \in E$, alors il existe un unique couple (J, c) où

(1) J est une partie finie de I ;

(2) $c\colon J \to \mathbb{K}$ est une application

(3) $v = \sum_{j\in J} c(j)e_j$.

Les éléments $c(i)$ seront notés v_i et sont les composantes de v dans la base. Sous-entendu, on prolonge c de J vers I par zéro sur $I \setminus J$.

Démonstration. Soit un espace vectoriel E et une base $\{e_i\}_{i\in I}$ où I est un ensemble à priori quelconque. Soit $v \in E$. Puisque $E = \text{Span}\{e_i\}_{i\in I}$, il existe une partie finie J de I et des coefficients $\{v_j\}_{j\in J}$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$v = \sum_{j\in J} v_j e_j. \tag{4.2}$$

Cela donne l'existence.

En ce qui concerne l'unicité, soient J et K des parties finies de I et des coefficients $\{v_j\}_{j\in J}$ et $\{w_k\}_{k\in K}$ tels que

EQooFKNEooICnVPP

$$v = \sum_{j\in J} v_j e_j = \sum_{k\in K} w_k e_k. \tag{4.3}$$

Nous posons $L = J \cup K$. Remarquez que les unions suivantes sont des unions disjointes :

$$L = (J \setminus K) \cup (J \cap K) \cup (K \setminus J) \tag{4.4a}$$
$$J = (J \setminus K) \cup (J \cap K) \tag{4.4b}$$
$$K = (K \cap J) \cup (K \setminus J). \tag{4.4c}$$

Écrivons $0 = v - v$ en utilisant les expressions de v de (4.3) et en décomposant les sommes :

$$0 = \sum_{j\in J} v_j e_j - \sum_{k\in K} w_k e_k \tag{4.5a}$$
$$= \sum_{j\in J\setminus K} v_j e_j + \sum_{j\in J\cap K} v_j e_j - \sum_{k\in K\cap J} w_k e_k - \sum_{k\in K\setminus J} w_k e_k \tag{4.5b}$$
$$= \sum_{j\in J\setminus K} v_j e_j + \sum_{j\in J\cap K} (v_j - w_j)e_j - \sum_{k\in K\setminus J} w_k e_k. \tag{4.5c}$$

[2] Nous n'avons pas démontré que tout espace vectoriel possède une base. Donc à notre niveau, il est possible que ce théorème soit sans objet pour beaucoup d'espaces.

Là-dessus, nous posons

$$\alpha_l = \begin{cases} v_l & \text{si } l \in J \setminus K \\ v_l - w_l & \text{si } l \in J \cap K \\ -w_l & \text{si } l \in K \setminus J. \end{cases} \tag{4.6}$$

Nous avons alors

$$\sum_{l \in L} \alpha_l e_l = 0. \tag{4.7}$$

EQooCTWRooZKyaup

Vu que $\{e_i\}_{i\in I}$ est libre, la partie $\{e_l\}_{l\in L}$ est également libre. Donc l'équation (4.7) implique que $\alpha_l = 0$ pour tout $l \in L$.

Nous devons prouver que

$$\{j \in J \text{ tel que } v_j \neq 0\} = \{k \in K \text{ tel que } w_k \neq 0\} \tag{4.8}$$

et que pour l dans cet ensemble, $v_l = w_l$.

Soit $j \in J$; il y a deux possibilités : soit $j \in J \setminus K$, soit $j \in J \cap K$. Dans le premier cas nous avons déjà vu que $\alpha_j = v_j = 0$. Dans le second cas, $\alpha_j = v_j - w_j = 0$, c'est-à-dire $v_j = w_j$.

Donc $j \in J$ vérifiant $v_j \neq 0$ implique $j \in J \cap K$ et l'égalité des coefficients. Idem avec $k \in K$ tel que $w_k \neq 0$ implique $k \in J \cap K$. □

LEMooDJSIooYcsvhO

Lemme 4.8 ([1]).
Soit un espace vectoriel admettant des bases. Un endomorphisme est une bijection si et seulement si il change toute base en une base.

Démonstration. En deux parties. Soit un espace vectoriel E possédant des bases et un endomorphisme $f : E \to E$.

(1) **Si f est bijective** Soit une base $\{v_i\}_{i\in I}$; nous devons voir que $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est une base.

(1a) **Libre** Si J est une partie finie de I et si les λ_j sont des scalaires tels que $\sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j) = 0$, alors

$$0 = \sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j) = f\big(\sum_{j\in J} \lambda_j v_j\big). \tag{4.9}$$

Mais comme f est bijective, cela implique que $\sum_{j\in J} \lambda_j v_j = 0$. En retour, parce que $\{v_i\}$ est une base, cela implique que $\lambda_j = 0$ pour tout j.

(1b) **Générateur** Soit $x \in E$. Puisque f est bijective, il existe un unique $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Comme $\{v_i\}_{i\in I}$ est une base, il existe une partie finie $J \subset I$ et des scalaires $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ tels que

$$y = \sum_{j\in J} \lambda_j v_j. \tag{4.10}$$

Nous avons alors

$$x = f(y) = \sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j), \tag{4.11}$$

qui montre que $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est bien génératrice de E

(2) **Si f change les bases en bases** Soit un endomorphisme changeant toute base en une base. Nous devons prouver qu'il est bijectif.

(2a) **Injective** Nous considérons une base $\{v_i\}_{i\in I}$. La partie $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est par hypothèse également une base.

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Il existe J et K finis dans I qui permettent de décomposer x et y respectivement dans la base $\{f(v_i)\}_{i\in I}$. Quitte à poser $J' = J \cup K$, nous supposons que J suffit[3]. Il existe donc des scalaires $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ et $\{\mu_j\}_{j\in J}$ tels que $x = \sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j)$ et $y = \sum_{j\in J} \mu_j f(v_j)$.

La relation $f(x) = f(y)$ donne immédiatement, par la linéarité de f,

$$\sum_{j\in J} (\lambda_j - \mu_j) f(v_j) = 0. \tag{4.12}$$

Du fait que $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ soit une base, nous déduisons que $\lambda_j - \mu_j = 0$ pour tout j. Donc $x = y$, et f est injective.

[3] Nous utilisons le fait que l'union de deux parties finies d'un ensemble est finie (lemme 1.215(2)).

(2b) **Surjective** Soit $x \in E$. Puisque $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est une base, il existe des scalaires λ_j tels que

$$x = \sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j) = f\big(\sum_{j\in J} \lambda_j v_j\big). \tag{4.13}$$

Donc f est surjective.

□

PROPooVJFNooSbkzTF

Proposition 4.9 ([1]).
Soit un espace vectoriel E. Soit une partie $B \subset E$ telle que tout élément de E puisse être écrit de façon unique comme combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de B. Alors B est une base.

LEMooRWQHooIxrQek

Lemme 4.10 ([1]).
Bases dans $\mathbb{R}^n$.

ITEMooKWULooCTmOqM

(1) Si v et w ne sont pas colinéaire dans $\mathbb{R}^2$, alors $\{v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(2) Toute partie libre de $\mathbb{R}^n$ contenant n élément est une base.

Définition 4.11.
*Un espace vectoriel est **de type fini** si il contient une partie génératrice finie.*

Nous verrons dans les résultats qui suivent que cette définition est en réalité inutile parce qu'un espace vectoriel sera de type fini si et seulement si il est de dimension finie.

LemytHnlD

Lemme 4.12.
Si E a une famille génératrice de cardinal n, alors toute famille de $n+1$ éléments est liée.

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur n. Pour $n = 1$, nous avons $E = \text{Span}(e)$ et donc si $v_1, v_2 \in E$ nous avons $v_1 = \lambda_1 e$, $v_2 = \lambda_2 e$ pour certains éléments non nuls λ_1, λ_2 du corps de base. Nous avons donc $\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2 = 0$. Cela prouve que $\{v_1, v_2\}$ est liée.

Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour $k < n$, c'est-à-dire que pour tout espace vectoriel contenant une partie génératrice de cardinal $k < n$, les parties de $k+1$ éléments sont liées. Soit maintenant un espace vectoriel muni d'une partie génératrice $G = \{e_1, \dots, e_n\}$ de n éléments, et montrons que toute partie $V = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ contenant $n+1$ éléments est liée. Dans nos notations nous supposons que les e_i sont des vecteurs distincts et les v_i également. Nous les supposons également tous non nuls. Étant donné que $\{e_i\}$ est génératrice nous pouvons définir les nombres $\lambda_{i,k}$ par

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,k} e_k \tag{4.14}$$

Puisque

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+1,k} e_k \neq 0, \tag{4.15}$$

quitte à changer la numérotation des e_i, nous pouvons supposer que $\lambda_{n+1,n} \neq 0$. Nous considérons les vecteurs

$$w_i = \lambda_{n+1,n} v_i - \lambda_{i,n} v_{n+1}. \tag{4.16}$$

En calculant un peu,

$$w_i = \lambda_{n+1,n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,k} e_k - \lambda_{i,n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+1,k} e_k \tag{4.17a}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \big(\lambda_{n+1,n}\lambda_{i,k} - \lambda_{i,n}\lambda_{n+1,k}\big) e_k \tag{4.17b}$$

parce que les termes en e_n se sont simplifiés. Donc la famille $\{w_1, \dots, w_n\}$ est une famille de n vecteurs dans l'espace vectoriel $\text{Span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$; elle est donc liée par l'hypothèse de récurrence. Il existe donc des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls, tels que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{n+1,n} v_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{i,n} v_{n+1}. \tag{4.18}$$

EqOQGGoU

Vu que $\lambda_{n+1,n} \neq 0$ et que, parmi les α_i, au moins un est non nul, nous avons au moins un des produits $\alpha_i\lambda_{n+1,n}$ qui est non nul. Par conséquent (4.18) est une combinaison linéaire nulle non triviale des vecteurs de $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$. Cette partie est donc liée. □

LemkUfzHl

Lemme 4.13.
Soient L une partie libre et G une partie génératrice d'un espace vectoriel E. Si l'ensemble des parties libres L' telles que $L \subset L' \subset G$ possède un élément maximum[4]*, alors cet élément est une base.*

Qu'entend-on par « maximale » ? La partie B candidate, doit être libre, contenir L, être contenue dans G et de plus avoir la propriété que $\forall x \in G \setminus B$, la partie $B \cup \{x\}$ est liée.

Démonstration. D'abord si G est une base, alors toutes les parties de G sont libres et le maximum est $B = G$. Dans ce cas le résultat est évident. Nous supposons donc que G est liée.

La partie $B = \{b_1, \dots, b_l\}$ est libre parce qu'on l'a prise parmi les libres. Montrons que B est génératrice. Soit $x \in G \setminus B$; par hypothèse de maximalité, $B \cup \{x\}$ est liée, c'est-à-dire qu'il existe des nombres λ_i, λ_x non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i + \lambda_x x = 0. \tag{4.19}$$

EqxfkeyM

Si $\lambda_x = 0$ alors un de λ_i doit être non nul et l'équation (4.19) devient une combinaison linéaire nulle non triviale des b_i, ce qui est impossible parce que B est libre. Donc $\lambda_x \neq 0$ et

$$x = -\frac{1}{\lambda_x} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i. \tag{4.20}$$

Donc tous les éléments de $G \setminus B$ sont des combinaisons linéaires des éléments de B, et par conséquent, G étant génératrice, tous les éléments de E sont combinaisons linéaires d'éléments de B. □

ThonmnWKs

Théorème 4.14 (Théorème de la base incomplète)**.**
Soit E un espace vectoriel de type fini sur le corps $\mathbb{K}$.

ItemBazxTZ

(1) Si L est une partie libre et si G est une partie génératrice contenant L, alors il existe une base B telle que $L \subset B \subset G$.

ITEMooFVJXooGzzpOu

(2) Toute partie libre peut être étendue en une base.

ITEMooFBUAooSSZxgx

(3) Toutes les bases sont finies et ont même cardinal.

ITEMooJIJSooGuJMdt

(4) Si V est un sous-espace vectoriel de E, et si L est une base de V, alors il existe une base de E qui contient L.

Démonstration. Point par point.

(1) Comme E est de type fini, il admet une partie génératrice G de cardinal fini n. Donc une partie libre est de cardinal au plus n par le lemme 4.12. Soit L, une partie libre contenue dans G (ça existe : par exemple $L = \varnothing$). La partie B maximalement libre contenue dans G et contenant L est une base par le lemme 4.13.

(2) Notons que puisque E lui-même est générateur, le point (1) implique que toute partie libre peut être étendue en une base.

(3) Soient B et B', deux bases. En particulier B est génératrice et B' est libre, donc le lemme 4.12 indique que $\mathrm{Card}(B') \leqslant \mathrm{Card}(B)$. Par symétrie on a l'inégalité inverse. Donc $\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(B')$.

(4) La partie L étant une base de V, elle est en particulier libre dans E. Par le point (2), L peut être étendue en une base.

□

REMooYGJEooEcZQKa

Remarque 4.15.
Le théorème de la base incomplète 4.14(2) est ce qui permet de construire une base d'un espace vectoriel en « commençant par » une base d'un sous-espace. En effet si H est un sous-espace de E, alors une base de H est une partie libre de E et donc, peut être étendue en une base de E.

[4] Encore une fois, à part quelques cas triviaux, il n'est pas clair à ce point que ce maximum existe.

DEFooWRLKooArTpgh

Définition 4.16.
*La **dimension** d'un espace vectoriel de type fini est le cardinal*[5] *d'une*[6] *de ses bases.*

Il existe une infinité de bases de $\mathbb{R}^m$. On peut démontrer que le cardinal de toute base de $\mathbb{R}^m$ est m, c'est-à-dire que toute base de $\mathbb{R}^m$ possède exactement m éléments.

Exemple 4.17.
La base de **canonique** de $\mathbb{R}^m$ est la partie $\{e_1, \dots, e_m\}$, où le vecteur e_j est

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{j-ème} \quad .$$

La composante numéro j de e_i est 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$. Cela s'écrit $(e_i)_j = \delta_{i,j}$ où δ est le **symbole de Kronecker** défini par

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{4.21}$$

Les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ peuvent donc être écrits $e_i = \sum_{k=1}^{m} \delta_{i,k} e_k$. △

Le théorème suivant est essentiellement une reformulation du théorème 4.14.

ThoMGQZooIgrXjy

Théorème 4.18.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\{e_i\}_{i\in I}$ une partie génératrice de E.

ITEMooTZUDooFEgymQ

(1) Il existe $J \subset I$ tel que $\{e_i\}_{i\in J}$ est une base. Autrement dit : de toute partie génératrice nous pouvons extraire une base.

ITEMooCJQGooXwjsfm

(2) Soit $\{f_1, \dots, f_l\}$ une partie libre. Alors nous pouvons la compléter en utilisant des éléments e_i. C'est-à-dire qu'il existe $J \subset I$ tel que $\{f_k\} \cup \{e_i\}_{i\in J}$ soit une base.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** C'est le théorème 4.14(1). La partie $\{e_{i_0}\}$ est libre et la partie $\{e_i\}_{i\in I}$ est génératrice. Donc il existe une base B telle que $\{e_{i_0}\} \subset B \subset \{e_i\}_{i\in I}$. Si $B = \{e_i\}_{i\in J}$, alors J est fini[7] parce que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

(2) **Pour (2)** Utiliser le théorème 4.14(4) avec $V = \text{Span}\{f_1, \dots, f_l\}$.

□

PROPooVEVCooHkrldw

Proposition 4.19.
Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, alors

ITEMooZNLDooBISkJyBS

(1) toute partie contenant $n+1$ éléments est liée.

ITEMooSGGCooOUsuBs

(2) toute partie libre contenant n éléments est une base,

(3) toute partie génératrice contenant n éléments est une base.

Démonstration. Soit une partie M contenant $n+1$ éléments. L'espace E possède une partie génératrice contenant n éléments (n'importe quelle base). Donc M est liée par le lemme 4.12.

Une partie libre contenant n éléments peut être étendue en une base ; si ladite extension est non triviale (c'est-à-dire qu'on ajoute vraiment au moins un élément) une telle base contiendra une partie de $n+1$ éléments qui serait liée par le lemme 4.12.

Pour la dernière assertion, soit une partie génératrice $\{v_i\}_{i\in I}$ où I contient n éléments. Par le théorème 4.18(1) nous pouvons en extraire une base : il existe $J \subset I$ tel que $\{v_j\}_{j\in J}$ soit une base. Si l'inclusion $J \subset I$ était stricte, alors la base $\{v_j\}_{j\in J}$ contiendrait moins de n éléments, ce qui serait en contradiction avec le théorème 4.14(3). □

[5] Définition 1.207.
[6] Le théorème de la base incomplète 4.14(3) montre que cette définition ne souffre d'aucune ambiguïté.
[7] Sauf si I est choisi de façon traitresse. Il se peut que $e_{i_1} = e_{i_2}$ avec $i_1 \neq i_2$.

DefCodimension

Définition 4.20.
*Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. La **codimension** de F dans E est*

$$\operatorname{codim}_E(F) = \dim(E/F). \tag{4.22}$$

LEMooGNDPooAhvIek

Lemme 4.21.
L'ensemble $\mathbb{Q}^n$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension n.

PROPooRKOVooBFRCKq

Proposition-Définition 4.22 (Supplémentaire vectoriel[1])**.**
Soit un espace vectoriel V et un sous-espace vectoriel V_1 dans V. Il existe un sous-espace vectoriel V_2 de V tel que

(1) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$,

(2) pour tout $x \in V$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$ satisfaisant $x = x_1 + x_2$.

*Une telle partie V_2 est dite **supplémentaire** de V_1 et on écrit parfois $V = V_1 \oplus V_2$*[8]*.*

Démonstration. La partie V_1 est un sous-espace vectoriel. Il possède donc une base $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_l\}$. Le théorème de la base incomplète 4.14(3) dit qu'il existe $\{v_1, \dots, v_k\}$ tels que $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_k\}$ soit une base de V.

Nous posons alors $V_2 = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$.

(1) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ Soit $x \in V_1 \cap V_2$. Étant donné que $x \in V_1$, il existe des a_i tels que $x = \sum_i a_i u_i$, et étant donné que $x \in V_2$ il existe des b_j tels que $x = \sum_j b_j v_j$. Nous avons donc $\sum_i a_i u_i - \sum_j b_j v_j = 0$ en tant que combinaison linéaire nulle d'éléments d'une base, les coefficients sont nuls[9] : $a_i = 0$ et $b_j = 0$ pour tout i et j. Donc $x = 0$.

(2) **Décomposition : existence** Si $x \in V$, il y a une décomposition dans la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{l} a_i u_i + \sum_{j=1}^{k} b_j v_j$. En posant $x_1 = \sum_i a_i u_i$ et $x_2 = \sum_j b_j v_j$, nous avons bien $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in V_1$ et $x_2 \in V_2$.

(3) **Décomposition : unicité** Supposons $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ avec $x_1, y_1 \in V_1$ et $x_2, y_2 \in V_2$. Nous avons les décompositions $x_1 = \sum_i a_i u_i$, $x_2 = \sum_j b_j v_j$, $y_1 = \sum_i a'_i u_i$ et $y_2 = \sum_j b'_j v_j$. L'égalité $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ donne

$$\sum_i (a_i - a'_i) u_i + \sum_j (b_j - b'_j) v_j = 0. \tag{4.23}$$

Combinaison linéaire nulle d'éléments d'une base. Les coefficients son nuls, et donc $a_i - a'_i = 0$ et $b_j - b'_j = 0$. Nous en déduisons $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

□

4.1.1 Et en dimension infinie

Dans ZFC, en dimension infinie, il existe aussi une base pour tout espace vectoriel ainsi qu'un théorème de la base incomplète. Nous ne parlerons pas de ce qu'il se passe lorsque nous ne considérons que ZF[10].

LEMooSSRXooIyfgNz

Lemme 4.23 ([149])**.**
Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel V de E. Soient encore deux sous-espaces vectoriels W_1 et W_2 tels que

(1) $V \cap W_1 = \{0\}$;

(2) $V + W_2 = E$.

Alors il existe un supplémentaire[11] *W de V tel que $W_1 \subset W \subset W_2$.*

Juste une remarque : dans le Frido le symbole « $\subset$ » ne signifie pas une inclusion stricte.

Démonstration. Nous utilisons le lemme de Zorn.

[8] Mais c'est un léger abus parce que $V_1 \oplus V_2$ est formellement $V_1 \times V_2$ (définition 4.148).
[9] C'est la définition 4.1 d'une partie libre.
[10] Si vous ne savez pas ce que signifient les sigles « ZF » et « ZFC » vous ne devriez pas être en train de lire ceci, et encore moins penser à le resservir à un jury d'agrégation.
[11] Définition 4.22.

(1) **Un gros ensemble** Soit

$$\mathcal{A} = \left\{ S \subset E \text{ tel que } \begin{cases} S \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \\ W_1 \subset S \subset W_2 \\ S \cap V = \{0\} \end{cases} \right\} \tag{4.24}$$

(2) **Non vide** Puisque $W_1 \in \mathcal{A}$, cet ensemble n'est pas vide.

(3) **Ordre** L'ensemble $\mathcal{A}$ est partiellement ordonné pour l'inclusion.

(4) **$\mathcal{A}$ est inductif** Nous prouvons maintenant que $\mathcal{A}$ est inductif[12]. Pour cela, soit une partie $\mathcal{A}'$ totalement ordonnée et $U = \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A$.

Alors, la partie U est un sous-espace vectoriel de E. En effet si $x, y \in U$, alors il existe $A_1, A_2 \in \mathcal{A}'$ tels que $x \in A_1$ et $y \in A_2$. Comme $\mathcal{A}'$ est totalement ordonné, l'un des ensembles parmi A_1 et A_2 est inclus dans l'autre. Sans perdre de généralité, disons $A_1 \subset A_2$. Alors les opérations s'effectuent dans A_2 : nous avons $x, y \in A_2$, et donc $\lambda x \in A_2 \subset U$ ainsi que $x + y \in A_2 \subset U$.

De plus, U contient W_1, et est contenu dans W_2. Ainsi, $U \in \mathcal{A}$ et majore $\mathcal{A}'$ pour l'inclusion. En bref, $\mathcal{A}$ est bien inductif.

(5) **Utilisation de Zorn** Le lemme de Zorn 1.37 nous donne alors un élément maximal W de $\mathcal{A}$. Cet élément vérifie

(5a) $W \cap V = \{0\}$,

(5b) $W_1 \subset W \subset W_2$,

(5c) pour tout $W' \in \mathcal{A}$, nous avons $W' \subset W$ par maximalité de W.

(6) **Supplémentaire** Montrons que ce W est un supplémentaire de V. Soit $x \in E$. Le but est de trouver une décomposition de x en somme d'un élément de W et un de V. Comme $V + W_2 = E$, nous avons $v \in V$ et $w_2 \in W_2$ tels que

$$x = v + w_2. \tag{4.25}$$

Si $w_2 \in W$ alors c'est fini. Sinon …

Soit $X = \text{Span}\{W, w_2\}$. Vu que X contient strictement W et que W est maximum dans $\mathcal{A}$, la partie X n'est pas un élément de $\mathcal{A}$. Comme X est un sous-espace vectoriel de E tel que $W_1 \subset X \subset W_2$, la seule possibilité pour que X ne soit pas dans $\mathcal{A}$ est que $X \cap V \neq \{0\}$. Soit donc $y \neq 0$ dans $X \cap V$. Par définition de X,

$$y = w' + \lambda w_2 \tag{4.26}$$

EqDecompo55:296

pour $w' \in W$, $w_2 \in W_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous avons $\lambda \neq 0$, sinon nous aurions $y \in W \cap V$ et donc $y = 0$ puisque W est dans $\mathcal{A}$. La décomposition (4.26) permet alors d'écrire $w_2 = (y - w')/\lambda$ et finalement

$$x = v + \frac{1}{\lambda}(y - w') = \underbrace{v + \frac{1}{\lambda}y}_{\in V} - \underbrace{\frac{1}{\lambda}w'}_{\in W}. \tag{4.27}$$

La somme d'espaces vectoriels $E = V + W$ est donc établie.

□

Corolaire 4.24.
Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel possède un supplémentaire.

Démonstration. Soit un espace vectoriel E ainsi qu'un sous-espace vectoriel V. Si $V = E$ nous sommes O.K. Sinon nous considérons $v \in E \setminus V$ et nous posons $W_1 = \mathbb{K}v$ et $W_2 = E$.

Vu que V et W_1 sont des espaces vectoriels, nous avons $V \cap W_1 = \{0\}$, et puisque $W_2 = E$, nous avons $V + W_2 = E$. Le lemme 4.23 nous donne alors un supplémentaire de V. □

PROPooHDCEooMhDjPi

Proposition 4.25 (Base incomplète)**.**
Tout espace vectoriel (non réduit à $\{0\}$) possède une base.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des familles libres de E. Il n'est pas vide parce que $\{v\}$ en est une dès que v est non nul dans E. Rapidement :

[12] Définition 1.36.

- l'ensemble $\mathcal{A}$ est ordonné pour l'inclusion,
- si $\mathcal{A}'$ est une partie totalement ordonnée, l'union est un majorant,
- donc $\mathcal{A}$ est inductif,
- soit un maximum F de $\mathcal{A}$.

La partie F est libre parce qu'elle est dans $\mathcal{A}$. Elle est génératrice parce que si v n'est pas dans $\text{Span}(F)$ alors la partie $F \cup \{v\}$ est encore libre, et majore strictement F pour l'inclusion, ce qui n'est pas possible.

Donc F est une base de E. □

THOooOQLQooHqEeDK

Théorème 4.26 (Base incomplète, dimension quelconque)**.**
Soit une partie $\{e_i\}_{i\in I}$ génératrice de l'espace vectoriel E (ici, I est un ensemble quelconque[13]). Soit $I_0 \subset I$ tel que $\{e_i\}_{i\in I_0}$ soit libre.

Alors il existe I_1 tel que $I_0 \subset I_1 \subset I$ tel que $\{e_i\}_{i\in I_1}$ soit une base de E.

Note : une telle partie I_0 existe en prenant un singleton. Mais l'existence n'est pas le sujet ici.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties J de I telles que $I_0 \subset J \subset I$ et telles que $\{e_i\}_{i\in J}$ soit libre.

Encore une fois, $\mathcal{A}$ est inductif pour l'ordre partiel donné par l'inclusion. Soit J un élément maximum par le lemme de Zorn 1.37. Puisque $J \in \mathcal{A}$, la partie $\{e_i\}_{i\in J}$ est libre. Mais elle est également génératrice parce que si e_k n'est pas dedans, J ne serait pas maximum, étant majorée par $J \cup \{k\}$.

Donc $\{e_i\}_{i\in J}$ engendre tous les e_i avec $i \in I$ et donc, tous les éléments de E. □

PROPooTSRCooOfTEmO

Proposition 4.27 ([1])**.**
L'ensemble des parties libres d'un espace vectoriel, muni de l'ordre de l'inclusion, est inductif[14].

Démonstration. Soit un espace vectoriel V. Soit un ensemble totalement ordonnée $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i\in I}$ de parties libres de V. Nous posons $L = \bigcup_{i\in I} L_i$. Nous prouvons que L est libre, de telle sorte que ce soit un maximum de $\mathcal{L}$.

Soient $x_1, \dots, x_n \in L$. Il existe une partie finie $I_0 \subset I$ telle que $x_1, \dots, x_n \in \bigcup_{i\in I_0} L_i$. Mais toute partie finie d'un ensemble totalement ordonné a un maximum (lemme 1.216). Donc il existe $i_0 \in I_0$ tel que $x_1, \dots, n_n \in L_{i_0}$. Vu que L_0 est libre et que $\{x_1, \dots, n_n\} \subset L_{i_0}$, la partie $\{x_1, \dots, x_n\}$ est libre. □

NORMooREVQooEFJWta

4.28 ([15])**.**
Une preuve alternative du théorème de la base incomplète serait de dire que l'ensemble des parties libres est inductif (proposition 4.27). De ce fait, la proposition 1.38 permet de dire que toute partie libre peut être complétée en une base.

4.1.2 Espace librement engendré

DEFooCPNIooNxsYMY

Définition 4.29 ([150])**.**
*Soient un ensemble S et un corps $\mathbb{K}$. L'espace vectoriel **librement engendré** sur S, noté $F_{\mathbb{K}}(S)$ est l'ensemble des applications $S \to \mathbb{K}$ qui sont non-nulles en un nombre fini de points de S.*

Autrement dit, $\sigma : S \to \mathbb{K}$ est dans $F_{\mathbb{K}}(S)$ si $\{x \in S \text{ tel que } \sigma(x) \neq 0\}$ est fini[15].

Le lemme suivant donne tout son sens à l'expression « librement » engendré. Il dit que $F_{\mathbb{K}}(S)$ possède une base indexée par S lui-même.

LEMooLOPAooUNQVku

Lemme 4.30.
L'ensemble des applications δ_s données par

$$\begin{aligned} \delta_s : S &\to \mathbb{K} \\ t &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.28}$$

avec $s \in S$ forment une base[16] de $F_{\mathbb{K}}(S)$.

[13] Un cas d'utilisation intéressant est de poser $I = E$ et $e_i = i$. Pensez-y.
[14] Définition 1.36.
[15] Parce que nous l'aimons bien, nous ne résistons pas à faire un renvoi vers la définition 1.69.
[16] Définition 4.5.

Démonstration. Pour prouver que les δ_s sont générateurs, nous considérons $g\colon S \to \mathbb{K}$ non nul sur la partie finie $\{s_i\}_{i\in I}$ de S. Alors nous avons

$$g = \sum_{i\in I} g(s_i)\delta_{s_i}. \tag{4.29}$$

Pour prouver que les δ_s forment une partie libre, nous supposons avoir $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que

$$g = \sum_{i\in I} \lambda_i \delta_{s_i} = 0 \tag{4.30}$$

Soit $j \in I$. Nous avons

$$0 = f(s_j) = \sum_{i\in I} \lambda_i \underbrace{\delta_{s_i}(s_j)}_{=\delta_{i,j}} = \lambda_j. \tag{4.31}$$

Donc les coefficients λ_i sont tous nuls, et nous avons prouvé que la partie est libre. □

Il est parfois pratique d'écrire les éléments de $F_{\mathbb{K}}(S)$ comme sommes « formelles » d'éléments de S. Cela va encore lorsque S est un ensemble n'ayant aucune somme bien définie.

Mais attention : si $S = \mathbb{R}$, l'élément $4+7$ de $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ n'est pas 11. L'élément 11 de $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ est un élément complètement différent. Bref, il n'est pas judicieux d'écrire les éléments de $F_{\mathbb{K}}(S)$ comme des combinaisons linéaires d'éléments de S. Pour $x \in S$ il vaut mieux écrire explicitement δ_x que x. La somme $\delta_x + \delta_y$ est parfaitement bien définie dans l'ensemble des applications de S vers $\mathbb{K}$.

4.2 Applications linéaires

Le lien entre matrice et applications linéaires est la définition 4.72 et toutes les propriétés qui s'en suivent.

4.2.1 Définition

DEFooULVAooXJuRmr

Définition 4.31.
*Soient des espaces vectoriels E et F sur le corps $\mathbb{K}$. Soit un sous-corps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Une application $T\colon E \to F$ est dite $\mathbb{L}$-**linéaire** si*

- $T(x+y) = T(x) + T(y)$ *pour tout x et y dans E,*
- $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ *pour tout λ dans $\mathbb{K}$ et x dans E.*

Nous noterons $\mathcal{L}_{\mathbb{L}}(E,F)$ l'espace des applications $\mathbb{L}$-linéaires de E vers F.

Si vous avez bien suivi, les égalités dans la définition 4.31 sont des égalités dans F.

4.32.
Le plus souvent, si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors nous ne considérerons que les applications $\mathbb{K}$-linéaires. Autrement dit, nous écrirons le plus souvent simplement $\mathcal{L}(E,F)$ sans préciser le corps.

Il pourra pourtant arriver que, pour un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, nous considérions les applications seulement $\mathbb{R}$-linéaires. Ce sera le cas dans le lemme 27.159.

DefDQRooVGbzSm

Lemme-Définition 4.33.
L'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E,F)$ et devient un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ avec les définitions suivantes :

(1) $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$,

(2) $(\lambda T)(x) = \lambda T(x)$.

EXooMAWMooEaNWpl

Exemple 4.34.
Pour tout b dans $\mathbb{R}$ la fonction $T_b(x) = bx$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet,

- $T_b(x+y) = b(x+y) = bx + by = T_b(x) + T_b(y)$,
- $T_b(ax) = b(ax) = abx = aT_b(x)$.

De la même façon on peut montrer que la fonction T_λ définie par $T_\lambda(x) = \lambda x$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ pour tout λ dans $\mathbb{R}$ et m dans $\mathbb{N}$. △

ex_affine

Exemple 4.35.
Soit $m \in \mathbb{N}$. On fixe λ dans $\mathbb{R}$ et v dans $\mathbb{R}^m$. L'application U_λ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ définie par $U_\lambda(x) = \lambda x + v$ n'est pas une application linéaire lorsque $v \neq 0$, parce que si a est un réel différent de 0 et 1, alors $av \neq v$, d'où

$$U_\lambda(ax) = \lambda(ax) + v \neq a(\lambda x + v) = aU_\lambda(x).$$

△

exampleT_A

Exemple 4.36.
Soit A une matrice fixée de $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$. La fonction $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ définie par $T_A(x) = Ax$ est une application linéaire. En effet,

- $T_A(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T_A(x) + T_A(y)$,
- $T_A(ax) = A(ax) = a(Ax) = aT_A(x)$.

△

LEMooLGEHooVEEoiU

Lemme 4.37.
Si une application linéaire est inversible, alors son inverse est linéaire.

Démonstration. Soient une application linéaire inversible $f : E \to F$, ainsi que $x, y \in E$. Nous avons

$$f\big(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)\big) = f\big(f^{-1}(x)\big) + f\big(f^{-1}(y)\big) = x + y = f\big(f^{-1}(x + y)\big). \tag{4.32}$$

En prenant f^{-1} des deux côtés, nous trouvons

$$f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}(x + y). \tag{4.33}$$

De même :

$$f\big(\lambda f^{-1}(x)\big) = \lambda f\big(f^{-1}(x)\big) = \lambda x = f\big(f^{-1}(\lambda x)\big), \tag{4.34}$$

ce qui nous donne $\lambda f^{-1}(x) = f^{-1}(\lambda x)$. □

DEFooOAOGooKuJSup

Définition 4.38 (Quelques ensembles d'applications linéaires)**.**
Soient E et F des espaces vectoriels.

- *L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$, comme déjà dit en 4.33.*
- *Une application linéaire $E \to E$ est un **endomorphisme** de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté* $\mathrm{End}(E)$.
- *Un endomorphisme bijectif est un **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes de E est noté* $\mathrm{Aut}(E)$.
- *Une application linéaire bijective $E \to F$ est un **isomorphisme** d'espace vectoriel. L'ensemble des isomorphismes de $E \to F$ est noté*[17] $\mathrm{GL}(E, F)$. *C'est un groupe par le lemme 4.37.*

Remarque 4.39.
Les ensembles définis en 4.38 concernent la structure d'espace vectoriel seulement. Lorsque nous verrons la notion d'espace vectoriel normé, nous demanderons de plus, la continuité, laquelle n'est pas automatique en dimension infinie. Voir aussi les définitions 10.312.

Définition 4.40.
*Si E est un espace vectoriel, si X est un espace vectoriel, et si $f : X \to E$ est une application, le **noyau** de f est le noyau de f lorsque E est vu comme un groupe pour l'addition*[18]*, c'est-à-dire la partie*

$$\ker(f) = \{x \in X \text{ tel que } f(x) = 0\}. \tag{4.35}$$

PROPooRLLPooKYzsJp

Proposition 4.41.
Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

[17] Le fait d'utiliser une notation similaire à celle des matrices inversibles n'est pas anodine : le lecteur en est sans doute conscient.
[18] Définition 2.6.

Démonstration. Soit une application linéaire $f\colon E \to F$. Si $x, y \in \ker(f)$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0, \tag{4.36}$$

donc $x + y \in \ker(f)$, et

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0, \tag{4.37}$$

donc $\lambda x \in \ker(f)$. □

LEMooIQJMooJWRbub

Lemme 4.42 ([1]).
Soit une application linéaire $f\colon V \to W$. Si $b \in W$ et si $m \in f^{-1}(b)$, alors

$$f^{-1}(b) - m = \ker(f). \tag{4.38}$$

Démonstration. Si $x \in f^{-1}(b) - m$, il existe $\alpha \in f^{-1}(b)$ tel que $x = \alpha - m$. Alors

$$f(x) = f(\alpha) - f(m) = b - b = 0. \tag{4.39}$$

Pour l'inclusion dans l'autre sens, si $z \in \ker(f)$, alors $z = (z + m) - m$ avec $z + m \in f^{-1}(b)$ parce que

$$f(z+m) = f(z) + f(m) = 0 + b = b = . \tag{4.40}$$

□

Proposition 4.43.
Si E et F sont des espaces vectoriels de dimension n et si $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ et $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ sont des bases respectivement de E et F, alors il existe une unique application linéaire $T\colon E \to F$ telle que $T(e_i) = f_i$ pour tout i.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Existence** Soit $v \in E$. Vu que $\{e_i\}$ est une base, v se décompose de façon unique en $v = \sum_i v_i e_i$. Alors la définition

$$T(v) = \sum_i v_i f_i \tag{4.41}$$

est une bonne définition et satisfait aux exigences.

(2) **Unicité** Soient T et U satisfaisant aux exigences. Alors pour tout i nous avons $T(e_i) = U(e_i)$. Si $v \in E$ s'écrit de la forme $v = \sum_i v_i e_i$ alors la linéarité impose $T(v) = \sum_i v_i T(e_i) = \sum_i v_i U(e_i) = U(v)$. Donc $T = U$.

□

LEMooJXFIooKDzRWR

Lemme 4.44 ([1]).
Soient des espaces vectoriels V et W de dimension finie. Soient des bases $\{e_i\}$ de V et $\{f_\alpha\}$ de W. Nous posons

$$\begin{aligned} \varphi_{i\alpha}\colon V &\to W \\ v &\mapsto v_i f_\alpha \end{aligned} \tag{4.42}$$

où v_i est défini par la décomposition (unique) $v = \sum_i v_i e_i$.
Alors :

(1) La partie $\{\varphi_{i\alpha}\}$ est une base de $\mathcal{L}(V, W)$.

ITEMooPMLWooNbTyJI

(2) Au niveau des dimensions : $\dim\big(\mathcal{L}(V,W)\big) = \dim(V)\dim(W)$.

Démonstration. Il faut prouver que $\{\varphi_{i\alpha}\}$ est libre et générateur.

(1) **Générateur** Soit une application linéaire $b\colon V \to W$. En décomposant $b(v)$ dans la base $\{f_\alpha\}$, nous définissons $b_\alpha\colon V \to \mathbb{K}$ par

$$b(v) = \sum_\alpha b_\alpha(v) f_\alpha. \tag{4.43}$$

Nous posons $b_{\alpha i} = b_\alpha(e_i)$. Ainsi,

$$b(v) = \sum_\alpha v_i b_{\alpha i} f_\alpha = \sum_{\alpha i} b_{\alpha i} \varphi_{i\alpha}(v). \tag{4.44}$$

Donc b peut être écrit comme combinaison linéaire des $\varphi_{i\alpha}$.

(2) **Libre** Supposons que $\sum_{i\alpha} a_{i\alpha}\varphi_{i\alpha} = 0$ pour certains coefficients $a_{i\alpha} \in \mathbb{K}$. Nous avons, pour tout $v \in V$:

$$0 = \sum_{i\alpha} a_{i\alpha}\varphi_{i\alpha}(v) = \sum_{i\alpha} a_{i\alpha}v_i f_\alpha, \tag{4.45}$$

mais comme les f_α forment une base, chaque terme de la somme sur α est nul :

$$\sum_i a_{i\alpha}v_i = 0. \tag{4.46}$$

Et comme cela est valable pour tout v et donc, pour tout choix de v_i, nous avons $a_{i\alpha} = 0$ pour tout i et pour tout α.

La formule de dimension est simplement la cardinalité de la base trouvée ; c'est la définition 4.16. □

4.2.2 Linéarité et bases

Proposition 4.45 ([151]).
Soient deux espaces vectoriels E et F. Une application linéaire[19] *$f : E \to F$ est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0\}$.

Démonstration. Nous supposons que f est injective. Si $x \in \ker(f)$, alors $f(x) = 0$. Or f est linéaire, donc $f(0) = 0$. Nous avons donc $f(x) = f(0)$ et donc $x = 0$ parce que f est injective.

Dans l'autre sens, soient x, y tels que $f(x) = f(y)$. Par linéarité de f nous avons $f(x - y) = 0$, et donc $x - y = 0$ parce que $\ker(f) = \{0\}$. Donc $x = y$ et f est injective. □

PROPooZFKZooBGLSex

Proposition 4.46 ([151]).
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels.

ITEMooPPMEooIaZqtm

(1) Si f est injective et si $\{v_i\}_{i\in I}$ est libre, alors $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est libre.

ITEMooOZSPooQBrDGi

(2) Si f est surjective et si $\{v_i\}_{i\in I}$ est génératrice, alors $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est génératrice.

ITEMooOIEYooIfdFnv

(3) Si f est une bijection, alors l'image d'une base par f est une base.

Démonstration. En trois parties.

(1) **(1)** Nous devons montrer que $\{f(v_j)\}_{j\in J}$ est libre pour tout J fini dans I. Soit donc une partie finie $J \subset I$ et des scalaires[20] tels que $\sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j) = 0$. La linéarité de f donne[21]

$$f\big(\sum_{j\in J} \lambda_j v_j\big) = 0. \tag{4.47}$$

Par injectivité de f nous avons alors $\sum_j \lambda_j v_j = 0$. Comme les v_j eux-même forment une partie libre, nous avons $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in J$.

(2) **(2)** Soit $y \in F$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Étant donné que $\{v_i\}_{i\in I}$ est générateur, il existe une partie finie $J \subset I$ et des scalaires $\lambda_j \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{j\in J} \lambda_j v_j. \tag{4.48}$$

En appliquant f aux deux côtés, et en tenant compte de la linéarité de f,

$$y = f(x) = \sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j), \tag{4.49}$$

ce qui prouve que y est une combinaison linéaire des $f(v_j)$.

(3) **(3)** Une base est à la fois libre et génératrice et une bijection est à la fois injective et surjective. Les deux premiers points permettent de conclure.

□

[19] Définition 4.31.
[20] Des éléments du corps de base $\mathbb{K}$.
[21] Voir les propriétés de la définition 4.31.

COROOXIPKooWThOsr

Corolaire 4.47 ([1]).
Si E et F sont des espaces vectoriels isomorphes de dimensions finies. Alors leurs dimensions sont égales.

Démonstration. Puisque E et F sont isomorphes, il existe une bijection $f\colon E \to F$. Par la proposition 4.46(3), l'image d'une base de E est une base de F. Donc les espaces E et F ont des bases contenant le même nombre d'éléments. □

4.2.3 Rang

La proposition 4.48 et le théorème 4.49 sont valables également en dimension infinie ; ce sera une des rares incursions en dimension infinie de ce chapitre.

DefALUAooSPcmyK

Proposition-Définition 4.48.
*L'image d'une application linéaire est un espace vectoriel. La dimension de cet espace est le **rang** de ladite application linéaire.*

Démonstration. Soit une application linéaire $f\colon E \to F$. Nous considérons v, w dans l'image de f ainsi que λ dans le corps de base commun à E et F.

Soient $v_0 \in E$ et $w_0 \in E$ tels que $v = f(v_0)$ et $w = f(w_0)$. Alors $v + w = f(v_0 + w_0)$ et $\lambda v = f(\lambda v_0)$. Donc l'image est bien un espace vectoriel. □

ThoGkkffA

Théorème 4.49 (Théorème du rang).
Soient E et F deux espaces vectoriels (de dimensions finies ou non) et soit $f\colon E \to F$ une application linéaire.

Si $(u_s)_{s\in S}$ est une base de $\ker(f)$ et si $\big(f(v_t)\big)_{t\in T}$ est une base de $\text{Image}(f)$ alors

$$(u_s)_{s\in s} \cup (v_t)_{t\in T} \tag{4.50}$$

est une base de E.

En dimension finie, nous avons en plus la formule suivante :

EQooUEOQooLySRiE

$$\text{rk}(f) + \dim(\ker f) = \dim E, \tag{4.51}$$

c'est-à-dire que le rang[22] de f est égal à la codimension[23] du noyau.

Démonstration. Nous devons montrer que

$$(u_s)_{s\in S} \cup (v_t)_{t\in T} \tag{4.52}$$

est libre et générateur.

Soit $x \in E$. Nous définissons les nombres x_t par la décomposition de $f(x)$ dans la base $\big(f(v_t)\big)$:

$$f(x) = \sum_{t\in T} x_t f(v_t). \tag{4.53}$$

Ensuite le vecteur $x - \sum_t x_t v_t$ est dans le noyau de f, par conséquent nous le décomposons dans la base (u_s) :

$$x - \sum_t x_t v_t = \sum_{s\in S} x_s u_s. \tag{4.54}$$

Par conséquent

$$x = \sum_s x_s u_s + \sum_t x_t v_t. \tag{4.55}$$

En ce qui concerne la liberté nous écrivons

$$\sum_t x_t v_t + \sum_s x_s u_s = 0. \tag{4.56}$$

En appliquant f nous trouvons que

$$\sum_t x_t f(v_t) = 0 \tag{4.57}$$

et donc que les x_t doivent être nuls. Nous restons avec $\sum_s x_s u_s = 0$ qui à son tour implique que $x_s = 0$. □

[22] Définition 4.48.
[23] Définition 4.20.

Un exemple d'utilisation de ce théorème en dimension infinie sera donné dans le cadre du théorème de Fréchet-Riesz, théorème 25.18.

PROPooQCIXooHIyPPq

Proposition 4.50 ([152]).
Soit E, un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$. Soient V et W des sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W). \tag{4.58}$$

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon V \times W &\to E \\ (x,y) &\mapsto x+y. \end{aligned} \tag{4.59}$$

C'est une application linéaire dont l'image est $V+W$. Nous avons donc, pour commencer

$$\dim(V+W) = \dim\big(\text{Image}(\varphi)\big). \tag{4.60}$$

Nous appliquons à présent le théorème du rang 4.49 à l'application φ :

$$\dim(V+W) = \dim\big(\text{Image}(\varphi)\big) \tag{4.61a}$$
$$= \dim(V\times W) - \dim\big(\ker(\varphi)\big) \tag{4.61b}$$
$$= \dim(V) + \dim(W) - \dim\big(\ker(\varphi)\big). \tag{4.61c}$$

Nous devons maintenant étudier $\ker(\varphi)$. D'abord, $(v,w) \in V\times W$ appartient à $\ker(\varphi)$ si et seulement si $v+w=0$. Nous avons donc

$$\ker(\varphi) = \{(x,-x) \text{ tel que } x \in V\cap W\}. \tag{4.62}$$

Nous montrons à partir de cela que $\dim\big(\ker(\varphi)\big) = \dim(V\cap W)$ en montrant que l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon V\cap W &\to \ker(\varphi) \\ x &\mapsto (x,-x) \end{aligned} \tag{4.63}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. D'abord ψ est injective parce que si $\psi(x)=\psi(y)$, alors $(x,-x)=(y,-y)$ et donc $x=y$. Ensuite, ψ est surjective parce qu'un élément générique de $\ker(\varphi)$ est $(x,-x)=\psi(x)$ avec $x\in V\cap W$. L'application ψ étant un isomorphisme d'espaces vectoriels, nous avons bien $\dim\big(\ker(\varphi)\big) = \dim(V\cap W)$. □

CORooCCXHooALmxKk

Corolaire 4.51.
Soient deux espaces vectoriels E et F de même dimension finie[24]*. Pour une application linéaire $f\colon E\to F$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) f est injective ;

(2) f est surjective ;

(3) f est bijective.

Démonstration. Si $f\colon E\to E$ est surjective, alors $\text{rk}(f)=\dim(E)$, ce qui donne, par le théorème du rang 4.49, $\dim\big(\ker(f)\big)=0$, c'est-à-dire que f est injectif.

De la même façon, si f est injective, alors $\dim\big(\ker(f)\big)=0$, ce qui donne $\text{rk}(f)=\dim(E)$ ou encore que f est surjective. □

Exemple 4.52.
Le corolaire 4.51 n'est pas correct en dimension infinie. Par exemple en prenant $f(e_1)=f(e_2)=e_1$ et ensuite $f(e_k)=e_{k-1}$ pour tout $k\geqslant 2$. Cette application est surjective mais pas injective. △

LEMooNNDDooKXdqud

Lemme 4.53 ([1]).
Soit un espace vectoriel E. Si $p\colon E\to E$ est un projecteur[25] *vérifiant $p(E)=E$, alors $p=\text{Id}$.*

Démonstration. L'hypothèse est que p est surjective. Le corolaire 4.51 dit que p est alors bijective et donc inversible. En partant de $p^2(x)=p(x)$ et en appliquant p^{-1} est deux côtés nous trouvons $p(x)=x$. Donc $p=\text{Id}$. □

[24] Les deux mots sont importants : les dimensions doivent être égales et finies.
[25] Définition 1.457.

PROPooKUAVooCbjDcR

Proposition 4.54 ([1])**.**
Soient des espaces vectoriels de dimension finie V et W vérifiant $\dim(V) > \dim(W)$. Si $f\colon V \to W$ est une application linéaire, alors $\dim\big(\ker(f)\big) \geqslant \dim(V) - \dim(W)$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du théorème du rang (4.51). Vu que $\mathrm{rk}(f) \leqslant \dim(W)$, nous avons

$$\dim\big(\ker(f)\big) = \dim(V) - \mathrm{rk}(f) \geqslant \dim(V) - \dim(W). \tag{4.64}$$

□

Une conséquence du théorème du rang est que les endomorphismes ont un inverse à gauche et à droite égaux (lorsqu'ils existent). En résumé, ce que le corolaire 4.55 dit est que si $AB = \mathbb{1}$, alors $BA = \mathbb{1}$.

CORooNFJLooJtzFwN

Corolaire 4.55.
Soit un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie. Si f admet un inverse à gauche, alors

(1) f est bijective,

(2) f admet également un inverse à droite,

(3) les inverses à gauche et à droite sont égaux.

Tout cela tient également en remplaçant « gauche » par « droite ».

Démonstration. Soit g, un inverse à gauche de f : $gf = \mathrm{Id}$. Cela implique que f est injective et que g est surjective, et donc qu'elles sont toutes deux bijectives par le corolaire 4.51. Puisque f est bijective, elle admet également un inverse à droite, soit h. Nous avons : $gf = \mathrm{Id}$ et $fh = \mathrm{Id}$.

Alors $gfh = h$ parce que $gf = \mathrm{Id}$, mais également $gfh = g$ parce que $fh = \mathrm{Id}$. Donc $g = h$.[26] □

C'est ce corolaire qui nous permet d'écrire f^{-1} sans plus de précisions dès que f est une bijection.

Exemple 4.56 (Pas en dimension infinie)**.**
Tout cela ne fonctionne pas en dimension infinie. Par exemple avec une base $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ nous pouvons considérer l'opérateur

$$f(e_k) = e_{k+1}. \tag{4.65}$$

Il est injectif, mais pas surjectif. Si on pose

$$g(e_k) = \begin{cases} e_{k-1} & \text{si } k \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \tag{4.66}$$

alors nous avons $gf = \mathrm{Id}$, mais pas $fg = \mathrm{Id}$ parce que ce $(fg)(e_0) = 0$. △

LEMooRZDTooEuLTrO

Lemme 4.57.
Si E et F sont des espaces vectoriels et si $f\colon E \to F$ est une application linéaire inversible, alors son inverse est également linéaire.

Démonstration. Nous avons $f^{-1}(x + y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$. En effet,

$$f\big(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)\big) = f\big(f^{-1}(x)\big) + f\big(f^{-1}(y)\big) = x + y. \tag{4.67}$$

De la même façon,

$$f\big(\lambda f^{-1}(x)\big) = \lambda x, \tag{4.68}$$

donc $f^{-1}(\lambda x) = \lambda f^{-1}(x)$. □

PROPooHLUYooNsDgbn

Proposition 4.58.
Soient un espace vectoriel E de dimension finie, un endomorphisme $f\colon E \to E$ et une partie $\{v_i\}_{i\in I}$ tel que $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ soit une base.

Alors $\{v_i\}_{i\in I}$ est une base.

[26] C'est le même argument que celui employé pour la preuve du lemme 1.254 (2), à ceci près que nous devions montrer l'existence de l'inverse à droite.

Démonstration. Soit $x \in E$. Il existe une partie finie $J \subset I$ et des scalaires λ_j tels que

$$x = \sum_j \lambda_j f(v_j) = f\big(\sum_j \lambda_j v_j\big), \tag{4.69}$$

ce qui prouve que f est surjective. Le corolaire 4.51 nous dit alors que f est une bijection. L'application inverse est également linéaire par le lemme 4.57.

Une application linéaire bijective (comme f^{-1}) transforme une base en une base par la proposition 4.46. Donc

$$f^{-1}\big(\{f(v_i)\}\big) \tag{4.70}$$

est une base. □

PROPooADESooATJSrH

Proposition 4.59.
Soit un espace vectoriel E de dimension finie et deux applications linéaires $f, g\colon E \to E$ telles que $g \circ f = \mathrm{Id}$. Alors f et g sont bijectives.

Démonstration. En plusieurs étapes

(1) **f est injective** Si $f(x) = f(y)$, alors en appliquant g nous avons

$$g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big), \tag{4.71}$$

ce qui donne $x = y$.

(2) **f est surjective** C'est maintenant le corolaire 4.51.

(3) **g est surjective** Pour tout $x \in E$ nous avons $g\big(f(x)\big) = x$. Donc l'image de $f(E)$ par g est E.

(4) **g est injective** C'est maintenant le corolaire 4.51.

□

LEMooDAACooElDsYb

Lemme 4.60 ([153]).
Soit une application linéaire $f\colon E \to F$.

ITEMooEZEWooZGoqsZ

(1) L'application f est injective si et seulement si il existe $g\colon F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}\,|_E$.

(2) L'application f est surjective si et seulement si il existe $g\colon F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}\,|_F$.

Démonstration. Nous démontrons séparément les deux affirmations.

(1) Si f est injective, alors $f\colon E \to \mathrm{Image}(f)$ est un isomorphisme. Si V est un supplémentaire de $\mathrm{Image}(f)$ dans F (c'est-à-dire $F = \mathrm{Image}(f) \oplus V$) alors nous pouvons poser $g(x + v) = f^{-1}(x)$ où $x + v$ est la décomposition (unique) d'un élément de F en $x \in \mathrm{Image}(f)$ et $v \in V$. Avec cela nous avons bien $g \circ f = \mathrm{Id}$.

Réciproquement, si il existe $g\colon F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}$ alors $f\colon E \to E$ doit être injective. Parce que si $f(x) = 0$ avec $x \neq 0$ alors $(g \circ f)(x) = 0 \neq x$.

(2) Si f est surjective nous pouvons choisir des éléments $x_1, \dots, x_p$ dans E tels que $\{f(x_i)\}$ soit une base de F. Ensuite nous définissons

$$\begin{aligned} g\colon F &\to E \\ \sum_k a_k f(x_k) &\mapsto \sum_k a_k x_k. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Cela donne $f \circ g = \mathrm{Id}\,|_F$ parce que si $v \in F$ alors $v = \sum_k v_k f(x_k)$ avec $v_k \in \mathbb{K}$, et nous avons

$$(f \circ g)(v) = \sum_k v_k (f \circ g)\big(f(x_k)\big) = f\left(\sum_k v_k x_k\right) = \sum_k v_k f(x_k) = v. \tag{4.73}$$

Réciproquement, si il existe $g\colon F \to E$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}$ alors f doit être surjective, parce que

$$F = \mathrm{Image}(f \circ g) = f\big(\mathrm{Image}(g)\big) \subset \mathrm{Image}(f). \tag{4.74}$$

□

4.3 Matrices

Les matrices et les applications linéaires sont deux choses différentes. Une application linéaire[27] est une application d'un espace vectoriel vers un autre, et une matrice est un simple tableau de nombres sur lesquels nous définissons des opérations, de telle sorte à fournir une structure d'espace vectoriel. Le lien entre ces opérations et les opérations correspondantes sur les applications linéaires sera fait plus tard. Voir la définition 4.72 et ce qui s'en suit.

4.3.1 Définitions

Les notions topologiques sur les espaces de matrices sont pour plus tard, à commencer par la définition 9.34.

Définition 4.61.
Soit un anneau $\mathbb{A}$ ainsi que des entiers m, n strictement positifs. L'ensemble $\mathbb{M}(n\times m,\mathbb{A})$ est l'ensemble des applications

$$\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}\to\mathbb{A}, \tag{4.75}$$

*et est appelé ensemble des **matrices** $n\times m$ sur $\mathbb{A}$.*

Si A est une matrice, nous notons $A_{i,j}$ au lieu de $A(i,j)$ l'image de (i,j) par l'application A.

Définition 4.62.
Quelques ensembles de matrices particuliers.

(1) *Si $n=m$, alors :*
- *nous disons que la matrice est **carrée**,*
- *nous notons $\mathbb{M}(n,\mathbb{A})$ pour $\mathbb{M}(n\times n,\mathbb{A})$,*
- *n est appelée **ordre** de la matrice.*

(2) *Si $n=1$, alors la matrice est appelée **matrice-ligne**.*

(3) *Si $m=1$, alors la matrice est appelée **matrice-colonne**.*

4.63.
On note les isomorphismes naturels $\mathbb{M}(1\times m,\mathbb{A})\simeq\mathbb{A}^m$ et $\mathbb{M}(n\times 1,\mathbb{A})\simeq\mathbb{A}^n$.

LEMooYWTEooQyLxKv

Lemme-Définition 4.64.
Nous considérons les opérations suivantes sur $\mathbb{M}(n\times m,\mathbb{A})$:

Somme $(A+B)_{i,j}=A_{i,j}+B_{i,j}$,

Produit par un scalaire $(\lambda\cdot A)_{i,j}=\lambda A_{i,j}$ *pour tout $A,B\in\mathbb{M}(n\times m,\mathbb{A})$ et $\lambda\in\mathbb{A}$.*

Alors $\big(\mathbb{M}(n\times m,\mathbb{A}),+,\cdot\big)$ est un $\mathbb{A}$-module[28].

Démonstration. Plusieurs parties. Il faut vérifier les conditions de la définition 1.444.

(1) **Groupe** Le neutre est la matrice nulle $N_{ij}=0$. Nous avons $((A+B)+C)_{ij}=(A+B)_{ij}+C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}+C_{ij}$. Et l'inverse de A est $B_{ij}=-A_{ij}$.

(2) **Autres propriétés** Nous n'allons pas toutes les faire. Par exemple

$$\begin{aligned}\lambda\big(\lambda(A+B)\big)_{ij}&=\lambda(A+B)_{ij} &(4.76a)\\ &=\lambda(A_{ij}+B_{ij}) &(4.76b)\\ &=\lambda A_{ij}+\lambda B_{ij} &(4.76c)\\ &=(\lambda A)_{ij}+(\lambda B)_{ij}. &(4.76d)\end{aligned}$$

Notez l'utilisation de $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ lorsque $x,y\in\mathbb{A}$.

□

[27] Définition 4.31.
[28] Définition 1.444

LEMooMBZTooKdGvON

Lemme-Définition 4.65.
Avec la multiplication

$$\begin{aligned}\mathbb{M}(n\times p,\mathbb{A})\times\mathbb{M}(p\times m,\mathbb{A})&\to\mathbb{M}(n\times m,\mathbb{A})\\(A,B)&\mapsto(AB)_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}A_{i,k}B_{k,j},\end{aligned}\tag{4.77}$$

l'espace $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre*[29].

Démonstration. Il faut vérifier les trois formules de la définition 1.461.

(1) **Distribution (1)** Nous avons

$$\big((x+y)\times z\big)_{ij}=\sum_k(x+y)_{ik}z_k=\sum_k\big(x_{ik}z_kj+y_{ik}z_{kj}\big)=(xz)_{ij}+(yz)_{ij}.\tag{4.78}$$

(2) **Distribution (2)** Même calcul.

(3) **Multiplication par un scalaire** Encore le même genre de calculs, en partant de

$$\big((\alpha x)\times(\beta y)\big)_{ij}=\sum_k(\alpha x)_{ik}(\beta y)_{kj}.\tag{4.79}$$

□

Définition 4.66.
Pour un élément $A\in\mathbb{M}(n\times m,\mathbb{A})$ *nous définissons encore*

La transposée $A^t_{i,j}=A_{j,i}$,

La trace $\mathrm{Tr}(A)=\sum_i A_{i,i}$.

Remarque 4.67.
Quelques remarques directes sur les définitions.

(1) La motivation de cette définition pour le produit apparaîtra plus loin, mais le Frido n'étant pas un livre d'introduction, j'imagine que le lecteur a déjà une idée.

(2) Nous verrons plus loin en 8.11.3 que la définition de transposée d'une application linéaire n'est pas tout à fait évidente ; elle sera la définition 8.184.

Ici nous avons bien défini la transposée d'une matrice, pas d'une application linéaire.

Remarque 4.68.
Quelques remarques à propos de structures supplémentaires.

(1) Nous utiliserons (presque) tout le temps des matrices à coefficients dans un corps. Il est clair que, si $\mathbb{K}$ est un corps (commutatif), alors $\mathbb{M}(n\times m,\mathbb{K})$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

(2) Par ailleurs, sur les matrices carrées d'ordre n fixé, le produit de deux matrices est bien défini. Ainsi, $\mathbb{M}(n,\mathbb{A})$ se voit conférer une structure d'anneau, dont le neutre pour la multiplication est la matrice carrée $\mathbb{1}_n$ (notée aussi $\mathbb{1}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille), donnée par

$$\mathbb{1}_{i,j}=\begin{cases}1&\text{si } i=j\\0&\text{sinon.}\end{cases}\tag{4.80}$$

Il est vite vu que si A est une matrice carrée d'ordre n, alors $A\mathbb{1}=\mathbb{1}A=A$.

LEMooUXDRooWZbMVN

Lemme 4.69 ([1])**.**
Si A*,* B *et* C *sont des matrices, nous avons*

(1) $(AB)^t=B^tA^t$,

ITEMooXDYQooAlnArd

(2) $\mathrm{Tr}(ABC)=\mathrm{Tr}(CAB)$.

[29] Définition 1.461.

Démonstration. La première est un simple calcul :

$$(AB)^t_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_k A_{j,k}B_{k,i} = \sum_k A^t_{k,j}B^t_{i,k} = (B^tA^t)_{i,j}. \tag{4.81}$$

Pour la seconde :

$$\mathrm{Tr}(ABC) = \sum_{ikl} A_{i,k}B_{k,l}C_{l,i} = \sum_{ikl} C_{l,i}A_{i,k}B_{k,l} = \sum_l (CAB)_{l,l} = \mathrm{Tr}(CAB). \tag{4.82}$$

□

4.70.
La seconde égalité est importante et est nommée **invariance cyclique** de la trace. Elle sert, entre autres nombreuses choses, à prouver que la trace d'une matrice d'une application linéaire ne dépend pas de la base choisie. Ce sera la proposition 8.202.

LEMooLXAHooPRyHaF

Lemme 4.71.
Soient des matrices $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Si pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$ nous avons

$$\sum_{ij} A_{i,j}x_iy_j = \sum_{ij} B_{i,j}x_iy_j \tag{4.83}$$

alors $A = B$.

Démonstration. Il suffit de choisir $x_i = \delta_{i,k}$ et $y_j = \delta_{j,l}$ et d'effectuer les sommes ; par exemple

$$\sum_{ij} A_{i,j}\delta_{i,k}y_j = \sum_j A_{k,j}y_j. \tag{4.84}$$

Après avoir effectué toutes les sommes, nous nous retrouvons avec $A_{k,l} = B_{k,l}$, ce qui signifie $A = B$. □

4.3.2 Identifier matrices et applications linéaires

Voir dans l'index thématique, -1.1.1.

Soient deux espaces vectoriels de dimension finie E, F sur le corps $\mathbb{K}$. Nous considérons les bases[30] $\{e_i\}$ pour E et $\{f_\alpha\}$ pour F.

DEFooJVOAooUgGKme

Définition 4.72.
Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{K}) &\to \mathcal{L}(E, F)\\ A &\mapsto f_A\end{aligned} \tag{4.85}$$

EQooVZQWooMyFFeO

où f_A est définie par

$$f_A(x) = \sum_{i\alpha} A_{\alpha,i}x_if_\alpha \tag{4.86}$$

EQooBVGHooJhFbMs

si x_i sont les coordonnées de $x \in E$ dans la base $\{e_i\}$.

4.73.
Nous allons prouver un certain nombre de résultats montrant que cette application a toutes les propriétés imaginables permettant d'identifier les matrices aux applications linéaires : elle est un isomorphisme pour toutes les structures que vous pouvez raisonnablement imaginer.

À cette application ψ il manque cependant une propriété importante : elle n'est pas canonique. Elle dépend des bases choisies. Autrement dit : nous avons à priori autant d'applications ψ différentes qu'il y a de choix de bases sur E et F[31].

Nous allons prouver maintenant quelques résultats montrant que les matrices et les applications linéaires, dans le cas des espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ sont deux présentations de la même chose.

Le fait que ψ est continue sera la proposition 12.119.

[30] C'est le théorème 4.14 qui nous permet de considérer des bases. Et ce théorème ne fonctionne que parce que nous avons supposé une dimension finie.

[31] Bonne question. Est-ce qu'il y a moyen de construire deux choix de bases donnant la même application ψ ? Écrivez-moi si vous savez la réponse.

4.74.
Lorsque $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est une matrice et $x \in \mathbb{K}^n$ un vecteur, nous notons Ax l'élément de $\mathbb{K}^n$ donné par

$$(Ax)_i = \sum_j A_{i,j} x_j. \tag{4.87}$$

EQooQFVTooMFfzol

Autrement dit, $Ax = f_A(x)$.

Cette convention et de nombreuses autres à propos de matrice sera rappelée dans -1.1.

PROPooGXDBooHfKRrv

Proposition-Définition 4.75.
Soient deux espaces vectoriels de dimension finie E, F sur le corps $\mathbb{K}$. Nous considérons les bases $\{e_i\}$ pour E et $\{f_\alpha\}$ pour F.

Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{K}) &\to \mathcal{L}(E, F) \\ A &\mapsto f_A \end{aligned} \tag{4.88}$$

où f_A est définie par

$$f_A(x) = \sum_{i\alpha} A_{\alpha,i} x_i f_\alpha \tag{4.89}$$

EQooZKEKooNYjvhP

si x_i sont les coordonnées de $x \in E$ dans la base $\{e_i\}$.

Alors

ITEMooKZYYooZPTkpq

(1) Nous avons

$$f_A(e_i)_\alpha = A_{\alpha,i}. \tag{4.90}$$

ITEMooANXFooGIuxUR

(2) Nous avons

$$f_A(e_i) = \sum_\alpha A_{\alpha,i} f_\alpha. \tag{4.91}$$

EQooOKOJooYgteNP

ITEMooXLLLooKfigfB

(3) Nous avons

$$\big(f_A(x)\big)_\alpha = \sum_i A_{\alpha,i} x_i. \tag{4.92}$$

EQooAXRJooUwHbiB

ITEMooHSMLooRJZref

(4) L'application ψ est une bijection.

*Si f est une application linéaire, alors la matrice $\psi^{-1}(f)$ est la **matrice associée** à f dans les bases choisies.*

Remarque : les bases ne sont supposées être canoniques en aucun sens du terme. Les dimensions de E et F ne sont pas non plus supposées identiques.

Démonstration. En nous rappelant que $(e_j)_i = \delta_{i,j}$ nous avons

$$f_A(e_j) = \sum_{i\alpha} A_{\alpha,i} (e_j)_i f_\alpha = \sum_\alpha A_{\alpha,j} f_\alpha, \tag{4.93}$$

EQooWGZHooIBovgB

donc $f_A(e_i)_\alpha = A_{\alpha,i}$. Cela prouve la formule du point (1).

Le point (2) est une simple somme sur α de (1).

La formule du point (3) est simplement la composante f_α de la définition 4.89.

Prouvons que ψ est injective. Si $f_A = f_B$, nous avons en particulier $f_A(e_i)_\alpha = f_B(e_i)_\alpha$ et donc $A_{\alpha,i} = B_{\alpha,i}$.

Prouvons que ψ est surjective. Pour cela nous considérons $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et nous posons $A_{\alpha,i} = f(e_i)_\alpha$. Nous avons alors $f = f_A$ parce que

$$f_A(x) = \sum_{i\alpha} A_{\alpha,i} x_i f_\alpha = \sum_{i\alpha} f(e_i)_\alpha x_i f_\alpha = \sum_\alpha f(\sum_i x_i e_i)_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha f(x)_\alpha f_\alpha = f(x). \tag{4.94}$$

□

La proposition suivante montre que le produit matriciel correspond à la composition d'applications linéaires, pourvu que l'on travaille avec les bases canoniques sur $\mathbb{K}^n$.

PROPooIYVQooOiuRhX

Proposition 4.76 ([1]).
Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$. Nous considérons des espaces vectoriels E et F munis de bases $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ et $\{f_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,m}$.

L'application déjà définie[32]

$$\psi\colon \mathbb{M}(m\times n,\mathbb{K})\to\mathcal{L}(E,F) \tag{4.95}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. Le fait que ψ soit une bijection est la proposition 4.75. Nous devons montrer que c'est une application linéaire.

Pour $\lambda\in\mathbb{K}$ nous avons le calcul

$$\psi(\lambda A)(e_k)=f_{\lambda A}(e_k)=\sum_{\alpha i}(\lambda A)_{\alpha,i}\underbrace{(e_k)_i}_{=\delta_{k,i}}f_\alpha=\lambda\sum_\alpha A_{\alpha,k}f_\alpha=\lambda f_A(e_k). \tag{4.96}$$

Donc $\psi(\lambda A)=\lambda\psi(A)$.

Si $A,B\in\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ nous avons de la même façon, $f_{A+B}=f_A+f_B$. □

PROPooCSJNooEqcmFm

Proposition 4.77.
Soient des espaces vectoriels E, F et G de dimensions n, m et p munis de bases[33] *$\{e_i\}$, $\{f_i\}$ et $\{g_i\}$. Nous considérons les applications*

$$\psi\colon \mathbb{M}(m\times n,\mathbb{K})\to\mathcal{L}(E,F) \tag{4.97a}$$
$$\psi\colon \mathbb{M}(p\times m,\mathbb{K})\to\mathcal{L}(F,G) \tag{4.97b}$$
$$\psi\colon \mathbb{M}(p\times n,\mathbb{K})\to\mathcal{L}(E,G). \tag{4.97c}$$

Nous avons

$$\psi(A)\circ\psi(B)=\psi(AB) \tag{4.98}$$

pour toutes matrices $A\in\mathbb{M}(p\times m,\mathbb{K})$ et $B\in\mathbb{M}(m\times n,\mathbb{K})$.

Démonstration. Nous considérons les applications linéaires associées à A et B : $f_A\colon F\to G$ et $f_B\colon E\to F$ et la composée $f_A\circ f_B\colon E\to G$. Et puis c'est le calcul :

$$(f_A\circ f_B)(e_k)=f_A\big(\sum_{ij}B_{i,j}(e_k)_jf_i\big) \tag{4.99a}$$
$$=\sum_i B_{i,k}f_A(f_i) \tag{4.99b}$$
$$=\sum_i B_{i,k}\sum_{rs}A_{r,s}(f_i)_sg_r \tag{4.99c}$$
$$=\sum_{ir}B_{i,k}A_{r,i}g_r \tag{4.99d}$$
$$=\sum_r(AB)_{r,k}g_r \tag{4.99e}$$
$$=f_{AB}(e_k). \tag{4.99f}$$

Donc $f_A\circ f_B=f_{AB}$ comme il se doit. □

Nous pouvons particulariser au cas où $E=F=G$.

PROPooFMBFooEVCLKA

Proposition 4.78.
Si E est un espace vectoriel muni d'une base $\{e_i\}$, alors l'application

$$\psi\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{K})\to\mathrm{End}(E) \tag{4.100}$$

est un isomorphisme d'algèbre[34] *et d'anneaux*[35].

[32] Notez la position du n et du m. Sachez noter les bornes des sommes écrites dans la démonstration.
[33] Avec trois ensembles, nous renonçons à utiliser des alphabets différents pour numéroter les éléments des bases.
[34] Définition 1.461.
[35] Définition 1.98

Démonstration. Le fait que ψ soit un isomorphisme d'algèbre est juste la combinaison entre les propositions 4.76 et 4.77.

En ce qui concerne l'isomorphisme d'anneaux, il faut en plus identifier les neutres. Le neutre pour la composition d'applications linéaires est l'application identité et le neutre pour la multiplication de matrices est la matrice identité. Nous devons donc montrer que $\psi(\delta) = f_\delta = \mathrm{Id}$. Juste un calcul :

$$f_\delta(x) = \sum_{ij} \delta_{i,j} x_j e_i = \sum_i x_i e_i = x. \tag{4.101}$$

Donc oui, f_δ est l'identité. □

Le fait que ψ est continue sera la proposition 12.119.

Voilà. Soyez bien conscient que l'application ψ dont nous avons beaucoup parlé est surtout intéressante dans le cas des espaces de la forme $\mathbb{K}^n$. Dans ce cas, nous avons une identification canonique entre $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ et $\mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ qui est un isomorphisme d'anneaux et d'algèbres.

Nous verrons que ce ψ respecte encore les inverses[36] et les déterminants[37].

4.79.
Il convient de ne pas confondre matrice et application linéaire (bien que nous le ferons sans vergogne). Une matrice est un bête tableau de nombres, tandis qu'une application linéaire est une application entre deux espaces vectoriels vérifiant certaines propriétés.

Cependant si les espaces vectoriels E et F sont munis de bases, alors il y a une application

$$\psi : \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{K}) \to \mathcal{L}(E, F) \tag{4.102}$$

qui a toutes les propriétés imaginables[38].

Cette application dépend des bases choisies. Il n'y a donc pas de trucs comme « la matrice de telle application linéaire » ou comme « voici une matrice, nous considérons l'application linéaire associée ».

Cependant, sur des espaces comme $\mathbb{R}^n$ ou plus généralement sur $\mathbb{K}^n$, nous avons une base canonique et toute personne raisonnable utilise toujours la base canonique (sauf mention du contraire). Dans ces cas il est sans danger de dire « la matrice associée à telle application linéaire » sans préciser les bases.

Mais si un jour vous utilisez une base autre que la base canonique sur $\mathbb{R}^n$, précisez-le et plutôt deux fois qu'une[39].

4.80.
Tant que nous sommes à parler de matrice et d'applications linéaires, les plus acharnés anti-abus de language[40] remarqueront qu'il n'est pas vrai que « étant donné une base, une application linéaire a une matrice ».

En effet, une base est une partie libre et génératrice (définition 4.5). Or une partie d'un ensemble n'est pas muni d'un ordre. Toutes les permutations de colonnes de la matrice sont encore possible d'après l'ordre que l'on met sur les vecteurs de la base.

Encore une fois, la base canonique n'a pas de problème parce que les $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^n$ viennent avec un ordre indiscutable. Plus généralement, très souvent, lorsqu'on construit une base, la construction suggère un ordre.

4.3.3 Ensemble des applications linéaires

PROPooRIFBooGOvsfb

Proposition 4.81 ([1])**.**
Soient deux espaces vectoriels de dimension finie V et W. Soit des bases $\{e_i\}_{i\in I}$ de V et $\{e'_j\}_{j\in J}$ de W. Nous considérons les applications

EQooBMKQooCCvpzP

$$\begin{aligned} f_{ij} &: V \to W \\ \sum_k x_k e_k &\mapsto x_i e'_j. \end{aligned} \tag{4.103}$$

Nous avons :

ITEMooSEMLooXuxrpk

(1) Ces applications sont linéaires.

(2) Elles forment une base de $\mathcal{L}(V, W)$.

(3) $\dim(V, W) = \dim(V)\dim(W)$.

[36] Proposition 4.101.
[37] Proposition 8.16.
[38] Et elle en aura encore plus lorsque nous aurons vu les déterminants.
[39] Au passage, non, les coordonnées polaires ne sont pas une base de $\mathbb{R}^2$. C'est un système de coordonnées, et ce n'est pas la même chose.
[40] Dont l'auteur de ces lignes fait partie.

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

PROPooPNQNooAZpojm

Proposition 4.82 ([1]).
Soient des bases $\{e_i\}$ et $\{e'_j)\}$ des espaces vectoriels V et W. Soit une application linéaire $A \in \mathrm{End}(V,W)$. Alors

$$A = \sum_{ij} A_{ji} f_{ij} \tag{4.104}$$

où les f_{ij} sont les éléments de bases définis en (4.103) et A_{ji} sont les éléments de matrices définis par la proposition 4.75.

Démonstration. Il s'agit d'un calcul. En appliquant à e_k, nous avons

$$\sum_{ij} A_{ji} f_{ij}(e_k) = \sum_{ij} A_{ji}\delta_{ik} e'_j = \sum_j A_{jk} e'_j. \tag{4.105}$$

En comparant avec la formule de la proposition 4.75(1), nous avons le résultat. □

4.3.4 Déterminant

DEFooYCKRooTrajdP

Définition 4.83.
*Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ nous définissons le **déterminant** de A par la formule*

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)} \tag{4.106}$$

où la somme est effectuée sur tous les éléments du groupe symétrique[41] S_n et où $(-1)^\sigma$ représente la parité de la permutation σ.

En se souvenant que $|S_n| = n!$, nous sommes frappés de stupeur devant le fait que le nombre de termes dans la somme croît de façon factorielle (c'est plus qu'exponentiel, pour info) en la taille de la matrice. Cette formule est donc sans espoir pour une matrice plus grande que 3×3 ou à la rigueur 4×4 à la main. À l'ordinateur, il est possible de monter plus haut, mais pas tellement.

4.3.5 Déterminant en petite dimension

En dimension deux, le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le nombre

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb. \tag{4.107}$$

EQooQRGVooChwRMd

Ce nombre détermine entre autres le nombre de solutions que va avoir le système d'équations linéaires associé à la matrice.

Pour une matrice 3×3, nous avons le même concept, mais un peu plus compliqué ; nous avons la formule

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{4.108}$$

4.3.6 Manipulations de lignes et de colonnes

Nous voudrions savoir ce qu'il se passe avec le déterminant d'une matrice lorsque nous substituons à une ligne ou une colonne, une combinaison des autres lignes et colonnes. Lorsqu'une matrice est donnée, nous notons C_j sa j^{e} colonne.

LEMooRSJTooQEoOtN

Lemme 4.84 ([1]).
Si A et B sont des matrices, alors

$$(AB)^t = B^t A^t. \tag{4.109}$$

[41] Pour le groupe symétrique, c'est la définition 1.269, le fait que ce soit un groupe fini est le lemme 1.272, et pour la somme sur un groupe fini c'est la définition 1.304.

Démonstration. Il suffit de calculer les éléments de matrice :

$$(AB)^t_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_k A_{j,k}B_{k,i} = \sum_k B^t_{i,k}A^t_{k,j} = (B^tA^t)_{i,j}. \tag{4.110}$$

□

LEMooCEQYooYAbctZ

Lemme 4.85 ([1, 154])**.**
Si A est une matrice, alors $\det(A) = \det(A^t)$.

Démonstration. Nous commençons par écrire la définition du déterminant :

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(A^t)_{i,\sigma(i)} = \sum_\sigma \epsilon(\sigma)\prod_i A_{\sigma(i),i}. \tag{4.111}$$

Pour chaque σ séparément, en utilisant la proposition 1.313 pour ré-indexer le produit :

$$\prod_i A_{\sigma(i),i} = \prod_i A_{i,\sigma^{-1}(i)}. \tag{4.112}$$

Nous profitons du fait que l'application $\varphi\colon S_n \to S_n$ donnée par $\varphi(\sigma) = \sigma^{-1}$ soit une permutation de S_n pour appliquer la définition 1.304 et faire la somme sur σ^{-1} :

$$\det(A^t) = \sum_\sigma \epsilon(\sigma)\prod_i A_{i,\sigma^{-1}(i)} = \sum_\sigma \epsilon(\sigma^{-1})\prod_i A_{i,\sigma(i)} = \det(A) \tag{4.113}$$

où nous avons utilisé le fait que $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$ (corolaire 1.300). □

Le fait que $\det(A) = \det(A^t)$ permet, dans toutes les propositions du type « ce qui arrive au déterminant si on change telle ligne ou colonne » de ne donner qu'une preuve pour la partie « ligne » et déduire automatiquement le cas « colonne ». Le lemme suivant donne un exemple d'utilisation.

LEMooWMQWooGWFlmC

Lemme 4.86 ([1])**.**
Soit une matrice A. Nous considérons la matrice B obtenue à partir de A par la permutation de lignes $L_k \leftrightarrow L_l$ ainsi que la matrice C obtenue à partir de A^t par la permutation de colonnes $C_k \leftrightarrow C_l$.
Alors $C^t = B$.

Démonstration. Calculons les éléments de matrice de C :

$$C_{i,j} = \begin{cases} (A^t)_{i,j} & \text{si } j\neq k, j\neq l \\ (A^t)_{i,k} & \text{si } j = l \\ (A^t)_{i,l} & \text{si } j = k \end{cases} = \begin{cases} A_{j,i} & \text{si } j\neq k, j\neq l \\ A_{k,i} & \text{si } j = l \\ A_{l,i} & \text{si } j = k. \end{cases} \tag{4.114}$$

Ensuite nous prouvons que $C^t = B$ en écrivant les éléments de C^t :

$$(C^t)_{i,j} = C_{j,i} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } i\neq k, i\neq l \\ A_{k,j} & \text{si } i = l \\ A_{l,j} & \text{si } i = k. \end{cases} \tag{4.115}$$

Cette dernière expression est la matrice A après permutation des lignes $L_k \leftrightarrow L_l$, c'est-à-dire la matrice B. □

Pour la suite nous écrivons δ la matrice « identité », c'est-à-dire celle dont les entrées sont précisément les $\delta_{i,k}$. Nous écrivons également $E_{i,j}$ la matrice contenant des zéros partout sauf en (i,j) où elle a un 1, c'est-à-dire

$$(E_{i,j})_{k,l} = \delta_{i,k}\delta_{j,l}. \tag{4.116}$$

PROPooFQRDooRPfuxk

Proposition 4.87 (Permuter des lignes ou des colonnes $L_k \leftrightarrow L_l$[155, 1])**.**
Soient une matrice $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, deux entiers $k \neq l$ inférieurs ou égaux à n.

ITEMooAIHWooHXzeys

(1) Si B est la matrice obtenue à partir de A en permutant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det(A) = -\det(B). \tag{4.117}$$

ITEMooDNHWooOMgmxa

(2) *Si B est la matrice obtenue à partir de A par la permutation de lignes $L_k \leftrightarrow L_l$. Alors*

$$B = SA \tag{4.118}$$

avec $S = \delta + E_{k,l} + E_{l,k} - E_{k,k} - E_{l,l}$.

Autrement dit : la matrice S est une matrice de permutations de lignes.

ITEMooSHRQooQrqVdO

(3) *La matrice S vérifie* $\det(S) = -1$

ITEMooQXSEooMWiKbL

(4) *Nous avons*

$$\det(SA) = \det(S)\det(A). \tag{4.119}$$

Démonstration. Point par point

(1) **(1) pour les colonnes**

Soient k et l fixés, et considérons la permutation des colonnes C_k et C_l. Nous notons α la permutation (k, l) dans S_n (groupe symétrique, définition 1.269). Nous avons

$$B_{i,j} = A_{i,\alpha(j)}, \tag{4.120}$$

ou encore : $A_{i,j} = B_{i,\alpha(j)}$. Par définition,

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)} \tag{4.121}$$

C'est le moment d'utiliser la proposition 1.309 à propos de somme sur des groupes avec $G = S_n$, $h = \alpha$ et

$$f(\sigma) = \epsilon(\sigma) \prod_i A_{i,\sigma(i)}. \tag{4.122}$$

Nous savons que $\epsilon(\alpha) = -1$ et que ϵ est un morphisme par la proposition 1.299(1), donc

$$f(\alpha\sigma) = \epsilon(\alpha\sigma) \prod_i A_{i,(\alpha\sigma)(i)} = -\epsilon(\sigma) \prod_i B_{i,\sigma(i)}. \tag{4.123}$$

Avec ça, nous concluons :

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma} f(\alpha\sigma) = -\sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} B_{i,\sigma(i)} = -\det(B). \tag{4.124}$$

(2) **(1) pour les lignes** Que se passe-t-il si nous permutons les lignes L_k et L_l ? Si nous notons B' la matrice obtenue à partir de A par la permutation de lignes $L_k \leftrightarrow L_l$, et C celle obtenue de A^t après permutation de colonnes $C_k \leftrightarrow C_l$ alors nous avons $C^t = B'$. Le lemme 4.86 nous dit que $C^t = B'$. En utilisant le lemme 4.85 sur le déterminant de la transposée,

$$\det(B') = \det(C^t) = \det(C) = -\det(A^t) = -\det(A). \tag{4.125}$$

Voilà qui prouve le résultat pour les permutations de lignes.

(3) **(2)** Si $k = l$, il n'y a pas de permutation, et il est vite vu que la matrice S est l'identité parce qu'il y a quatre fois le terme $E_{k,k}$. Nous supposons donc que $k \neq l$; en particulier $\delta_{k,l} = 0$.

Il s'agit surtout d'un beau calcul :

$$(SA)_{i,j} = \sum_m S_{i,m}A_{m,j} = A_{i,j} + \sum_m (\delta_{k,i}\delta_{l,m} + \delta_{l,i}\delta_{l,m} - \delta_{k,i}\delta_{k,m} - \delta_{l,i}\delta_{l,m})A_{m,j} \tag{4.126a}$$

$$= A_{i,j} + \delta_{k,i}A_{l,j} + \delta_{l,i}A_{k,j} - \delta_{k,i}A_{k,j} - \delta_{l,i}A_{l,j}. \tag{4.126b}$$

Si $i \neq j$ et $i \neq l$, alors $(SA)_{i,j} = A_{i,j}$. Si $i = k$, alors

$$(SA)_{k,j} = A_{k,j} + A_{l,j} - A_{k,j} = A_{l,j}, \tag{4.127}$$

c'est-à-dire que la k^{e} ligne de SA est la l^{e} ligne de A.

Avec $i = l$ nous obtenons la k^{e} ligne de A.

Tout cela montre que SA est la matrice A dans laquelle les lignes k et l ont été échangées, c'est-à-dire $SA = B$.

(4) (3) En utilisant la définition du déterminant,

$$\det(S) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} S_{i,\sigma(i)} \tag{4.128a}$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{i} \big(\delta_{i,\sigma(i)} + \delta_{k,i}\delta_{l,\sigma(i)} + \delta_{l,i}\delta_{k,\sigma(i)} - \delta_{k,i}\delta_{k,\sigma(i)} - \delta_{l,i}\delta_{l,\sigma(i)}\big). \tag{4.128b}$$

Nous utilisons l'associativité et la commutativité du produit pour séparer les facteurs $i = k$ et $i = l$ des autres :

$$\det(S) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{\substack{i\neq k\\ i\neq l}} \delta_{i,\sigma(i)}(\delta_{k,\sigma(k)} + \delta_{l,\sigma(k)} - \delta_{k,\sigma(k)})(\delta_{l,\sigma(l)} + \delta_{k,\sigma(l)} - \delta_{l,\sigma(l)}). \tag{4.129}$$

À cause des facteurs $i \neq k$ et $i \neq l$, les σ pour lesquels le tout n'est pas nul doivent vérifier $\delta_{i,\sigma(i)} = 1$ pour tout i différent de k et l. Les deux seuls sont donc $\sigma = \mathrm{Id}$ et la permutation $\sigma = (k, l)$. Pour $\sigma = \mathrm{Id}$, nous avons

$$\prod_{\substack{i\neq k\\ i\neq l}} \delta_{i,i}(\delta_{k,k} + \delta_{l,k} - \delta_{k,k})(\delta_{l,l} + \delta_{k,l} - \delta_{l,l}) = 0. \tag{4.130}$$

Dernier espoir : $\sigma = (k, l)$. Pour ce terme nous avons $\epsilon(\sigma) = -1$ et

$$\prod_{\substack{i\neq k\\ i\neq l}} \delta_{i,i}(\delta_{k,l} + \delta_{l,l} - \delta_{k,l})(\delta_{l,k} + \delta_{k,k} - \delta_{l,k}) = 1. \tag{4.131}$$

Au final dans $\det(S)$, il n'y a que le terme $\sigma = (k, l)$ qui est non nul, et il vaut -1. Donc

$$\det(S) = -1. \tag{4.132}$$

(5) (4) Il s'agit de mettre bout à bout les points déjà prouvés :

$$\det(SA) = -\det(A) = \det(S)\det(A). \tag{4.133}$$

□

CORooAZFCooSYINvBl

Corolaire 4.88 ([155]).
Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Si deux lignes ou deux colonnes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration. Si deux colonnes sont égales, la matrice ne change pas lorsqu'on les permute, alors que le déterminant change de signe. La seule possibilité est que $\det(A) = -\det(A)$, ce qui signifie que $\det(A) = 0$. □

Notons que si pour $k \neq l$ nous avons $C_k = \lambda C_l$, alors nous avons aussi $\det(A) = 0$.

La réciproque n'est pas vraie : il existe des matrices dont le déterminant est nul et dont aucune entrée n'est nulle. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.134}$$

PROPooNGZJooHjtMyn

Proposition 4.89 ([155]).
Soient $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$, et $v \in \mathbb{K}^n$. Si B est la matrice A avec la substitution $L_j \to L_j + v$ et C est la matrice A avec la substitution $L_j \to v$, alors

$$\det(B) = \det(A) + \det(C). \tag{4.135}$$

Démonstration. En utilisant l'associativité de la multiplication,

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}B_{i,\sigma(i)} && (4.136a)\\
&= \sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)\big(\prod_{i\neq j}B_{i,\sigma(i)}\big)B_{j,\sigma(j)} && (4.136b)\\
&= \sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)\big(\prod_{i\neq j}A_{i,\sigma(i)}\big)(A_{j,\sigma(j)}+v_{\sigma(j)}) && (4.136c)\\
&= \sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)\prod_{i}A_{i,\sigma(i)}+\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)\prod_{i\neq j}C_{i,\sigma(i)}v_{\sigma(j)} && (4.136d)\\
&= \det(A)+\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)\prod_{i\neq j}C_{i,\sigma(i)}C_{j,\sigma(j)} && (4.136e)\\
&= \det(A)+\det(C). && (4.136f)
\end{aligned}$$

SUBEQooKATCooVIbEnv

SUBEQooCOTDooPPrEYJ

Justifications :

- 4.136d parce que pour $i\neq j$ nous avons $A_{i,\sigma(i)}=C_{i,\sigma(i)}$
- 4.136e parce que $v_{\sigma(j)}=C_{j,\sigma(j)}$.

□

PROPooPYNHooLbeVhj

Proposition 4.90 (Combinaison de lignes ou colonnes $L_k\to L_k+\lambda L_l$[155])**.**
Soient une matrice $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, deux entiers $k\neq l$ inférieurs ou égaux à n.

ITEMooJSRDooTggEyO

(1) Si B est la matrice obtenue à partir de A par la substitution $L_k\to L_k+\lambda L_l$ ou $C_k\to C_k+\lambda C_l$, alors

$$\det(A)=\det(B). \tag{4.137}$$

ITEMooHKZWooVZDgnf

(2) Si B est la matrice A dans laquelle nous avons opéré la substitution $L_k\to L_k+\lambda L_l$, alors

$$B=UA \tag{4.138}$$

avec $U=\delta+\lambda E_{k,l}$, c'est-à-dire que U est une matrice de combinaison de lignes.

ITEMooPGYJooWTTghT

(3) La matrice U vérifie $\det(U)=1$.

ITEMooBBEAooZJVGNV

(4) Nous avons

$$\det(UA)=\det(U)\det(A). \tag{4.139}$$

Démonstration. Point par point.

(1) **(1)** Soit la matrice C obtenue à partir de A par $L_k\to\lambda L_l$. En considérant le vecteur $v=\lambda L_l$, nous sommes dans la situation de la proposition 4.89. Donc

$$\det(B)=\det(A)+\det(C). \tag{4.140}$$

Mais dans la matrice C, nous avons $L_k=\lambda L_l$, ce qui implique $\det(C)=0$ par le corolaire 4.88. Donc $\det(A)=\det(B)$ comme il se devait.

(2) **(2)** Encore un calcul :

$$(UA)_{i,j}=\sum_m\big(\delta_{i,m}+\lambda(E_{k,l})_{i,m}\big)A_{m,j}=A_{i,j}+\lambda\sum_m\delta_{k,i}\delta_{l,m}A_{m,j}=A_{i,j}+\lambda\delta_{l,i}A_{k,j}. \tag{4.141}$$

Cela donne, pour $i=k$ la ligne

$$(UA)_{k,j}=A_{k,j}+\lambda A_{l,j}, \tag{4.142}$$

ce qui correspond bien à $L_k\to L_k+\lambda L_l$.

(3) **(3)** Nous calculons le déterminant de $U=\delta+\lambda E_{k,l}$ avec $k\neq l$. Nous avons dans un premier temps :

$$\det(U)=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(\delta_{i,\sigma(i)}+\lambda\delta_{k,i}\delta_{l,\sigma(i)}). \tag{4.143}$$

Puisque nous avons toujours $\delta_{k,i}\delta_{l,i}=0$, le terme $\sigma=\mathrm{Id}$ donne 1.

Pour les $\sigma\neq\mathrm{Id}$, le facteur $\lambda\delta_{k,i}\delta_{l,\sigma(i)}$ ne s'annule pas, uniquement si $i=k$ et $\sigma(i)=l$. Donc le seul terme non nul autre que $\sigma=\mathrm{Id}$ peut provenir de $\sigma=(k,l)$. Pour ce terme, nous isolons les termes $i=l$ et $i=k$:

$$(\delta_{k,\sigma(k)}+\lambda\delta_{k,k}\delta_{k,\sigma(k)})(\delta_{l,\sigma(l)}+\lambda\delta_{k,l}\delta_{k,\sigma(l)}).\tag{4.144}$$

Le dernier facteur est nul.

(4) **(4)** En mettant bout à bout les résultats prouvés,

$$\det(UA)=\det(A)=\det(U)\det(A).\tag{4.145}$$

□

PROPooXUFKooOaPnna

Proposition 4.91 (Multiplication par un scalaire d'une ligne ou colonne $L_k\to\lambda L_k$[155])**.**
Soient une matrice $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, un entier $k\leqslant n$. Soit la matrice B obtenue à partir de A en multipliant la ligne L_k par $\lambda\in\mathbb{K}$.

ITEMooBKIGooCDQEDt

(1) $\det(B)=\lambda\det(A)$

ITEMooWRRCooFXkRNW

(2) En considérant la matrice $T=\delta+(\lambda-1)E_{k,k}$, nous avons

$$B=TA,\tag{4.146}$$

c'est-à-dire que la matrice T est une matrice de multiplication de ligne par un scalaire.

ITEMooOGGDooPVVRzk

(3) Nous avons $\det(T)=\lambda$.

ITEMooIFRVooWQYgkK

(4) Et aussi : $\det(TA)=\det(T)\det(A)$

Démonstration. Point par point.

(1) **(1)** La matrice B est donnée par les éléments

$$B_{i,j}=\begin{cases}A_{i,j} & \text{si } i\neq k\\ \lambda A_{i,j} & \text{si } i=k\end{cases}\tag{4.147}$$

c'est-à-dire $B_{i,j}=\big(1+(\lambda-1)\delta_{i,k}\big)A_{i,j}$. Nous mettons cela dans la définition du déterminant de B :

$$\det(B)=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}B_{i,\sigma(i)}=\sum_{\sigma}\prod_{i}\big(1+(\lambda-1)\delta_{\sigma(i),k}A_{i,\sigma(i)}\big).\tag{4.148}$$

EQooGVMTooPntKew

L'associativité du produit dans $\mathbb{K}$ nous permet de séparer le produit de la façon suivante :

$$\prod_{i=1}^{n}\big(1+(\lambda-1)\delta_{\sigma(i),k}\big)A_{i,\sigma(i)}=\prod_{i}\big(1+(\lambda-1)\delta_{\sigma(i),k}\big)\prod_{i}A_{i,\sigma(i)}=\lambda\prod_{i}A_{i,\sigma(i)}.\tag{4.149}$$

En remettant dans (4.148), nous trouvons $\det(B)=\det(A)$.

(2) **(2)** C'est un cas particulier de la proposition 4.90(2) en prenant $k=l$ et en adaptant le λ.

(3) **(3)** Nous calculons le déterminant de la matrice $T=\delta+(\lambda-1)E_{k,k}$. La formule du déterminant donne

$$\det(T)=\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\big(\delta_{i,\sigma(i)}+(\lambda-1)\delta_{k,i}\delta_{k,\sigma(i)}\big).\tag{4.150}$$

Si $i\neq\sigma(i)$, alors non seulement $\delta_{i,\sigma(i)}=0$, mais en plus $\delta_{k,i}\delta_{k,\sigma(i)}=0$. Donc seul $\sigma=\mathrm{Id}$ reste dans la somme sur $\sigma\in S_n$. Il reste donc

$$\det(T)=\prod_{i=1}^{n}\big(1+(\lambda-1)\delta_{k,i}\big)=\left(\prod_{i\neq k}1\right)\big(1+(\lambda-1)\big)=\lambda\tag{4.151}$$

où nous avons utilisé encore l'associativité pour isoler le facteur $i=k$.

(4) **(4)** Il faut mettre bout à bout les résultats déjà établis :

$$\det(TA)=\lambda\det(A)=\det(T)\det(A).\tag{4.152}$$

□

4.3.7 Réduction de Gauss

DEFooKJNNooOcIJuu

Définition 4.92.
Nous avons vu les matrices d'opérations élémentaire sur les lignes :

- *Permutation de lignes $L_k \leftrightarrow L_l$: $S(n;k,l) = \delta + E_{k,l} + E_{l,k} - E_{k,k} - E_{l,l}$, proposition 4.87.*
- *Combinaisons de lignes $L_k \to L_k + \lambda L_l$: $U(n;k,l,\lambda) = \delta + \lambda E_{k,l}$, proposition 4.90.*
- *Multiplication d'une ligne par un scalaire $L_k \to \lambda L_k$: $T(n;k,\lambda) = \delta + (\lambda - 1)E_{k,k}$, proposition 4.91.*

Les matrices $S(n;k,l)$, $U(n;k,l)$ et $T(n;k,\lambda)$ sont les ***matrices de manipulation de lignes****.*

NORMooDXYZooEdnztA

4.93.
Il existe également des matrices pour faire les mêmes opérations, mais sur les colonnes. Ces matrices doivent toutefois multiplier à droite et non à gauche. Par exemple il existe une matrice $C(n,k,l)$ telle que $AC(n,k,l)$ soit la matrice A, avec les colonnes k et l inversées.

LEMooDXSZooVpbCRj

Lemme 4.94.
Si G est une matrice de manipulation de lignes, alors

EQooLQTVooBYjVYl

$$\det(GA) = \det(G)\det(A) \tag{4.153}$$

pour toute matrice A.

Si H est une matrice de manipulation de colonnes, alors

$$\det(AH) = \det(A)\det(H) \tag{4.154}$$

pour toute matrice A.

Démonstration. En ce qui concerne les manipulations de ligne, nous avons déjà tout fait dans les propositions 4.87(4), 4.90(4) et 4.91(4).

□

PROPooJBTZooNLobpf

Proposition 4.95 (Réduction de Gauss[1])**.**
Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ de déterminant non nul : $\det(A) \neq 0$. Alors il existe des matrices $G_1,\dots,G_N$ toutes de type S, U ou T telles que

$$G_1 \dots G_N A = \delta. \tag{4.155}$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur n. D'abord pour $n = 1$, la matrice A contient un seul élément $A_{1,1}$ qui est non nul par hypothèse. Nous pouvons multiplier sa ligne par $1/A_{1,1}$ pour obtenir le résultat. Plus précisément, nous avons l'égalité

$$T(1;1,\frac{1}{A_{1,1}})A = \delta \tag{4.156}$$

dans $\mathbb{M}(1,\mathbb{K})$. Notons que $\mathbb{K}$ est un corps (donc $A_{1,1}$ est inversible) commutatif, ce qui permet d'écrire $1/A_{1,1}$ sans ambiguïté.

Supposons le résultat prouvé pour n, et voyons ce qu'il se passe pour $n+1$. Puisque $\det(A) \neq 0$, aucune de ses colonnes n'est nulle (corolaire 4.88). Il existe donc un k tel que $A_{k,1} \neq 0$.

Par la proposition 4.87, la matrice

$$B^{(1)} = S(n+1;k,1)A \tag{4.157}$$

est une matrice telle que $B^{(1)}_{1,1} = A_{k,1} \neq 0$. Ensuite, par la proposition 4.91 la matrice

$$B^{(2)} = T(n+1;1,\frac{1}{A_{k,1}})B^{(1)} \tag{4.158}$$

vérifie $B^{(2)}_{1,1} = 1$.

Puisque la multiplication par la matrice $U(n+1;k;l;\lambda)$ réalise, par la proposition 4.90, la substitution $L_k \to L_k + \lambda L_l$, la matrice

$$B^{(3)} = \prod_{k=2}^{n+1} U(n+1;k,1,-B^{(1)}_{k,1})B^{(1)} \tag{4.159}$$

a toute sa première colonne nulle à l'exception de $B^{(3)}_{1,1} = 1$.

Nous n'avons pas donné de nom ni démontré de théorèmes à propos de la substitution $C_k \to C_k + \lambda C_l$. En passant éventuellement par les transposées et en utilisant les lemmes 4.84 et 4.85 nous obtenons une matrice $U'(n+1;k,l,\lambda)$ ayant la propriété que la matrice

$$B^{(4)} = \prod_{k=2}^{n+1} U'(n+1;k,1,-B^{(3)}_{1,k})B^{(3)} \tag{4.160}$$

vérifie $B^{(4)}_{1,j} = B^{(4)}_{j,1} = 0$ pour tout j sauf $j = 1$. En d'autres termes, la matrice $B^{(4)}$ est de la forme

$$B^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{4.161}$$

où A' est une matrice de taille n.

Voyons quelques propriétés de A'. Nous savons que

$$B^{(4)} = \prod_i G_i A \tag{4.162}$$

où les G_i sont de type S, T ou U. Puisque $\det(SA) = \det(S)\det(A)$ (et idem pour T et U), nous avons

$$\det(B^{(4)}) = \prod_i \det(G_i)\det(A), \tag{4.163}$$

et comme aucun des $\det(G_i)$ n'est nul, nous avons encore $\det(B^{(4)}) \neq 0$, ce qui implique $\det(A') \neq 0$.

La récurrence peut avoir lieu. Il existe des matrices G'_i telles que

$$G'_1 \dots G'_M A' = \delta \tag{4.164}$$

où les G'_i sont de taille n, ainsi que le δ. En remarquant que

$$S(n+1;k,l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & S(n;k-1,l-1) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{4.165}$$

et pareillement pour les matrices T et U, nous voyons qu'en prenant

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G'_i & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{4.166}$$

nous avons

$$\prod_{i=1}^{M} G_i B^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \prod_{i=1}^{M} G'_i A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \delta_{n+1} \tag{4.167}$$

où nous avons mis un indice sur le dernier δ pour être plus explicite. □

4.3.8 Matrices inversibles

PROPooMLWRooRWfZXE

Proposition-Définition 4.96.
Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$. Si les matrices B_1 et B_2 de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ vérifient

$$AB_1 = B_1 A = \delta \tag{4.168}$$

et

$$AB_2 = B_2 A = \delta, \tag{4.169}$$

alors $B_1 = B_2$. Dans ce cas, nous disons que A est inversible et nous notons A^{-1} l'unique matrice telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = \delta$.

Démonstration. La preuve est réalisée dans le cas général par le lemme 1.254. Mais si vous en voulez une preuve avec les notations d'ici, en voici une.

Nous avons $AB_1 = AB_2$. En multipliant à gauche par B_1, nous trouvons $B_1AB_1 = B_1AB_2$. En remplaçant B_1A par δ des deux côtés, il reste $B_1 = B_2$. □

LEMooGZCTooQigDvC

Lemme 4.97 ([155]).
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$, alors il existe au plus une matrice $B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telle que $AB = \delta$.

Démonstration. Soient des matrices $B, C \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telles que $AB = AC = \delta$. Nous allons montrer que $B = C$.

Pour cela nous considérons les applications linéaires $f_A, f_B, f_C \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ associées par la proposition 4.75. Puisque $AB = \delta$, par la proposition 4.77, nous avons $f_A \circ f_B = f_{AB} = \mathrm{Id}$. La proposition 4.59 nous dit alors que f_A et f_B sont bijectives.

En particulier, comme $\{e_i\}$ est une base, son image par f_B est une base par la proposition 4.46. La proposition 4.58 dit alors que $\{f_B(e_i)\}$ est une base. Nous décomposons $f_B(e_k) - f_C(e_k)$ dans cette base :

$$f_B(e_k) - f_C(e_k) = \sum_j \alpha_j f_B(e_j) \tag{4.170}$$

où les α_j dépendent à priori de k. Puisque $f_A \circ (f_B - f_C) = 0$, nous avons

$$0 = f_A\big(f_B(e_k) - f_C(e_k)\big) = \sum_j (f_A \circ f_B)(e_j) = \sum_j \alpha_j e_j. \tag{4.171}$$

Donc les α_j sont tous nuls.

Nous en déduisons que $f_B(e_k) = f_C(e_k)$, et donc $f_B = f_C$. Cela implique que $B = C$ par la proposition 4.75(4). □

PROPooECIIooVMCIwz

Proposition 4.98 ([155]).
Si $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ vérifient $AB = \delta$, alors $BA = \delta$.

Démonstration. L'astuce est de poser $C = BA - \delta + B$ et de montrer que $C = B$. Pour cela, un rapide calcul commence par montrer que

$$AC = ABA - A + AB = AB = \delta. \tag{4.172}$$

Donc C est également un inverse à droite de A. Le lemme 4.97 donne alors $C = B$. □

CORooBQLXooTeVfgb

Corolaire 4.99.
Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Si il existe $B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ tel que $AB = \delta$, alors A est inversible et son inverse est B.

Démonstration. Il s'agit d'une paraphrase de la proposition 4.98 et de la définition 4.96. □

LEMooZDNVooArIXzC

Lemme 4.100.
Si une matrice A n'est pas inversible, alors le produit AB n'est inversible pour aucune matrice B.

Démonstration. Soient une matrice non inversible A, ainsi qu'une matrice quelconque B. Supposons que AB soit inversible. Alors

$$AB(AB)^{-1} = \delta. \tag{4.173}$$

Donc la matrice $B(AB)^{-1}$ est un inverse de A. Contradiction. □

PROPooNPMCooPmaCwu

Proposition 4.101.
Une matrice est inversible si et seulement si son application linéaire associée est inversible. Dans ce cas, nous avons

$$f_A^{-1} = f_{A^{-1}}. \tag{4.174}$$

Démonstration. Dans le sens direct, si A est inversible nous avons $AA^{-1} = \delta$. Donc

$$f_A \circ f_{A^{-1}} = f_{AA^{-1}} = f_\delta = \mathrm{Id} \tag{4.175}$$

EQooQQOSooBKVqXh

où nous avons utilisé la proposition 4.77 pour la composition et la proposition 4.78 pour l'identité. L'égalité (4.175) indique que f_A est inversible et que son inverse est $f_{A^{-1}}$.

Dans l'autre sens, l'application f_A^{-1} existe. Soit $B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ sa matrice. Alors nous avons

$$f_\delta = \mathrm{Id} = f_A \circ f_B = f_{AB}. \tag{4.176}$$

Le fait que l'application $\psi\colon A \to f_A$ soit une bijection[42] implique que $AB = \delta$, c'est-à-dire que A est inversible et que $B = A^{-1}$. □

LEMooMCIDooYBHrbq

Lemme 4.102 ([1])**.**
Soient une matrice inversible $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et $r < n$. Il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que la matrice $a \in \mathbb{M}(r, \mathbb{R})$ donnée par

$$a_{i,j} = A_{i,\sigma(j)} \tag{4.177}$$

soit inversible.

4.3.9 Inversibilité et déterminant

PROPooAVIXooMtVCet

Proposition 4.103.
Une matrice au déterminant non nul est inversible.

Démonstration. Si A est une matrice telle que $\det(A) \neq 0$, alors la proposition 4.95 nous donne des matrices $G_1, \dots, G_N$ telles que

$$G_1 \dots G_N A = \delta. \tag{4.178}$$

Donc la matrice $G_1 \dots G_N$ est un inverse de A par le corolaire 4.99. □

PROPooEOKBooKUROFg

Proposition 4.104.
Si une matrice A a une ligne ou une colonne de zéros, alors

(1) $\det(A) = 0$,

(2) A n'est pas inversible.

Démonstration. Par définition, nous avons

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}. \tag{4.179}$$

Si la k^{e} ligne est nulle, alors $A_{k,\sigma(k)} = 0$ pour tout σ. Donc tous les produits contiennent un facteur nul. Donc $\det(A) = 0$.

Pour toute matrice B nous avons

$$(AB)_{k,k} = \sum_{l} A_{k,l} B_{l,k}. \tag{4.180}$$

Si la k^{e} ligne de A est nulle nous avons $(AB)_{k,k} = 0$ et donc pas $AB = \delta$. Donc A n'est pas inversible. □

4.3.10 Quelques ensembles de matrices particuliers

Certains ensembles de matrices ont une importance particulière, que nous développerons plus tard.

Définition 4.105 (Groupe linéaire de matrices)**.**
On note $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$ *l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{A}$, qui sont inversibles. En d'autres termes,* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}) = U(\mathbb{M}(n, \mathbb{A}))$.

DefMatriceOrthogonale

Définition 4.106 (Groupe orthogonal de matrices)**.**
On dit qu'une matrice A est ***orthogonale*** *si son inverse est sa transposée, c'est-à-dire si $A^{-1} = A^t$. On note* $\mathrm{O}(n, \mathbb{A})$ *l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{A}$, qui sont orthogonales.*

4.3.11 Déterminant et combinaisons de lignes et colonnes

SUBSHCOBkVSZVdBPHwQh

Proposition 4.107.
Soient des matrices $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telles que $\det(A) \neq 0$ et $\det(B) \neq 0$. Alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B). \tag{4.181}$$

[42] Proposition 4.75(4).

Démonstration. La proposition 4.95 nous donne des matrices de permutations de lignes et de colonnes $G_1, \dots, G_N$ et $G'_1, \dots, G'_N$ telles que[43] EQooDNZUooHBhcZj

$$G_1 \dots G_N A = \delta \tag{4.182a}$$
$$G'_1 \dots G'_N B = \delta. \tag{4.182b}$$

Nous avons

$$(G'_1 \dots G'_N) \underbrace{(G_1 \dots G_N)A}_{=\delta} B = \delta. \tag{4.183}$$

En prenant le déterminant des deux côtés et en tenant compte de (4.153),

$$1 = \det(\delta) = \det\big(G'_1 \dots G'_N G_1 \dots G_N AB\big) = \det(G'_1 \dots G'_N)\det(G_1 \dots G_N)\det(AB). \tag{4.184}$$

Mais en même temps, les équations 4.182 donnent

$$\det(G_1 \dots G_N) = \det(A)^{-1} \tag{4.185a}$$
$$\det(G'_1 \dots G'_N) = \det(B)^{-1}. \tag{4.185b}$$

Cela pour dire que

$$1 = \det(A)^{-1}\det(B)^{-1}\det(AB), \tag{4.186}$$

et donc ce qu'il nous fallait. □ PROPooWVJFooTmqoec

Proposition 4.108.
Soient des matrices $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telles que $\det(A) = 0$ et $\det(B) \neq 0$. Alors

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B) = 0. \tag{4.187}$$

Démonstration. Il existe des matrices de manipulations de lignes et de colonnes $G_1, \dots, G_N$ telles que $G_1 \dots G_N B = \delta$. Donc

$$0 = \det(A) = \det(G_1 \dots G_N BA) = \det(G_1 \dots G_N)\det(BA). \tag{4.188}$$

Donc $\det(BA) = 0$. □

4.3.12 Transvections

Nous nommons $E_{i,j}$ la matrice remplie de zéros sauf à la case i, j qui vaut 1. Autrement dit

$$(E_{i,j})_{k,l} = \delta_{i,k}\delta_{j,l}. \tag{4.189}$$

Définition 4.109.
*Une **matrice de transvection** est une matrice de la forme*

$$T_{i,j}(\lambda) = \mathrm{Id} + \lambda E_{i,j} \tag{4.190}$$

avec $i \neq j$.

*Une **matrice de dilatation** est une matrice de la forme*

$$D_i(\lambda) = \mathrm{Id} + (\lambda - 1)E_{i,i}. \tag{4.191}$$

Ici le $(\lambda - 1)$ sert à avoir λ et non $1 + \lambda$. C'est donc une matrice qui dilate d'un facteur λ la direction i, tout en laissant le reste inchangé.

*Si σ est une permutation (un élément du groupe symétrique S_n) alors la **matrice de permutation** associée est la matrice d'entrées*

$$(P_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}. \tag{4.192}$$

LemyrAXQs

Lemme 4.110.
La matrice $T_{i,j}(\lambda)A = (\mathbb{1} + \lambda E_{i,j})A$ est la matrice A à qui on a effectué la substitution

$$L_i \to L_i + \lambda L_j. \tag{4.193}$$

La matrice $AT_{i,j}(\lambda)$ est la substitution

$$C_j \to C_j + \lambda C_i. \tag{4.194}$$

La matrice AP_σ est la matrice A dans laquelle nous avons permuté les colonnes avec σ.
La matrice $P_\sigma A$ est la matrice A dans laquelle nous avons permuté les lignes avec σ^{-1}.

[43] Les plus acharnés préciseront que pour avoir le même N des deux côtés, il a fallu compléter avec des matrices δ là où il y en avait le moins.

Démonstration. Calculons la composante k,l de la matrice $E_{i,j}A$:

$$(E_{i,j}A)_{k,l} = \sum_m (E_{i,j})_{k,m}A_{m,l} \tag{4.195a}$$
$$= \sum_m \delta_{i,k}\delta_{j,m}A_{m,l} \tag{4.195b}$$
$$= \delta_{i,k}A_{j,l}. \tag{4.195c}$$

C'est donc la matrice pleine de zéros, sauf la ligne i qui est donnée par la ligne j de A. Donc effectivement la matrice

$$A + \lambda E_{i,j}A \tag{4.196}$$

est la matrice A à laquelle on a substitué la ligne i par la ligne i plus λ fois la ligne j.

En ce qui concerne l'autre assertion sur les transvections, le calcul est le même et nous obtenons

$$(AE_{i,j}) = A_{k,i}\delta_{j,l}. \tag{4.197}$$

Pour les matrices de permutation, nous avons

$$(AP_\sigma)_{k,l} = A_{k,\sigma(l)} \tag{4.198}$$

et

$$(P_\sigma A)_{k,l} = \sum_m \delta_{k,\sigma(m)}A_{m,l} = \sum_m \delta_{\sigma^{-1}(k),m}A_{m,l} = A_{\sigma^{-1}(k),l}. \tag{4.199}$$

□

4.3.13 Mineur, rang

Pour la définition du rang d'une matrice, nous en donnons une qui est clairement inspirée de l'application linéaire associée.

DEFooCSGXooFRzLRj

Définition 4.111 ([155]).
*Le **rang** d'une matrice de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ est la dimension de la partie de $\mathbb{K}^n$ engendrée par ses colonnes.*

Il est possible d'exprimer le rang d'une matrice de façon plus « intrinsèque » via le concept de mineur.

Définition 4.112 ([156]).
Les mineurs d'une matrice sont les déterminants de ses sous-matrices carrées.

Dans la suite nous désignerons souvent par le mot « mineur » la sous-matrice carrée elle-même au lieu de son déterminant.

Lorsque A est une matrice, nous notons f_A l'application linéaire associée à la matrice A par l'application (4.85).

LEMVecsaRgFixe

Lemme 4.113.
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif[44]*. Si A est une matrice carrée d'ordre n et de rang r à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors il existe des vecteurs $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ formant une base de $\mathbb{K}^n$ tels que*

$$f_A(x_i) \neq 0 \tag{4.200}$$

pour $i \leqslant r$ et

$$f_A(x_i) = 0 \tag{4.201}$$

pour $i > r$.

Démonstration. Soit V le sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A. Nous considérons la base canonique $\{e_i\}$ de $\mathbb{K}^n$, ainsi que v_i le vecteur créé par la i^{e} colonne de A. Nous avons

$$v_i = f_A(e_i). \tag{4.202}$$

Les vecteurs v_i engendrent V, donc nous pouvons en extraire une base par le théorème 4.18(1). Soit donc $\{v_j\}_{i\in J}$ une base de V avec $J \subset \{1,\dots,n\}$.

La base de $\mathbb{K}^n$ que nous cherchons commence par les vecteurs $\{e_j\}_{j\in J}$. Ces vecteurs vérifient $f_A(e_j) = v_j \neq 0$ parce que des vecteurs d'une base ne sont jamais nuls.

[44] Comme toujours.

Pour la suite de la base, nous pourrions penser au théorème de la base incomplète[45], mais les vecteurs ainsi complétant la base ne sont pas garantis de s'annuler par f_A. Voir l'exemple 4.114.

L'idée est d'utiliser le noyau de f_A qui est un sous-espace vectoriel par la proposition 4.41. Soit une base[46] $\{z_k\}$ de $\ker(f)$. Les vecteurs $\{e_j\}_{j\in J}$ forment une base de $\text{Image}(f_A)$. Puisque les z_i forment une base de $\ker(f_A)$, le théorème du rang 4.49 dit alors que $\{e_j\}_{j\in J}\cup\{z_k\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Il y a r éléments dans J parce que l'espace engendré par les colonnes de A est de dimension r par hypothèse. Donc il y a $n-r$ éléments dans les $\{z_k\}$ pour que le tout ait le bon nombre d'éléments. □

EXooRKVQooZOGDEf

Exemple 4.114.
Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}. \tag{4.203}$$

Elle est de rang 1. En suivant l'idée de la démonstration, nous commençons la base de $\mathbb{R}^2$ par le vecteur e_1 qui vérifie

$$f_A(e_1)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}. \tag{4.204}$$

L'utilisation du théorème de la base incomplète ne permet pas de trouver un second vecteur de base v tel que $f_A(v)=0$. En effet ce théorème donne juste l'existence d'une completion de la base, mais pas de propriétés particulières de la base obtenue. Elle pourrait donner $v=e_2$ comme second vecteur de base. Mais alors

$$f_A(v)=f_A(e_2)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\neq 0. \tag{4.205}$$

Au contraire, le noyau de f_A est donné par le sous-espace engendré par $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Une base convenable est donc $\{e_1,e_1-e_2\}$. △

PROPooEGNBooIffJXc

Proposition 4.115.
Le rang d'une application linéaire[47] *est égal au rang de sa matrice*[48] *dans n'importe quelle base.*

Démonstration. Soient deux espaces vectoriels V de dimension n et W de dimension m. Nous considérons les bases $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de V et $\{f_j\}_{j=1,\dots,m}$ de W. Soit une application linéaire $\alpha\colon V\to W$. La matrice de α est donnée par $A_{ji}=\alpha(e_i)j$. Nous considérons les applications linéaires

$$\begin{aligned}\beta\colon V&\to\mathbb{K}^m\\ e_i&\mapsto\big(\alpha(e_i)_1,\dots,\alpha(e_i)_m\big).\end{aligned} \tag{4.206}$$

et

$$\begin{aligned}\gamma\colon\mathbb{K}^m&\to W\\ (x_1,\dots,x_m)&\mapsto\sum_{k=1}^{m}x_kf_k.\end{aligned} \tag{4.207}$$

L'espace de $\mathbb{K}^m$ engendré par les colonnes de A est

$$S=\text{Span}\{\beta(e_i)\}_{i=1,\dots,n}. \tag{4.208}$$

Nous allons montrer que γ est un isomorphisme entre S et $\text{Image}(\alpha)$. Pour cela nous commençons par remarquer que

$$\beta(e_i)_k=\alpha(e_i)_k \tag{4.209}$$

et donc que

$$\alpha(e_i)=\sum_k\alpha(e_i)_kf_k \tag{4.210a}$$

$$=\sum_k\beta(e_i)_kf_k \tag{4.210b}$$

$$=\gamma\big(\beta(e_i)\big). \tag{4.210c}$$

Cela montre que $\gamma(S)=\text{Image}(\alpha)$. □

[45] Théorème 4.14(2).
[46] Cette base contient $n-r$ éléments, mais ce n'est pas très important pour la suite.
[47] Définition 4.48.
[48] Définition 4.111.

LEMooSWDMooRsLOyF

Lemme 4.116 ([1])**.**
Soit une matrice inversible $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$. Soit $r \leqslant n$. Il existe une permutation de colonnes de A telle que la sous-matrice $(A_{ij})_{i,j=1,\dots,r}$ soit inversible.

4.3.14 Matrices équivalentes et semblables

DefBLELooTvlHoB

Proposition-Définition 4.117.
Deux relations d'équivalence[49] *entre les matrices.*

ItemPFXCooOUbSCt

*(1) Deux matrices A et B sont **équivalentes** dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ si il existe $P,Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ^{-1}$.*

*(2) Deux matrices sont **semblables** si il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.*

LemZMxxnfM

Lemme 4.118.
Une matrice de rang[50] *r dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ est équivalente à la matrice par blocs*

$$J_r = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.211}$$

Démonstration. Nous devons prouver que pour toute matrice $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ de rang r, il existe $P,Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ telles que $QAP = J_r$. Soit $\{e_i\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, puis $\{f_i\}$ une base telle que $Af_i = 0$ dès que $i > r$, qui existe par le lemme 4.113.

Nous considérons la matrice inversible P telle que $Pe_i = f_i$; ses colonnes sont donc précisément les f_i, si bien que

$$APe_i = Af_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i > r \\ \neq 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.212}$$

La matrice AP se présente donc sous la forme

$$AP = \begin{pmatrix} M & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \tag{4.213}$$

où M est une matrice $r \times r$. Nous considérons maintenant une base $\{g_i\}_{i=1,\dots,n}$ dont les r premiers éléments sont les r premières colonnes de AP et une matrice inversible Q telle que $Qg_i = e_i$. Alors

$$QAPe_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i < r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}. \tag{4.214}$$

Cela signifie que QAP est la matrice J_r. □

CorGOUYooErfOIe

Corolaire 4.119 (Équivalence et rang)**.**
Deux matrices sont équivalentes[51] *si et seulement si elles sont de même rang.*

Démonstration. D'abord il y a des implicites dans l'énoncé. Puisque nous voulons, soit par hypothèse, soit par conclusion, que les matrices A et B soient équivalentes, nous supposons qu'elles ont même dimension. Soient donc A et B deux matrices carrées d'ordre n.

Par le lemme 4.118, deux matrices de même rang r sont équivalentes à J_r. Elles sont donc équivalentes entre elles.

Inversement, supposons que A et B soient deux matrices équivalentes[52] : $A = PBQ^{-1}$ avec P et Q inversibles. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Image}(PBQ^{-1}) &= \{PBQ^{-1}v \text{ tel que } v \in \mathbb{K}^n\} && \text{(4.215a)} \\ &= PB\underbrace{\{Q^{-1}v \text{ tel que } v \in \mathbb{K}^n\}}_{=\mathbb{K}^n} && \text{(4.215b)} \\ &= P\big(B(\mathbb{K}^n)\big). && \text{(4.215c)} \end{aligned}$$

[49] Définition 1.50.
[50] Définition 4.111.
[51] Définition 4.117(1).
[52] Définition 4.117.

L'ensemble $B(\mathbb{K}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Comme le rang de P est maximum, la dimension de $P\big(B(\mathbb{K}^n)\big)$ est la même que celle de $B(\mathbb{K}^n)$. Par conséquent

$$\dim\Big(\text{Image}(PBQ^{-1})\Big) = \dim\big(B(\mathbb{K}^n)\big) = \text{rk}(B). \tag{4.216}$$

Le membre de gauche de cela n'est autre que $\text{rk}(A) = \dim\big(\text{Image}(PBQ^{-1})\big)$. □

4.3.15 Algorithme des facteurs invariants

PropPDfCqee

Proposition 4.120 (Algorithme des facteurs invariants[128])**.**
Soit $(\mathbb{A}, \delta)$ un anneau euclidien muni de son stathme et $U \in \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{A})$. Alors il existe $d_1, \dots, d_s \in \mathbb{A}^*$ et des matrices $P \in \text{GL}(m, \mathbb{A})$, $Q \in \text{GL}(n, \mathbb{A})$ tels que nous ayons

$$U = P \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_s & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix} Q \tag{4.217}$$

avec $d_i \mid d_{i+1}$ pour tout i.

Démonstration. Nous allons donner la preuve plus ou moins sous forme d'algorithme.

D'abord si $U = 0$ c'est bon, on a la réponse. Sinon, nous prenons l'élément (i_0, j_0) dont le stathme est le plus petit et nous l'amenons en $(1, 1)$ par les permutations

$$\begin{aligned} C_1 &\leftrightarrow C_{j_0} \\ L_1 &\leftrightarrow L_{i_0} \end{aligned} \tag{4.218}$$

Ensuite nous traitons la première colonne jusqu'à amener des zéros partout en dessous de $u_{1,1}$ de la façon suivante : pour chaque ligne successivement nous calculons la division euclidienne

$$u_{i,1} = qu_{1,1} + r_i, \tag{4.219}$$

et nous faisons

$$L_i \to L_i - qL_1, \tag{4.220}$$

c'est-à-dire que nous enlevons le maximum possible et il reste seulement r_i en u_{i1}. Vu que le but est de ne laisser que des zéros dans la première colonne, si le reste n'est pas zéro, nous ne sommes pas contents[53]. Dans ce cas nous permutons $L_1 \leftrightarrow L_i$, ce qui aura pour effet de strictement diminuer le stathme de $u_{1,1}$ parce qu'on va mettre en $u_{1,1}$ le nombre r_i dont le stathme est strictement plus petit que celui de $u_{1,1}$.

En faisant ce jeu de division euclidienne puis échange, on diminue toujours le stathme de $u_{1,1}$, donc ça finit par s'arrêter, c'est-à-dire qu'à un certain moment, la division euclidienne de $u_{i,1}$ par $u_{1,1}$ va donner un reste nul et nous serons contents.

Une fois la première colonne ramenée à la forme

$$C_1 = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.221}$$

nous faisons tout le même jeu avec la première ligne, en faisant maintenant des sommes divisions et permutations de colonnes. Notons que ce faisant, nous ne changeons plus la première colonne.

En fin de compte, nous trouvons une matrice[54]

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{4.222}$$

[53] Si il est zéro, nous passons à la ligne suivante

[54] Nous nommons toujours par la même lettre U la matrice originale et la matrice modifiée, comme il est d'usage en informatique.

Si l'élément $u_{1,1}$ ne divise pas un des éléments de A, disons $a_{i,j}$, alors nous opérons

$$C_1 \to C_1 - C_j. \tag{4.223}$$

Cela nous détruit un peu la première colonne, mais ne change pas $u_{1,1}$. Nous avons maintenant

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ * & & & \\ u_{i,j} & & A & \\ * & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{4.224}$$

Et nous refaisons tout le jeu depuis le début. Cependant, lorsque nous allons nous attaquer à la ligne i, $u_{1,1}$ ne divisera pas $u_{i,j}$, ce qui donnera lieu à une division euclidienne et un échange $L_1 \leftrightarrow L_i$. L'échange consistant à mettre r_i à la place de $u_{1,1}$ et réciproquement, diminuera encore strictement le stathme. Encore une fois, nous allons travailler jusqu'à avoir la matrice sous la forme

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{4.225}$$

EqADcNVgI

sauf que cette fois, le stathme de $u_{1,1}$ est strictement plus petit que la fois précédente. Si $u_{1,1}$ ne divise toujours pas tous les éléments de A, nous recommençons encore et encore. En fin de compte, nous finissons par avoir une matrice de la forme (4.225) avec $u_{1,1}$ qui divise tous les éléments de A.

Une fois que cela est fait, il faut continuer en recommençant tout sur la matrice A. Nous avons maintenant

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & & 0 \\ & u_{2,2} & \\ 0 & & B \end{pmatrix}. \tag{4.226}$$

Sous cette forme nous avons $u_{1,1} \mid u_{2,2}$ et $u_{1,1}$ divise tous les éléments de B. En effet $u_{1,1}$ divisant tous les éléments de A, il divise toutes les combinaisons de ces éléments. Or tout l'algorithme ne consiste qu'à prendre des combinaisons d'éléments.

Nous finissons donc bien sur une matrice comme annoncée. De plus, n'ayant effectué que des combinaisons de lignes, nous avons seulement multiplié par des matrices inversibles (lemme 4.110). □

4.4 Changement de base

Soit un espace vectoriel E muni de deux bases $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(f_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$. Les deux bases sont liées entre elles par

$$f_\alpha = \sum_i Q_{i,\alpha} e_i. \tag{4.227}$$

EQooFRQRooSMsQQB

Ici Q n'est pas une application linéaire $E \to E$: Q est seulement un tableau de nombres, donnant les coordonnées des vecteurs f_α dans la base de e_i. Éventuellement Q peut être vu comme une application linéaire $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

Dans la suite nous nommerons Q^{-1} la matrice inverse de Q. Inverse au sens des bêtes tableaux de nombres, sans interprétation en tant qu'application linéaire. De même pour Q^t qui est la transposée de Q.

4.4.1 Changement de base : vecteurs de base

LEMooIHZGooOZoYZd

Lemme 4.121.
Soit un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ ainsi que deux bases $(e_i)_{i=1,\dots,n}$, $(f_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$ de E liées par $f_\alpha = \sum_i Q_{i,\alpha} e_i$. Alors

$$e_i = \sum_\alpha Q^{-1}_{\alpha,i} f_\alpha. \tag{4.228}$$

EQooZQPAooAbKAdg

Démonstration. Nous multiplions l'égalité $f_\alpha = \sum_i Q_{i,\alpha} e_i$ par le nombre[55] $Q^{-1}_{\alpha,j} \in \mathbb{K}$ et nous sommons sur α :

$$\sum_\alpha Q^{-1}_{\alpha,j} f_\alpha = \sum_{i\alpha} (A_{i,\alpha} Q^{-1}_{\alpha,j}) e_i = e_j. \tag{4.229}$$

□

[55] Attention à la bonne interprétation de ce nombre : on fait bien référence à l'élément situé en (α, j) de la matrice Q^{-1}, et pas autre chose.

4.4.2 Changement de base : coordonnées

PROPooNYYOooHqHryX

Proposition 4.122.
Soit un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Soient deux bases $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(f_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$ liées par $f_\alpha = \sum_i Q_{i,\alpha} e_i$. Nous considérons un même vecteur dans les deux bases : $\sum_i x_i e_i = \sum_\alpha y_\alpha f_\alpha$. Alors

ITEMooIBAEooNaUnPD

(1) $y_\alpha = \sum_i Q^{-1}_{\alpha,i} x_i$

ITEMooKPWTooMwdbPu

(2) $x_i = \sum_\alpha Q_{i,\alpha} y_\alpha$.

Démonstration. Soit un vecteur $x \in E$. Il peut être écrit dans les deux bases :

EQooGSJMooGQstMx

$$x = \sum_i x_i e_i = \sum_\alpha y_\alpha f_\alpha. \tag{4.230}$$

En remplaçant e_i par sa valeur (4.228) nous avons l'égalité

$$\sum_{i\alpha} x_i Q^{-1}_{\alpha,i} f_\alpha = \sum_\alpha y_\alpha f_\alpha. \tag{4.231}$$

Puisque les f_α sont linéairement indépendants, l'égalité des sommes donne l'égalité de chacun des termes :

$$y_\alpha = \sum_i x_i Q^{-1}_{\alpha,i}. \tag{4.232}$$

En identifiant $x \in E$ au vecteur dans $\mathbb{K}^n$ de ses coordonnées dans la base $\{e_i\}$ nous pouvons écrire

$$y_\alpha = (Q^{-1}x)_\alpha, \tag{4.233}$$

Le point (1) est prouvé.

En ce qui concerne le point (2), nous repartons encore de (4.230), mais nous y substituons la définition des f_α :

$$\sum_i x_i e_i = \sum_{\alpha i} y_\alpha Q_{i,\alpha} e_i. \tag{4.234}$$

Vous voulez des détails ? Allez, une étape de plus que le strict nécessaire : nous écrivons

$$\sum_i \big(x_i - \sum_\alpha y_\alpha Q_{i,\alpha}\big) e_i = 0. \tag{4.235}$$

Par linéaire indépendance des e_i, nous avons annulation de tous les coefficients, c'est-à-dire

$$x_i = \sum_\alpha Q_{i,\alpha} y_\alpha, \tag{4.236}$$

comme annoncé. □

4.123.
Attention à l'ordre des indices dans la dernière égalité : la matrice Q vient avec les indices dans l'ordre i,α, tandis que la matrice Q^{-1} vient avec les indices dans l'ordre opposé : α, i. C'est pour cela qu'il est intéressant de noter avec des lettres latines les indices se rapportant à la première base, et avec des lettres grecques ceux se rapportant à la seconde base.

NORMooNWKZooPMwYTO

4.124.
Les formules de changement de coordonnées de la proposition 4.122 s'écrivent souvent de la façon suivante :

ITEMooLHQCooBRvSlp

(1) $y_\alpha = (Q^{-1}x)_\alpha$

ITEMooNXUGooJIeoBf

(2) $y = Q^{-1}x$.

ITEMooEFILooNENamW

(3) $x_i = (Qy)_i$

ITEMooMOKHooFEJvIW

(4) $x = Qy$

Ces égalités reposent sur un petit paquet d'abus de notations qu'il convient de bien comprendre. Ici, x et y sont les éléments de $\mathbb{K}^n$ donnés par les composantes de x dans les bases $\{e_i\}$ et $\{f_\alpha\}$, et Q est vu comme une matrice, un opérateur linéaire sur $\mathbb{K}^n$. Autrement dit, le choix des bases permet d'identifier E avec $\mathbb{K}^n$ et la matrice Q avec l'application linéaire f_Q de la proposition 4.75.

4.4.3 Changement de base : matrice d'une application linéaire

PROPooNZBEooWyCXTw

Proposition 4.125.
Soit une application linéaire $t: E \to E$ de matrices A et B dans les bases $\{e_i\}$ et $\{f_\alpha\}$. Si les bases sont liées par

$$f_\alpha = \sum_i Q_{i,\alpha} e_i, \tag{4.237}$$

alors les matrices A et B sont liées par

$$B = Q^{-1}AQ. \tag{4.238}$$

Démonstration. L'hypothèse sur le fait que A et B sont les matrices de t signifie que pour tout $x \in E$,

$$t(x) = \sum_{ij} A_{j,i} x_i e_j = \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha,\beta} y_\beta f_\alpha. \tag{4.239}$$

En remplaçant e_j par son expression (4.228) en termes des f_α et x_i par son expression $x_i = (Qy)_i$ (proposition 4.122), nous avons

$$(By)_\alpha = \sum_{ij\alpha} A_{j,i}(Qy)_i Q^{-1}_{\alpha,j} f_\alpha \tag{4.240a}$$

$$= \sum_{i\alpha} (Q^{-1}A)_{\alpha,i}(Qy)_i f_\alpha \tag{4.240b}$$

$$= \sum_{\alpha} (Q^{-1}AQy)_\alpha f_\alpha. \tag{4.240c}$$

Puisque les f_α forment une base, nous en déduisons $Q^{-1}AQy = By$. Et comme y est un élément quelconque de $\mathbb{K}^n$, nous en déduisons l'égalité de matrices

ooWKTYooQJfclT

$$B = Q^{-1}AQ. \tag{4.241}$$

□

Il s'agit bien d'une égalité de matrices ou, à la limite, d'applications linéaires sur $\mathbb{K}^n$, et non d'une égalité d'application linéaire sur E.

4.4.4 Déterminant de Vandermonde

PropnuUvtj

Proposition 4.126 ([137]).
*Le **déterminant de Vandermonde** est le polynôme en n variables donné par*

$$V(T_1, \dots, T_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ T_1 & T_2 & \dots & T_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ T_1^{n-1} & T_2^{n-1} & \dots & T_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (T_j - T_i). \tag{4.242}$$

Notez que l'inégalité du milieu est stricte (sinon d'ailleurs l'expression serait nulle).

Démonstration. Nous considérons le polynôme

$$f(X) = V(T_1, \dots, T_{n-1}, X) \in \big(\mathbb{K}[T_1, \dots, T_{n-1}]\big)[X]. \tag{4.243}$$

C'est un polynôme de degré au plus $n-1$ en X et il s'annule aux points $T_1, \dots, T_{n-1}$. Par conséquent[56] nous pouvons factoriser les $X - T_i$, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_{n-1}]$ tel que

EqeVxRwO

$$f = \alpha \prod_{i=1}^{n-1} (X - T_i). \tag{4.244}$$

Nous trouvons α en écrivant $f(0)$. D'une part la formule (4.244) nous donne

EqblwWMj

$$f(0) = \alpha(-1)^{n-1} T_1 \dots T_{n-1}. \tag{4.245}$$

[56] Proposition 3.111.

D'autre part la définition donne

$$f(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ T_1 & & T_{n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ T_1^{n-1} & \cdots & T_{n-1}^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.246a}$$

$$= (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} T_1 & \cdots & T_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1^{n-1} & \cdots & T_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \tag{4.246b}$$

$$= (-1)^{n-1} T_1 \dots T_{n-1} \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1^{n-1} & \cdots & T_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \tag{4.246c}$$

$$= (-1)^{n-1} T_1 \dots T_{n-1} V(T_1, \dots, T_{n-1}) \tag{4.246d}$$

En égalisant avec (4.245), nous trouvons $\alpha = V(T_1, \dots, T_{n-1})$, et donc

$$f = V(T_1, \dots, T_{n-1}) \prod_{j \leqslant n-1} (X - T_j) \tag{4.247}$$

Enfin, une récurrence montre que

$$V(T_1, \dots, T_n) = f(T_n) \tag{4.248a}$$

$$= V(T_1, \dots, T_{n-1}) \prod_{j \leqslant n-1} (T_n - T_j) \tag{4.248b}$$

$$= \prod_{k \leqslant n} \prod_{j \leqslant k-1} (T_k - T_j) \tag{4.248c}$$

$$= \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (T_i - T_j). \tag{4.248d}$$

□

PROPooNVXIooXJKplZ

Proposition 4.127 ([1]).
Soient des $a_i \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{4.249}$$

ait $n+1$ racines distinctes dans $\mathbb{R}$. Alors

(1) $f = 0$

(2) $a_k = 0$ pour tout k.

Démonstration. Nous nommons $(r_i)_{i=1,\dots,n+1}$ les racines de f. L'équation $f(x) = 0$ s'écrit

$$(1, x, \dots, x^n) \cdot (a_0, \dots, a_n) = 0. \tag{4.250}$$

Le système $f(r_i) = 0$ (vu comme système d'équation pour les a_i) pour tout i s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & r_1 & \dots & r_1^n \\ 1 & r_2 & \dots & r_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r_n & \dots & r_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0. \tag{4.251}$$

La proposition 4.126 nous dit que le déterminant de ce système est non nul. Donc il existe une solution unique. Cette unique solution est manifestement $(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$. □

4.5 Espaces de polynômes

SecEspacePolynomes

Attention : les polynômes en-soi, font l'objet de la définition 1.473.

Pour chaque $k > 0$ donné, nous définissons

$$\mathcal{P}^k_{\mathbb{R}} = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, p : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k,\ a_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 0, \ldots, k\}. \tag{4.252}$$

Il est facile de se convaincre que la somme de deux polynômes de degré inférieur ou égal à k est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à k. En outre il est clair que la multiplication par un scalaire ne peut pas augmenter le degré d'un polynôme. L'ensemble $\mathcal{P}^k_{\mathbb{R}}$ est donc un espace vectoriel muni des opérations héritées de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$.

PROPooWOMFooLpTKgG

Proposition 4.128 ([1]).
Les polynômes $x \mapsto x^k$ avec $k = 0, \ldots, n$ forment une base de $\mathcal{P}^k_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Si nous notons $e_i(x) = x^i$, et si P est un polynôme, alors il existe des a_i tels que $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Dans ce cas, $P = \sum_i a_i e_i$. Cela prouver que $\{e_i\}_{i=0,\ldots,n}$ est générateur.

Pour montrer que c'est libre, nous supposons que $\sum_{i=0}^n a_i e_i = 0$. En particulier le polynôme $P(x) = \sum_i a_i x^i$ a plein de racines distinctes et la proposition 4.127 implique que $a_i = 0$ pour tout i. □

Nous allons maintenant étudier trois applications linéaires de $\mathcal{P}^k_{\mathbb{R}}$ vers d'autres espaces vectoriels.

L'isomorphisme canonique $\phi : \mathcal{P}^k_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{k+1}$ Nous définissons ϕ par les relations suivantes

$$\phi(x^j) = e_{j+1}, \qquad \forall j \in \{0, \ldots, k\}.$$

Cela veut dire que pour tout p dans $\mathcal{P}^k_{\mathbb{R}}$, avec $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$, l'image de p par ϕ est

$$\phi(p) = \phi\left(\sum_{j=0}^k a_j x^j\right) = \sum_{j=0}^k a_j e_{j+1}.$$

Exemple 4.129.
Soit $k = 5$ on a

$$\phi(-8 - 7x - 4x^2 + 4x^3 + 2x^5) = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{4.253}$$

△

Cette application est clairement bijective et respecte les opérations d'espace vectoriel, donc c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels. L'existence d'un isomorphisme entre $\mathcal{P}^k_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{R}^{k+1}$ est un cas particulier du théorème qui dit que pour chaque m dans $\mathbb{N}_0$ fixée, tous les espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension m sont isomorphes à $\mathbb{R}^m$. Vous connaissez peut être déjà ce théorème depuis votre cours d'algèbre linéaire.

La dérivation $d : \mathcal{P}^k_{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}^{k-1}_{\mathbb{R}}$ L'application de dérivation d fait exactement ce qu'on attend d'elle

$$d(x^0) = d(1) = 0, \qquad d(x^j) = jx^{j-1}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Cette application n'est pas injective, parce que l'image de p ne dépend pas de la valeur de a_0, donc si deux polynômes sont les mêmes à une constante près ils auront la même image par d.

Exemple 4.130.
Soit $k = 3$ on a

$$d(-8 - 12x + 4x^3) = -12(1) + 4(3x^2) = -12 + 12x^2. \tag{4.254}$$

Noter que $d(-30 - 12x + 4x^3) = d(-8 - 12x + 4x^3)$. Cela confirme, comme mentionné plus haut, que la dérivée n'est pas injective. △

L'intégration $I : \mathcal{P}^k_{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}^{k+1}_{\mathbb{R}}$ Nous pouvons définir une application qui est « à une constante près » l'application réciproque de la dérivation. Cette application est définie sur les éléments de base par

$$I(x^j) = \frac{x^{j+1}}{j+1}. \tag{4.255}$$

Bien entendu, la raison d'être et la motivation de cette définition apparaîtront lorsque nous développerons une théorie générale de l'intégration.

Exemple 4.131.
Soit $k = 4$ on a

$$I(6 + 2x + x^2 + x^4) = 6x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}. \tag{4.256}$$

△

Remarque : étant donné que dans la définition de I nous avons décidé d'intégrer entre zéro et x, tous les polynômes dans $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{k+1}$ qui sont l'image par I d'un polynôme de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{k}$ ont $a_0 = 0$. Cela veut dire que nous pouvons générer toute l'image de I en utilisant un sous-ensemble de la base canonique de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{k+1}$, en particulier $\mathcal{B}_1 = \{x \mapsto x^j \,|\, j = 1, \dots, k\} \subset \mathcal{B}$ nous suffira. Cela n'est guère surprenant, parce que l'image par une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie ne peut pas être un espace de dimension supérieure.

Les applications de dérivation et intégration correspondent évidemment à des applications linéaires de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ dans lui-même.

L'espace de tous les polynômes étant de dimension infinie, il peut servir de contre-exemple assez simple. Dans la sous-section 10.4.2, nous verrons que toutes les normes ne sont pas équivalentes sur l'espace des polynômes.

4.6 Projection et orthogonalité

PropProjScal

Proposition 4.132.
Si nous écrivons $\texttt{proj}_Y$ l'opération de projection sur la droite qui sous-tend Y, alors nous avons

$$\| \texttt{proj}_Y X\| = \frac{X \cdot Y}{\|Y\|}. \tag{4.257}$$

Démonstration. Les vecteurs X et Y sont des flèches dans l'espace. Nous pouvons choisir un système d'axe orthogonal tel que les coordonnées de X et Y soient

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.258}$$

où l est la longueur du vecteur Y. Pour ce faire, il suffit de mettre le premier axe le long de Y, le second dans le plan qui contient X et Y, et enfin le troisième axe dans le plan perpendiculaire aux deux premiers.

Un simple calcul montre que $X \cdot Y = xl + y \cdot 0 + 0 \cdot 0 = xl$. Par ailleurs, nous avons $\| \texttt{proj}_Y X\| = x$. Par conséquent,

$$\| \texttt{proj}_Y X\| = \frac{X \cdot Y}{l} = \frac{X \cdot Y}{\|Y\|}. \tag{4.259}$$

□

Corolaire 4.133.
Si la norme de Y est 1, alors le nombre $X \cdot Y$ est la longueur de la projection de X sur Y.

Démonstration. Poser $\|Y\| = 1$ dans la proposition 4.132. □

4.7 Dualité

PropEJBZooTNFPRj

Proposition 4.134.
Si A est la matrice d'une application linéaire, alors le rang de cette application linéaire est égal au rang de A, c'est-à-dire à la taille de la plus grande matrice carrée de déterminant non nul contenue dans A.

DefJPGSHpn

Définition 4.135.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

*(1) Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E sur son corps de base $\mathbb{K}$.*

*(2) Le **dual algébrique** de E, noté E^*, est l'ensemble des formes linéaires sur E. Autrement dit : $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.*

Nous verrons les formes multilinéaires en la définition 8.1.

Nous verrons plus tard qu'en dimension infinie, les applications linéaires ne sont pas toujours continues. Nous définirons donc aussi un concept de dual topologique. Voir la proposition 10.85, la remarque 10.88 et la définition 25.1.

DEFooTMSEooZFtsqa

Lemme-Définition 4.136.
Si E est un espace vectoriel et si $\{b_i\}$ est une base de E, alors nous définissons

$$\begin{aligned} b_i^* \colon E &\to \mathbb{K} \\ b_j &\mapsto \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{4.260}$$

et sa prolongation par linéarité. Ces éléments du dual E^* forment une base appelée ***base duale****.*

En particulier nous avons

$$\dim(E) = \dim(E^*). \tag{4.261}$$

Démonstration. Notons pour commencer que $b_i^*\big(\sum_i x_i b_i\big) = x_i$.

(1) **Générateur** Soit $\varphi \in E^*$. Nous avons

$$\varphi(x) = \sum_i x_i \varphi(b_i) = \sum_i \varphi(b_i) b_i^*(x), \tag{4.262}$$

ce qui signifie que $\varphi = \sum_i \varphi(b_i) b_i^*$.

(2) **Libre** Si $\sum_i a_i b_i^* = 0$, alors en particulier en appliquant à b_k nous avons

$$0 = \big(\sum_i a_i b_i^*\big)(b_k) = \sum_i a_i \delta_{ik} = a_k. \tag{4.263}$$

Donc tous les coefficients sont nuls et $\{b_i^*\}_{i=1,\dots,n}$ est libre.

□

Notons que si $v \in E$ est un vecteur, ça n'a aucun sens à priori de parler de v^*. Il s'agit bien de définir *toute* la base $\{e_i^*\}$ à partir de toute la base $\{e_i\}$.

LEMooSVRIooFbxfue

Lemme 4.137 (Changement de base duale[1])**.**
Soient un espace vectoriel V de dimension finie, une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ et sa base duale $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,n}$. Soit une bijection linéaire $A\colon V \to V$. Nous considérons $\{\beta_i\}_{i=1,\dots,n}$ la base duale de la base $\{Ae_i\}$.

Alors

$$\beta_i = \sum_j A^{-1}_{ij} \alpha_j. \tag{4.264}$$

Démonstration. Par définition d'une base duale, il faut $\beta_i(Ae_k) = \delta_{ik}$. Vu que $\{\alpha_i\}$ est une base, nous pouvons décomposer β_i de la façon suivante : $\beta_i = \sum_j B_{ij}\alpha_j$. Il nous reste à prouver que $B = A^{-1}$.

Pour cela nous calculons un peu :

$$\delta_{ik} = \beta_i(Ae_k) = \sum_j B_{ij}\alpha_j(Ae_k) = \sum_{lj} B_{ij}A_{lk}\underbrace{\alpha_j(e_l)}_{=\delta_{jl}} = \sum_l B_{il}A_{lk} = (BA)_{ik}. \tag{4.265}$$

Nous avons donc $\delta_{ik} = (BA)_{ik}$, c'est-à-dire $BA = \mathbb{1}$ ou encore $B = A^{-1}$. □

LEMooQLWNooYUpGdo

Lemme 4.138 ([157])**.**
Soit un espace vectoriel E de dimension finie.

ITEMooHHTLooNCjgfn

(1) Si α est une forme linéaire non nulle sur E, alors il existe $x \in E$ tel que $\alpha(x) = 1$.

ITEMooBYAAooUWBKDk

(2) Si $x \neq 0$ dans E, alors il existe une forme linéaire α sur E telle que $\alpha(x) = 1$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Puisque α est non nulle, nous pouvons considérer $v \in E$ tel que $\alpha(v) \neq 0$. Alors en posant $x = \alpha(v)^{-1}v$, nous avons le résultat.

(2) **Pour (2)** Soit un vecteur non nul que nous écrivons sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ (pour une certaine base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E). Supposons que $x_k \neq 0$. Alors la forme

$$\begin{aligned} \alpha\colon E &\to \mathbb{K} \\ y &\mapsto y_k/x_k \end{aligned} \tag{4.266}$$

fait l'affaire.

□
LEMooKTREooBrnWVz

Lemme 4.139.
Soit un espace vectoriel de dimension finie E sur le corps $\mathbb{K}$. Si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est une base de E^*, alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi\colon E &\to \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto \big(\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)\big) \end{aligned} \tag{4.267}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Φ est injective** Soit $z \in \ker(\Phi)$. Nous avons $\alpha_i(z) = 0$ pour tout i. Si $z \neq 0$, alors le lemme 4.138 dit qu'il existe $\beta \in E^*$ tel que $\beta(z) \neq 0$.

Décomposons un tel β dans la base de $\{\alpha_i\}$:

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i. \tag{4.268}$$

Alors nous avons

$$0 \neq \beta(z) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underbrace{\alpha_i(z)}_{=0} = 0. \tag{4.269}$$

Contradiction. Donc $\ker(\Phi) = \{0\}$ et Φ est injective.

(2) **Φ est surjective** Les espaces vectoriels E, E^* et $\mathbb{K}^n$ ont tout trois, une dimension n. Donc Φ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension. Elle est donc surjective par le corolaire 4.51.

□
PROPooDBPGooPagbEB

Proposition-Définition 4.140 ([157]).
Soit un espace vectoriel E de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$. Toute base du dual E^* est duale d'une unique base de E. Cette base est dite ***préduale****.*

Démonstration. Nous considérons une base $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de E^*. Nous devons prouver qu'il existe une unique base de E dont la base duale est $\mathcal{F}$.

(1) **Existence** Le lemme 4.139 nous indique que l'application

$$\begin{aligned} \Phi\colon E &\to \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto \big(\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)\big) \end{aligned} \tag{4.270}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Soit la base canonique de $\mathbb{K}^n$: $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. Puisque Φ est un isomorphisme, $\big(\Phi^{-1}(\epsilon_i)\big)_{i=1,\dots,n}$ est une base de E. Nous allons montrer qu'elle est préduale de (α_i). Nous posons $e_i = \Phi^{-1}(\epsilon_i)$ et nous calculons :

$$\begin{aligned} \alpha_i(e_j) &= \alpha_i\big(\Phi^{-1}(\epsilon_j)\big) && \text{(4.271a)} \\ &= \Phi\big(\Phi^{-1}(\epsilon_j)\big)_i && \text{(4.271b)} \\ &= (\epsilon_i)_j && \text{(4.271c)} \\ &= \delta_{i,j} && \text{(4.271d)} \end{aligned}$$

SUBEQooACVAooVNwzMq
SUBEQooOYNHooSVQOyz

Justifications :

- Pour 4.271b, nous remarquons que $\alpha_i(x) = \Phi(x)_i$.
- Pour 4.271d, nous utilisons le fait que les ϵ_j forment la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

(2) **Unicité** Soit une base préduale (e_i) de (α_i). Nous avons, par définition, que $\alpha_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Donc

$$\big(\alpha_1(e_j), \dots, \alpha_n(e_j)\big) = \epsilon_j. \tag{4.272}$$

Nous appliquons Φ^{-1} à cette dernière équation pour obtenir $e_j = \Phi^{-1}(\epsilon_j)$. Donc les e_j sont déterminés de façon unique à partir des α_i.

□

Si u et v sont des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, alors nous notons uv^* l'application linéaire

$$\begin{aligned} uv^* \colon \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto uv^*(x). \end{aligned} \tag{4.273}$$

LEMooJVDHooONXNAh

Lemme 4.141 (Lemme des déterminants[158]).
Soit une application linéaire $A \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ ainsi que $u, v \in \mathbb{K}^n$. Nous avons

(1) $\det(A + uv^*) = (1 + v \cdot Au)\det(A)$

(2) $\det(\mathbb{1} + af) = 1 + f(a)$.

ITEMooGJOZooVLfZcX

4.7.1 Changement de base duale

PROPooDOEYooDpUbnc

Proposition 4.142 ([1]).
Soient deux bases $\{e_i\}$ et $\{e'j\}$ de l'espace vectoriel V. Nous notons $\{\alpha_i\}$ et $\{\alpha'_i\}$ les bases duales. Si $e'_j = \sum_i A_{ij}e_i$, alors

$$\alpha'_j = \sum_k A^{-1}_{jk}\alpha_k. \tag{4.274}$$

Démonstration. Nous posons $\alpha'_j = \sum_k B_{kj}\alpha_k$ et nous appliquons ça à e'_i. À gauche nous avons $\alpha'_j(e'_i) = \delta_{ij}$, et à droite,

$$\begin{aligned} \sum_k B_{kj}\alpha_k(e'_i) &= \sum_k B_{kj}\alpha_k\big(\sum_l A_{li}e_l\big) && \text{(4.275a)} \\ &= \sum_{kl} B_{kj}A_{li}\delta_{kl} && \text{(4.275b)} \\ &= \sum_l B_{lj}A_{li} && \text{(4.275c)} \\ &= (B^tA)_{ji}. && \text{(4.275d)} \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que $B^tA = \mathbb{1}$, ou encore que $B^t = A^{-1}$, ce qu'il fallait. □

4.7.2 Orthogonal

DEFooEQSMooHVzbfz

Définition 4.143.
*Soit E, un espace vectoriel, et F un sous-espace de E. L'**orthogonal** de F est la partie $F^\perp \subset E^*$ donnée par*

$$F^\perp = \{\alpha \in E^* \text{ tel que } \forall x \in F, \alpha(x) = 0\}. \tag{4.276}$$

Eqiiyple

Cette définition d'orthogonal via le dual n'est pas du pur snobisme. En effet, la définition « usuelle » qui ne parle pas de dual,

$$F^\perp = \{y \in E \text{ tel que } \forall x \in F, y \cdot x = 0\}, \tag{4.277}$$

demande la donnée d'un produit scalaire. Évidemment dans le cas de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et de l'identification usuelle entre $\mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^n)^*$ via une base, les deux notions d'orthogonal coïncident.

La définition 4.143, au contraire, est intrinsèque : elle ne dépend que de la structure d'espace vectoriel.

Si $B \subset E^*$, on note B^o son orthogonal :

$$B^o = \{x \in E \text{ tel que } \omega(x) = 0, \forall \omega \in B\}. \tag{4.278}$$

Notons qu'on le note B^o et non $B^\perp$ parce qu'on veut un peu s'abstraire du fait que $(E^*)^* = E$. Du coup on impose que B soit dans un dual, et on prend une notation précise pour dire qu'on remonte au pré-dual, et non qu'on va au dual du dual.

PropXrTDIi

Proposition 4.144.
Soient un espace vectoriel E et F, un sous-espace vectoriel de E. Nous avons

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E. \tag{4.279}$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base de F que nous complétons en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E par le théorème 4.14. Soit $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ la base duale. Alors nous prouvons que $\{e_{p+1}^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de $F^\perp$.

D'abord, ce sont des éléments de $F^\perp$, parce que si $i \leqslant p$ et si $k \geqslant 1$, nous avons $e_{p+k}^*(e_i) = 0$; donc oui, $e_{p+k}^* \in F^\perp$.

Ensuite, en tant que partie d'une base de F^*, c'est une partie libre. Il reste à montrer que c'est générateur.

Enfin $F^\perp \subset \text{Span}\{e_k^*, k \in \{p+1, \dots, n\}\}$ parce que si $\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k e_k^*$, alors $\omega(e_i) = \omega_i$, mais nous savons que si $\omega \in F^\perp$, alors $\omega(e_i) = 0$ pour $i \leqslant p$. Donc $\omega = \sum_{k=p+1}^n \omega_k e_k^*$. □

La proposition 8.180 donnera une version plus terre à terre de la proposition 4.144 en disant que si nous avons un produit scalaire, alors $E = F \oplus F^\perp$ où $F^\perp$ est cette fois défini comme l'orthogonal pour le produit scalaire.

4.8 Représentation de groupe

DEFooXVMSooXDIfZV

Définition 4.145 (Représentation)**.**
*Soit un groupe G. Une **représentation** de G est un couple (E, ρ) où E est un espace vectoriel et ρ est une application $\rho\colon G \to \text{GL}(E)$ vérifiant*

$$\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(gh). \tag{4.280}$$

pour tout $g, h \in G$.

Définition 4.146.
Une représentation[57] *$\rho\colon G \to \text{GL}(E)$ est **fidèle** si elle est injective*

*La dimension de E est le **degré** de la représentation (E, ρ).*

Le fait que la représentation $\rho\colon G \to \text{GL}(E)$ soit fidèle ne dit pas que chacun des $\rho(g)$ est injectif.

PROPooHNQOooSzeEFG

Proposition 4.147.
Soit un corps $\mathbb{K}$. Si G est un groupe dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ (c'est-à-dire un groupe de matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$), alors l'application

$$\begin{aligned} \rho\colon G &\to \text{GL}(\mathbb{K}^n) \\ A &\mapsto f_A \end{aligned} \tag{4.281}$$

où f_A est l'application linéaire associée à A, est une représentation de G.

Démonstration. La représentation dont nous parons n'est autre que l'application ψ de la définition 4.72, dont nous connaissons beaucoup de propriétés. La proposition 4.78 dit, entre autres, que $\psi(AB) = \psi(A)\psi(B)$, c'est-à-dire que $\rho(AB) = \rho(A)\rho(B)$, et donc que ρ est une représentation. □

4.9 Somme directe d'espaces vectoriels

Si V et W sont des espaces vectoriels, ce que nous notons $V \oplus W$ n'est rien d'autre que l'espace vectoriel de l'ensemble $V \times W$.

DEFooJKAWooKkkkwm

Proposition-Définition 4.148 ([159, 160])**.**
Si V et W sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, alors les définitions

(1) $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$

(2) $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$

donnent une structure d'espace vectoriel sur $V \times W$.

*Cet espace sera noté $V \oplus W$ et est appelé **somme directe** de V et W.*

[57] Définition 4.145.

DEFooIJDNooRUDUYF

Définition 4.149 (Sous-espaces en somme directe[161]).
*Soient un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ ainsi que des sous-espaces vectoriels $\{F_i\}_{i\in I}$ (I est un ensemble fini ou infini). Nous disons que les F_i sont **en somme directe** si pour tout élément $u \in \sum_{i\in I} F_i$, il existe un unique ensemble $\{u_i\}_{i\in I}$ de vecteurs tel que*

(1) $u = \sum_{i\in I} u_i$

(2) $u_i \in F_i$ *pour tout* i,

(3) $\{j \in I \text{ tel que } u_j \neq 0\}$ *est fini.*

Si l'espace vectoriel E est un espace vectoriel topologique, nous avons la définition 7.227 qui donne des conditions de compatibilité entre les topologies.

LEMooHWRVooLedAmF

Lemme 4.150 (Décomposition suivant une somme directe).
Soit un espace vectoriel E et deux sous-espaces F_1, F_2 en somme directe : $E = F_1 \oplus F_2$. Alors l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon F_1 \times F_2 &\to E\\ (x,y) &\mapsto x+y\end{aligned} \tag{4.282}$$

est une bijection.

Démonstration. L'application est injective parce que si $\psi(x_1,x_2) = \psi(y_1,y_2)$, alors $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Nommons u ce vecteur. Par unicité de l'ensemble $\{u_1,u_2\}$ tel que $u = u_1 + u_2$, nous avons automatiquement $\{x_1,x_2\} = \{y_1,y_2\}$ et donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

En ce qui concerne la surjectivité, si $u \in E$, il existe un ensemble $\{u_1,u_2\}$ avec $u_i \in F_i$ tel que $u = u_1 + u_2 = \psi(u_1,u_2)$. □

LEMooDQMQooInVVDY

Lemme 4.151 ([1, 161]).
Soient un espace vectoriel E ainsi que des sous-espaces vectoriels F_i. Nous avons équivalence entre les assertions suivantes.

ITEMooHJXIooQKAfBe

(1) Les F_i sont en somme directe[58].

ITEMooJFOFooGDlwUz

(2) Si $\sum_{i\in I} u_i = 0$ avec $u_i \in F_i$ et si $\{j \in I \text{ tel que } u_j \neq 0\}$ est fini, alors tous les u_i sont nuls.

ITEMooNFWVooNdhhid

(3) Chaque espace F_k est en somme directe avec la somme des précédents, c'est-à-dire que pour tout k,

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap F_k = \{0\}. \tag{4.283}$$

ITEMooPLXGooCOQgen

(4) Pour tout k,

$$F_k \cap \left(\sum_{i\neq k} F_i\right) = \{0\}. \tag{4.284}$$

Notez qu'ici $\sum_{i\neq k} F_i$ signifie l'ensemble des $x \in V$ pouvant être écrit comme une combinaison linéaire finie d'éléments des F_i avec $i \neq k$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) implique (2)** Par définition de la somme directe, le vecteur 0 de E peut être écrit de façon unique sous la forme $\sum_i u_i$, et cette façon est avec $u_i = 0$ pour tout i.

(2) **(2) implique (3)** Supposons que $\sum_{i=1}^{k-1} u_i = u_k$ avec $u_j \in F_j$ pour tout j. Alors en posant $v_i = u_i$ (i=1,...,k-1) et $v_k = -u_k$ nous avons $\sum_{i=1}^{k} v_i = 0$, ce qui, en vertu de (2) donne $v_i = 0$ pour tout i.

(3) **(3) implique (4)** Supposons avoir

$$u_k = \sum_{i\in J} u_i \tag{4.285}$$

où J est fini dans $\mathbb{N}\setminus\{k\}$. Donc $J = \{1,\dots,n\}\setminus\{k\}$ pour un certain n. En réarrangeant la somme nous avons

$$u_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i, \tag{4.286}$$

et donc tous les u_i sont nuls par (3).

[58] Définition 4.149.

(4) **(4) implique (1)** Soit un élément $x \in \sum_{i\in I} F_i$. Nous l'écrivons de deux façons

$$x = \sum_{i\in J_1} u_i = \sum_{i\in J_2} v_i \tag{4.287}$$

où J_1 et J_2 sont finis. Nous posons $J = J_1 \cup J_2$ et $u_j = 0$ pour $j \in J \setminus J_1$ et $v_j = 0$ pour $j \in J \setminus J_2$. Ainsi $\sum_{i\in J} u_i = \sum_{i\in J} v_j$ et donc

$$\sum_{i\in J}(i_i - v_i) = 0. \tag{4.288}$$

Soit $k \in J$. Nous avons

$$u_k - v_k = \sum_{i\in J\setminus\{k\}} (u_i - v_i). \tag{4.289}$$

En vertu de (4), tout est nul et en particulier $v_i = u_i$ pour tout i.

□

PROPooCASNooEqisqa

Proposition 4.152 ([162]).
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et deux sous-espaces F_1 et F_2 satisfaisant

(1) $F_1 \cap F_2 = \{0\}$,

(2) $\dim(F_1) + \dim(F_2) \geqslant \dim(E)$.

Alors $E = F_1 \oplus F_2$.

Démonstration. Soient une base $\{e_i\}_{i\in I}$ de F_1 et $\{f_\alpha\}$ de F_2. Nous commençons par prouver que la partie $B = \{e_i\} \cup \{f_\alpha\}$ est libre.

Supposons en effet, avoir des coefficients a_i et b_α tels que

$$\sum_i a_i e_i + \sum_\alpha b_\alpha f_\alpha = 0. \tag{4.290}$$

Cela implique que $\sum_i a_i e_i = -\sum_\alpha b_\alpha f_\alpha$. Or $\sum_i a_i e_i \in F_1$ et $-\sum_\alpha b_\alpha f_\alpha \in F_2$. Donc les éléments $\sum_i a_i e_i$ et $\sum_\alpha b_\alpha f_\alpha$ sont dans $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Nous avons alors les égalités

$$\sum_i a_i e_i = 0 \tag{4.291}$$

et

$$\sum_\alpha b_\alpha f_\alpha = 0. \tag{4.292}$$

La première implique $a_i = 0$ pour tout i et la seconde implique $b_\alpha = 0$ pour tout α.

Donc B est une partie libre de E contenant $\dim(F_1) + \dim(F_2) \geqslant \dim(E)$ éléments. La proposition 4.19(1) nous indique alors qu'en réalité $\dim(F_1) + \dim(F_2) = \dim(E)$. Comme B est une partie libre contenant $\dim(E)$ éléments, c'est une base par la proposition 4.19(2). □

DEFooYQZHooCDuhDU

Définition 4.153 (Projection parallèle).
Si nous avons une somme directe d'espaces vectoriels[59] *$E = \bigoplus_{k=1}^n E_k$ alors le **projecteur sur** E_i **parallèlement** aux autres E_i est l'application*

$$\begin{aligned} p_i\colon E &\to E \\ x_1 + \ldots + x_n &\mapsto x_i \end{aligned} \tag{4.293}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ est la décomposition[60] *de x selon les espaces E_i.*

Cette application est un projecteur au sens de la définition 1.457.

LEMooCFDYooHTroSi

Lemme 4.154 ([1]).
Soit une somme directe d'espaces vectoriels[61] *$E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$. Si une application linéaire $p\colon E \to E$ vérifie*

ITEMooCDFXooKZJvON

(1) Si $i \neq k$, $p(E_i) = \{0\}$,

[59] Définition 4.149.
[60] Lemme 4.149.
[61] Définition 4.149.

ITEMooJKLVooLbSljW

(2) $p(x) = x$ *pour tout* $x \in E_k$,

alors p *est la projection sur* E_k *parallèle*[62] *aux autres* E_i.

Démonstration. Soit $x \in E$ et décomposons-le selon le lemme 4.149 : $x = x_1 + \ldots + x_n$. Alors

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x_1) + \ldots + p(x_n) && p \text{ est linéaire} && (4.294a)\\ &= p(x_k) && \text{hyp. (1)} && (4.294b)\\ &= x_k && \text{hyp. (2)} && (4.294c)\\ & && && (4.294d) \end{aligned}$$

□

4.9.1 Structure réelle

DEFooCIFSooVmcNtE

Proposition-Définition 4.155 ([163, 160, 1])**.**
Soit un espace vectoriel E *sur* $\mathbb{C}$. *Il existe une application* $\sigma : E \to E$ *telle que*

(1) $\sigma^2 = \mathrm{Id}_E$

(2) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}\sigma(x) + \bar{\beta}\sigma(y)$.

Une telle application est une ***structure réelle*** *sur* E.

Démonstration. La proposition 4.25 nous permet de considérer une base $\{e_i\}_{i\in I}$ de E. Alors, nous définissons

$$\sigma\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\Big) = \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i e_i. \tag{4.295}$$

Notez que la somme est toujours finie. □

PROPooPZHPooNdarzg

Proposition 4.156.
Soit un espace vectoriel E *sur* $\mathbb{C}$ *et une structure réelle*[63] σ *sur* E. *Nous posons*

$$E_{\mathbb{R}} = \{v \in E \text{ tel que } \sigma(v) = v\}. \tag{4.296}$$

Alors

(1) La partie $E_{\mathbb{R}}$ *est un espace vectoriel réel.*

(2) Nous avons la décomposition en somme directe[64]

$$E = E_{\mathbb{R}} \oplus iE_{\mathbb{R}}. \tag{4.297}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Espace vectoriel réel** Si $v, w \in E_{\mathbb{R}}$, alors

$$\sigma(v + w) = \sigma(v) + \sigma(w) = v + w, \tag{4.298}$$

et si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\sigma(\lambda x) = \lambda\sigma(x) = \lambda x. \tag{4.299}$$

Donc $E_{\mathbb{R}}$ est un espace vectoriel réel.

(2) **Première somme directe** Nous définissons

$$E^+ = \{v \in E \text{ tel que } \sigma(v) = v\}, \tag{4.300a}$$
$$E^- = \{v \in E \text{ tel que } \sigma(v) = -v\} \tag{4.300b}$$

Nous prouvons que

$$\begin{aligned} \psi : E^+ \times E^- &\to E\\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned} \tag{4.301}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Puisque ψ est linéaire, il suffit de prouver qu'elle est bijective.

[62] Définition 4.153.
[63] Définition 4.155.
[64] Définition 4.148.

(2a) **Surjectif** Si $v \in E$, alors en posant $v_+ = \frac{1}{2}\big(v + \sigma(v)\big)$, $v_- = \frac{1}{2}\big(v - \sigma(v)\big)$, nous avons

$$v = v_+ + v_-, \quad v_+ \in E^+, \quad v_- \in E^-, \tag{4.302}$$

et donc $v = \psi(v_+, v_-)$.

(2b) **Injectif** Supposons $\psi(a, b) = \psi(\alpha, \beta)$. Alors $a + b = \alpha + \beta$ et donc $a - \alpha = \beta - b$. Comme $a - \alpha \in E^+$ et $\beta - b \in E^-$, nous savons que $a - \alpha = \beta - b \in E^+ \cap E^-$. Étant donné que $E^+ \cap E^- = \{0\}$, nous avons $a - \alpha = \beta - b = 0$.

Nous avons donc la somme directe $E = E^+ \oplus E^-$.

(3) **Conclusion** Par définition, $E^+ = E_{\mathbb{R}}$. Il nous reste à voir que $E^- = iE^+$. Nous prouvons les inclusions dans les deux sens.

(3a) $E^- \subset iE^+$ Soit $v \in E^-$. Nous avons $iv \in E^+$; en effet

$$\sigma(iv) = \bar{i}\sigma(v) = -i\sigma(v) = iv. \tag{4.303}$$

Donc $iv \in E^+$ pour $v \in E^-$.

(3b) $iE^+ \subset E^-$ Soit $v \in E^+$, et voyons que $iv \in E^-$. En effet,

$$\sigma(iv) = -i\sigma(v) = -iv. \tag{4.304}$$

□

4.157.
Lorsque nous avons une structure réelle σ sur un espace vectoriel complexe E, nous écrivons $E = E_{\mathbb{R}} \oplus iE_{\mathbb{R}}$ sans préciser dans la notation « $E_{\mathbb{R}}$ » que cet ensemble dépend du choix de σ. En particulier si F est un sous-espace vectoriel de E, nous utiliserons la notation $F_{\mathbb{R}}$ relativement à la même involution que celle utilisée pour E.

Lemme 4.158.
Soit un espace vectoriel complexe E muni d'une structure réelle σ. Si F est un sous-espace de E alors $F_{\mathbb{R}} = E_{\mathbb{R}} \cap F$.

Démonstration. Par définition,

$$F_{\mathbb{R}} = \{v \in F \text{ tel que } \sigma(v) = v\}. \tag{4.305}$$

(1) $F_{\mathbb{R}} \subset F$ C'est dans la définition de $F_{\mathbb{R}}$ (sous-ensemble de F).

(2) $F_{\mathbb{R}} \subset E_{\mathbb{R}}$ Si $v \in F_{\mathbb{R}}$, alors $\sigma(v) = v$. Mais cette égalité est précisément celle qui permet d'être dans $E_{\mathbb{R}}$.

□

Vous remarquerez que ce lemme ne fonctionne que parce que nous avons choisi la même structure réelle sur F que sur E.

Chapitre 5

Classification de certains groupes

5.1 Théorèmes de Sylow

Lemme 5.1.
Soient H et K des sous-groupes finis de G. Alors

$$\mathrm{Card}(HK) = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}. \tag{5.1}$$

Attention : dans ce lemme, l'ensemble HK n'est pas spécialement un groupe. Ce serait le cas si H normalisait K, c'est-à-dire si nous avions $hkh^{-1} \in K$, $\forall (h,k) \in H \times K$.

ThoCauchyGpFini

Théorème 5.2 (Théorème de Cauchy[164])**.**
Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant $|G|$. Alors

(1) G contient un élément d'ordre p.

(2) Si G est un p-groupe, il existe un élément central d'ordre p dans G.

ThoIfdlEB

Lemme 5.3 (Théorème de Cayley)**.**
Si G est un groupe d'ordre n alors il est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique S_n.

Démonstration. L'action à gauche de G sur lui-même

$$\begin{aligned} \varphi\colon G &\to S_n \\ \varphi(x)g &\mapsto xg \end{aligned} \tag{5.2}$$

est une permutation des éléments de G. Cela donne un morphisme injectif parce que si $\varphi(x) = \varphi(y)$ nous avons $xg = yg$ pour tout g et en particulier pour $g = e$ nous trouvons $x = y$. □

Pour rappel, lorsque p est premier, nous notons $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

LemaQxjcm

Lemme 5.4.
Soit p un diviseur premier de n. Alors il existe un morphisme injectif du groupe symétrique S_n dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$.

Démonstration. Soit $\{e_i\}$ la base canonique de $\mathbb{F}_p^n$. Par exemple $e_1 = \big([1]_p, [0]_p, \dots, [0]_p\big)$. Nous avons le morphisme injectif $\varphi\colon S_n \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ donné par $\varphi(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$. □

RemFzxxst

Remarque 5.5.
En mettant bout à bout les lemmes 5.3 et 5.4, nous trouvons que si p est un diviseur premier de $|G|$, alors G peut être vu comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$.

DEFooPRCHooVZdwST

Définition 5.6.
*Soit p un nombre premier. Un **p-groupe** est un groupe dont tous les éléments sont d'ordre p^m pour un certain m (dépendant de l'élément).*

*Soit G un groupe fini et p, un diviseur premier de $|G|$. Un **p-Sylow** dans G est un p-sous-groupe d'ordre p^n où p^n est la plus grande puissance de p divisant $|G|$.*

Notons que si p est un nombre premier, alors tout groupe d'ordre p^m est un p-groupe.

Lemme 5.7.
Soit G un groupe fini et P, Q des p-sous-groupes. Nous supposons que Q normalise P. Alors PQ est un p-sous-groupe de G.

Si S est un p-Sylow, alors p ne divise pas le nombre $|G:S| = |G|/|S|$.

Propvocmon

Proposition 5.8.
Soit le corps fini $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier). Soit T le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures de rang[1] *n et dont les éléments diagonaux sont 1. Alors T est un p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.*

Démonstration. Nous commençons par étudier le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Pour la première colonne, la seule contrainte à vérifier est qu'elle ne soit pas nulle. Il y a donc $p^n - 1$ possibilités. Pour la seconde, il faut ne pas être multiple de la première. Il y a donc $p^n - p$ possibilités (parce qu'il y a p multiples possibles de la premières colonne). Pour la k-ième colonne, il faut éviter toutes les combinaisons linéaires des $(k-1)$ premières colonnes. Il y a p^{k-1} telles combinaisons et donc $p^n - p^{k-1}$ possibilités pour la k-ième colonne. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\big(\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)\big) &= (p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{n-1}) && (5.3a)\\ &= p\cdot p^2\cdots p^{n-1}(p^n-1)(p^{n-1}-1)\dots(p-1) && (5.3b)\\ &= p^{\frac{n(n-1)}{2}}m && (5.3c)\end{aligned}$$

où m est un entier qui ne divise pas p.

En ce qui concerne le cardinal de T, le calcul est plus simple : pour la première ligne nous avons p^{n-1} choix (parce qu'il y a un 1 qui est imposé sur la diagonale), pour la seconde p^{n-2}, etc. En tout nous avons alors

$$|T| = p^{\frac{n(n-1)}{2}}, \tag{5.4}$$

et T est un p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. □

Proposition 5.9.
Soit p un nombre premier. Un groupe fini G est un p-groupe si et seulement l'ordre de G est p^n pour un certain n.

Démonstration. Supposons que G est un p-groupe. Soit q un nombre premier divisant $|G|$. Par le théorème de Cauchy (5.2), le groupe G contient un élément d'ordre q, soit g un tel élément. Étant donné que G est un p-groupe, $g^{p^n} = g^q = e$ pour un certain n. Donc $q = p^n$ et $q = p$ parce que q est premier. Nous venons de prouver que p est le seul nombre premier qui divise $|G|$. L'ordre de G est par conséquent une puissance de p.

Nous nous intéressons maintenant à l'implication inverse. Nous supposons que $|G| = p^n$ pour un certain entier $n \geqslant 0$. Soit $g \in G$; nous notons r l'ordre de G. Le sous-groupe $\mathrm{gr}(g)$ est d'ordre r, donc r divise $|G|$ (par le théorème 2.14 de Lagrange). Le nombre r est alors une puissance de p. □

LemwDYQMg

Lemme 5.10.
Soit G, un groupe fini de cardinal $|G| = n$ et p, un diviseur premier de n. Nous notons $n = p^m \cdot r$ où p ne divise pas r. Soit H un sous-groupe de G et S, un p-Sylow de G. Alors il existe $g \in G$ tel que

$$gSg^{-1} \cap H \tag{5.5}$$

soit un p-Sylow de H.

Démonstration. Nous considérons l'ensemble G/S sur lequel H agit. Si $a \in G$, le stabilisateur de $[a]$ dans G/S est

$$\begin{aligned}\mathrm{Fix}\big([a]\big) &= \{h \in H \text{ tel que } [ha] = [a]\} && (5.6a)\\ &= \{h \in H \text{ tel que } a^{-1}ha \in S\} && (5.6b)\\ &= aSa^{-1} \cap H. && (5.6c)\end{aligned}$$

Nous cherchons $a \in G$ tel que l'entier

$$\frac{\mathrm{Card}(H)}{\mathrm{Card}\big(aSa^{-1}\cap H\big)} \tag{5.7}$$

EqZpUbWx

[1] Définition 4.48.

soit premier avec p. En effet, dans ce cas le groupe $\mathrm{Fix}([a])$ est un p-Sylow de H parce que $|H : aSa^{-1} \cap H|$ ne divise pas p. La formule des orbites (équation (2.70)) nous dit que

$$\frac{|H|}{|aSa^{-1} \cap H|} = \mathrm{Card}\left(\mathcal{O}_{[a]}\right). \tag{5.8}$$

Supposons que toutes les orbites aient un cardinal divisible par p. Étant donné que G/S est une réunion disjointe de ses orbites, nous aurions

$$p \mid \mathrm{Card}(G/S) = \frac{|G|}{|S|} \tag{5.9}$$

alors que S étant un p-Sylow, p ne peut pas diviser $|G|/|S|$. Toutes les orbites n'ont donc pas un cardinal divisible par p, et il existe un $a \in G$ tel que (5.7) soit vérifiée. □

ThoUkPDXf

Théorème 5.11 (Théorème de Sylow)**.**
Soit G un groupe fini et p, un diviseur premier de $|G|$. Alors

ITEMooETYHooXlUMQZ

(1) G possède au moins un p-Sylow[2].

(2) Tout p-sous-groupe de G est contenu dans un p-Sylow.

ItemMzNRVf

(3) Les p-Sylow de G sont conjugués.

ItemkYbdzZ

(4) Si n_p est le nombre de p-Sylow de G, alors n_p divise $|G|$ et $n_p \in [1]_p$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) Nous savons de la remarque 5.5 que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ et que ce dernier a un p-Sylow par la proposition 5.8. Par conséquent G possède un p-Sylow par le lemme 5.10.

(2) Soit H un p-sous-groupe de G et S, un p-Sylow de G (qui existe par le point précédent). Par le lemme 5.10 il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ soit un p-Sylow de H. Mais H est un p-groupe et un p-Sylow dans un p-groupe est automatiquement le groupe entier. Par conséquent,

$$H = aSa^{-1} \cap H \tag{5.10}$$

et $H \subset aSa^{-1}$, ce qui signifie que H est inclus dans un p-Sylow.

(3) Soit H un p-Sylow. Nous venons de voir que si S est un p-Sylow quelconque, alors H est inclus au p-Sylow aSa^{-1} pour un certain $a \in G$. Donc H est un p-Sylow inclus dans le p-Sylow aSa^{-1}, donc $H = aSa^{-1}$.

(4) Le fait que n_p divise n vient du fait que tous les p-Sylow ont le même nombre d'éléments (ils sont conjugués) et sont deux à deux disjoints. Donc ils forment une partition de G et $|G| = n_p|S|$ si S est un p-Sylow quelconque.

Montrons maintenant que n_p est congru à un modulo p. Soit E l'ensemble des p-Sylow de G. Le groupe G agit sur E par conjugaison. Soit S un p-Sylow et considérons l'ensemble

$$E_S = \{T \in E \text{ tel que } s \cdot T = T, \forall s \in S\}. \tag{5.11}$$

où l'action est celle par conjugaison. C'est l'ensemble des points fixes de E sous l'action de S. L'ensemble E est la réunion des orbites sous S et chacune de ces orbites a un cardinal qui divise $|S| = p^m$. Par conséquent $|\mathcal{O}_T|$ vaut 1 lorsque $T \in E_S$ et est un multiple de p sinon. Nous avons donc

$$|E| \equiv |E_S| \mod p. \tag{5.12}$$

Nous voulons obtenir $|E_S| = 1$. Évidemment $S \in E_S$ parce que si $s \in S$ alors $sSs^{-1} = S$. Nous voudrions montrer que S est le seul élément de E_S. Soit $T \in E_S$, c'est-à-dire que T est un p-Sylow de G tel que

$$sTs^{-1} = T \tag{5.13}$$

pour tout $s \in S$. Soit N le groupe engendré par S et T. Montrons que T est normal dans N. Un élément g dans N s'écrit

$$g = s_1 t_1 \cdots s_r t_r \tag{5.14}$$

[2] Définition 5.6.

avec $s_i \in S$ et $t_i \in T$. Si $t \in T$, en utilisant le fait que T est un groupe et le fait que S le normalise, nous avons

$$gtg^{-1} = s_1 t_1 \dots s_r t_r t t_r^{-1} s_r^{-1} \dots t_1^{-1} s_1^{-1} \in T. \tag{5.15}$$

Donc T est un sous-groupe normal de N. Mais S et T sont conjugués dans N (parce qu'ils sont des p-Sylow de N), donc il existe un élément $a \in N$ tel que $aTa^{-1} = S$. Mais étant donné que T est normal,

$$S = aTa^{-1} = T. \tag{5.16}$$

Ceci achève la démonstration des théorèmes de Sylow.

□

Proposition 5.12.
Si S est un p-Sylow dans le groupe G alors pour tout $g \in G$, l'ensemble gSg^{-1} est encore un p-groupe.

Démonstration. Si les éléments de S sont d'ordre p^n, alors nous avons

$$(gsg^{-1})^q = gs^q g^{-1} = e. \tag{5.17}$$

Pour avoir $gs^q g^{-1} = e$, il faut et suffit que $gs^q = g$, alors $s^q = e$, c'est-à-dire $q = p^n$. Donc gSg^{-1} est encore un p-Sylow. □

Lemcmbzum

Lemme 5.13 ([165])**.**
Soit G, un groupe fini et p, un nombre premier. Si H et K sont des groupes distincts d'ordre p, alors $H \cap K = \{e\}$.

Démonstration. L'ensemble $H \cap K$ est un sous-groupe de H. Par conséquent son ordre divise celui de H qui est un nombre premier. Par conséquent soit $|H \cap K| = 1$, soit $|H \cap K| = |H|$. Dans le second cas nous aurions $H = K$, alors que nous avons supposé que H et K étaient distincts. □

PropyfhTmf

Proposition 5.14 ([165])**.**
Soit G un groupe fini et n le nombre de sous-groupes d'ordre p dans G. Alors le nombre d'éléments d'ordre p dans G vaut $n(p-1)$.

Démonstration. Si g est un élément d'ordre p dans G, le groupe H engendré par g est d'ordre p. Réciproquement si H est un groupe d'ordre p, tous les éléments de $H \setminus \{e\}$ sont d'ordre p (parce que l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe). Donc l'ensemble des éléments d'ordre p dans G est la réunion des ensembles $H \setminus \{e\}$ où H parcourt les sous-groupes d'ordre p dans G. Chacun de ces ensembles possède $p-1$ éléments et le lemme 5.13 nous assure qu'ils sont disjoints. Par conséquent nous avons $n(p-1)$ éléments d'ordre p dans G. □

Corolaire 5.15.
Un groupe d'ordre premier est cyclique.

Démonstration. Soit p l'ordre de G. Le nombre de sous-groupes d'ordre p est $n = 1$ (et c'est G lui-même). La proposition 5.14 nous dit alors que le nombre d'éléments d'ordre p dans G est $p-1$. Donc tout élément est générateur. □

5.2 Groupe monogène

SECooXIHPooWVSjhT

Groupe monogène : définition 1.439 ; groupe cyclique : définition 1.440.

Le théorème suivant donne quelques informations à propos des groupes monogènes. Il impliquera dans le corolaire 5.42 qu'un groupe monogène d'ordre n possède $\varphi(n)$ générateurs où φ est la fonction indicatrice d'Euler définie en 5.29.

THOooDOMZooOEYHAe

Théorème 5.16.
Un groupe monogène est abélien. Plus précisément,

(1) un groupe monogène infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$,

(2) un groupe monogène fini est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un certain n.

Démonstration. Le groupe est abélien parce que $g = a^n$, $g' = a^{n'}$ implique $gg' = q^{n+n'} = g'g$. Nous considérons un générateur a de G (qui existe parce que G est monogène) et le morphisme surjectif

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\to G \\ p &\mapsto a^p. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Si G est infini, alors f est injective parce que si $a^n = a^{n'}$, alors $a^{n-n'} = e$, ce qui rendrait G cyclique et par conséquent non infini. Nous concluons que si G est infini, alors f est une bijection et donc un isomorphisme $\mathbb{Z} \simeq G$.

Si G est fini, alors f n'est pas injective et a un noyau $\ker f$. Étant donné que $\ker f$ est un sous-groupe de G, il existe un (unique) n tel que $\ker f = n\mathbb{Z}$ et le premier théorème d'isomorphisme (théorème 2.7) nous indique que

$$\mathbb{Z}/\ker f = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \text{Image } f = G. \tag{5.19}$$

□

Le lemme suivant donne une démonstration alternative, avec une construction plus explicite de l'isomorphisme.

LemZhxMit

Lemme 5.17 ([1]).
À propos de groupes monogènes[3] *et cycliques.*

(1) *Soit un groupe cyclique G de cardinal n dont g est un générateur. Alors il existe un isomorphisme*

$$\phi\colon G \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \tag{5.20}$$

tel que $\phi(g) = 1$.

(2) *Si G est un groupe monogène d'ordre infini et si g est un générateur, alors il existe un isomorphisme*

$$\phi\colon G \to (\mathbb{Z}, +) \tag{5.21}$$

tel que $\phi(g) = 1$.

(3) *Soient G et H deux groupes monogènes de même ordre. Soient g un générateur de G et h, un générateur de H. Il existe un isomorphisme de G sur H qui envoie g sur h.*

Démonstration. Commençons par enfoncer une porte ouverte : comme le groupe est monogène, l'ordre du groupe est égal à l'ordre de son générateur. Nous séparons les cas selon que l'ordre soit fini ou non.

(1) **L'ordre de G est fini et vaut n** Si $k \in \mathbb{Z}$, nous notons $[k]_n$ la classe de k modulo n, c'est-à-dire l'ensemble $\{k + pn \text{ tel que } p \in \mathbb{Z}\}$.

Nous construisons l'isomorphisme $\phi\colon G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

$$\phi(g^m) = [m]_n. \tag{5.22}$$

Cela est une bonne définition parce qu'une égalité du type $g^m = g^{m'}$ implique que m et m' soient dans la même classe modulo n. Nous vérifions que cela est un isomorphisme entre G et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(1a) **Morphisme** Pour l'identité, si $x = e$ alors $m = 0$ et $\phi(e) = [0]_n$. Et si $x = g^k$, $y = g^l$ alors $\phi(xy) = \phi(g^{k+l}) = [k + l]_n = [k]_n + [l]_n = \phi(x) + \phi(y)$.

(1b) **Injectif** Supposons $\phi(g^k) = \phi(g^l)$ avec $k \geqslant l$. Nous avons $h^k = h^l$, donc $h^{k-l} = e$, ce qui donne $k - l \in [0]_n$ ou encore $[k]_n = [l]_n$. En particulier $g^k = g^l$.

(1c) **Surjectif** La classe $[k]_n$ est l'image de g^k.

(2) **L'ordre de G est infini**

Si l'ordre de G est infini alors un élément $x \in G$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = g^m$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas nous définissons directement $\phi(g^m) = m$.

Le reste de la preuve est alors identique au cas d'ordre fini, mais sans les complications liées au modulo.

La dernière assertion s'obtient des précédentes par composition d'isomorphismes.

□

[3] Définition 1.439.

5.3 Automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Notons que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{F}_n$ est un groupe pour l'addition tandis que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est un groupe pour la multiplication. Il ne peut donc pas y avoir d'équivoque.

ThoozyeSn

Théorème 5.18 ([166]).
Pour chaque $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\sigma_x\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\ y &\mapsto xy.\end{aligned} \tag{5.23}$$

L'application

$$\sigma\colon \big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*,\ \cdot\ \big) \to \mathrm{Aut}\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+\big) \tag{5.24}$$

ainsi définie est un isomorphisme de groupes.

L'énoncé de ce théorème s'écrit souvent rapidement par

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \tag{5.25}$$

mais il faut bien garder à l'esprit qu'à gauche on considère le groupe additif et à droite celui multiplicatif.

Démonstration. Nous notons $[x]$ la classe de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous avons $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = [1]$. Soit f un automorphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$; pour tout $r \in \mathbb{Z}$ nous avons

$$f([r]) = f(r[1]) = rf([1]) = [r]f([1]). \tag{5.26}$$

En particulier, puisque f est surjective, il existe un r tel que $f([r]) = [1]$. Pour un tel r nous avons $[1] = [r]f([1])$, c'est-à-dire que nous avons montré que $f([1])$ est inversible dans $\big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*,\ \cdot\ \big)$. Nous montrons à présent que[4]

$$\begin{aligned}\sigma\colon\ \mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)) &\to \big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*,\ \cdot\ \big)\\ f &\mapsto f([1])\end{aligned} \tag{5.27}$$

est un isomorphisme.

Nous commençons par la surjectivité. Soit $[a] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Les éléments $[a]$ et $[1]$ étant tous deux des générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, il existe un automorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui envoie $[1]$ sur $[a]$ par le lemme 5.17. Cela prouve la surjectivité de σ.

En ce qui concerne l'injectivité, considérons des automorphismes f_1 et f_2 de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ tels que $f_1([1]) = f_2([1])$. Les automorphismes f_1 et f_2 prennent la même valeur sur un générateur et donc sur tout le groupe. Donc $f_1 = f_2$.

Enfin nous prouvons que σ est un morphisme, c'est-à-dire que $\sigma(f\circ g) = \sigma(f)\sigma(g)$. Nous avons

$$f\big(g([1])\big) = f\big(g([1])[1]\big) = g([1])f([1]) = \sigma(f)\sigma(g). \tag{5.28a}$$

□

Ce dernier résultat s'étend aux groupes cycliques.

PROPooBZOMooVOHoYf

Proposition 5.19.
Si G est un groupe cyclique[5] *d'ordre n, alors*

$$\mathrm{Aut}(G) = \big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*,\ \cdot\ \big). \tag{5.29}$$

Démonstration. Vu que G est cyclique, le lemme 5.17 nous dit que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),+$. Maintenant le théorème 5.18 nous indique que

Les égalités suivantes sont en réalité des isomorphismes de groupes :

SUBEQooBNGBooFKRZUn

$$\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Aut}\Big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+\Big) \tag{5.30a}$$

SUBEQooZBMEooBSGPUB

$$= \Big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*,\ \cdot\ \Big) \tag{5.30b}$$

Jusitifications.

[4] Le σ donné ici est l'inverse de celui donné dans l'énoncé. Cela ne change évidemment rien à la validité de l'énoncé et de la preuve.

[5] Définition 1.440.

- Pour (5.30a). Le lemme 5.17 nous dit que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, et le lemme 1.91 dit que des groupes isomorphes ont des groupes d'isomorphismes isomorphes.
- Pour (5.30b). C'est le théorème 5.18.

□
CorwgmoTK

Corolaire 5.20.
Si p divise $q-1$ alors $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ possède un unique sous-groupe d'ordre p.

Démonstration. Si a est un générateur de $\mathbb{F}_q^*$ alors le groupe

$$\mathrm{gr}\left(a^{\frac{q-1}{p}}\right) \tag{5.31}$$

EqAdGiil

est un sous-groupe d'ordre p. En ce qui concerne l'unicité, soit S un sous-groupe d'ordre p. Il est donc d'indice $(q-1)/p$ dans $\mathbb{F}_q^*$ et le lemme 3.25 nous enseigne que le groupe donné en (5.31) est contenu dans S. Il est donc égal à S parce qu'il a l'ordre de S. Le fait que S soit normal est dû au fait que $\mathbb{F}_q^*$ est abélien. □

5.4 Groupes abéliens finis

Nous rappelons que l'exposant d'un groupe fini est le ppcm des ordres de ses éléments. Dans le cas des groupes abéliens finis, l'exposant joue un rôle important du fait qu'il existe un élément dont l'ordre est l'exposant. C'est le théorème suivant.

Théorème 5.21 (Exposant dans un groupe abélien fini)**.**
Un groupe abélien fini contient un élément dont l'ordre est l'exposant du groupe.

Démonstration. Soit G un groupe abélien fini et $x\in G$, un élément d'ordre maximum m. Nous montrons par l'absurde que l'ordre de tous les éléments de G divise m. Soit donc $y\in G$, un élément dont l'ordre ne divise pas m ; nous notons q son ordre. Vu que q ne divise pas m, le nombre q possède au moins un facteur premier plus de fois que m : soit p premier tel que la décomposition de q contienne p^β et celle de m contienne p^α avec $\beta>\alpha$. Autrement dit,

$$m=p^\alpha m' \tag{5.32a}$$
$$q=p^\beta q' \tag{5.32b}$$

où m' et q' ne contiennent plus le facteur p. L'élément x étant d'ordre m, l'élément x^{p^α} est d'ordre m'. De la même manière, l'élément $y^{q'}$ est d'ordre p^β. Étant donné que p^β et m' sont premiers entre eux, l'élément $x^{p^\alpha}y^{q'}$ est d'ordre $p^\alpha m'>m$. D'où une contradiction avec le fait que x était d'ordre maximal.

Par conséquent l'ordre de tous les éléments de G divise celui de x qui est alors le ppcm des ordres de tous les éléments de G, c'est-à-dire l'exposant de G. □
PropfPRVxi

Proposition 5.22.
Soit G un groupe abélien fini et $x\in G$, un élément d'ordre maximum. Alors

(1) Il existe un morphisme $\varphi\colon G\to \mathrm{gr}(x)$ tel que $\varphi(x)=x$.
(2) Il existe un sous-groupe K de G tel que $G=\mathrm{gr}(x)\oplus K$.

ItemKRYwjU

Démonstration. Nous notons a l'ordre de x qui est également l'exposant du groupe G.

Nous allons prouver la première partie par récurrence sur l'ordre du groupe. Si $G=\mathrm{gr}(x)$, alors c'est évident. Soit H un sous-groupe propre de G contenant x et tel que le problème soit déjà résolu pour H : il existe un morphisme $\varphi\colon H\to\mathrm{gr}(x)$ tel que $\varphi(x)=x$. Soit $y\in G\setminus H$, d'ordre b. Nous allons trouver un morphisme $\hat{\varphi}\colon \mathrm{gr}(H,y)\to\mathrm{gr}(x)$ telle que $\hat{\varphi}(x)=x$.

Pour cela nous commençons par construire les applications suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}\colon \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\times H&\to\mathrm{gr}(x)\\ (\bar{k},h)&\mapsto x^{kl}\varphi(h)\end{aligned} \tag{5.33}$$

où l est encore à déterminer, et

$$\begin{aligned}p\colon \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\times H&\to\mathrm{gr}(y,H)\\ (\bar{k},h)&\mapsto y^k h.\end{aligned} \tag{5.34}$$

Pour que $\tilde{\varphi}$ soit bien définie, il faut que a divise bl. L'application p est bien définie parce que $\bar{k}$ est pris dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et que b est l'ordre de y.

Nous allons construire le morphisme $\hat{\varphi}$ en considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \ker(p) & \hookrightarrow & \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\times H & \xrightarrow{p} & \operatorname{gr}(y,H) \\ & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\varphi}} & \swarrow{\scriptstyle\hat{\varphi}} & \\ & & \operatorname{gr}(x) & & \end{array} \tag{5.35}$$

que l'on voudra être commutatif. Puisque p est surjective, les théorèmes d'isomorphismes nous disent que

$$\operatorname{gr}(y,H)\simeq\frac{\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\times H}{\ker p}. \tag{5.36}$$

Si $[\bar{k},h]$ est la classe de $(\bar{k},h)$ modulo $\ker(p)$ alors nous voudrions définir $\hat{\varphi}$ par

$$\hat{\varphi}\big([\bar{k},h]\big)=\tilde{\varphi}(\bar{k},h). \tag{5.37}$$

EqeesVxc

Pour que cela soit bien défini, il faut que si $(\bar{r},z)\in\ker p$, alors,

$$\hat{\varphi}\big([\bar{k}\bar{r},hz]\big)=\hat{\varphi}\big([\bar{k},h]\big), \tag{5.38}$$

c'est-à-dire que $\tilde{\varphi}(\bar{r},z)=e$. Du coup la définition (5.37) n'est bonne que si et seulement si

$$\ker(p)\subset\ker(\tilde{\varphi}). \tag{5.39}$$

Nous pouvons obtenir cela en choisissant bien l.

Déterminons d'abord le noyau de p. Pour cela nous considérons un nombre β divisant b tel que $\operatorname{gr}(y)\cap H=\operatorname{gr}(y^\beta)$. Nous aurons $p(\bar{k},h)=e$ si et seulement si $y^h=e$. En particulier $h=y^{-k}\in\operatorname{gr}(y)\cap H=\operatorname{gr}(y^\beta)$. Si $h=(y^\beta)^m=y^{m\beta}$, alors $k=-m\beta$ et nous avons

$$\ker(p)=\{(-m\beta,y^{m\beta})\text{ tel que }m\in\mathbb{Z}\}. \tag{5.40}$$

En plus court : $\ker(p)=\operatorname{gr}(\beta,y^{-\beta})$. Nous devons donc fixer l de telle sorte que $\tilde{\varphi}(\beta,y^{-\beta})=e$. Étant donné que φ prend ses valeurs dans $\operatorname{gr}(x)$, il existe un entier α tel que $\varphi(y^{-\beta})=x^\alpha$; en utilisant cet α, nous écrivons

$$\tilde{\varphi}(\beta,y^{-\beta})=x^{\beta l}\varphi(y^{-\beta})=x^{\beta l+\alpha}. \tag{5.41}$$

Par conséquent nous choisissons $l=-\alpha/\beta$. Nous devons maintenant vérifier que ce choix est légitime, c'est-à-dire que a divise bl et que α/β est un entier.

Étant donné que y est d'ordre b,

$$e=\varphi(y^b)=\varphi(y^{-\beta b/\beta})=\varphi(y^{-\beta})^{b/\beta}=x^{b\beta/\alpha}. \tag{5.42}$$

Par conséquent a divise $\frac{b\alpha}{\beta}=-bl$.

Pour voir que l est entier, nous nous rappelons que a est l'exposant de G (parce que x est d'ordre maximum) et que par conséquent b divise a. Mais a divise $\alpha\frac{b}{\beta}$. Donc α/β est entier.

Nous passons maintenant à la seconde partie de la preuve. Nous considérons un morphisme $\varphi\colon G\to\operatorname{gr}(x)$ tel que $\varphi(x)=x$. La première partie nous en assure l'existence. Nous montrons que

$$\begin{aligned}\psi\colon G&\to\operatorname{gr}(x)\oplus\ker(\varphi)\\ g&\mapsto\big(\varphi(g),g\varphi(g)^{-1}\big)\end{aligned} \tag{5.43}$$

est un isomorphisme. D'abord $g\varphi(g)^{-1}$ est dans le noyau de φ parce que $\varphi(g)^{-1}$ étant dans $\operatorname{gr}(x)$, et φ étant un morphisme,

$$\varphi\big(g\varphi(g)^{-1}\big)=\varphi(g)\varphi(g)^{-1}=e. \tag{5.44}$$

L'application ψ est un morphisme parce que, en utilisant le fait que G est abélien,

$$\psi(g_1g_2)=\big(\varphi(g_1g_2),g_1g_2\varphi(g_1g_2)^{-1}\big) \tag{5.45a}$$
$$=\big(\varphi(g_1)\varphi(g_2),g_1\varphi(g_1)^{-1}g_2\varphi(g_2)^{-1}\big) \tag{5.45b}$$
$$=\psi(g_1)\psi(g_2). \tag{5.45c}$$

L'application ψ est injective parce que si $\psi(g)=(e,e)$ alors $\varphi(g)=e$ et $g\varphi(g)^{-1}=e$, ce qui implique $g=e$.

Enfin ψ est surjective parce qu'elle est injective et que les ensembles de départ et d'arrivée ont même cardinal. En effet par le premier théorème d'isomorphisme (théorème 2.7) appliqué à φ nous avons

$$|G|=|\operatorname{gr}(x)|\cdot|\ker(\varphi)|. \tag{5.46}$$

□

ThoRJWVJd

Théorème 5.23.
Si G est un groupe abélien fini non trivial, il exise un unique $r > 0$ et une unique liste de naturels $(d_1, \dots, d_r)$ tels que

(1) $G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$

(2) $d_1 \geqslant 1$

(3) d_i *divise* d_{i+1} *pour tout* $i = 1, \dots, r-1$.

Démonstration. Soit x_1 un élément d'ordre maximal dans G. Soit n_1 son ordre et

$$H_1 = \mathrm{gr}(x_1) = \mathbb{F}_{n_1}. \tag{5.47}$$

D'après la proposition 5.22(2), il existe un supplémentaire K_1 tel que $G = \mathbb{F}_{n_1} \oplus K_1$. Si $K_1 = \{e\}$ on s'arrête et on garde $G = \mathbb{F}_{n_1}$. Sinon on continue de la sorte en prenant x_2 d'ordre maximal dans K_1 etc.

Nous devons maintenant prouver l'unicité de cette décomposition. Supposons deux décompositions avec les nombres $(d_1, \dots, d_r)$ et $(s_1, \dots, s_q)$:

$$G = \mathbb{F}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_{d_r} = \mathbb{F}_{s_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_{s_q}. \tag{5.48}$$

L'exposant de G est d_r et s_q. Donc $d_r = s_q$. Les complémentaires étant égaux nous avons

$$\mathbb{F}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_{d_{r-1}} = \mathbb{F}_{s_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_{s_{q-1}}. \tag{5.49}$$

En continuant nous trouvons $r = q$ et $d_i = s_i$. □

5.5 Groupes d'ordre pq

Lemme 5.24.
Soit G un groupe d'ordre pq où p et q sont des nombres premiers distincts. Nous supposons que $p < q$.

(1) Le groupe G possède un unique q-Sylow.

(2) Cet unique q-Sylow est normal dans G.

(3) Il n'est ni $\{e\}$ ni G.

(4) Le groupe G n'est pas un groupe simple[6].

Démonstration. Soit n_q le nombre de q-Sylow ; par le théorème de Sylow 5.11(1) le groupe G possède des q-Sylow et par 5.11(4),

$$n_q \in [1]_q. \tag{5.50}$$

De plus le nombre n_q divise $|G| = pq$. Donc n_q vaut p, q ou 1. Avoir $n_q = p$ n'est pas possible parce que $n_q \in [1]_q$ et $p < q$. Avoir $n_q = q$ n'est pas possible non plus, pour la même raison. Donc $n_q = 1$. Notons H l'unique q-Sylow de G.

Le fait que H soit normal est une conséquence de 5.11(3) parce que le conjugué de H est encore un q-Sylow alors que H est l'unique q-Sylow.

Vu que

$$1 < p = |H| < pq = |G|, \tag{5.51}$$

le sous-groupe H n'est ni réduit à l'identité ni le groupe entier.

Par conséquent G n'est pas simple parce qu'il contient un sous-groupe normal non trivial. □

Avant de lire le théorème suivant, n'oubliez pas de lire la définition d'un produit semi-direct 2.48.

ThoLnTMBy

Théorème 5.25 ([167]).
Soient deux nombres premiers distincts[7] *p et q avec $q > p$.*

(1) Si p ne divise pas $q-1$ alors tout groupe d'ordre pq est cyclique et plus précisément le seul groupe (à isomorphisme près) d'ordre pq est $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

ITEMooFQXIooFLAiUD

(2) Si $p \mid q-1$, alors il n'existe que deux groupes d'ordre pq :

[6] Pas de sous-groupes normaux non triviaux, 1.268.
[7] Le cas $p = q$ sera traité par la proposition 5.28.

- *Le groupe abélien et cyclique* $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.
- *Le produit semi-direct non abélien*

$$G = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \tag{5.52}$$

EqNuuTRE

où $\varphi(\bar{1})$ *est d'ordre* p *dans* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.

(3) *Si* p *et* q *sont premiers entre eux, le produit est direct*[8].

Démonstration. Division de la preuve en plusieurs parties.

(1) **Préliminaires avec Sylow**

Soit un groupe G d'ordre pq. Soient H, un q-Sylow et K, un p-Sylow de G. Ils existent parce que p et q sont des diviseurs premiers de $|G|$ (théorème de Sylow 5.11). Si n_q est le nombre de q-Sylow dans G alors n_q divise $|G|$ et $n_q = 1 \mod q$. Donc d'abord n_q vaut 1, p ou q. Ensuite $n_q = q$ est exclu par la condition $n_q = 1 \mod q$; la possibilité $n_q = p$ est également impossible parce que $p = 1 \mod q$ est impossible avec $p < q$. Donc $n_q = 1$ et H est normal dans G.

L'ensemble $H \cap K$ est un sous-groupe à la fois de H et de K, ce qui entraine que (théorème de Lagrange 2.14) $|H \cap K|$ divise à la fois p et q. Nous en déduisons que $|H \cap K| = 1$ et donc que $H \cap K = \{e\}$.

Étant donné que H est normal, l'ensemble HK est un sous-groupe de G. De plus l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon H \times K &\to HK \\ (h, k) &\mapsto hk \end{aligned} \tag{5.53}$$

est un bijection. Nous ne devons vérifier seulement l'injectivité. Supposons que $hk = h'k'$. Alors $e = h^{-1}h'k'k^{-1}$, et donc

$$h^{-1}h' = (k'k^{-1})^{-1} \in H \cap K = \{e\}. \tag{5.54}$$

Par conséquent $|pq| = |H \times K| = |HK|$, et $HK = G$. Le corolaire 2.50 nous indique que

$$G = H \times_\varphi K \tag{5.55}$$

EqGjQjFN

où φ est l'action adjointe. Nous devons maintenant identifier cette action. En d'autres termes, nous savons que $H = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et que $\varphi\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est un morphisme. Nous devons déterminer les possibilités pour φ.

Soit n_p le nombre de p-Sylow de G. Comme précédemment, n_p vaut 1, p ou q et la possibilité $n_p = p$ est exclue. Donc n_p est 1 ou q.

(2) **Si** p **ne divise pas** $q - 1$

Si p ne divise pas $q - 1$ alors il n'est pas possible d'avoir $n_p = q$ parce que $n_p \in [1]_p$. Or dire $n_p = q$ demanderait $q \in [1]_p$, c'est-à-dire $q = kp + 1$, qui impliquerait que p divise $q - 1$.

La seule possibilité est que $n_p = 1$. Dans ce cas, K est également normal dans G. Du coup le produit semi-direct (5.55) est en réalité un produit direct (φ est triviale) et nous avons

$$G = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}. \tag{5.56}$$

(3) **Si** p **divise** $q - 1$

Cette fois $n_p = 1$ et $n_p = q$ sont tous deux possibles. Ce que nous savons est que $\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Par le premier théorème d'isomorphisme 2.7, nous avons

$$|\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \frac{|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}|}{|\ker\varphi|}, \tag{5.57}$$

ce qui signifie que $|\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$ divise $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}| = p$. Par conséquent, $|\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$ est égal à 1 ou p. Si c'est 1, alors l'action est triviale et le produit est direct.

Nous supposons que $|\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = p$. Le corolaire 5.20 nous indique que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ possède un unique sous-groupe d'ordre p que nous notons Γ ; c'est-à-dire que $\Gamma = \mathrm{Image}(\varphi)$. Vu que $\varphi\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est un morphisme, Γ est généré par $\varphi(\bar{1})$ qui est alors un élément d'ordre p, comme annoncé.

[8] Cette affirmation me semble très bizarre. Comment deux nombres premiers distincts pourraient ne pas être premiers entre eux ???

(4) **Unicité** Nous nous attaquons maintenant à l'unicité. Soient φ et φ' deux morphismes non triviaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Étant donné que $\text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ ne possède qu'un seul sous-groupe d'ordre p, nous savons que $\text{Image}(\varphi) = \text{Image}(\varphi') = \Gamma$. Nous pouvons donc parler de φ'^{-1} en tant qu'application de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans Γ. Nous montrons que

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_{\varphi'} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ (h,k) &\mapsto (h, \alpha(k)) \end{aligned} \tag{5.58}$$

où $\alpha = \varphi'^{-1} \circ \varphi$ est un isomorphisme de groupes. Le calcul est immédiat :

$$f(h_1,k_1)f(h_2mk_2) = \big(h_1,\alpha(k_1)\big)(h_2,\alpha(k_2)) \tag{5.59a}$$
$$= \big(h_1\varphi'(\alpha(k_1))h_2m\alpha(k_1k_2)\big) \tag{5.59b}$$
$$= f\big(h_1\varphi(k_1)h_2, k_1k_2\big) \tag{5.59c}$$
$$= f\big((h_1,k_1),(h_2,k_2)\big). \tag{5.59d}$$

Par conséquent $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_{\varphi'} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

□

Note : il existe des nombres premiers p et q tels que $q = 1 \mod p$. Par exemple $7 = 1 \mod 3$.

PROPooNSRYooEodtUl

Proposition 5.26 ([49]).
Soit G un groupe fini d'ordre pq où p et q sont deux nombres premiers distincts vérifiant

$$\begin{cases} p \neq 1 \mod q & (5.60a) \\ q \neq 1 \mod p. & (5.60b) \end{cases}$$

Alors G est cyclique, abélien et

$$G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}. \tag{5.61}$$

Démonstration. Soient n_p et n_q les nombres de p-Sylow et q-Sylow. Par le théorème de Sylow 5.11, n_p divise pq et $n_p = 1 \mod p$. Le second point empêche n_p de diviser p. Par conséquent n_p divise q et donc n_p vaut 1 ou q. La possibilité $n_p = q$ est exclue par l'hypothèse $q \neq 1 \mod p$. Donc $n_p = 1$, et de la même façon nous obtenons $n_q = 1$.

Soient S l'unique p-Sylow et T, l'unique q-Sylow. Pour les mêmes raisons que celles exposées plus haut, ce sont deux sous-groupes normaux dans G. Étant donné que S est d'ordre p^n pour un certain n et que l'ordre de S doit diviser celui de G, nous avons $|S| = p$. De la même façon, $|T| = q$. Par conséquent S est un groupe cyclique d'ordre p et nous considérons x, un de ses générateurs. De la même façon soit y, un générateur de T.

Nous montrons maintenant que x et y commutent, puis que xy engendre G. Nous savons que $S \cap T$ est un sous-groupe à la fois de S et de T, de telle façon que $|S \cap T|$ divise à la fois $|S| = p$ et $|T| = q$. Nous avons donc $|S \cap T| = 1$ et donc $S \cap T$ se réduit au neutre. Par ailleurs, S et T sont normaux, donc

$$(xyx^{-1})y^{-1} \in T \tag{5.62a}$$
$$x(yx^{-1}y^{-1}) \in S, \tag{5.62b}$$

donc $xyx^{-1}y^{-1} = e$, ce qui montre que $xy = yx$.

Montrons que xy engendre G. Soit $m > 0$ tel que $(xy)^m = e$. Pour ce m nous avons $x^m = y^{-m}$ et $y^{-m} = x^m$, ce qui signifie que x^m et y^m appartiennent à $S \cap T$ et donc $x^m = y^m = e$. Les nombres p et q divisent donc tous deux m ; par conséquent $\text{ppcm}(p,q) = pq$ divise m. Nous en concluons que xy est d'ordre pq (il ne peut pas être plus) et qu'il est alors générateur.

Pour la suite nous allons d'abord prouver que $G = ST$ puis que $G \simeq S \times T$. Nous savons déjà que $|S \cap T| = 1$, ce qui nous amène à dire que $|ST| = |S||T|$. En effet si $s, s' \in S$ et $t, t' \in t$ et si $st = s't'$, alors $t = s^{-1}s't'$, ce qui voudrait dire que $s^{-1}s' \in T$ et donc que $s^{-1}s' = e$. Au final nous avons

$$|ST| = |S||T| = pq = |G|. \tag{5.63}$$

Par conséquent $G = ST$. En nous rappelant que $S \cap T = \{e\}$ et que S et T sont normaux, le lemme 1.424 nous dit que $G \simeq S \times T$. Le groupe S étant cyclique d'ordre p nous avons $S = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et pour T, nous avons la même chose : $T = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Nous concluons que

$$G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}. \tag{5.64}$$

□

ThoImkljy

Théorème 5.27 (Théorème de Burnside[115]).
Le centre d'un p-groupe non trivial est non trivial.

Démonstration. Soit G un p-groupe non trivial. Nous considérons l'action adjointe G sur lui-même. Les points fixes de cette action sont les éléments du centre :

$$\mathcal{Z}_G = \{z \in G \text{ tel que } \sigma_x(z) = z, \forall x \in G\} = \mathrm{Fix}_G(G). \tag{5.65}$$

Nous utilisons l'équation aux classes (2.39) pour dire que $|G| = |\mathcal{Z}_G| \mod p$. Mais $|\mathcal{Z}_G|$ n'est pas vide parce qu'il contient l'identité. Donc $|\mathcal{Z}_G|$ est au moins d'ordre p. □

PropssttFK

Proposition 5.28.
Si p est un nombre premier, tout groupe d'ordre p ou p^2 est abélien.

Rappel : un groupe d'ordre p ou p^2 est automatiquement un p-groupe.

Démonstration. Si $|G| = p$, alors le théorème de Cauchy 5.2 nous donne l'existence d'un élément d'ordre p. Cet élément est alors automatiquement générateur, G est cyclique et donc abélien.

Si par contre G est d'ordre p^2, alors les choses se compliquent (un peu). D'après le théorème de Burnside 5.27, le centre $\mathcal{Z}$ n'est pas trivial ; il est alors d'ordre p ou p^2. Supposons qu'il soit d'ordre p et prenons $x \in G \setminus \mathcal{Z}$. Alors le stabilisateur de x pour l'action adjointe contient au moins $\mathcal{Z}$ et x, c'est-à-dire que $|\mathrm{Fix}_G(x)| \geqslant p + 1$. Étant donné que $\mathrm{Fix}_G(x)$ est un sous-groupe, son ordre est automatiquement 1, p ou p^2. En l'occurrence, il doit être p^2 (parce que plus grand que p), et donc x doit être central, ce qui est une contradiction. □

5.5.1 Fonction indicatrice d'Euler

DEFooZRYMooZCozga

Définition 5.29.
*La **fonction indicatrice d'Euler** est l'application*

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{N}^* &\to \mathbb{N}^* \\ n &\mapsto \mathrm{Card}\Big(\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 1 \leqslant m \leqslant n, \mathrm{pgcd}(m,n) = 1\}\Big).\end{aligned} \tag{5.66}$$

5.30. (1) Voir le thème 11 pour des formules concernant l'indicatrice d'Euler.

(2) Une vidéo de 3Blue1Brown : https://www.youtube.com/watch?v=EK32jo7i5LQ.

LEMooVGDHooStUaKH

Lemme 5.31 ([168]).
L'élément $[m]_n$ est inversible dans le groupe $\big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot\big)$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$.

Démonstration. Dans les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Si $[m_n]$ est inversible, il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $[u]_n[m]_n = [1]_n$. Cela donne $[um]_n = [1]_n$ ou encore $um \in [1]_n$, c'est-à-dire $um = 1 + vn$. Le théorème de Bézout 1.358 conclut que $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$.

(2) $\Leftarrow$ Si $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$, alors le théorème de Bézout 1.358 nous dit qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $um + vn = 1$. Cela donne directement $um = 1 - vn \in [1]_n$ et donc $[u]_n$ est un inverse de $[m]_n$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

□

LEMooCLYEooONhWKs

Lemme 5.32.
Nous avons

$$\varphi(n) = \mathrm{Card}\big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\big) \tag{5.67}$$

où $A^\times$ est le groupe des inversibles (pour la multiplication) dans l'anneau A.

Démonstration. En utilisant le lemme 5.31,

$$\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big)^\times = \{[m]_n \text{ tel que } \mathrm{pgcd}(m,n) = 1\} \tag{5.68a}$$
$$= \{[m]_n \text{ tel que } 1 \leqslant m \leqslant n, \mathrm{pgcd}(m,n) = 1\} \tag{5.68b}$$

Comme deux entiers différents entre 1 et n ne peuvent pas être dans la même classe modulo n, il y a bijection entre le dernier ensemble et $\{1 \leqslant m \leqslant n \text{ tel que } \mathrm{pgcd}(m,n) = 1\}$. Donc

$$\varphi(n) = \mathrm{Card}\big(\{[m]_n \text{ tel que } 1 \leqslant m \leqslant n, \mathrm{pgcd}(m,n) = 1\}\big) = \mathrm{Card}\big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\big). \tag{5.69}$$

□

LEMooRGIYooRxgyCO

Lemme 5.33 ([169]).
Soit $n, d \in \mathbb{N}$ tels que $d \mid n$. Nous notons $q = n/d$ et $G = \{k[q]_n \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant d-1\}$. Alors, pour $r \in \mathbb{Z}$ nous avons $d[r]_n = [0]_n$ si et seulement si $[r]_n \in G$.

Démonstration. Dans les deux sens.

(1) $\Rrightarrow$ Nous supposons que $d[r]_n = [0]_n$. Étant donné que $n = dq$ nous avons les implications suivantes :

$$d[r]_n = [0]_n \Rightarrow d \mid dr \Rightarrow dq \mid dr \Rightarrow q \mid r. \tag{5.70}$$

Nous avons donc $r = kq$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Par la division euclidienne 1.352, il existe $s, t \in \mathbb{N}$ tels que $k = sd + t$ avec $t < d$. Avec ça, nous avons le calcul

$$[r]_n = k[q]_n = sd[q]_n + t[q]_n = \underbrace{s[dq]_n}_{=[0]_n} + t[q]_n \in G. \tag{5.71}$$

(2) $\Lleftarrow$ Si $[r]_n \in G$, il existe $0 \leqslant k \leqslant d-1$ tel que $[r]_n = k[q]_n$. De ce fait,

$$d[r]_n = dk[q]_n = k[dq]_n = [0]_n. \tag{5.72}$$

Et voilà.

□

La proposition suivante est un pas important dans l'algorithme de Shor permettant aux ordinateurs quantiques de factoriser rapidement des grands nombres[170].

THOooXMBSooXrrfOP

Théorème 5.34 (Euler-Fermat[171]).
Deux énoncés très similaires.

(1) Soient a, n premiers entre eux dans $\mathbb{N}$. Alors Nous avons la formule

$$a^{\varphi(n)} \in [1]_n. \tag{5.73}$$

ITEMooJHZBooXVKMlT

(2) Soient $A, B \in \mathbb{N}$ premiers entre eux. Alors il existe $p, m \in \mathbb{N}$ tels que

$$A^p = mB + 1. \tag{5.74}$$

Démonstration. Vu que $\operatorname{pgcd}(a, n) = 1$, le théorème de Bézout 1.358 donne $ua + vn = 1$, c'est-à-dire $u[a]_n \in [1]_n$. Autrement dit, $[a]_n$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. De ce fait l'application

$$\begin{aligned} f\colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times &\to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \\ x &\mapsto [a]_n x \end{aligned} \tag{5.75}$$

est une bijection.

Un produit peut être réindexé par une bijection[9]. En posant $P = \prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} x$, nous avons

$$\begin{aligned} P &= \prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} x && \text{(5.76a)} \\ &= \prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} f(x) && \text{(5.76b)} \\ &= \prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} [a]_n x && \text{(5.76c)} \\ &= \Big(\prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} [a]_n \Big) \Big(\prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} x \Big) && \text{(5.76d)} \\ &= [a]_n^{\operatorname{Card}\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right)} P && \text{(5.76e)} \end{aligned}$$

[9] Proposition 1.304. Pour rappel, le produit n'est rien d'autre qu'une somme pour un groupe dont la loi est notée multiplicativement.

En simplifiant par P dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nous trouvons

$$[a]_n^{\text{Card}\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right)} = [1]_n. \tag{5.77}$$

Et comme le lemme 5.32 donne $\text{Card}\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right) = \varphi(n)$, nous avons trouvé $[a]_n^{\varphi(n)} = [1]_n$. Autrement dit,

$$a^{\varphi(n)} \in [1]_n. \tag{5.78}$$

Le point (2) n'est qu'une reformulation. Vu que A et B sont premiers entre eux, nous venons de voir que $A^{\varphi(B)} \in [1]_B$. Il existe donc $m \in \mathbb{Z}$ tel que $A^{\varphi(B)} = 1 + mB$. Vu que A et B sont dans $\mathbb{N}$, le nombre m est contraint d'être positif, c'est-à-dire $m \in \mathbb{N}$. □

LEMooKPKBooPbrHkI

Lemme 5.35 ([169]).
Soient $d \mid n$ dans $\mathbb{N}^*$. Nous considérons le groupe additif $G_d = \{k[q]_n \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant d-1\}$. Les éléments d'ordre[10] d dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont les générateurs de G_d.

Démonstration. Les générateurs de G_d sont d'ordre d parce que $|G_d| = d$. Ça, c'était le sens facile. Dans l'autre sens, si $[r]_n$ est d'ordre d, alors $d[r]_n = [0]_n$. D'après le lemme 5.33, cela prouve que $[r]_n \in G_d$.

Comme le groupe engendré par $[r]_n$ est d'ordre d, il est tout G_d. Donc $[r]_n$ est générateur de G_d. □

LEMooQGGLooDkkmcF

Lemme 5.36 ([172]).
L'ensemble des générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Démonstration. Si $[r]_n$ est générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe k tel que $k[r]_n = [1]_n$. Dans ce cas, $[k]_n$ est l'inverse de $[r]_n$ pour la multiplication. Donc $[r]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

À l'inverse, si $[r]_n$ est inversible, alors il existe k tel que $k[r]_n = [1]_n$. Dans ce cas, $[t]_n = kt[r]_n$, ce qui montre que $[r]_n$ est générateur (pour l'addition). □

LEMooRMWRooRSjGPL

Lemme 5.37 ([172]).
Si G est un groupe cyclique d'ordre n, alors G possède $\varphi(n)$ générateurs.

Démonstration. Vu que tous les groupes cycliques d'ordre n sont isomorphes à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z), +}$, nous nous contentons de prouver le résultat pour ce groupe. Le lemme 5.36 montre que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ possède $\text{Card}\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right)$ générateurs.

Mais le lemme 5.32 assure que $\text{Card}\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right) = \varphi(n)$. □

PROPooYHUDooUROTiN

Proposition 5.38.
Nous avons la formule

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d). \tag{5.79}$$

EqTPHqgJ

Démonstration. Nous notons H_d la partie de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ composée des éléments d'ordre d. Nous avons vu dans le lemme 5.35 que H_d sont justement les générateurs de G_d – voir le lemme pour la notation. Mais comme G_d est un groupe cyclique d'ordre d, il contient $\varphi(d)$ générateurs (lemme 5.37) : $\text{Card}(H_d) = \varphi(d)$.

Vu que tous les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ont un ordre qui divise n (corolaire 2.15), nous avons l'union disjointe

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \bigcup_{d|n} H_d, \tag{5.80}$$

et donc au niveau des cardinals,

$$n = \text{Card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \sum_{d|n} \text{Card}(H_d) = \sum_{d|n} \varphi(d). \tag{5.81}$$

□

LEMooBEJOooDqTirj

Lemme 5.39.
Si p est un nombre premier, alors $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

Démonstration. Les éléments de $\{1, \dots, p^n\}$ qui ont un pgcd différent de 1 avec p^n sont des nombres qui s'écrivent sous la forme qp avec $q \leqslant p^{n-1}$[11]. Il y a évidemment p^{n-1} tels nombres.

Par conséquent le cardinal de P_{p^n} est $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$. □

[10] Ordre d'un élément, définition 1.258.
[11] Corolaire 3.19.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 5.40
P_n *n'a pas été défini.*

Définition proposée (et vue par après) : $P_n = \{m \in \mathbb{N} \text{ tel que } \operatorname{pgcd}(m,n) = 1\}$. *À mettre donc en lien avec* Δ_d.

5.5.2 Générateurs

PropZnmuphiGensn

Proposition 5.41.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *et le groupe (additif)* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. *L'élément* $[x]_n$ *est un générateur de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *si et seulement si* $x \in P_n$. *En particulier* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est un groupe contenant* $\varphi(n)$ *générateurs.*

Démonstration. Nous avons $\operatorname{gr}\big([1]_n\big) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'élément $[x]_n$ sera générateur si et seulement si il génère $[1]_n$, c'est-à-dire si il existe u tel que $u[x]_n = [1]_n$. Cette dernière égalité étant une égalité de classes dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, elle sera vraie si et seulement si il existe v tel que

$$ux + vn = 1. \tag{5.82}$$

Cela signifie entre autres que[12] $x\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, et aussi que $\operatorname{pgcd}(x,n) = 1$ par le théorème de Bézout 1.358, et donc que $x \in P_n$. □

CORooMBLSooMHKmAq

Corolaire 5.42.
Un groupe monogène d'ordre n *possède* $\varphi(n)$ *générateurs, où* φ *est la fonction indicatrice d'Euler définie en 5.29.*

Démonstration. Le théorème 5.16 nous dit qu'un groupe monogène d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La proposition 5.41 nous indique que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède $\varphi(n)$ générateurs. □

5.5.3 Fonction indicatrice d'Euler (propriétés)

subSecKGDIGooAbEijf

Corolaire 5.43.
Deux propriétés.

(1) L'indicatrice d'Euler est multiplicative : si p *est premier avec* q, *alors*

$$\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q). \tag{5.83}$$

(2) Si p *est un nombre premier,*

$$\varphi(p) = (p-1). \tag{5.84}$$

Démonstration. Nous savons que si p et q sont premiers entre eux, alors le théorème 5.25 nous donne l'isomorphisme de groupe

$$(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}, +) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +). \tag{5.85}$$

Un élément (x,y) est générateur du produit si et seulement si x est générateur de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et y est générateur de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Par la proposition 5.41, il y a $\varphi(p)\varphi(q)$ tels éléments. Par ailleurs le nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ est $\varphi(pq)$, d'où l'égalité.

Si p est premier, nous avons $\varphi(p) = p-1$ parce que tous les entiers de $\{1, \dots, p-1\}$ sont premiers avec p. □

5.6 Groupe symétrique, groupe alterné

SECooZFYQooFfopMa

La définition des permutations et du groupe symétrique sont 1.269. Voir aussi le thème 8.

5.6.1 Le groupe alterné

DEFooEIVIooFvVkHH

Définition 5.44.
Le groupe A_n *des permutations paires*[13] *dans* S_n *est le* ***groupe alterné****.*

PROPooCPXOooVxPAij

Proposition 5.45.
À propos du groupe alterné dans le groupe symétrique.

[12] Corolaire 1.359
[13] Définition 1.295.

(1) *Le groupe alterné A_n est un sous-groupe caractéristique*[14] *de S_n*
ITEMooWXXUooOWvFgE

(2) *Le sous-groupe A_n est d'indice 2 dans S_n.*
ITEMooGGAHooRYgNqq

(3) *Le sous-groupe A_n est l'unique sous-groupe d'indice*[15] *2 de S_n.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}(S_n)$. Étant donné que $\epsilon \circ \alpha$ est un homomorphisme[16] surjectif sur $\{-1,1\}$, par unicité de cet homomorphisme, nous avons $\epsilon \circ \alpha = \epsilon$, et donc $\alpha(A_n) = A_n$. Par le premier théorème d'isomorphisme 2.7, il existe un isomorphisme

$$f\colon S_n/\ker(\epsilon) \to \mathrm{Image}(\epsilon). \tag{5.86}$$

En égalant le nombre d'éléments nous avons $|S_n : \ker\epsilon| = |S_n : A_n| = 2$.

Nous prouvons maintenant l'unicité. Soit H un sous-groupe d'indice 2 dans S_n. Par le lemme 3.24, H est distingué et nous pouvons considérer le groupe S_n/H. Ce dernier ayant 2 éléments, il est isomorphe à $\{-1,1\}$. Soit θ l'isomorphisme. On note φ le morphisme canonique $\varphi\colon S_n \to S_n/H$:

$$S_n \xrightarrow{\varphi} S_n/H \xrightarrow{\theta} \{-1,1\}. \tag{5.87}$$
EqSZBPTH

La composition $\theta\circ\varphi$ est alors un homomorphisme[17] surjectif de S_n sur $\{-1,1\}$ et nous avons $\theta\circ\varphi = \epsilon$ par la proposition 1.299. L'enchainement (5.87) nous montre que $H = \ker(\theta\circ\varphi) = \ker(\epsilon) = A_n$. □
PROPooPSZVooSmAgPA

Proposition 5.46 ([173])**.**
Le groupe symétrique S_n peut être écrit comme un produit semi-direct[18] *du groupe alterné :*

$$S_n = A_n \times_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \tag{5.88}$$

où l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur A_n est la conjugaison par $\sigma = (12)$, c'est-à-dire $\rho(-1)\tau = \sigma\tau\sigma^{-1}$.

Démonstration. Nous avons la suite exacte

$$1 \xrightarrow{i} A_n \xrightarrow{i} S_n \xrightarrow{\epsilon} \{\pm 1\} \longrightarrow 1 \tag{5.89}$$

où les i représentent des inclusions et ϵ est la signature définie en 1.292. Grâce à cette suite et au fait que la signature soit un isomorphisme à partir de la partie $\{\mathrm{Id},\sigma\}$ (pour σ d'ordre 2, par exemple $\sigma = (12)$), le théorème 2.49 nous dit que

$$S_n \simeq A_n \times_\varphi \{\mathrm{Id},\sigma\} \tag{5.90}$$

où φ est l'action adjointe de $\{\mathrm{Id},\sigma\}$ sur A_n. □
PROPooZOWBooIMxxlj

Proposition 5.47.
Si $\beta \in S_n$ est une transposition, nous avons les égalités suivantes d'ensembles :

$$S_n = A_n \cup A_n\beta = A_n \cup \beta A_n. \tag{5.91}$$

Démonstration. Les parties A_n et βA_n ont le même nombre d'éléments. En effet, l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon A_n &\to A_n\beta \\ \sigma &\mapsto \sigma\beta \end{aligned} \tag{5.92}$$

est une bijection.

De plus ces deux ensembles sont disjoints à cause de la proposition 1.299. En effet si $\sigma \in A_n$, alors $\epsilon(\sigma) = 1$. Mais un élément de $A_n\beta$ est de la forme $\sigma\beta$ avec $\sigma \in A_n$. Or ϵ est un homomorphisme[19], donc $\epsilon(\sigma\beta) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\beta) = -1$.

Enfin, la proposition 5.45(2) dit que A_n est d'indice deux dans S_n. Donc la partie

$$A_n \cup A_n\beta \tag{5.93}$$

contient $|S_n|/2 + |S_n|/2 = |S_n|$ éléments. C'est donc S_n. □

[14] Définition 1.266.
[15] Définition 2.13.
[16] Voir -1.1.
[17] Voir -1.1.
[18] Définition 2.48.
[19] Voir -1.1.

LemiApyfp

Lemme 5.48.
Le groupe dérivé du groupe symétrique est le groupe alterné : $D(S_n) = A_n$.

Démonstration. Tout élément de $D(S_n)$ s'écrit sous la forme $ghg^{-1}h^{-1}$. Quel que soit le nombre de transpositions dans g et h, le nombre de transpositions dans $[g, h]$ est pair. □

PropsHlmvv

Proposition 5.49 ([174]).
Soit $n \geqslant 3$. Les 3-cycles $c_i = (1, 2, i)$ avec $i = 3, \dots, n$ engendrent le groupe alterné A_n.

Démonstration. Soit H, le groupe engendré par les c_i. D'abord nous avons

$$c_i = (1, 2, i) = (1, 2)(2, i), \tag{5.94}$$

de telle sorte que $\epsilon(c_i) = 1$. Par conséquent nous avons $H \subset A_n$. Nous montrons par récurrence que $A_n \subset H$.

Pour $n = 3$ il suffit de vérifier que $A_3 = \{\mathrm{Id}, c_3, c_3^2\}$. Supposons avoir obtenu le résultat pour A_{n-1}, et prouvons le pour A_n. Soit $s \in A_n$.

Si $s(n) = n$, alors s se décompose de la même manière que sa restriction s' à $\{1, \dots, n-1\}$. Par l'hypothèse de récurrence, cette restriction, appartenant à A_{n-1}, se décompose en produit des $c_3, \dots, c_{n-1}$ et de leurs inverses.

Si $s(n) = k$ alors nous considérons l'élément $c_n^2 c_k s$. Cet élément envoie n sur n et peut donc être décomposé avec les c_i $(i = 1, \dots, n-1)$ en vertu du point précédent. □

PropiodtBG

Proposition 5.50.
Lorsque $n \geqslant 5$, tous les 3-cycles de A_n sont conjugués. Autrement dit, la classe de conjugaison d'un 3-cycle est l'ensemble des 3-cycles.

Démonstration. Soient les 3-cycles $\sigma = (i_1, i_2, i_3)$ et $\varphi = (j_1, j_2, j_3)$. Nous considérons une bijection α de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\alpha(i_s) = j_s$. Nous avons immédiatement que $\alpha \in S_n$ et que $\alpha\sigma\alpha^{-1} = \varphi$. Donc les 3-cycles sont conjugués dans S_n. Il reste à prouver qu'ils le sont dans A_n.

Si α est une permutation paire, la preuve est terminée. Si α est impaire, alors nous devons un peu la modifier. Comme $n \geqslant 5$, nous pouvons prendre s et t, des éléments distincts dans $\{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, j_3\}$ et poser $\tau = (st)$. Puisque la signature est un homomorphisme[20] et que τ et α sont impairs, l'élément $\tau\alpha$ est pair (lemme et proposition 1.298 et 1.291) et est donc dans A_n. Les supports de τ et φ étant disjoints, ces derniers commutent et nous avons

$$(\tau\alpha)\sigma(\tau\alpha)^{-1} = \tau(\alpha\sigma\alpha^{-1})\tau^{-1} = \tau\varphi\tau^{-1} = \varphi. \tag{5.95}$$

Donc σ et φ sont conjugués par $\tau\alpha$ qui est dans A_n. □

ThoURfSUXP

Théorème 5.51 ([49]).
Le groupe alterné A_n est simple[21] pour $n \geqslant 5$.

Démonstration. Soit N, un sous-groupe normal de A_n non réduit à l'identité. Étant donné que les 3-cycles engendrent A_n (proposition 5.49) et que tous les 3-cycles sont conjugués dans A_n (proposition 5.50), il suffit de montrer que N contient un 3-cycle. En effet si N contient un 3-cycle, le fait qu'il soit normal implique (par conjugaison) qu'il les contienne tous et donc qu'il contient une partie génératrice de A_n.

Soit donc $\sigma \in N$ différent de l'identité. Nous prenons i dans le support de σ et $j = \sigma(i)$. Nous choisissons ensuite $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j, \sigma^{-1}(i)\}$ et $m = \sigma(k)$. Nous considérons la permutation $\alpha = (ijk)$. Étant donné que N est normal, l'élément

$$\theta = (\alpha^{-1}\sigma\alpha)\sigma^{-1} \tag{5.96}$$

est dans N. De plus en utilisant le lemme 1.285 et le fait que $\alpha^{-1} = (ikj)$ nous avons

$$\theta = (ikj)(j\sigma(j)m). \tag{5.97}$$

Cela n'est pas spécialement un 3-cycle, mais nous allons en construire un. Nous allons déterminer que θ est soit un 5-cycle, soit un 3-cycle , soit un 2×2-cycle suivant les valeurs de $\sigma(j)$ et m.

Souvenons-nous que nous avons :

- $i \neq j = \sigma(i)$, puisque i est dans le support de σ ;
- $k \neq i$ et $k \neq j$, par définition de k (rappelons aussi que $k \neq \sigma^{-1}(i)$) ;

[20] Voir -1.1.
[21] Pas de sous-groupes normaux non triviaux, définition 1.268.

- $m \neq i$, $m \neq j$ et $m \neq \sigma(j)$ puisque $m = \sigma(k)$.

Il ne nous reste alors seulement les deux possibilités suivantes :

(1) soit $m = k$, soit $m \neq k$, d'une part ;

(2) soit $\sigma(j) = i$, soit $\sigma(j) = k$, soit $\sigma(j)$ n'est ni i, ni k, ni m, d'autre part.

Supposons dans un premier temps que $m = k$; alors

$$\theta = (ik)(j\sigma(j)). \tag{5.98}$$

C'est à priori un 2×2-cycle. Mais si de plus $\sigma(j) = i$, alors

$$\theta = (ijk) \tag{5.99}$$

qui est un 3-cycle ; et si $\sigma(j) = k$, alors

$$\theta = (ikj) \tag{5.100}$$

qui est un autre 3-cycle.

Supposons à présent que $m \neq k$. Si $\sigma(j)$ n'est ni i, ni k, ni m, alors i, j, k, $\sigma(j)$ et m sont cinq nombres différents, et

$$\theta = (i, j, \sigma(j), m, k) \tag{5.101}$$

est un 5-cycle. Si $\sigma(j) = i$, alors

$$\theta = (ikj)(jim) = (imk) \tag{5.102}$$

qui est un 3-cycle. Si $\sigma(j) = k$, alors

$$\theta = (ikj)(jkm) = (ikm) \tag{5.103}$$

qui est encore un 3-cycle.

Bref nous avons montré que θ est soit un 3-cycle, soit un 5-cycle, soit un 2×2-cycle. Si θ est un 3-cycle, la preuve est terminée.

Si $\theta = (ab)(cd)$, alors on considère $e \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a, b, c, d\}$ et nous avons

$$\underbrace{(abe)^{-1}\theta(abe)}_{\in N}\theta^{-1} = (aeb)(ab)(cd)(abe)(an)(cd) = (abe) \in N. \tag{5.104}$$

Si θ est le 5-cycle $(abcde)$, alors l'élément suivant est dans N :

$$(abc)^{-1}\theta(abc)\theta^{-1} = (acb)(abcde)(abc)(aedcb) = (acd). \tag{5.105}$$

Dans tous les cas nous avons trouvé un 3-cycle dans N et nous avons par conséquent $N = A_n$, ce qui fait que A_n ne contient pas de sous-groupes normaux non triviaux. Le groupe alterné A_n est donc simple. □

Nous en déduisons immédiatement que si $n \geqslant 5$, le groupe dérivé de A_n est A_n parce que A_n ne contient pas d'autres sous-groupes non triviaux.

LEMooICEHooGSSpkq

Lemme 5.52.
Le groupe alterné[22] A_6 *n'accepte pas de sous-groupes normaux d'ordre* 60.

Démonstration. Soit G normal dans A_6, et a, un élément d'ordre 5 dans G (qui existe parce que 5 divise 60). Soit aussi un élément b d'ordre 5 dans A_6. Les groupes $\text{gr}(a)$ et $\text{gr}(b)$ sont deux 5-Sylow dans A_6. En effet, 5 est un nombre premier, et est la plus grande puissance de 5 dans la décomposition de 60 ; donc $\text{gr}(a)$ est un 5-Sylow dans G. D'autre part, l'ordre de A_6 (qui est $\frac{1}{2} \cdot 6!$) ne possède également que 5 à la puissance 1 dans sa décomposition.

En vertu du théorème de Sylow 5.11(3), les 5-Sylow $\text{gr}(a)$ et $\text{gr}(b)$ sont conjugués et il existe $\tau \in A_6$ tel que $b = \tau a \tau^{-1}$. Mais G étant normal dans A_6, l'élément $\tau a \tau^{-1}$ est encore dans G, de telle sorte que $b \in G$. Du coup G doit contenir tous les éléments d'ordre 5 de A_6.

Les éléments d'ordre 5 de A_6 doivent fixer un des points de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ puis permuter les autres de façon à n'avoir qu'un seul cycle. Un cycle correspond à écrire les nombres $1, 2, 3, 4, 5$ dans un certain ordre. Ce faisant, le premier n'a pas d'importance parce qu'on considère la permutation cyclique, par exemple $(3, 5, 2, 1, 4)$ est la même chose que $(5, 2, 1, 4, 3)$. Le nombre de cycles sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ est donc de 4!, et par conséquent le nombre d'éléments d'ordre 5 dans A_6 est $6 \cdot 4! = 144$.

Le groupe G doit contenir au moins 144 éléments alors que par hypothèse il en contient 60 ; contradiction. □

[22] Définition 5.44.

Le théorème suivant montre que tout groupe peut être vu, en agissant sur lui-même, comme une partie du groupe symétrique.

Théorème 5.53.
Un groupe G est isomorphe à un sous-groupe de son groupe symétrique $S(G)$.

Démonstration. Nous considérons φ, la translation à gauche :

$$\begin{aligned}\varphi\colon G &\to S(G)\\ g &\mapsto t_g\end{aligned} \tag{5.106}$$

où $f_g(h) = gh$. Étant donné que

$$\varphi(gh) = ghx = g(t_h x) = t_g \circ t_h(x), \tag{5.107}$$

l'application φ est un morphisme de groupes. Il est injectif parce que si $gx = hx$ pour tout x, en particulier pour $x = e$ nous trouvons $g = h$.

De la même manière, $\varphi(g)x = \varphi(g)y$ implique $x = y$. Cela montre que l'image est bien dans le groupe symétrique.

L'ensemble Image(φ) est donc un sous-groupe de $S(G)$, et φ est un isomorphisme vers ce groupe. □
LEMooMVUGooRiDaDz

Lemme 5.54.
Si $n \geqslant 3$, alors

(1) Le centre de S_n est trivial.

(2) Le groupe S_n est non abélien.

Démonstration. Soit $s \in Z(S_n)$ et trois éléments distincts a, b et c de $\{1, \dots, n\}$. Nous posons $\tau = (ab)$ et nous avons $s\tau = \tau s$. En notant $a' = s(a)$ et $b' = s(b)$ nous avons

$$a' = s(a) = (\tau s \tau^{-1})(a) = (\tau s)(b) = \tau(b') \tag{5.108a}$$
$$b' = s(b) = (\tau s \tau^{-1})(b) = (\tau s)(a) = \tau(a'). \tag{5.108b}$$

Donc τ permute a' et b'. Mais comme τ ne permute que a et b, en tant qu'ensembles, $\{a, b\} = \{s(a), s(b)\}$. Le même raisonnement sur $\{b, c\}$ donne $\{b, c\} = \{s(b), s(c)\}$. Et puisque a, b et c sont distincts,

$$\{b\} = \{b, c\} \cap \{a, b\} = \{s(b)\}. \tag{5.109}$$

Cela montre que $s(b) = b$, et donc que le centre de S_n est réduit à la permutation identité.

En ce qui concerne le fait que S_n est non abélien, si nous avions $st = ts$ pour tout $s, t \in S_n$ alors $s = tst^{-1}$ pour tout t. Alors s serait dans le centre de S_n. En bref, si S_n était abélien, son centre serait S_n et non $\{\mathrm{Id}\}$.

□
PROPooUBIWooTrfCat

Proposition 5.55 ([175, 165])**.**
Tout groupe simple[23] *d'ordre* 60 *est isomorphe au groupe alterné A_5.*

Démonstration. Nous avons la décomposition en nombres premiers $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Déterminons pour commencer le nombre n_5 de 5-Sylow dans G. Le théorème de Sylow 5.11(4) nous renseigne que n_5 doit diviser 60 et doit être égal à $1 \mod 5$. Les deux seules possibilités sont $n_5 = 1$ et $n_5 = 6$. Étant donné que tous les p-Sylow sont conjugués, si $n_5 = 1$ alors le 5-Sylow serait un sous-groupe invariant à l'intérieur de G, ce qui est impossible vu que G est simple. Donc $n_5 = 6$.

Par le point (3) du théorème de Sylow, le groupe G agit transitivement sur l'ensemble des 5-Sylow par l'action adjointe :

$$g \cdot S = gSg^{-1}. \tag{5.110}$$

Cela donne donc un morphisme $\theta\colon G \to S_6$. Le noyau de θ est un sous-groupe normal. En effet si $k \in \ker\theta$ et si $g \in G$ nous avons

$$(gkg^{-1}) \cdot S = gkg^{-1}Ggk^{-1}g^{-1} \tag{5.111a}$$
$$= gkTk^{-1}g^{-1} \tag{5.111b}$$
$$= gTg^{-1} \tag{5.111c}$$
$$= S \tag{5.111d}$$

[23] Définition 1.268.

où T est le Sylow $T = g^{-1}Sg$. Étant donné que $k \in \ker\theta$ nous avons utilisé $kTk^{-1} = aT$. Au final $gkg^{-1} \cdot S = S$, ce qui prouve que $gkg^{-1} \in \ker\theta$.

Étant donné que $\ker\theta$ est normal dans G, soit il est réduit à $\{e\}$ soit il vaut G. La seconde possibilité est exclue parce qu'elle reviendrait à dire que G agit trivialement, ce qui n'est pas correct étant donné qu'il agit transitivement. Nous en déduisons que $\ker\theta = \{e\}$, que θ est injective et que G est isomorphe à un sous-groupe de S_6.

Par ailleurs le groupe dérivé de G est un sous-groupe normal (et non réduit à l'identité parce que G est non commutatif). Donc $D(G) = G$. Étant donné que $G \subset S_6$, nous avons

$$G = D(G) \subset D(S_6) = A_6 \tag{5.112}$$

parce que le groupe dérivé du groupe symétrique est le groupe alterné (lemme 5.48).

L'ensemble $\theta^{-1}(A_6)$ est distingué dans G. En effet si $\sigma \in A_6$ et si $g \in G$ nous avons

$$\theta\big(g\theta^{-1}(\sigma)g^{-1}\big) = \theta(g)\sigma\theta(g)^{-1} \in A_6. \tag{5.113}$$

Nous en déduisons que $\theta^{-1}(A_6)$ est soit G entier soit réduit à $\{e\}$. Si $\theta^{-1}(A_6) = \{e\}$, alors pour tout $g \in G$ nous aurions $g^2 = e$ parce que $\theta(g^2) \in A_6$. L'ordre de G étant 60, il n'est pas possible que tous ses éléments soient d'ordre 2. Nous en déduisons que $\theta(G) \subset A_6$.

Nous nommons $H = \theta(G)$ et nous considérons l'ensemble $X = A_6/H$ où les classes sont prises à gauche, c'est-à-dire

$$[\sigma] = \{h\sigma \text{ tel que } h \in H\}. \tag{5.114}$$

Évidemment A_6 agit sur X de façon naturelle. Au niveau de la cardinalité,

$$\mathrm{Card}(X) = \frac{|A_6|}{|G|} = \frac{360}{60} = 6. \tag{5.115}$$

Le groupe A_6 agit sur X qui a 6 éléments. Nous avons donc une application $\varphi\colon A_6 \to A_6$. Encore une fois, la simplicité de A_6 montre que $\varphi(A_6) = A_6$.

Nous étudions maintenant $\varphi(H)$ agissant sur X. Un élément $x \in A_6$ fixe la classe de l'unité $[e]$ si et seulement si $x \in H$ et par conséquent $\varphi(H)$ est le fixateur de $[e]$ dans X. À la renumérotation près, nous pouvons identifier $\varphi(H)$ au sous-groupe de A_6 agissant sur $\{1, \dots, 6\}$ et fixant 6. Nous avons alors $\varphi(H) = S_5 \cap A_6 = A_5$. Nous venons de prouver que φ fournit un isomorphisme entre A_5 et H. Étant donné que H était isomorphe à G, nous concluons que G est isomorphe à A_6. □

5.6.2 Sous-groupes normaux

NORMooQAZTooBQLqDn

5.56 ([176]).
Soit le groupe V_4 engendré par les doubles transpositions de S_4. Nous savons de l'exemple 1.289(6) que ce groupe contient exactement 3 éléments non triviaux et l'identité. De plus, comme c'est une classe de conjugaison, V_4 est normal dans S_4.

Lemme 5.57.
Les sous-groupes $\mathrm{Fix}_{S_n}(a)$ *(avec* $a \in \{1, \dots, n\}$*) sont conjugués entre eux.*

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathrm{Fix}(a)$ et $s \in S_n$ nous devons prouver que $s\sigma s^{-1}$ est le fixateur d'un élément de $\{1, \dots, n\}$. Nous notons $s(a) = b$. Alors

$$(s\sigma s^{-1})(b) = (s\sigma)(a) = s(a) = b. \tag{5.116}$$

Donc $s\,\mathrm{Fix}(a)s^{-1} \subset \mathrm{Fix}(b)$.

Dans l'autre sens, si $\sigma \in \mathrm{Fix}(b)$ alors $s^{-1}\sigma s \in \mathrm{Fix}(a)$. Mais $\sigma = s(s^{-1}\sigma s)s^{-1}$, donc $\sigma \in s\,\mathrm{Fix}(a)s^{-1}$. □

PROPooOTJAooUbzGZm

Proposition 5.58 (Sous-groupes normaux de S_n [176]).
Les sous-groupes normaux de S_n *ne sont pas légions.*

(1) Pour $n = 4$*, les sous-groupes normaux de* S_4 *sont* $\{\mathrm{Id}\}$*,* V_4*,* A_4 *et* S_4*.*

(2) Pour $n \neq 4$*, les sous-groupes normaux de* S_n *sont* $\{\mathrm{Id}\}$*,* A_n *et* S_n*.*

Démonstration. Les cas $n \leqslant 2$ sont un peu triviaux, donc nous faisons $n \geqslant 3$. Soit H normal dans S_n et $s \neq \mathrm{Id}$ dans H ; par le lemme 5.54, s n'est pas dans le centre de S_n et il existe $u \in S_n$ tel que $us \neq su$. Comme u est un produit de transpositions (proposition 1.291), il existe une transposition t telle que $st \neq ts$. Le sous-groupe H est normal et puisque $s \in H$ nous avons aussi $ts^{-1}t^{-1} \in H$. Mais en même temps,

la combinaison sts^{-1} est le conjugué d'une transposition et est donc également une transposition (classe de conjugaison de S_4 dans 1.289). Nous en concluons que $sts^{-1}t^{-1}$ est un produit de deux transpositions appartenant à H.

Nous venons de prouver que H contient au moins un produit de deux transpositions. Et ce produit est différent de Id parce que $sts^{-1}t^{-1} = \text{Id}$ impliquerait $st = ts$.

Soient donc deux transpositions $t_1, t_2 \in H$ telles que $t_1t_2 \neq \text{Id}$. Les supports de t_1 et t_2 ont soit 1 soit aucun élément communs.

(1) **Premier cas**

Supposons $t_1 = (a, b)$, $t_2 = (b, c)$ avec a, b, c distincts dans $\{1, \dots, n\}$. Dans ce cas $t_1t_2 = (a, b, c)$ et H contient un cycle de longueur 3. Puisque H est normal et que les cycles de longueur trois sont une classe de conjugaison (exemple 1.289) et que A_n est engendré par ceux-ci (proposition 5.49), $A_n \subset H$. Mais A_n est d'indice deux dans S_n (proposition (2)(2)). Quel nombre plus grand que $n!/2$ divise $n!$? Seulement n lui-même. Donc H est soit A_n soit S_n.

(2) **Second cas**

Le groupe H contient un élément de la forme $(ab)(cd)$ avec a, b, c, d distincts dans $\{1, \dots, n\}$.

(2a) **Si $n = 3$**

Impossible parce que avec $n = 3$ nous n'avons pas quatre éléments distincts.

(2b) **Si $n = 4$**

Le sous-groupe H de S_4 contient un élément de V_4 qui n'est pas l'identité. Par normalité et classes de conjugaison, H contient V_4. Nous devons maintenant prouver que si H n'est pas V_4 alors H est A_4 ou S_4. Nous avons les inclusions $V_4 \subset H \subset S_4$ et donc les inégalités

$$4 \leqslant |H| \leqslant 24. \tag{5.117}$$

Donc le nombre $|H|$ est un multiple de 4 qui divise 24. Les possibilités sont $|H| = 4, 8, 12, 24$. La possibilité $|H| = 4$ donne $H = V_4$; si $|H| = 24$ alors $H = S_4$; si $|H| = 12$ alors H est d'indice 2 dans S_4 et $H = A_n$ (proposition 5.45(3)). Quid de $|H| = 8$?

D'après le corolaire 2.15 au théorème de Lagrange, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe. Soit x dans H mais pas dans V_4. L'ordre de x peut être 1, 2, 4 ou 8. Ordre 1 serait $x = \text{Id}$. Ordre 8, pas possible parce que S_4 n'a pas d'éléments d'ordre 8.

(2b.i) **x d'ordre 2**

Prenons la décomposition de x en cycles disjoints. Puisqu'on est dans S_4, ces cycles ne peuvent être que des transpositions. Soit il y en a un (alors H contient une transposition et donc $H = S_4$), soit il y en a deux et alors x est dans V_4.

(2b.ii) **x d'ordre 4**

L'élément x est alors un cycle de longueur 4, et H contient tous les cycles de longueur 4 ; par exemple, le produit $(abcd)(bacd) = (adc)$. Le sous-groupe H contient alors A_4 (parce qu'il contient tous les 3-cycles).

(2c) **Si $n \geqslant 5$**

Soit un élément e[24] distinct de a, b, c et d. Par notre liste préférée des classes de conjugaison (exemple 1.289(6)), le 2-cycle $(c, e)(a, b)$ est conjugué à $(a, b)(c, d)$ et appartient donc à H. Mais alors le produit suivant est également dans H :

$$(ce)(ab)(ab)(cd) = (ce)(cd) = (ecd). \tag{5.118}$$

Donc H contient un 3-cycle, et par conséquent tous les 3-cycles. Encore une fois, cela prouve que H est soit A_n soit S_n.

(2d) **Pourquoi $n = 4$ est spécial ?**

Dans le premier cas, nous montrons tout de suite que $H = V_4$ n'est pas possible. Dans le deuxième cas, nous montrons que, grâce à un élément différent de a, b, c et d, la possibilité $H = V_4$ est exclue. La possibilité $H = V_4$ n'existe que pour $n = 4$.

□

[24] e n'est pas l'élément neutre ici

5.6.3 Indice

THOooXDRNooIyaGlv

Théorème 5.59.
Tout sous-groupe d'indice n dans S_n est isomorphe à S_{n-1}.

Démonstration. Pour $n = 1$, il n'y a pas de sous-groupe. Pour $n = 2$, un sous-groupe d'indice 2 ne peut contenir que 1 élément, qui est donc l'identité. Ok pour que $\{\mathrm{Id}\}$ soit égal à S_1 ?

Pour les autres, il y a un peu plus de travail.

(1) **Pour $n = 3$**

Nous avons $|S_3| = 6$. Donc un sous-groupe d'indice 3 dans S_3 contient exactement 2 éléments. Il contient Id et un autre élément $\sigma \in S_3$ qui doit vérifier $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ ou $\sigma^2 = \sigma$. Aucun élément de S_3 ne vérifie $\sigma^2 = \sigma$ (à part l'identité). Donc $\sigma^2 = \mathrm{Id}$, ce qui implique que σ est une transposition. Donc

$$H = \{\mathrm{Id}, (12)\} \tag{5.119}$$

ou l'identité avec (23), ou avec (13). Dans tous les cas c'est isomorphe à S_2.

(2) **Pour $n = 4$**

Nous avons $|S_4 : H| = 4$, donc $|H| = 6$. Mais $6 = 2 \times 3$ et $2 \mid 3 - 1$, donc le théorème 5.25 nous dit que H est soit cyclique[25] (et donc abélien), soit un produit semi-direct. Vu que S_4 n'a pas d'éléments d'ordre 6, aucun sous-groupe d'ordre 6 ne peut être cyclique. Nous sommes donc dans le cas du produit semi-direct

EQooSHWGooFMNRyf

$$H = \mathbb{Z}_3 \times_\varphi \mathbb{Z}_2 \tag{5.120}$$

où $\varphi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ et $\varphi(1)$ est d'ordre 2 dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3)$. Il convient de nous attarder un peu pour être sûr d'avoir bien compris tout ce qui se trouve dans l'identification (5.120). D'abord un point de notations : ici nous considérons les groupes $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ munis de l'addition. Donc 1 n'est pas le neutre. Ensuite nous savons du théorème 5.18 que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$, et que via cette identification, $\varphi(1) = 2 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$ au sens où $\varphi(1)x = 2x$. Nous avons alors $\varphi(1)^2 x = 4x = x$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Cela montre bien que $\varphi(1)$ est d'ordre 2.

Par rapport à la proposition 5.46, ici nous écrivons $\mathbb{Z}_2 = \big(\{0, 1\}, +\big)$ alors que là nous écrivons $\mathbb{Z}_2 = \big(\{-1, 1\}, \cdot\big)$. Ce sont les mêmes groupes, mais il convient de remarquer que le 1 ici est le -1 là.

Nous savons par la proposition 5.46 que $S_n = A_n \times_\varphi \mathbb{Z}_2$; en comparant avec (5.120) nous voyons qu'il suffit de prouver que $A_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ pour avoir $H = S_3$.

Le groupe A_3 possède $|S_3|/2 = 3$ éléments. Il est vite vu que $A_3 = \{\mathrm{Id}, (12)(31), (12)(32)\}$: ce sont trois éléments de signature paire dans S_3 ; donc c'est S_3. La correspondance $\mathrm{Id} \mapsto 0$, $(12)(13) \mapsto 1$, $(13)(12) \mapsto 2$ donne un isomorphisme avec $(\mathbb{Z}_3, +)$.

(3) **Pour $n \geqslant 5$**

Soit un sous-groupe H d'indice n dans S_n et l'action à gauche de S_n sur $E = S_n/H$ (qui n'est à priori pas un groupe) donnée par $g \cdot [s] = [gs]$.

(3a) **Morphisme $\varphi\colon S_n \to S_E$**

Le φ défini par l'action est un morphisme parce que

$$\varphi(g_1 g_2)[s] = [g_1 g_2 s] = \varphi(g_1)[g_2 s] = \varphi(g_1)\varphi(g_2)[s]. \tag{5.121}$$

Mais il faut également vérifier que pour chaque $g \in G$, l'application $\varphi(g)\colon E \to E$ est bien une permutation. Pour l'injectivité, si $\varphi(g)[s_1] = \varphi(g)[s_2]$ alors $[gs_1] = [gs_2]$, donc il existe $h \in H$ tel que $gs_1 = gs_2 h$, ce qui prouve que $s_1 = s_2 h$ et donc que $[s_1] = [s_2]$. Pour la surjectivité, soit $[t] \in S_n/H$ et résolvons $\varphi(g)[s] = [t]$ par rapport à s. L'élément $s = g^{-1}t$ convient.

(3b) **$\ker(\varphi)$ est normal**

Soit $z \in \ker(\varphi)$, c'est-à-dire que $\varphi(z) = \mathrm{Id}_E$. Alors pour $\sigma \in S_n$ nous avons $\varphi(\sigma z \sigma^{-1}) = \varphi(\sigma)\varphi(z)\varphi(\sigma^{-1}) = \mathrm{Id}_E$.

(3c) **$\ker(\varphi) = \bigcap_{g \in S_n} gHg^{-1}$**

Supposons que $z \in gHg^{-1}$ pour tout g, et calculons $\varphi(z)[s]$. D'abord par hypothèse il existe $h \in H$ tel que $z = shs^{-1}$, donc

$$\varphi(z)[s] = [zs] = [shs^{-1}s] = [sh] = [s], \tag{5.122}$$

[25] Définition 1.440.

ce qui prouve que $\varphi(z) = \mathrm{Id}$.

Dans l'autre sens, soit $z \in \ker(\varphi)$. Donc $\varphi(z)[s] = [s]$. Il existe donc $h \in H$ tel que $zs = sh$, c'est-à-dire tel que $z = shs^{-1}$. La formule demandée est donc prouvée.

(3d) **Questions d'ordre**

Nous savons que $|H| = (n-1)!$ alors que $|A_n| = \frac{n!}{2}$. Donc $|H| < |A_n|$ avec une inégalité stricte. En même temps nous avons $|\ker(\varphi)| \leqslant |H|$ parce que $\ker(\varphi)$ est une intersection dont un des termes est H lui-même. Nous avons alors les inégalités

$$|\ker(\varphi)| \leqslant |H| = (n-1)! < |A_n|. \tag{5.123}$$

Mais les seuls sous-groupes normaux de S_n sont A_n, S_n et $\{\mathrm{Id}\}$ (proposition 5.58). Donc $\ker(\varphi) = \mathrm{Id}$ et φ est une injection entre deux ensembles finis de même cardinalité. Cela fait de φ une bijection et donc un isomorphisme de groupes

$$\varphi\colon S_n \to S_E. \tag{5.124}$$

Soit une fonction de numérotation $\psi\colon E \to \{1, \ldots, n\}$. Avec cela nous définissons un isomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}\colon S_E &\to S_n \\ \sigma &\mapsto \psi\sigma\psi^{-1}. \end{aligned} \tag{5.125}$$

(3e) **Fixateur**

Nous montrons à présent que $(\tilde{\psi} \circ \varphi)(H) = \mathrm{Fix}\big(\psi[\mathrm{Id}]\big)$ où le stabilisateur est pris dans S_n. Pour la première inclusion, soit $h \in H$. Nous avons $(\tilde{\psi} \circ \varphi)(h) = \psi \circ \varphi(h)\psi^{-1}$, qui nous appliquons à $\psi[\mathrm{Id}]$:

$$(\tilde{\psi} \circ \varphi)(h)\psi[\mathrm{Id}] = \psi \circ \varphi(h)[\mathrm{Id}] = \psi[h] = \psi[\mathrm{Id}]. \tag{5.126}$$

Donc $(\tilde{\psi} \circ \varphi)(H) \subset \mathrm{Fix}\big(\psi[\mathrm{Id}]\big)$.

Pour l'autre inclusion, soit $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma\psi[\mathrm{Id}] = \psi[\mathrm{Id}]$. Puisque $\sigma \in S_n$ nous avons $s \in S_E$ tel que $\sigma = \tilde{\psi}(s)$. Pour ce s nous avons donc

$$\big(\tilde{\psi}(s) \circ \psi\big)[\mathrm{Id}] = \psi[\mathrm{Id}], \tag{5.127}$$

d'où nous déduisons $s[\mathrm{Id}] = [\mathrm{Id}]$. Cela prouve que s stabilise $[\mathrm{Id}]$ dans S_E. Donc $s = \varphi(h)$ pour un certain $h \in H$, et au final $\sigma = \tilde{\psi}\big(\varphi(h)\big)$.

(3f) **Conclusion**

L'application $\tilde{\psi} \circ \varphi\colon H \to S_n$ est une application dont l'image est le fixateur d'un point. Plus précisément,

$$\tilde{\psi} \circ \varphi\colon H \to \mathrm{Fix}\big(\psi[\mathrm{Id}]\big) \tag{5.128}$$

est un isomorphisme de groupe. Mais le stabilisateur d'un point dans S_n est S_{n-1}.

□

5.7 Isométries du cube

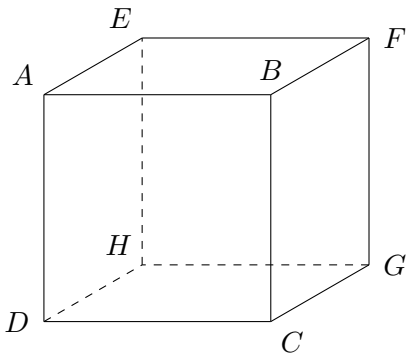
SecPVCmkxM

Les isométries du cube proviennent de [128].

Nous considérons le cube centré en l'origine de $\mathbb{R}^3$ et G, le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ préservant ce cube. Nous notons aussi G^+ le sous-groupe de G constitué des éléments de déterminant positif. Nous notons

$$\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_4\} \tag{5.129}$$

l'ensemble des grandes diagonales, c'est-à-dire les segments $[AG]$, $[EC]$, $[FD]$, et $[BH]$. Nous savons que G préserve les longueurs et que ces segments sont les plus longs possibles à l'intérieur du cube. Donc G agit sur $\mathcal{D}$ parce qu'il ne peut transformer une grande diagonale qu'en une autre grande diagonale. Nous avons donc un morphisme de groupes



$$\rho\colon G \to S_4. \tag{5.130}$$

Nous montrons que ce morphisme est surjectif en montrant qu'il contient les transpositions. Le groupe G contient la symétrie axiale passant par le milieu M de $[A,E]$ et le milieu N de $[C,G]$. Il est facile de voir que cette symétrie permute $[AG]$ avec $[EC]$. De plus elle laisse $[FD]$ inchangée. En effet, aussi incroyable que cela paraisse en regardant le dessin, nous avons $FD \perp MN$, parce qu'en termes de vecteurs directeurs,

$$\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{5.131}$$

Étudions à présent le noyau $\ker(\rho)$. Si $f \in \ker(\rho)$ n'est pas l'identité, alors $f(D_i) = D_i$ pour tout i, mais au moins pour une des diagonales les sommets sont inversés. Quitte à renommer les sommets du cube nous supposons que la diagonale $[AG]$ est retournée : $f(A) = G$ et $f(G) = A$. Regardons où peut partir B sous l'effet de f. Étant donné que f préserve les diagonales, $f(B) \in \{B, C\}$, mais étant donné que f est une isométrie, $d\big(f(B), f(G)\big) = d(B,G)$, et nous concluons que $f(B) = H$. Donc la diagonale $[BH]$ est retournée sous l'effet de f. En raisonnant de même, nous voyons que f retourne toutes les diagonales. Donc les éléments non triviaux de $\ker(\rho)$ retournent toutes les diagonales ; il n'y en a donc qu'un seul et c'est la symétrie centrale :

$$\ker(\rho) = \{\mathrm{Id}, s_0\}. \tag{5.132}$$

Le premier théorème d'isomorphisme 2.7 nous permet d'écrire le quotient de groupes :

$$\frac{G}{\{\mathrm{Id}, s_0\}} \simeq S_4. \tag{5.133}$$

Une classe d'équivalence modulo $\ker(\rho)$ dans G est donc toujours de la forme $\{f, f \circ s_0\}$. Et comme s_0 est de déterminant -1, une classe contient toujours exactement un élément de déterminant 1 et un de déterminant -1.

D'autre part, $\ker(\rho)$ est normal dans G parce qu'en tant que matrice, $s_0 = -\mathbb{1}$, donc les problèmes de commutativité ne se posent pas. L'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \frac{G}{\{\mathrm{Id}, s_0\}} &\to G^+ \\ [g] &\mapsto \begin{cases} g & \text{si } \det(g) > 0 \\ g \circ s_0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{5.134}$$

est un isomorphisme de groupes. Et enfin nous pouvons écrire

$$G^+ \simeq S_4. \tag{5.135}$$

Nous allons maintenant utiliser le corolaire 2.50 pour montrer que $G = G^+ \times_\sigma \ker(\rho)$. Les conditions sont remplies :

- $\ker(\rho)$ normalise G^+ parce que $\ker(\rho)$ ne contient que $\pm\mathbb{1}$.
- $\ker(\rho) \cap G^+ = \{\mathrm{Id}\}$.
- $\ker(\rho)G^+ = G$ parce que les classes d'équivalence de G modulo $\ker(\rho)$ sont composées de $\{f, f \circ s_0\}$.

Puisque $G^+ \simeq S_4$ et $\ker(\rho) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nous pouvons écrire de façon plus brillante que

$$G \simeq S_4 \times_\sigma \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \tag{5.136}$$

Mais étant donné que la conjugaison par s_0 est triviale, le produit semi-direct est un produit direct :

$$G \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \tag{5.137}$$

Il est maintenant du meilleur gout de pouvoir identifier géométriquement ces éléments. Les éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\mathrm{Id}, s_0\}$ ne font pas de mystère. Dans S_4 nous avons les classes de conjugaison des éléments Id, (12), (123), (1234) et (12)(34) déterminées durant l'exemple 1.289.

(1) L'élément (12) consiste à permuter deux diagonales et laisser les autres en place. Nous avons déjà vu que c'était une symétrie axiale passant par les milieux de deux côtés opposés. Cela fait 6 axes d'ordre 2.

(2) L'élément (123) fixe une des diagonales. C'est donc la symétrie axiale le long de la diagonale fixée. Par exemple la symétrie d'axe (AG) fait bouger le point B de la façon suivante :

$$B \to D \to E \to B. \tag{5.138}$$

C'est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$. En tout, nous avons donc 8 rotations d'ordre 3.

Notons à ce propos que la différence entre (234) et (243) est que la première réalise une rotation d'angle $2\pi/3$ tandis que la seconde, une rotation d'angle $-2\pi/3$.

(3) L'élément (1234) ne maintient aucune des diagonales et est d'ordre 4. C'est donc la rotation d'angle $\pi/2$ ou $-\pi/2$ autour de l'axe passant par les milieux de deux faces opposées. Il y en a 6 comme ça (3 paires de faces puis pour chaque il y a $\pi/2$ et $-\pi/2$), et ça tombe bien 6 est justement la taille de la classe de conjugaison de (1234) dans S_4.

(4) L'élément (12)(34) est le carré de la précédente[26], c'est-à-dire les rotations d'angle π autour des mêmes axes. Cela fait 3 éléments d'ordre 2.

[26] En fait c'est (13)(24), le carré de la précédente, mais c'est la même classe de conjugaison.

Chapitre 6

Corps

6.1 Généralités

NORMooGPWRooIKJqqw

6.1.
Nous trouvons parfois le terme **anneau à division**. Cela provient du fait que dans beaucoup de cas on considère uniquement des corps commutatifs ; donc on voudrait une façon de parler d'un anneau dont tous les éléments non nuls sont inversibles. Dans ce cadre on dit :

- Un anneau à division est un anneau dont tous les éléments non nuls sont inversibles,
- Un corps est un anneau à division commutatif.

Pour prendre un exemple de cette différence, le théorème de Wedderburn 19.31 est énoncé ici sous les termes « Tout corps fini est commutatif ». Sous-entendu : la commutativité ne fait pas partie de la définition d'un corps. Par contre dans [128] il est énoncé sous les termes « Tout anneau à division fini est un corps ». Chez lui, un corps est toujours commutatif et un anneau à division est ce que nous appelons ici un corps.

6.1.1 Corps ordonnés

Nous avons vu la définition de corps totalement ordonné en 1.493.

Définition 6.2 ([31]).
Un corps est ***formellement réel*** *si -1 n'est pas une somme de carrés.*

Proposition 6.3.
Un corps totalement ordonné est formellement réel.

Démonstration. Soit un corps totalement ordonné $(\mathbb{K}, \leqslant)$ et $a \in \mathbb{K}$ alors $a^2 \geqslant 0$. En effet si $a \geqslant 0$ alors $a^2 = a \times a \geqslant 0$ directement par la définition 1.493(2). Si $a \leqslant 0$ alors $-a \geqslant 0$ et

$$a^2 = (-a)^2 \geqslant 0. \tag{6.1}$$

Comme $-1 < 0$, il ne peut donc pas être écrit comme un carré. A fortiori comme somme de carrés. □

6.1.2 Automorphismes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

PROPooLLPMooIVanaO

Proposition 6.4 ([177, 1]).
L'identité est l'unique automorphisme du corps $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit un automorphisme $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Comme pour tout automorphisme,

$$\sigma(a) = \sigma(1a) = \sigma(1)\sigma(a). \tag{6.2}$$

Donc $\sigma(1) = 1$.

(1) **Identité sur les rationnels** De plus

$$\sigma(n) = \sigma(1 + \ldots + 1) = \sigma(1) + \ldots + \sigma(1) = n, \tag{6.3}$$

et

$$\sigma\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + \sigma\left(\frac{1}{n}\right) = \sigma\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \sigma(1) = 1. \tag{6.4}$$

Donc $\sigma(1/n) = 1/n$.

Nous en déduisons que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $\sigma(q) = q$. Cela ne suffit pas pour déduire $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ parce que rien n'indique que σ soit continue.

(2) **Positive sur les positifs**

Si $x > 0$ alors $\sigma(x) = \sigma(\sqrt{x})^2 > 0$.

(3) **Croissance**

Si $x > y$ alors $x - y > 0$ et $\sigma(x - y) > 0$. Cela donne $\sigma(x) > \sigma(y)$.

(4) **Identité sur les réels**

Soit un irrationnel $x \in \mathbb{R}$ et une suite (q_i) dans $\mathbb{Q}$ qui converge de façon croissante vers x. Soit $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{Q}$. Il existe N tel que si $i > N$ alors $q_i + \epsilon > x$; en appliquant σ à cette inégalité et en se souvenant que σ est l'identité sur $\mathbb{Q}$,

$$q_i + \epsilon > \sigma(x). \tag{6.5}$$

Mais de plus, $q_i < x$ donne $\sigma(q_i) < \sigma(x)$, c'est-à-dire $q_i < \sigma(x)$. En regroupant ces deux inégalités,

$$q_i < \sigma(x) < q_i + \epsilon \tag{6.6}$$

EQooLZOUooPhUNTI

pour tout $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{Q}$ et $i > N$. Ce ϵ étant fixé nous pouvons prendre la limite des inégalités (6.6) :

$$x \leqslant \sigma(x) \leqslant x + \epsilon. \tag{6.7}$$

Cela étant valable pour tout $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{Q}$, nous avons bien $x = \sigma(x)$.

□

REMooGHEDooOYYUPk

Remarque 6.5.
Certains[177] pensent que l'énoncé de cette proposition, ne parlant que de *corps* $\mathbb{R}$ n'autorise pas l'utilisation d'autre structure réelle que celle de corps. Du coup il faut reconstruire la notion d'ordre à partir seulement du langage des corps. Par exemple en disant que $a > b$ si et seulement si il existe k tel que $a = b + k^2$.

On peut s'en sortir en donnant l'énoncé suivant : « Si $\mathbb{K}$ est un corps isomorphe (en tant que corps) à $\mathbb{R}$ alors son unique automorphisme est l'identité ». Cela se démontre immédiatement en disant que si f est un automorphisme de $\mathbb{K}$ et si ϕ est un isomorphisme $\mathbb{K} \to \mathbb{R}$ alors $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}$. Donc il est l'identité et f l'est également.

Attention cependant à prouver que ϕ^{-1} est un morphisme. En effet en posant $\phi^{-1}(x) = a$ et $\phi^{-1}(y) = b$ nous avons

$$\phi\big(\phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y)\big) = x + y \tag{6.8}$$

parce que ϕ est un morphisme. D'autre part,

$$\phi\big(\phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y)\big) = \phi(a + b). \tag{6.9}$$

Donc

$$\phi^{-1}(x + y) = \phi^{-1}\big(\phi(a) + \phi(b)\big) = \phi^{-1}\big(\phi(a + b)\big) = a + b = \phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y). \tag{6.10}$$

PROPooEATMooIPPrRV

Proposition 6.6.
Un automorphisme du corps $\mathbb{C}$ qui fixe $\mathbb{R}$ est soit l'identité soit la conjugaison complexe[1].

Démonstration. Soit un automorphisme σ vérifiant la condition de fixer $\mathbb{R}$. Alors la restriction de σ à $\mathbb{R}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}$ et y est donc l'identité par la proposition 6.4.

En ce qui concerne les imaginaires purs,

$$-1 = \sigma(-1) = \sigma(ii) = \sigma(i)^2. \tag{6.11}$$

Donc $\sigma(i)$ est un élément de $\mathbb{C}$ vérifiant $\sigma(i)^2 = -1$. C'est-à-dire $\sigma(i) = \pm i$.

Si $\sigma(i) = i$ alors $\sigma = \mathrm{Id}$. Si $\sigma(i) = -i$ alors σ est la conjugaison complexe. □

[1] Par « fixer $\mathbb{R}$ » nous entendons que $\sigma(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, pas spécialement que $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

6.1.3 Corps premier

sDEFooQSOFooHSYJq

Définition 6.7.
*Un corps est **premier** si il est son seul sous-corps. Le **sous-corps premier** d'un corps est l'intersection de tous ses sous-corps.*

LEMooPOGUooATyqcf

Lemme 6.8.
Le sous corps premier d'un corps est un corps.

Démonstration. Soit un corps $\mathbb{K}$ et son sous-corps premier $\mathbb{P}$. Si $x, y \in \mathbb{P}$, alors pour tout sous-corps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ nous avons $x, y \in \mathbb{L}$ et donc $xy \in \mathbb{L} \subset \mathbb{P}$. Même type de vérification pour les autres propriétés d'un corps. □

Lemme 6.9.
Un corps premier est commutatif.

Démonstration. Le centre d'un corps est certainement un sous-corps. Par conséquent un corps premier doit être contenu dans son propre centre, c'est-à-dire être commutatif. □

DefXIHLooBAcqYH

Définition 6.10.
Soit p un nombre premier. Nous notons $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Nous verrons plus loin (section 19.4) comment nous pouvons définir $\mathbb{F}_{p^n}$ lorsque p est premier, ainsi que l'unicité d'un tel corps.

Nous avons par exemple

$$\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\} \tag{6.12}$$

avec la loi $2 = 0$.

Notons que $\mathbb{F}_p$ est un corps[2] possédant p éléments. L'ensemble $\mathbb{F}_p^*$ est un groupe d'ordre $p - 1$.

Lemme 6.11.
Les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (avec p premier) sont premiers.

Démonstration. Tout sous-corps de $\mathbb{Q}$ doit contenir 1, et par conséquent $\mathbb{Z}$. Devant également contenir tous les inverses, il contient $\mathbb{Q}$.

Tout sous-corps de $\mathbb{F}_p$ doit contenir 1 et donc $\mathbb{F}_p$ en entier. Par ailleurs nous savons de la proposition 3.52 que $\mathbb{F}_p$ est un corps lorsque p est premier. □

LEMooCGIYooSwOmHG

Lemme 6.12.
Si $k \in \mathbb{Z}$, nous notons $k_{\mathbb{K}}$ l'élément $k \cdot 1_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^{k} 1_{\mathbb{K}}$. L'application

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{K} \\ k &\mapsto k_{\mathbb{K}} \end{aligned} \tag{6.13}$$

est un morphisme d'anneaux.

Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est 0, alors s est injective.

PROPooXLLOooIAhEue

Proposition 6.13 (Sous-corps premier[178])**.**
Soit $\mathbb{K}$, un corps[3] de caractéristique p.

(1) Si $p > 0$ alors le sous-corps premier de $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

(2) Si $p = 0$ alors le sous-corps premier de $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Pour les besoins de notations, dans la suite si $k \in \mathbb{Z}$, nous notons $k_{\mathbb{K}}$ l'élément $k \cdot 1_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^{k} 1_{\mathbb{K}}$. Notons aussi $\mathbb{P}$ le sous-corps premier de $\mathbb{K}$.

Étant donné que $1_{\mathbb{K}}$ est dans tout sous-corps, nous devons avoir $\mathbb{Z}1_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{P}$. Nous avons donc toujours

$$\mathbb{Z}1_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{K}. \tag{6.14}$$

Maintenant, le lemme 1.466 nous dit la nature de $\mathbb{Z}1_{\mathbb{K}}$ en tant qu'anneaux, et nous pouvons séparer les cas en fonction de la caractéristique.

[2] Quand p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, proposition 3.52.

[3] Je rappelle que tous les corps du Frido sont commutatifs, sauf mention explicite du contraire.

(1) **Si $p > 0$** Nous avons $\mathbb{Z}1_{\mathbb{K}} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par le lemme 1.466. L'ensemble $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ étant un corps, $\mathbb{Z}1_{\mathbb{K}}$ est un corps et c'est donc le corps premier de $\mathbb{K}$.

(2) **Si $p = 0$** Si $p = 0$, alors $\mathbb{Z}1 \simeq \mathbb{Z}$ en tant qu'anneaux. Dommage que $\mathbb{Z}$ ne soit pas un corps.

Soit $n \in \mathbb{Z}1_{\mathbb{K}}$ et $m \in (\mathbb{Z}1_{\mathbb{K}})^*$. L'élément $nm^{-1} \in \mathbb{K}$ est dans $\mathbb{P}$ parce que $\mathbb{P}$ est un corps. Donc l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{P} \\ ab^{-1} &\mapsto a_{\mathbb{K}} b_{\mathbb{K}}^{-1} \end{aligned} \tag{6.15}$$

prend bien ses valeurs dans $\mathbb{P}$ et est un morphisme de corps.

La surjectivité de ψ est ce dont nous venons de parler. En ce qui concerne l'injectivité, si $\psi(ab^{-1}) = \psi(xy^{-1})$, alors $a_{\mathbb{K}} b_{\mathbb{K}}^{-1} = x_{\mathbb{K}} y_{\mathbb{K}}^{-1}$ et la commutativité de $\mathbb{K}$ nous permet d'écrire

$$a_{\mathbb{K}} y_{\mathbb{K}} = x_{\mathbb{K}} b_{\mathbb{K}}. \tag{6.16}$$

Étant donné le lemme 6.12, nous déduisons que $(ay - xb)_{\mathbb{K}} = 0$. Et comme $z \mapsto z_{\mathbb{K}}$ est injective, nous en déduisons que $ay - xb = 0$ dans $\mathbb{Z}$, et donc que $ab^{-1} = xy^{-1}$ dans $\mathbb{Q}$ par le lemme 1.489.

□

PropqPPrgJ

Proposition 6.14.
Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{P}$ son sous-corps premier[4]*. Si $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ alors $\sigma|_{\mathbb{P}} = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire que $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{P}$.*

Démonstration. Soit $\mathbb{P}$ le sous-corps premier de $\mathbb{K}$. La proposition 6.13 nous dit que $\mathbb{P}$ est soit $\mathbb{Z}$ soit $\mathbb{Q}$ en fonction de la caractéristique de $\mathbb{K}$. Nous allons faire le cas de caractéristique nulle, c'est-à-dire $\mathbb{P} \simeq \mathbb{Q}$.

Tout élément de $\mathbb{P}$ peut être écrit sous la forme $k_{\mathbb{K}} l_{\mathbb{K}}^{-1}$ pour des $k, l \in \mathbb{Z}$. Nous calculons la valeur de σ sur ces éléments. D'abord σ satisfait $\sigma(1_{\mathbb{K}})$ et préserve la somme, dont $\sigma(k_{\mathbb{K}}) = k_{\mathbb{K}}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$[5]. Étant donné que σ préserve également l'inverse et le produit,

$$\sigma(k_{\mathbb{K}} l_{\mathbb{K}}^{-1}) = \sigma(k_{\mathbb{K}})\sigma(l_{\mathbb{K}})^{-1} = k_{\mathbb{K}} l_{\mathbb{K}}^{-1}. \tag{6.17}$$

Et voilà. □

6.1.4 Petit théorème de Fermat

ThoOPQOiO

Théorème 6.15 (Petit théorème de Fermat)**.**
Soit p un nombre premier.

(1) Si $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ alors $x^p = x$.

(2) Si $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, alors $x^{p-1} = 1$.

(3) Si $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ alors $x^{-1} = x^{p-2}$.

ITEMooRNIVooOIzqgc

(4) Si x est premier avec p, alors $x^{p-1} \in [1]_p$.

Démonstration. Étant donné que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps commutatif et que p est premier, la proposition 1.469 nous indique que $\sigma(x) = x^p$ est un automorphisme. La proposition 6.14 nous indique alors que

$$a^p = a. \tag{6.18}$$

Si a est inversible alors $a^{p-1} = a^p a^{-1} = 1$.

Pour (4). Le nombre x n'est pas premier avec p uniquement lorsque x est multiple de p. Dans ce cas c'est $[a]_p = 0$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et donc $a^{p-1} = 0$. □

Exemple 6.16.
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{29}$. Le nombre 29 étant premier, $\mathbb{K}$ est un corps. C'est le corps des entiers modulo 29. Nous avons donc

$$-142 = -113 = -84 = -55 = -26 = 3 = 32 = 61 = 90 = 119. \tag{6.19}$$

[4] Définition 6.7.
[5] Dans le cas de caractéristique non nulle, $\mathbb{P} = \mathbb{Z}$ et vous pouvez vous arrêter ici.

Le petit théorème de Fermat nous permet aussi de calculer des exposants et des inverses. En effet, puisque $1 = x^{28}$ pour tout $x \in \mathbb{F}_{29}^*$, nous avons $x^{-1} = x^{27}$, et par suite, pour tout entier a,

$$x^{-a} = (x^a)^{27} = x^{27a}. \tag{6.20}$$

Le nombre $27a$ peut être grand par rapport à 29. Mais en réutilisant le fait que $1 = x^{28}$, on obtient

$$x^{-a} = x^{[27a]_{28}}. \tag{6.21}$$

Cette expression doit être comprise comme disant que pour tout $k \in [27a]_{28}$ nous avons $x^{-a} = x^k$.

Chose à retenir : dans les exposants nous calculons modulo 28. △

6.1.5 Nombres de Sophie Germain

DEFooCVFJooKCdVVD

Définition 6.17.
*Un nombre premier p est de **Sophie Germain** si $p > 2$ et si le nombre $q = 2p + 1$ est également premier.*

Notons qu'il existe des nombres premiers de Sophie Germain. Par exemple $p = 3$ donne $q = 2 \times 3 + 1 = 7$. Comme 7 est un nombre premier, le nombre 3 est de Sophie Germain. D'après Wikipédia[179], l'existence d'une infinité de nombres premiers de Sophie Germain est encore une question ouverte[6].

LEMooIYIKooGkoqRJ

Lemme 6.18 ([180, 181])**.**
Soit p, un nombre premier de Sophie Germain. Si $m \in \mathbb{Z}$ n'est pas divisible par q, alors $m^p \in [\pm 1]_q$ où $q = 2p + 1$.

Démonstration. Le petit théorème de Fermat 6.15 nous dit que $m^{q-1} \in [1]_q$. Mais $m^{q-1} = m^{2p} = (m^p)^2$. Donc

$$(m^p)^2 \in [1]_q. \tag{6.22}$$

Puisque q est premier, l'anneau $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est intègre par le corolaire 1.411. Comme $1 \neq -1$, la proposition 3.121 s'applique et nous avons $m^p \in [\pm 1]_q$. □

THOooSZXWooVeHdrh

Théorème 6.19 ([180, 181, 182])**.**
Soit un nombre premier de Sophie Germain (définition 6.17). Il n'existe pas de solution (x, y, z) dans $\mathbb{Z}^3$ au système

$$\begin{cases} x^p + y^p + z^p = 0 \\ [xyz]_p \neq 0. \end{cases} \tag{6.23}$$

Démonstration. Nous supposons que $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ est une solution telle que $\operatorname{pgcd}(x, y, z) = 1$.

(1) **x, y et z sont premiers deux à deux** Supposons que k soit un diviseur premier commun à x et y. Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $x = k\alpha$ et $y = k\beta$. Du coup on aurait $z^p = -k^p(\alpha^p + \beta^p)$. Donc k divise z^p. Le lemme 1.376 nous indique qu'alors k divise z. Donc $k = 1$ parce que k diviserait x, y et z.

Ce qui est vrai pour le couple (x, y) est encore vrai pour (x, z) et pour (y, z).

(2) **Le fameux u** Nous introduisons à présent une nouvelle variable intermédiaire qui va beaucoup nous aider. En utilisant le lemme 1.389,

$$-x^p = y^p + z^p = (y + z)\sum_{k=0}^{p-1} y^k(-z)^{p-1-k} = (y + z)u \tag{6.24}$$

où nous avons posé $u = \sum_{k=0}^{p-1} y^k(-z)^{p-1-k}$.

(3) **$\operatorname{pgcd}(u, y + z) = 1$** Soit α un nombre premier qui divise u et $y + z$.

D'abord α divise x^p et donc x (lemme 1.376). Autrement dit : $[x]_\alpha = 0$.

Ensuite, $0 = [x + z]_\alpha$, de telle sorte que

$$[y]_\alpha = -[z]_\alpha \tag{6.25}$$

EQooPTICooBNDwpx

[6] Si vous lisez ce paragraphe dans un futur où la question est tranchée, n'hésitez pas à m'écrire pour mettre à jour.

Enfin, en prenant la classe de u modulo α, et en substituant (6.25) :

$$0 = [u]_\alpha = \Big[\sum_{k=0}^{p-1} y^k(-z)^{p-1-k}\Big]_\alpha \tag{6.26a}$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1}[y^k]_\alpha[y^{p-1-k}]_\alpha \tag{6.26b}$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1}[y]_\alpha^{p-1} \tag{6.26c}$$
$$= p[y]_\alpha^{p-1}. \tag{6.26d}$$

Nous avons donc $p[y]_\alpha^{p-1} = 0$. Mais $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ est un anneau intègre[7]. Donc la règle du produit nul s'applique[8] et nous avons deux possibilités : $[p]_\alpha = 0$ ou $[y]_\alpha^{p-1} = 0$.

D'abord α divise déjà x. Or $\text{pgcd}(x, y) = 1$. Donc α ne peut pas diviser y (à part si $\alpha = 1$ évidemment), et à fortiori pas y^{p-1} non plus. Nous en déduisons que $[p]_\alpha = 0$. Puisque p est premier, nous avons $p = \alpha$.

Mais nous avons déjà vu que α divisait x. Donc $0 = [x]_\alpha = [x]_p$. Cela n'est pas possible parce que $[xyz]_p \neq 0$.

Nous avons donc prouvé que $\text{pgcd}(u, y + z) = 1$.

(4) **Utilisation d'un lemme**

Pour rappel, p est impair. Nous avons $(-x)^p = (y + z)u$. Le lemme 3.17 nous dit qu'il existe $a, \alpha \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{cases} y + z = a^p \\ u = \alpha^p. \end{cases} \tag{6.27}$$ EQooKMPZooCShJIT

Ce que nous venons de faire pour $y + z$ peut être fait pour les autres couples. Donc il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que

$$y + z = a^p \tag{6.28a}$$
$$x + z = b^p \tag{6.28b}$$
$$x + y = c^p. \tag{6.28c}$$

(5) **q divise un et un seul des x, y ou z** Supposons que q ne divise ni x, ni y ni z. Alors le lemme 6.18 dit que $x^p \in [\pm 1]_q$, $y^p \in [\pm 1]_q$ et $z^p \in [\pm 1]_q$. Donc les valeurs possibles pour $[x^p + y^p + z^p]_q$ sont $[\pm 3]_q$ et $[\pm 1]_q$.

Mais nous avons supposé que $x^p + y^p + z^p = 0$ et que $q \geq 5$ de telle sorte que $[\pm 3]_q \neq 0$. Contradiction. Donc q divise au moins un des trois x, y ou z.

Nous avons déjà montré que x, y et z étaient deux à deux premiers entre eux. Donc q ne peut diviser qu'un seul des trois.

(6) **q divise x** Jusqu'à présent x, y et z avaient des rôles symétriques. Maintenant nous supposons que q divise x.

(7) **$[y^p]_q = [\pm 1]_q$** Nous savons que $c^p = x + y$. En passant aux classes modulo q, nous avons

$$[c^p]_q = [x]_q + [y]_q = [y]_q \tag{6.29}$$

parce que nous avons choisi que q divise x. Nous avons maintenant les implications suivantes :

q ne divise pas y.
$\Rightarrow$ q ne divise pas c^p parce que $[y]_q = [c^p]_q$.
$\Rightarrow$ q ne divise pas c par le lemme 1.376.
$\Rightarrow$ $c^p \in [\pm 1]_q$ par le lemme 6.18.
$\Rightarrow$ $y \in [\pm 1]_q$ toujours parce que $[y]_q = [c^p]_q$.

(8) **$[z^p]_q = [\pm 1]_q$** Parce que les rôles de y et z sont symétriques. Donc ce que nous avons fait pour obtenir $[y^p]_q = [\pm 1]_q$ tient pour avoir $[z^p]_q = [\pm 1]_q$.

[7] Corolaire 1.411.
[8] Proposition 1.335.

(9) q **divise** $y+z$ Nous avons dit que q divisait x. Il divise donc aussi $2x$. Nous avons :

$$2x = (x+y)+(x+z)-(y+z) = c^p + b^p - a^p. \tag{6.30}$$

En passant au modulo q, à gauche nous avons $[2x]_q = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
[a^p]_q &= [c^p]_q + [b^p]_q && (6.31a)\\
&= [y]_q + [z]_q && (6.31b)\\
&= [\pm 1]_q + [\pm 1]_q && (6.31c)\\
&\in \{[2]_q, [-2]_q, [0]_q\}. && (6.31d)
\end{aligned}$$

En tout état de cause, $[a^p]_q$ n'est pas $[\pm 1]_q$. La contraposée du lemme 6.18 nous dit alors que q divise $a^p = y+z$.

(10) $[y]_q = [-z]_q$ Il s'agit seulement du fait que q divise $y+z$.

(11) $[u]_q = [p]_q$ Par définition, $u = \sum_{k=0}^{p-1} y^k (-z)^{p-1-k}$. On passe au modulo q, en substituant $[-z]_q$ par $[y]_q$:

$$[u]_q = \sum_{k=0}^{p-1} [y]_q^k [y]_q^{p-1-k} = \sum_{k=0}^{p-1} [y]_q^{p-1} = p[y]_q^{p-1} = [p]_q \tag{6.32}$$

La dernière égalité est le fait que $[y]_q = [\pm 1]_q$ et que $p-1$ est pair.

(12) **La contradiction** Vous vous souvenez de (6.27) qui disait que $u = \alpha^p$ pour un certain p ? Nous avons les implications suivantes :

$[\alpha^p]_q = [p]_q \neq 0 \Rightarrow q$ ne divise pas α^p.
$\Rightarrow q$ ne divise pas α.
$\Rightarrow \alpha^p \in [\pm 1]_q$.
$\Rightarrow [p]_q \in [\pm 1]_q$.

La dernière ligne est clairement fausse parce que $q > p$ et p n'est certainement pas égal à 1 ou -1.

Nous avons prouvé le théorème pour les triples (x,y,z) sans facteur commun. Si k était un diviseur commun de x, y et z, alors $(x/k, y/k, z/k)$ serait encore une solution, ce qui n'est pas le cas. □

6.2 Théorème des deux carrés

PropleGdaT

Proposition 6.20.
Soit p un nombre premier et P un élément de $\mathbb{F}_p[X]$. L'anneau $\mathbb{F}_p[X]/(P)$ est intègre si et seulement si P est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Démonstration. Supposons que P soit réductible dans $\mathbb{F}_p[X]$, c'est-à-dire qu'il existe $Q, R \in \mathbb{F}_p[X]$ tels que $P = QR$. Dans ce cas, $\bar{Q}$ est diviseur de zéro dans $\mathbb{F}_p[X]/(P)$ parce que $\bar{Q}\bar{R} = 0$.

Nous supposons maintenant que $\mathbb{F}_p[X]/(P)$ ne soit pas intègre : il existe des polynômes $R, Q \in \mathbb{F}_p[X]$ tels que $\bar{Q}\bar{R} = 0$. Dans ce cas le polynôme QR est le produit de P par un polynôme : $QR = PA$. Tous les facteurs irréductibles de A étant soit dans Q soit dans R, il est possible de modifier un peu Q et R pour obtenir $QR = P$, ce qui signifie que P n'est pas irréductible. □

6.2.1 Un peu de structure dans $\mathbb{Z}[i]$

LemSCAlICY

Lemme 6.21.
L'application

$$\begin{aligned} N\colon \mathbb{Z}[i] &\to \mathbb{N} \\ a+bi &\mapsto a^2+b^2 \end{aligned} \tag{6.33}$$

est un stathme euclidien pour $\mathbb{Z}[i]$.

Démonstration. Soient $t, z \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ dont le quotient s'écrit

$$\frac{z}{t} = x + iy \tag{6.34}$$

dans $\mathbb{C}$. Nous considérons $q = a + bi$ où a et b sont les entiers les plus proches de x et y. Si il y a *ex aequo*, on prend au hasard[9]. Alors nous avons

$$|\frac{z}{t} - q| \leqslant \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1. \tag{6.35}$$

On pose $r = z - qt$ qui est bien un élément de $\mathbb{Z}[i]$. De plus

$$|r| = |z - qt| = |t||\frac{z}{t} - q| < |t|, \tag{6.36}$$

c'est-à-dire que $|r|^2 < |t|^2$ et donc $N(r) < N(t)$. □

Étant donné que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien, il est principal (proposition 1.350).

LemBMEIiiV

Lemme 6.22.
Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont $\{\pm 1, \pm i\}$.

Démonstration. Déterminons les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$. Si $z \in \mathbb{Z}[i]^*$, alors il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]^*$ tel que $zz' = 1$. Dans ce cas nous aurions

$$1 = N(zz') = N(z)N(z'), \tag{6.37}$$

ce qui est uniquement possible avec $N(z) = N(z') = 1$, c'est-à-dire $z = \pm 1$ ou $z = \pm i$. Nous avons donc

$$\mathbb{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\}. \tag{6.38}$$

□

DEFooUCSHooJqGuVB

Définition 6.23 ([183])**.**
*Un **monoïde** est un triplet $(E, *, e)$ où E est un ensemble, e est un élément de E et $*\colon E \times E \to E$ est une loi de composition telle que pour tout $x, y \in E$,*

(1) $x * (y * z) = (x * y) * z$ (associativité)

(2) $e * x = x * e = x$ (e est un neutre).

Nous notons $\Sigma = \{a^2 + b^2 \text{ tel que } a, b \in \mathbb{N}\}$.

LemIBDPzMB

Lemme 6.24.
L'ensemble $\Sigma = \{a^2 + b^2 \text{ tel que } a, b \in \mathbb{N}\}$ est un sous-monoïde[10] de $\mathbb{N}$.

Démonstration. Il suffit de prouver que si $m, n \in \Sigma$, alors le produit mn est également dans Σ. Soit N, le stathme euclidien sur $\mathbb{Z}[i]$ (celui donné par le lemme 6.21). Vu que $n \in \Sigma$, il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $N(z) = n$. Idem pour m : il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $N(z') = m$. Nous avons évidemment $zz' \in \mathbb{Z}[i]$, et

$$N(zz') = N(z)N(z') = nm. \tag{6.39}$$

Donc nm est l'image de zz' par N, ce qui prouve que $nm \in \Sigma$. □

ThospaAEI

Théorème 6.25 (Théorème des deux carrés, version faible)**.**
Un nombre premier est somme de deux carrés si et seulement si $p = 2$ ou $p \in [1]_4$.

Démonstration. Soit p un nombre premier dans Σ. Si $a = 2k$, alors $a^2 = 4k^2$ et $a^2 = 0 \mod 4$. Si au contraire a est impair, $a = 2k + 1$ et $a^2 = 4k^2 + 1 + 4k = 1 \mod 4$. La même chose est valable pour b. Par conséquent, $a^2 + b^2$ est automatiquement $[0]_4$, $[1]_4$ ou $[2]_4$. Évidemment les nombres de la forme $0 \mod 4$ ne sont pas premiers ; parmi les $2 \mod 4$, seul $p = 2$ est premier (et vaut $1^2 + 1^2$).

Nous avons démontré que les seuls premiers de la forme $a^2 + b^2$ sont $p = 2$ et les $p = 1 \mod 4$. Il reste à faire le contraire : démontrer que si un nombre premier p vaut $1 \mod 4$, alors il est premier. Nous considérons l'anneau

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \text{ tel que } a, b \in \mathbb{Z}\}. \tag{6.40}$$

puis l'application

$$\begin{aligned} N\colon \mathbb{Z}[i] &\to \mathbb{N} \\ a + bi &\mapsto a^2 + b^2. \end{aligned} \tag{6.41}$$

[9] Dans l'exemple 1.347, nous prenions toujours l'inférieur parce que le stathme tenait compte de la positivité.
[10] Définition 6.23.

Un peu de calcul dans $\mathbb{C}$ montre que pour tout $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$, $N(zz') = N(z)N(z')$.

Nous savons que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont ± 1 et $\pm i$ (lemme 6.22).

Le lemme 6.21 montre que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien parce que N est un stathme. L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ étant euclidien, il est principal (proposition 1.350).

Pour la suite, nous allons d'abord montrer que $p \in \Sigma$ si et seulement si p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$, puis nous allons voir quels sont les irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Soit p, un nombre premier dans Σ. Si $p = a^2 + b^2$, alors nous avons $p = (a + ib)(a - bi)$, mais étant donné que p est premier, nous avons $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Du coup p n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}[i]$, mais il peut être écrit comme le produit de deux non inversibles. Le nombre p est donc non irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

Dans l'autre sens, nous supposons que p est un nombre premier non irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. Nous avons alors $p = zz'$ avec ni z ni z' dans $\{\pm 1, \pm i\}$. En appliquant N nous avons

$$p^2 = N(p) = N(z)N(z'). \tag{6.42}$$

Comme p est premier par hypothèse, c'est uniquement possible avec $N(z) = N(z') = p$ (avoir $N(z) = 1$ est impossible parce que cela signifirait que z est inversible). Si $z = a + ib$, alors $p = N(z) = a^2 + b^2$, et donc $p \in \Sigma$.

Nous savons déjà que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau principal et n'est pas un corps ; la proposition 1.412 s'applique donc et p sera non irréductible si et seulement si l'idéal (p) est non premier. Le fait que (p) soit un idéal non premier implique que le quotient $\mathbb{Z}[i]/(p)$ est non intègre (c'est la définition d'un idéal premier). Nous cherchons donc les nombres premiers pour lesquels le quotient $\mathbb{Z}[i]/(p)$ n'est pas intègre.

Nous commençons par écrire le quotient $\mathbb{Z}[i]/(p)$ sous d'autres formes. D'abord en remarquant que si I et J sont deux idéaux, on a $(\mathbb{A}/I)/J \simeq (\mathbb{A}/J)/I$. Par conséquent, en tenant compte du fait que $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$, nous avons

$$\mathbb{Z}[i]/(p) = (\mathbb{Z}[X]/(p))/(X^2 + 1) = \mathbb{F}_p[X]/(X^2 + 1). \tag{6.43}$$

Nous avons donc équivalence des propositions suivantes :

$$p \in \Sigma \tag{6.44a}$$
$$\mathbb{F}_p[X]/(X^2 + 1) \text{ n'est pas intègre} \tag{6.44b}$$
$$X^2 + 1 \text{ n'est pas irréductible dans } \mathbb{F}_p \tag{6.44c}$$
$$X^2 + 1 \text{ admet une racine dans } \mathbb{F}_p \tag{6.44d}$$
$$-1 \in (\mathbb{F}_p^*)^2 \tag{6.44e}$$
$$\exists y \in \mathbb{F}_p^* \text{ tel que } y^2 = -1. \tag{6.44f}$$

Le point (6.44c) vient de la proposition 6.20. Maintenant nous utilisons le fait que p soit un premier impair (parce que le cas de $p = 2$ est déjà complètement traité), donc $(p-1)/2 \in \mathbb{N}$ et nous avons, pour le y de la dernière ligne,

$$(-1)^{(p-1)/2} = (y^2)^{(p-1)/2} = y^{p-1} = 1 \tag{6.45}$$

parce que dans $\mathbb{F}_p$ nous avons $y^{(p-1)} = 1$ par le petit théorème de Fermat (théorème 6.15). Ainsi p doit vérifier

$$1 = (-1)^{(p-1)/2}, \tag{6.46}$$

c'est-à-dire $\frac{p-1}{2} = 0 \mod 2$ ou encore $p = 1 \mod 4$. □

Remarque 6.26.
Il n'est pas dit que les nombres dans $[1]_4$ sont premiers ($9 = 8 + 1$ ne l'est pas par exemple). Le théorème signifie que (à part 2), si un nombre premier est dans $[1]_4$ alors il est somme de deux carrés, et inversement, si un nombre premier est somme de deux carrés, il est dans $[1]_4$.

Théorème 6.27 (Théorème des deux carrés[128])**.**
Soit $n \geqslant 2$ un nombre dont nous notons

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)} \tag{6.47}$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. Alors $n \in \Sigma$ si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P} \cap [3]_4$, nous avons $v_p(n) \in [0]_2$ (c'est-à-dire $v_p(n)$ est pair).

Démonstration. (1) **Condition suffisante.**

Le produit (6.47) est évidemment un produit fini que nous pouvons alors regrouper en quatre parties : $\mathcal{P} \cap [0]_4$, $\mathcal{P} \cap [1]_4$, $\mathcal{P} \cap [2]_4$ et $\mathcal{P} \cap [3]_4$.

- Il n'y a pas de nombres premiers dans $[0]_4$.
- Les nombres premiers de $[1]_4$ sont dans Σ. Le produit d'éléments de Σ étant dans Σ, nous avons
$$\prod_{p\in\mathcal{P}\cap[1]_4} p^{v_p(n)} \in \Sigma. \tag{6.48}$$
- Le seul nombre premier dans $[2]_4$ est 2. C'est un élément de Σ.
- Le produit
$$\prod_{p\in\mathcal{P}\cap[3]_4} p^{v_p(n)} \tag{6.49}$$
est par hypothèse un produit de carrés ($v_p(n)$ est pair), et est donc un carré.

Au final le produit $\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(n)}$ est un produit d'un carré par un élément de Σ, ce qui est encore un élément de Σ.

Pour cette partie, nous avons utilisé et réutilisé le lemme 6.24.

(2) **Condition nécessaire.**

Soit p, un nombre premier. Nous voulons montrer que
$$\{v_p(n) \text{ tel que } n\in\Sigma\}\subset[2]_2. \tag{6.50}$$
Pour montrer cela nous allons procéder par récurrence sur les ensembles
$$E_k=\{v_p(n) \text{ tel que } n\in\Sigma\}\cap\{0,\dots,k\}. \tag{6.51}$$
Il est évident que les éléments de E_0 sont pairs, puisqu'il n'y a que zéro, qui est pair.

Supposons que $E_k\subset[0]_2$, et montrons que $E_{k+1}\subset[0]_2$. Soit un élément de E_{k+1}, c'est-à-dire $v_p(n)\leqslant k+1$ avec $n=a^2+b^2$. Si $v_p(n)=0$ alors l'affaire est réglée ; sinon c'est que p divise n. Mais dans $\mathbb{Z}[i]$ nous avons
$$n=a^2+b^2=(a+bi)(a-bi) \tag{6.52}$$
Comme $\mathbb{Z}[i]$ est principal, le lemme de Gauss 3.60 nous dit que si p divise n, alors il doit diviser soit $a+bi$, soit $a-bi$ (et en fait, les deux). Nous avons alors $p\mid a$ et $p\mid b$ en même temps. Et donc
$$p^2\mid a^2+b^2=n. \tag{6.53}$$
Posons $a=pa'$ et $b=pb'$ avec $a',b'\in\mathbb{N}$. Nous avons
$$\frac{n}{p^2}=\frac{p^2a'^2+p^2b'^2}{p^2}=a'^2+b'^2\in\Sigma. \tag{6.54}$$
Mais par construction,
$$v_p\left(\frac{n}{p^2}\right)=v_p(n)-2<k. \tag{6.55}$$
Donc $v_p(\frac{n}{p^2})$ est pair et par conséquent, $v_p(n)$ doit également être pair.

□

6.2.2 Résultats chinois

Nous allons maintenant parler du système d'équations SUBEQooHVCTooGXvbAH
$$\begin{cases} x=a_1 \mod p & \text{(6.56a)}\\ x=a_2 \mod q & \text{(6.56b)}\end{cases}$$
avec a_1, a_2 donnés dans $\mathbb{Z}$ et p,q des entiers premiers entre eux. Le lemme chinois nous donne la liste des solutions ainsi qu'une manière de les construire. Le théorème chinois en sera une espèce de corolaire qui établira l'isomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Voir [184].

Notons que le système (6.56), en suivant les notations usuelles du Frido s'écrit plutôt
$$x\in[a_1]_p\cap[a_2]_q. \tag{6.57}$$

LemCtUeGA

Lemme 6.28 (Lemme chinois [185]).
Soient n_1, n_2 deux entiers premiers entre eux[11]*. Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$.*

ITEMooZVUSooGoplQW

(1) Il existe $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$u_1 n_1 + u_2 n_2 = 1. \tag{6.58}$$

EQooIJXOooNEfCBo
ITEMooFMFEooQHNLFc

(2) Nous posons

$$a = a_1 u_2 n_2 + a_2 n_1 u_1. \tag{6.59}$$

Nous avons

$$[a_1]_{n_1} \cap [a_2]_{n_2} = [a]_{n_1 n_2}. \tag{6.60}$$

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Il suffit d'utiliser le théorème de Bézout 1.358

(2) **Pour (2) première inclusion** Soit $x \in [a]_{n_1 n_2}$, et vérifions que $x \in [a_1]_{n_1}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = a_1 u_2 n_2 + a_2 n_1 u_1 + k n_1 n_2. \tag{6.61}$$

En remplaçant $u_2 n_2$ par $1 - u_1 n_1$, nous avons

$$x = a_1(1 - u_1 n_1) + a_2 n_1 u_1 + k n_1 n_2 \in [a_1]_{n_1} \tag{6.62}$$

parce qu'il n'y a que le tout premier terme qui ne contient pas de facteur n_1.

Le fait que $x \in [a_2]_{n_2}$ se vérifie de même[12].

(3) **Pour (2) seconde inclusion** Soit $x \in [a_1]_{n_1} \cap [a_2]_{n_2}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a_1 + k n_2$. Donc

$$\begin{aligned} x - a &= a_1 + k n_1 - (a_1 u_2 n_2 + a_2 n_1 u_1) && \text{(6.63a)}\\ &= a_1 - a_1 u_2 n_2 + k' n_1 && \text{(6.63b)}\\ &= a_1 \underbrace{(1 - u_2 n_2)}_{=u_1 n_1} + k' n_1 && \text{(6.63c)}\\ &= a_1 u_1 n_1 + k' n_1, && \text{(6.63d)} \end{aligned}$$

ce qui signifie que n_1 divise $x - a$..

De même nous prouvons que n_2 divise $x - a$. Il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que

$$x - a = k n_1 = l n_2. \tag{6.64}$$

EQooFMWBooTpqpoj

En particulier n_1 divise $l n_2$ alors que n_1 et n_2 sont premiers entre eux. Le lemme de Gauss 3.60 dit alors que n_1 divise l. Il existe donc $s \in \mathbb{Z}$ tel que $l = s n_1$. En remettant ce l dans (6.64), nous trouvons

$$x - a = l n_1 = s n_1 n_2, \tag{6.65}$$

et donc $x - a$ est divisible en $n_1 n_2$, c'est-à-dire

$$x \in [a]_{n_1 n_2}, \tag{6.66}$$

ce qu'il fallait prouver.

□

THOooQHYLooVMBAfe

Théorème 6.29 (Théorème chinois[186]).
Soient p, q deux naturels premiers entre eux. Si $p, q \geqslant 2$ alors l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ [x]_{pq} &\mapsto \big([x]_p, [x]_q\big) \end{aligned} \tag{6.67}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

[11] Définition 1.364.
[12] Je dis ça au hasard ; je n'ai pas vérifié. Faites-moi signe si c'est bon.

Démonstration. Nous devons prouver que l'application ϕ respecte la somme, le produit et qu'elle est bijective. En ce qui concerne la somme,

$$\begin{aligned}\phi([q]_{pq}+[y]_{pq}) &= \phi\big((x+y) \mod pq\big) && (6.68a)\\ &= \big([x+y]_p,[x+y]_q\big) && (6.68b)\\ &= \big([x]_p+[y]_p,[x]_q+[y]_q\big) && (6.68c)\\ &= \big([x]_p,[x]_q\big)+\big([y]_p,[y]_q\big) && (6.68d)\\ &= \phi(x)+\phi(y). && (6.68e)\end{aligned}$$

En ce qui concerne le produit, c'est le même jeu : nous obtenons

$$\phi\big([xy]_{pq}\big)=\phi([x]_{pq}])\phi([y]_{pq}) \tag{6.69}$$

en utilisant le fait que $[xy]_p=[x]_p[y]_p$.

Montrons maintenant que ϕ est surjective. Soient $y_1,y_2\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{Z}$. Demander

$$\phi([x]_{pq})=\big([y_1]_p,[y_2]_q\big) \tag{6.70}$$

revient à demander de résoudre le système

$$\begin{cases}[x]_p=[y_1]_p & (6.71a)\\ [x]_q=[y_2]_q & (6.71b)\end{cases}$$

pour l'inconnue $x\in\mathbb{Z}$. Le lemme chinois 6.28 nous assure qu'une solution existe.

En ce qui concerne l'injectivité, nous supposons que x et y soient deux entiers tels que

$$\phi([x]_{pq})=\phi([y]_{pq}). \tag{6.72}$$

Nous en déduisons le système

$$\begin{cases}[x]_p=[y]_p & (6.73a)\\ [x]_q=[y]_q & (6.73b)\end{cases}$$

c'est-à-dire qu'il existe des entiers k et l tels que $x=y+kp$ et $x=y+lq$ ou encore tels que

$$kp+lq=0. \tag{6.74}$$

Étant donné que p et q sont premiers entre eux, le lemme de Gauss 1.370 implique que p divise l : il existe $l'\in\mathbb{Z}$ tel que $lp'=l$. En injectant cela dans $x=y+lq$, nous trouvons $x=y+l'pq$. Donc $[x]_{pq}=[y]_{pq}$, ce qu'il fallait. □

THOooVIGQooUhwBLS

Théorème 6.30 (Théorème chinois[1])**.**
Soit A un anneau commutatif. Soient $n\geqslant 2$, des éléments $x_1,\dots,x_n$ dans A et des idéaux $I_1,\dots,I_n$ tels que $I_i+I_j=A$ pour tout $i\neq j$.

Alors il existe un $x\in A$ tel que $x-x_i\in I_i$ pour tout $1\leqslant i\leqslant n$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Définition de J_k**
Pour $k\in\{1,\dots,n\}$ nous notons J_k le produit $J_k=\prod_{l\neq k}I_l$.

(2) **Si $k\neq i$ alors $J_k\subset I_i$** Un élément de J_k est de la forme

$$\prod_{l\neq k}a_j=a_i\prod_{\substack{l\neq k\\ l\neq i}}a_l \tag{6.75}$$

EQooLVTXooIrdWbH

avec $a_l\in I_l$. Vu que a_i est dans I_i qui est un idéal, tout le produit (6.75) est dans I_i.

(3) **$I_i+J_i=A$** En effet, soit $k\neq i$. Nous avons $J_i\subset I_k$ et donc

$$I_i+J_i\subset I_i+I_k=A. \tag{6.76}$$

(4) **Des α et des β**
Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Puisque $I_i + J_i = A$, nous pouvons donc prendre $\alpha_i \in I_i$ et $\beta_i \in J_i$ tels que

$$\alpha_i + \beta_i = 1. \tag{6.77}$$

(5) **Et enfin** Nous posons $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$. Pour chaque k nous avons

$$x - x_k = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i - x_k \tag{6.78a}$$
$$= \sum_{i \neq k} \beta_i x_i + (\beta_k - 1)x_k \tag{6.78b}$$
$$= \sum_{i \neq k} \beta_i x_i - \alpha_k x_k. \tag{6.78c}$$

Les deux termes sont dans I_k. En effet, d'une part $\beta_i \in J_i \subset I_k$ et I_k est un idéal, donc $\beta_i x_i \in I_k$, et d'autre part $\alpha_k \in I_k$, donc $\alpha_k x_k \in I_k$.

Un idéal étant stable par somme, la somme du tout est dans I_k.

□

Remarque 6.31.
Ce théorème chinois est bien une généralisation du lemme chinois 6.28. En effet, l'élément x dont il est question est solution du problème $x = x_i \mod I_i$. L'hypothèse $I_i + I_j = A$ n'est pas nouvelle non plus étant donné que si p et q sont des entiers premiers entre eux nous avons $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ par le corolaire 1.359.

6.3 Polynômes à coefficients dans un corps

SECooFYOGooQHitgE
Nous supposons que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, et nous étudions l'anneau $\mathbb{K}[X]$, défini en 1.473.
LEMooKSTIooSTxAll

Lemme 6.32 ([141]).
Soit un anneau factoriel A, ainsi que son corps des fraction[13] *$\mathbb{K}$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré $\geqslant 1$, nous pouvons écrire $P = qP_1$ où*

(1) $q \in \mathbb{K}^\times$

(2) $P_1 \in A[X]$ *est primitif*[14].

Démonstration. Nous considérons le polynôme $P = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{s_j} X^j$ avec $n \geqslant 1$, $a_j \in A$, $s_j \in A^*$ et $a_n \neq 0$. Si $s \in \text{ppcm}(\{s_j\}_{j=1,\dots,n})$, nous avons

$$P = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{n} a'_j X^j \tag{6.79}$$

avec $a'_j \in A$.
Si $d \in \text{pgcd}(\{a'_j\})$, nous pouvons écrire $a'_j = db_j$ où les $b_j \in A$ sont premiers entre eux. Avec tout ça,

$$P = \frac{d}{s} \sum_{j} b_j X^j. \tag{6.80}$$

Maintenant en posant $q = d/s$ et $P_1 = \sum_j b_j X^j$ nous avons ce qu'il faut parce que $d/s \in \mathbb{K}^\times$ et P_1 est primitif. □
LEMooGTPJooPWkffg

Lemme 6.33 ([62]).
Soit un polynôme primitif $P \in A[X]$ sur l'anneau factoriel A. Nous notons $\mathbb{K}$ le corps des fractions de A Soient $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = QR$. Il existe $q, r \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = (qQ)(rR) \tag{6.81}$$

avec qQ, rR dans $A[X]$.

[13] Définition 1.483.
[14] Définition 3.103(1).

Démonstration. En utilisant le lemme 6.32, nous considérons $qQ = Q_1$ et $rR = R_1$ avec Q_1 et R_1 primitifs dans $A[X]$. Avec ces éléments nous avons

$$R_1Q_1 = rqPQ = qrP. \tag{6.82}$$

EQooMGXYooIAFBgv

À priori q et p sont dans $\mathbb{K}$. Nous allons prouver que $qr = 1$ … pas tout à fait. Nous allons prouver que qr est inversible. Ensuite il faudra choisir les q et r un peu autrement.

(1) $qr \in A$ Posons $P = \sum_i a_iX^i$ ainsi que $qr = s/t$ avec $s, t \in A$. Nous supposons que s/t est une fraction irréductible. L'équation (6.82) nous dit que le polynôme qrP est R_1Q_1 et donc à coefficients dans A. Pour chaque i, il existe donc $b_i \in A$ tel que

$$\frac{sa_i}{t} = b_i, \tag{6.83}$$

ou encore $sa_i = tb_i$. Donc nous avons $t \mid sa_i$ pour tout i. Vu que la fraction $\operatorname{pgcd}(t, s) = 1$, le lemme de Gauss 3.60 nous indique que t divise a_i. Donc si $\delta \in \operatorname{pgcd}(\{a_i\}_{i=1,\dots,n})$, alors $t \mid \delta$. Vu que P est primitif, δ est inversible, et donc t l'est aussi. Nous avons alors le calcul

$$\frac{s}{t} = \frac{st^{-1}}{tt^{-1}} = st^{-1} \in A. \tag{6.84}$$

Nous avons prouvé que $qr \in A$.

(2) qr **est inversible**

Comme qr est dans A nous pouvons l'utiliser dans le lemme 1.339. Nous savons que $c(P)$ est inversible, disons $c(P) = u$. Nous avons donc, en utilisant le lemme 3.107,

$$qru = qr\,c(P) = u\,c(qrP) = u\,c(Q_1R_1) = uv\,c(Q_1)c(R_1) \in A^\times \tag{6.85}$$

pour un certain inversible $v \in A^\times$. Donc qru est inversible et comme u est inversible, qr est inversible.

(3) **Conclusion**

Nous avions $P = QR$, et nous avions posé $qQ = Q_1$, $rR = R_1$. Maintenant, en posant $u = (qr)^{-1}$ nous avons

$$(uqQ)(rR) = uqrQR = P. \tag{6.86}$$

En même temps, $uqQ = uQ_1 \in A[X]$ et $rR = R_1 \in A[X]$. Donc les polynômes qui satisfont la demande sont uqQ et rR.

□

THOooJESZooNqScLF

Théorème 6.34 ([62])**.**
Soient un anneau factoriel A et son corps des fractions $\mathbb{K}$. Les irréductibles[15] *dans $A[X]$ sont :*

(1) les polynômes de degré zéro dont l'unique coefficient est un élément irréductible de A (polynômes constants),

ITEMooVKOOooDeGYYz

(2) les polynômes de $A[X]$ qui sont de degré $\geqslant 1$, primitifs dans $A[X]$ et irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. Un polynôme est soit de degré zéro soit de degré $\geqslant 1$.

(1) **Degré zéro, $\Rightarrow$**

Soit un polynôme irréductible[16] $P \in \mathcal{P}_0(A)$.

Si nous notons $a \in A$ l'unique coefficient de P, nous devons prouver que a est irréductible dans A.

(1a) a **n'est pas inversible** Si a était inversible dans A, alors nous pourrions considérer le polynôme $Q \in \mathcal{P}_0(A)$ dont le coefficient est a^{-1}. Nous aurions alors $PQ = U$ où $U \in \mathcal{P}(A)$ est le polynôme dont le coefficient est $1 \in A$.

Ce U étant le neutre pour la multiplication dans $\mathcal{P}(A)$, le polynôme P est inversible, ce qui est contraire à l'hypothèse.

(1b) a **n'est pas produit de deux non inversibles** Même jeu : si $a = xy$ avec x et y non inversibles, alors en prenant les polynômes correspondants, P est produit de deux non inversibles, le polynôme P serait produit de deux non inversibles, et donc pas irréductible dans $\mathcal{P}(A)$.

[15] Définition 1.327.
[16] Cette notation $\mathcal{P}$ de (1.665) devrait être utilisée plus souvent ; dans le meilleur des mondes, on n'utiliserait jamais $A[X]$.

(2) **Degré zéro, ⇐**

Si a est irréductible dans A, le polynôme P de coefficient a est irréductible dans $\mathcal{P}(A)$. Même principe de preuve que le point précédent.

(3) **Degré $n \geqslant 1$, ⇒**

Soit $P \in \mathcal{P}_n(A)$ irréductible dans $\mathcal{P}(A)$. Nous devons démontrer que P est dans le cas (2). Nous écrivons $P = c(P)P_1$ avec P_1 primitif. Vu que P n'est pas produit de deux non inversibles et que P_1 n'est pas inversible, le polynôme $c(P) \in \mathcal{P}_0(A)$ est inversible[17], et donc $c(P)$ est inversible dans A. Cela démontre déjà que P est primitif.

Pour voir que P est irréductible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, nous supposons avoir une égalité $P = QR$ avec $Q, R \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. Par le lemme 6.33, il existe $q, r \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = (qQ)(rR) \tag{6.87}$$

avec $qQ, rR \in \mathcal{P}(A)$. Vu que P est irréductible dans $\mathcal{P}(A)$, soit qQ soit rR doit être inversible dans $\mathcal{P}(A)$. Supposons que ce soit qQ. Nous avons donc $qQ \in A^\times$ (qui serait mieux écrit $qQ \in \mathcal{P}_0(A^\times)$), et donc $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})^\times$.

En résumé nous avons prouvé que si $P = QR$ (dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$), alors soit Q soit R était dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})^\times$.

(4) **Degré $n \geqslant 1$, ⇐**

Nous supposons que $P \in \mathcal{P}_n(A)$ vérifie la condition (2), et nous montrons qu'il est irréductible dans $\mathcal{P}(A)$. Les polynômes non constants ne sont jamais inversibles, donc pour cette partie-là de la définition d'irréductibilité on est bon.

Supposons que $P = QR$ avec $Q, R \in \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(\mathbb{K})$. Comme P est irréductible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, un des deux Q ou R est inversible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. Disons que Q le soit. Donc $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})^\times$, et nous notons $q \in \mathbb{K}^\times$ l'unique coefficient de Q. Nous avons donc

$$P = qR. \tag{6.88}$$ EQooQUMSooFGIGxE

Comme, dès le début, on avait dit $Q \in \mathcal{P}(A)$, nous avons en réalité $q \in A$. Nous pouvons donc prendre le contenu de (6.88) en appliquant le lemme 1.339 : $c(P) = q\,c(R)$. Nous savons que $c(P)$ est inversible dans A ; nous multiplions par $c(P)^{-1}$:

$$1 = qc(R)c(P)^{-1}. \tag{6.89}$$

Nous voyons que $c(R)c(P)^{-1}$ est un inverse de q dans A. Donc P est irréductible dans $\mathcal{P}(A)$.

□ THOooVZUBooNSvcBr

Théorème 6.35 ([62]).
Si A est un anneau factoriel, l'anneau des polynômes $\mathcal{P}(A)$ est factoriel.

Démonstration. Si $P \in \mathcal{P}(A)$, nous devons prouver l'existence et l'unicité d'un décomposition de P en irréductibles.

Existence

Nous y allons par récurrence sur le degré de P.

(1) **Si $\deg(P) = 0$** L'unique coefficient de P est un élément de A, et se décompose en irréductibles parce que A est factoriel.

(2) **Si $\deg(P) = n + 1$** Nous supposons que l'existence est prouvée pour tout $k \leqslant n$. Nous écrivons $P = c(P)P_1^{(0)}$ avec P primitif dans $\mathcal{P}(A)$. Il y a deux possibilités : soit $c(P)$ est inversible, soit non. Si $c(P)$ est inversible, alors P est primitif et nous posons $P_1 = P$ et $c_1 = 1$. Si $c(P)$ n'est pas inversible, alors nous posons $c_1 = c(P)$ et $P_1 = P_1^{(0)}$. Dans les deux cas nous avons

$$P = c_1 P_1 \tag{6.90}$$

où P_1 est primitif et c_1 est soit 1 soit non inversible. Si $c_1 = 1$, il n'y a rien à faire avec lui. Sinon, il est non inversible et non nul dans A qui est factoriel. Nous avons donc une décomposition en irréductibles $c_1 = p_1 \dots p_k$. Dans le cas $c_1 = 1$, nous avons $p_1 = 1$ et c'est tout.

[17] On note de la même manière le polynôme constant $c(P)$ et l'élément $c(P)$ dans A, parce qu'on a beau détester les abus de notations, il y a des limites.

En ce qui concerne P_1, il y a deux possibilités : soit il est irréductible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ soit pas. Si il est irréductible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ alors il est à fortiori irréductible dans $\mathcal{P}(A)$ et

$$P = p_1 \dots p_k P_1 \tag{6.91}$$

est une décomposition de P en irréductibles dans $\mathcal{P}(A)$.

Et si P_1 n'est pas irréductible ? C'est qu'il existe deux non inversibles $Q, R \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ tels que $P = QR$. Le lemme 6.33 permet d'écrire alors

$$P_1 = QR = Q_1 R_1 \tag{6.92}$$

avec $Q_1, R_1 \in \mathcal{P}(A)$. Notons que ni P_1 ni R_1 ne sont des constantes : les constantes sont inversibles dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. Et comme la construction du lemme montre que $\deg(Q_1) = \deg(Q)$ et $\deg(R_1) = \deg(R)$, les polynômes Q_1 et R_1 sont non constants dans $\mathcal{P}(A)$. Nous avons donc $\deg(Q_1) < n+1$ et $\deg(R_1) < n+1$.

L'hypothèse de récurrence fonctionne pour les polynômes Q_1 et R_1 dans $\mathcal{P}(A)$. Nous avons donc des polynômes irréductibles $S_1, \dots S_l$ tels que

$$P_1 = Q_1 R_1 = S_1 \dots S_l. \tag{6.93}$$

Au final, nous avons la décomposition[18]

$$P = p_1 \dots p_k S_1 \dots S_l. \tag{6.94}$$

Unicité

Soient $P = p_1 \dots p_k S_1 \dots S_m = q_1 \dots q_l T_1 \dots T_n$ deux décompositions de P en irréductibles de A. Les p_i et les q_i sont les polynômes de degré zéro (donc dans A) et les S_i, T_j sont ceux de degré strictement positifs.

(1) **Pour les p_i et q_j**

Comme les polynômes S_i et T_j sont irréductibles leurs contenus sont inversibles, et en utilisant les lemmes 3.107 et 1.339, l'égalité

$$c(p_1 \dots p_k S_1 \dots S_m) = c(q_1 \dots q_l T_1 \dots T_n) \tag{6.95}$$

devient

$$p_1 \dots p_k c(S_1 \dots S_m) = q_1 \dots q_l c(T_1 \dots T_n). \tag{6.96}$$

Il existe donc un inversible $u \in A$ tel que $p_1 \dots p_k = u q_1 \dots q_l$. L'élément (uq_1) est irréductible (lemme 1.330) et donc

$$p_1 \dots p_k = (uq_1) q_2 \dots q_l \tag{6.97}$$

sont deux décompositions en irréductibles du même élément dans A. Donc, parce que A est factoriel, nous avons $k = l$ et il existe une permutation σ qui fait que p_i est associé à $q_{\sigma(i)}$.

(2) **Pour les polynômes**

Nous avons $S_1 \dots S_m = T_1 \dots T_m$. Le polynôme S_1 divise le produit $T_1 \dots T_m$. Comme S_1 est irréductible dans $\mathcal{P}(A)$, il est irréductible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ par le théorème 6.34.

L'anneau $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ est euclidien par 3.98 et donc principal par 1.350. Or dans un anneau principal, les irréductibles sont premiers par 1.408. Tout ça pour dire que S_1 est premier dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. Donc, comme il divise un produit, il doit diviser un des facteurs. Disons que $S_1 \mid T_i$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

Il existe $R \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ tel que $S_1 R = T_i$. Comme S_1 est non inversible (irréductible), et T_i est irréductible, R doit être inversible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. Il existe $q \in \mathbb{K}^\times$ tel que $T_i = qS_1$.

Comme T_i et S_1 sont irréductibles, ils sont primitifs dans $\mathcal{P}(A)$ (théorème 6.34). Supposons que q s'écrive sous forme irréductible $q = s/t$ avec $s, t \in A$. On note $T_i = \sum_j a_j X^j$ et $S_1 = \sum_j b_j X^j$. Pour tout i nous avons

$$\frac{sb_j}{t} = a_j, \tag{6.98}$$

ou encore $sb_j = ta_j$. Donc t divise sb_j pour tout j. Mais comme t est premier avec s, l'élément t divise b_j pour tout j. Il divise dont le pgcd des a_j qui est inversible parce que T_i est primitif. Bref, t est inversible dans A. Nous avons donc

$$q = \frac{s}{t} = \frac{st^{-1}}{tt^{-1}} = st^{-1} \in A. \tag{6.99}$$

[18] Ici [141] utilise le théorème 6.34. Certes, il présente sa récurrence de façon un peu différente, mais j'espère n'avoir pas loupé une étape. Soyez prudent et écrivez-moi si vous voyez une erreur.

Nous avons donc $T_i = qS_1$ avec $q \in A$. Comme T_i et S_1 sont irréductibles dans $\mathcal{P}(A)$, l'élément q est inversible dans A.

Nous avons fini de montrer que S_1 était associé à un des T_i. L'égalité

$$S_1 \dots S_m = T_1 \dots T_n \tag{6.100}$$

peut être alors récrite

$$S_1 \dots S_m = qT_1 \dots T_{i-1} S_1 T_{i+1} \dots T_n \tag{6.101}$$

Comme A est factoriel, il est intègre, et donc $\mathcal{P}(A)$ est intègre (théorème 3.92). Nous pouvons donc simplifier par S_1 et il reste

$$S_2 \dots S_m = uT_1 \dots T_{i-1} T_{i+1} \dots T_n. \tag{6.102}$$

Par récurrence, nous avons que chacun des S_i est associé à un des T_j.

□
PropqGZXvr

Proposition 6.36 ([141, 187]).
Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, alors l'anneau des polynômes $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ est est factoriel[19].

Démonstration. Un corps est un anneau factoriel (proposition 3.69), donc le théorème 6.35 conclut que l'anneau des polynômes sur un corps est factoriel. □

6.3.1 Irréductibilité

Pour rappel, un élément irréductible dans un anneau est la définition 1.327 : non inversible et pas les produits de deux non inversibles.

LEMooTMSUooCWoVHG

Lemme 6.37.
Soit un corps $\mathbb{K}$. Les éléments inversibles dans $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls.

Exemple 6.38.
Si un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ n'a que des racines complexes, ça ne l'empêche pas d'être réductible sur $\mathbb{Z}$. La réductibilité ne signifie pas qu'on peut mettre des racines en évidence. Par exemple le polynôme $P = X^4 + 3X^2 + 2$ est réductible sur $\mathbb{Z}$ en

$$P = (X^2 + 1)(X^2 + 2), \tag{6.103}$$

mais n'a pas de racines dans $\mathbb{Z}$. Si on veut réduire plus, il faut sortir de $\mathbb{Z}$.

△
DefCPLSooQaHJKQ

Définition 6.39 (Polynôme scindé).
*Nous disons que $P \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé** sur $\mathbb{K}$ si il est produit dans $\mathbb{K}[X]$ de polynômes de degré 1.*

Note : les constantes ne sont donc pas des polynômes scindés.

Proposition 6.40 (Critère d'Eisenstein).
Soit le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Nous supposons avoir un nombre premier p tel que

(1) p divise tous les $a_0, \dots, a_{n-1}$,

(2) p ne divise pas a_n,

(3) p^2 ne divise pas a_0.

Alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
Si de plus P est primitif au sens du pgcd *(définition 3.103) alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.*

Démonstration. Nous considérons $\bar{P}$ le polynôme réduit modulo p, c'est-à-dire $\bar{P} \in \mathbb{F}_p[X]$. Étant donné que par hypothèse tous les coefficients sont multiples de p sauf a_n, nous avons $\bar{P} = cX^n$. Supposons par l'absurde que $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$. Alors le lemme de Gauss (3.60) impose $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$.

Nous avons aussi, au niveau des réductions modulo p que $\bar{Q}\bar{R} = \bar{P}$. Or $\bar{P}$ est un monôme, donc $\bar{Q}$ et $\bar{R}$ doivent également l'être. Donc $\bar{Q} = dX^k$ et $\bar{R} = eX^{n-k}$ et en particulier $\bar{Q}(0) = \bar{R}(0) = 0$, c'est-à-dire que $Q(0)$ et $R(0)$ sont divisibles par p. Cela impliquerait que $a_0 = Q(0)R(0)$ soit divisible par p^2, ce qui est exclu par les hypothèses. Donc P est irréductible.

Supposons de surcroît que P soit primitif au sens du pgcd. Il est donc irréductible et primitif sur $\mathbb{Q}[X]$ et le corolaire 3.122 nous dit alors que P est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$. □

[19] Définition 3.53.

Exemple 6.41.
Soit le polynôme $P = 3X^4 + 15X^2 + 10$. Pour appliquer le critère d'Eisenstein il nous faut un nombre premier p divisant 15 et 10, mais pas 3, et dont le carré ne divise pas 10. On aura vite vu que $p = 5$ fait l'affaire. Le polynôme P est donc irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. △

6.3.2 Idéaux

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Nous notons (P) l'idéal engendré par P :

$$(P) = \{PR \text{ tel que } R \in \mathbb{K}[X]\}. \tag{6.104}$$ EqDefxMkDtW

Lemme 6.42.
Nous avons

(1) $(P) \subset (Q)$ *si et seulement si* Q *divise* P,

(2) $(P) = (Q)$ *si et seulement si* P *et* Q *sont multiples (non nuls) l'un de l'autre.*

Démonstration. Si $(P) \subset (Q)$, en particulier $P \in (Q)$ et il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = QR$, ce qui signifie que Q divise P.

Si les idéaux de P et de Q sont identiques, l'un divise l'autre et l'autre divise l'un. Ils sont donc multiples l'un de l'autre. □ ThoCCHkoU

Théorème 6.43.
Soit $\mathbb{K}$ *un corps commutatif.* ITEMooLZWMooDRsRwW

(1) L'anneau $\mathbb{K}[X]$ *est euclidien et principal.*

(2) Si I *est un idéal dans* $\mathbb{K}[X]$ *et si* $P \in I$ *est de degré minimal, alors* $(P) = I$. ITEMooASHKooZqkiCH

(3) De plus si $I \neq \{0\}$, *il existe un unique polynôme unitaire* μ *tel que* $I = (\mu)$.

Démonstration. Le point (1) a déjà été démontré dans le lemme 3.98 via le fait que $\mathbb{K}[X]$ est euclidien. Nous allons cependant donner ici une preuve directe que tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux. Si $I = \{0\}$, le résultat est évident. Nous supposons donc I non nul. Soit P de degré minimum parmi les éléments de I. Évidemment $(P) \subset I$. Nous allons démontrer qu'en réalité $(P) = I$.

Soit $P' \in I$. Par le théorème 3.95 de la division euclidienne[20], il existe Q et R dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $P' = PQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(P)$. Étant donné que $R = P' - PQ$ nous avons $R \in I$ et par conséquent $R = 0$ parce que P a été choisi de degré minimum dans I. Nous avons donc $P' = PQ$ et $I \subset (P)$.

L'existence d'un polynôme unitaire qui génère I est obtenu en choisissant $\mu = P/a_n$ où a_n est le coefficient du terme de plus haut degré. L'unicité d'un tel polynôme est obtenu par le fait que si μ et μ' génèrent le même idéal, alors ils sont multiples l'un de l'autre, or puisqu'ils sont unitaires, ils sont égaux. □

Nous voyons que n'importe quel polynôme de degré minimum dans un idéal génère l'idéal. Une importante conséquence du théorème 6.43 que nous verrons plus bas est que tout polynôme annulateur d'un endomorphisme est divisé par le polynôme minimal (proposition 8.98).

Corolaire 6.44. CorsLGiEN
Si $\mathbb{K}$ *est un corps et si* P *est un polynôme irréductible, alors l'ensemble* $\mathbb{L} = \mathbb{K}[X]/(P)$ *est un corps. De plus* $\mathbb{L}$ *est un espace vectoriel de dimension* $\deg(P)$.

Démonstration. En effet $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal par le théorème 6.43, par conséquent la proposition 1.414(2) déduit que $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps.

Une base de $\mathbb{L}$ est donnée par les projections de $1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}$. En effet ces éléments forment une famille libre parce que si $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \bar{X}^n = 0$ alors un représentant de cette classe doit être de la forme SP dans $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = SP, \tag{6.105}$$

ce qui n'est possible que si $S = 0$ et $a_k = 0$. D'autre part c'est un système générateur. En effet si $P = X^n + Q$ avec $\deg(Q) = n - 1$ alors

$$\bar{X}^{n+l} = \bar{X}^n \bar{X}^l = (\bar{P} - \bar{Q})\bar{X}^l = \bar{Q}\bar{X}^l. \tag{6.106}$$

Nous avons donc exprimé $\bar{X}^{n+l}$ comme une somme de termes de degré $n+l-1$. Par récurrence nous pouvons exprimer tout $\bar{X}^{n+l}$ comme combinaison d'éléments de degré plus petit que n. □

[20] Ici $\mathbb{K}$ est un corps et donc l'hypothèse d'inversibilité est automatiquement vérifiée.

6.45.
Ce corolaire prendra une nouvelle jeunesse lorsque nous parlerons de polynômes d'endomorphismes, en particulier la proposition 8.108 va donner des précisions.

LEMooGRIMooPxCXAZ

Lemme 6.46 ([188]).
Soit un isomorphisme de corps $\tau\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$. Alors

(1) L'application étendue

$$\begin{aligned}\tau\colon \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K}'[X]\\ \sum_i a_i X^i &\mapsto \sum_i \tau(a_i)X^i\end{aligned} \tag{6.107}$$

est un isomorphisme d'anneaux ;

(2) pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, le passage au quotient

$$\begin{aligned}\phi_\tau\colon \mathbb{K}[X]/(P) &\to \mathbb{K}'[X]/\big(\tau(P)\big)\\ \bar{Q} &\mapsto \overline{\tau(Q)}\end{aligned} \tag{6.108}$$

est un isomorphisme d'anneaux (et d'abord est bien définie).

Démonstration. Nous n'allons pas faire explicitement toutes les vérifications, mais tout de même les principales. Montrons que τ respecte le produit entre $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}'[X]$. Nous rappelons que ce produit est défini par la formule (1.668). En notant P_i les coefficients de P et Q_i ceux de Q et en remarquant que la définition de τ est essentiellement que $\tau(P)_i = \tau(P_i)$, nous avons :

$$\tau(PQ) = \tau\Big(\sum_k \big(\sum_{l=0}^{k} P_l Q_{k-l}\big)X^k\Big) \tag{6.109a}$$
$$= \sum_k X^k \sum_{l=0}^{k} \tau(P_l Q_{k-l}) \tag{6.109b}$$
$$= \sum_k X^k \sum_{l=0}^{k} \tau(P_l)\tau(Q_{k-l}) \tag{6.109c}$$
$$= \sum_k X^k \sum_{l=0}^{k} \tau(P)_l \tau(Q)_{k-l} \tag{6.109d}$$
$$= \sum_i \big(\tau(P)_i X^i\big) \sum_j \big(\tau(Q)_j X^j\big) \tag{6.109e}$$
$$= \tau(P)\tau(Q). \tag{6.109f}$$

Passons à l'isomorphisme d'anneaux donné par ϕ_τ.

(1) **Bien définie**
Si $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$ alors $Q_2 = Q_1 + RP$ pour un certain $R \in \mathbb{K}[X]$. Dans ce cas,

$$\phi_\tau(Q_2) = \overline{\tau(Q_2)} = \overline{\tau(Q_1) + \tau(RP)} \tag{6.110a}$$
$$= \overline{\tau(Q_1) + \tau(R)\tau(P)} \tag{6.110b}$$
$$= \overline{\tau(Q_1)}. \tag{6.110c}$$

L'application ϕ_τ est donc bien définie.

(2) **Injection**
Si $\phi_\tau(\bar{Q}_1) = \phi_\tau(\bar{Q}_2)$ alors $\overline{\tau(Q_1)} = \overline{\tau(Q_2)}$, ce qui signifie que

$$\tau(Q_1) = \tau(Q_2) + R\,\tau(P) \tag{6.111}$$

pour un certain $R \in \mathbb{K}'[X]$. Puisque $\tau\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}'[X]$ est un isomorphisme, nous pouvons y appliquer τ^{-1} pour trouver :

$$Q_1 = Q_2 + \tau^{-1}(R)P, \tag{6.112}$$

ce qui signifie que $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$.

(3) **Surjection**

Un élément de $\mathbb{K}'[X]/\big(\tau(P)\big)$ est de la forme $\bar{Q}$ avec $Q \in \mathbb{K}'[X]$. C'est l'image par ϕ_τ de l'élément $\overline{\tau^{-1}(Q)} \in \mathbb{K}[X]/(P)$.

(4) **Morphisme**

Nous vous laissons vérifier que l'application ϕ_τ est un morphisme d'anneaux.

□

6.3.3 Identité de Bézout

ThoBezoutOuGmLB

Théorème 6.47 (Bézout)**.**
Les polynômes $P_1, \dots, P_n$ dans $\mathbb{K}[X]$ sont premiers dans leur ensemble si et seulement si il existe des polynômes $Q_1, \dots, Q_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$P_1Q_1 + \cdots + P_nQ_n = 1. \tag{6.113}$$

Démonstration. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est principal (lemme 3.98). La proposition 3.59 s'applique donc. □

Deux polynômes P et Q ne sont donc pas premiers entre eux si il existe des polynômes x et y tels que l'identité de Bézout soit vérifiée :

EqkbbzAj

$$xP + yQ = 0; \tag{6.114}$$

cette dernière pourra être écrite en termes de la matrice de Sylvester, voir sous-section 8.2.6.

LemuALZHn

Lemme 6.48.
Soient $(P_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes étrangers deux à deux. Alors les polynômes

$$Q_i = \prod_{j \neq i} P_j \tag{6.115}$$

sont étrangers entre eux[21]*.*

LemzwkYdn

Lemme 6.49 ([189])**.**
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $\mathbb{A} \subset \mathbb{K}$ un sous anneau de $\mathbb{K}$. Alors $\mathbb{A}[X]$, vu comme idéal de $\mathbb{K}[X]$, est un idéal premier.

En d'autres termes, si $\phi \in \mathbb{K}[X]$, et si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ unitaire tel que $\phi Q \in \mathbb{A}[X]$, alors $\phi \in \mathbb{A}[X]$.

6.3.4 Lemme et théorème de Gauss

ThoLLgIsig

Théorème 6.50 (Théorème de Gauss)**.**
Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que P soit premier avec Q et divise QR. Alors P divise R.

Démonstration. Étant donné que P est premier avec Q, le théorème de Bézout[22] nous donne $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PU + QV = 1$. De plus il existe un polynôme S tel que $PS = QR$. En multipliant l'identité de Bézout par R, nous obtenons

$$R = PUR + QVR = PUR + VPS = P(UR + VS), \tag{6.116}$$

ce qui signifie que P divise R. □

Le lemme suivant est une généralisation du lemme de Gauss dans $\mathbb{Z}$ (lemme 3.60).

LemEfdkZw

Lemme 6.51 (Lemme de Gauss[137])**.**
Soient les polynômes unitaires $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$. Si $PQ \in \mathbb{Z}[X]$, alors P et Q sont tous deux dans $\mathbb{Z}[X]$.

[21] Et non seulement deux à deux.
[22] théorème 6.47.

Démonstration. Soit $a > 0$ le plus petit entier tel que $aP \in \mathbb{Z}[X]$ (c'est le PPCM des dénominateurs) et de la même façon $b > 0$ le plus petit entier tel que $bQ \in \mathbb{Z}[X]$. On pose $P_1 = aP$ et $Q_1 = bQ$.

Si $ab = 1$, alors $a = b = 1$ et nous avons tout de suite $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$. Nous supposons donc $ab > 1$ et nous considérons p, un diviseur premier de ab. Ensuite nous considérons la projection

$$\pi_p \colon \mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]. \tag{6.117}$$

Par définition $abPQ = P_1Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$; en prenant la projection,

$$\pi_p(P_1)\pi_p(Q_1) = \pi_p(P_1Q_1) = \pi_P(ab)\pi_p(PQ) = 0 \tag{6.118}$$

parce que $\pi_p(ab) = 0$. Étant donné que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ est intègre (théorème 3.92), nous avons soit $\pi_p(P_1) = 0$ soit $\pi_p(Q_1) = 0$. Supposons pour fixer les idées que $\pi_p(P_1) = 0$. Alors $P_1 = pP_2$ pour un certain $P_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Par ailleurs P est unitaire et $P_1 = aP$, donc le coefficient de plus haut degré de P_1 est a, et nous concluons que p divise a.

Mettons $a = pa'$. Dans ce cas, $pa'P = P_1 = pP_2$, et donc $a'P = P_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Cela contredit la minimalité de a. □

6.3.5 Polynômes sur un corps et pgcd

Nous savons qu'un corps est un anneau intègre (lemme 1.336). De plus l'ensemble des polynômes sur un anneau intègre est lui-même un anneau intègre (théorème 3.92). Donc la notion de pgcd à utiliser dans le cas de $\mathbb{K}[X]$ est celle de la définition 1.105.

LEMooXISOooNAMeVX

Lemme 6.52 (Unicité du pgcd à inversibles près)**.**
Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $S \subset \mathbb{K}[X]$.

ITEMooARLJooOQvBcw

(1) Si δ_1 et δ_2 sont des pgcd[23] de S, alors $\delta_1 = k\delta_2$ avec $k \in \mathbb{K}$.

(2) Il existe un unique polynôme unitaire dans $\gcd(S)$.

Démonstration. Nous savons que δ_1 est un pgcd de S, mais que δ_2 divise S. Donc $\delta_2 \mid \delta_1$. De la même manière, $\delta_1 \mid \delta_2$. Il existe donc $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\delta_1 = A\delta_2$ et $\delta_2 = B\delta_1$. En substituant,

$$\delta_1 = AB\delta_1. \tag{6.119}$$

Mais $\mathbb{K}[X]$ possède la propriété de simplification par la proposition 1.335(3). Donc $AB = 1$. Cela signifie entre autres que A et B sont des inversibles de $\mathbb{K}[X]$.

Or les seuls inversibles dans $\mathbb{K}[X]$ sont les éléments de $\mathbb{K}$; si vous en doutez, pensez que le degré de AB est supérieur ou égal à celui de A.

En ce qui concerne l'existence et l'unicité d'un polynôme unitaire dans $\gcd(S)$. Existence : si $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \in \gcd(S)$, alors le polynôme P/a_n est unitaire et également dans $\gcd(S)$. Unicité : supposons que P est unitaire dans $\gcd(S)$ et que Q est dans $\gcd(S)$. Il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $Q = kP$. Vu que P est unitaire, Q ne l'est pas. □

NORMooUJDJooWfijxT

6.53.
En général, lorsque nous dirons « le » pgcd d'un ensemble de polynômes, nous parlerons du pgcd unitaire, qui existe et est bien défini par le lemme 6.52. En particulier, si P et Q sont des polynômes, nous notons $\gcd(P, Q)$ l'unique polynôme unitaire parmi les PGCD de P et Q.

LEMooIAGMooHUQtUs

Lemme 6.54 ([190])**.**
Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$, deux polynômes quelconques $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et un polynôme unitaire G.

Nous avons $G = \gcd(A, B)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = G$,

(2) G divise A et B.

Démonstration. Une implication dans chaque sens.

(1) $\Rightarrow$

Si G est le pgcd de A et B, il est clair que $G|A$ et $G|B$. Il reste donc à montrer l'existence des polynômes U et V vérifiant $AU + BV = G$. Puisque G divise A et B, il existe des polynômes A_1, B_1 tels que $A = GA_1$ et $B = GB_1$.

[23] Définition 1.105.

Nous montrons que les polynômes A_1 et B_1 sont premiers entre eux. S'ils ont un diviseur commun D, alors GD est un diviseur commun à A et B. Or, G est le pgcd de A et B donc $GD|G$; D ne peut être qu'un polynôme constant (c'est-à-dire un élément de $\mathbb{K}$). Mais comme G est unitaire, le coefficient du terme de plus haut degré de GD doit être 1. Donc $D = 1$. L'élément 1 est l'unique diviseur commun de A_1 et B_1 ; donc A_1 et B_1 sont bien premiers entre eux.

D'après le théorème de Bézout 6.47, il existe donc U et V tels que $A_1U + B_1V = 1$. En multipliant par G, nous obtenons l'égalité voulue : $AU + BV = G$.

(2) $\Leftarrow$

Si G vérifie les deux conditions, montrons que G est le pgcd de A et B. Nous savons déjà (par hypothèse) que G divise A et B, il reste à montrer que tous les diviseurs commun à A et B divisent aussi G. Soit donc D un diviseur commun à A et B : il existe A_1 et B_1 tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$. Nous savons que $G = AU + BV$ donc $G = D(A_1U + B_1V)$, et $D|G$.

Par définition, G est bien le pgcd de A et B.

□

Notons qu'en supprimant la condition d'unitarité de G, le résultat tient presque : il suffit de remplacer partout « le pgcd » par « un pgcd ».

LEMooVFBUooLoaOGr

Lemme 6.55 ([191])**.**
Soit un corps $\mathbb{K}$. Soient des polynôme P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. Si S est un diviseur commun de P et Q, alors

ITEMooZTCCooPBqzNE

(1) S *divise* $\operatorname{pgcd}(P, Q)$

ITEMooIIINooUZVtAb

(2) $\deg(S) \leqslant \deg\big(\operatorname{pgcd}(P, Q)\big)$.

Démonstration. Il faut bien relire la définition 1.105 du pgcd ; en particulier le point (2) dit exactement notre point (1).

Étant donné que S divise $\operatorname{pgcd}(P, Q)$ nous avons automatiquement que le degré de S est plus petit que celui de $\operatorname{pgcd}(P, Q)$. □

LEMooGNAMooXRpgBn

Lemme 6.56 ([190])**.**
Soient deux polynômes A, B premiers entre eux. Si le polynôme P est divisible par A et par B alors P est divisible par AB.

Démonstration. Comme $A \mid P$, il existe $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ_1$. Mais B divise $P = AQ_1$ alors que B est premier avec A ; donc d'après le théorème de Gauss 6.50 : $B|Q_1$.

Il existe donc $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q_1 = BQ_2$. On a donc $P = ABQ_2$: P est bien divisible par AB. □

LemUELTuwK

Lemme 6.57 ([190])**.**
Quelques propriétés du PGCD[24] *dans les polynômes. Soient des polynômes $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$.*

ITEMooBPOZooYeFGjl

(1) Nous avons l'égalité[25]

$$\operatorname{pgcd}(P, PQ + R) = \operatorname{pgcd}(P, R). \tag{6.120}$$

ITEMooUVGRooNSGDZn

(2) Si Q et R sont premiers entre eux,

$$\operatorname{pgcd}(P, QR) = \operatorname{pgcd}(P, Q)\operatorname{pgcd}(P, R) \tag{6.121}$$

ITEMooYXAHooXibkgV

(3) Si P et Q sont premiers entre eux,

$$\operatorname{pgcd}(P, QR) = \operatorname{pgcd}(P, R) \tag{6.122}$$

Démonstration. Dans la suite si A et B sont des polynômes, nous dirons « les diviseurs de $\{A, B\}$ » pour parler des diviseurs communs de A et B.

[24] Définition 1.105.
[25] Notez l'analogie avec le lemme 3.7.

(1) **Pour (1)**

Nous montrons que $\{P, PQ+R\}$ a les mêmes diviseurs que $\{P, R\}$.

D'une part, si $A \mid \{P, PQ+R\}$, alors il existe des polynômes B_1 et B_2 tels que $P = AB_1$ et $PQ+R = AB_2$. Donc

$$R = AB_2 - PQ = AB_2 - AB_1Q = A(B_2 - B_1Q), \tag{6.123}$$

et nous concluons que A divise R.

D'autre part, si $A \mid \{P, R\}$ alors il existe des polynômes B_1 et B_2 tels que $P = AB_1$ et $R = AB_2$. Donc

$$PQ + R = AB_1Q + AB_2 = A(B_1Q + B_2), \tag{6.124}$$

et A divise $PQ + R$.

Conclusion : les paires $\{P, PQ + R\}$ et $\{P, R\}$ ont même ensemble de diviseurs, et donc même pgcd.

(2) **Pour (2)**

Nous avons trois polynômes P, Q, R et nous savons que Q et R sont premiers entre eux. Nous notons : $G_1 = \text{pgcd}(P, Q)$ et $G_2 = \text{pgcd}(P, R)$. Il faut montrer que G_1G_2 est le pgcd de P et QR ; pour cela nous allons utiliser le lemme 6.54.

(2a) $\exists U, V$ **tels que** $G_1G_2 = PU + QRV$

Puisque $G_1 = \text{pgcd}(P, Q)$, il existe U_1 et V_1 tels que $G_1 = PU_1 + QV_1$ (lemme 6.54). On a de même : $G_2 = PU_2 + RV_2$. En prenant le produit :

$$G_1G_2 = (PU_1 + QV_1)(PU_2 + RV_2) = P(PU_1U_2 + RU_1V_2 + QV_1V_2) + QR(V_1V_2). \tag{6.125}$$

Donc c'est bon pour ce point.

(2b) G_1 **et** G_2 **sont premiers entre eux**

Si D est un diviseur commun à G_1 et G_2, alors D divise Q et R qui sont premiers entre eux ; D ne peut être qu'un polynôme constant. Tous les diviseurs communs de G_1 et G_2 sont dans $\mathbb{K}$. Mais le pgcd est par définition un diviseur commun unitaire, donc $\text{pgcd}(G_1, G_2) = 1$. Cela signifie que G_1 et G_2 sont premiers entre eux (définition 1.364).

(2c) $G_1G_2 \mid QR$ En effet : $G_1|Q$ et $G_2|R$ donc $G_1G_2|QR$.

(2d) $G_1G_2 \mid P$ Le polynôme P est divisible par G_1 et par G_2, et de plus G_1 et G_2 sont premiers entre eux. Donc le lemme 6.56 conclut que P est divisible par G_1G_2.

(3) **(3)**

Supposons d'abord que $A \in \mathbb{K}[X]$ divise P et QR. Le théorème de Bézout 6.47 assure l'existence de polynômes U et V tels que $PU + QV = 1$. Ensuite l'hypothèse de division nous donne des polynômes B_1 et B_2 tels que $P = AB_1$ et $QR = AB_2$. Nous avons :

$$1 = PU + QV = AB_1U + QV. \tag{6.126}$$

Cela prouve que A est premier avec Q grâce encore à Bézout, mais dans l'autre sens. Donc A est premier avec Q et $A \mid QR$. Donc $A|R$ par le théorème de Gauss 6.50.

Dans l'autre sens, si $A|R$ alors on a évidemment : $A|QR$.

Les diviseurs de $\{P, QR\}$ sont exactement les diviseurs de $\{P, R\}$. En conséquence, nous concluons que les paires $\{P, QR\}$ et $\{P, R\}$ ont le même pgcd.

□

6.4 Extension de corps

SECooLQVdmoBGdqR

Lemme 6.58.
Soit $\mathbb{L}$ un corps[26] *fini et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$. Alors il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que*

EqUgqlJQ

$$\text{Card}(\mathbb{L}) = \text{Card}(\mathbb{K})^s. \tag{6.127}$$

Démonstration. Le corps $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si s est la dimension alors nous avons la formule (6.127) parce que chaque élément de $\mathbb{L}$ est un s-uple d'éléments de $\mathbb{K}$. □

[26] Définition 1.390.

DEFooFLJJooGJYDOe

Définition 6.59 ([192]).
*Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Une **extension** de $\mathbb{K}$ est un couple $(\mathbb{L}, j)$ où $\mathbb{L}$ est un corps et $j : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ est un morphisme de corps.*

Nous identifions le plus souvent $\mathbb{K}$ avec $j(\mathbb{K}) \subset \mathbb{L}$, mais il faut savoir que le corps $\mathbb{L}$ étendant $\mathbb{K}$ n'est pas toujours un sur-corps de $\mathbb{K}$. En particulier, l'ensemble $\mathbb{L}$ peut ne pas être une extension de l'ensemble $\mathbb{K}$.

LemooOLIIooXzdppM

Lemme-Définition 6.60.
Si $(\mathbb{L}, i)$ est une extension de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{L}$ devient un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si nous posons

$$\lambda \cdot x = i(\lambda)x \tag{6.128}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{L}$. La multiplication du membre de droite est celle du corps $\mathbb{L}$.

DefUYiyieu

Définition 6.61.
*Le **degré** de $\mathbb{L}$ est la dimension de cet espace vectoriel. Il est noté $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$; notons qu'il peut être infini.*

PROPooCFGUooCQqWZd

Proposition 6.62.
Le corps $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$ et son degré[27] est $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.

PROPooPGSCWBSMqTM

Proposition 6.63 (Composition des degrés[193]).
Si $\mathbb{L}_2$ est une extension de $\mathbb{L}_1$ qui est elle-même une extension de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{L}_2$ est une extension de $\mathbb{K}$ et on a :

EQooOLLQooFdYtnh

$$[\mathbb{L}_2 : \mathbb{K}] = [\mathbb{L}_2 : \mathbb{L}_1][\mathbb{L}_1 : \mathbb{K}]. \tag{6.129}$$

Dans ce cas, si $\{v_i\}_{i\in I}$ est une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{L}_1$ et si $\{w_\alpha\}_{\alpha\in A}$ est une $\mathbb{L}_1$-base de $\mathbb{L}_2$ alors $\{v_i w_\alpha\}_{\substack{i\in I\\ \alpha\in A}}$ est une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{L}_2$.

Notons que la formule (6.129) n'est pas très instructive dans le cas des extensions non finies. La seconde partie, sur les bases, est en réalité nettement plus intéressante.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{L}_2$. Puisque les w_α forment une $\mathbb{L}_1$-base de $\mathbb{L}_2$, il existe des $a_\alpha \in \mathbb{L}_1$ tels que

$$a = \sum_\alpha a_\alpha w_\alpha. \tag{6.130}$$

Mais les v_i forment une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{L}_1$, donc chacun des a_α peut être décomposé comme $a_\alpha = \sum_i a_{\alpha i} v_i w_\alpha$. Donc :

$$a = \sum_{\alpha i} a_{\alpha i} v_i w_\alpha, \tag{6.131}$$

qui donne une décomposition de a en éléments de $\{v_i w_\alpha\}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. La partie proposée est donc génératrice.

Pour prouver qu'elle est également libre, nous supposons avoir des éléments $a_{\alpha i} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{\alpha i} a_{\alpha i} v_i w_\alpha = 0. \tag{6.132}$$

En récrivant sous la forme

$$\sum_\alpha \Big(\sum_i a_{\alpha i} v_i \Big) w_\alpha = 0, \tag{6.133}$$

nous reconnaissons une combinaison linéaire nulle des w_α à coefficients dans $\mathbb{L}_1$. Les coefficients sont donc nuls : $\sum_i a_{\alpha i} v_i = 0$. C'est une combinaison linéaire nulle des v_i à coefficients dans $\mathbb{K}$. Comme les v_i forment une base, les coefficients sont nuls : $a_{\alpha i} = 0$. □

6.4.1 Extension et polynôme minimal

DefCVMooFGSAgL

Lemme-Définition 6.64 (Polynôme minimal).
Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{L}$. Nous considérons la partie

$$I_a = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(a) = 0\} \tag{6.134}$$

que nous supposons non réduite à $\{0\}$[28]

[27] Définition 6.61.

[28] La non trivialité de I_a est une vraie hypothèse. En effet si nous prenons $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et l'extension $\mathbb{L} = \mathbb{R}$, alors il suffit de prendre un réel a non algébrique sur $\mathbb{Q}$ pour que I_a soit réduit au seul polynôme identiquement nul.

ITEMooUNLCooIfYZry
ITEMooDCDRooPDnnbu
ITEMooXFYQooTuMzIu

(1) *La partie I_a est un idéal dans $\mathbb{K}[X]$,*

(2) *la partie I_a est un idéal principal dans $\mathbb{K}[X]$,*

(3) *l'idéal I_a possède un unique générateur unitaire.*

*Cet unique générateur unitaire est le **polynôme minimal** de a sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Soit $P \in I_a$: $P(a) = 0$. Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ alors la proposition 1.477 nous indique que

$$(PQ)(a) = P(a)Q(a) = 0. \tag{6.135}$$

Donc $PQ \in I_a$. Comme de plus I_a est clairement vectoriel, I_a est un idéal.

Notez que nous avons utilisé la règle du produit nul justifiée par le fait que $\mathbb{K}$ soit un corps[29] et donc soumis au point (3) de la proposition 1.335.

(2) **Pour (2)** Nous savons par le théorème 6.43 que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal. En particulier, tous ses idéaux sont principaux, c'est dans la définition 1.349 d'un anneau principal.

(3) **Pour (3)** Le théorème 6.43(3) nous informe alors que I_a possède un unique générateur unitaire.

□

Si nous avons un corps et un élément dans une extension du corps, il n'est pas autorisé de dire « soit le polynôme minimal de cet élément dans le premier corps » parce qu'il n'existe peut-être pas de polynôme annulateur.

6.65.
Dans le cas des opérateurs sur un espace de dimension finie (par exemple les matrices), il existe toujours un polynôme minimal, comme nous le verrons dans le lemme 8.94.

Exemple 6.66.
Le polynôme minimal dépend du corps sur lequel on le considère. Par exemple le nombre imaginaire pur i accepte $X - i$ comme polynôme minimal sur $\mathbb{C}$ et $X^2 + 1$ sur $\mathbb{Q}[X]$. △

PropRARooKavaIT
Proposition 6.67 ([1]).
Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{L}$ dont le polynôme minimal sur $\mathbb{K}$ est $\mu_a \in \mathbb{K}[X]$. Alors ItemDOQooYpLvXri

(1) *le polynôme μ_a est irréductible[30] sur $\mathbb{K}$;*

(2) *Le polynôme μ_a est premier[31] avec tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non annulateur de a.*

Démonstration. Une chose à la fois.

(1) D'abord le polynôme μ_a n'est pas inversible parce que seuls les éléments de $\mathbb{K}$ (ceux de degré zéro) peuvent être inversibles[32]. Mais ces polynômes sont constants et ne peuvent donc pas être des polynômes annulateurs de quoi que ce soit.

Ensuite, supposons la décomposition $\mu_a = PQ$ avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. En évaluant cette égalité en a nous avons

$$0 = P(a)Q(a). \tag{6.136}$$

Puisque nous sommes sur un corps, nous avons la règle du produit nul[33] et nous déduisons que soit $P(a)$ soit $Q(a)$ est nul, ou les deux. Pour fixer les idées, nous supposons $P(a) = 0$.

Dans ce cas, P fait partie de l'idéal annulateur de a, lequel idéal est engendré par μ_a. Donc il existe $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = S\mu_a$. En récrivant $\mu_a = PQ$ avec cela nous avons :

$$\mu_a = S\mu_a Q \tag{6.137}$$

ou encore : $SQ = 1$, ce qui signifie que S et Q sont dans $\mathbb{K}$ et inversibles.

Nous concluons que μ_a ne peut pas être écrit sous forme de produit de deux non inversibles.

[29] Si vous connaissez un contre-exemple à cette proposition dans le cas où $\mathbb{K}$ serait remplacé par un anneau, écrivez-moi.
[30] Définition 1.327.
[31] Définition 3.99.
[32] Et d'ailleurs, le sont, mais ce n'est pas important ici.
[33] Parce qu'un corps est un anneau intègre par le lemme 1.336 et qu'un anneau intègre est justement un anneau sur lequel nous avons la règle du produit nul, voir la définition 1.335.

(2) Soit Q un polynôme non annulateur de a. Soit aussi un diviseur commun P de Q et μ_a dans $\mathbb{K}[X]$. Nous devons prouver que P est un inversible, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{K}$ (le fait que P ne soit pas le polynôme nul est évident). Nous avons $\mu_a = PR_1$ et $Q = PR_2$ pour certains polynômes $R_1, R_2 \in \mathbb{K}[X]$. Puisque μ_a est irréductible par (1), il n'est pas produit de deux non inversibles. En d'autres termes, soit P soit R_1 est inversible. Si P n'est pas inversible, alors R_1 est inversible ; disons $R_1 = k \in \mathbb{K}$. Alors

$$0 = \mu_a(a) = P(a)k, \tag{6.138}$$

donc $P(a) = 0$. Mais alors

$$Q(a) = P(a)R_2(a) = 0, \tag{6.139}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse selon laquelle Q n'était pas annulateur de a.

Nous retenons donc que P est inversible, ce qu'il fallait montrer.

□

DEFooJQQYooMKqWov

Définition 6.68.
*Deux éléments α et β dans $\mathbb{L}$ sont dit **conjugués** s'ils ont même polynôme minimal*[34]*. Par exemple i et $-i$ sont conjugués dans $\mathbb{C}$ vu comme extension de $\mathbb{Q}$.*

6.4.2 Extensions algébriques et éléments transcendants

6.4.2.1 Éléments algébriques et transcendants

6.69.
Mise en garde pour les gens qui aiment avoir des notations précises. Dans les lemmes 6.71 et 6.73 ainsi que dans la définition 6.75 il faut garder en tête qu'une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ est une application $\iota\colon \mathbb{K} \to \mathbb{L}$. Il n'est pas spécialement vrai que $\mathbb{K}$ est un sous-sensemble de $\mathbb{L}$.

Pour être rigoureux, beaucoup d'énoncés devraient contenir plus d'applications ι un peu partout.

DEFooBBYGooWoOloR

Définition 6.70.
L'ensemble $A[X]$ devient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec la définition

$$(\lambda P)_k = \lambda P_k. \tag{6.140}$$

Voici une définition d'un élément algébrique sur un corps. Une caractérisation plus « pratique » sera donnée dans le lemme 6.73.

LEMooLVPLooEkWYDN

Lemme-Définition 6.71 (Élément algébrique et transcendant[194])**.**
Soit une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{L}$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{L} \\ P &\mapsto P(\alpha). \end{aligned} \tag{6.141}$$

Alors

(1) L'application φ est un morphisme d'anneaux[35]*.*

(2) L'application φ est un morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

*Si φ est injective, nous disons que α est **transcendant**. Sinon, nous disons qu'il est **algébrique**.*

Démonstration. Le fait que φ soit un morphisme d'anneaux est le lemme 1.477 déjà prouvé.

Pour le morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il faut seulement ajouter le calcul

$$\varphi(\lambda P) = (\lambda P)(\alpha) = \lambda P(\alpha) = \lambda\varphi(P). \tag{6.142}$$

Notons la justification suivante qui n'est pas tout à fait triviale :

$$(\lambda P)(\alpha) = \sum_k (\lambda P)_k \alpha^k = \sum_k \lambda P_k \alpha^k = \lambda P(\alpha) \tag{6.143}$$

qui utilise la définition 6.70. □

[34] Définition 6.64.
[35] Définition 1.98.

Exemple 6.72.
L'injectivité de φ n'est pas automatique. Prenons par exemple $\mathbb{L} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{R}$. Les polynômes dans $\mathbb{Q}[X]$ ont des degrés arbitrairement élevés en X, tandis que les éléments de $\mathbb{L}$ n'ont pas de degré très élevés en $\sqrt{2}$ parce que $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$. L'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ne contient donc que des éléments de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

Si par contre $x_0 \in \mathbb{R}$ n'est racine d'aucun polynôme (cela existe parce que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable), alors $\mathbb{Q}[x_0]$ contient tous les $\sum_{k=0}^{N} a_k x_0^k$ avec N arbitrairement grand. Et tous ces nombres sont différents. △

Le lemme suivant donne une caractérisation d'élément algébrique moins abstraite que la définition 6.71.
LEMooTZSSooZmwYji

Lemme 6.73.
Soit $\mathbb{K}$, un corps et $\mathbb{L}$, une extension de $\mathbb{K}$. Un élément $\alpha \in \mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Démonstration. Nous considérons l'application φ de la définition 6.71. Si φ n'est pas injective, c'est qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $\varphi(P) = 0$. Dans ce cas, $P(\alpha) = 0$.

À l'inverse si il existe P non nul dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$, alors $\varphi(P) = 0$ et φ n'est pas injective. □
DEFooYZOYooAesmnP

Définition 6.74.
*Un corps $\mathbb{K}$ est **algébriquement clos** si tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{K}$ contient au moins une racine dans $\mathbb{K}$.*

Nous verrons dans le théorème de d'Alembert 12.92 que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos.
DEFooREUHooLVwRuw

Définition 6.75 (Extension algébrique, clôture algébrique)**.**
Soient un corps $\mathbb{K}$ et une extension $\alpha\colon \mathbb{K} \to \mathbb{L}$.

*(1) L'extension $\mathbb{L}$ est une extension **algébrique** de $\mathbb{K}$ si tous ses éléments sont algébriques[36] sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire sont racines de polynômes à coefficients dans $\alpha(\mathbb{K})$, voir le lemme 6.73.*
ITEMooEIWVooVjJRoR

*(2) L'extension $\mathbb{L}$ est **algébriquement close** si le corps $\mathbb{L}$ est algébriquement clos (définition 6.74).*

*(3) L'extension $\mathbb{L}$ est une **clôture algébrique** du corps $\mathbb{K}$ si elle est une extension algébrique qui est algébriquement close.*

6.76.
Donc une extension est algébrique si elle contient seulement des racines de polynômes ; elle est close si elle contient au moins une racine de chaque polynôme. L'extension est une clôture algébrique si elle est les deux en même temps.

6.77 (Unicité)**.**
Le théorème de Steinitz 6.134 donnera une unicité de la clôture algébrique.

Exemple 6.78.
Le corps $\mathbb{R}$ n'est pas une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. En effet il existe seulement une infinité *dénombrable* de polynômes dans $\mathbb{Q}[X]$ et donc une infinité dénombrable de racines de tels polynômes. Toute extension algébrique de $\mathbb{Q}$ est donc dénombrable. Voir aussi la proposition 6.130. △
LEMooEYRSooUREeDl

Lemme 6.79.
Un corps est algébriquement clos si et seulement si tous ses polynômes sont scindés[37].

Démonstration. Si tout polynôme est scindé, tout polynôme possède des racines ; c'est l'autre sens qui est plus consistant.

Soit un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$. Nous allons effectuer une récurrence sur le degré des polynômes. Si P est un polynôme de degré 1, alors il est scindé.

Nous supposons que tous les polynômes de degré $n-1$ sont scindés. Soit un polynôme P de degré n. Le corps étant algébriquement clos, le polynôme P a une racine que nous notons $a_n \in \mathbb{K}$. La proposition 3.115 nous explique qu'il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P = (X - a_n)Q$.

Par hypothèse de récurrence, le polynôme Q est scindé : il existe $\{a_i\}_{i=1,\dots,n-1}$ dans $\mathbb{K}$ tels que $Q = \prod_{i=1}^{n-1}(X - a_i)$. Au final,

$$P = (X - a_n)Q = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k) \tag{6.144}$$

[36] Définition 6.71.
[37] Définition 6.39

et P est scindé. □
LEMooYVHKooWhewKp

Lemme 6.80.
Soient un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. Nous supposons que P est scindé :

$$P = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k). \tag{6.145}$$

Si α est une racine de P, alors α est l'un des a_k.

Démonstration. Dire que α est une racine de P revient à dire que

$$\prod_{k=1}^{n} (\alpha - a_k) = 0 \tag{6.146}$$
EQooXHSCooVdMjva

Un corps est toujours un anneau intègre (lemme 1.336), c'est-à-dire que la règle du produit nul est utilisable. Dans notre cas, le produit nul (6.146) nous indique que $\alpha - a_k = 0$ pour (au moins) un des k. Donc effectivement α est l'un des a_k. □

Lemme 6.81.
Soient un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ ainsi qu'une extension algébrique $\alpha\colon \mathbb{K} \to \mathbb{L}$. Alors $\alpha(\mathbb{K}) = \mathbb{L}$.

Démonstration. Nous allons montrer que tous les éléments de $\mathbb{L}$ sont dans l'image de α. Soit donc $l \in \mathbb{L}$. Puisque l'extension $\alpha\colon \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ est une extension algébrique, il existe un polynôme $P \in \alpha(\mathbb{K})[X]$ tel que $P(l) = 0$.

Étant donné que α est injective, il est possible de considérer le polynôme $Q = \alpha^{-1}(P)$, c'est-à-dire que, si $P = \sum_k a_k X^k$, nous posons $Q = \sum_k \alpha^{-1}(a_k) X^k$.

Le corps $\mathbb{K}$ étant algébriquement clos, le polynôme Q est scindé (proposition 6.79) :

$$Q = \prod_{k=1}^{n} (X - b_k) \tag{6.147}$$

avec $b_k \in \mathbb{K}$. Nous avons alors aussi la factorisation

$$P = \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha(b_k)) \tag{6.148}$$

dans $\mathbb{L}[X]$. Nous avons vu que l était une racine de P. Donc l est un des $\alpha(b_k)$ (lemme 6.80). Cela prouve que $l \in \alpha(\mathbb{K})$. □

6.4.3 Extension algébrique et polynôme minimal

PROPooALFJooDjmIcb

Proposition 6.82 ([119]).
Soit une extension algébrique[38] $\mathbb{L}$ du corps $\mathbb{K}$.

(1) Pour tout $a \in \mathbb{L}$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(a) = 0$.
ITEMooEFNFooKYqXDk

(2) Le polynôme minimal de a dans $\mathbb{K}[X]$ est l'unique polynôme unitaire irréductible annulant a.

Démonstration. Le premier point est seulement la définition 6.75 d'une extension algébrique.

L'idéal annulateur $I_a = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(a) = 0\}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ parce que $\mathbb{L}$ est une extension algébrique. L'existence du polynôme minimal est le lemme 6.64 et le fait qu'il soit irréductible est la proposition 6.67(1).

Ce qui nous intéresse ici est l'unicité. Soit $\mu_1 \in \mathbb{K}[X]$, un polynôme annulateur de a irréductible et unitaire. Puisque $\mu_1 \in I_a$ et que par définition, $I_a = (\mu)$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mu_1 = P\mu$. Comme μ n'est pas inversible et que μ_1 est irréductible, P doit être inversible : $\mu_1 = k\mu$ pour un certain $k \in \mathbb{K}$.

Puisque μ et μ_1 sont unitaires, $k = 1$. Donc $\mu_1 = \mu$. □

[38] Définition 6.75.

LEMooHKTMooKEoOuK

Lemme 6.83.
Soient un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{L}$, un élément algébrique[39] *sur $\mathbb{K}$. Si μ est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}$ alors*

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{K}[\alpha] &\to \mathbb{K}[X]/(\mu)\\ Q(\alpha) &\mapsto \bar{Q}\end{aligned} \tag{6.149}$$

avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ est un isomorphisme de corps et de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Démonstration. D'abord, α est algébrique, donc l'idéal annulateur I_α n'est pas réduit à $\{0\}$, et l'existence d'un polynôme minimal est assurée par le lemme 6.64.

Ensuite, le fait que $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ soit un corps est le corolaire 6.44. Nous montrons à présent que φ est un isomorphisme (d'anneaux) ; cela suffit pour en déduire que $\mathbb{K}[\alpha]$ est également un corps.

Ces préliminaires étant dits, nous commençons.

(1) **Bien définie** Nous devons prouver que φ est bien définie, c'est-à-dire que tout élément de $\mathbb{K}[\alpha]$ peut être écrit sous la forme $Q(\alpha)$ pour un $Q \in \mathbb{K}[X]$, et que si $Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha)$ alors $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$.

Le fait que tous les éléments de $\mathbb{K}[\alpha]$ peuvent être écrits sous la forme $Q(\alpha)$ est la proposition 3.91. Supposons que $Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha)$. Alors nous définissons $R \in \mathbb{K}[X]$ par $Q_1 = Q_2 + R$, et en évaluant cette égalité en α nous avons

$$Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha) + R(\alpha), \tag{6.150}$$

autrement dit $R(\alpha) = 0$. Donc R est dans l'idéal annulateur de α et est donc dans (μ), c'est-à-dire que dans le quotient $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ nous avons $\bar{R} = 0$ et donc $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$.

(2) **Surjective**

Tout élément de $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ est de la forme $\bar{Q}$ pour un $Q \in \mathbb{K}[X]$. Or ces éléments sont ceux de l'ensemble d'arrivée de φ.

(3) **Injective**

Si $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$, alors $Q_1 = Q_2 + R$ avec R dans l'idéal engendré par μ, c'est-à-dire entre autres $R(\alpha) = 0$. Donc $Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha)$.

Nous devons encore montrer que nous avons là un morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

(1) Si $k \in \mathbb{K}$ alors $\varphi\big(kQ(\alpha)\big) = \overline{kQ}$. Mais par définition de la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}[X]/(\mu)$, $\overline{kQ} = k\bar{Q}$ (vérifier que cette définition de la multiplication par un scalaire sur $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ est correcte).

(2) Nous avons aussi $\varphi\big(Q_1(\alpha) + Q_2(\alpha)\big) = \varphi\big((Q_1 + Q_2)(\alpha)\big) = \overline{Q_1 + Q_2} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2$.

□

6.4.4 Extensions et polynômes

Nous savons déjà depuis la définition 1.473 ce qu'est $A[X]$ pour tout anneau A et donc, à fortiori, pour un corps.

DEFooQPZIooQYiNVh

Définition 6.84.
Soit un corps commutatif[40]*. Nous notons $\mathbb{K}(X)$ le corps des fractions*[41] *de $\mathbb{K}[X]$.*

DEFooZHBZooKlNfGZ

Lemme-Définition 6.85.
Si $R \in \mathbb{K}(X)$, avec $R = P/Q$ et si $\mathbb{L}$ est une extension[42] *de $\mathbb{K}$ contenant l'élément α, alors nous définissons*

$$R(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)^{-1}. \tag{6.151}$$

Cela est une bonne définition au sens où elle ne dépend pas du choix du représentant (P, Q) pris dans la classe P/Q.

[39] Définition 6.71.
[40] Sauf mention du contraire, tous les corps du Frido sont commutatifs.
[41] Définition 1.483.
[42] Définition 6.59.

Démonstration. Supposons $R = P_1/Q_1 = P_2/Q_2$. Par définition des classes (définition 1.483) nous avons

$$P_1Q_2 = Q_1P_2. \tag{6.152}$$

EQooKHVNooABuHaQ

Puisque l'évaluation est un morphisme $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ [43] nous pouvons évaluer l'équation (6.152) en α :

$$P_1(\alpha)Q_2(\alpha) = Q_1(\alpha)P_2(\alpha). \tag{6.153}$$

EQooJAIGooRADgiD

Cette dernière est une égalité dans le corps $\mathbb{K}$. Nous pouvons donc la multiplier par $Q_2(\alpha)^{-1}Q_1(\alpha)^{-1}$ (et utiliser toutes les hypothèses de commutativité des anneaux et corps) pour obtenir

$$P_1(\alpha)Q_1(\alpha)^{-1} = P_2(\alpha)Q_2(\alpha)^{-1}, \tag{6.154}$$

c'est-à-dire

$$(P_1/Q_1)(\alpha) = (P_2/Q_2)(\alpha). \tag{6.155}$$

□

DEFooVSKGooMyeGel

Proposition-Définition 6.86 ([1])**.**
Soient un corps $\mathbb{K}$, une extension $(\mathbb{L}, j_{\mathbb{L}})$ de $\mathbb{K}$ et un élément $\alpha \in \mathbb{L}$. Nous définissons $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ comme étant l'intersection de tous les sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $j_{\mathbb{L}}(\mathbb{K})$ et α.

Alors

(1) $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$,

(2) $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ est une extension[44] de $\mathbb{K}$.

Démonstration. Nous commençons par prouver que $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ est bien un corps. Si $a, b \in \mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ alors il suffit de calculer ab, $a+b$ et a^{-1} dans n'importe quel sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α ; nous avons une garantie que a, b, ab, $a+b$ et a^{-1} sont dans tous les tels sous-corps.

Pour prouver que $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ est bien une extension, nous devons trouver un morphisme de corps $j\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$. On constate que prendre $j = j_{\mathbb{L}}$ fonctionne parce que par définition, $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ est une partie de $\mathbb{L}$ contenant l'image de $j_{\mathbb{L}}$. □

LEMooHZLCooPLHkLS

Lemme 6.87.
Soit n tel que $\sqrt{n}$ ne soit pas un rationnel. Si $\alpha \in \{a+b\sqrt{n}\}_{a,b\in\mathbb{Q}}$, alors il existe un unique choix $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ tel que

$$\alpha = x + y\sqrt{n}. \tag{6.156}$$

Démonstration. L'existence est dans la définition de α. Il s'agit de voir l'unicité. Supposons $x + y\sqrt{n} = a + b\sqrt{n}$ avec $x, y, a, b \in \mathbb{Q}$. Si $b \neq y$ nous pouvons écrire

$$\sqrt{n} = \frac{x-a}{b-y}. \tag{6.157}$$

Comme $\sqrt{n}$ n'est pas un rationnel, une telle écriture est impossible. Donc $b = y$. Nous avons alors $x+y\sqrt{n} = a + y\sqrt{n}$ et du coup aussi $x = a$. □

Exemple 6.88.
Nous avons

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}} = \{a + b\sqrt{2}\}_{a,b\in\mathbb{Q}} \tag{6.158}$$

où à droite nous calculons les sommes et les produits dans $\mathbb{R}$. Le tout est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui se révèle être un corps contenant $\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}$.

En particulier, dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}}$ nous avons $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$. △

LEMooKVPZooPqPrce

Lemme 6.89.
Les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}$ ne sont pas isomorphes.

Démonstration. Supposons l'existence d'un morphisme de corps[45]

$$\psi\colon \mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}} \to \mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}. \tag{6.159}$$

[43] Lemme 1.477. Certes ce lemme ne parle que d'anneaux, mais à y bien penser, dans le passage de (6.152) à (6.153), nous ne considérons que les structures d'anneaux sur $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}$.
[44] Définition 6.59.
[45] Définition 1.98. Oui, c'est un bête morphisme d'anneaux. Il n'y a pas plus de structure dans un corps que dans un anneau.

Nous notons « 1 » à la fois le neutre de la multiplication dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}$ (qui s'avèrent être les mêmes en tant qu'élément de $\mathbb{R}$, mais ça n'a pas d'importance ici).

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}}$ tel que $\alpha^2 - 2 = 0$. Alors nous avons aussi

$$\psi(\alpha)^2 - 2 = \psi(\alpha^2) - \psi(2) = \psi(\alpha^2 - 2) = \psi(0) = 0. \tag{6.160}$$

Donc $\psi(\alpha)$ est un élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}$ qui est une racine de $X^2 - 1$.

Or un tel élément n'existe pas dans $\mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}$ parce que nous savons que dans $\mathbb{R}$ entier, il n'y a que deux racines : $\pm\sqrt{2}$, et aucune des deux n'est dans $\mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}$. □

EXooJRSUooYhAZkR

Exemple 6.90.

Est-ce que $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ dépend réellement de $\mathbb{L}$? Si $\mathbb{L}_2$ est une extension de $\mathbb{L}$ alors nous avons évidemment[46] $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}_2} = \mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$.

Nous commençons par construire un corps $\mathbb{K}$ un peu idiot qui, comme ensemble, est comme $\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire la partie

$$\{a + b\sqrt{2}\}_{a,b\in\mathbb{Q}}, \tag{6.161}$$

de $\mathbb{R}$.

Mais cette fois nous définissons la multiplication suivante :

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + 3bd + (ad + bc)\sqrt{2}. \tag{6.162}$$

C'est un corps parce que tout élément non nul est inversible. En effet, l'équation

$$(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1 \tag{6.163}$$

EQooIZLEooLPOBcC

donne

$$\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.164}$$

Ce système a une unique solution si et seulement si $\det \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} = 0$. Cela survient si et seulement si

$$a^2 - 3b^2 = 0. \tag{6.165}$$

Les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$ sont $a = \pm\sqrt{3}|b|$. Dès que a ou b est non nul, cela ne peut pas satisfaire $a, b \in \mathbb{Q}$. Donc le déterminant est toujours non nul et il existe $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que (6.163) soit satisfaite.

Tout cela nous a donné un corps $\mathbb{K}$ dont $\mathbb{Q}$ est un sous-corps et qui contient l'élément $\sqrt{2}$ de $\mathbb{R}$. Il n'est cependant pas un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Ce corps est isomorphe à $\mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}$. En effet, nous montrons que

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{K} &\to \mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}} \\ a + b\sqrt{2} &\mapsto a + b\sqrt{3} \end{aligned} \tag{6.166}$$

est un isomorphisme de corps. Pour le produit, nous avons

$$\begin{aligned} \psi\big((a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})\big) &= \psi\big(ac + 3bd + (ad + bc)\sqrt{2}\big) && \text{(6.167a)} \\ &= ac + 3bd + (ad + bc)\sqrt{3} && \text{(6.167b)} \\ &= (a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) && \text{(6.167c)} \\ &= \psi(a + b\sqrt{2})\psi(c + d\sqrt{2}). && \text{(6.167d)} \end{aligned}$$

SUBEQooQSZBooHZDTKo
SUBEQooPEKHooNPcIjE
SUBEQooIGBZooMwrmFe

Remarques :

- L'application ψ est bien définie grâce au lemme 6.87 couplé au théorème 3.32 appliqué à $n = 2$ et $n = 3$.
- Dans le membre de gauche de (6.167a), $b\sqrt{2}$ est un produit dans $\mathbb{R}$ (d'où l'importance du lemme 6.87 qui permet de re-séparer les éléments de $\mathbb{R}$ partie rationnelle et partie multiple de $\sqrt{2}$), et le produit entre $(a + b\sqrt{2})$ et $(c + d\sqrt{2})$ est un produit dans $\mathbb{K}$.
- Dans (6.167b) et (6.167c), tous les produits sont dans $\mathbb{R}$.

[46] Vérifiez-le tout de même.

En comparant avec le lemme 6.89, nous avons alors

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{K}} = \mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}} \neq \mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}} \tag{6.168}$$

△

6.91.
Nous allons encore enfoncer le clou sur le fait que $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ dépend de $\mathbb{L}$.

Le fait est que si on y pense, l'objet $\sqrt{2}$ n'a aucun rapport avec $\mathbb{Q}$. En effet les objets de $\mathbb{Q}$ sont des classes d'équivalence de couples d'éléments de $\mathbb{Z}$, alors que l'élément $\sqrt{2}$ est une classe d'équivalence de suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Lorsque nous écrivons $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, nous associons des objets de nature complètement différentes, et il n'y a aucune raison à priori de définir la multiplication entre eux d'une façon plutôt qu'une autre.

Plus généralement, dans ZF (nous faisons semblant de suivre ZF tout en sachant que nous ne savons pas ce que c'est réellement[47]), tout est ensemble. Peut-on dire ce que serait $\mathbb{Q}(I)$ si I est un ensemble quelconque ? Attention : en écrivant $\mathbb{Q}(I)$, nous entendons un corps dont I est un élément, pas un corps qui contiendrait comme éléments tous les éléments de I.

Si I est juste un ensemble, quelle définition donner de I^2 ? Il y a plein de choix et rien ne se dégage clairement comme étant pertinent. Si par contre, en guise de I nous considérons l'ensemble $\sqrt{2}$ (oui, c'est un ensemble : un ensemble de suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$), alors tout de suite nous nous disons que la bonne façon de faire est $\sqrt{2}^2 = 2$. Ce réflexe est juste conditionné par le fait que nous connaissons déjà par ailleurs le corps $\mathbb{R}$. Rien de plus.

Donc oui, $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ dépend de $\mathbb{L}$, mais dans les cas particuliers où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, il y a une égalité implicite $\mathbb{L} = \mathbb{C}$. Cela étant dit, il n'y a plus d'ambiguïté en écrivant $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

EXooKLRBooUswzpV

Exemple 6.92.
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Afin de montrer que $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha)$ avec $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ nous devons montrer que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des polynômes en α. △

DefZCYIbve

Définition 6.93.
Soit une extension[48] *de corps $j : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$. Soit $A \subset \mathbb{L}$.*

ITEMooJEGUooMsDBhF

(1) Nous notons $\mathbb{K}(A)_{\mathbb{L}}$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $j(\mathbb{K})$ et A. C'est l'intersection de tous les sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant A et $j(\mathbb{K})$.

(2) Nous notons $\mathbb{K}[A]_{\mathbb{L}}$ le plus petit sous-anneau de $\mathbb{L}$ contenant $j(\mathbb{K})$ et A. C'est l'intersection de tous les sous-anneaux de $\mathbb{L}$ contenant A et $j(\mathbb{K})$.

*Nous disons que l'extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ est **monogène** ou **simple** si il existe $\theta \in \mathbb{L}$ tel que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\theta)$. Un tel élément θ est dit **élément primitif** de $\mathbb{L}$. Il n'est pas nécessairement unique.*

Le plus souvent, l'indice $\mathbb{L}$ dans $\mathbb{K}(A)_{\mathbb{L}}$ et $\mathbb{K}[A]_{\mathbb{L}}$ est omis parce que le contexte est clair[49], et nous avons même très souvent $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ en tant qu'ensembles. Dans ce cas, l'application j est l'identité et elle sera omise.

Remarque 6.94.
Les ensembles $\mathbb{K}(A)$ et $\mathbb{K}[A]$ sont aussi appelés respectivement corps **engendré** et anneau engendré par A. Cependant il faut bien remarquer que ce sont les parties de $\mathbb{L}$ engendrées par A. Il n'est pas question à priori de parler de corps engendré par A sans dire dans quel corps plus grand nous nous plaçons.

Exemple 6.95.
Nous savons que $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$. Si $a \in \mathbb{R}$ alors $\mathbb{Q}(a)$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}$ et a. △

Exemple 6.96.
Nous avons déjà vu à l'occasion de la définition 1.473 que $A[X]$ est l'anneau de tous les polynômes de degré fini en X. Cela rentre dans le cadre de la définition 6.93 parce qu'un anneau contenant X doit contenir tous les X^n.

Notons que même si $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathbb{K}[X]$ reste un anneau parce qu'un éventuel inverse de X n'est pas dedans[50]. Par contre, $\mathbb{K}(X)$ est un corps parce qu'il contient également les fractions rationnelles. △

[47] En lisant quelques pages de Wikipédia, vous pourrez briller en société, mais ne tentez pas le coup à l'agrégation.
[48] Définition 6.59.
[49] Et je me demande si il est possible de trouver un cas tordu où $\mathbb{K}(A)_{\mathbb{L}} \neq \mathbb{K}(A)_{\mathbb{M}}$. Par exemple lorsque A est dans $\mathbb{L}$ et $\mathbb{M}$, mais que $\mathbb{L}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{M}$, ni $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{L}$.
[50] Lorsqu'on multiplie, les degrés montent toujours.

ExLQhLhJ

Exemple 6.97.
Si nous prenons $\mathbb{F}_5$ et que nous l'étendons par i, nous obtenons le corps $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5(i)$. Nous savons que tous les éléments $a \in \mathbb{F}_5$ sont racines de $X^5 - X$. Mais étant donné que $i^5 = i$, nous avons aussi $x^5 = x$ pour tout $x \in \mathbb{F}_5(i)$. Pour le prouver, utiliser le morphisme de Frobenius. Le polynôme $X^5 - X$ est donc le polynôme nul dans $\mathbb{K}$.

Ceci est un cas très particulier parce que nous avons étendu $\mathbb{F}_p$ par un élément α tel que $\alpha^p = \alpha$. En général sur $\mathbb{F}_p(\alpha)$, le polynôme $X^p - X$ n'est pas identiquement nul, et possède donc au maximum p racines. Pour $x \in \mathbb{F}_p(\alpha)$, nous avons $x^p = x$ si et seulement si $x \in \mathbb{F}_p$. △

Dans l'énoncé suivant, la notation $R(\alpha)_{\mathbb{L}}$ signifie que l'évaluation de R sur α se fait en calculant dans le sur-corps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Cette proposition semble indiquer que $\mathbb{K}(\alpha)$ est donné en termes de $\mathbb{K}(X)$, lequel est défini de façon très intrinsèque sans faire appel implicitement à un sur-corps de $\mathbb{K}$.

PROPooYSFNooFGbbCi

Proposition 6.98 ([1])**.**
Soit une extension $\mathbb{L}$ du corps $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{L}$. Alors nous avons les isomorphismes de corps suivants :

ITEMooATPTooVXKdlK

(1) $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}} = \text{Frac}\big(\mathbb{K}[\alpha]_{\mathbb{L}}\big)$,

(2) $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}} = \{R(\alpha)_{\mathbb{L}}$ *tel que* $R \in \mathbb{K}(X)\}$.

Démonstration. Le corps $\mathbb{K}(\alpha)$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}[\alpha]$ comme sous-anneau. La proposition 1.490 nous dit alors que l'application suivante est un morphisme injectif de corps :

$$\begin{aligned}\epsilon\colon \text{Frac}\big(\mathbb{K}[\alpha]\big) &\to \mathbb{K}(\alpha)\\ P/Q &\mapsto PQ^{-1}.\end{aligned} \tag{6.169}$$

Pour rappel, la notation P/Q est bien une notation pour la classe d'équivalence du couple (P, Q) pour la relation définie en 1.483.

Par ailleurs, la partie $\epsilon\Big(\text{Frac}\big(\mathbb{K}[\alpha]\big)\Big)$ de $\mathbb{L}$ et est un corps contenant $\mathbb{K}$ et α. Donc ce corps fait partie des corps sur lesquels on prend l'intersection pour définir $\mathbb{K}(\alpha)$[51]. Cela prouve que

$$\mathbb{K}(\alpha) \subset \epsilon\Big(\text{Frac}\big(\mathbb{K}[\alpha]\big)\Big). \tag{6.170}$$

L'application ϵ est donc surjective sur $\mathbb{K}(\alpha)$. Comme elle était déjà injective, elle est bijective.

Pour la seconde partie, veuillez lire la définition 1.492 de l'évaluation d'une fraction rationnelle sur un élément de l'anneau. Si $R = P/Q \in \mathbb{K}(X)$ et si $\alpha \in \mathbb{L}$, nous avons

$$R(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)^{-1}. \tag{6.171}$$

Tout sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α doit contenir en particulier $\{P(\alpha)$ tel que $P \in \mathbb{K}[X]\}$, les inverses $\{P(\alpha)^{-1}$ tel que $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\alpha) \neq 0\}$ et les produits de ceux-ci. Donc tout sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α contient $\{R(\alpha)$ tel que $R \in \mathbb{K}(X)\}$.

Nous avons donc

$$\{R(\alpha) \text{ tel que } R \in \mathbb{K}(X)\} \subset \mathbb{K}(\alpha). \tag{6.172}$$

Mais puisque $\mathbb{K}(\alpha)$ est lui-même un sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α, il est contenu dans $\{R(\alpha)$ tel que $R \in \mathbb{K}(X)\}$. D'où l'égalité. □

Pourquoi cela ne contredit pas l'exemple 6.90 ? Lorsque nous écrivons

$$\mathbb{K}(\alpha) = \{R(\alpha) \text{ tel que } R \in \mathbb{K}(X)\}, \tag{6.173}$$

certes $\mathbb{K}(X)$ est défini sans faire appel à un corps contenant $\mathbb{K}$. Mais l'évaluation $R(\alpha)$, oui. Pour calculer $R(\alpha)$, il faut écrire $R = P/Q$ et calculer $P(\alpha)Q(\alpha)^{-1}$. Tous les calculs de cette dernière expression doivent se faire dans un sur-corps de $\mathbb{K}$. Il suffit que le sur-corps en question soit un monceau de mauvaise foi comme celui de l'exemple 6.90, et en réalité $\mathbb{K}(\alpha)$ peut ne pas être ce que l'on croit.

Le corolaire suivant montre que les choses s'arrangent.

Corolaire 6.99.
Soient un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}_1$ de $\mathbb{K}$, un élément $\alpha \in \mathbb{L}_1$ et une extension $\mathbb{L}_2$ de $\mathbb{L}_1$. Alors

$$\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}_1} = \mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}_2}. \tag{6.174}$$

[51] Pour rappel, la définition 6.93(1) donne $\mathbb{K}(\alpha)$ comme une intersection.

Démonstration. La proposition 6.98 nous dit que

$$\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}_1} = \{R(\alpha)_{\mathbb{L}_1} \text{ tel que } R \in \mathbb{K}(X)\} \tag{6.175a}$$
$$\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}_2} = \{R(\alpha)_{\mathbb{L}_2} \text{ tel que } R \in \mathbb{K}(X)\}. \tag{6.175b}$$

Mais lorsque $R \in \mathbb{K}(X)$, le calcul de $R(\alpha)$ est exactement le même dans $\mathbb{L}_1$ et dans $\mathbb{L}_2$ parce que $\mathbb{L}_2$ est un sur-corps de $\mathbb{L}_1$ et que les calculs effectifs de $R(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)^{-1}$ ne font intervenir que des quantités de $\mathbb{K}$ et des puissances de α. □

Ce que ce corolaire nous dit est que si le contexte fixe une extension de $\mathbb{K}$, nous pouvons faire tous les calculs dans cette extension, même si il y a des piles d'extensions à côté.

Typiquement, à chaque fois que nous considérons des sous-corps de $\mathbb{C}$, les extensions se feront dans $\mathbb{C}$: pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, les corps $\mathbb{Q}(\alpha)$, $\mathbb{R}(\alpha)$ se calculent dans $\mathbb{C}$.

PROPooSYQWooFbfQtm

Proposition 6.100.
Soit un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}$ et un élément $\alpha \in \mathbb{L}$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{L} \\ P &\mapsto P(\alpha). \end{aligned} \tag{6.176}$$

ITEMooUZDQooOasiRQ

(1) Si α est transcendant, alors $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[X]$ (isomorphisme d'anneaux).

(2) Si α est transcendant, alors $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}} = \mathbb{K}(X)$ (isomorphisme de corps),

(3) Si α est algébrique, alors $\ker(\varphi)$ est un idéal possédant un unique générateur unitaire, lequel est le polynôme minimal[52] de α sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Point par point.

(1) Nous savons que $\mathbb{K}[\alpha] = \{Q(\alpha) \text{ tel que } Q \in \mathbb{K}[X]\}$ (c'est la proposition 3.91). Donc φ est surjective sur $\mathbb{K}[\alpha]$, et est donc bijective. Elle est un isomorphisme[53] parce que le lemme 6.71 dit déjà que c'est un morphisme.

(2) Nous supposons encore que α est transcendant et nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{K}(X) &\to \mathbb{K}(\alpha) \\ P &\mapsto R(\alpha). \end{aligned} \tag{6.177}$$

Note : cette application n'est pas φ. En effet φ n'est définie que sur $\mathbb{K}[X]$; le corps des fractions $\mathbb{K}(X)$ est nettement plus grand (classes d'équivalence de couples).

Le fait que cette application soit surjective est la proposition 6.98(2). Pour l'injectivité nous supposons que $\psi(R) = 0$, c'est-à-dire que $R(\alpha) = 0$. Nous considérons un représentant (P, Q) de R ; c'est-à-dire $R = P/Q$. L'égalité $R(\alpha) = 0$ signifie $P(\alpha)Q(\alpha)^{-1} = 0$ (égalité dans $\mathbb{L}$). Puisque $\mathbb{L}$ est un corps, c'est un anneau intègre et nous avons la règle du produit nul ; soit $P(\alpha) = 0$, soit $Q(\alpha)^{-1} = 0$. La seconde possibilité est impossible parce que zéro n'est pas inversible. Donc $P(\alpha) = 0$. Donc $\varphi(P) = 0$ et φ étant injective, $P = 0$.

Lorsque $P = 0$, la classe P/Q est nulle dans $\mathbb{K}(X) = \text{Frac}\big(\mathbb{K}[X]\big)$.

(3) C'est le lemme-définition 6.64.

□

PropXULooPCusvE

Proposition 6.101.
Soit un corps $\mathbb{K}$ et une extension $\mathbb{L}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{L}$, une racine de P. Alors le polynôme minimal d'une racine divise[54] tout polynôme annulateur.

Autrement dit, l'idéal engendré par le polynôme minimal est l'idéal des polynômes annulateurs.

Démonstration. Nous considérons l'idéal

$$I = \{Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } Q(a) = 0\}. \tag{6.178}$$

Le fait que cela soit un idéal est simplement dû à la définition du produit : $(PQ)(a) = P(a)Q(a)$. Par le théorème 6.43, le polynôme minimal μ_a de a est dans I et, qui plus est, le génère : $I = (\mu_a)$. Par conséquent tout polynôme annulateur de a est divisé par μ_a. □

[52] Définition 6.64.

[53] Les amateurs d'écriture inclusive ne seront, je l'espère, pas choqué par « *elle* est *un* isomorphisme » ; c'est une tournure que je propose ici sur le modèle de l'immonde « *elle* est *un* ministre » ou, à peine moins grave, « *il* est *une* sommité ».

[54] Définition 3.96.

6.4.4.1 Extension algébrique, degré

Proposition 6.102.
Toute extension finie est algébrique.

Démonstration. Soient un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}$ de degré[55] n de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{L}$. Nous devons montrer qu'il existe un polynôme annulateur de a à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Soit la partie $S = \{1, a, a^2, \dots, a^n\}$ de $\mathbb{L}$. Si cette partie contient des éléments non distincts, alors c'est plié. En effet, si $a^k = a^l$, alors le polynôme X^{k-l} est un polynôme annulateur de a.

Nous supposons donc que S contienne exactement $n+1$ éléments distincts. Le lemme 4.12 nous assure que S est une partie liée : il existe des éléments $k_i \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} k_i a^i = 0$.

Donc le polynôme $\sum_i a_i X^i$ est un polynôme annulateur de a. □

PropURZooVtwNXE

Proposition 6.103 (Propriétés d'extensions algébriques[1])**.**
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif[56] *et a un élément algébrique*[57] *sur $\mathbb{K}$, de polynôme minimal μ_a de degré n. Alors*

ItemJCMooDgEHajmi

(1) En considérant l'application d'évaluation

$$\begin{aligned}\varphi_a\colon \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{L}\\ Q &\mapsto Q(a),\end{aligned} \tag{6.179}$$

nous avons $\mathbb{K}[a] = \text{Image}(\varphi_a)$.

ItemJCMooDgEHajiv

(2) Une base de $\mathbb{K}[a]$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est donnée par $\{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$.

ItemJCMooDgEHajiii

(3) Le degré de l'extension $\mathbb{K}[a]$ est égal au degré du polynôme minimal :

$$\big[\mathbb{K}[a] : \mathbb{K}\big] = n. \tag{6.180}$$

(4) L'anneau $\mathbb{K}[a]$ est l'ensemble des polynômes en a de degré jusqu'à $n-1$ à coefficient dans $\mathbb{K}$.

ItemJCMooDgEHaji

(5) $\mathbb{K}(a) = \mathbb{K}[a]$.

ItemJCMooDgEHajii

(6) Il existe un isomorphisme d'anneaux $\varphi\colon \mathbb{K}[a] \to \mathbb{K}[X]/(\mu_a)$ tel que $\varphi(k) = \bar{k}$ pour tout $k \in \mathbb{K}$. $\mathbb{K}[a] \simeq \mathbb{K}[X]/(\mu_a)$ (isomorphisme d'anneau).

L'intérêt de (6) est qu'il permet de caractériser $\mathbb{K}[a]$ sans avoir recours à un sur-corps de $\mathbb{K}$. Le point (3) indique que le degré d'une extension algébrique est égal au degré du polynôme minimal.

Démonstration. (1) Nous avons $\mathbb{K}[a] \subset \text{Image}(\varphi_a)$ parce que $\text{Image}(\varphi_a)$ est lui-même un sous-anneau de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et a. Pour rappel, $\mathbb{K}[a]$ est l'intersection de tous les tels sous-anneaux.

L'inclusion inverse est le fait que si $Q \in \mathbb{K}[X]$ alors $Q(a) \in \mathbb{K}[a]$ parce que $\mathbb{K}[a]$ est un anneau et contient donc tous les a^n.

(2) La partie $\{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ est libre parce qu'une combinaison linéaire de ces éléments est un polynôme de degré au plus $n-1$ en a. Un tel polynôme ne peut pas être nul parce que nous avons mis comme hypothèse que le polynôme minimal de a est de degré n.

Rappelons qu'en vertu de la définition 6.64, le polynôme minimal μ_a est unitaire ; donc $\deg\big(\mu_a(X) - X^n\big) \leqslant n-1$. Par conséquent en posant $S(X) = X^n - \mu_a(X)$, nous avons $\deg(S) \leqslant n-1$ et $S(a) = a^n$.

En vertu du point (1), un élément de $\mathbb{K}[a]$ s'écrit $Q(a)$ pour un certain $Q \in \mathbb{K}[X]$. Supposons que Q soit de degré $p > n-1$; alors nous le décomposons en une partie contenant les termes de degré jusqu'à $n-1$ et une partie contenant les autres :

$$Q(X) = Q_1(X) + X^n Q_2(X) \tag{6.181}$$

où $\deg(Q_1) \leqslant n-1$ et $\deg(Q_2) = p - n$. Nous évaluons cette égalité en a :

$$Q(a) = Q_1(a) + S(a)Q_2(a). \tag{6.182}$$

Donc $Q(a)$ est l'image de a par le polynôme $Q_1 + SQ_2$ qui est de degré $p-1$. Par récurrence, $Q(a)$ est l'image de a par un polynôme de degré $n-1$.

Notons que l'idée est très simple : il s'agit de remplacer récursivement tous les a^n par $S(a)$.

[55] Définition 6.61.
[56] Juste en passant nous rappelons que tous les corps considérés ici sont commutatifs
[57] Définition 6.71.

(3) Conséquence immédiate de (2).

(4) Conséquence immédiate de (2).

(5) Un élément général non nul de $\mathbb{K}[a]$ est de la forme $Q(a)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$; il s'agit de lui trouver un inverse. Pour cela nous remarquons que les polynômes $\mu_a(X)$ et $Q(x)$ sont premiers entre eux, sinon μ_a ne serait pas un polynôme minimal (voir la proposition 6.67). Donc le théorème de Bézout 6.47 affirme l'existence d'éléments $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$U\mu_a + VQ = 1 \tag{6.183}$$

dans $\mathbb{K}[X]$. Nous évaluons cette égalité en a en tenant compte de $\mu_a(a) = 0$ dans $\mathbb{K}[a]$:

$$U(a)\mu_a(a) + V(a)Q(a) = 1 \tag{6.184}$$

dans $\mathbb{K}[a]$. Par conséquent $V(a)Q(a) = 1$, ce qui signifie que $V(a)$ est l'inverse de $Q(a)$.

(6) Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{K}[X]/(\mu_a) &\to \mathbb{K}[a] \\ \bar{R} &\mapsto R(a) \end{aligned} \tag{6.185}$$

et nous montrons qu'elle convient. Pour cela, nous nous souvenons que la proposition 6.101 nous enseigne que (μ_a), l'idéal engendré par μ_a, est égal à l'idéal des polynômes annulateurs de a dans $\mathbb{K}[X]$. Le polynôme μ_a divise tous les éléments de cet idéal ; voir aussi la définition 1.319 de l'idéal (μ_a). Cela étant mis au point, nous passons à la preuve.

(6a) ψ **est bien définie**
Si $\bar{R} = \bar{S}$ alors $R = S + Q$ avec $Q \in (\mu_a)$, et par conséquent $R(a) = S(a) + Q(a)$ avec $Q(a) = 0$.

(6b) **Surjective**
Nous savons que $\mathbb{K}[a] = \text{Image}(\varphi_a)$. Si $x \in \mathbb{K}[a]$ alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $x = Q(a)$. Dans ce cas nous avons aussi $x = \psi(\bar{Q})$.

(6c) **Injective**
Si $\psi(\bar{R}) = 0$ alors $R(a) = 0$, mais comme mentionné plus haut, μ_a engendre l'idéal des polynômes annulateurs de a. Donc $R \in (\mu_a)$ et nous avons $\bar{R} = 0$ dans $\mathbb{K}[X]/(\mu_a)$.

□

Exemple 6.104.
Un fait connu est que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc l'inverse de $\sqrt{2}$ s'exprime bien comme un polynôme en $\sqrt{2}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, ce qui confirme le point (5) de la proposition 6.103. Du point de vue de Bézout, $\mu_{\sqrt{2}}(X) = X^2 - 2$, et nous cherchons des polynômes U et V tels que

$$U(X^2 - 2) + VX = 1. \tag{6.186}$$

cette égalité est réalisée par $U = -\frac{1}{2}$ et $V = \frac{1}{2}X$. Et effectivement $V(\sqrt{2})$ est bien l'inverse de $\sqrt{2}$:

$$V(\sqrt{(2)}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \tag{6.187}$$

△
PROPooNGJWooYSpwVn

Proposition 6.105 ([194])**.**
Soient un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ et un élément α de $\mathbb{L}$. Il y a équivalence entre les trois points suivants :
ITEMooYTEBooUuEfBz

(1) α est algébrique sur $\mathbb{K}$,
ITEMooWMQTooLnepQl

(2) $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$,
ITEMooAQIUooMVZojp

(3) $\mathbb{K}[\alpha]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Si ces affirmations sont vraies, alors $[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}]$ est le degré du polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Démonstration décomposée en plusieurs implications.

(1) **(1) implique (2)**

Soit α algébrique sur $\mathbb{K}$. Nous considérons le polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}$ (définition 6.64). Nous savons par le lemme 6.83 (qui fonctionne parce que α est algébrique) que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[X]/(\mu)$ en tant qu'anneaux.

Mais $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal et μ en est un élément irréductible. Donc la proposition 1.412 dit que (μ) est un idéal maximum ; la proposition 1.414 avance encore un peu en disant que $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ est un corps.

Donc $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ est un corps isomorphe à $\mathbb{K}[\alpha]$ en tant qu'anneaux. En conséquence de quoi $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps.

Le corps $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α ; par définition nous avons donc $\mathbb{K}(\alpha) \subset \mathbb{K}[\alpha]$.

Mais d'autre part, $\mathbb{K}[\alpha]$ est contenu dans tout sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α, donc il est inclus dans l'intersection de tout ces corps, donc $\mathbb{K}[\alpha] \subset \mathbb{K}(\alpha)$.

Nous avons donc l'égalité $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$.

(2) **(2) implique (1)**

Nous montrons que non-(1) implique non-(2). Nous disons donc que α est transcendant sur $\mathbb{K}$; cela implique par la proposition 6.100(1) que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[X]$ en tant qu'anneaux. Donc $\mathbb{K}[\alpha]$ n'est pas un corps parce que $\mathbb{K}[X]$ ne l'est pas.

N'étant pas un corps, $\mathbb{K}[\alpha]$ ne peut pas être égal à $\mathbb{K}(\alpha)$ qui, lui, est un corps.

(3) **(1) implique (3)**

L'élément α est maintenant algébrique et nous considérons son polynôme minimal μ. Nous savons par le lemme 6.83 que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[X]/(\mu)$ en tant qu'espaces vectoriels. Or $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ est de dimension finie $\deg(\mu)$. Donc $\mathbb{K}[\alpha]$ est également de dimension finie.

(4) **(3) implique (1)**

Nous démontrons la contraposée. En supposant que α est transcendant nous avons $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[X]$ par la proposition 6.100. Or $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie sur $\mathbb{K}$, donc $\mathbb{K}[\alpha]$ non plus.

□

Lemme 6.106.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire irréductible de degré n. Il existe une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{L}$ telle que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$ et P est le polynôme minimal de a dans $\mathbb{L}$.

Démonstration. Nous prenons $\mathbb{L} = \mathbb{K}[X]/(P)$ où (P) est l'idéal dans $\mathbb{K}[X]$ généré par P. C'est un corps par le corolaire 6.44. Nous identifions $\mathbb{K}$ avec $\phi(\mathbb{K})$ où

$$\phi\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{L} \tag{6.188}$$

est la projection canonique. Nous considérons également $a = \phi(X)$.

Nous avons alors $P(a) = 0$ dans $\mathbb{L}$. En effet $P(a) = P\big(\phi(X)\big)$ est à voir comme l'application du polynôme P au polynôme X, le résultat étant encore un élément de $\mathbb{L}$. En l'occurrence le résultat est P qui vaut 0 dans $\mathbb{L}$.

Le polynôme P étant unitaire et irréductible, il est minimum dans $\mathbb{L}$.

Nous devons encore montrer que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$. Le fait que $\mathbb{K}(a) \subset \mathbb{L}$ est une tautologie parce qu'on calcule $\mathbb{K}(a)$ dans $\mathbb{L}$. Pour l'inclusion inverse soit $Q(X) = \sum_i Q_i X^i$ dans $\mathbb{K}[X]$. Dans $\mathbb{L}$ nous avons évidemment $Q = \sum_i Q_i a^i$. □

PropyMTEbH

Proposition 6.107 ([119]).
Soit $\mathbb{K}$, un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Soient a et b, deux racines de P dans (éventuellement) une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Si μ_a et μ_b sont les polynômes minimaux de a et b (dans $\mathbb{K}[X]$) et si $\mu_a \neq \mu_b$, alors $\mu_a\mu_b$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. Nous considérons les idéaux

$$I_a = \{Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } Q(a) = 0\}; \tag{6.189a}$$
$$I_b = \{Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } Q(b) = 0\}. \tag{6.189b}$$

Même si $Q(a)$ et $Q(b)$ sont calculés dans $\mathbb{L}$, I_a, I_b sont des idéaux de $\mathbb{K}[X]$. Le polynôme μ_a est par définition le générateur unitaire de I_a, et comme a est une racine de P, nous avons $P \in I_a$ et il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = \mu_a Q. \tag{6.190}$$ EqvTPoSq

Montrons que $\mu_a(b) \neq 0$. Pour cela, nous supposons que $\mu_a(b) = 0$, c'est-à-dire que $\mu_a \in I_b$. Il existe alors $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mu_a = \mu_b R$. Mais par la proposition 6.67, le polynôme μ_a est irréductible, donc soit μ_b, soit R, est inversible. Comme les inversibles sont les éléments de $\mathbb{K}$ (polynômes de degré zéro), μ_b n'est pas inversible (sinon il serait constant et ne pourait pas être annulateur de b). Donc R est inversible. Disons $R = k$.

Donc $\mu_a = k\mu_b$. Mais puisque μ_a et μ_b sont unitaires, nous avons obligatoirement $k = 1$. Cela donnerait $\mu_a = \mu_b$, ce qui est contraire aux hypothèses. Nous en déduisons que $\mu_a(b) \neq 0$.

Étant donné que $\mu_a(b) \neq 0$, l'évaluation de (6.190) en b montre que $Q(b) = 0$, de telle sorte que $Q \in I_b$ et il existe un polynôme S tel que $Q = \mu_b S$, c'est-à-dire tel que $P = \mu_a \mu_b S$, ce qui signifie que $\mu_a \mu_b$ divise P. □

Exemple 6.108.
Soit $P = (X^2+1)(X^2+2)$ dans $\mathbb{R}[X]$. Dans $\mathbb{C}$ nous avons les racines $a = i$ et $b = \sqrt{2}i$ dont les polynômes minimaux sont $\mu_a = X^2 + 1$ et $\mu_b = X^2 + 2$. Nous avons effectivement $\mu_a\mu_b$ divise P dans $\mathbb{R}[X]$.

Si par contre nous considérions les racines $a = i$ et $b = -i$, nous aurions $\mu_a = \mu_b = X^2 + 1$, tandis que le polynôme μ_a^2 ne divise pas P. △

6.4.5 Racines de polynômes

CorDIYooEtmztc

Corolaire 6.109 (Factorisation d'une racine)**.**
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(x) = (X - \alpha)Q$.

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier de la proposition 6.101 : si $\alpha \in \mathbb{K}$ alors son polynôme minimal dans $\mathbb{K}$ est $X - \alpha$; donc $X - \alpha$ divise P. Il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$. Le degré est alors immédiat. □

Nous sommes sur le point de prouver le théorème 6.110 qui dit qu'un polynôme avec trop de racines est nul.

(1) Relisez d'abord la définition 3.89 pour savoir ce qu'est un polynôme nul.

(2) Si vous être seulement intéressé par le cas de polynôme réels, peut-être que le déterminant de Vandermonde 4.126 sera une façon plus facile de prouver.

ThoLXTooNaUAKR

Théorème 6.110 (Polynôme qui a tellement de racines qu'il s'annule)**.**
Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n possédant $n+1$ racines distinctes α_1,..., α_{n+1}, alors $P = 0$.

Démonstration. Si P est de degré 1, il s'écrit $P = aX + b$; si il a comme racines α et β, nous avons le système

$$\begin{cases} a\alpha + b = 0 & \text{(6.191a)} \\ a\beta + b = 0. & \text{(6.191b)} \end{cases}$$

La différence entre les deux donne $a(\alpha - \beta) = 0$. Puisque $\alpha \neq \beta$, la règle du produit nul (lemme 1.336) nous donne $a = 0$. Maintenant que $a = 0$, l'annulation de b est alors immédiate.

Nous faisons maintenant la récurrence en supposant le théorème vrai pour le degré n et en considérant un polynôme P de degré $n+1$ possédant $n+2$ racines distinctes. Puisque $P(\alpha_1) = 0$, le corolaire 6.109 nous donne un polynôme Q de degré n tel que

$$P = (X - \alpha_1)Q. \tag{6.192}$$ EqQGSooNdTWfz

Étant donne que pour tout $i \neq 1$ nous avons $\alpha_i \neq \alpha_1$,

$$0 = P(\alpha_i) = \underbrace{(\alpha_i - \alpha_1)}_{\neq 0} Q(\alpha_i), \tag{6.193}$$

et la règle du produit nul donne $Q(\alpha_i) = 0$. Par conséquent le polynôme Q est de degré n et possède $n+1$ racines distinctes ; tous ses coefficients sont alors nuls par hypothèse de récurrence. Tous les coefficients du produit (6.192) sont alors également nuls. □

ExGRHooBNpjSP

Exemple 6.111.
Un polynôme à plusieurs variables peut s'annuler en une infinité de points sans être nul. Par exemple le polynôme $X^2+Y^2-1 \in \mathbb{R}[X,Y]$ s'annule sur tout un cercle de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas nul, loin s'en faut.

Nous verrons dans la proposition 6.185 une condition pour qu'un polynôme à plusieurs variables s'annule du fait qu'il ait « trop » de racines. △

Remarque 6.112.
L'intérêt du théorème 6.110 est que si l'on prouve qu'un polynôme s'annule sur un corps infini, alors il s'annulera sur n'importe quel autre corps. Nous aurons un exemple d'utilisation de cela dans le théorème de Cayley-Hamilton 13.31.

6.4.6 Corps de rupture

DEFooVALTooDJJmJv

Définition 6.113.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible. Une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ est un ***corps de rupture*** *pour P si il existe $a \in \mathbb{L}$ tel que $P(a)=0$ et $\mathbb{L}=\mathbb{K}(a)$.*

NORMALooTPOIooVZAfUo

6.114.
Nous insistons sur le fait que nous ne définissons le concept de corps de rupture que pour un polynôme irréductible à coefficients dans un corps. Les deux points sont importants : irréductible et à coefficient dans un corps.

Nous discuterons brièvement le pourquoi de cela dans la section 6.4.11.

ExemGVxJUC

Exemple 6.115.
Soit $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ et $P=X^2-2$. On pose $a=\sqrt{2}$ et $\mathbb{L}=\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$. De cette façon P est scindé dans $\mathbb{L}$:

$$P=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}). \tag{6.194}$$

Le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est donc un corps de rupture pour P. △

Exemple 6.116.
Dans l'exemple 6.115, nous avions un corps de rupture dans lequel le polynôme P était scindé. Il n'en est pas toujours ainsi. Prenons

$$P=X^3-2 \tag{6.195}$$

et $a=\sqrt[3]{2}$. Nous avons, certes, $P(a)=0$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, mais P n'est pas scindé parce qu'il y a deux racines complexes. △

Exemple 6.117.
Nous considérons le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier. Si $s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ n'est pas un carré, alors le polynôme $P=X^2+s$ est irréductible et un corps de rupture de P sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est donné par $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]/(X^2+s)$, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de degré 1 en $\sqrt{s}$. Le cardinal en est p^2. △

Comme nous allons abondamment parler du quotient $\mathbb{K}[X]/(P)$, nous nous permettons un petit lemme.

LEMooWYYFooXYacdF

Lemme 6.118.
Soit un corps $\mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. Alors $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps si et seulement si P est irréductible.

Démonstration. Nous utilisons le trio d'enfer dont il est question dans le thème 18. D'abord $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal par le lemme 3.98. Donc $\mathbb{K}[X]/(P)$ sera un corps si et seulement si (P) est un idéal maximum (proposition 1.401), et cela sera le cas si et seulement si (P) est engendré par un polynôme irréductible (proposition 1.412).

Il ne nous reste qu'à montrer que (P) est engendré par un irréductible si et seulement si P est irréductible. Il y a un sens dans lequel c'est évident.

Soit un irréductible μ tel que $(P)=(\mu)$. En particulier $\mu \in (P)$, c'est-à-dire qu'il existe Q tel que $\mu=PQ$. Puisque μ est irréductible, soit P, soit Q, est inversible. Si P est inversible, c'est-à-dire constant, c'est ce que nous avons exclu par hypothèse. Si par contre Q est inversible, alors $P=k\mu$ pour un certain $k \in \mathbb{K}$, ce qui montre que P est irréductible autant que μ. □

PROPooUBIIooGZQyeE

Proposition 6.119 (Existence d'un corps de rupture)**.**
Soit un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme irréductible non constant P. Alors

(1) Le corps $\mathbb{L}=\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps de rupture pour P.

(2) L'élément $\bar{X}$ de $\mathbb{L}$ est une racine de P.

(3) $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\bar{X})_{\mathbb{L}}$

Démonstration. Commençons par nous convaincre que $\mathbb{K}[X]/(P)$ est une extension de $\mathbb{K}$ (définition 6.59). Le fait que ce soit un corps est le lemme 6.118. Le morphisme $j\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}[X]/(P)$ est simplement $k \mapsto \bar{k}$ où à droite, $\bar{k}$ voit k dans $\mathbb{K}[X]$ comme étant le polynôme constant. Notez qu'il est automatiquement injectif (lemme 1.431).

Il faut maintenant voir que $\mathbb{K}[X]/(P) = \mathbb{K}(\alpha)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{K}[X]/(P)$. Grâce à notre compréhension des notations acquise dans 1.19.2.2, nous savons que $X \in \mathbb{K}[X]$ et qu'il est donc parfaitement légitime de poser $\alpha = \bar{X}$ dans $\mathbb{K}[X]/(P)$. Il s'agit simplement de l'ensemble $\bar{X} = \{X + QP \text{ tel que } Q \in \mathbb{K}[X]\}$ où X est une notation pour la suite $(0, 1, 0, 0, \ldots)$.

Bref, nous notons $\alpha = \bar{X}$ et nous démontrons que $P(\alpha) = 0$ et que $\mathbb{K}[X]/(P) = \mathbb{K}(\alpha)$ (isomorphisme de corps).

(1) $P(\bar{X}) = 0$

C'est le moment de nous souvenir comment la notation des X fonctionne, et en particulier la pirouette autour de (1.677). D'abord la définition du produit sur $\mathbb{K}[X]/(P)$ est $\bar{P}\bar{Q} = \overline{PQ}$; en particulier si $P = \sum_k a_k X^k$, alors $P(\bar{X}) = \sum_k a_k \bar{X}^k = \sum_k a_k \overline{X^k}$, et

$$P(\bar{X}) = \overline{P(X)} = \bar{P} = 0. \tag{6.196}$$

(2) **L'égalité**

Nous montrons à présent que $\mathbb{K}(\bar{X})_{\mathbb{L}} = \mathbb{L}$. C'est-à-dire que $\mathbb{L}$ est bien engendrée par $\mathbb{K}$ et un seul élément. D'abord, $\mathbb{L} = \mathbb{K}[X]/(P)$ contient bien évidemment $\mathbb{K}$ et $\bar{X}$. Ensuite nous devons prouver que tout sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et $\bar{X}$ est en réalité $\mathbb{L}$ entier.

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$, et montrons que $\bar{Q}$ est dans tout sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et $\bar{X}$.

Par le lemme 3.87 nous avons $\bar{Q} = Q(\bar{X})$. Et si un corps contient $\mathbb{K}$ et $\bar{X}$, il doit contenir tous les polynômes en $\bar{X}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Donc un tel corps doit contenir $Q(\bar{X})$ et donc $\bar{Q}$.

□

Exemple 6.120.
Soit le polynôme $P = X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Dans le quotient $\mathbb{Z}[X]/(P)$ nous avons $\bar{X}^2 + 1 = 0$ et donc $\bar{X}^2 = -1$. C'est-à-dire que $\mathbb{Z}[X]/(P)$ contient un élément dont le carré est -1. Avouez que c'est bien ce à quoi nous nous attendions.

Notons que $-\bar{X}$ est également une racine de P dans $\mathbb{Z}[X]/(P)$.

En calculant dans les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}(\bar{X})$ nous avons :

$$(X + \bar{X})(X - \bar{X}) = X^2 - \bar{X}^2 = X^2 + 1, \tag{6.197}$$

c'est-à-dire que P est bien factorisé, et que nous avons retrouvé la multiplication $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$. △

6.121.
Il n'y a évidemment pas unicité d'un corps de rupture pour un polynôme donné. Une raison est qu'un polynôme peut accepter plusieurs racines complètement indépendantes. Le corps étendu par l'une ou l'autre racine donne deux corps de rupture différents. Par exemple dans $\mathbb{Q}[X]$, le polynôme

$$P = X^4 - X^2 - 2 \tag{6.198}$$

a pour racines (dans $\mathbb{C}$) les nombres $\sqrt{2}$ et i. Donc on a deux corps de rupture complètement différents : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{Q}(i)$.

6.122.
La proposition suivante donne une unicité du corps de rupture dans le cas d'un polynôme irréductible. Et nous comprenons pourquoi : un polynôme irréductible n'a fondamentalement qu'une seule racine « indépendante ». Par exemple $X^2 - 2$ a pour racines $\pm\sqrt{2}$. Autre exemple, le polynôme $X^2 + 6X + 13$ a pour racines, dans $\mathbb{C}$, les nombres complexes conjugués $z = -3 + 2i$ et $\bar{z} = -3 - 2i$.

PROPooVJACooNDmlfb

Proposition 6.123 ([188])**.**
Soient un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme irréductible $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors toute extension $\mathbb{L}$ contenant une racine α de P admet un unique morphisme de corps

$$\psi\colon \mathbb{K}[X]/(P) \to \mathbb{L} \tag{6.199}$$

tel que $\psi(\bar{X}) = \alpha$.

Dans un tel cas,

(1) *l'image de* ψ *est* $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$,

(2) *si* $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ *alors* ψ *est un isomorphisme.*

ITEMooHRFHooWLIdWU

Démonstration. L'idéal annulateur de α parmi les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ n'est pas réduit à $\{0\}$ parce qu'il contient P. Le lemme 6.64 s'applique donc et nous avons μ, le polynôme minimal de α dans $\mathbb{K}[X]$. Il divise P qui est irréductible, donc

$$P = \lambda\mu \tag{6.200}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

Nous posons

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{K}[X]/(P) &\to \mathbb{L} \\ \bar{Q} &\mapsto Q(\alpha). \end{aligned} \tag{6.201}$$

(1) **Bien définie** Si $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$ alors il existe un $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q_1 = Q_2 + RP$. Mais alors $\psi(\bar{Q}_1) = Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha) + R(\alpha)P(\alpha) = Q_2(\alpha)$.

(2) **Injective**

Si $\psi(\bar{Q}_1) = \psi(\bar{Q}_2)$ alors $Q_1 - Q_2 = R$ pour un certain $R \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $R(\alpha) = 0$. Nous avons alors un polynôme S tel que $R = S\mu = \lambda^{-1}SP$. Donc $\bar{R} = 0$ et donc $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$.

(3) **Morphisme**

Laissé comme exercice ; la paresse de l'auteur de ces lignes attend vos contributions.

(4) **La condition**

Le morphisme ψ respecte de plus la condition

$$\psi(\bar{X}) = X(\alpha) = \alpha. \tag{6.202}$$

En ce qui concerne l'unicité, fixer $\psi(\bar{X})$ est suffisant pour fixer un morphisme. En effet si $\psi(\bar{X}) = \alpha$, alors

$$\psi(\bar{Q}) = \psi\Big(\sum_k a_k \bar{X}^k\Big) = \sum_k a_k \psi(\bar{X})^k = \sum_k a_k \alpha^k. \tag{6.203}$$

Pour le second point de l'énoncé, il faut remarquer que α est algébrique et non transcendant. Donc en utilisant les propositions 3.91 et 6.103(5) nous trouvons

$$\text{Image}(\psi) = \{Q(\alpha) \text{ tel que } Q \in \mathbb{K}[X]\} = \mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha). \tag{6.204}$$

Et finalement pour le dernier point, un morphisme de corps est toujours injectif. Si il est également surjectif, il sera bijectif. □

6.4.7 Pile d'extensions

LEMooTURZooXnjmjT

Lemme 6.124 ([1])**.**
Soient un corps $\mathbb{K}$*, des extensions* $\mathbb{L}_1$*,...,* $\mathbb{L}_n$ *et des éléments* $\alpha_i \in \mathbb{L}_i$ *tels que*

$$\mathbb{L}_1 = \mathbb{K}(\alpha_1)_{\mathbb{L}_1} \tag{6.205}$$

EQooOCQSooFMkzTc

et

$$\mathbb{L}_k = \mathbb{L}_{k-1}(\alpha_k)_{\mathbb{L}_k}. \tag{6.206}$$

Alors

$$\mathbb{L}_n = \mathbb{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathbb{L}_n}. \tag{6.207}$$

Démonstration. Nous démontrons par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est simplement l'hypothèse (6.205).

Supposons donc que le lemme soit correct pour n, et étudions le cas $n+1$. Nous avons, par définition et par hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{L}_{n+1} = \mathbb{L}_n(\alpha_{n+1})_{\mathbb{L}_{n+1}} = \Big(\mathbb{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathbb{L}_n}\Big)(\alpha_{n+1})_{\mathbb{L}_{n+1}}. \tag{6.208}$$

Notre tâche sera donc de montrer que

$$\Big(\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)_{\mathbb{L}_n}\Big)(\alpha_{n+1}) = \mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) \tag{6.209}$$

EQooIHMGooTlPcsd

où nous n'écrivons plus les indices $\mathbb{L}_{n+1}$ partout.

Le membre de gauche est un sous-corps de $\mathbb{L}_{n+1}$ contenant à la fois $\mathbb{K}$ et tous les α_i, si bien que

$$\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) \subset \big(\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)_{\mathbb{L}_n}\big)(\alpha_{n+1})_{\mathbb{L}_{n+1}}. \tag{6.210}$$

EQooLLRHooHQjLfk

Il faut donc prouver l'inclusion inverse ; c'est-à-dire montrer que tout élément x du corps $\big(\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)_{\mathbb{L}_n}\big)(\alpha_{n+1})$ est forcément dans tout sous-corps de $\mathbb{L}_{n+1}$ contenant $\mathbb{K}$ et les α_i. Un tel élément x est, par la proposition 6.98(2), de la forme $r(\alpha_{n+1})$ avec $r \in \mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)(X)$, c'est-à-dire

$$P(\alpha_{n+1})Q(\alpha_{n+1})^{-1} \tag{6.211}$$

avec $P, Q \in \mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)[X]$.

Prouvons d'abord que si $P \in \mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)[X]$, alors $P(\alpha_{n+1})$ est dans tout sous-corps de $\mathbb{L}_{n+1}$ contenant $\mathbb{K}$ et les α_i. Nous pouvons écrire $P = \sum_i a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, et donc

$$P(\alpha_{n+1}) = \sum_i a_i \alpha_{n+1}^i. \tag{6.212}$$

Tout corps contenant $\mathbb{K}$ et les α_1,..., α_n contient les a_i. Par produit, tout corps contenant $\mathbb{K}$, α_1,..., α_{n+1} contient les termes $a_i\alpha_{n+1}^i$, et donc $P(\alpha_{n+1})$ par somme.

De la même façon, si un corps contient $\mathbb{K}$ et les α_i, $(i = 1,\dots,n+1)$, alors il contient $Q(\alpha_{n+1})$. Comme c'est un corps, il contient aussi son inverse $Q(\alpha_{n+1})^{-1}$, et il contient aussi le produit

$$r(\alpha_{n+1}) = P(\alpha_{n+1})Q(\alpha_{n+1})^{-1}. \tag{6.213}$$

On vient ainsi de montrer que tout élément $x \in \big(\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)_{\mathbb{L}_n}\big)(\alpha_{n+1})$ était dans tout sous-corps de $\mathbb{L}_{n+1}$ qui contient $\mathbb{K}$ et les α_i, $(i = 1,\dots,n+1)$; en d'autres termes :

$$\big(\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)_{\mathbb{L}_n}\big)(\alpha_{n+1})_{\mathbb{L}_{n+1}} \subset \mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}). \tag{6.214}$$

EQooUFSMooJozpoL

Les inclusions (6.210) et (6.214) prouvent l'égalité d'ensembles (6.209) que nous voulions montrer. □

6.4.8 Clôture algébrique

Le concept de clôture algébrique a été défini dans 6.75. Voici un lemme qui dit qu'une clôture algébrique est en quelque sorte une extension algébrique maximale.

LEMooQSCGooMyCktA

Lemme 6.125 ([1]).
Soient un corps $\mathbb{K}$ et une extension algébrique $\mathbb{F}$ de $\mathbb{K}$. Nous supposons que pour toute extension algébrique de $\mathbb{L}$ nous avons $\mathbb{L} = \mathbb{F}$

Alors $\mathbb{F}$ est algébriquement clos[58].

Démonstration. Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. Nous voudrions prouver que P a des racines dans $\mathbb{F}$. Pour cela, nous voyons P comme un polynôme sur $\mathbb{F}[X]$ et, grace à la proposition 6.119 nous considérons un corps de rupture $\mathbb{L}$ pour P. Puisque $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{F}$, nous avons $\mathbb{L} = \mathbb{F}$. Donc $\mathbb{F}$ contient des racines de P. □

6.126.
Nous avons défini le concept d'extension algébrique en 6.75. Nous allons en construire un petit exemple très piéton.

Souvenez-vous que la proposition 1.593 nous donne l'existence et l'unicité d'un réel $\sqrt{2}$ strictement positif dont le carré est 2. Ce réel est irrationnel par la proposition 1.523.

Proposition 6.127 ([195]).
Soit $\mathbb{L} = \{a + b\sqrt{2}\}_{a,b\in\mathbb{Q}}$.

(1) C'est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

(2) Tout sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}$ contient $\mathbb{L}$.

ITEMooUSOAooZoBhla

[58] Définition 6.75(2).

Démonstration. Nous devons d'abord prouver que $\mathbb{L}$ est un corps en vérifiant d'une part que c'est un anneau (définition 1.92) et d'autre part le fait que tous les éléments non nuls sont inversibles.

- La partie $\mathbb{L}$ de $\mathbb{R}$ est stable pour l'addition : dès que $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$,
$$(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \in \mathbb{L}. \tag{6.215}$$
- Les neutres 0 et 1 sont dans $\mathbb{L}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{L}$, alors $-\alpha \in \mathbb{L}$:
$$-(a + b\sqrt{2}) = -a - b\sqrt{2}. \tag{6.216}$$
- La partie $\mathbb{L}$ est stable pour le produit parce que
$$(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2}. \tag{6.217}$$
- L'inverse d'un élément de $\mathbb{L}$ est dans $\mathbb{L}$. C'est le seul point pas tout à fait évident. D'abord, l'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps par le théorème 1.533. Donc pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, le nombre
$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} \tag{6.218}$$
existe dans $\mathbb{R}$.

  D'abord $a - b\sqrt{2}$ n'est pas nul, parce que si il l'était, nous aurions $\sqrt{2} = a/b \in \mathbb{Q}$ alors que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel par la proposition 1.523. Nous pouvons donc faire le coup de multiplier le numérateur et le dénominateur par le binôme conjugué :
$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}. \tag{6.219}$$
  Cela est un rationnel. Donc le éléments non nuls de $\mathbb{L}$ ont un inverse qui appartient également à $\mathbb{L}$.

Nous passons à la preuve du point (2). Si $\mathbb{L}'$ est un corps qui contient $\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}$, il doit contenir $b\sqrt{2}$ pour tout $b \in \mathbb{Q}$ et donc aussi tous les $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$. Par conséquent, $\mathbb{L}'$ doit contenir au moins tout $\mathbb{L}$. □

Proposition 6.128.
Soit $\mathbb{L} = \{a + b\sqrt{2}\}_{a,b\in\mathbb{Q}}$.

ITEMooOMDMooLNhlyh
(1) *C'est un espace vectoriel de dimension* 2 *sur* $\mathbb{Q}$.

ITEMooWGGDooSbsesf
(2) *Si* $\alpha \in \mathbb{L}$, *alors il existe un polynôme* $P \in \mathbb{L}[X]$ *de degré* 2 *ou moins tel que* $P(\alpha) = 0$.

ITEMooPNNYooPtKYwQ
(3) *Le corps* $\mathbb{L}$ *est une extension algébrique de* $\mathbb{Q}$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1)** Pour la dimension, notez que $\{1, \sqrt{2}\}$ est une partie libre et génératrice de $\mathbb{L}$.

(2) **(2)**

Soit $\alpha \in \mathbb{L}$. La partie $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ est de cardinal 1, 2 ou 3. Si c'est 1 ou 2, c'est que $1 = \alpha$ ou $1 = \alpha^2$ ou $\alpha = \alpha^2$. Si par exemple $1 = \alpha$ alors avec $P = X - 1$ nous avons $P(\alpha) = 0$.

Si au contraire $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ est de cardinal 3, alors c'est une partie liée par la proposition 4.7. Il existe donc des rationnels a, b, c tels que $a + b\alpha + c\alpha^2 = 0$, c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$ avec $P = cX^2 + bX + a$.

(3) **(3)** Nous venons de voir que tous les éléments de $\mathbb{L}$ sont des racines de polynômes de $\mathbb{Q}[X]$.

□
LEMooHWPHooZeWqns

Lemme 6.129.
Si $\mathbb{K}$ *est un corps infini, alors* $\mathbb{K}[X]$ *est équipotent*[59] *à* $\mathbb{K}$.

[59] Définition 1.66.

Démonstration. Notons provisoirement $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré n. Nous avons une surjection

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{K}^{n+1} &\to \mathbb{K}_n[X]\\ (k_0,\ldots,k_n) &\mapsto \sum_{i=0}^{n} k_iX^i.\end{aligned} \tag{6.220}$$

EQooFGZVooKIMKRA

Par récurrence sur le théorème[60] 1.252, nous avons $\mathbb{K}^{n+1}\approx\mathbb{K}$. La surjection (6.220) dit alors que

$$\mathbb{K}_n[X]\preceq\mathbb{K}^{n+1}\approx\mathbb{K}. \tag{6.221}$$

Mais puisqu'il y a une surjection $\mathbb{K}\to\mathbb{K}_n[X]$, nous avons aussi $\mathbb{K}_n[X]\succeq\mathbb{K}$. Le théorème 1.77 dit alors que $\mathbb{K}_n[X]\approx\mathbb{K}$.

Le lemme 1.253 nous permet alors de conclure que

$$\mathbb{K}[X]=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{K}_n[X]\approx\mathbb{K}. \tag{6.222}$$

□

PROPooVPQFooScWvkS

Proposition 6.130 ([1]).
Soit un corps $\mathbb{K}$. Une extension algébrique de $\mathbb{K}$ est

(1) au plus dénombrable si $\mathbb{K}$ est fini,

(2) équipotente à $\mathbb{K}$ si $\mathbb{K}$ est infini.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Si $\mathbb{K}$ est fini** Un polynôme non nul possède toujours au maximum un nombre fini de racines (éventuellement zéro) par la proposition 6.110. Par ailleurs, chaque degré de polynôme ayant seulement un nombre fini de possibilités, l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est au plus dénombrable (proposition 1.228).

Pour $P\in\mathbb{K}[X]$ nous avons une surjection de $\mathbb{N}$ vers l'ensemble des racines de P. Nous la notons $\varphi_P\colon\mathbb{N}\to\mathbb{L}$, en posant par exemple $\varphi_P(n)=1$ si P n'a pas de racines. Enfin nous posons

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{K}[X]\times\mathbb{N}&\to\mathbb{L}\\ (P,n)&\mapsto\varphi_P(n).\end{aligned} \tag{6.223}$$

C'est la fonction qui à un polynôme P et un nombre n fait correspondre la n^{e} racine de P.

Comme $\mathbb{L}$ est une extension algébrique, φ est surjective.

En termes de cardinalité, que $\mathbb{K}[X]$ soit fini ou dénombrable, dans les deux cas, $\mathbb{K}[X]\times\mathbb{N}$ est dénombrable (proposition 1.224). Il existe donc une surjection d'un ensemble dénombrable vers $\mathbb{L}$. Le lemme 1.227 conclut que $\mathbb{L}$ est fini ou dénombrable.

(2) **Si $\mathbb{K}$ est infini** Nous procédons de la même manière, mais nous devons faire appel à des résultats plus technologiques pour maitriser la cardinalité. Nous considérons à nouveau l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{K}[X]\times\mathbb{N}&\to\mathbb{L}\\ (P,n)&\mapsto\varphi_P(n).\end{aligned} \tag{6.224}$$

Cette application est encore surjective : $\mathbb{L}\preceq\mathbb{K}[X]\times\mathbb{N}$. Le lemme 6.129 nous assure que $\mathbb{K}[X]\approx\mathbb{K}$ parce que $\mathbb{K}$ est infini. Ensuite la proposition 1.245 nous dit que $\mathbb{K}[X]\times\mathbb{N}\approx\mathbb{K}[X]$. Donc

$$\mathbb{K}\approx\mathbb{K}[X]\approx\mathbb{K}[X]\times\mathbb{N}\succeq\mathbb{F}. \tag{6.225}$$

Mais $\mathbb{F}$ est une extension de $\mathbb{K}$. Donc il existe une injection $\mathbb{K}\to\mathbb{F}$, c'est-à-dire $\mathbb{K}\preceq\mathbb{F}$.

Ayant $\mathbb{K}\preceq\mathbb{F}\preceq\mathbb{K}$, le théorème 1.77 implique que $\mathbb{K}\approx\mathbb{F}$.

□

Lemme 6.131 ([1]).
Soient des corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ ainsi qu'un morphisme de corps $\rho\colon\mathbb{K}\to\mathbb{L}$. Si $P\in\mathbb{K}[X]$ a une racine dans $\mathbb{K}$, alors le polynôme $\rho(P)$ a une racine dans $\mathbb{L}$.

[60] J'ai quand même du mal à croire qu'il faille vraiment le lemme de Zorn pour prouver que $\mathbb{K}[X]$ est équipotent à $\mathbb{K}$. Si vous connaissez un moyen plus direct, écrivez-moi.

Démonstration. Nous notons $P = \sum_k P_k X^k$. Si $a \in \mathbb{K}$ est une racine de P, alors $\sum_k P_k a^k = 0$. Nous appliquons ρ à cette égalité : $\sum_k \rho(P_k)\rho(a)^k = 0$, c'est-à-dire $\rho(P)\big(\rho(a)\big) = 0$. Donc $\rho(a) \in \mathbb{L}$ est une racine de $\rho(P)$. □

Note à propos du lemme suivant (6.132) : en pratique, les corps $\mathbb{L}$ et $\mathbb{F}$ sont le plus souvent des sur-corps de $\mathbb{K}$, de telle sorte que les applications α et β sont l'identité. En particulier, la conclusion de ce lemme s'écrit le plus souvent $\sigma|_{\mathbb{K}} = \mathrm{Id}$. Il faut juste savoir que le Frido est un névrosé des notations précises.

LEMooIIKYooHMNqYn

Lemme 6.132 ([196]).
Nous considérons un triplet $(\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{F})$ où

(1) $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ et $\mathbb{F}$ sont des corps

(2) il existe $a \in \mathbb{L}$ algébrique sur $\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$ et un morphisme de corps $\alpha\colon \mathbb{K} \to \mathbb{L}$.

(3) $\mathbb{F}$ est une extension algébriquement close de $\mathbb{K}$: il existe un morphisme $\beta\colon \mathbb{K} \to \mathbb{F}$.

Alors il existe un morphisme de corps $\sigma\colon \mathbb{L} \to \mathbb{F}$ tel que $\sigma|_{\alpha(\mathbb{K})} = \beta$.

Démonstration. Comme $\mathbb{L}$ est monogène, si $\mu_a \in \mathbb{K}[X]$ est le polynôme minimal de $a \in \mathbb{L}$, alors les points (5) et (6) de la proposition 6.103 disent que $\mathbb{L} \simeq \mathbb{K}[a] \simeq \mathbb{K}[X]/(\mu_a)$. Pour référence ultérieure, nous considérons un isomorphisme

$$\varphi\colon \mathbb{L} \to \mathbb{K}[X]/(\mu_a). \tag{6.226}$$

Les coefficients de μ_a sont dans $\mathbb{K}$, donc nous pouvons voir $\mu_a \in \mathbb{F}[X]$. Plus précisément, si $\mu_a = \sum_k a_k X^k$, nous définissons

$$\mu'_a = \sum_k \beta(a_k) X^k \in \mathbb{F}[X]. \tag{6.227}$$

Comme $\mathbb{F}$ est algébriquement clos, le polynôme μ'_a possède une racine (au moins) $b \in \mathbb{F}$: $\mu'_a(b) = 0$.

Nous posons

$$\begin{aligned} \sigma'\colon \mathbb{K}[X]/(\mu_a) &\to \mathbb{F} \\ \overline{\sum_k s_k X^k} &\mapsto \sum_k \beta(s_k) b^k. \end{aligned} \tag{6.228}$$

(1) **σ' est bien définie** La réalité est que nous utilisons la proposition 1.53. Si $P = \sum_k s_k X^k$ et $\mu_a = \sum_k a_k X^k$ $(a_k, s_k \in \mathbb{K})$, alors

$$\sigma'(\overline{P + \mu_a}) = \sigma'\big(\overline{\sum_k (a_k + s_k) X^k}\big) = \sum_k \beta(a_k) b^k + \sum_k s_k b^k = \mu'_a(b) + \sigma'(\overline{P}) = \sigma'(\overline{P}). \tag{6.229}$$

(2) **σ' est un morphisme de corps** Il s'agit de vérifier les conditions de la définition 1.98. Soient deux polynômes $P = \sum_k P_k X^k$ et $Q = \sum_l Q_l X^l$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sigma'(\bar{P}) + \sigma'(\bar{Q}) &= \sum_k \beta(P_k) b^k + \sum_l \beta(Q_l) X^l && \text{(6.230a)} \\
&= \sum_k \big(\beta(P_k) + \beta(Q_k)\big) && \text{(6.230b)} \\
&= \sum_k \beta(P_k + Q_k) b^k && \beta \text{ est morphisme} \quad \text{(6.230c)} \\
&= \sigma'\Big(\overline{\sum_k (P_k + Q_k) X^k}\Big) && \text{(6.230d)} \\
&= \sigma'(\overline{P + Q}) && \text{(6.230e)} \\
&= \sigma'(\overline{P} + \overline{Q}). && \text{(6.230f)}
\end{aligned}$$

Pour prouver que $\sigma'(PQ) = \sigma'(P)\sigma'(Q)$, c'est le même type de calcul[61]. Il suffit d'écrire $PQ = \sum_k S_k X^k$ et remarquer que S_k s'exprime en fonction des P_i et Q_j rien qu'avec des sommes et produits.

Enfin le polynôme 1 est donné par $s_0 = 1$ et $s_k = 0$ pour $k \geqslant 1$. Donc $\sigma'(\overline{1}) = 1$ parce que $\beta(s_0)b^0 = \beta(1) = 1$. Toujours parce que β est un morphisme de corps.

(3) **$\varphi\big(\alpha(k)\big) = \bar{k}$** Quand nous parlons de $\bar{k}$, nous parlons de la classe du polynôme de degré zéro donné par $k \in \mathbb{K}$.

[61] J'ai pas vérifié ; écrivez-moi si ça pose un problème.

(4) **La réponse** Nous posons
$$\sigma = \sigma' \circ \varphi. \tag{6.231}$$
Pour tout $k \in \mathbb{K}$,
$$(\sigma'\varphi\alpha)(k) = \sigma'(\bar{k}) = \beta(k), \tag{6.232}$$
c'est ce qu'il fallait.

□
LEMooUULTooYcytat

Lemme 6.133 ([196]).
Soit un corps $\mathbb{K}$ muni de deux extensions $\alpha\colon \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ et $\beta\colon \mathbb{K} \to \mathbb{F}$. Nous supposons que

(1) $\mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$;

(2) $\mathbb{F}$ est algébriquement clos.

Alors il existe un morphisme de corps $\sigma\colon \mathbb{L} \to \mathbb{F}$ tel que $\sigma \circ \alpha = \beta$.

Démonstration. Nous allons utiliser le lemme de Zorn 1.37 sur l'ensemble
$$\mathcal{A} = \left\{ (\mathbb{M}, \varphi) \text{ tel que } \begin{cases} \mathbb{M} \text{ est un sous-corps de } \mathbb{L} \\ \alpha(\mathbb{K}) \subset \mathbb{M} \\ \varphi\colon \mathbb{M} \to \mathbb{F} \text{ est une extension de corps} \\ \varphi \circ \alpha = \beta \end{cases} \right\}. \tag{6.233}$$
Nous ordonnons (partiellement) cet ensemble en disant que $(\mathbb{M}_1, \varphi_1) < (\mathbb{M}_2, \varphi_2)$ si $\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_2$ et $\varphi_2|_{\mathbb{M}_1} = \varphi_1$. Il se fait que $\mathcal{A}$ est un ensemble inductif et que nous pouvons donc lui appliquer le lemme de Zorn.

Soit un élément maximal $(\mathbb{M}, \varphi)$. Nous allons montrer que $\mathbb{M} = \mathbb{L}$.

Soit $l \in \mathbb{L}$. Puisque $\mathbb{L}$ est une extension algébrique de $\mathbb{K}$, il existe un polynôme P à coefficients dans $\alpha(\mathbb{K})$ tel que $P(l) = 0$. Mais comme $\alpha(\mathbb{K}) \subset \mathbb{M}$, ce polynôme est également à coefficients dans $\mathbb{M}$. Donc l est un élément algébrique sur $\mathbb{M}$.

Nous pouvons donc considérer le triplet $\big(\mathbb{M}, \mathbb{M}(l), \mathbb{F}\big)$ qui vérifie les hypothèses du lemme 6.132. Il existe donc un morphisme de corps $\sigma\colon \mathbb{M}(l) \to \mathbb{F}$ tel que $\sigma|_{\mathbb{M}} = \varphi$.

Nous avons
$$\sigma \circ \alpha = \sigma|_{\sigma(\mathbb{K})} \circ \alpha = \sigma|_{\mathbb{M}} \circ \alpha = \varphi \circ \alpha = \beta. \tag{6.234}$$
Donc l'élément $\big(\mathbb{M}(l), \sigma\big)$ majore $(\mathbb{M}, \varphi)$ dans $\mathcal{A}$.

Par maximalité, nous déduisons que $\mathbb{M} = \mathbb{L}$. Donc le morphisme $\varphi\colon \mathbb{L} \to \mathbb{F}$ vérifie $\varphi \circ \alpha = \beta$, ce qu'il nous fallait. □
THOooEDQKooLEGlDv

Théorème 6.134 (Steinitz[197, 198]).
À propos de clôture algébrique.

(1) Tout corps possède une clôture algébrique[62].

(2) Si $\alpha_1\colon \mathbb{K} \to \mathbb{F}_1$ et $\alpha_2\colon \mathbb{K} \to \mathbb{F}_2$ sont deux clôtures algébriques du même corps $\mathbb{K}$, alors il existe un isomorphisme de corps $\varphi\colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ tel que $\varphi \circ \alpha_1 = \alpha_2$.

Démonstration. Nous commençons par l'existence, en plusieurs points.

(1) **Un ensemble** Nous considérons un ensemble Ω qui contient $\mathbb{K}$, qui est strictement surpotent[63] à $\mathbb{K}$ et qui est infini non dénombrable si $\mathbb{K}$ est fini. Par exemple $\mathcal{P}(\mathbb{K}) \cup \mathbb{K}$ si $\mathbb{K}$ est infini et $\mathbb{R} \cup \mathbb{K}$ si $\mathbb{K}$ est fini (voir le théorème de Cantor 1.81).

(2) **L'ensemble pour Zorn** Nous considérons l'ensemble des extensions algébriques de $\mathbb{K}$ contenues dans Ω, c'est-à-dire
$$\mathcal{A} = \left\{ (\mathbb{L}, +_{\mathbb{L}}, \times_{\mathbb{L}}) \text{ tel que } \begin{cases} \mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \Omega \\ (\mathbb{L}, +_{\mathbb{L}}, \times_{\mathbb{L}}) \text{ est une extension algébrique de } (\mathbb{K}, +, \times). \end{cases} \right\} \tag{6.235}$$
Nous ordonnons $\mathcal{A}$ par l'inclusion : nous disons que
$$(\mathbb{L}_1, +_1, \times_1) < (\mathbb{L}_2, +_2, \times_2) \tag{6.236}$$
lorsque $(\mathbb{L}_2, +_2, \times_2)$ est un sur-corps de $(\mathbb{L}_1, +_1, \times_1)$ (en particulier $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2$).

[62] Définition 6.75.
[63] Définition 1.66.

(3) **$\mathcal{A}$ est inductif** Soit une partie $\mathcal{F} = \{(\mathbb{L}_i, +_i, \times_i)\}_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$ que nous supposons être totalement ordonnée. Nous allons lui trouver un majorant dans $\mathcal{A}$. Nous posons $\mathbb{L} = \bigcup_{i\in I} \mathbb{L}_i$, et si $a \in \mathbb{L}_i$, $b \in \mathbb{L}_j$, alors nous définissons

$$\begin{cases} a +_{\mathbb{L}} b = a +_k b & \text{(6.237a)} \\ a \times_{\mathbb{L}} b = a \times_k b & \text{(6.237b)} \end{cases}$$

où $k \in I$ est sélectionné de telle façon à avoir $(\mathbb{L}_i, +_i, \times_i) < (\mathbb{L}_k, +_k, \times_k)$ et $(\mathbb{L}_j, +_j, \times_j) < (\mathbb{L}_k, +_k, \times_k)$. Comme tous les corps L_i sont des sous-corps les uns des autres, c'est une bonne définition.

(4) **Lemme de Zorn** Nous utilisons le lemme de Zorn 1.37. Nous notons $(\mathbb{F}, +, \times)$ un élément maximal de $\mathcal{A}$. Puisque $\mathbb{K}$ en est un sous-corps, il n'y a pas d'ambiguïté de noter $+$ et $\times$ ses opérations.

(5) **Stratégie pour la suite** Nous allons montrer que si $\mathbb{E}$ est une extension algébrique de $\mathbb{F}$, alors $\mathbb{E} = \mathbb{F}$ (le but est d'utiliser le lemme 6.125).

(6) **Un peu de cardinalité** D'abord, comme $\mathbb{F}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$, l'ensemble $\mathbb{F}$ est équipotent à $\mathbb{K}$ si $\mathbb{K}$ est infini, et au plus dénombrable, si $\mathbb{K}$ est fini ; c'est la proposition 6.130. En bref :

- Si $\mathbb{K}$ est infini, $\mathbb{K} \approx \mathbb{F} \approx \mathbb{E} \prec \Omega$.
- Si $\mathbb{K}$ est fini, $\mathbb{K} \preceq \mathbb{F} \preceq \mathbb{E} \prec \Omega$ où $\mathbb{E}$ est au maximum dénombrable et Ω est indénombrable.

Dans tous les cas, Ω est strictement surpotent à $\mathbb{F}$, et le lemme 1.247 permet de dire

$$\mathbb{E} \setminus \mathbb{F} \preceq \mathbb{E} \prec \Omega \approx \Omega \setminus \mathbb{F}. \tag{6.238}$$

(7) **Quelques injections** Il existe donc une injection $\varphi : \mathbb{E} \setminus \mathbb{F} \to \Omega \setminus \mathbb{F}$. Nous posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{E} &\to \Omega \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{F} \\ \varphi(x) & \text{si } x \notin \mathbb{F}. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.239}$$

Nous montrons que f est injective. Soient $x, y \in \mathbb{E}$ tels que $f(x) = f(y)$. Si $x, y \in \mathbb{F}$, alors $x = f(x) = f(y) = y$. Si $x \in \mathbb{F}$ et $y \notin \mathbb{F}$, alors $x = \varphi(y)$ alors que $x \in \mathbb{F}$ et $\varphi(y) \in \Omega \setminus F$; ce cas est impossible. Enfin si x et y sont hors de $\mathbb{F}$, alors $f(x) = \varphi(x)$ et $f(y) = \varphi(y)$; donc $\varphi(x) = \varphi(y)$ et $x = y$ par injectivité de φ.

Nous avons donc bien une injection $f : \mathbb{E} \to \Omega$.

(8) **La maximalité**

Nous pouvons mettre sur $f(\mathbb{E}) \subset \Omega$ la structure de corps venant de $\mathbb{E}$. Comme $f(\mathbb{F}) = \mathbb{F}$, le corps $f(\mathbb{E})$ est une extension algébrique de $\mathbb{F}$. Par maximalité, $f(\mathbb{E}) = \mathbb{F}$.

Mais si $x \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$, alors $f(x) \in \Omega \setminus \mathbb{F}$. Donc en réalité nous avons aussi $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$.

(9) **Conclusion** En conclusion $\mathbb{E} = \mathbb{F}$ et le lemme 6.125 termine en disant que $\mathbb{F}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{K}$.

Nous passons à la partie « unicité » de la clôture algébrique. Étant donné que $\mathbb{F}_1$ est une extension algébrique de $\mathbb{K}$ et que $\mathbb{F}_2$ est algébriquement clos, le lemme 6.133 nous donne un morphisme de corps $\sigma : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ tel que $\sigma \circ \alpha_1 = \alpha_2$.

Nous sommes donc dans la situation où $\sigma : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ est une extension de corps où $\mathbb{F}_1$ est algébriquement clos et $\mathbb{F}_2$ est algébrique. Le lemme 6.80 conclut que $\sigma(\mathbb{F}_1) = \mathbb{F}_2$, c'est-à-dire que σ est surjectif. En tant que morphisme de corps, σ était déjà injective ; elle est donc bijective.

Donc $\sigma : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ est un isomorphisme de corps vérifiant $\sigma \circ \alpha_1 = \alpha_2$. □

6.135.
Bien que $\mathbb{C}$ soit une extension algébriquement close de $\mathbb{Q}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. C'est ce que nous montrons maintenant.

LEMooRDIZooRjWNMa

Lemme 6.136.
Le corps $\mathbb{C}$ n'est pas une clôture algébrique[64] *de $\mathbb{Q}$.*

[64] Clôture algébrique, définition 6.75.

Démonstration. Nous montrons qu'il existe des éléments de $\mathbb{C}$ qui ne sont pas des racines de polynômes à coefficients rationnels. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable par la proposition 1.501. L'ensemble des polynômes de degré n à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est en bijection avec les n-uples de rationnels, c'est-à-dire avec $\mathbb{Q}^n$ qui est également dénombrable par la proposition 1.233. Enfin l'ensemble des polynômes à coefficients sur $\mathbb{Q}$ est l'union des polynômes de degré fixés, donc dénombrable par la proposition 1.228.

Jusqu'ici nous avons prouvé que l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels était dénombrable. Or chaque polynôme possède une quantité finie de racines par le corolaire 3.119. Donc la partie de $\mathbb{C}$ constituée des nombres qui sont des racines de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Mais $\mathbb{C}$ n'est pas dénombrable, donc possède des éléments qui ne sont pas des racines de polynômes. □

La proposition suivante est une conséquence de Steinitz 6.134, de 6.62.

PROPooZWVPooStuTAO

Proposition 6.137 (Clôture algébrique de $\mathbb{R}$[199])**.**
Le corps $\mathbb{C}$ est l'unique (à isomorphisme près) clôture algébrique de $\mathbb{R}$. Son degré est 2.

6.4.9 Polynômes à plusieurs variables

Nous avons déjà vu $A[X,Y]$ lorsque A est un anneau en la définition 3.39.

DEFooRHRKooPqLNOp

Définition 6.138.
Soit un corps $\mathbb{K}$. Le corps $\mathbb{K}(X_1,\dots,X_n)$ est le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$.

DEFooOCPHooXneutp

Définition 6.139.
Soient un corps $\mathbb{K}$ et une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ contenant les éléments α_1,..., α_n de $\mathbb{L}$. Nous définissons $\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ comme étant l'intersection de tous les sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et les α_i.

La proposition suivante est analogue à 6.98(2).

LEMooQEJHooAmSNxU

Lemme 6.140 ([1])**.**
Soient un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}$ et des éléments $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ dans $\mathbb{L}$. Alors

$$\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\{r(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\text{ tel que }r\in\mathbb{K}(X_1,\dots,X_n)\}. \tag{6.240}$$

Démonstration. Ce que nous avons à droite est un corps : par exemple pour l'inverse, si $r=P/Q$ alors $r(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=P(\alpha_1,\dots,\alpha_n)Q(\alpha_1,\dots,\alpha_n)^{-1}$. Cet élément a un inverse en la fraction $(Q/P)(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

Donc à droite nous avons un sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ ainsi que les α_i. Donc

$$\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\subset\big\{r(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\text{ tel que }r\in\mathbb{K}(X_1,\dots,X_n)\big\}. \tag{6.241}$$

D'autre part, tout corps contenant $\mathbb{K}$ et les α_i doit contenir tous les $P(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ($P\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$), leurs inverses ainsi que leurs produits ; bref doit contenir tous les $r(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ avec $r\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$. □

6.4.10 Corps de décomposition

DEFooEKGZooSkvbum

Définition 6.141.
*Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $F=(P_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments non constants de $\mathbb{K}[X]$. Un **corps de décomposition** de F est une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ telle que*

(1) les P_i sont scindés sur $\mathbb{L}$,

(2) $\mathbb{L}=\mathbb{K}(R)$ où $R=\bigcup_{i\in I}\{x\in\mathbb{L}\text{ tel que }P_i(x)=0\}$.

C'est-à-dire que $\mathbb{L}$ étend $\mathbb{K}$ par toutes les racines de tous les polynômes de F.

PROPooDPOYooFHcqkU

Proposition 6.142 ([200])**.**
Tout polynôme admet un corps de décomposition. Plus précisément, soit un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$ de degré n. Il existe un corps de décomposition $\mathbb{D}$ de la forme $\mathbb{D}=\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ où les α_i sont des racines de P dans $\mathbb{D}$.

Notons que rien dans l'énoncé ne prétend que les α_i soient tous distincts, ni même que certains (voire tous) ne seraient pas dans $\mathbb{K}$.

Démonstration. Soient un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$. Si le degré de P est 0 ou 1, alors $\mathbb{K}$ est un corps de décomposition pour P. Pour le reste nous faisons une récurrence sur le degré de P.

Il y a deux possibilités, soit il existe $\alpha\in\mathbb{K}$ tel que $P(\alpha)=0$, soit non.

(1) **Si racine dans $\mathbb{K}$** Alors le corolaire 6.109 nous permet de factoriser $X-\alpha$:

$$P=(X-\alpha)Q \tag{6.242}$$

avec $\deg(Q)=\deg(P)-1$. Dans ce cas, $\mathbb{K}$ est un corps de rupture de P.

(2) **Si pas de racines dans $\mathbb{K}$**

Nous prenons alors un corps de rupture $\mathbb{L}=\mathbb{K}(\alpha)$ avec $P(\alpha)=0$ (c'est la proposition 6.119 qui donne l'existence d'un corps de rupture). Dans $\mathbb{L}_1$ nous avons

$$P=(X-\alpha)Q \tag{6.243}$$

avec $Q\in\mathbb{L}_1[X]$ et $\deg(Q)=\deg(P)-1$.

(3) **Dans les deux cas**

Dans les deux cas, par hypothèse de récurrence nous avons un corps de décomposition pour Q qui se présente sous la forme

$$\mathbb{L}=\mathbb{K}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}). \tag{6.244}$$

De plus, $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{L}_1$ parce que c'est une extension du corps sur lequel est Q.

Pour terminer la preuve nous prouvons que

$$\mathbb{D}=\mathbb{K}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha) \tag{6.245}$$

est un corps de décomposition de P. Vu que $\mathbb{D}$ contient $\mathbb{K}(\alpha)$ (comme cas particulier du lemme 6.140), dans $\mathbb{D}$ nous avons l'égalité $P=(X-\alpha)Q$. Et vu que $\mathbb{D}$ contient également $\mathbb{K}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$, toujours dans $\mathbb{D}$ nous avons aussi

$$Q=(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_{n-1}). \tag{6.246}$$

Donc nous avons dans $\mathbb{D}$ l'égalité

$$P=(X-\alpha)(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_{n-1}). \tag{6.247}$$

□
LEMooJNGWooTXdGre

Lemme 6.143 ([1]).
Soit un polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$, et un corps $\mathbb{L}$ dans lequel P est scindé. Si $P=P_1\ldots P_r$ est la décomposition de P en irréductibles dans $\mathbb{K}$, alors chacun des P_i est scindé dans $\mathbb{L}$.

Démonstration. Juste pour le mentionner, le fait que P ait une décomposition en irréductibles est le fait que $\mathbb{K}[X]$ soit factoriel, c'est-à-dire la proposition 6.36.

Le polynôme P est scindé dans $\mathbb{L}$, c'est-à-dire que, en notant n le degré de P,

$$P=\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) \tag{6.248}$$

EQooNFXSooUkWeQu

avec $\lambda_i\in\mathbb{L}$.

Soit $\mathbb{L}_1$, une extension de $\mathbb{L}$ dans laquelle P_1 est scindé. Ensuite, $\mathbb{L}_2$ une extension de $\mathbb{L}_1$ dans laquelle P_2 est scindé et ainsi de suite. Nous avons construit $\mathbb{L}_r$, une extension de $\mathbb{L}$ dans laquelle tous les P_i sont scindés ainsi que P lui-même. Dans ce corps nous avons l'égalité

$$P=\prod_{k=1}^{n}(X-\mu_k) \tag{6.249}$$

EQooBEFUooBnqSUS

où les μ_k sont des éléments des diverses extensions $\mathbb{L}_i$, et sont les racines des P_i. En tout cas, tous sont dans $\mathbb{L}_r$.

Les deux décompositions (6.248) et (6.249) sont des décompositions dans $\mathbb{L}_r[X]$ du polynôme P. Vu que ce dernier est factoriel, en réalité les deux décompositions sont identiques (se souvenir de la définition 3.53), et nous avons $\mu_k\in\mathbb{L}$ pour tout k. Toutes les extensions $\mathbb{L}_i$ sont en réalité triviales, et nous avons $\mathbb{L}_r=\mathbb{L}$.

Bref, tout cela pour dire que les P_i ont toutes leurs racines dans $\mathbb{L}$. □
THOooQVKWooZAAYxK

Théorème 6.144 ([188]).
Soient :

(1) un isomorphisme de corps $\tau\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$;

(2) un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n ;

(3) un corps de décomposition $\mathbb{L}$ de P sur $\mathbb{K}$;

(4) un corps de décomposition $\mathbb{L}'$ de $\tau(P)$ sur $\mathbb{K}'$;

Alors τ se prolonge en un isomorphisme $\sigma\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}'$.

Démonstration. Soit m le nombre de racines de P dans $\mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$. Nous faisons une récurrence sur m.

Si $m = 0$ alors $\mathbb{K}$ est un corps de rupture de P ; nous avons

$$P = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_n) \tag{6.250}$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Dans ce cas nous avons aussi

$$\tau(P) = \big(X - \tau(\lambda_1)\big)\dots\big(X - \tau(\lambda_n)\big) \tag{6.251}$$

avec $\tau(\lambda_i) \in \mathbb{K}'$. Nous avons donc $\mathbb{L}' = \mathbb{K}'$ et prendre $\sigma = \tau$ fonctionne.

Nous supposons à présent que $m > 0$. Plus précisément nous considérons un polynôme possédant exactement m racines dans $\mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$. Soit

$$P = P_1 \dots P_r \tag{6.252}$$

sa décomposition en irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ (notons que $r \leqslant n$ parce que chacun des facteurs est de degré au moins 1). Au moins un des P_i est de degré plus grand ou égal à 2. Nous savons de la proposition 6.36 que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau factoriel. Le lemme 6.143 nous assure que les polynômes P_i sont également scindés dans $\mathbb{L}$. Et l'unicité de la décomposition fait en sorte que les racines des P_i sont celles de P.

Soit $\alpha \in \mathbb{L}$, une racine de P_1. Vu que P_1 est irréductible sur $\mathbb{K}$, l'application suivante est un isomorphisme de corps par le lemme 6.83 :

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{K}[X]/(P_1) &\to \mathbb{K}[\alpha] \\ \bar{Q} &\mapsto Q(\alpha). \end{aligned} \tag{6.253}$$

Notons que le lemme parle du quotient par le polynôme minimal, mais ici nous avons un irréductible. Un polynôme annulateur irréductible est multiple du polynôme minimal, et l'idéal engendré est le même.

Nous avons aussi la décomposition

$$\tau(P) = \tau(P_1)\dots\tau(P_r), \tag{6.254}$$

et chacun des $\tau(P_i)$ a ses racines dans $\mathbb{L}'$. Soit β, une racine de $\tau(P_1)$ dans $\mathbb{L}'$. Alors nous avons l'isomorphisme

$$\psi'\colon \mathbb{K}'[X]/\big(\tau(P_1)\big) \to \mathbb{K}'[\beta]. \tag{6.255}$$

De plus, par le lemme 6.46, nous savons que τ passe aux classes :

$$\phi_\tau\colon \mathbb{K}[X]/(P_1) \to \mathbb{K}'[X]/\big(\tau(P_1)\big) \tag{6.256}$$

est un isomorphisme d'anneaux. Et enfin, dernier résultat externe à invoquer, la proposition 6.103 nous assure que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$ et $\mathbb{K}'[\beta] = \mathbb{K}'(\beta)$. Posons pour l'occasion $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}(\alpha)$ et $\mathbb{K}'_1 = \mathbb{K}'(\beta)$.

Nous avons l'enchainement suivant d'isomorphismes de corps[65] :

$$\tau_1 = \psi' \circ \phi_\tau \circ \psi^{-1}\colon \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}[X]/(P_1) \to \mathbb{K}'[X]/\big(\tau(P_1)\big) \to \mathbb{K}'_1. \tag{6.257}$$

Cet isomorphisme $\tau_1\colon \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}'_1$ prolonge τ. Si vous aimez les diagrammes, en voici un sur lequel les i représentent des inclusions et où τ et τ_1 sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{i} & \mathbb{K}_1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{L} \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_1} & & \\ \mathbb{K}' & \xrightarrow[i]{} & \mathbb{K}'_1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{L}' \end{array} \tag{6.258}$$

Le corps $\mathbb{L}$ est un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}_1$, et le nombre de racines de P dans $\mathbb{L} \setminus \mathbb{K}_1$ est strictement plus petit que m parce qu'il y en a exactement m dans $\mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$ et que $\mathbb{K}_1$ en a au moins une de plus que $\mathbb{K}$. Même raisonnement pour $\mathbb{K}'$, $\mathbb{K}'_1$ et $\mathbb{L}'$.

Résumons la situation :

[65] En réalité il est plus exact de dire « isomorphisme d'anneaux », parce que la structure de corps n'est en réalité aucune nouvelle structure par rapport à l'anneau.

- $\tau_1 : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}'_1$ est un isomorphisme de corps ;
- $P \in \mathbb{K}_1[X]$ est un polynôme non constant ;
- $\mathbb{L}$ est un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}_1$;
- $\mathbb{L}'$ est un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}'_1$;
- le nombre de racines de P dans $\mathbb{L} \setminus \mathbb{K}_1$ est strictement inférieur à m.

Donc, par hypothèse de récurrence sur m, il existe un isomorphisme $\sigma : \mathbb{L} \to \mathbb{L}'$ qui prolonge τ_1. Vu que τ_1 prolonge τ, nous avons également σ qui prolonge τ. □

L'énoncé le plus compact pour l'unicité du corps de décomposition (à isomorphisme près) est le suivant :
PropTMkfyM

Proposition 6.145.
Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient $\mathbb{L}$ et $\mathbb{F}$ deux corps de décomposition de P. Alors il existe un isomorphisme $f : \mathbb{L} \to \mathbb{F}$ tel que $f|_{\mathbb{K}} = \mathrm{Id}$.

Démonstration. C'est un cas particulier du théorème 6.144, où nous considérons $\mathbb{K} = \mathbb{K}'$ muni de l'isomorphisme identité. □

Cependant le passage par l'énoncé plus compliqué 6.144 est nécessaire pour les besoins de la récurrence.

6.146.
À propos de terminologie. Lorsque nous disons « *un* corps de décomposition » nous référons à la définition 6.141 et il n'y a pas vraiment unicité. Si nous disons « *le* corps de décomposition » nous référons en général à celui construit dans la proposition 6.142 qui n'est en réalité même pas très explicite.

Quoi qu'il en soit, nous nous permettons de dire « le » corps de décomposition lorsque nous parlons de propriétés invariantes par isomorphisme.

6.147.
La construction du corps de décomposition d'un polynôme fonctionne en prenant successivement le corps de rupture des facteurs irréductibles. Nous insistons sur le fait que cette opération se fait sur chaque facteur irréductible séparément.

L'exemple suivant montre dans quel ordre se passent les choses.

Exemple 6.148.
Soit le polynôme $P = X^4 - 5X^2 + 6$. Sa factorisation en irréductibles est :

$$P = (X^2 - 2)(X^2 - 3). \tag{6.259}$$

Ce polynôme n'est pas irréductible sur $\mathbb{Q}$ et il ne s'agit donc pas de prendre brutalement un corps de rupture pour P. Il s'agit de poser $P = P_1P_2$ avec

$$P_1 = X^2 - 2 \tag{6.260a}$$
$$P_2 = X^2 - 3, \tag{6.260b}$$

de remarquer que P_1 et P_2 sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$ et de chercher des corps de rupture pour eux. On commence par P_1. Nous avons le corps de rupture $\mathbb{L}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et la factorisation

$$P_1 = (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2}). \tag{6.261}$$

Ensuite nous considérons P_2 dans $\mathbb{L}_1[X]$. Ce P_2 est encore irréductible. Nous lui cherchons un corps de rupture, et c'est $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1(\sqrt{3})$ dans lequel nous avons

$$P_2 = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3}). \tag{6.262}$$

Nous savons (par le lemme 6.124) que

$$\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1(\sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}). \tag{6.263}$$

Nous pouvons donc écrire en toute confiance, dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ la factorisation

$$P = (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{3})(X - \sqrt{3}). \tag{6.264}$$

Et nous notons que si nous avions commencé par P_2 au lieu de P_1, nous aurions eu le même résultat final. △

CORooELAUooPQGLkR

Corolaire 6.149 ([1]).
Le corps de décomposition d'un polynôme est une extension finie.

Démonstration. Soient un corps $\mathbb{K}$, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et un corps de décomposition $\mathbb{D}$ de P de la forme $\mathbb{D} = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où les α_i sont les racines de P dans $\mathbb{D}$. Cela existe par la proposition 6.142.

Vu que le lemme 6.124 donne

$$\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \big(\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})\big)(\alpha_n), \tag{6.265}$$

le corps $\mathbb{D}$ se construit comme une pile d'extensions finies. Les degrés se composant par le lemme 6.63, au final ce corps de décomposition est une extension finie.

Soit maintenant un corps de décomposition quelconque $\mathbb{L}$. La proposition 6.145 donne un isomorphisme de corps[66] $f : \mathbb{L} \to \mathbb{D}$ tel que f soit l'identité sur $\mathbb{K}$.

Si $\{v_i\}_{i\in I}$ est une base de $\mathbb{D}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, êtes-vous prêts à parier que $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est une base de $\mathbb{L}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$[67] ? □

6.4.11 Non irréductible ou pas corps ?

SUBSECooEDMJooTXBfOu

Nous avons déjà mentionné que nous ne définissons le corps de rupture d'un polynôme que dans le cas de polynôme irréductible à coefficients dans un corps.

D'abord si P n'est pas irréductible, la question de chercher un corps de rupture n'a pas beaucoup de sens.

Si A est un anneau intègre et si P est un polynôme irréductible sur A, nous pouvons considérer le corps des fractions de A, dire $P \in \text{Frac}(A)[X]$ et continuer. Étendre la définition de corps de rupture de cette façon aux polynômes à coefficients dans un anneau intègre n'est pas une grande révolution.

Au lieu de cela, nous pouvons nous demander dans quel cas nous aurions que $A[X]/(P)$ est directement un corps.

Exemple 6.150.
Soit le polynôme constant $P = 2$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Il y est irréductible parce qu'il ne peut pas être écrit comme produit de deux non inversibles. Ce polynôme a deux propriétés ennuyeuses :

- Il n'est plus irréductible sur $\mathbb{Q}$,
- Il n'existe aucun corps contenant une racine de P tout en contenant $\mathbb{Z}$ comme sous-anneau.

△

6.4.12 Clôture algébrique

THOooQFWWooMWXEhT

Théorème 6.151.
Tout corps $\mathbb{K}$ possède une clôture algébrique[68] *Ω. De plus si $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{L}$ est $\mathbb{K}$-isomorphe à un sous corps de Ω.*

Les deux parties de ce théorème utilisent l'axiome du choix.

Notons en particulier que si Ω' est une autre clôture algébrique de $\mathbb{K}$, alors Ω et Ω' sont des sous corps l'un de l'autre et sont donc $\mathbb{K}$-isomorphes.

Lemme 6.152.
Les polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ne sont pas premiers entre eux si et seulement s'ils ont une racine commune dans la clôture algébrique Ω de $\mathbb{K}$.

Démonstration. Soit A un polynôme non inversible divisant P et Q. Par définition de Ω, ce polynôme A a une racine dans Ω qui est alors une racine commune à P et Q dans Ω.

Pour le sens inverse, si α est une racine commune de P et Q, alors le polynôme $X - \alpha$ divise P et Q et donc P et Q ne sont pas premiers entre eux. □

ExfUqQXQ

Exemple 6.153.
Soit p un nombre premier. Montrons que le polynôme

$$Q(X) = X^p - X + 1 \tag{6.266}$$

[66] Un isomorphisme de corps est juste un isomorphisme d'anneaux.
[67] Personnellement, je n'ai pas vérifié. Vérifiez vous-même et écrivez-moi pour dire si c'est bon ou non.
[68] Définition 6.75.

est irréductible dans $\mathbb{F}_p$.

Nous supposons qu'il n'est pas irréductible, c'est-à-dire que

$$Q(X) = R(X)S(X) \tag{6.267}$$

avec R et S, des polynômes de degrés $\geqslant 1$ dans $\mathbb{F}_p[X]$

Soit $\bar{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique[69] de $\mathbb{F}_p$ et $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}_p$ tel que $R(\alpha) = 0$. Pour tout $a \in \mathbb{F}_p$, nous avons

$$\begin{aligned} Q(\alpha + a) &= (\alpha + a)^p - (\alpha + a) + 1 && \text{(6.268a)}\\ &= \alpha^p + a^p - \alpha - a + 1 && \text{(6.268b)}\\ &= \alpha^p - \alpha + 1 && \text{(6.268c)}\\ &= Q(\alpha) && \text{(6.268d)}\\ &= 0 && \text{(6.268e)} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $a^p = a$ et que α était une racine de Q. Ce que nous venons de prouver est que l'ensemble des racines de Q dans $\bar{\mathbb{F}}_p$ est donné par $\{\alpha + a \text{ tel que } a \in \mathbb{F}_p\}$.

Les polynômes R et S sont donc formés de produits de termes $X - (\alpha + a)$ avec $a \in \mathbb{F}_p$. L'un des deux –disons R pour fixer les idées– doit bien en avoir plus que 1. Nous avons alors

$$R(X) = \prod_{i=1}^{k} \big(X - (\alpha + a_i)\big) \tag{6.269}$$

où les a_i sont les éléments de $\mathbb{F}_p$. En développant un peu,

$$R(X) = X^k - \sum_{i=1}^{k} (\alpha + a_i) X^{k-1} + \text{termes de degré plus bas en } X. \tag{6.270}$$

Le coefficient devant X^{k-1} n'est autre que $k\alpha + \sum_i a_i$. Étant donné que $k \neq 0$ et que $R \in \mathbb{F}_p[X]$, nous devons avoir $\alpha \in \mathbb{F}_p$. Par conséquent nous avons $\alpha^p = \alpha$ et une contradiction :

$$Q(\alpha) = \alpha^p - \alpha + 1 = 1 \neq 0. \tag{6.271}$$

Le polynôme $X^p - X + 1$ est donc irréductible sur $\mathbb{F}_p$. △

6.4.13 Dérivée de polynômes

DEFooICHTooAggARW

Définition 6.154 ([201]).
Soit un anneau A ainsi que $a_i \in A$. Pour le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, nous définissons le ***polynôme dérivé***

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}. \tag{6.272}$$

LEMooEFQQooTzDanH

Lemme 6.155 (Règle de Leibniz[201]).
Soit un anneau A. Nous considérons l'application dérivée[70]

$$\begin{aligned} D\colon A[X] &\to A[X]\\ P &\mapsto P'. \end{aligned} \tag{6.273}$$

(1) L'application D est A-linéaire.

(2) Elle vérifie $(PQ)' = PQ' + P'Q$.

LEMooFNFYooAfIPRT

Lemme 6.156 ([201]).
Soit un corps $\mathbb{K}$. Nous considérons l'application de dérivation[71] $D\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$.

(1) Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, alors $\ker(D) = \mathbb{K}$.

(2) Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique $p \neq 0$, alors $\ker(D) = \mathbb{K}[X^p]$.

Ici, $\mathbb{K}[X^p]$ est un gros abus de notations pour dire

$$\mathbb{K}[X^p] = \{Q(X^p) \text{ tel que } Q \in \mathbb{K}[X]\}. \tag{6.274}$$

[69] Définition 6.75. Pour l'existence c'est le théorème 6.151.
[70] Définition 6.154.
[71] Voir lemme 6.155.

6.4.14 Extensions séparables

Notons que dans ce qui va suivre nous allons parler de $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes sur un corps. Cela ne s'applique donc pas à $\mathbb{Z}[X]$ par exemple.

Une des choses intéressantes avec les extensions séparables c'est qu'elles vérifient le théorème de l'élément primitif 6.171.

LEMooGUUJooDSrQFU

Lemme 6.157 ([201]).
Soit un corps $\mathbb{K}$. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Nous avons équivalence entre :

ITEMooHMMMooWKzSLA

(1) a est une racine multiple[72] de P.

ITEMooZXCTooPctrMm

(2) $(X-a) \mid P$ et $(X-a) \mid P'$.

ITEMooBMSSooNOYfKn

(3) $P(a) = P'(a) = 0$

Démonstration. Soit n la multiplicité de la racine a de P. Éventuellement $n = 0$ si a n'est en réalité pas une racine. Nous avons

EQooRGYSooSkATRv
$$P = (X-a)^n Q \tag{6.275}$$

avec $Q(a) \neq 0$.

En ce qui concerne la dérivée, si $n = 0$ nous avons $P' = Q'$, et si $n \geqslant 1$ nous avons

EQooQLINooPKUENl
$$P' = n(X-a)^{n-1}Q + (X-a)^n Q'. \tag{6.276}$$

Nous faisons maintenant la preuve.

(1) **(1) implique (2)** Nous supposons que a est une racine multiple, c'est-à-dire $n \geqslant 2$. Les relations (6.275) et (6.276) nous montrent que $(X-a)$ divise aussi bien P que P'.

(2) **(2) implique (3)** Celle-ci est facile. Les hypothèses sont qu'il existe des polynômes A et B tels que $P = (X-a)A$ et $P' = (X-a)B$. Nous avons alors bien $P(a) = P'(a) = 0$.

(3) **(3) implique (1)** Nous avons $P = (X-a)^n Q$ avec $Q(a) \neq 0$. Par hypothèse $P(a) = 0$. Donc $n \geqslant 1$. Nous pouvons alors utiliser la formule (6.276) pour la dérivée :

$$P' = n(X-a)^{n-1}Q(a) + (X-a)^n Q'. \tag{6.277}$$

Nous avons donc $P'(a) = n0^{n-1}Q(a)$ avec $Q(a) \neq 0$. Par hypothèse $P'(a) = 0$ et donc $n - 1 \geqslant 0$, ce qui signifie $n \geqslant 2$ et donc que a est une racine multiple de P.

□

Proposition 6.158.
Soit P irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ ayant des racines distinctes dans le corps de décomposition $\mathbb{L}$. Si $\mathbb{L}'$ est un autre corps de décomposition pour P, alors P a aussi ses racines distinctes dans $\mathbb{L}'$.

Démonstration. L'ingrédient est la proposition 6.145 qui donne l'unicité du corps de décomposition à $\mathbb{K}$-isomorphisme près. Soit donc $\psi : \mathbb{L} \to \mathbb{L}'$ un isomorphisme laissant invariant les éléments de $\mathbb{K}$. D'une part, étant donné que P est à coefficients dans $\mathbb{K}$, nous avons $\psi(P) = P$. D'autre part dans $\mathbb{L}$ le polynôme P s'écrit

$$P = a(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n) \tag{6.278}$$

avec $a \in \mathbb{K}$ et $\alpha_i \in \mathbb{L}$. Nous avons donc

$$P = \psi(P) = a(X-\psi(\alpha_1))\dots(X-\psi(\alpha_n)). \tag{6.279}$$

Donc les racines de P dans $\mathbb{L}'$ sont les éléments $\psi(\alpha_i)$ qui sont distincts. □

Exemple 6.159.
Un polynôme peut être séparable sur un corps, mais non séparable sur un autre. Soit $\mathbb{L} = \mathbb{F}_p(T)$ et $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p(T^p)$. Nous considérons le polynôme

$$P = X^p - T^p \tag{6.280}$$

[72] Racine multiple, définition 3.112.

dans $\mathbb{K}[X]$. Par le morphisme de Frobenius nous avons

$$P = (X - T)^p \tag{6.281}$$

dans $\mathbb{L}[X]$. Le polynôme P est irréductible sur $\mathbb{K}[X]$ parce que ses diviseurs sont de la forme $(X-T)^k$ qui contiennent T^k qui n'est pas dans $\mathbb{K}$ (sauf si $k = n$ ou $k = 0$).

Ce polynôme n'est pas séparable sur $\mathbb{K}$ parce que dans le corps de décomposition $\mathbb{L}$, la racine T est multiple. Notons bien le raisonnement : P étant irréductible, pour savoir si il est séparable, on le regarde dans un corps de décomposition.

Par contre si nous regardons P dans $\mathbb{L}[X]$ alors P n'est plus irréductible parce que ses facteurs irréductibles sont $(X - T)$. N'étant pas irréductible, nous regardons les racines de *ses facteurs irréductibles*. Or chacun des facteurs irréductibles étant $X - T$, les racines sont simples. △

Exemple 6.160.
Le polynôme $X^3 - 1$ est séparable sur $\mathbb{Q}$ parce que ses facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ sont $X - 1$ et $X^2 + X + 1$, et ces deux polynômes ont des racines simples (dans $\mathbb{Q}(i)$). △

Exemple 6.161.
Le polynôme $(X^2+1)^2$ est séparable dans $\mathbb{Q}[X]$. En effet, il a pour facteurs irréductibles le polynôme X^2+1 (en deux exemplaires), et ce polynôme a pour racines $\pm i$ dans l'extension $\mathbb{Q}(i)$, racines qui sont simples pour ce polynôme. △

PropolyeZff

Proposition 6.162 ([202])**.**
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

ItemdqPFUi

ItemdqPFUib

ItemdqPFUii

ItemdqPFUiii

(1) Il existe une extension de $\mathbb{K}$ dans laquelle P a une racine multiple.

(2) P a une racine multiple dans tout corps de décomposition .

(3) P et P' ont une racine commune dans une extension de $\mathbb{K}$.

(4) le degré de $\operatorname{pgcd}(P, P')$ est $\geqslant 1$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1)⇒(2)** Soit a, une racine multiple de P dans une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$, et $\mathbb{E}$, un corps de décomposition de P. Alors nous voulons prouver que P ait une racine multiple dans $\mathbb{E}$.

Nous pouvons voir $P \in \mathbb{L}[X]$, et construire un corps de décomposition $\mathbb{E}'$ qui est une extension de $\mathbb{L}$. Vu que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux corps de décomposition de P nous avons un isomorphisme $\psi\colon \mathbb{E}' \to \mathbb{E}$. Si $a \in \mathbb{E}$ est une racine multiple de P, alors $\psi(a)$ est une racine multiple de P dans $\mathbb{E}'$ parce que

$$P\big(\psi(a)\big) = \psi\big(P(a)\big). \tag{6.282}$$

(2) **(2)⇒(3)** Soit $\mathbb{L}$ un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{L}$, une racine multiple de P. On a alors $P = (X - a)^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{L}[X]$. En dérivant,

$$P' = 2(X - a)Q + (X - a)^2 Q', \tag{6.283}$$

et donc a est également une racine de P'.

(3) **(3)⇒(4)** Soit D un pgcd de P et P'. D'après le théorème de Bézout il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$AP + BP' = D. \tag{6.284}$$

Si a est une racine commune de P et P' dans une extension $\mathbb{L}$, alors c'est aussi une racine de D et donc $\deg(D) \geqslant 1$.

(4) **(4)⇒(1)** Si le degré de D est plus grand ou égal à 1, alors nous considérons une racine a de D dans $\mathbb{L}$ (une extension de $\mathbb{K}$). Étant donné que D divise P et P', l'élément a est une racine commune de P et P'. Nous montrons maintenant que a est alors une racine multiple de P. Vu que $P(a) = 0$ nous avons

$$P = (X - a)Q, \tag{6.285}$$

et $P' = Q + (X - a)Q'$. Mais alors $P'(a) = Q(a)$ et donc $Q(a) = 0$ et donc a est une racine double de P. Par conséquent a est une racine multiple de P dans $\mathbb{K}$.

□

Notons que si P est irréductible, cette proposition donne des conditions pour que P ne soit pas séparable.
LEMooVWBPooQITlUL

Lemme 6.163 ([191]).
Soient un corps $\mathbb{K}$ ainsi qu'un polynôme irréductible non nul $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors P divise Q si et seulement si $\operatorname{pgcd}(P,Q) \neq 1$.

Démonstration. Nous notons $D = \operatorname{pgcd}(P,Q)$. C'est un polynôme qui divise P. De plus P est irréductible, donc non inversible. Vu que P est non nul, nous avons $\deg(P) \geqslant 1$.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que P divise Q. Alors P est un diviseur commun de P et Q. Le lemme 6.55 (qui n'est en fait qu'une répétition de la définition du pgcd) nous dit alors que P divise $\operatorname{pgcd}(P,Q)$. Nous avons donc

$$0 < \deg(P) \leqslant \deg\big(\operatorname{pgcd}(P,Q)\big). \tag{6.286}$$

Donc le polynôme $\operatorname{pgcd}(P,Q)$ est un polynôme non constant et n'est en particulier pas 1.

(2) $\Leftarrow$ Le polynôme D est un diviseur commun de P et Q. En particulier $P = SD$ pour un certain polynôme S. Étant donné que P est irréductible, soit S soit D (ou les deux) est inversible. Par hypothèse $D \neq 1$, et comme D est unitaire, nous savons que D n'est pas un inversible. Bref, S est un inversible, c'est-à-dire que $S = k \in \mathbb{K}$. Nous notons que

$$P = kD. \tag{6.287}$$
EQooQESZooDHgkWm

Le polynôme D divise également Q. Il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = TD$. En remplaçant D par sa valeur déduite de (6.287) nous avons

$$Q = TD = k^{-1}TP, \tag{6.288}$$

ce qui signifie que P divise Q.

□

Nous rappelons à le très aimable lecteur que $\operatorname{pgcd}(P,Q)$ est l'unique polynôme unitaire parmi les PGCD de P et Q. La définition des PGCD est 1.105 et l'unicité de l'unitaire est dans le lemme 6.52(2).
PROPooPRGQooOkEmag

Proposition-Définition 6.164 ([201, 203]).
Soient un corps $\mathbb{K}$, un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ ainsi qu'une extension algébriquement close Ω et un corps de décomposition[73] *$\mathbb{M}$ pour P. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*[74] *:*
ITEMooVMJLooUdZLQR

(1) $\operatorname{pgcd}(P,P') = 1$.

(2) P et P' n'ont de racines communes dans aucune extension de $\mathbb{K}$.

(3) P et P' n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{M}$.

(4) P et P' n'ont pas de racines communes dans Ω.
ITEMooARPLooBoUrxX

(5) P n'a de racines multiples dans aucune extension de $\mathbb{K}$.

(6) P n'a que des racines simples dans $\mathbb{M}$.

(7) P n'a que des racines simples dans Ω.

(8) Il existe une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ ainsi que $\beta, \alpha_i \in \mathbb{L}$ tels que

$$P = \beta \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i) \tag{6.289}$$

où les α_i sont distincts.

(9) Il existe $\beta, \alpha_i \in \mathbb{M}$ tels que $P = \beta \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ où les α_i sont distincts.

(10) Il existe $\beta, \alpha_i \in \Omega$ tels que $P = \beta \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ où les α_i sont distincts.

[73] Tout polynôme admet un corps de décomposition, proposition 6.142.
[74] Pour lee polynôme dérivé P', définition 6.154.

Un polynôme irréductible qui vérifie ces conditions est dit ***séparable****.*

Si P est un polynôme non constant dont la décomposition en irréductibles est $P = P_1 \dots P_r$, nous disons qu'il est ***séparable*** *si tous les P_i le sont.*

PROPooMOZFooDGemBJ

Proposition 6.165 ([201, 203])**.**
Soit un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme irréductible non nul $P \in \mathbb{K}[X]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

ITEMooDOTIooTZGhSq

(1) P est séparable[75]

ITEMooRTDCooJGEtum

(2) $P' \neq 0$

ITEMooZOMZooDPrNaC

(3) Il existe une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ dans laquelle P a une racine simple.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(3) implique (2)** Soient une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ ainsi qu'une racine simple $a \in \mathbb{L}$. Nous utilisons la proposition 3.116 : il existe un polynôme $Q \in \mathbb{L}[X]$ tel que $P = (X - a)Q(X)$ avec $\mathbb{L} \neq 0$.

Nous utilisons la règle de Leibniz (lemme 6.155) : $P' = (X-a)'Q(X) + (X-a)Q'(X) = Q(X) + (X-a)Q'(X)$. En évaluant en a,

$$P'(a) = Q(a) \neq 0. \tag{6.290}$$

(2) **(2) implique** $\operatorname{pgcd}(P, P') = 1$ Notons $D = \operatorname{pgcd}(P, P')$. Vu que D divise P, il existe un polynôme Q tel que $P = QD$. Le polynôme P étant irréductible, soit Q soit D est inversible. Supposons que Q est inversible. Alors $P = kD$ avec $k \in \mathbb{K}$. En particulier $\deg(P) = \deg(D)$. Mais comme D est un diviseur de P', nous avons

$$\deg(D) \leqslant \deg(P') < \deg(P). \tag{6.291}$$

Nous avons une contradiction.

Nous en déduisons que dans l'égalité $P = DQ$, c'est D qui est inversible. Donc $D \in \mathbb{K}$. Vu que D est unitaire[76], nous avons $D = 1$.

(3) **(2) implique (1)** Nous avons déjà vu que dans le cas (2) nous avons $\operatorname{pgcd}(P, P') = 1$. La proposition-définition 6.164(1) nous indique qu'alors P est séparable.

(4) **(1) implique (3)** La proposition 6.142 nous permet de considérer un corps de décomposition de P. Dans ce corps, P admet des racines (autant que son degré, mais c'est une autre histoire), et ces racines sont simples par la définition 6.164(5).

□

CorUjfJSE

Corolaire 6.166.
Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, alors tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est séparable.

Démonstration. Il suffit de montrer que les irréductibles sont séparables. Soit P un polynôme irréductible et unitaire de degré d. Le terme de plus haut degré de P' est alors dX^{d-1} qui est non nul parce que $d \neq 0$ en caractéristique nulle. Donc $P' \neq 0$ et donc P est séparable par la proposition 6.162. □

DEFooKTVHooTydOTM

Définition 6.167.
Soit $\mathbb{L}$ une extension algébrique de $\mathbb{K}$.

ITEMooOFYPooLYkIPr

(1) On dit que l'élément $a \in \mathbb{L}$ est ***séparable*** *sur $\mathbb{K}$ si son polynôme minimal dans $\mathbb{K}[X]$ est séparable sur $\mathbb{K}$ (définition 6.164).*

(2) L'extension $\mathbb{L}$ est ***séparable*** *si tous ses éléments sont séparables.*

PropUmxJVw

Proposition 6.168.
Soit $\mathbb{K}$ un corps. Les conditions suivantes sont équivalentes :

ITEMooUSKRooDmsGmw

(1) toutes les extensions algébriques de $\mathbb{K}$ sont séparables ;

ITEMooJGWLooKInxSG

(2) tout polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ est séparable.

En particulier les extensions algébriques des corps de caractéristique nulle sont toutes séparables.

[75] Polynôme séparable, définition 6.164.
[76] Le pgcd de deux polynômes est l'unitaire parmi tous les pgcd, voir 6.53.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) implique (2)**

Soit un polynôme irréductible P de $\mathbb{K}[X]$, et un corps de décomposition $\mathbb{L}$ de P. Cela est une extension algébrique par le corolaire 6.149. Elle est donc séparable par hypothèse.

Voilà une première chose de dite.

Maintenant, nous voudrions montrer que P est un polynôme séparable. Dans $\mathbb{L}$ nous avons

$$P = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i), \tag{6.292}$$

et tout le défi est de prouver que les a_i sont tous distincts.

Soient deux racines $a, b \in \mathbb{L}$ de P. Nous considérons les polynômes minimaux μ_a et μ_b dans $\mathbb{K}[X]$. Ces deux polynômes divisent P parce que P est à la fois dans l'idéal annulateur de a et de b. Mais comme P est irréductible, il existe $k_a, k_n \in \mathbb{K}$ tels que $P = k_a\mu_a$ et $P = k_b\mu_b$. Donc les polynômes μ_a, μ_b et P sont multiples les uns des autres. Vu que μ_a et μ_n sont unitaires, $\mu_a = \mu_b$.

Nous avons :

$$P = k\mu = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i). \tag{6.293}$$

Or le polynôme μ est irréductible par la proposition 6.67(1), et l'extension $\mathbb{L}$ est séparable, donc μ n'a que des racines simples, Donc tous les a_i sont distincts.

(2) **(2) implique (1)**

Soit une extension algébrique $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{L}$. Nous devons prouver que le polynôme minimal de a dans $\mathbb{K}$ est séparable, c'est-à-dire qu'il n'a que des racines simples.

Le polynôme minimal $\mu_a \in \mathbb{K}[X]$ de a est irréductible et donc séparable. Donc $\mathbb{L}$ est séparable.

La dernière phrase est une conséquence du corolaire 6.166. □

CORooNZZMooIoBYXY

Corolaire 6.169.
Toute les extensions algébriques de $\mathbb{Q}$ sont séparables.

Démonstration. Le corps $\mathbb{Q}$ est de caractéristique nulle (définition 1.464). Le corolaire 6.166 dit alors que tout polynôme sur $\mathbb{Q}$ est séparable. La proposition 6.168 conclut en disant que toutes les extensions algébriques de $\mathbb{Q}$ sont séparables. □

ThobkwCMm

Théorème 6.170 ([124])**.**
Soit $\mathbb{K}$ un corps (pas spécialement fini). Tout sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$ est cyclique.

Démonstration. Soit G un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$ et ω son exposant (qui est le PPCM des ordres des éléments de G). Étant donné que $|G|$ est divisé par tous les ordres, il est divisé par le PPCM des ordres. Bref, nous avons

$$x^\omega = 1 \tag{6.294}$$

pour tout $x \in G$. Mais ce polynôme possède au plus ω racines dans $\mathbb{K}$. Du coup $|G| \leqslant \omega$. Et comme on avait déjà vu que $\omega \mid |G|$, on a $\omega = |G|$. Il suffit plus que trouver un élément d'ordre effectivement ω. Cela est fait par le lemme 3.28. □

ThoORxgBC

Théorème 6.171 (Théorème de l'élément primitif[124])**.**
Toute extension de corps séparable finie admet un élément primitif[77]*.*

Autrement dit, soient des éléments algébriques $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ séparables[78] *sur $\mathbb{K}$, et soit l'extension engendrée $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Alors $\mathbb{L}$ admet un élément primitif, c'est-à-dire un élément θ tel que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\theta)$.*

Démonstration. Si le corps $\mathbb{K}$ est fini, alors $\mathbb{L}$ est également fini. Donc $\mathbb{L}^*$ est cyclique par le théorème 6.170. Si θ est un générateur de $\mathbb{L}^*$, alors $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\theta)$.

Passons au cas où $\mathbb{K}$ est infini. Il suffit d'examiner le cas $n = 2$; en effet pour $n = 1$ c'est trivial et si $n > 2$, alors

$$\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})(\alpha_n), \tag{6.295}$$

[77] Définition 6.93.
[78] Définition 6.167(1).

et donc si $\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})=\mathbb{K}(\theta)$, nous avons

$$\mathbb{K}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\mathbb{K}(\theta,\alpha_n) \tag{6.296}$$

et nous sommes réduit au cas $n=2$ par récurrence.

Soit donc $\mathbb{L}=\mathbb{K}(\alpha,\beta)$; soit P le polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}$ et Q celui de β. Nous nommons $\mathbb{E}$, un corps de décomposition de PQ. Nous avons $\mathbb{L}\subset\mathbb{E}$. Vu que P et Q sont polynômes minimaux d'éléments qui sont par hypothèse séparables, les polynômes P et Q sont séparables. Donc dans $\mathbb{E}$ les racines de P sont distinctes parce que P est irréductible (et idem pour Q). Soient les racines

$$\alpha_1=\alpha,\alpha_2,\dots,\alpha_r \tag{6.297}$$

de P dans $\mathbb{E}$ et les racines

$$\beta_1=\beta,\beta_2,\dots,\beta_s \tag{6.298}$$

de Q dans $\mathbb{E}$. Ici r et s sont les degrés de P et Q.

Si $s=1$ alors $Q=X-\beta$ et donc $\beta\in\mathbb{K}$ (parce que $Q\in\mathbb{K}[X]$). Du coup nous avons $\mathbb{L}=\mathbb{K}(\alpha)$ et le théorème est démontré. Nous supposons donc maintenant que $s\geqslant 2$.

Pour chaque $(i,j)\in[\![1,r]\!]\times[\![2,s]\!]$, l'équation $\alpha_i+x\beta_k=\alpha_1+x\beta_1$ pour $x\in\mathbb{K}$ a au plus[79] une solution donnée le cas échéant par

$$x=(\alpha_i-\alpha_1)(\beta_1-\beta_k)^{-1} \tag{6.299}$$

EqWzUFHe

Notons que cela est de toutes façons dans $\mathbb{L}$ et qu'étant donné que $\beta_1\neq\beta_k$, cette solution a un sens (ici on utilise l'hypothèse de séparabilité). Étant donné que $\mathbb{K}$ est infini nous pouvons donc trouver un $c\in\mathbb{K}$ qui ne résout aucune des équations (6.299) :

$$\alpha_i+c\beta_k\neq\alpha_1+c\beta_1. \tag{6.300}$$

EQooIIMVooSmyriP

Nous posons $\theta=\alpha_1+c\beta_1$ et nous prétendons que $\mathbb{L}=\mathbb{K}(\theta)$.

Pour cela, commençons par montrer que $\beta_1\in\mathbb{K}(\theta)$. On considère, dans $\mathbb{K}(\theta)[T]$, les polynômes $Q(T)$ et $S(T)=P(\theta-cT)$, et on nomme R le PGCD de ces deux polynômes. Alors, une racine de R doit être une racine de Q, et est donc un des β_i. Or, d'une part, le choix de θ fait que β_1 est une racine de R parce que

$$S(\beta_1)=P(\theta-c\beta_1)=P(\alpha_1+c\beta_1-c\beta_1)=P(\alpha_1)=0. \tag{6.301}$$

D'autre part, si $k\geqslant 2$, alors

$$S(\beta_k)=P(\alpha_1+c\beta_1-c\beta_k)=P\big(\alpha_1+c(\beta_1-\beta_k)\big)\neq 0 \tag{6.302}$$

parce que $\alpha_1+c(\beta_1-\beta_k)$ ne vaut ni α_1 (le second terme est non-nul), ni un autre α_i (à cause de (6.300)).

Il s'ensuit que Q et S n'ont qu'une racine commune $\beta_1=\beta$, qui est donc l'unique racine de R. Ainsi,

$$R=X-\beta\in\mathbb{K}(\theta)[T], \tag{6.303}$$

et donc $\beta\in\mathbb{K}(\theta)$.

Dès lors $\alpha=\alpha_1=\theta-c\beta$ est alors immédiatement dans $\mathbb{K}(\theta)$; puisque les deux éléments α et β sont dans $\mathbb{K}(\theta)$, nous avons obtenu $\mathbb{L}=\mathbb{K}(\alpha,\beta)=\mathbb{K}(\theta)$.

□

Exemple 6.172.
Le théorème de l'élément primitif 6.171 ne tient pas pour les corps non commutatifs. Considérons par exemple le corps $\mathbb{K}$ des quaternions et le groupe à 8 éléments $G=\{\pm 1,\pm i,\pm j,\pm k\}$. Ce dernier groupe n'est pas cyclique alors qu'il est un groupe fini dans $\mathbb{K}^*$. △

Exemple 6.173.
Il est aussi possible pour un groupe fini d'avoir $\omega(G)=|G|$ sans pour autant que G soit cyclique. Par exemple pour $G=S_3$, nous avons $|S_3|=6$ alors que les éléments de S_3 sont soit d'ordre 2 soit d'ordre 3 et $\omega(G)=\text{ppcm}(2,3)=6$. Pourtant S_3 n'est pas cyclique. △

[79] La solution (6.299) peut être dans $\mathbb{L}$ et non dans $\mathbb{K}$. L'équation peut donc très bien ne pas avoir de solutions $x\in\mathbb{K}$.

6.5 Idéal maximum

6.5.1 Idéal maximum

DefWHDdTrC

Définition 6.174.
*Une $\mathbb{K}$-algèbre est de **type fini** si elle est le quotient de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ par un idéal (pour un certain n).*

ThonoZyKa

Théorème 6.175 ([204]).
Soit $\mathbb{K}$ un corps et B, une $\mathbb{K}$-algèbre de type fini. Si B est un corps, alors c'est une extension algébrique finie de $\mathbb{K}$.

ThowgZYqx

Théorème 6.176 ([204]).
Si $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos, les idéaux maximaux[80] de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ sont de la forme

$$(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \tag{6.304}$$

où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Démonstration. Nous commençons par montrer que

$$J = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \tag{6.305}$$

est un idéal maximum. Pour cela nous considérons le morphisme surjectif d'anneaux

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] &\to \mathbb{K} \\ P &\mapsto P(a_1, \dots, a_n). \end{aligned} \tag{6.306}$$

Soit $P \in \ker(\phi)$; nous écrivons la division euclidienne de P par $X - a_1$ puis celle du reste par $X - a_2$ et ainsi de suite :

EqDAkjiH

$$P = (X - a_1)Q_1 + \cdots + (X_n - a_n)Q_n + R \tag{6.307}$$

où R doit être une constante parce que le premier reste est de degré zéro en X_1, le second est de degré zéro en X_1 et X_2, etc. Afin d'identifier cette constante, nous appliquons l'égalité (6.307) à $(a_1, \dots, a_n)$ et en nous rappelant que $P \in \ker(\phi)$ nous obtenons

$$0 = P(a_1, \dots, a_n) = R, \tag{6.308}$$

donc $R = 0$ et $P = (X_1 - a_1)Q_1 + \cdots + (X_n - a_n)Q_n$, c'est-à-dire $P \in J$. Nous avons donc $\ker(\phi) \subset J$. Par ailleurs $J \subset \ker(\phi)$ est évident, donc $J = \ker(\phi)$.

Vu que J est le noyau de l'application $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \to \mathbb{K}$, nous avons

$$\frac{\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]}{J} = \mathbb{K}. \tag{6.309}$$

Donc J est un idéal maximal parce que tout polynôme n'étant pas dans J doit avoir un terme indépendant non nul et donc être dans $\mathbb{K}$ vis-à-vis du quotient $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/J$.

Nous montrons maintenant l'implication inverse. Nous supposons que I est un idéal maximum et nous montrons qu'il doit être égal à J (pour un certain choix de $a_1, \dots, a_n$).

Le quotient

$$\frac{\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]}{I} \tag{6.310}$$

est une $\mathbb{K}$-algèbre de type fini (définition 6.174). De plus c'est un corps par la proposition 1.401. C'est donc une extension algébrique finie de $\mathbb{K}$ par le théorème 6.175. Mais $\mathbb{K}$ étant algébriquement clos, il est sa propre et unique extension algébrique ; nous en déduisons que

$$\frac{\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]}{I} = \mathbb{K}. \tag{6.311}$$

Donc pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe $a_i \in \mathbb{K}$ tel que $X_i - a_i \in I$, sinon le monôme X_i ne se projetterait pas sur un élément dans $\mathbb{K}$ dans le quotient. Cela prouve que J est contenu dans I ; par maximalité nous avons donc $I = J$. □

[80] Définition 1.400.

Corolaire 6.177.
Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et I, un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Si nous notons

$$V(I) = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } P(x_1, \ldots, x_n) = 0, \forall P \in I\} \tag{6.312}$$

l'ensemble des racines communes à tous les éléments de I, on a $V(I) = \varnothing$ si et seulement si $I = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$.

Démonstration. Si $I = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ en particulier $1 \in I$ et nous avons évidemment $V(I) = \varnothing$. Le sens difficile est l'autre sens.

Supposons que $I \neq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ et que K est un idéal maximum contenant I (ça existe par le théorème de Krull 1.402). Nous savons déjà par le théorème 6.176 que K est de la forme $K = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$. Un élément de I est dans K, donc si $P \in I$ nous avons

$$P(a_1, \ldots, a_n) = 0, \tag{6.313}$$

c'est-à-dire que $(a_1, \ldots, a_n) \in V(I)$ et donc que $V(I) \neq \varnothing$. □

6.6 Polynômes symétriques et alternés

6.6.1 Polynômes symétriques, alternés ou semi-symétriques

Nous rappelons que le groupe symétrique S_n agit sur l'anneau des polynômes de n variables sur l'anneau A par le lemme 1.482.

Définition 6.178.
Un polynôme Q en n indéterminées est

(1) ***symétrique*** *si $Q = \sigma \cdot Q$ pour tout $\sigma \in S_n$;*

(2) ***alterné*** *si $\sigma \cdot Q = \epsilon(\sigma)Q$ pour tout $\sigma \in S_n$;*

(3) ***semi-symétrique*** *si $\sigma \cdot Q = Q$ pour tout $\sigma \in A_n$*

Le polynôme $T_1 + T_2$ est symétrique ; le polynôme $T_1 + T_2^2$ ne l'est pas.

6.6.2 Polynôme symétrique élémentaire

DEFooTREUooZKoXeg

Définition 6.179.
*Le k-ième **polynôme symétrique élémentaire** à n inconnues est le polynôme*

$$\sigma_k(T_1, \ldots, T_n) = \sum_{s \in F_k} \prod_{i=1}^{k} T_{s(i)} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} X_{i_1} \ldots X_{i_k}. \tag{6.314}$$

où F_k est l'ensemble des fonctions strictement croissantes $\{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\sigma_1(T_1, \ldots, T_n) = T_1 + T_2 + \cdots + T_n \tag{6.315a}$$
$$\sigma_2(T_1, \ldots, T_n) = T_1T_2 + \cdots + T_1T_n + T_2T_3 + \cdots + T_2T_n + \cdots + T_{n-1}T_n \tag{6.315b}$$
$$\sigma_n(T_1, \ldots, T_n) = T_1 \ldots T_n. \tag{6.315c}$$

En particulier, $\sigma_2(x, y, z) = xy + yz + xz$.

TholReBiw

Théorème 6.180 ([205, 206]).
Soit un anneau commutatif A. Soit un polynôme symétrique à n indéterminées P à coefficients dans A. Alors il existe un unique polynôme Q à coefficients dans A tel que

$$P = Q(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \tag{6.316}$$

où les σ_i sont les polynômes symétriques élémentaires[81].

[81] Définition 6.179.

Exemple 6.181.
Nous voulons décomposer $P(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ en polynômes symétriques élémentaires, c'est-à-dire en

$$\begin{cases} \sigma_1 = x+y+z & (6.317a)\\ \sigma_2 = xy+xz+yz & (6.317b)\\ \sigma_3 = xyz. & (6.317c) \end{cases}$$

Étant donné que P est de degré 3, les seules combinaisons des σ_i qui peuvent intervenir sont σ_1^3, $\sigma_1\sigma_2$ et σ_3. Étant donné que dans P le coefficient de x^3 est un, il est obligatoire d'avoir un coefficient 1 devant σ_1^3. Nous le calculons :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.8, Release Date: 2012-01-20                         |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: var('x,y,z')
(x, y, z)
sage: P=x**3+y**3+z**3
sage: S1=x+y+z
sage: S2=x*y+x*z+y*z
sage: S3=x*y*z
sage: (S1**3).expand()
x^3 + 3*x^2*y + 3*x^2*z + 3*x*y^2 + 6*x*y*z + 3*x*z^2 + y^3
                + 3*y^2*z + 3*y*z^2 + z^3
sage: (S1**3-P).expand()
3*x^2*y + 3*x^2*z + 3*x*y^2 + 6*x*y*z + 3*x*z^2 + 3*y^2*z + 3*y*z^2
x^3 + 3*x^2*y + 3*x^2*z + 3*x*y^2 + 6*x*y*z + 3*x*z^2
            + y^3 + 3*y^2*z + 3*y*z^2 + z^3
```

Dans la différence σ_1^3-P nous voyons que le terme en xyz est $6xyz$; par conséquent nous savons que le coefficient de σ_3 sera -6. Il nous reste :

```
sage: (S1**3+6*S3-P).expand()
3*x^2*y + 3*x^2*z + 3*x*y^2 + 12*x*y*z + 3*x*z^2 + 3*y^2*z + 3*y*z^2
```

que nous identifions facilement avec $3\sigma_1\sigma_2$. Nous avons donc

$$P=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3. \tag{6.318}$$

△

LemSoXCQH

Lemme 6.182 ([137]).
Soit $\mathbb{K}$ une extension de degré δ de $\mathbb{Q}$ et $P\in\mathbb{K}[T_1,\dots,T_m]$. Alors il existe $\bar{P}\in\mathbb{Q}[T_1,\dots,T_m]$ tel que

(1) $\deg\bar{P}=\delta\deg(P)$

(2) pour tout $(z_1,\dots,z_m)\in\mathbb{C}^m$ tel que $P(z_1,\dots,z_m)=0$, on a $\bar{P}(z_1,\dots,z_m)=0$.

Démonstration. En vertu de la proposition 6.168 et du corolaire 6.169, $\mathbb{K}$ est une extension séparable de $\mathbb{Q}$, et donc vérifie le théorème de l'élément primitif (6.171). Il existe $\theta\in\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\theta)$. Soit $P_\theta\in\mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de θ. L'extension $\mathbb{K}$ étant de degré δ, et θ étant un générateur, une base de $\mathbb{K}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ est

$$\{1,\theta,\dots,\theta^{\delta-1}\}. \tag{6.319}$$

Mais par ailleurs la proposition 6.103(2) nous indique qu'une base de $\mathbb{Q}(\theta)$ sur $\mathbb{Q}$ est donnée par

$$\{1,\theta,\dots,\theta^{n-1}\} \tag{6.320}$$

où n est le degré de P_θ. Donc P_θ est de degré δ. Nous nommons $\theta_1,\dots,\theta_\delta$ les racines de P_θ dans un corps de décomposition. Ici nous notons $\theta=\theta_1$ et nous ne prétendons pas que $\theta_k\in\mathbb{K}$. Notons que ces θ_i sont toutes des racines simples de P_θ, sinon nous aurions un facteur irréductible $(X-\theta_k)^2$, et P_θ ne serait pas irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Soit σ_k le morphisme canonique

$$\begin{aligned}\sigma_k\colon \mathbb{Q}(\theta) &\to \mathbb{Q}(\theta_k)\\ \sum_i q_i\theta^i &\mapsto \sum_i q_i\theta_k^i\end{aligned} \tag{6.321}$$

Nous avons $\sigma_1\colon \mathbb{K}\to\mathbb{K}$ qui est l'identité.

Notons N le degré du polynôme $P\in\mathbb{K}[T_1,\dots,T_m]$ dont il est question dans l'énoncé. Nous le décomposons alors en

$$P=\sum_{l=0}^{N}\sum_{i=1}^{m}c_{il}T_i^l \tag{6.322}$$

avec $c_{il}\in\mathbb{K}$. Nous voyons $c_{i,.}$ comme un élément de $\mathbb{K}^m$ et donc nous écrivons[82]

$$P=\sum_{l=0}^{N}\sum_{i=1}^{m}c_l(\theta)_iT_i^l \tag{6.323}$$

où $c_l\in\mathbb{Q}[X]^m$. Nous pouvons choisir $\deg(c_l)<\delta$ parce que les puissances plus grandes de θ ne génèrent rien de nouveau.

Nous posons aussi

$$P^{\sigma_k}=\sum_{l,i}c_l(\theta_k)_iT_i^l\in\mathbb{Q}(\theta_k)[T_1,\dots,T_m], \tag{6.324}$$

et $\bar{P}=PP^{\sigma_2}\dots P^{\sigma_k}$. Le coefficient de T_i^l dans $\bar{P}$ est

$$\bar{c}_l(\theta_1,\dots,\theta_\delta)_i=\sum_{l_1+\dots+l_\delta=l}c_{l_1}(\theta_1)_i\dots c_{l_\delta}(\theta_\delta)_i. \tag{6.325}$$

Ce dernier est un polynôme en les θ_k à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Qui plus est, c'est un polynôme symétrique. En effet un terme contenant $\theta_k^a\theta_l^b$ provenant de $c_{l_i}(\theta_k)c_{l_j}(\theta_l)$ a un terme correspondant $\theta_k^b\theta_l^a$ provenant de $c_{l_j}(\theta_k)c_{l_i}(\theta_l)$.

C'est donc le moment d'utiliser le théorème 6.180 à propos des polynômes symétriques élémentaires qui nous dit que les coefficients de $\bar{P}$ sont en réalité des polynômes en ceux de P_θ qui sont dans $\mathbb{Q}$. Donc $\bar{P}\in\mathbb{Q}[T_1,\dots,T_m]$. Par ailleurs nous avons que

$$\deg(\bar{P})=\delta\deg(P) \tag{6.326}$$

parce que $\bar{P}$ est le produit de δ « copies » de P. De plus $P=P^{\sigma_1}$ divise $\bar{P}$ donc on a bien que si $P(z)=0$ alors $\bar{P}(z)=0$. Le polynôme $\bar{P}$ est celui que nous cherchions. □

6.6.3 Relations coefficients racines

ThoOQRgjpl

Théorème 6.183 (Relations coeffitients-racines)**.**
Soit le polynôme $P=a_nX^n+\dots+a_1X+a_0$ et r_i ses n racines. Alors nous avons pour chaque $1\leqslant k\leqslant n$ la relation

$$\sigma_k(r_1,\dots,r_n)=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n} \tag{6.327}$$

où σ_k est le k^e polynôme symétrique défini en 6.179.

ExHIfHhBr

Exemple 6.184.
Soit le polynôme

$$P(x)=x^3+2x^2+3x+4 \tag{6.328}$$

et ses racines que nous nommons a,b,c. Nous voudrions calculer $a^2+b^2+c^2$. D'abord nous décomposons $Q(a,b,c)=a^2+b^2+c^2$ en polynômes symétriques élémentaires : $Q(a,b,c)=\sigma_1(a,b,c)^2-2\sigma_2(a,b,c)$.

Mais les relations coefficients-racines[83] nous donnent $\sigma_1(a,b,c)=-2$ et $\sigma_2(a,b,c)=3$, donc

$$a^2+b^2+c^2=(-2)^2-2\cdot 3=-2. \tag{6.329}$$

Cela nous assure déjà qu'au moins une des solutions n'est pas réelle.

Nous pouvons en avoir une vérification directe en calculant explicitement les racines (ce qui est possible pour le degré 3) :

[82] Il me semble qu'il manque la somme sur i dans [137].
[83] Théorème 6.183

```
sage: P(x)=x**3+2*x**2+3*x+4
sage: S=solve(  P(x)==0,x  )
sage: sols=[ s.rhs() for s in S  ]
sage: Q=[  s**2 for s in sols ]
sage: s=sum(Q)
sage: s.simplify_full()
-2
```

tex/frido/VAYVmNRpolynomeSym.py

Notez qu'il faut un peu chipoter pour isoler les solutions depuis la réponse de la fonction `solve`. △

En suivant le même cheminement que dans l'exemple, si P est un polynôme de degré n et si r_i sont ses racines, il est facile de calculer $Q(r_1,\dots,r_n)$ pour n'importe quel polynôme symétrique Q

PropTETooGuBYQf

Proposition 6.185 (Annulation de fonctions polynomiales[207])**.**
Soit $\mathbb{K}$ un corps et P un polynôme à n indéterminées. Nous supposons que P s'annule sur un ensemble de la forme $A_1\times\cdots\times A_n$ avec $\text{Card}(A_j)>\deg_{X_j}(P)$ pour tout j. Alors $P=0$.

De plus si $P=0$ alors tous ses coefficients sont nuls[84].

Démonstration. Nous prouvons le résultat par récurrence sur le nombre n d'indéterminées. Si $n=1$, cela est le théorème 6.110. Nous classons les monômes du polynôme P par ordre de puissance de X_n et nous le factorisons :

$$P=\sum_{i=1}^{m}P_iX_n^i \tag{6.330}$$

avec $P_i\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_{n-1}]$. Soit $(a_1,\dots,a_{n-1})\in A_1\times\dots\times A_{n-1}$ et posons

$$Q(T)=P(a_1,\dots,a_{n-1},T)=\sum_{i=1}^{m}P_i(a_1,\dots,a_{n-1})T^i. \tag{6.331}$$

Le polynôme Q s'annule sur A_n avec $\deg(Q)=\deg_{X_n}(P)<\text{Card}(A_n)$ et le théorème 6.110 nous donne $Q=0$. Or les coefficients des différentes puissances de T dans $Q(T)$ sont les $P_i(a_1,\dots,a_{n-1})$; ils sont donc nuls.

Nous avons montré que le polynôme P_i s'annule pour tout élément de $A_1\times\dots\times A_{n-1}$, mais nous avons

$$\deg_{X_j}(P_i)\leqslant\deg_{X_j}P<\text{Card}(A_j), \tag{6.332}$$

donc l'hypothèse de récurrence donne $P_i=0$. Par suite, $P=0$ également. □

6.7 Minuscule morceau sur la théorie de Galois

Vous trouverez des détails et des preuves à propos de la théorie de Galois dans [208, 124].

Définition 6.186.
Soit $\mathbb{K}$, un corps.

*Le **groupe de Galois** d'une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ est le groupe des automorphismes de $\mathbb{L}$ laissant $\mathbb{K}$ invariant.*

Le groupe de Galois d'un polynôme sur $\mathbb{K}$ est le groupe de Galois de son corps de décomposition sur $\mathbb{K}$.

Définition 6.187.
*Des éléments $b_1,\dots,b_n$ d'une extension de $\mathbb{K}$ sont **algébriquement indépendants** si ils ne satisfont à aucune relation du type*

$$\sum\alpha_{i_1\dots i_n}b_1^{i_1}\dots b_n^{i_n}=0 \tag{6.333}$$

avec $\alpha_{i_1\dots i_n}\in\mathbb{K}$.

Nous disons que l'équation

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=0 \tag{6.334}$$

est l'**équation générale** de degré n si les coefficients a_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{K}$.

[84] L'intérêt de cela est qu'un polynôme de $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$ peut s'évaluer sur un élément de n'importe quel corps ; il restera le polynôme nul.

THOooDTCXooTIOSZe

Théorème 6.188.
Le groupe de Galois d'un polynôme de degré n est isomorphe au groupe symétrique S_n.

CORooBRKTooBWldRC

Corolaire 6.189 ([209])**.**
L'équation générale de degré n est résoluble par radicaux si et seulement si $n \leq 5$.

Chapitre 7

Topologie générale

7.1 Éléments généraux de topologie

7.1.1 Définitions et propriétés de base

DefTopologieGene

Définition 7.1 ([210]).
Soient X, un ensemble et $\mathcal{T}$, une partie de l'ensemble de ses parties qui vérifie les propriétés suivantes.

(1) Les ensembles $\varnothing$ et X sont dans $\mathcal{T}$,

(2) Une union quelconque[1] *d'éléments de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$.*

ITEMooGJAPooOWIOzv

(3) Une intersection finie *d'éléments de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$.*

*Un tel choix $\mathcal{T}$ de sous-ensembles de X est une **topologie** sur X, et les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés des **ouverts**. On dit aussi que $(X, \mathcal{T})$ (voire simplement X lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) est un **espace topologique**.*

Deux espaces topologiques sont isomorphes quand il existe une bijection continue d'inverse continue. Nous verrons ça en la définition 7.51.

7.1.2 Base de topologie

DEFooLEHPooIlNmpi

Proposition-Définition 7.2 (Base de topologie[211, 212]).
Soit un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Soit une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

ITEMooCTPEooRCaxvx

(1) Tout élément de $\mathcal{T}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

ITEMooWOVWooRozYmM

(2) Pour tout $x \in X$ et pour tout ouvert $\mathcal{O}$ contenant x, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que

$$x \in B \subset \mathcal{O}. \tag{7.1}$$

*Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ qui vérifie ces propriétés est une **base de topologie** pour X.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **(1) implique (2)** Soient $x \in X$ et $\mathcal{O}$ un ouvert contenant x. Étant donné que $\mathcal{O}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, il y a au moins un $B \in \mathcal{B}$ contenant x. Ce B vérifie $x \in B \subset \mathcal{O}$.

(2) **(2) implique (1)** Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de X ; pour chaque $x \in \mathcal{O}$ nous considérons un ouvert $B(x) \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B(x) \subset \mathcal{O}$. Nous avons alors $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B(x)$.

□

[1] Par « quelconque » nous entendons vraiment quelconque : c'est-à-dire indicée par un ensemble qui peut autant être $\mathbb{N}$ que $\mathbb{R}$ qu'un ensemble encore considérablement plus grand.

7.1.3 Fermés

DEFFermeooNSAAooHxZbAo

Définition 7.3.
*Si X est un espace topologique, un sous-ensemble F de X est dit **fermé** si son complémentaire, $X \setminus F$, est ouvert.*

DEFVoisinageooGHZCooLRcpXY

Définition 7.4.
*Si $a \in X$, on dit que $V \subset X$ est un **voisinage** de a si il existe un ouvert $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ tel que $a \in \mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \subset V$.*

DEFooBWZIooXotZLA

Définition 7.5 (Base de voisinage[213])**.**
*Soient un espace topologique X ainsi que $a \in X$. Un ensemble $\{U_i\}_{i\in I}$ de voisinages de a est une **base de voisinages** de a si pour tout voisinage V de a, il existe $k \in I$ tel que $U_k \subset V$.*

LemQYUJwPC

Lemme 7.6.
Union et intersection de fermés.

ITEMooBHIGooMvkUtX

(1) Une intersection quelconque de fermés est fermée.

ItemKJYVooMBmMbG

(2) Une union finie de fermés est fermée.

Démonstration. Soit $\{F_i\}_{i\in I}$ un ensemble de fermés ; nous avons

$$\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} F_i^c. \tag{7.2}$$

Le membre de droite est une union d'ouverts, c'est donc un ouvert ; donc l'intersection qui apparaît dans le membre de gauche est le complémentaire d'un ouvert : c'est donc un fermé.

De la même manière, le complémentaire d'une union finie de fermés est une intersection finie de complémentaires de fermés, et est donc ouvert[2]. □

LEMooSFMZooBguLdf

Lemme 7.7.
Ouverts et fermés.

ITEMooFPGVooUZHzkA

(1) Si F est fermé et si $\mathcal{O}$ est ouvert, alors $F \setminus \mathcal{O}$ est fermé.

ITEMooULNTooKQyrJb

(2) Si F est fermé dans l'ouvert $\mathcal{O}$, alors $\mathcal{O} \setminus F$ est ouvert.

Démonstration. Nous savons par le lemme 1.44 que $(F \setminus \mathcal{O})^c = F^c \cup \mathcal{O}$. Vu que F^c et $\mathcal{O}$ sont ouverts, l'union est ouverte. Le complémentaire de $F \setminus \mathcal{O}$ étant ouvert, il est fermé.

Pour le second point, nous considérons le complémentaire. Si nous nommons X l'espace topologique, nous avons

$$X \setminus (\mathcal{O} \setminus F) = (X \setminus \mathcal{O}) \cup F. \tag{7.3}$$

Étant une union de fermés, cela est fermé (lemme 7.6). Donc $\mathcal{O} \setminus F$ est ouvert. □

Dans un espace topologique, nous avons une caractérisation très importante des ouverts.

ThoPartieOUvpartouv

Théorème 7.8.
Une partie d'un espace topologique est ouverte si et seulement si elle contient un ouvert autour de chacun de ses éléments.

Démonstration. Soit X un espace topologique et $A \subset X$. Le sens direct est évident : A lui-même est un ouvert autour de $x \in A$, qui est inclus dans X.

Pour le sens inverse, nous supposons que A contienne un ouvert autour de chacun de ses points. Pour chaque $x \in A$, choisissons $\mathcal{O}_x \subset A$ un ouvert autour de x. Alors,

$$A = \bigcup_{x\in A} \mathcal{O}_x \tag{7.4}$$

EqAUniondesOx

en effet, d'une part, $A \subset \bigcup_{x\in A} \mathcal{O}_x$ parce que chaque élément x de A est dans le $\mathcal{O}_x$ correspondant, par construction ; et d'autre part, $\bigcup_{x\in A} \mathcal{O}_x \subset A$ parce que chacun des $\mathcal{O}_x$ est inclus dans A.

Ainsi, A est égal à une union d'ouverts, cela prouve que A est un ouvert. □

Le lemme 7.293 est une version particulière de celui-ci, pour l'espace topologique $\mathbb{R}$. Une autre application typique est la proposition 7.2 et le théorème 7.263.

[2] Un bon exercice est d'écrire ces unions et intersections, pour se convaincre que ça fonctionne.

7.1.4 Quelques exemples

7.1.4.1 Une première vague

DefTopologieGrossiere

Exemple 7.9.
Soit un ensemble quelconque X. L'ensemble de parties $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ est une topologie sur X.

La topologie ainsi définie sur X est appelée **topologie grossière**. △

DefTopologieDiscrete

Exemple 7.10.
Pour un ensemble X quelconque, on considère l'ensemble $\mathcal{T}$ constitué de toutes les parties de X. Avec cet ensemble, on confère à nouveau une structure d'espace topologique à X ; toutes les parties sont des ouverts, et aussi des fermés. La topologie ainsi posée sur X est appelée **topologie discrète**. △

EXooLAOSooJtjJnu

Exemple 7.11 (Toutes les topologies d'un ensemble à 3 éléments)**.**
On pose $X = \{1, 2, 3\}$. Alors on peut munir X de 29 topologies différentes[214] ; saurez-vous les retrouver toutes ? △

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 7.12
Je n'ai pas réfléchi à faire 7.11. Ou au moins pas comment le faire autrement qu'en passant en revue les 2^8 possibilités. Si vous savez comment faire, écrivez-moi.

7.1.4.2 Topologie engendrée

DefTopologieEngendree

Proposition-Définition 7.13 (Topologie engendrée, prébase[215])**.**
Soient un ensemble X, et $\mathcal{T}_0$ un ensemble de parties de X. Nous définissons $\tau(\mathcal{T}_0)$ comme étant l'union quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{T}_0$.

Plus précisément, nous faisons les constructions suivantes :

(1) Nous notons $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ les éléments de $\mathcal{T}_0$ indexés par l'ensemble I.

(2) Soit $B(\mathcal{T}_0)$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{T}_0$:

$$B(\mathcal{T}_0) = \Big\{ \bigcap_{j\in J} \mathcal{O}_j \Big\}_{J \text{ fini dans } I} \tag{7.5}$$

où nous convenons que $\bigcap_{j\in\varnothing} \mathcal{O}_j = X$[3].

(3) Soit A un ensemble qui indexe $B(\mathcal{T}_0)$:

$$B(\mathcal{T}_0) = \{B_\alpha\}_{\alpha\in A}. \tag{7.6}$$

(4) Nous posons

$$\tau(\mathcal{T}_0) = \Big\{ \bigcup_{\alpha\in S} B_\alpha \Big\}_{S\subset A}. \tag{7.7}$$

Alors :

ITEMooTCGTooJwfpel

(1) $\tau(\mathcal{T}_0)$ est une topologie sur X.

ITEMooBJVVooEVRgdq

(2) Toute topologie sur X contenant $\mathcal{T}_0$ contient $\tau(\mathcal{T}_0)$.

*La topologie $\tau(\mathcal{T}_0)$ est appelée la **topologie engendrée** par $\mathcal{T}_0$. La partie $\mathcal{T}_0$ est appelée **prébase** de la topologie $\tau(\mathcal{T}_0)$.*

Démonstration. Pour (1), nous devons montrer les différents points de la définition 7.1 d'une topologie.

(1) L'ensemble vide est dans $\tau(\mathcal{T}_0)$ parce que $\varnothing = \bigcup_{\alpha\in\varnothing} B_\alpha$. L'ensemble X est également dans $\tau(\mathcal{T}_0)$ parce que $X \in B(\mathcal{T}_0)$.

(2) Soient $\{D_l\}_{l\in L}$ des éléments de $\tau(\mathcal{T}_0)$ indexés par un ensemble L. Pour chaque l nous avons un ensemble $S \subset A$ tel que $D_l = \bigcup_{\alpha\in S_l} B_\alpha$. En posant $S = \bigcup_{l\in L} S_l$ nous avons

$$\bigcup_{l\in L} D_l = \bigcup_{\alpha\in S} B_\alpha \in \tau(\mathcal{T}_0). \tag{7.8}$$

Donc $\tau(\mathcal{T}_0)$ est stable par union quelconque.

[3] Bref, nous mettons X dans $B(\mathcal{T}_0)$.

(3) Soient D_1 et D_2 des éléments de $\tau(\mathcal{T}_0)$. Nous posons $D_i = \bigcup_{\alpha\in S_i} B_\alpha$. Alors nous avons

$$\bigcup_{\alpha\in S_1} B_\alpha \cap \bigcup_{\beta\in S_2} B_\beta = \bigcup_{\alpha,\beta\in S_1\times S_2} (B_\alpha \cap B_\beta). \tag{7.9}$$

EQooUCJOooCbKVpw

Mais B_α et B_β sont dans $B(\mathcal{T}_0)$. Donc $B_\alpha \cap B_\beta \in B(\mathcal{T}_0)$. Donc (7.9) est une union d'éléments de $B(\mathcal{T}_0)$.

Au final nous avons prouvé que $\tau(\mathcal{T}_0)$ est une topologie sur X.

Nous démontrons à présent le point (2). Soit une topologie μ sur X contenant $\tau(\mathcal{T}_0)$. Puisque μ est une topologie, les intersections finies d'éléments de μ sont dans μ, donc, en suivant les notations de 7.13, $B(\mathcal{T}_0) \subset \mu$.

Comme toutes les unions d'éléments de μ sont dans μ, l'inclusion de $B(\mathcal{T}_0)$ dans μ implique celle de $\tau(\mathcal{T}_0)$. □

Dès que nous avons une topologie, nous avons une notion de convergence de suite.

DefXSnbhZX

Définition 7.14 (Convergence de suite)**.**
*Une suite (x_n) d'éléments de X **converge** vers un élément x de X si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ contenant x , il existe un $K \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant K$ implique $x_k \in \mathcal{O}$.*

*Nous disons alors que x est une **limite** de (x_k).*

La proposition suivante montre que vérifier la convergence d'une suite sur une prébase suffit pour vérifier la convergence.

PROPooJTJBooNtczsO

Proposition 7.15.
Soit $\mathcal{T}_0$ un ensemble de parties de l'ensemble X. Soient une suite (x_n) dans X ainsi que $x \in X$. Nous supposons que la suite (x_n) satisfait la propriété suivante : pour tout $A \in \mathcal{T}_0$ tel que $x \in A$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant K$ implique $x_k \in A$.

Alors nous avons la convergence de suite[4]

$$x_n \overset{\left(X,\tau(\mathcal{T}_0)\right)}{\longrightarrow} x. \tag{7.10}$$

Démonstration. Nous considérons la topologie $\tau(\mathcal{T}_0)$ sur X. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ contenant x. Nous le décomposons en suivant (à l'envers) la construction de la définition 7.13 :

$$\mathcal{O} = \bigcup_{\alpha\in S} B_\alpha \tag{7.11}$$

avec $B_\alpha \in B(\mathcal{T}_0)$. Donc pour chaque α, il existe un ensemble fini J_α tel que

$$B_\alpha = \bigcap_{j\in J_\alpha} A_j \tag{7.12}$$

avec $A_j \in \mathcal{T}_0$. Puisque $x \in \mathcal{O}$, nous avons un α_0 tel que $x \in B_{\alpha_0}$. Donc $x \in A_j$ pour tous les $j \in J_{\alpha_0}$.

Pour chaque $j \in J_{\alpha_0}$, il existe $K_j \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant K_j$ implique $x_k \in A_j$. Comme J_{α_0} est un ensemble fini, nous pouvons poser $K = \max_{j\in J_{\alpha_0}} K_j$.

Maintenant, si $k \geqslant K$, nous avons $x_k \in A_j$ pour tout j, et donc $x_k \in B_{\alpha_0}$. Par conséquent, $x_k \in \mathcal{O}$. □

7.1.5 Adhérence, fermeture, intérieur, point d'accumulation et point isolé

DEFooSVWMooLpAVZRInt

Définition 7.16.
Soient un espace topologique X et une partie A de X.

*(1) Un point $x \in X$ est **intérieur** à A si il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que$x \in \mathcal{O} \subset A$.*

*(2) L'**intérieur** de A, notée $\mathrm{Int}(A)$, est l'union de tous les ouverts de X contenus dans A.*

Lemme 7.17.
Quelques propriétés en vrac.

ITEMooHLIMooJEacKt

(1) L'intérieur de A est l'ensemble de tous les points intérieurs de A.

[4] Définition 7.14.

ITEMooYTXSooMyiBpMgzK

(2) *Pour tout $A \subset X$, l'ensemble* $\mathrm{Int}(A)$ *est un ouvert.*

ITEMooYYFDooHgsRfV

(3) *On a* $\mathrm{Int}(A) \subset A$

ITEMooTDXFooFdyLeO

(4) *Nous avons* $\mathrm{Int}(A) = A$ *si et seulement si A est un ouvert.*

Démonstration. En plusieurs morceaux.

(1) **(1)** Si $a \in \mathrm{Int}(A)$, alors a est dans un ouvert contenu dans A, et donc a est un point intérieur à A. Dans l'autre sens, si a est un point intérieur à A, alors il existe un ouvert $\mathcal{O} \subset A$ contenant a. Puisque $\mathcal{O}$ est un ouvert dans A, nous avons $\mathcal{O} \subset \mathrm{Int}(A)$, et en particulier $a \in \mathrm{Int}(A)$.

(2) **(2)** L'ensemble $\mathrm{Int}(A)$ est une union d'ouverts.

(3) **(3)** L'ensemble $\mathrm{Int}(A)$ est une union d'ensembles contenus dans A.

(4) **(4)** Supposons que $\mathrm{Int}(A) = A$. Puisque $\mathrm{Int}(A)$ est ouvert (point (3)), A est ouvert aussi.

Dans l'autre sens, nous supposons que A est ouvert. Puisque A est un ouvert contenu dans A, nous avons $A \subset \mathrm{Int}(A)$. Mais comme $\mathrm{Int}(A) \subset A$, nous avons l'égalité.

□

7.1.5.1 Adhérence et fermeture

7.18.
Les mots « adhérence » et « fermeture » sont synonymes. Dans le Frido, nous allons utiliser les notations $\mathrm{Adh}(A)$ et $\bar{A}$ de façon opportuniste. La notation $\bar{z}$ définissant le complexe conjugué de z, si A est une partie de $\mathbb{C}$, il est plus sûr d'écrire $\mathrm{Adh}(A)$ pour la fermeture, plutôt que $\bar{A}$.

Au contraire, pour éviter une quantité excessive de parenthèses, nous écrirons $\overline{B(a,r)}$ pour la boule fermée.

DEFooSVWMooLpAVZR

Définition 7.19.
Soient un espace topologique X et une partie A de X. Un point $x \in X$ est ***adhérent*** *à A si tout ouvert de X contenant x a une intersection non vide avec A. L'ensemble des points d'adhérence de A est noté* $\mathrm{Adh}(A)$ *ou* $\bar{A}$.

LEMooILNCooOFZaTe

Lemme 7.20.
À propos d'adhérence.

(1) *L'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés de X contenant A.*

(2) *Nous avons l'égalité*

$$\mathrm{Int}(A)^c = \mathrm{Adh}(A^c). \tag{7.13}$$

Démonstration. Commençons par prouver la dernière égalité d'ensembles. On a les équivalences entre les affirmations suivantes, pour tout $x \in X$:

- x n'est pas dans $\mathrm{Int}(A)$;
- il n'y a aucun ouvert contenant x et inclus dans A ;
- tout ouvert contenant x a une intersection non-vide avec A^c ;
- x est dans $\mathrm{Adh}(A^c)$.

Nous allons à présent montrer l'égalité d'ensembles $\mathrm{Int}(A)^c = \mathrm{Adh}(A^c)$ en prouvant la double inclusion.

(1) **Si $\mathrm{Int}(A)^c \subset \mathrm{Adh}(A^c)$** Soit $x \in \mathrm{Int}(A)^c$. Nous devons prouver que $x \in \mathrm{Adh}(A^c)$. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ contenant x. Vu que x n'est pas dans l'intérieur de A, l'ouvert $\mathcal{O}$ est pas inclus dans A, et donc $\mathcal{O} \cap A^c$ est non vide.

Nous avons montré que tout ouvert contenant x intersecte A^c. Autrement dit : $x \in \mathrm{Adh}(A^c)$.

(2) $\mathrm{Adh}(A^c) \subset \mathrm{Int}(A)^c$

Soit $x \in \mathrm{Adh}(A^c)$. Tout ouvert contenant x intersecte A^c, et ne peut donc pas être inclus dans A. Si aucun ouvert contenant x n'est inclus dans A, alors x n'est pas dans $\mathrm{Int}(A)$.

□
PROPooTTWBooOyxWzr

Proposition 7.21 ([1]).
Soient un espace topologique X, et une partie $A \subset X$. Nous avons

$$X = \text{Int}(A) \cup \overline{X \setminus A}, \tag{7.14}$$

et cette union est disjointe.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Disjoint** Si $x \in \text{Int}(A)$, alors il existe un ouvert U vérifiant $x \in U \subset A$. Autrement dit, $U \cap (X \setminus A) = \varnothing$. Donc x n'est pas dans $\overline{X \setminus A}$

(2) **Union** Soit $x \in X$. Il y a deux possibilités : soit il existe un ouvert U vérifiant $x \in U \subset A$, soit ça n'existe pas. Si ça existe, alors $x \in \text{Int}(A)$. Sinon, ça veut dire que tout ouvert contenant x intersecte $X \setminus A$, et donc $x \in \overline{X \setminus A}$.

□
RemAdhFerme

Remarque 7.22.
Comme corolaire du lemme 7.20, et grâce aux remarques faites pour les intérieurs, on obtient que pour $A \subset X$:

(1) l'ensemble $\bar{A}$ est fermé : c'est en effet le complémentaire d'un ouvert, précisément l'intérieur de A^c ;

(2) A est fermé si et seulement si $\bar{A} = A$: en effet, A est fermé si et seulement si A^c est ouvert, si et seulement si l'intérieur de A^c est A^c lui-même ; or, l'intérieur de A^c est le complémentaire de $\bar{A}$ par le lemme 7.20, si bien que A est fermé si et seulement si $(\bar{A})^c = A^c$, ou encore… ce qu'on affirmait au début.

7.1.5.2 Densité

DefEnsembleDense

Définition 7.23.
*Soit X un espace topologique. Un sous-ensemble A de X est **dense** dans X si $\bar{A} = X$.*

LEMooITBVooBUYpve

Lemme 7.24 ([1]).
Soit un espace topologique X. Soient $A \subset X$ et un ouvert non vide $U \in \tau_X$. Si $U \subset \text{Adh}(A)$ alors $U \cap A = \varnothing$.

Démonstration. Soit $x \in U$. Vu que $x \in \text{Adh}(A)$, tout ouvert contenant x intersecte A. La partie U est un de ces ouverts. Donc $U \cap A \neq \varnothing$. □
PROPooTKHVooMderxm

Proposition 7.25 ([1]).
Soient un espace topologique X, une partie A et $Q \subset A$. Si Q est fermé dans X et dense dans A, alors $Q = A$.

Démonstration. Soit $a \in A$. Nous supposons que a n'est pas dans Q, c'est-à-dire que $a \in Q^c$. Vu que Q est fermé, le complémentaire est ouvert, et il existe un ouvert $U \in \tau_X$ tel que $a \in U \subset Q^c$. Cela contredit la densité de Q dans A parce que tout ouvert contenant un élément de A devrait intersecter Q. □
DEFooQUNJooWZasqV

Définition 7.26.
*Une partie A d'un espace topologique X est **discrète** si pour tout $a \in A$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de X tel que $\mathcal{O} \cap A \neq \{a\}$.*

7.1.5.3 Topologie induite

DefVLrgWDB

Proposition-Définition 7.27 (Topologie induite[216]).
Soit un espace topologique (X, τ_X), et soit $Y \subset X$. Nous définissons

$$\tau_Y = \{Y \cap \mathcal{O} \text{ tel que } \mathcal{O} \in \tau_X\}. \tag{7.15}$$

τ_Y est une topologie sur Y.
*Elle est la **topologie induite**.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier les conditions de la définition 7.1.

(1) $Y \in \tau_Y$ Parce que $Y = X \cap Y$ et que X est un ouvert de X.

(2) $\varnothing \in \tau_Y$ Parce que $\varnothing = Y \cap \varnothing$ et que $\varnothing$ est un ouvert de X.

(3) **Union quelconque** Soient des ouverts A_i de X. Nous avons

$$\bigcup_{i\in I} Y \cap A_i = Y \cap \big(\bigcup_{i\in I} A_i\big). \tag{7.16}$$

Comme les A_i sont des ouverts de X, leur union est encore un ouvert de X. Donc (7.16) est encore dans τ_Y.

(4) **Intersection finie** Nous avons

$$\bigcap_{i\in I} Y \cap A_i = Y \cap \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right). \tag{7.17}$$

□

LemBWSUooCCGvax

Lemme 7.28 ([1])**.**
Soit (X, τ_X) un espace topologique et $S \subset X$, un fermé de X sur lequel nous considérons la topologie induite τ_S. Si F est un fermé de (S, τ_S) alors F est fermé de (X, τ_X).

Démonstration. Nous savons que $F \subset S$ et que le complémentaire de F dans S est un ouvert de (S, τ_S) : il existe un ouvert $\Omega \in \tau_X$ tel que $S \setminus F = S \cap \Omega$. Si maintenant nous considérons le complémentaire de F dans X nous avons

$$F^c = (S \setminus F) \cup (X \setminus S) = (S \cap \Omega) \cup S^c = (S \cap \Omega) \cup (S^c \cap \Omega) \cup S^c = \Omega \cup S^c. \tag{7.18}$$

Puisque Ω et S^c sont des ouverts de X, l'union est un ouvert. Donc $F^c \in \tau_X$ et F est un fermé de X. □

DEFooEXHFooKlKcQD

Définition 7.29 ([217])**.**
*Si X est un espace topologique, un **sous-espace topologique** de X est une partie de X munie de la topologie induite*[5]*.*

PROPooQFIMooYmgjhA

Proposition 7.30 ([1])**.**
Soit une partie $\mathcal{O}$ de l'espace topologique X. Les fermés de $\mathcal{O}$ sont les parties de la forme $F \cap \mathcal{O}$ où F est fermé de X.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Dans un sens** Soit un fermé A de $\mathcal{O}$. La partie $\mathcal{O} \setminus A$ est ouverte dans $\mathcal{O}$, de telle sorte qu'il existe un ouvert S de X satisfaisant $\mathcal{O} \setminus A = S \cap \mathcal{O}$. La partie $F = X \setminus S$ est fermée dans X, et nous allons prouver que $A = (X \setminus S) \cap \mathcal{O}$. D'abord nous avons

$$(X \setminus S) \cap \mathcal{O} = \mathcal{O} \setminus S. \tag{7.19}$$

Nous avons l'union disjointe $\mathcal{O} = (\mathcal{O} \setminus S) \cup (\mathcal{O} \cap S)$. Tenant compte du fait que $\mathcal{O} \cap S = \mathcal{O} \setminus A$, nous avons l'union disjointe

$$\mathcal{O} = (\mathcal{O} \setminus S) \cup (\mathcal{O} \setminus A). \tag{7.20}$$

Par ailleurs, vu que $A \setminus \mathcal{O}$, nous avons également l'union disjointe

$$\mathcal{O} = A \cup (\mathcal{O} \setminus A) \tag{7.21}$$

En comparant (7.20) avec (7.21), nous trouvons $A = \mathcal{O} \cap S$.

En repartant de (7.19), nous avons maintenant

$$F \cap \mathcal{O} = (X \setminus S) \cap \mathcal{O} = \mathcal{O} \setminus S = A. \tag{7.22}$$

(2) **Dans l'autre sens** Soit un fermé F de X. Montrons que $F \cap \mathcal{O}$ est fermé dans $\mathcal{O}$. Pour cela nous prouvons que le complémentaire (dans $\mathcal{O}$) est ouvert dans $\mathcal{O}$. Nous avons :

$$\mathcal{O} \setminus (F \cap \mathcal{O}) = \mathcal{O} \cap (X \setminus F). \tag{7.23}$$

Comme F est fermé, $X \setminus F$ est ouvert.

[5] Définition 7.27.

□
PROPooNZTTooTrKoVF

Proposition 7.31 ([1]).
Soient un espace topologique X et une partie $A \subset X$. Nous notons τ_X la topologie de X et τ_A la topologie induite de X vers A. Si (A, τ_A) est un espace topologique compact, alors A est compact dans X.

Démonstration. Soit un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de A par des ouverts de X. La famille $\{U_i \cap A\}_{i\in I}$ sont des ouverts de τ_A recouvrant A. Donc il existe une partie finie $I_0 \subset I$ telle que $\{U_i \cap A\}_{i\in I_0}$ recouvre A. Dans ce cas, la famille $\{U_i\}_{i\in I_0}$ recouvre également A. □
PROPooBKPEooQupIUx

Proposition 7.32 ([1]).
Soient un espace topologique X, et une partie $M \subset X$. Nous notons τ_X la topologie de X et τ_M la topologie induite de X vers M. Soit un τ_X-compact $K \subset M$. Alors K est τ_M-compact.

Démonstration. Soient des τ_M-ouverts $\{A_i\}_{i\in I}$ recouvrant K. Par définition de la topologie induite nous avons $A_i = M \cap U_i$ avec $U_i \in \tau_X$. Les parties $\{U_i\}_{i\in I}$ recouvrent K et il existe donc une partie finie $I_0 \subset I$ telle que $\{U_i\}_{i\in I_0}$ recouvre K.

Donc $\{U_i \cap M\}_{i\in I_0}$ recouvre également K. Donc $\{A_i\}_{i\in I_0}$ recouvre K qui est donc bien τ_M-compact. □
PROPooHQHWooFHHAXP

Proposition 7.33 ([1]).
Soient un espace topologique (X, τ_X), une partie A ainsi que $x \in A$. Si $\mathcal{B}$ est une base de topologie τ_X autour de x, alors $\{B \cap A \text{ tel que } B \in \mathcal{B}\}$ est une base de la topologie induite τ_A autour de x.
LEMooCXHEooKNmLma

Lemme 7.34 ([1]).
Soient un espace topologique X ainsi que $U \subset X$ (pas spécialement ouvert). Soit $A \subset U$. Nous avons

$$\mathrm{Adh}_U(A) = \mathrm{Adh}_X(A) \cap U \tag{7.24}$$

Si F est fermé dans U, alors

$$F = \mathrm{Adh}_X(F) \cap U. \tag{7.25}$$
EQooMZOOooKHfZTk

Démonstration. En deux inclusions.

(1) **Sens direct** Soit $x \in \mathrm{Adh}_U(A)$. Par définition nous avons $x \in U$. Nous devons prouver que $x \in \mathrm{Adh}_X(A)$. Pour cela nous considérons un ouvert $\mathcal{O} \in \tau_X$ contenant x. La partie $\mathcal{O} \cap U$ est un ouvert de U contenant x. Vu que $x \in \mathrm{Adh}_U(A)$, nous avons $(\mathcal{O} \cap U) \cap A \neq \varnothing$. À fortiori nous avons $\mathcal{O} \cap A \neq \varnothing$.

(2) **L'autre sens** Soit $x \in \mathrm{Adh}_X(A) \cap U$. Pour prouver que $x \in \mathrm{Adh}_U(A)$ nous considérons $\mathcal{O} \in \tau_U$ contenant x, et nous prouvons que $\mathcal{O} \cap A \neq \varnothing$. Comme $\mathcal{O}$ est un ouvert de U, il existe un ouvert $\mathcal{O}' \in \tau_X$ tel que $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap U$.

Donc $\mathcal{O}'$ est un ouvert de X vérifiant $x \in \mathcal{O}'$. Vu que $x \in \mathrm{Adh}_X(A)$ nous avons aussi $\mathcal{O}' \cap A \neq \varnothing$. Il existe donc un y vérifiant

$$y \in \mathcal{O}' \cap A \subset \mathcal{O}' \cap U = \mathcal{O}. \tag{7.26}$$

Nous avons donc aussi $y \in \mathcal{O} \cap A$, comme il le fallait.

La formule (7.25) est la même, en tenant compte du fait que $\mathrm{Adh}_U(F) = F$ lorsque F est fermé dans U. □
LEMooXCNDooDkbaip

Lemme 7.35 ([1, 218]).
Soient un espace topologique X un un ouvert $U \in \tau_X$. Nous considérons $A \in \bar{\tau}_U$[6] tel que $\mathrm{Int}_U(A) = \varnothing$. Alors

$$\mathrm{Int}_X\big(\mathrm{Adh}_X(A)\big) = \varnothing. \tag{7.27}$$

Démonstration. Nous considérons $U_1 \in \tau_X$ tel que $U_1 \subset \mathrm{Adh}_X(A)$. Le but est de prouver que $U_1 = \varnothing$. Nous avons

(1) $U_1 \cap U \in \tau_X$ en tant qu'intersection d'ouverts.

(2) $U_1 \cap U \in \tau_U$ par définition de la topologie induite.

De plus en utilisant le lemme 7.34,

$$U_1 \cap U \subset \mathrm{Adh}_X(A) \cap U = \mathrm{Adh}_U(A) = A. \tag{7.28}$$

[6] $\bar{\tau}_U$ est l'ensemble des fermés de U.

Donc $U_1 \cap U$ est un ouvert de U contenu dans A dont l'intérieur dans U est vide. Bref : $U_1 \cap U = \varnothing$.

Nous supposons par l'absurde que $U_1 \neq \varnothing$. Alors le lemme 7.24 dit que $U_1 \cap A \neq \varnothing$. Soit $x \in U_1 \cap A$. Nous avons :

$$x \in U_1 \cap A \subset U_1 \cap U. \tag{7.29}$$

Et comme nous avons déjà prouvé que $U_1 \cap U = \varnothing$, nous avons une contradiction. □

LEMooLKHEooRqrqkA

Lemme 7.36 ([1])**.**
Soit un espace topologique X. Soient A ouvert dans X et $S \subset X$. Si $A \cap S = \varnothing$, alors $A \cap \bar{S} \neq \varnothing$

Démonstration. Supposons par l'absurde que $x \in A \cap \bar{S}$. Vu que A est ouvert, il existe un voisinage V de x contenu dans A (théorème 7.8). Étant donné que $x \in \bar{S}$, l'intersection $V \cap S$ est non vide. Tout élément de $V \cap S$ est dans $A \cap S$. □

PROPooRRWQooASUUIr

Proposition 7.37 ([1])**.**
Soit une bijection continue $f : X \to Y$. Soient $A \subset X$ et $B = f(A) \subset Y$ sur lesquels nous considérons les topologies induites. Alors la restriction $f : A \to B$ est continue.

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ dans B. Il existe un ouvert $\mathcal{O}'$ de Y tel que $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap B$. Vu que f est continue, la partie $f^{-1}(\mathcal{O}')$ est ouverte dans X. Vu que f est une bijection nous avons de plus

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{O}) &= f^{-1}(\mathcal{O}' \cap B) && \text{(7.30a)}\\ &= f^{-1}(\mathcal{O}') \cap f^{-1}(B) && \text{(7.30b)}\\ &= f^{-1}(\mathcal{O}') \cap A. && \text{(7.30c)} \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de A. □

LEMooPONCooJbuBMl

Lemme 7.38 ([1])**.**
Soient deux espaces topologiques X et Y. Soit $Q \subset X$ sur lequel nous considérons la topologie induite depuis X. Soient encore $a \in X$ et une base $\mathcal{B}$ de voisinages[7] de X autour de a.

Nous considérons une application $f : Y \to Q$ telle que $f^{-1}(Q \cap B)$ est ouvert pour tout $B \in \mathcal{B}$. Alors f est continue en a.

Démonstration. Soit un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans Q. Nous devons trouver un voisinage ouvert V de a tel que $f(V) \subset W$.

Vu que W est ouvert autour de $f(a)$ pour Q, il existe un ouvert W' de X tel que $W = W' \cap Q$. Et comme W' est un ouvert contenant $f(a)$, il existe un élément $B \in \mathcal{B}$ tel que $f(a) \in B \subset W'$. Par hypothèse la partie $f^{-1}(B \cap Q)$ est ouverte. Donc en posant $V = f^{-1}(B \cap Q)$ on est bon. □

LEMooGANPooUJZmnM

Lemme 7.39 ([1])**.**
Soient deux espaces topologiques U et V. Nous supposons avoir :

(1) Une bijection continue d'inverse continue[8] $f : U \to V$

(2) Un fermé $H \subset V$ sur lequel nous considérons la topologie induite de V,

(3) Un ferme $\mathcal{H} \subset U$ sur lequel nous considérons la topologie induite de U,

(4) $f(\mathcal{H}) \subset H$

(5) Une partie $A \subset \mathcal{H}$ telle que $f(A)$ est ouverte dans H.

Alors

ITEMooIYGLooTrxugS

(1) A est ouvert dans $\mathcal{H}$.

ITEMooDZHUooFJRRfi

(2) L'application $f : A \to f(A)$ est un homéomorphisme.

Démonstration. Vu que $f(A)$ est ouvert dans H, il existe un ouvert W de V tel que $f(A) = H \cap W$. À partir de là, nous prouvons plusieurs choses.

(1) $\underline{A \subset \mathcal{H} \cap f^{-1}(W)}$ Nous avons $A \subset \mathcal{H}$ par définition. De plus $f(A) = H \cap W$, donc $f(A) \subset W$ et donc

$$A = f^{-1}\big(f(A)\big) \subset f^{-1}(W). \tag{7.31}$$

[7] définition 7.5.
[8] C'est-à-dire un homéomorphisme.

(2) $\mathcal{H} \cap f^{-1}(W) \subset A$ Soit $x \in \mathcal{H} \cap f^{-1}(W)$. Vu que $f(\mathcal{H}) \subset H$, nous avons $f(x) \in H$. Mais évidemment $f(x) \in f\big(f^{-1}(W)\big) = W$. Donc $f(x) \in W$. Donc

$$f(x) \in H \cap W = f(A). \tag{7.32}$$

Vu que f est une bijection, nous en déduisons que $x \in A$.

(3) **Conclusion** Nous avons prouvé que

$$A = \mathcal{H} \cap f^{-1}(W) \tag{7.33}$$

Étant donné que W est ouvert dans U et que f est continue, $f^{-1}(W)$ est ouvert de U. Donc A est ouvert de $\mathcal{H}$.

Cela conclu la preuve de notre point (1).

En ce qui concerne le point (2), c'est la proposition 7.37 qui fait le boulot. □

7.1.6 Topologie sur $\mathbb{Q}$

Si A est un ouvert de X, on pourrait croire que la topologie induite n'a rien de spécial. Il est vrai que B sera ouvert dans A si et seulement si il est ouvert dans X, mais certaines choses surprenantes se produisent tout de même.

LEMooIGQCooOrroHT

Lemme 7.40.
La partie $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide, et sa fermeture est $\mathbb{R}$.

ExloeyoR

Exemple 7.41.
Prenons $X = \mathbb{R}$ et $A =]0, 1[$. Si $B =]\frac{1}{2}, 1[$, alors la fermeture de B dans A sera $\tilde{B} = [\frac{1}{2}, 1[$ et non $[\frac{1}{2}, 1]$ comme on l'aurait dans $\mathbb{R}$. △

Prendre la topologie induite de $\mathbb{R}$ vers un fermé de $\mathbb{R}$ donne des boules un peu spéciales comme le montre l'exemple suivant.

ExKYZwYxn

Exemple 7.42.
Quid de la boule ouverte $B(1, \epsilon)$ dans le fermé $[0, 1]$? Par définition c'est

$$B(1, \epsilon) = \{x \in [0, 1] \text{ tel que } |x - 1| < \epsilon\} =]1 - \epsilon, 1]. \tag{7.34}$$

Oui, c'est *ouvert* dans $[0, 1]$. C'est d'ailleurs un des ouverts de la topologie induite de $\mathbb{R}$ sur $[0, 1]$.

Donc pour la topologie de $[0, 1]$, toutes les boules ouvertes $B(x, \delta)$ avec $x \in [0, 1]$ sont incluses dans $[0, 1]$. Bref, vous pouvez écrire

$$B(\frac{1}{2}, 10) \subset [0, 1], \tag{7.35}$$

mais vous avez intérêt à être très clair sur la topologie sous-entendue. △

7.1.6.1 Points d'accumulation et isolés

DEFooGHUUooZKTJRi

Définition 7.43.
*Soient un espace topologique X et une partie A de X. Un point $s \in X$ est un **point d'accumulation** de A si tout ouvert de X contenant s contient au moins un élément de $A \setminus \{s\}$.*

Quelle est la différence entre un point d'accumulation et un point d'adhérence ? La différence est que tous les points de A sont des points d'adhérence de A, parce que tout voisinage de $a \in A$ contient au moins a lui-même, alors que certains points de A peuvent ne pas être des points d'accumulation de A. Voir l'exemple 7.298.

Notons qu'un point d'accumulation de A dans X n'est pas spécialement dans A.

DEFooXIOWooWUKJhN

Définition 7.44.
*Soient un espace topologique X et une partie A de X. Un point $s \in A$ est un **point isolé** de A si il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de s dans X tel que $A \cap \mathcal{O} = \{s\}$.*

7.1.7 Applications continues

La définition suivante est *la* définition de la continuité dans tous les cas.

DefOLNtrxB

Définition 7.45 (Application continue[219])**.**
Deux définitions :

ITEMooXARPooNzsWLr

(1) *Soient une application $f\colon X \to Y$ entre les espaces topologiques X et Y et un point $a \in X$. Nous disons que f est **continue en** a si pour tout ouvert W contenant $f(a)$, il existe un voisinage V de a dans X tel que $f(V) \subset W$.*

ITEMooEHGWooDdITRV

(2) *Une fonction $f\colon X \to Y$ est **continue** sur X si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de Y, l'ensemble*

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in X \text{ tel que } f(x) \in \mathcal{O}\} \tag{7.36}$$

defFminus1ofaset

est ouvert dans X.

PROPooOVKEooCkJmmO

Proposition 7.46 ([1])**.**
Une application $f\colon X \to Y$ entre deux espaces topologiques est continue sur X si et seulement si elle est continue en chacun des points de X.

Démonstration. Dans les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $f\colon X \to Y$ est continue. Soit $a \in X$. Si W est un ouvert contenant $f(a)$, alors $V = f^{-1}(W)$ est un ouvert contenant a et vérifiant $f(V) \subset W$.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $f\colon X \to Y$ est continue en chaque point de X. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de Y. Pour $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$, la partie $\mathcal{O}$ est un ouvert contenant $f(a)$. Donc il existe un ouvert V_a contenant a et tel que $f(V_a) \subset \mathcal{O}$.

Nous posons à présent $V = \bigcup_{a \in f^{-1}(\mathcal{O})} V_a$. C'est un ouvert comme union d'ouverts. Ensuite nous avons $V = f^{-1}(\mathcal{O})$. En effet d'une part nous avons $f(V_a) \subset \mathcal{O}$, donc $V_a \subset f^{-1}(\mathcal{O})$ pour tout $a \in X$. Donc $V \subset f^{-1}(\mathcal{O})$.

D'autre part, pour chaque $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$ nous avons $a \in V_a$, et donc $f^{-1}(\mathcal{O}) \subset V$.

□

LEMooYTLSooKhetml

Lemme 7.47.
Soient deux espaces topologiques X et Y et une application $f\colon X \to Y$. Soit une base de topologie $\{A_i\}_{i\in I}$ de Y. Si $f^{-1}(A_i)$ est ouvert dans X pour tout $i \in I$ alors f est continue.

Exemple 7.48 ([1])**.**
Un truc bien avec la définition 7.45(1) est que la continuité de f en un point est définie pour tout point du domaine ; pas seulement les points d'accumulation. Soit par exemple une fonction simple

$$\begin{aligned} f\colon \{a\} &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto 4. \end{aligned} \tag{7.37}$$

Si W est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 4, nous avons l'ouvert $V = \{a\}$ tel que $f(V) \subset W$. Donc f est continue au point 4.

Mais f est également continue sur $\{4\}$ en tant qu'espace topologique. En effet, si W est un ouvert de $\mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(W)$ est soit $\varnothing$ soit $\{a\}$. Dans les deux cas c'est un ouvert. △

LEMooATLRooEKnlro

Lemme 7.49.
Une application $f\colon X \to Y$ est continue si et seulement si pour tout fermés F de Y, la partie $f^{-1}(F)$ est fermée dans X.

Démonstration. Supposons que f est continue. Si F est fermé dans Y, alors F^c est ouvert et donc $f^{-1}(F^c) = f^{-1}(F)^c$ est ouvert. Donc $f^{-1}(F)$ est fermé.

Dans l'autre sens, si $\mathcal{O}$ est ouvert dans Y, alors $f^{-1}(\mathcal{O})^c = f^{-1}(\mathcal{O}^c)$ est fermé, de telle sorte que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert. L'application f est alors continue. □

PROPooXGBEooZRVkSc

Proposition 7.50 ([220])**.**
Une application $f\colon X \to Y$ entre espaces topologiques est continue si et seulement si $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour toute partie $A \subset X$.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que f est continue. Nous considérons un élément de $f(\bar{A})$, c'est-à-dire $f(a)$ avec $a \in \bar{A}$. Nous considérons un ouvert $\mathcal{O}$ autour de $f(a)$. La partie $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouverte dans X et contient $a \in \bar{A}$. Donc $f^{-1}(\mathcal{O})$ intersecte A. Nous en concluons que $\mathcal{O}$ intersecte A. Nous avons montré que tout ouvert autour de $f(a)$ intersecte $f(A)$. Donc $f(a) \in \overline{f(A)}$.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour toute partie $A \subset X$. Pour prouver la continuité de f, nous utilisons le critère du lemme 7.49 qui dit que f est continue si et seulement si $f^{-1}(F)$ est fermé pour tout fermé F.

Soit donc un fermé $F \subset Y$. Nous posons $D = f^{-1}(F)$. Nous avons

$$f(\bar{D}) \subset \overline{f(D)} = \overline{f\big(f^{-1}(F)\big)} = \bar{F} = F. \tag{7.38}$$

Nous prenons ensuite f^{-1} des deux côtés : $\bar{D} \subset f^{-1}(F) = D$. Donc $\bar{D} \subset D$; donc $\bar{D} = D$ et D est fermé.

□

7.1.7.1 Isomorphismes

DEFooYPGQooMAObTO

Définition 7.51 (Isomorphisme d'espaces topologiques)**.**
*Un **isomorphisme** d'espaces topologiques est une application bijective continue*[9] *entre deux espaces topologiques dont la réciproque est continue. On dit également **homéomorphisme**.*

*Un isomorphisme d'un espace avec lui-même est un **automorphisme**.*

LEMooMJSHooOszteq

Lemme 7.52 ([1])**.**
Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme[10] *et si F est fermé dans X, alors $f(F)$ est fermé dans Y.*

Démonstration. Le complémentaire F^c est ouverte. Vu que f^{-1} est continue, la partie $f(F^c)$ est ouverte. Comme f est une bijection, nous avons $f(F^c) = f(F)^c$. D'où le fait que $f(F)^c$ est ouvert, et donc que $f(F)$ est fermé. □

LEMooNMPGooRlgppQ

Lemme 7.53.
Soient un isomorphisme d'espaces topologiques $\varphi : X \to Y$ ainsi qu'une partie $S \subset X$. Alors

$$\varphi(\bar{S}) = \overline{\varphi(S)}. \tag{7.39}$$

Démonstration. Nous prouvons que $\overline{\varphi(S)} \subset \varphi(\bar{S})$; pour l'inclusion inverse, le lecteur fera lui-même.

Soit $x \in \overline{\varphi(S)}$. Nous allons prouver que $x \in \varphi(\bar{S})$, c'est-à-dire que $\varphi^{-1}(x) \in \bar{S}$. Pour cela nous considérons un ouvert $\mathcal{O}$ autour de $\varphi^{-1}(x)$. La partie $\varphi(\mathcal{O})$ est un ouvert contenant x. Donc $\varphi(\mathcal{O}) \cap \varphi(S) \neq \varnothing$, et donc $\mathcal{O} \cap S \neq \varnothing$, ce qui prouve que $\varphi^{-1}(x) \in \bar{S}$. □

7.54.
Note qu'en général, il n'est pas vrai que $f(\bar{S}) = \overline{f(S)}$ lorsque f est seulement continue. Nous avons par exemple[220] ceci :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \tag{7.40}$$

et $S = \{(x, 1/x) \text{ tel que } x \neq 0\}$. Nous avons $S = \bar{S}$ et donc $f(S) = f(\bar{S}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mais $\overline{f(S)} = \mathbb{R}$.

La réalité est la proposition 7.50 qui dit que f est continue si et seulement si $f(\bar{S}) \subset \overline{f(S)}$ pour toute partie S.

7.2 Topologie rendant continue (topologie initiale)

PROPooGOEVooZBAOQh

Proposition-Définition 7.55 (Topologie initiale[221, 1])**.**
Soient un ensemble X, des espaces topologiques $(Y_i, \tau_i)_{i \in I}$, et des applications $\varphi_i : X \to Y_i$. Nous notons

$$\Lambda = \{(i, \omega_i) \text{ tel que } i \in I, \omega_i \in \tau_i\}, \tag{7.41}$$

[9] Application continue, définition 7.45.
[10] Définition 7.51.

et $P(\Lambda)$ l'ensemble des parties finies de Λ. Pour chaque $\lambda \in P(\Lambda)$, nous posons

$$\Phi_\lambda = \bigcap_{(i,\omega_i)\in\lambda} \varphi_i^{-1}(\omega_i). \tag{7.42}$$

Enfin nous posons[11]

$$\tau_I = \Big\{ \bigcup_{\lambda\in\Gamma} \Phi_\lambda \Big\}_{\Gamma\subset P(\Lambda)}. \tag{7.43}$$

EQooUAZMooImyinM

Nous avons :

(1) τ_I est une topologie sur X.

(2) Toutes les applications φ_i sont continues[12] *pour cette topologie.*

ITEMooJLXPooMokQuP

(3) La topologie τ_I est la plus faible topologie sur X pour laquelle toutes les φ_i sont continues. Autrement dit, si τ_X est une topologie pour laquelle toutes les φ_i sont continues, alors $\tau_I \subset \tau_X$.

*La topologie ainsi définie est souvent référée comme la plus petite topologie qui rend les applications φ_i continues. Elle est aussi appelée **topologie initiale** des φ_i.*

Démonstration. En plein de parties.

(1) **τ_I est une topologie** Vérification des conditions de la définition 7.1.

(1a) **$\varnothing$ et X sont dans τ_I** Pour $\varnothing$, il suffit de prendre $\Gamma = \varnothing$. Pour X, nous prenons un i quelconque et nous choisissons $\omega_i = Y_i$. Alors $\varphi_i^{-1}(\omega_i) = X$ et en prenant $\Gamma = \{(i,\omega_i)\}$ on est bon.

(1b) **Union quelconques** Nous avons $\bigcup_{\lambda\in\Gamma_1}\Phi_\lambda \cup \bigcup_{\lambda\in\Gamma_2}\Phi_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Gamma_1\cup\Gamma_2}\Phi_\lambda$. Les éléments de $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ sont des parties finies de Λ.

(1c) **Intersection finie** D'abord, de la définition $\Phi_\alpha = \bigcap_{(i,\omega_i)\in\alpha}\varphi_i^{-1}(\omega_i)$, nous voyons que

$$\Phi_\alpha \cap \Phi_\beta = \bigcap_{(i,\omega_i)\in\alpha\cup\beta} \varphi_i^{-1}(\omega_i) = \Phi_{\alpha\cup\beta}. \tag{7.44}$$

En utilisant le lemme 1.46, nous avons alors

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma_\alpha}\Phi_\alpha\Big)\cap\Big(\bigcup_{\nu\in\Gamma_2}\Phi_\beta\Big) = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in\Gamma_1\times\Gamma_2}(\Phi_\alpha\cap\Phi_\beta) = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in\Gamma_1\times\Gamma_2}\Phi_{\alpha\cup\beta} = \bigcup_{\sigma\in\Gamma}\Phi_\sigma \tag{7.45}$$

où $\Gamma = \{\alpha\cup\beta \text{ tel que } (\alpha,\beta)\in\Gamma_1\times\Gamma_2\}$. Notez l'utilisation de la proposition 1.209(1) : chacun des $\alpha\cup\beta$ est fini.

(2) **Les φ_i sont continues** Soit un ouvert $\omega \subset Y_i$. Nous avons $\varphi_i^{-1}(\omega) = \Phi_\lambda$ avec $\lambda = \{(i,\omega)\}$. Mais $\Phi_\lambda \in \tau_I$. Donc $\varphi_i^{-1}(\omega)$ est ouvert dans (X,τ_I).

(3) **Topologie minimale** Une topologie τ_X sur X telle que tous les φ_i soient continues. Elle doit contenir tous les $\varphi_i^{-1}(\omega)$ avec $\omega\in\tau_i$. Comme une topologie doit contenir toutes les intersections finies, tous les Φ_λ sont dans τ_X. Comme τ_X doit contenir toutes les unions d'éléments de τ_X, elle doit contenir en particulier toutes les unions de parties de la forme Φ_λ. Donc $\tau_I\subset\tau_X$.

□

La topologie quotient d'un espace topologique par une relation d'équivalence est définie comme la plus petite topologie rendant continue la projection. Voir la définition 7.67.

LEMooVRGFooNgbwKu

Lemme 7.56 ([221, 222])**.**
Soient des espaces topologiques $\{(Y_i,\tau_i)\}_{i\in I}$, et X, un ensemble. Pour chaque i nous considérons une base de topologie $\mathcal{B}_i$ de τ_i. Nous considérons des applications $\varphi_i\colon X\to Y_i$.

L'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} \varphi_{\alpha_j}^{-1}(U_j) \text{ tel que } n\in\mathbb{N}, \alpha_1,\dots,\alpha_n\in I, U_k\in\mathcal{B}_k \right\} \tag{7.46}$$

est une base de la topologie initiale[13] *des φ_i.*

[11] Juste pour être explicite : dans (7.43), Γ est un ensemble de parties finies de Λ. Donc chaque λ est une partie finie de Λ.
[12] Application continue, définition 7.45.
[13] Proposition 7.55.

PROPooOPJCooAIUXCW

Proposition 7.57 ([1]).
Soient un espace topologique (Y, τ_Y) et une application $f\colon X \to Y$. Soient $x_0 \in X$ et $y_0 = f(y_0)$. Si $\{B_i\}_{i\in I}$ est une base de voisinages de y_0, alors $\{f^{-1}(B_i)\}_{i\in I}$ est une base de voisinages de x_0 pour la topologie initiale[14] *de f.*

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ autour de x_0 pour la topologie initiale de f. En adaptant le lemme 7.56 au cas d'une seule application,

$$\mathcal{B} = \{f^{-1}(U) \text{ tel que } U \in \tau_Y\} \tag{7.47}$$

est une base de topologie sur X. Donc $\mathcal{O}$ est une union de la forme[15]

$$\mathcal{O} = \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha) \tag{7.48}$$

avec $U_\alpha \in \tau_Y$. Soit $\alpha \in A$ tel que $x_0 \in f^{-1}(U_\alpha)$. Nous avons $y_0 = f(x_0) \in U_\alpha$. Vu que U_α est un ouvert contenant y_0, et vu que $\{B_i\}_{i\in I}$ est une base de voisinages de y_0, nous avons un $i \in I$ tel que

$$y_0 \in B_i \subset U_\alpha. \tag{7.49}$$

Donc nous avons aussi

$$f^{-1}(B_i) \subset f^{-1}(U_\alpha) \subset \mathcal{O}. \tag{7.50}$$

Donc tout voisinage de x_0 contient un élément de $\{f^{-1}(B_i)\}_{i\in I}$. Cela prouve que ce dernier est une base des voisinages de x_0. □

PROPooSEQRooZoQPbZ

Proposition 7.58 ([223]).
Soient des applications $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ où les Y_i sont des espaces topologiques séparés. La topologie initiale τ_I sur X est séparée si et seulement si les f_i séparent les points de X.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Par contraposée, nous supposons avoir $x \neq y$ dans X tels que $f_i(x) = f_i(y)$ pour tout $i \in I$. Nous posons

$$\tau_0 = \{U \subset X \text{ tel que } x, y \in U \text{ ou } x, y \notin U\}. \tag{7.51}$$

C'est-à-dire que τ_0 contient les parties de X qui contiennent soit x et y soit aucun des deux.

Ce τ_0 est une topologie sur X. Voyons que les f_i sont continues. Si $A \subset Y_i$, alors soit $f_i(x) \in A$ et alors $x, y \in f_i^{-1}(A)$). Dans ce cas $f_i^{-1}(A) \in \tau_0$. Soit $f_i(x) \notin A$ et alors ni x ni y ne sont dans $f_i^{-1}(A)$. Dans ce cas $f_i^{-1}(A) \in \tau_0$. Bref, pour tout $i \in I$ et pour tout partie A de Y_i nous avons $f_i^{-1}(A) \in \tau_0$. Donc f_i est continue.

Donc τ_0 est une topologie rendant continue toutes les f_I. Elle est donc au moins aussi grande que le topologie initiale τ_I. Étant donne que τ_0 ne sépare pas les points x et y, la topologie τ_I ne les sépare pas non plus. Nous avons donc démontré que τ_i n'est pas séparé.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons maintenant que les f_i séparent les points de X, et nous devons en déduire que (X, τ_I) est séparé. Soient $x, y \in X$. Nous considérons $i \in I$ tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Étant donné que Y_i est séparé, nous pouvons considérer des voisinages ouverts disjoints W_1 de $f_i(x)$ et W_2 de $f_i(y)$ dans Y_i.

Vu que f_i est continue, les parties $f_i^{-1}(W_1)$ et $f_i^{-1}(W_2)$ sont ouvertes. Elles sont de plus disjointes parce que si $z \in f_i^{-1}(W_1) \cap f_i^{-1}(W_2)$, alors $f_i(z) \in W_1 \cap W_2 = \varnothing$.

Donc τ_I sépare x et y.

□

LEMooZLZKooHElBOs

Lemme 7.59 ([1]).
Soit un ensemble A. Nous considérons $\mathrm{Fun}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les applications $A \to \mathbb{R}$. Pour chaque $x \in A$ nous posons

$$\begin{aligned} \pi_x\colon \mathrm{Fun}(A, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(x). \end{aligned} \tag{7.52}$$

Si τ_I est la topologie initiale de A pour les $\{\pi_x\}_{x\in A}$, alors (A, τ_I) est séparé.

[14] Définition 7.55.
[15] Définition 7.2(1).

Démonstration. En vertu de la proposition 7.58, il suffit de vérifier que les π_x séparent les points dans $\text{Fun}(A,\mathbb{R})$. Pour cela nous considérons $f \neq g$ dans $\text{Fun}(A,\mathbb{R})$. Il existe donc $x \in A$ tel que $f(x) \neq g(x)$. Dans ce cas nous avons $\pi_x(f) \neq \pi_x(g)$. Donc f et g sont bien séparés. □

LEMooADPLooYylNsj

Lemme 7.60 ([221]).
Soient des espaces topologiques $\{(Y_i,\tau_i)\}_{i\in I}$, et X, un ensemble. Nous considérons des applications $\varphi_i\colon X \to Y_i$ ainsi que τ, la topologie minimale sur X telle que les applications φ_i soient continues.

Soit une suite (x_n) dans X. Nous avons $x_n \xrightarrow{\tau} x$ si et seulement si $\varphi_i(x_n) \xrightarrow{\tau_i} \varphi_i(x)$ pour tout $i \in I$.

Démonstration. Dans le sens direct, c'est seulement le fait que les φ_i sont continues.

Dans le sens réciproque, nous supposons que $\varphi_i(x_n) \xrightarrow{\tau_i} \varphi_i(x)$ pour tout i et nous devons prouver que $x_n \xrightarrow{\tau} x$.

Soit un voisinage U de x. Vue la base de topologie donnée dans le lemme 7.56, il existe un J fini dans I ainsi que des ouverts $\{V_j\}_{j\in J}$ tels que

$$x \in W = \bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(V_j) \subset U \tag{7.53}$$

Par hypothèse, $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$. Mais V_j est un ouvert qui contient $\varphi_j(x)$. Donc il existe $N_j \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_j(x_n) \in V_j$ pour tout $n \geqslant N_j$. En posant[16] $N = \max\{N_j\}_{j\in J}$, nous avons que $\varphi_j(x_n) \in V_j$ pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $j \in J$.

Dans ce cas nous avons aussi $x_n \in W \subset U$. La convergence est prouvée. □

PROPooCBPEooCuaLUk

Proposition 7.61 ([221]).
Soient des espaces topologiques (Y_i,τ_i), un ensemble X, et des applications $\varphi_i\colon X \to Y_i$. Nous considérons sur X la plus petite topologie rendant continues[17] les φ_i.

Soit un espace topologique Z. Une application $\psi\colon Z \to (X,\tau_I)$ est continue si et seulement si les applications $\varphi_i \circ \psi\colon Z \to Y_i$ sont continues pour tout $i \in I$.

Démonstration. Le sens direct est une simple composée de fonctions continues. Pour l'autre sens, nous supposons que les $\phi_i \circ \psi$ sont continues, nous considérons $U \in \tau_I$ et nous devons montrer que $\psi^{-1}(U)$ est un ouvert de Z.

En posant

$$\Lambda = \{(i,\omega) \text{ tel que } i \in I, \omega \in \tau_i\}, \tag{7.54}$$

il existe un ensemble Γ de parties finies de Λ tel que

$$U = \bigcup_{\lambda\in\Gamma} \bigcap_{(i,\omega)\in\lambda} \varphi_i^{-1}(\omega). \tag{7.55}$$

Nous avons donc

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda\in\Gamma} \bigcap_{(i,\omega_i)\in\lambda} (\psi \circ \varphi_i^{-1})(\omega_i). \tag{7.56}$$

Vu que $\psi\circ\varphi^{-1}$ est continue, chacun des $(\psi\circ\varphi_i^{-1})(\omega)$ est ouvert. Donc $\psi^{-1}(U)$ est ouvert comme intersection finie et union arbitraire d'ouverts. □

7.2.1 Topologie produit

DEFooJHXKooQApPtQ

Définition 7.62 (Topologie produit[224]).
*Soit une famille d'espaces topologiques $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$. La **topologie produit** sur $\prod_{i\in I} X_i$ est la topologie initiale[18] des projections $p_k\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_k$.*

DefIINHooAAjTdY

Proposition 7.63 (Produit d'espaces topologiques, thème 27).
Soient $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1,\dots,n}$ des espaces topologiques. La topologie produit[19] sur $X = \prod_{i=1}^n X_i$ est donnée par

FQooVECGooKLUkTy

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{O} \subset X \text{ tel que } \forall x \in U, \exists U_i \in \tau_i \text{ tel que } x \in U_1 \times \dots \times U_n \subset \mathcal{O}\}. \tag{7.57}$$

Démonstration. Nous devons montrer que lesp_i sont continues pour $\mathcal{T}$ et que toute topologie rendant les p_i continues doit contenir $\mathcal{T}$.

[16] Notez l'utilisation du lemme 1.219 pour justifier que le maximum existe.
[17] Proposition 7.55.
[18] Définition 7.55.
[19] Définition 7.62.

(1) **Les p_i sont continues pour $\mathcal{T}$** Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathcal{T}$. Nous devons montrer que $p_i^{-1}(\mathcal{O}) \in \tau_i$. Soit $a \in p_i^{-1}(\mathcal{O})$. Soit $x \in \mathcal{O}$ tel que $p_i(a) = x$. Il existe des ouverts $U_j \in \tau_j$ tels que

$$x \in U_1 \times \ldots \times U_n \subset \mathcal{O}. \tag{7.58}$$

Nous avons alors $p_i^{-1}(U_1 \times \ldots \times U_n) = U_i$. Et donc $a \in U_i \subset p_i^{-1}(\mathcal{O})$.

(2) **Si les p_i sont continues pour $\mathcal{T}_0$** Soit une topologie $\mathcal{T}_0$ pour laquelle toutes les projections sont continue. Soient des ouverts $U_i \in \tau_i$. Nous devons prouver que $U_1 \times \ldots \times U_n \in \mathcal{T}_0$. Vu que p_i est continue et que U_i est un ouvert, nous devons avoir $p_i^{-1}(U_i) \in \tau_0$. Et par stabilité d'une topologie pour les intersections,

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(U_i) = U_1 \times \ldots \times U_n \tag{7.59}$$

doit encore être dans $\mathcal{T}_0$. Donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0$.

□

Dans le cas d'espaces normés, nous verrons dans le lemme 7.283 que la topologie produit est la même que celle obtenue par la norme produit.

Proposition 7.64 (Convergence composante par composante)**.**
Soient des espaces topologiques X_i $(i = 1, \ldots, n)$ et une suite $(a_k^{(1)}, \ldots, a_k^{(n)})$ dans $X_1 \times \ldots \times X_n$. Nous avons la convergence

$$(a_k^{(1)}, \ldots, a_k^{(n)}) \xrightarrow{X_1 \times \ldots \times X_n} (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) \tag{7.60}$$

si et seulement si $a_k^{(i)} \to a^{(i)}$ pour chaque i.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct** Soient des ouverts $\mathcal{O}_i$ autour de $a^{(i)}$ dans X_i. Puisque $\mathcal{O}_1 \times \ldots \times \mathcal{O}_n$ est un ouvert autour de $(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)})$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geqslant K$ nous avons $(a_k^{(1)}, \ldots, a_k^{(n)}) \in \mathcal{O}_1 \times \ldots \times \mathcal{O}_n$. Pour ce K nous avons séparément $a_k^{(i)} \in \mathcal{O}_i$ pour chaque i.

(2) **Sens inverse** Une prébase de la topologie sur $X_1 \times \ldots \times X_n$ est donnée par les $\mathcal{O}_1 \times \ldots \times \mathcal{O}_n$ où $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de X_i. Voir la définition 7.63 de la topologie produit et la définition 7.13 de ce qu'est une prébase.

La proposition 7.15 nous permet de ne vérifier la convergence de $(a_k^{(1)}, \ldots, a_k^{(n)})$ que sur la prébase. Soit donc $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \ldots \times \mathcal{O}_n$ avec $(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) \in \mathcal{O}$. Puisque $(a_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}} \to a^{(i)}$, pour chaque i, il existe $K_i \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geqslant K_i$ alors $a_k^{(i)} \in \mathcal{O}_i$.

En posant $K = \max_i(K_i)$, nous avons $(a_k^{(1)}, \ldots, a_k^{(n)}) \in \mathcal{O}_1 \times \ldots \mathcal{O}_n$ pour tout $k \geqslant K$.

La proposition 7.15 permet de conclure.

□

7.2.2 Topologie de la convergence simple

DEFooOKYYooBbowQC

Définition 7.65.
Soient un ensemble X et un espace topologique Y. Pour $x \in X$ et $V \in \tau_Y$, nous posons

$$W(x, V) = \{f \colon X \to Y \text{ tel que } f(x) \in V\}. \tag{7.61}$$

*La **topologie de la convergence simple** sur $\mathrm{Fun}(X, Y)$ est la topologie engendrée[20] par les parties $\{W(x, V)\}_{\substack{x \in X \\ V \in \tau_Y}}$.*

PROPooWLWYooBWCajp

Proposition 7.66.
Soient un ensemble X et un espace topologique Y. La topologie de la convergence simple[21] et la topologie produit[22] sur $\mathrm{Fun}(X, Y) = \prod_{x \in X} Y$ sont identiques.

[20] Définition 7.13.
[21] Définition 7.65.
[22] Produit en tant que ensemble des application, définition 1.22, et topologie produit 7.63.

7.2.3 Topologie quotient

DEFooHWSYooZZLXQU

Définition 7.67 ([225]).
*Soit un espace topologique X ainsi qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur X. La **topologie quotient** sur l'ensemble $X/\sim$ est la topologie initiale[23] de la projection canonique $p\colon X \to X/\sim$.*

PROPooDRPLooONCwYs

Proposition 7.68.
Soit un espace topologique X muni d'une relation d'équivalence $\sim$. Une partie $\mathcal{O} \in X/\sim$ est ouverte[24] si et seulement si $p^{-1}(\mathcal{O})$ est ouverte dans X.

DEFooBXGJooOBQaNw

Définition 7.69 (Passage d'une application aux classes).
*Soient deux ensembles X et E ainsi qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur X. Nous disons qu'une application $f\colon X \to E$ **passe aux classes** si f est constante sur chaque classe d'équivalence de X. Dans ce cas nous considérons l'**application quotient***

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon X/\sim &\to E \\ [x] &\mapsto f(x). \end{aligned} \tag{7.62}$$

LEMooKTINooKDjNeX

Lemme 7.70 ([226]).
Soient deux espaces topologiques X et Y. Soit une relation d'équivalence $\sim$ sur X. Nous considérons une application continue[25] $f\colon X \to Y$ capable de descendre aux classes[26]. Alors l'application quotient $\tilde{f}\colon X/\sim \to Y$ est continue.

Démonstration. Nous considérons la projection canonique $p\colon X \to X/\sim$. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ dans Y. La partie $\tilde{f}^{-1}(\mathcal{O})$ sera ouverte si $p^{-1}\big(\tilde{f}^{-1}(\mathcal{O})\big)$ est ouverte (proposition 7.68). Nous avons

$$p^{-1}\big(\tilde{f}^{-1}(\mathcal{O})\big) = (\tilde{f}\circ p)^{-1}(\mathcal{O}). \tag{7.63}$$

Mais $\tilde{f}\circ p = f$ parce que $(\tilde{f}\circ p)(x) = \tilde{f}([x]) = f(x)$. Donc

$$p^{-1}\big(\tilde{f}^{-1}(\mathcal{O})\big) = (\tilde{f}\circ p)^{-1}(\mathcal{O}) = f^{-1}(\mathcal{O}) \tag{7.64}$$

qui est ouvert parce que f est continue. □

LEMooIGLQooIMSWYg

Lemme 7.71 ([226]).
Soient deux espaces topologiques X et Y ainsi qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur X. Nous considérons une application continue $g\colon X/\sim \to Y$. Alors

(1) L'application $g\circ p$ est continue.

(2) Si nous posons $f = g\circ p$, alors f descend aux classes et $\tilde{f} = g$.

Démonstration. La projection p est toujours continue par définition de la topologie quotient. Donc $g\circ p$ est continue par composition d'applications continues.

Voyons que f descend aux classes. Si $x \sim y$, alors $p(x) = p(y)$ et donc $f(x) = f(y)$. En ce qui concerne l'application $\tilde{f}$, nous avons

$$\tilde{f}\big([x]\big) = (g\circ p)(x) = g\big([x]\big), \tag{7.65}$$

donc $\tilde{f} = g$ et le lemme est démontré. □

PROPooYKLBooQuqnfA

Proposition 7.72 ([225]).
Soient des espaces topologiques X et Y ainsi qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur X. Soit la projection canonique $p\colon X \to X/\sim$. Une application $f\colon X/\sim \to Y$ est continue si et seulement si l'application composée $f\circ p\colon X \to Y$ est continue.

7.3 Espace séparable

Notons que l'on a parlé d'*une* limite de suite jusqu'à présent : en effet, si il existe deux éléments distincts x et y tels que tout ouvert contenant x contient y, alors la définition 7.14 dit que toute suite convergeant vers y converge aussi vers x…

[23] C'est la plus petite topologie rendant continue. Définition 7.55.
[24] La topologie est définie en 7.67.
[25] Définition 7.45.
[26] Voir la définition 7.69.

EXooSHKAooZQEVLB

Exemple 7.73.
Oui, il y a moyen de converger vers plusieurs points distincts si l'espace n'est pas super cool. Nous pouvons par exemple [227] considérer la droite réelle munie de sa topologie usuelle et y ajouter un point $0'$ (qui clone le réel 0) dont les voisinages sont les voisinages de 0 dans lesquels nous remplaçons 0 par $0'$. Dans cet espace, la suite $(1/n)$ converge à la fois vers 0 et $0'$.

En fait, on « voit » le problème : on ne peut pas distinguer d'un point de vue topologique le 0 et le $0'$. △

Nous posons la définition suivante, qui nous permettra de donner une assez grande classe d'espaces topologiques dans lesquels nous avons unicité de la limite[27].

DefYFmfjjm

Définition 7.74 (Espace topologique Hausdorff)**.**
Si deux points distincts admettent toujours deux voisinages disjoints[28]*, nous disons que l'espace est* ***séparé*** *ou* ***de Hausdorff****.*

Attention, cette notion est à ne pas confondre avec :

DefUADooqilFK

Définition 7.75 (Espace topologique séparable)**.**
Un espace topologique est ***séparable*** *si il possède une partie dénombrable*[29] *dense*[30]*.*

LEMooXNSCooQYkmAN

Lemme 7.76 ([1])**.**
Un singleton d'un espace Hausdorff[31] *est fermé.*

Démonstration. Soit un espace topologique séparé X. Nous prouvons que $X\backslash\{a\}$ est ouvert. Soit $x \in X\backslash\{a\}$. Vu que X est séparé, il existe un voisinage V de a et U de x tels que $V \cap U = \varnothing$. En particulier $U \subset X\setminus\{a\}$. Donc $X \setminus \{a\}$ contient un voisinage de chacun de ses points et est donc ouvert. □

7.4 Suites et convergence

7.77.
À propos de notations. La pire notation possible pour une suite est $(a_n)_n$. Mais que vient faire le second indice n ? Il peut être raisonnable d'écrire $(a_n)_{n\in I}$ lorsqu'on veut dire dans quel ensemble se déplace n. Si nous parlons de *suite*, il faut une sérieuse raison de prendre autre chose que $\mathbb{N}$ comme ensemble d'indices.

Une suite étant une fonction, de la même façon qu'on ne devrait pas dire « la fonction $f(x)$ », mais « la fonction f » ou « la fonction $x \mapsto f(x)$ », nous devrions simplement écrire a pour désigner la suite dont les éléments sont a_n.

Par conséquent, il est parfaitement légal, et même conseillé, d'écrire « $a + b$ » pour la somme des suites a et b. Et il est tout aussi légal d'écrire « $\lim a$ » au lieu de $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Le hic est que nous écrivons souvent x la limite de la suite $n \mapsto x_n$. Dans ce cas, nous sommes évidemment obligé d'écrire l'indice n pour parler de la suite.

Tout cela pour dire qu'il faut être souple avec les notations.

7.4.1 Convergence dans un fermé

PROPooBBNSooCjrtRb

Proposition 7.78 ([1])**.**
Une suite contenue dans un fermé ne peut converger[32] *que vers un élément de ce fermé.*

Démonstration. Soient un espace topologique X et un fermé F dans X. Nous supposons que la suite (x_k) soit contenue dans F. Nous allons prouver qu'aucun élément de F^c ne peut être limite.

Soit $a \in F^c$. Puisque le complémentaire de F est un ouvert, et d'après le théorème 7.8, il existe un ouvert $\mathcal{O}_a$ contenant a, et contenu dans F^c. Le voisinage $\mathcal{O}_a$ de a ne contient donc aucun élément de la suite (x_k), qui ne peut donc pas converger vers a. □

CorLimAbarA

Corolaire 7.79.
Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X. Toute suite d'éléments de A qui converge, admet pour limite un élément de $\mathrm{Adh}(A)$.

[27] Voir la proposition 7.138.
[28] Définition 1.7.
[29] Définition 1.220.
[30] Définition 7.23.
[31] Hausdorff et séparé sont synonymes, définition 7.75.
[32] Définition 7.14.

Démonstration. Une fois la suite (x_n) fixée, il suffit de remarquer que tous les x_n sont dans $\mathrm{Adh}(A)$, et puis d'appliquer la proposition 7.78. □

PROPooEXUMooAFbpVJ

Proposition 7.80 ([1])**.**
Soit un espace topologique X, et une partie $A \subset X$. Nous supposons que pour toute suite convergente $x_n \xrightarrow{X} x$ telle que $x_n \in A$, nous avons $x \in A$.
Alors A est fermé.

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{Adh}(A)$. Il existe une suite convergente $x_n \xrightarrow{X} a$ avec $x_n \in A$. Par hypothèse nous avons alors $a \in A$. Cela prouve que $\mathrm{Adh}(A) \subset A$, et donc que A est fermé. □

LemPESaiVw

Lemme 7.81.
Soit $A \subset X$ muni de la topologie induite de X et (x_n) une suite dans A. Si (x_n) converge vers un élément x dans A, alors elle converge aussi vers x dans X.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert autour de x dans X. Alors $A \cap \mathcal{O}$ est un ouvert autour de x dans A et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $x_n \in A \cap \mathcal{O} \subset \mathcal{O}$. □

7.4.2 Pour des limites uniques : séparabilité

PropUniciteLimitePourSuites

Proposition 7.82.
Dans un espace topologique séparé, si une suite converge, alors sa limite est unique.

Démonstration. Supposons que la suite (x_k) converge vers deux éléments distincts x et y. L'espace étant séparé, il existe deux ouverts $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_y$, disjoints, contenant respectivement x et y. La suite convergeant à la fois vers x et y, il existe k_x et k_y, tels que, si $k \geqslant \max\{k_x, k_y\}$, l'élément x_k est (à la fois) dans $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_y$. Cela est en contradiction avec le fait que ces deux ensembles sont disjoints. □

7.83.
Donc, on pourra parler, avec des espaces séparés, de « la limite d'une suite ». On notera $x_n \to a$, ou $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, pour signifier que la suite (x_n) converge vers a.

LEMooMDTNooThlHJl

Lemme 7.84 ([1])**.**
Soit $a \neq 0$ dans un espace vectoriel topologique[33] Hausdorff[34]. Il existe un voisinage V de 0 tel que $a \notin \bar{V}$.

Démonstration. Étant donné que l'espace topologique est Hausdorff, nous pouvons considérer des voisinages V de 0 et W de a tels que $V \cap W = \varnothing$.
Dans ce cas nous avons $a \notin \bar{V}$ (voir la définition 7.19 de la fermeture de V). □

PROPooNRRIooCPesgO

Proposition 7.85 ([1])**.**
La convergence de suite pour la topologie de l'espace produit[35] est équivalente à la convergence des suites « composante par composante ».

Démonstration. En deux parties

(1) **Sens direct** Pour simplifier les notations, nous allons considérer le produit de deux espaces. Soit donc $(x_k, y_k) \xrightarrow{X\times Y} (x, y)$ et des ouverts $\mathcal{O}_1$ dans X autour de x et $\mathcal{O}_2$ autour de y dans Y.
La partie $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ est ouverte dans $X \times Y$. Donc il existe K tel que $k \geqslant K$ implique $(x_k, y_k) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$.
Nous avons prouvé que pour tout ouvert $\mathcal{O}_1$ autour de x il existe K tel que $k \geqslant K$ implique $x_k \in \mathcal{O}_1$. Donc $x_k \xrightarrow{X} x$. Idem pour y.

(2) **Dans l'autre sens** Nous considérons l'espace produit[36] $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Nous supposons pour chaque i, avoir une suite convergente $(x_i)_k \xrightarrow{X_i} x_i$.
Nous allons prouver que

$$\big((x_1)_k, \dots, (x_n)_k\big) \xrightarrow{X} (x_1, \dots, x_n). \tag{7.66}$$

Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de X autour de $(x_1, \dots, x_n)$. Nous considérons des ouverts U_i de X_i tels que $x_i \in U_i$ et $U_1 \times \dots \times U_n \subset \mathcal{O}$.

[33] Définition 7.219.
[34] Définition 7.74
[35] Définition 7.63.
[36] Pour les notations, ça va être le sport : $(x_i)_k$ désigne une suite dans X_i, mais x_i désigne la limite de cette suite.

Vu que $(x_i)_k \xrightarrow{X_i} x_i$, il existe $K_i \in \mathbb{N}$ tel que $k > K_i$ implique $(x_i)_k \in U_i$. Si $k \geqslant \max_i\{K_i\}$, alors $(x_i)_k \in U_i$ pour tout i et nous avons

$$\big((x_1)_k, \dots, (x_n)_k\big) \in U_1 \times \dots \times U_n \subset \mathcal{O}. \tag{7.67}$$

□

LEMooSJKMooKSiEGq

Lemme 7.86 ([1]).
Soit un espace topologique X. Soient dans X une suite (x_n) et un élément x tels que toute sous-suite de (x_n) contient une sous-suite convergente vers x. Alors $x_n \to x$.

Démonstration. Supposons que (x_n) ne converge pas vers x. Il existe alors un ouvert $\mathcal{O}$ autour de x tel que pour tout $N > 0$, il existe $n \geqslant N$ tel que x_n n'est pas dans $\mathcal{O}$.

Cela nous permet de construire une sous-suite de (x_n) composée d'éléments hors de $\mathcal{O}$. Aucune sous-suite de cette sous-suite ne peut converger vers x. □

7.4.3 Topologie induite

PROPooAHIMooYhOwUf

Proposition 7.87 ([1]).
Soient un espace topologique X et une partie $A \subset X$. Nous munissons A de la topologie induite depuis X.

ITEMooLXGWooYgPqoT

(1) Si X est Hausdorff[37], alors A est Hausdorff.

ITEMooOQZDooGztljW

(2) Si X est à base dénombrable de topologie[38], alors A est à base dénombrable.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soient $a, b \in A$. Vu que X est Hausdorff, il existe des voisinages ouverts $\mathcal{O}_1$ de a et $\mathcal{O}_2$ de b tels que $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$. Les paries $A \cap \mathcal{O}_1$ et $A \cap \mathcal{O}_2$ sont des ouverts disjoints de A.

(2) **Pour (2)** Soit une base $\{B_i\}_{i\in I}$ de la topologie de X. Nous supposons que I est dénombrable. Nous démontrons que $\{B_i \cap A\}_{i\in I}$ et une base de la topologie de A.

En effet soit $a \in A$ et un ouvert S de A tel que $a \in S$. Il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de X tel que $S = \mathcal{O} \cap A$. Vu que $\{B_i\}_{i\in I}$ est une base de la topologie de X, il existe $i \in I$ tel que $a \in B_i \subset \mathcal{O}$.

Vu que $\mathcal{O} \subset B_i$, nous avons

$$a \in S = A \cap \mathcal{O} \subset B_i \cap \mathcal{O}. \tag{7.68}$$

□

7.4.4 Fonctions équivalentes

DEFooWDSAooKXZsZY

Proposition-Définition 7.88 ([228]).
Soit un espace topologique X et $D \subset X$. Soient encore des fonctions $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ et un point $a \in \operatorname{Adh}(D)$[39].

Nous définissons sur $\operatorname{Fun}(D, \mathbb{C})$ la relation $f \sim g$ lorsque qu'il existe un voisinage V de a dans X et une fonction $\alpha\colon V \to \mathbb{R}$ telles que

(1) $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$,

(2) pour tout $x \in (V \cap D) \setminus \{a\}$,

$$f(x) = \big(1 + \alpha(x)\big)g(x). \tag{7.69}$$

EQooQXKYooSDPpNq

Cette relation est une relation d'équivalence.

*Lorsque $f \sim g$, nous disons que f et g sont **équivalentes** en a.*

Démonstration. Nous devons prouver les trois conditions de la définition 1.50 de relation d'équivalence.

(1) **Réflexive** Il suffit de poser $\alpha(x) = 0$.

[37] Définition 7.74.
[38] Base de topologie, proposition 7.2.
[39] Adhérence ou fermeture, c'est la même chose. Voir la définition 7.19 et le lemme 7.20.

(2) **Symétrique** Si $f \sim g$, il existe une fonction α vérifiant ce qu'il faut telle que

$$f(x) = \big(1 + \alpha(x)\big)g(x). \tag{7.70}$$

Comme $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$, il y a un voisinage de a sur lequel $|\alpha(x)| < 1$; il n'y a donc pas de problème de dénominateur en écrivant

$$g(x) = \frac{1}{1 + \alpha(x)} f(x). \tag{7.71}$$

Nous posons alors $\beta(x) = -\alpha(x)/\big(1 + \alpha(x)\big)$. Cela vérifie

$$g(x) = \big(1 + \beta(x)\big)f(x). \tag{7.72}$$

Et

$$\lim_{x\to a} \beta(x) = 0 \tag{7.73}$$

parce que $\lim_{x\to a} \big(1 + \alpha(x)\big) = 1$ et $\lim_{x\to a} -\alpha(x) = 0$.

(3) **Transitive** Soit $f \sim g$ et $g \sim h$. Sur un voisinage V de a nous avons

$$f(x) = \big(1 + \alpha(x)\big)g(x), \tag{7.74}$$

sur un voisinage W de a nous avons

$$g(x) = \big(1 + \beta(x)\big)h(x). \tag{7.75}$$

Sur le voisinage $V \cap W$ nous avons

$$f(x) = \big(1 + \beta(x) + \alpha(x) + (\alpha\beta)(x)\big)h(x). \tag{7.76}$$

Donc la fonction $\gamma(x) = \beta(x) + \alpha(x) + (\alpha\beta)(x)$ fait l'affaire.

□

Notons que la notion d'équivalence de fonctions, de même que la notion de limite, ne dépend pas des valeurs exactes atteintes par les fonctions au point.

Lemme 7.89.
Si f et g sont équivalentes en a, et si g ne s'annule pas sur un voisinage de a, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe r tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in B(1, \epsilon) \tag{7.77}$$

pour tout $x \in B(a, r)$.

Démonstration. Nous considérons un voisinage V de a sur lequel en même temps :

- la fonction α de la définition d'équivalence est définie,
- $|\alpha(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in V$,
- $g(x) \neq 0$, pour tout $x \in V$.

Ensuite nous considérons $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$. En divisant la condition (7.69) par $g(x)$ nous trouvons

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x). \tag{7.78}$$

Donc

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| = |\alpha(x)| \leqslant \epsilon, \tag{7.79}$$

ce qu'il fallait prouver. □

7.5 Espace topologique normal et complètement normal

DEFooNNKVooLtzImT

Définition 7.90.
*Un **espace topologique normal** est un espace topologique séparé dont les ouverts séparent strictement les fermés disjoints.*

Autrement dit, si F_1 et F_2 sont des fermés disjoints de X, alors il existe des ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ tels que $F_1 \subset \mathcal{O}_1$ et $F_2 \subset \mathcal{O}_2$.

PROPooWSKZooHKvuob

Proposition 7.91.
L'espace topologique $\mathbb{R}^n$ est normal.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 7.92
J'ai écrit le lemme 7.93 de façon adhoc pour une utilisation dans le théorème d'Urysohn. J'avoue n'être pas certain qu'il soit vrai. Si vous en trouvez une preuve, écrivez-moi.

LEMooVVASooEXYKOZ

Lemme 7.93 ([1]).
Soit un espace topologique normal X. Si $\mathcal{O}$ est ouvert dans X et si F est un fermé contenu dans $\mathcal{O}$, alors il existe un ouvert U tel que

$$F \subset U \subset \bar{U} \subset \mathcal{O}. \tag{7.80}$$

DEFooTLVHooYWvDIu

Définition 7.94 ([229]).
*Un espace topologique X est **complètement normal** si pour toutes parties $A, B \subset X$ telles que $A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} = \varnothing$, il existe deux ouverts U, V tels que*

(1) $A \subset U$

(2) $B \subset V$

(3) $U \cap V = \varnothing$.

7.6 Connexité

L'idée de la connexité, c'est de s'assurer qu'un ensemble est « d'un seul tenant ».

PROPooNLXDooVTZLan

Proposition-Définition 7.95 (Espace topologique connexe[230]).
Soit un espace topologique X. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) X n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.

(2) X n'est pas la réunion de deux fermés non vides disjoints.

(3) Les seuls ouverts-fermés de X sont X et $\varnothing$.

(4) Toute application continue $X \to \{1, 2\}$ (munie de la topologie discrète) est constante.

*Quand un espace topologique vérifie ces conditions, nous disons que X est **connexe**.*

DEFooQGESooKSVtmt

Définition 7.96 (Partie connexe[230]).
*Une partie d'un espace topologique est **connexe** si elle est connexe pour la topologie induite.*

DEFooJYCDooGNEDoC

Définition 7.97 (Partie n-connexe[1]).
*Une partie Q d'un espace topologique X est **n-connexe** si pour tout ouverts A, B tels que*

(1) $Q \subset A \cup B$

(2) $A \cap Q \neq \varnothing$ *et* $B \cap Q \neq \varnothing$,

nous avons $A \cap B \neq \varnothing$.

PROPooQHJXooMNrxOJ

Proposition 7.98 ([1]).
Tout connexe est n-connexe.

Démonstration. Soient un espace topologique (X, τ_X) ainsi qu'une partie $Q \subset X$ munie de la topologie induite τ_Q. Nous supposons que Q n'est pas n-connexe, et nous montrons que Q n'est pas connexe.

Si Q n'est pas n-connexe, il existe $A, B \in \tau_X$ tels que $Q \subset A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cap Q \neq \varnothing \neq B \cap Q$.

Les parties $A \cap Q$ et $B \cap Q$ sont des ouverts de (Q, τ_Q). Elles sont disjointes, non vides et recouvrent Q. Donc Q n'est pas connexe. □

PROPooAHWNooXhrqnd

Proposition 7.99 ([231]).
Dans un espace complètement normal[40]*, tout n-connexe est connexe.*

Démonstration. Soient un espace topologique complètement normal X, et une partie $Q \in X$.

(1) **Contraposée** Par contraposée nous supposons que Q n'est pas connexe : il existe $G_0, G_1 \in \tau_Q$ tels que

(1a) $Q = G_0 \cup G_1$
(1b) $G_0 \neq \varnothing \neq G_1$
(1c) $G_0 \cap G_1 \neq \varnothing$

Par définition de la topologie induite τ_Q, il existe des ouverts $U_0, U_1 \in \tau_X$ tels que $G_0 = U_0 \cap Q$ et $G_1 = U_1 \cap Q$.

(2) $U_0 \cap G_1 = \varnothing$ Nous avons
$$U_0 \cap G_1 = U_0 \cap U_1 \cap Q \subset U_0 \cap Q = G_0. \tag{7.81}$$
Donc un élément de $U_0 \cap G_1$ serait dans $G_0 \cap G_1$, ce qui n'est pas possible.

(3) **Fermeture** Vu que U_0 est ouvert dans X et que $U_0 \cap G_1 = \varnothing$, le lemme 7.36 dit que $U_0 \cap \mathrm{Adh}_X(G_1) = \varnothing$. Et comme $G_0 \subset U_0$,
$$G_0 \cap \mathrm{Adh}_X(G_1) = \varnothing. \tag{7.82}$$
De même
$$G_1 \cap \mathrm{Adh}_X(G_0) = \varnothing. \tag{7.83}$$

(4) **Complètement normal** Vu que X est complètement normal, il existe des ouverts disjoints $V_0, V_1 \in \tau_X$ tels que $G_0 \subset V_0$ et $G_1 \subset V_1$.

(5) **Conclusion** Nous concluons que Q n'est pas n-connexe parce que $\{V_0, V_1\}$ est un recouvrement disjoint de Q par des ouverts de X.

□

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 7.100
Il y a peut-être une réciproque. J'ai entendu à quelques endroits sur internet que si tous les n-connexes sont connexes, alors l'espace est complètement normal. Voici une tentative de démonstration, pas complète. Si vous pouvez donner une démonstration complète ou un contre-exemple (un espace non complètement normal dans lequel tous les n-connexes sont connexes), écrivez-moi.

THOooMULNooNYeHAj

pseudo-théorème 7.101 ([231, 232]).
Un espace topologique dans lequel tous les n-connexes sont connexes est complètement normal.

Démonstration. Soient des parties $A, B \subset X$ telles que $A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} = \varnothing$. Nous notons $Q = A \cup B$.

(1) **B est ouvert dans $Q = A \cup B$** Nous savons que $X \setminus \bar{B}$ est ouvert dans X. Vu que $B \cap \bar{A} = \varnothing$ nous avons $B \subset Q \cap (X \setminus \bar{A})$, et donc $B \subset X \setminus \bar{A}$ et donc $B = Q \cap (X \setminus \bar{A})$. La partie B est donc bien l'intersection entre Q et un ouvert de X. Donc B est ouvert dans Q.

Donc $A \cup B$ est l'union de deux ouverts disjoints (pour sa topologie induite), et n'est donc pas connexe.

(2) **Utilisation de l'hypothèse** Vu que Q n'est pas connexe, il n'est pas non plus n-connexe. Il existe des ouverts U et V tels que

(2a) $Q \subset U \cup V$
(2b) $U \cap Q \neq \varnothing \neq V \cap Q$
(2c) $U \cap V = \varnothing$.

Ce serait bien que $A \subset U$ et que $B \subset V$. Mais rien n'est moins sûr. Nous considérons donc quelques cas possibles.

(3) **Si A est connexe** Dans ce cas, $\{U, V\}$ est un recouvrement de A par des ouverts disjoints. Donc $A \subset U$ et $A \cap V = \varnothing$ (ou le contraire).

[40] Définition 7.94.

(4) **Si A a un nombre fini de composantes connexes** Soient $\{C_i\}_{1=1,\dots,n}$ les composantes connexes[41] de A. Pour chaque i nous avons $C_1 \cap \bar{B} = B \cap \bar{C}_i = \varnothing$ et donc (en reprenant toute la démonstration jusqu'ici avec C_i au lieu de A), nous avons des ouverts U_i et V_i tels que $C_i \subset U_i$, $B \subset V_i$ et $U_i \cap V_i = \varnothing$. Nous posons alors $U = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ et $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$.

(4a) $V \cap U = \varnothing$ En effet si $x \in V \cap U$ nous avons $V \in C_i$ pour un certain i. Pour ce même i nous avons $x \in V_i$ (c'est pour ça qu'on a dit que V serait l'intersection). Or $V_i \cap U_i = \varnothing$; un tel x ne peut pas exister.

(4b) $V \neq \varnothing$ Parce que chacun des V_i contient B.

(4c) V **est ouvert** Parce que c'est une intersection finie d'ouverts[42].

(5) **Le problème** Si A et B ont tous les deux un nombre infini de composantes connexes, on ne peut pas déduire que U et V sont ouverts. Donc le démonstration coince dans ce cas.

Bref. Preuve pas terminée. Écrivez-moi si vous êtes capable de terminer.

□

DefIRKNooJJlmiD

Définition 7.102.
*Lorsque X est un espace topologique, nous disons qu'un sous-ensemble A est **non connexe** quand on peut trouver des ouverts O_1 et O_2 disjoints tels que*

$$A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2), \tag{7.84}$$

EqDefnnCon

*et tels que $A \cap O_1 \neq \varnothing$, et $A \cap O_2 \neq \varnothing$. Si un sous-ensemble n'est pas non-connexe, alors on dit qu'il est **connexe**.*

Une autre façon d'exprimer la condition (7.84) est de dire que A n'est pas connexe quand il est contenu dans la réunion de deux ouverts disjoints qui intersectent tous les deux A.

PROPooBCFXooRlMvch

Proposition 7.103 ([233]).
Soit un espace topologique X. Soient $(C_i)_{i\in I}$ des connexes de X tels que $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \varnothing$. Alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

Démonstration. Nous notons $C = \bigcup_{i\in I} C_i$. Soient des ouverts disjoints $A, B \in \tau_C$ recouvrant C. Nous devons démontrer que soit $A \cap C$ soit $B \cap C$ est vide. Par définition de la topologie induite τ_C, il existe des ouverts $A', B' \in \tau_X$ tels que $A = C \cap A'$ et $B = C \cap B'$.

Nous notons $A_i = C_i \cap A$ et $B_i = C_i \cap B$. Les parties A_i et B_i recouvrent C_i et nous avons $A_i \cup B_i = C_i$. De plus

$$A_i = C_i \cap^{C} \cap A' = C_i \cap A', \tag{7.85}$$

donc A_i est ouvert dans C_i. Vu que C_i est ouvert, soit A_i soit B_i est vide.

Par hypothèse, $\bigcap_{i\in I} C_i$ est non vide. Soit x un élément de cette intersection. Soit $x \in A$ et alors $x \in A_i$ pour tout i ; soit $x \in B$ et alors $x \in B_i$ pour tout i.

Dans le premier cas, $x \in A_i$ pour tout i, de telle sorte que $B_i = \varnothing$ pour tout i. Nous avons alors

$$\varnothing = \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} (C_i \cap B) = B \cap C. \tag{7.86}$$

Dans le second cas nous obtenons de même que $A \cap C = \varnothing$. □

DEFooFHXNooJGUPPn

Proposition-Définition 7.104 ([234]).
Soient un espace topologique X et un point $x \in X$.

ITEMooBZAQooNwuzaS

(1) La réunion de toutes les parties connexes de X contenant x est connexe.

(2) Cette réunion est la plus grande (au sens de la relation d'inclusion) de toutes les parties connexes de X contenant x.

*La réunion de toutes les parties connexes de X contenant x est nommée **composante connexe** de x dans X.*

Démonstration. La réunion de toutes les parties connexes contenant x est connexe par la proposition 7.103.

Nous notons C la réunion de toutes les parties connexes contenant x. Si D est un connexe contenant x, alors $D \subset C$ parce que C est une union de tous les connexes, y compris D. □

[41] Définition 7.104.
[42] C'est la propriété 7.1(3).

PropHSjJcIr

Proposition 7.105 ([1]).
Soit X un espace topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes.

ITEMooXHIKooGqrgTs

(1) L'espace X est connexe.

ITEMooRTNPooADKVnw

(2) Si $X = O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 des ouverts disjoints, alors soit $O_1 = \varnothing$ soit $O_2 = \varnothing$.

ITEMooOEZYooFBNaOZ

(3) Si $X = F_1 \cup F_2$ avec F_1 et F_2 fermés disjoints dans X, alors $F_1 = \varnothing$ ou $F_2 = \varnothing$.

ITEMooNIPZooIDPmEf

(4) Si $A \subset X$ avec A ouvert et fermé en même temps, alors $A = \varnothing$ ou $A = X$.

Démonstration. En quatre parties.

(1) **(1) implique (2)** Par rapport à la définition 7.102, nous prenons la partie X de l'espace X. Supposons que O_1 et O_2 sont tout deux non vides. Dans ce cas nous avons

$$X = O_1 \cup O_2 = (O_1 \cap X) \cup (O_2 \cap X), \tag{7.87}$$

ce qui prouverait que X est non connexe. Contradiction. Un des O_i est vide.

(2) **(2) implique (3)** Soit une union disjointe de fermés $X = F_1 \cup F_2$. Puisque l'union est disjointe, nous avons $F_1 = X \setminus F_2$ et $F_2 = X \setminus F_1$, ce qui fait que F_1 et F_2 sont également ouverts. Nous en déduisons que $X = F_1 \cup F_2$ est une union disjointe d'ouverts. L'hypothèse indique que $F_1 = \varnothing$ ou $F_2 = \varnothing$.

(3) **(3) implique (4)** Soit A une partie ouverte et fermée de X. Nous supposons que A est ouvert et fermé, donc $X \setminus A$ est également ouvert et fermé : c'est la définition 7.3 d'un fermé. Nous avons évidemment l'union $X = A \cup (X \setminus A)$ qui est une union disjointe de fermés. Par hypothèse nous avons soit $A = \varnothing$ soit $X \setminus A = \varnothing$.

(4) **(4) implique (1)** Supposons que X ne soit pas connexe. Il existe donc des ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $X = O_1 \cup O_2$. Étant donné que $O_1 = X \setminus O_2$, la partie O_1 est fermée comme complémentaire d'ouvert. Donc O_1 est fermé et ouvert (et O_2 aussi d'ailleurs). Par hypothèse nous concluons que O_1 est soit X soit $\varnothing$.

□

Nous verrons plus tard (proposition 7.271) une autre caractérisation de la connexité basée sur la continuité des fonctions $X \to \mathbb{Z}$.

PROPooSCKNooRbewdv

Proposition 7.106 ([1]).
Soient un espace topologique X ainsi que $S \subset X$. Si $U \subset X$ est connexe[43] *et si $U \subset S \subset \bar{U}$, alors S est connexe.*

Démonstration. Supposons que S ne soit pas connexe. Il existe des ouverts disjoints A et B tels que $S \subset A \cup B$ et $S \cap A \neq \varnothing$, $S \cap B \neq \varnothing$. Nous prouvons que ces ouverts fonctionnent aussi pour prouver que U est non connexe (donc on aura une contradiction).

D'abord A et B recouvrent U parce que $U \subset S \subset A \cup B$. Ensuite prouvons que $U \cap A \neq \varnothing$. Soit $x \in S \cap A$. Vu que $x \in S \subset \bar{U}$, tout voisinage de x intersecte U (c'est la définition 7.19 de l'adhérence). De plus $x \in A$ et A est ouvert. Soit donc un voisinage V de x contenu dans A. Nous avons $V \subset A$ et $V \cap U \neq \varnothing$. Donc $A \cap U \neq \varnothing$.

Le même raisonnement tient pour B. □

PropIWIDzzH

Proposition 7.107.
Stabilité de la connexité par union.

ITEMooLVSSooTGstBz

(1) Une union quelconque de connexes ayant une intersection non vide est connexe.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}, n > 0$, si $A_1, \dots, A_n$ sont des connexes de X avec $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$, alors l'union $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est connexe.

Démonstration. Point par point.

[43] Définition 7.102.

(1) Soient $\{C_i\}_{i\in I}$ un ensemble de connexes et un point p dans l'intersection : $p \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Supposons que l'union ne soit pas connexe. Alors nous considérons A et B, deux ouverts disjoints recouvrant tous les C_i et ayant chacun une intersection non vide avec l'union.

Supposons pour fixer les idées que $p \in A$ et prenons $x \in B \cap \bigcup_{i\in I} C_i$. Il existe un $j \in I$ tel que $x \in C_j$. Avec tout cela nous avons

(1a) $C_j \subset A \cup B$ parce que $A \cup B$ recouvre tous les C_i,

(1b) $C_j \cap A \neq \varnothing$ parce que p est dans l'intersection,

(1c) $C_j \cap B \neq \varnothing$ parce que x est dans cette intersection.

Cela contredit le fait que C_j soit connexe.

(2) Pour la seconde partie nous procédons de proche en proche[44]. D'abord $A_1 \cup A_2$ est connexe par la première partie, ensuite $(A_1 \cup A_2) \cup A_3$ est connexe parce que les connexes $A_1 \cup A_2$ et A_3 ont un point d'intersection par hypothèse, et ainsi de suite.

□

7.7 Compacité

La compacité est le thème 33.

7.7.1 Définition et notions connexes

Soit E, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Nous pouvons considérer les ouverts suivants :

$$\mathcal{O}_x = B(x, 1) \tag{7.88}$$

pour chaque $x \in E$. Évidemment,

$$E \subseteq \bigcup_{x\in E} \mathcal{O}_x. \tag{7.89}$$

Cette union contient en général de nombreuses redondances. Si par exemple $E = [-10, 10]$, l'élément $3 \in E$ est contenu dans $\mathcal{O}_{3.5}$, $\mathcal{O}_{2.7}$ et bien d'autres. Pire : même si on enlève par exemple $\mathcal{O}_2$ de la liste des ouverts, l'union de ce qui reste continue à être tout E. La question est : *est-ce qu'on peut en enlever suffisamment pour qu'il n'en reste qu'un nombre fini ?*

Définition 7.108.
Soit E, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Une collection d'ouverts $\mathcal{O}_i$ est un ***recouvrement*** *de E si $E \subseteq \bigcup_i \mathcal{O}_i$.*
DefJJVsEqs

Définition 7.109.
Une partie A d'un espace topologique est ***compacte*** *si elle vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : pour tout recouvrement de A par des ouverts (c'est-à-dire une collection d'ouverts dont la réunion contient A) on peut extraire un recouvrement fini.*

Remarque 7.110.
Certaines sources (dont Wikipédia) disent que pour être compact il faut aussi être séparé[45]. Pour ces sources, un espace qui ne vérifie que la propriété de Borel-Lebesgue est alors dit **quasi-compact**.

7.111.
La définition 7.109 en cache deux. En effet, si la partie A est l'espace topologique lui-même, cela définit un espace topologique compact. Un espace topologique est compact *en soi* lorsque de tout recouvrement par des ouverts, nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini. Dans ce cas, si X est l'espace et si $\{A_i\}_{i\in I}$ est le recouvrement, nous avons $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ et non une simple inclusion $X \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.
LEMooVYTRooKTIYdn

Lemme 7.112.
Si K est une partie compacte de l'espace topologique X, alors K est un espace topologique compact pour la topologie induite[46] *de X.*

[44] Parce qu'on a la flemme de rédiger correctement une récurrence.
[45] Définition 7.74.
[46] Définition 7.27.

Démonstration. Nous notons τ la topologie de X et τ_K la topologie induite de X vers K, c'est-à-dire

$$\tau_K = \{\mathcal{O} \cap K \text{ tel que } \mathcal{O} \in \tau\}. \tag{7.90}$$

Soient des ouverts $A_i \in \tau_K$ ($i \in I$ où I est un ensemble quelconque) tels que $\bigcup_i A_i = K$. Pour chaque $i \in I$, il existe un $\mathcal{O}_i \in \tau$ tel que $A_i = K \cap \mathcal{O}_i$. Nous avons

$$K = \bigcup_{i\in I}(K \cap \mathcal{O}_i) \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i. \tag{7.91}$$

Donc les $\mathcal{O}_i$ forment un recouvrement de K par des ouverts de X. Puisque K est une partie compacte de X, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que

$$K \subset \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j. \tag{7.92}$$

Nous avons donc aussi

$$K \subset \bigcup_{j\in J} K \cap \mathcal{O}_j = \bigcup_{j\in J} A_j. \tag{7.93}$$

Nous avons prouvé que $\{A_j\}_{j\in J}$ est un recouvrement fini de K par des ouverts de K. Donc K est un espace topologique compact. □

PROPooOXKSooEDzCRZ

Proposition 7.113 ([235]).
Soit K compact dans $\mathbb{C}$. Si $\mathcal{O}$ est une composante connexe[47] *de $\mathbb{C} \setminus K$, alors $\partial\mathcal{O} \subset K$.*

Démonstration. Supposons que $\partial\mathcal{O}$ n'est pas inclus dans K, et considérons $w \in \partial\mathcal{O} \setminus K$. Nous posons $A = \mathcal{O} \cup \{w\}$. Vu que $w \in \partial\mathcal{O}$, nous avons $w \in \bar{\mathcal{O}}$. Donc

$$\mathcal{O} \subset A \subset \bar{\mathcal{O}}. \tag{7.94}$$

La proposition 7.106 fait que A est connexe parce que $\mathcal{O}$ est connexe. Donc A est un connexe de $\mathbb{C} \setminus K$ contenant strictement $\mathcal{O}$. Impossible parce que $\mathcal{O}$ est une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$. Contradiction.

Nous en déduisons que $\partial\mathcal{O} \subset K$. □

7.7.2 Autres compacité

DEFooTVDOooZbwOFK

Définition 7.114 (Séquentiellement compact).
*Nous disons qu'un espace topologique est **séquentiellement compact** si toute suite admet une sous-suite convergente.*

DEFooSOLWooWlSiUn

Définition 7.115 ([236]).
*Un espace topologique est **σ-compact** si il est union dénombrable de sous-espaces compacts.*

*On dit aussi **dénombrable à l'infini**.*

Définition 7.116.
*Une famille $\mathcal{A}$ de parties de X a la **propriété d'intersection finie non vide** si tout sous-ensemble fini de $\mathcal{A}$ a une intersection non vide.*

PropXKUMiCj

Proposition 7.117.
Soient X un espace topologique et $K \subset X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

ItemXYmGHFai

(1) K est compact.

ItemXYmGHFaii

(2) Si $\{F_i\}_{i\in I}$ est une famille de fermés telle que $\bigcap_{i\in I} F_i \cap K = \varnothing$, alors il existe une partie finie non vide A de I tel que $\bigcap_{i\in A} F_i \cap K = \varnothing$.

ItemXYmGHFaiii

(3) Si $\{F_i\}_{i\in I}$ est une famille de fermés telle que pour tout choix de A fini dans I nous ayons $\bigcap_{i\in A} F_i \cap K \neq \varnothing$, alors l'intersection complète est non vide : $\bigcap_{i\in I} F_i \cap K \neq \varnothing$.

ItemXYmGHFaiv

(4) Toute famille de fermés de X, à laquelle K est joint, et qui a la propriété d'intersection finie non vide, a une intersection non vide.

[47] Définition 7.104.

Démonstration. Les propriétés (3) et (2) sont équivalentes par contraposition. De plus le point (4) est une simple[48] reformulation en français de la propriété (3).

Prouvons (1) ⇒ (2). Soit $\{F_i\}_{i\in I}$ une famille de fermés tels que $K\bigcap_{i\in I}F_i=\varnothing$. Les complémentaires $\mathcal{O}_i$ de F_i dans X recouvrent K et donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini :

$$K\subset\bigcup_{i\in A}\mathcal{O}_i \tag{7.95}$$

pour un certain sous-ensemble fini A de I. Pour ce même choix A, nous avons alors aussi

$$\bigcap_{i\in A}F_i\cap K=\varnothing. \tag{7.96}$$

L'implication (2) ⇒ (1) est la même histoire de passage aux complémentaires. □

Le théorème 7.352 est en général celui qu'on nomme « théorème des fermés emboîtés », mais le corolaire suivant en mériterait également le nom.

CORooQABLooMPSUBf

Corolaire 7.118 ([1]).
Soient un espace topologique compact X et une suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de fermés emboîtés[49] dans X telle que

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_i=\varnothing. \tag{7.97}$$

Alors il existe $j_0\in\mathbb{N}$ tel que $F_i=\varnothing$ pour tout $i\geqslant j_0$.

Démonstration. La proposition 7.117 nous dit qu'il existe une partie finie non vide J de $\mathbb{N}$ telle que $\bigcup_{j\in J}F_j=\varnothing$. Si $j_0=\min(J)$, alors $F_j\subset F_{j_0}$ pour tout $j\in J$ et nous avons

$$\varnothing=\bigcap_{j\in J}F_j=F_{j_0}. \tag{7.98}$$

Dès que $F_{j_0}=\varnothing$, tous les suivants sont également vides. □

7.7.3 Quelques propriétés

LemOWVooZKndbI

Lemme 7.119.
Une partie K d'un espace topologique est compacte si et seulement si de tout recouvrement par des ouverts d'une base de topologie nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini.

Remarquons que la partie qui est réellement à prouver est que, si « ça marche » pour des ouverts d'une base de topologie, alors « ça marche » pour tous types d'ouverts.

Démonstration. Soit K une partie d'un espace topologique et $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de K par des ouverts. Chacun des $\mathcal{O}_i$ est une union d'éléments de la base de topologie par la proposition 7.2 : disons $\mathcal{O}_i=\bigcup_{j\in J_i}A_{(i,j)}$. Soit $J=\{j=(i,j_i)|i\in I,j_i\in J_i\}$; alors nous obtenons $\bigcup_{j\in J}A_j=\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i$.

Par hypothèse nous pouvons extraire un ensemble fini $J_0\subset J$ tel que $K\subset\bigcup_{j\in J_0}A_j$. Par construction chacun des A_j est inclus dans (au moins) un des $\mathcal{O}_i$. Le choix d'un élément de I pour chacun des éléments de J_0 donne une partie finie I_0 de I telle que $K\subset\bigcup_{j\in J_0}A_j\subset\bigcup_{i\in I_0}\mathcal{O}_i$. □

Exemple 7.120 (Un compact non fermé).
En général, un compact n'est pas toujours fermé. Si nous prenons par exemple un ensemble X de plus de deux points muni de la topologie grossière $\{\varnothing,X\}$. Toutes les parties de cet espace sont compactes, mais les seuls fermés sont $\{\varnothing,X\}$. Toutes les autres parties sont alors compactes et non fermées. △

LemnAeACf

Lemme 7.121 (Compacts et fermés[237]).
À propos de parties fermées dans un compact.

ITEMooNKAKooQoNddr

(1) Une partie fermée d'un compact est compacte.

ITEMooAZWVooLyPDeY

(2) Tout compact d'un espace topologique séparé est fermé.

[48] Enfin, simple… il faut remarquer que dans la formulation de (4), les intersections peuvent ne pas faire intervenir K, mais, au final, on s'en moque.

[49] C'est-à-dire que $F_{i+1}\subset F_i$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soient F fermé dans un compact K et $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de F par des ouverts. Puisque F est fermé, F^c est ouvert et $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}\cup\{K\setminus F\}$ est un recouvrement de K par des ouverts. Si nous en extrayons un sous-recouvrement fini, c'est un recouvrement de F, et en supprimant éventuellement l'ouvert $K\setminus F$, ça reste un sous-recouvrement fini de F tout en étant extrait de $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$.

(2) **Pour (2)** Soient X un espace séparé et K compact dans X. Nous considérons $y\in K^c$ et, par hypothèse de séparation, pour chaque $x\in K$ nous considérons un voisinage ouvert V_x de x et un voisinage ouvert [50] W_x de y tels que $V_x\cap W_x=\varnothing$. Bien entendu les V_x forment un recouvrement de K par des ouverts dont nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini : soit S fini dans K tel que

$$K\subset\bigcup_{x\in S}V_x. \tag{7.99}$$

L'ensemble $W=\bigcap_{x\in S}W_x$ est une intersection finie d'ouverts autour de y et est donc un ouvert autour de y.

Montrons que $W\cap K=\varnothing$. Soit $a\in K$; par définition de S, il existe $s\in S$ tel que $a\in V_s$. Par conséquent, a n'est pas dans W_s et donc pas non plus dans W.

L'ouvert W prouve que y est dans l'intérieur du complémentaire de K, et comme y est arbitraire, nous concluons que le complémentaire de K est ouvert (théorème 7.8), en d'autres termes, que K est fermé.

□
CORooSSFFooNkNmlS

Corolaire 7.122 ([238, 239]).
Dans un espace topologique, une intersection d'un compact avec un fermé est compacte.

Démonstration. Soit un espace topologique X. Soient K compact dans X et F fermé dans X. Soit un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de $K\cap F$ par des ouverts de X. Vu que $K=(K\cap F)\cup(K\setminus F)$, la famille

$$\big\{\{U_i\}_{i\in I},X\setminus F\big\} \tag{7.100}$$

recouvre K. Par compacité de K, nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe une partie finie $I_0\subset I$ tel que

$$\big\{\{U_i\}_{i\in I_0},X\setminus F\big\} \tag{7.101}$$

recouvre K. Cette famille recouvre donc aussi $K\cap F$. Mais comme $X\setminus F$ n'intersecte surement pas $K\cap F$, la famille $\{U_i\}_{i\in I_0}$ recouvre $K\cap F$. Nous avons donc bien extrait un sous-recouvrement fini pour $K\cap F$. □
PROPooFXCXooXNeXWl

Proposition 7.123 (Théorème des compacts emboîtés[240]).
Soit un espace topologique séparé X. Soient des compacts emboîtés non vides $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors l'intersection est compacte et non vide.

Démonstration. En deux parties.

(1) **L'intersection est non vide** Nous utilisons la proposition 7.117(3). Vu que K_0 est compact, nous considérons la famille de fermés[51] $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Si I est fini dans $\mathbb{N}$, alors

$$K_{\max(I)+1}\subset\bigcap_{i\in I}K_i, \tag{7.102}$$

de telle sorte que $\bigcap_{i\in I}K_i$ est non vide. La proposition 7.117(3) dit alors que l'intersection $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}K_i$ est non vide.

(2) **L'intersection est compacte** Nous posons $K=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}K_i$. Soit un recouvrement $\{A_i\}_{i\in I}$ de K par des ouverts.

(2a) **$X\setminus K$ est ouvert** Vu que K_i est compact, il est fermé et $X\setminus K_i$ est ouvert. Le lemme 1.41(5) dit que

$$X\setminus K=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(X\setminus K_i). \tag{7.103}$$

Donc $X\setminus K$ est ouvert en tant que union d'ouverts.

[50] Oui, la notation du voisinage peut surprendre, mais elle est quand même pratique pour ce qu'on veut en faire.
[51] Tout compact d'un espace séparé est fermé, lemme 7.121(2).

(2b) **Un recouvrement pour K_0** Nous avons :

$$K_0 = (K_0 \cap K) \cup (K_0 \setminus K) \tag{7.104a}$$
$$\subset K \cup (K_0 \setminus K) \tag{7.104b}$$
$$\subset \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cup (E \setminus K). \tag{7.104c}$$

Donc $\{A_i, E \setminus K\}$ est un recouvrement de K_0 par des ouverts. Il existe donc un J fini dans $\mathbb{N}$ tel que

$$K_0 \subset \big(\bigcup_{j\in J} A_j\big) \cup (X \setminus K). \tag{7.105}$$

(2c) **Le recouvrement fini de K** Si $x \in K$, alors $x \in K_0$, mais x n'est pas dans $X \setminus K$. Donc $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$. Nous avons démontré que $\{A_j\}_{j\in J}$ était un recouvrement fini de K.

□
LEMooFJZDooSxYWVW

Lemme 7.124 ([1]).
Toute union finie de compacts est compacte.

Démonstration. Soient $(K_i)_{i=1,\dots,n}$ des compacts dans X. Si $\{\mathcal{O}_s\}_{i\in S}$ est un recouvrement de $\bigcup_{i\in I} K_i$ par des ouverts, à fortiori, ce sera un recouvrement de chacun des K_i. Pour chaque i, il existera donc une partie finie S_i de S telle que $\{\mathcal{O}_s\}_{s\in S_i}$ recouvre K_i.

L'union finie de parties finies S_i est une partie finie de S, et nous avons

$$\bigcup_i K_i \subset \bigcup_{s\in\bigcup_i S_i} \mathcal{O}_s. \tag{7.106}$$

□
PROPooQWHSooXeJOkT

Proposition 7.125 ([241]).
Dans un espace séparé, toute intersection de compacts est compacte.

Démonstration. Soit un espace topologie séparé X et des compacts $\{K_i\}_{i\in I}$ dans X (I est un ensemble quelconque). Chacun des K_i est fermé par le lemme 7.121(2). Donc l'intersection

$$K = \bigcap_{i\in I} K_i \tag{7.107}$$

est un fermé de X par le lemme 7.6(1). Soit i dans I. Nous avons $K \subset K_i$. Donc K est un fermé dans le compact K_i ; il est donc compact par le lemme 7.121. □

Exemple 7.126 (Intersection de compacts non compacte[241]).
Un exemple d'intersection de compacts qui n'est pas compacte. Vu la proposition 7.125, il va falloir chercher un espace non séparé. Soit $X = \mathbb{N} \cup \{x_1, x_2\}$ où x_1 et x_2 sont deux éléments distincts hors de $\mathbb{N}$. Nous définissons une topologie sur X en disant que les ouverts sont les parties suivantes :

- les parties de $\mathbb{N}$,
- la partie $\mathbb{N} \cup \{x_1\}$,
- la partie $\mathbb{N} \cup \{x_2\}$,
- la partie $\mathbb{N} \cup \{x_1, x_2\}$.

Nous considérons les parties $K_1 = \mathbb{N} \cup \{x_1\}$ et $K_2 = \mathbb{N} \cup \{x_2\}$.

(1) **K_i est compact** Soit $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de K_1 par des ouverts de X. Alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x_1 \in \mathcal{O}_{i_0}$. Vue la liste des ouverts, $\mathcal{O}_{i_0}$ est soit $\mathbb{N} \cup \{x_1\}$ soit $\mathbb{N} \cup \{x_1, x_2\}$. Dans les deux cas, $\{\mathcal{O}_{i_0}\}$ est un sous-recouvrement fini de K_1.

(2) **$K_1 \cap K_2 = \mathbb{N}$** C'est immédiat parce que x_1 et x_2 sont distincts.

(3) **$\mathbb{N}$ n'est pas compact** Il peut être recouvert par les ouverts $\{\{i\}\}_{i\in\mathbb{N}}$ dont on ne peut pas extraire de sous-recouvrements finis.

△
PropGBZUooRKaOxy

Proposition 7.127.
Si V est une partie de l'espace topologique X muni de la topologie induite[52] *τ_V de celle de X, et si K est un compact de (V, τ_V) alors K est un compact de (X, τ_X).*

Démonstration. Soient $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ des ouverts de X recouvrant K. Alors les ensembles $V \cap \mathcal{O}_\alpha$ recouvrent également K, mais sont des ouverts de V. Donc il en existe un sous-recouvrement fini. Soient donc $\{V\cap\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ recouvrant K avec I un sous-ensemble fini de A. Les ensembles $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ recouvrent encore K et sont des ouverts de X. □

Proposition 7.128 ([1])**.**
Soient des espaces topologiques X et Y. Nous considérons des ouverts A de X et B de Y. Soit un compact M dans $A \times B$[53]*. Il existe des compacts K et L dans A et B tels que $M \subset K \times L$.*

Démonstration. Nous considérons les « projections » de M sur A et B :

$$K = \{a \in A \text{ tel que } \exists b \in B \text{ tel que } (a, b) \in M\}, \tag{7.108}$$

et

$$L = \{b \in B \text{ tel que } \exists a \in A \text{ tel que } (a, b) \in M\}. \tag{7.109}$$

Nous avons $M \subset K \times L$; il reste à montrer que K et L sont des compacts de leurs espaces respectifs. Soit un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de K par des ouverts de X et $\{V_j\}_{j\in J}$ de L par des ouverts de Y. Alors

$$\{U_i \times V_j\}_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \tag{7.110}$$

est un recouvrement de M par des ouverts de $X \times Y$. Puisque M est un compact de $X \times Y$, nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire I_0 fini dans I et J_0 fini dans J tels que

$$\{U_i \times V_j\}_{\substack{i\in I_0\\ j\in J_0}} \tag{7.111}$$

soit encore un recouvrement de $K \times L$. Nous prouvons à présent que $\{U_i\}_{i\in I_0}$ est un recouvrement de K, ce qui montrera que K est un compact.

Soit $a \in K$. Il existe $b \in B$ tel que $(a, b) \in M$. Donc il existe $i_0 \in I_0$ et $j_0 \in J_0$ tels que $(a, b) \in U_{i_0} \times V_{j_0}$. En particulier $a \in U_i$.

Le même raisonnement montre que $\{V_j\}_{j\in J_0}$ est un recouvrement de L. □

7.7.4 Espace relativement compact

DEFooBODRooEFhzeT

Définition 7.129 (Partie relativement compacte[242])**.**
*Une partie d'un espace topologique est **relativement compact** si elle est contenue dans un compact.*

PROPooXKBXooUIwTiO

Proposition 7.130 ([242])**.**
Une partie d'un espace séparé est relativement compacte si et seulement si sa fermeture est compacte.

LEMooJXGUooXDGIXG

Lemme 7.131 (Union finie de relativement compacts[1])**.**
Dans un espace séparé[54]*, une union finie de parties relativement compactes*[55] *est relativement compacte.*

Démonstration. Soit des paries relativement compactes A_i. Notre objectif est de prouver que $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ est compact. La partie $\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$ est compacte comme union finie de compacts (lemme 7.124) ; elle est donc fermée par le lemme 7.121(2) :

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i. \tag{7.112}$$

Nous avons donc

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i. \tag{7.113}$$

Autrement dit, la partie $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ est un fermé dans un compact. Elle est donc compacte par le lemme 7.121(1). □

[52] Définition 7.27.
[53] Topologie produit, définition 7.63
[54] Séparé et Hausdorff sont synonymes, définition 7.74.
[55] Définition 7.129.

LEMooNIJEooMdvkuA

Lemme 7.132 ([1]).
Soit un espace topologique Hausdorff X. Nous supposons que $K \subset U$ avec K compact et U ouvert. Si $a \notin U$, alors il existe un voisinage A de a tel que $A \cap K = \varnothing$.

Démonstration. Pour chaque k dans K, nous séparons k et a par des ouverts : A_k est un ouvert autour de a et B_k est un ouvert autour de k tels que $A_k \cap B_k = \varnothing$. Vu que $\{B_k\}_{k\in K}$ est un recouvrement du compact K par des ouverts, nous extrayons un sous-recouvrement fini $\{B_k\}_{k\in I}$, et nous posons $A = \bigcap_{k\in I} A_k$.

En tant qu'intersection finie d'ouverts, A est un ouvert. De plus $a \in A$. Nous avons $A \cap K = \varnothing$; en effet supposons que $s \in K$. Nous avons $s \in B_k$ pour un certain $k \in I$. Dans ce cas nous avons

$$A \cap B_k \subset A_k \cap B_k = \varnothing. \tag{7.114}$$

□

7.7.5 Propriété d'intersection finie

DEFooCESGooZkACqs

Définition 7.133 (Propriété d'intersection finie[243]).
*Soit un ensemble X. Une famille non vide $\mathcal{A}$ de parties de X a la **propriété d'intersection finie** si toutes intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est non vide.*

THOooCQSQooDuasqo

Théorème 7.134 ([243]).
Un espace est compact si et seulement si toute famille de parties fermées ayant la propriété d'intersection finie[56] a une intersection non vide.

7.8 Limite de fonction

DefYNVoWBx

Définition 7.135 (Limite d'une fonction, thème 29[244]).
*Soient des espaces topologiques X et Y ainsi que $\Omega \subset X$ et $a \in \mathrm{Adh}(\Omega)$. Soit une application $f\colon \Omega \to Y$. Nous disons que l'élément ℓ de Y est une **limite** de f en a lorsque pour tout ouvert V contenant ℓ, il existe un voisinage ouvert U de a tel que*

EQooXLJJooZDcOtU

$$f\Big(\big(U \cap \Omega\big) \setminus \{a\}\Big) \subset V. \tag{7.115}$$

*Si un tel élément est unique[57], alors nous disons que cet élément est la **limite** de f et nous notons*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell. \tag{7.116}$$

7.136.
Il aurait été tout aussi bien de définir la limite d'une fonction $f\colon X \to Y$ définie sur tout X, puis de considérer Ω avec la topologie induite depuis X.

Dans ce cas, nous aurions écrit (7.115) sous la forme

$$f\Big(U \setminus \{a\}\Big) \subset V \tag{7.117}$$

en disant que U est un voisinage de a, et en laissant la lectrice deviner que ici, « voisinage » signifie « voisinage au sens de la topologie induite ». Vu que nous considérons la fonction f uniquement définie sur Ω, c'est la seule interprétation possible, et il n'y aurait pas au d'ambigüité[245]. Mais bon… si ça va sans dire, ça va encore mieux en le disant.

Remarque 7.137.
Nous ne saurions trop insister sur le fait que la valeur de f en a n'intervient pas dans la définition de la limite de f en a. Il n'est même pas nécessaire que f soit définie en a pour que l'on puisse parler de limite de f en a. Par exemple nous avons

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2, \tag{7.118}$$

alors que la fonction n'est pas définie en $x = 1$.

Plus généralement, un peu par principe, toutes les fois que la notion de limite apporte une information, le point où l'on prend la limite est spécial. Sinon on ne calculerait pas la limite, mais on regarderait directement

[56] Définition 7.133.
[57] Rappelons que ce n'est pas toujours le cas, mais que ça l'est si l'espace topologique est séparé – définition 7.74.

la valeur de la fonction. Cela est typiquement le cas lorsque nous aborderons les dérivées. En effet, regardons (en faisant semblant d'anticiper) la définition (10.281). Dans la formule

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{7.119}$$

la fonction sur laquelle nous prenons la limite n'est *jamais* définie en $x = a$.

PropFObayrf

Proposition 7.138 (Unicité de la limite pour un espace séparé)**.**
Soient X un espace topologique, A une partie de X et Y un espace topologique séparé[58]*. Nous considérons une fonction $f\colon A \to Y$. Si $a \in \mathrm{Adh}(A)$, alors f admet au plus une limite en a.*

Démonstration. Soient y et y' des limites de f en a, ainsi que des voisinages V et V' de y et y'. Nous prenons également les voisinages W et W' correspondants :

$$\begin{cases} f(W \cap A) \subset V & \text{(7.120a)} \\ f(W' \cap A) \subset V'. & \text{(7.120b)} \end{cases}$$

Quitte à prendre des sous-ensembles nous pouvons supposer que W et W' sont ouverts. Il s'ensuit alors que :

- l'ensemble $W \cap W'$ est un ouvert contenant a et intersecte donc A ;
- l'ensemble $(W \cap W') \cap A$ est donc non vide ;
- et donc, $f(W \cap W' \cap A)$ est, lui aussi, non vide.

Mais

$$f(W \cap W' \cap A) \subset f(W \cap A) \subset V, \tag{7.121}$$

et

$$f(W \cap W' \cap A) \subset f(W' \cap A) \subset V', \tag{7.122}$$

d'où V et V' ont une intersection. Puisque ces ensembles sont arbitraires, nous avons prouvé que tout voisinage de y et tout voisinage de y' ont une intersection non vide ; étant donné que Y est séparé, nous devons avoir $y = y'$. □

7.9 Topologie, distances et normes

Certains ensembles ont plus de structures qu'une topologie. Nous fixons quelques bases maintenant, et nous détaillerons certains résultats plus tard.

7.9.1 Distance et topologie métrique

DefMVNVFsX

Définition 7.139.
*Si E est un ensemble, une **distance** sur E est une application $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in E$,*

(1) $d(x, y) \geqslant 0$

(2) $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,

(3) $d(x, y) = d(y, x)$

(4) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

*La dernière condition est l'**inégalité triangulaire**.*
*Un couple (E, d) formé d'un ensemble et d'une distance est un **espace métrique**.*

DEFooGLTUooJjaSmI

Définition 7.140 (Espace vectoriel topologique métrisable[246])**.**
*Un espace topologique est **métrisable** si il existe une distance*[59] *compatible avec la topologie.*

Le lemme suivant est similaire à la proposition 7.213.

[58] Définition 7.74.
[59] Distance, définition 7.139.

LEMooXCXHooVtrkvl

Lemme 7.141.
Si (E,d) est un espace métrique et si $x,y,z\in E$, nous avons

$$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y). \tag{7.123}$$

La définition-théorème suivante donne une topologie sur les espaces métriques en partant des boules.

ThoORdLYUu

Théorème-Définition 7.142 (Topologie métrique)**.**
Soit (E,d) un espace métrique. Nous définissons les ***boules ouvertes*** *par*

EQooYCWSooIhibvd

$$B(a,r)=\{x\in E \text{ tel que } d(a,x)<r\}. \tag{7.124}$$

pour tout $a\in E$ et $r>0$. Alors en posant

EqGDVVooDZfwSf

$$\tau_d=\big\{\mathcal{O}\subset E \text{ tel que } \forall a\in\mathcal{O},\exists r>0 \text{ tel que } B(a,r)\subset\mathcal{O}\big\} \tag{7.125}$$

nous définissons une topologie sur E.

Cette topologie sur E est la ***topologie métrique*** *de (E,d). En présence d'une distance, sauf mention explicite du contraire, c'est toujours cette topologie-là que nous utiliserons.*

Démonstration. D'abord $\varnothing\in\tau_d$ parce que tout élément de l'ensemble vide … heu … enfin parce que, d'accord hein[60]. Ensuite si les $\{A_i\}_{i\in I}$ sont des éléments de τ_d et si $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$ alors il existe $k\in I$ tel que $x\in A_k$. Par hypothèse il existe une boule $B(x,r)\subset A_k\subset\bigcup_{i\in I}A_i$.

Enfin si les $\{A_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ sont des éléments de $\mathcal{T}$ alors pour tout i il existe $r_i>0$ tel que $B(x,r_i)\subset A_i$. En prenant $r=\min\{r_i\}_{i=1,\dots,n}$ nous avons $B(x,r)\subset\bigcap_{i=1}^n A_i$. □

PROPooZXTXooEMLgMn

Proposition 7.143.
La topologie sur un espace métrique[61] *est la topologie engendrée*[62] *par ses boules ouvertes.*

Démonstration. Nous notons (E,d) l'espace métrique. Nous notons τ_d la topologie métrique, et τ_B celle engendrée par les boules ouvertes.

(1) $\tau_d\subset\tau_B$ Soit $a\in\tau_d$. Pour tout $a\in A$, nous avons une boule $B(a,r_a)$ inclue dans A, et donc

$$A=\bigcup_{a\in A}B(a,r_a)\in\tau_B. \tag{7.126}$$

(2) $\tau_B\subset\tau_d$ Soient $a_i\in E$ et $r_i>0$.

(2a) $\bigcap_{i=1}^n B(a_i,r_i)\in\tau_d$ Soit $x\in\bigcap_{i=1}^n B(a_i,r_i)$. Pour chaque i, nous avons $d(x,a_i)<r_i$. Il existe donc $\alpha_i>0$ tel que $d(x,a_i)<\alpha_i<r_i$. En posant $\epsilon_i<r_i-\alpha_i$ nous avons $B(x,\epsilon_i)\subset B(a_i,r_i)$. En posant $\epsilon<\min_i(\epsilon_i)$ nous avons

$$B(x,\epsilon)\subset\cap_{i=1}^n B(a_i,r_i). \tag{7.127}$$

(2b) **Et donc** Nous avons prouvé que

$$\bigcap_{i=1}^n B(a_i,r_i)\in\tau_d. \tag{7.128}$$

Tout élément de τ_B est une union de tels éléments. Vu que τ_d est stable par union, nous avons $\tau_B\subset\tau_d$.

□

Proposition 7.144.
À propos de séparation.

(1) Tout espace métrique[63] *est séparé.*

(2) Si une suite dans un espace métrique possède une limite, alors elle est unique.

[60] Pour qui ne serait pas d'accord, ajoutez $\varnothing$ dans la définition des ouverts et puis c'est tout.
[61] Définition 7.142.
[62] Définition 7.13
[63] Définition 7.139.

Démonstration. Si deux éléments x et y sont distincts, alors en posant $r = d(x,y)/3 > 0$, les boules $B(x,r)$ et $B(y,r)$ sont disjointes.

En ce qui concerne les limites, ce sont les propositions 7.82 et 7.138. □

7.145.
Nous allons maintenant voir deux résultats disant que si une fonction est continue, alors elle peut être permutée avec une limite de suite. Dans le cas des espaces métriques, la proposition 7.157 montrera la réciproque : si pour toute suite $x_n \to a$, nous avons $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$, alors f a une limite en a qui vaut y.

fContEstSeqCont

Proposition 7.146 (Permuter limite et fonction continue[1])**.**
Soient deux espaces topologiques X et Y ainsi qu'une fonction $f\colon X \to Y$. Soit $a \in X$ et $\ell \in Y$. Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell, \tag{7.129}$$

alors, pour toute suite (x_k) telle que $x_k \to a$, on a

$$\lim f(x_k) = \ell. \tag{7.130}$$

Démonstration. Nous considérons une suite (x_k) qui converge vers a dans X. Soient V un voisinage de ℓ et W un voisinage de a tels que $f(W) \subset V$ (définition 7.135 de la continuité en un point). Par la convergence $x_k \to a$, il existe N tel que pour tout $k \geqslant N$, $x_k \in W$, et donc tel que $f(x_k) \in V$, ce qui donne la continuité séquentielle de f. □

7.9.2 Précompact

DEFooLZDTooZlAtdL

Définition 7.147.
Une partie A d'un espace topologique métrique[64] *est **précompact** si pour tout $\epsilon > 0$, il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ϵ.*

PROPooDWUDooGrgZpP

Proposition 7.148 ([247])**.**
L'adhérence d'un précompact est précompacte.

Démonstration. Soit un précompact A ; fixons $\epsilon > 0$. La partie A peut être recouverte par les boules $\{B(a_i,\epsilon)\}_{i=1,\dots,n}$. Soit maintenant $x \in \mathrm{Adh}(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $d(a,x) < \epsilon$. De plus ce a est dans une des boules ; c'est-à-dire que il existe $i = 1,\dots,n$ tel que $d(a_i,a) < \epsilon$. Nous avons donc

$$d(a_i,x) \leqslant d(a_i,a) + d(a,x) \leqslant 2\epsilon. \tag{7.131}$$

Donc les boules $\{B(a_i,2\epsilon)\}_{i=1,\dots,n}$ recouvrent $\mathrm{Adh}(A)$. □

PROPooZRXDooUyFBFG

Proposition 7.149.
Soient un espace topologique X ainsi que $A \subset X$. Si A est précompact et complet, alors A est compact.

7.9.3 Caractérisations séquentielles

7.9.3.1 Continuité séquentielle

DefENioICV

Définition 7.150.
*Si X et Y sont deux espaces topologiques, une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$ est **séquentiellement continue** en un point a si pour toute suite convergente $x_n \to a$ dans X nous avons $f(x_n) \to f(a)$ dans Y.*

7.9.4 Suites et espaces métriques

PROPooJYOOooZWocoq

Proposition 7.151 (Caractérisation séquentielle de la limite[1])**.**
Soient deux espaces métriques X et Y ainsi qu'une fonction $f\colon X \to Y$. Soit $a \in X$ et $\ell \in Y$. On a

EqLimooJYOOooZWocoqG

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell, \tag{7.132}$$

si et seulement si, pour toute suite (x_k) telle que $x_k \to a$, on a

EqLimooJYOOooZWocoqS

$$\lim f(x_k) = \ell. \tag{7.133}$$

Par ailleurs, l'une des deux limites existe si et seulement si l'autre existe.

[64] Topologie métrique, définition 7.142.

Démonstration. Le sens direct est la proposition 7.146. Pour la réciproque, nous passons par la contraposée. C'est-à-dire que nous supposons que ℓ n'est pas une limite de f pour $x \to a$. Il existe un ϵ tel que pour tout δ, il existe un x vérifiant $d_X(x;a) < \delta$ et $d_Y(f(x);\ell) > \epsilon$.

Nous construisons à présent une suite de la manière suivante. Pour $\delta = \frac{1}{n}$ nous considérons x_n tel que $d_X(x_n;a) < \delta$ et $d_Y(f(x_n);\ell) > \epsilon$. Cette suite converge vers a, mais la suite $f(x_n)$ ne converge manifestement pas vers ℓ : elle ne rentre jamais dans la boule $B(\ell,\epsilon)$. □

Une fonction continue est séquentiellement continue. Dans les espaces métriques la proposition suivante montre que la réciproque est également vraie et la continuité est équivalente à la continuité séquentielle. Cela n'est cependant pas vrai pour n'importe quel espace topologique.

PROPooBHRBooJMZYSg

Corolaire 7.152 (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point[1])**.**
Si X et Y sont des espaces métriques, alors une fonction $f\colon X \to Y$ est continue en un point si et seulement si elle est séquentiellement continue en ce point.

Démonstration. Paraphrasons la preuve précédente. Nous supposons que X et Y sont métriques. Si f n'est pas continue en a, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe x tel que $\|x-a\| \leqslant \delta$ et $\|f(x)-f(a)\| > \epsilon$. Nous considérons un tel ϵ et pour chaque $n \geqslant 1 \in \mathbb{N}$ nous considérons un x_n correspondant à $\delta = \frac{1}{n}$. Cela nous donne une suite $x_n \to a$ dans X mais $\|f(x_n) - f(a)\|$ reste plus grand que ϵ. Cela montre que f n'est pas non plus séquentiellement continue. □

Définition 7.153 (Fermeture séquentielle[248])**.**
Une partie F d'un espace topologique X est dit ***séquentiellement fermé*** *si la convergence d'une suite (x_n) de F vers x implique que x appartient à F.*

Les espaces métriques ont une propriété importante que la fermeture séquentielle est équivalente à la fermeture.

PropLFBXIjt

Proposition 7.154 (Caractérisation séquentielle d'un fermé)**.**
Soient X un espace métrique[65] *et $F \subset X$. L'ensemble F est fermé si et seulement si toute suite contenue dans F et convergeant dans X converge vers un élément de F.*

Démonstration. Une suite contenue dans un fermé ne peut converger que vers un élément de ce fermé : c'était la proposition 7.78. Le point le plus important est donc l'autre sens : si toute suite d'éléments de F converge dans F alors F est fermé.

Par contraposée, supposons que $X \setminus F$ ne soit pas ouvert. Alors il existe $x \in X \setminus F$ pour lequel tout voisinage intersecte F. En prenant $x_k \in B(x, \frac{1}{k})$, nous construisons une suite contenue dans F, convergeant vers x qui n'est pas dans F. □

Le lemme suivant est précisément la version « espace métrique » du corolaire 7.79 ; mais, donnons-en une preuve tout de même.

LemLimAbarA

Lemme 7.155.
Soit X un espace métrique[66]*, et soit (x_n) une suite convergente contenue dans un ensemble $A \subset X$. Alors la limite x_n appartient à $\bar{A}$.*

Démonstration. Supposons que nous ayons une partie A de X, et une suite (x_n) dont la limite ℓ se trouve hors de $\bar{A}$. Dans ce cas, il existe un $r > 0$ tel que[67] $B(\ell, r) \cap A = \varnothing$. Si tous les éléments x_n de la suite sont dans A, il n'y en a donc aucun tel que $d(x_n, \ell) < r$. Cela contredit la notion de convergence $x_n \to \ell$. □

CorAdhEstLim

Corolaire 7.156.
Soit X un espace métrique, $A \subset X$ et $a \in \bar{A}$. Alors il existe une suite d'éléments dans A qui converge vers a.

Démonstration. Si $a \in A$, alors nous pouvons prendre la suite constante $x_n = a$. Si a n'est pas dans A, alors a est dans ∂A, et pour tout n, il existe un point de A dans la boule $B(a, \frac{1}{n})$. Si nous nommons x_n ce point, la suite ainsi construite est une suite contenue dans A et qui converge vers a (ce dernier point est laissé à la sagacité de la lectrice.). □

En termes savants, ce corolaire signifie que la fermeture $\bar{A}$ est composé de A plus de toutes les limites de toutes les suites contenues dans A.

[65] Définition 7.139.
[66] Définition 7.139.
[67] Une autre manière de dire la même chose : si $\ell \notin \bar{A}$, alors $d(\ell, A) > 0$.

PropXIAQSXr

Proposition 7.157 (Caractérisation séquentielle de la continuité[1])**.**
Soient X et Y deux espaces topologiques séparés. Nous supposons que X est métrisable[68]*. Une application $f\colon X \to Y$ est continue sur X si et seulement si elle est séquentiellement continue sur X.*

Démonstration. En deux parties dont une déjà faite.

(1) $\Rightarrow$ C'est la proposition 7.146.

(2) $\Leftarrow$ Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de Y ; nous allons voir que le complémentaire de $f^{-1}(\mathcal{O})$ est fermé dans X. Pour cela nous considérons une suite convergente $x_k \xrightarrow{X} x$ avec $x_k \in X \setminus f^{-1}(\mathcal{O})$ pour tout k. Nous allons montrer que $x \in X \setminus f^{-1}(\mathcal{O})$ et la caractérisation séquentielle[69] de la fermeture conclura que $X \setminus f^{-1}(\mathcal{O})$ est fermé.

Pour tout k, nous avons $f(x_k) \in X \setminus \mathcal{O}$, et $f(x_k) \xrightarrow{Y} f(x)$ parce que f est séquentiellement continue. Vu que $f(x_k)$ est une suite dans le fermé $Y \setminus \mathcal{O}$, la limite est également dans $Y \setminus \mathcal{O}$. Nous en déduisons que $f(x) \in Y \setminus \mathcal{O}$, de telle sorte que $x \in X \setminus f^{-1}(\mathcal{O})$.

□

PropCJGIooZNpnGF

Proposition 7.158.
Si X et Y sont deux espaces métriques et $f, g\colon X \to Y$ sont deux fonctions continues égales sur une partie dense de X alors $f = g$.

Démonstration. Les fonctions f et g sont séquentiellement continues (proposition 7.152). Soient A un ensemble dense dans X sur lequel f et g sont égales, et $x \notin A$. Vu que A est dense, il existe une suite a_n dans A telle que $a_n \to x$. La séquentielle continuité de f et g donnent

$$f(a_n) \to f(x) \tag{7.134a}$$
$$g(a_n) \to g(x), \tag{7.134b}$$

mais pour tout n, $f(a_n) = g(a_n)$. Par unicité de la limite[70] dans Y, $f(x) = g(x)$. □

7.9.5 Continuité de la distance

PROPooSZMLooNdtLLj

Proposition 7.159 ([1])**.**
Soit un espace métrique (E, d). L'application $d\colon E \times E \to E$ est continue.

NORMooJBMXooLHfAJK

7.160.
Si vous avez un peu de temps, vous pouvez vérifier que si $\mathbb{K}$ est un corps totalement ordonné, alors avec toutes les définitions de 1.493, en posant $d(x, y) = |x - y|$ nous avons une distance sur $\mathbb{K}$.

De plus, les boules définies en 1.493 sont alors les mêmes que celles définies en (7.124), ce qui donne à tout corps totalement ordonné une structure d'espace topologique.

PROPooUXDJooCrWBbd

Proposition 7.161 ([1])**.**
Soient un espace métrique (E, d), ainsi qu'une suite convergente $a_n \xrightarrow{d} \ell$. Il existe $r > 0$ tel que pour tout n nous ayons $d(\ell, a_n) < r$.

Démonstration. Soit $r_1 > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$ implique $d(\ell, a_n) < r_1$. Ensuite nous posons $r_2 = \max\{d(\ell, a_n)\}_{n=0,\dots,N}$.

Pour tout n nous avons $d(a_n, \ell) \leqslant r_1 + r_2$. □

PROPooNOHQooTqBQLk

Proposition 7.162 ([1])**.**
Soient un espace topologique X, un espace topologique normé[71] *Y. Soit une application continue $f\colon X \to Y$. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert de x sur lequel f est bornée.*

Démonstration. Soit $\delta > 0$. Nous considérons dans Y la boule $B\big(f(x), \delta\big)$. Par continuité de f, la partie $f^{-1}\Big(B\big(f(x), \delta\big)\Big)$ est ouverte dans X. Si y est dans cette partie, alors

$$f(y) \in B\big(f(x), \delta\big). \tag{7.135}$$

L'application f y est donc bornée. □

[68] Définition 7.140 : il existe une distance compatible avec la topologie.
[69] Proposition 7.154, valable parce que la topologie de X provient d'une métrique.
[70] Proposition 7.138.
[71] Topologie en 7.142.

7.9.6 Topologie métrique et induite

LEMooKDMYooMIcFRI

Lemme 7.163.
Soit un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ muni d'un sous-espace vectoriel M. La topologie induite de M depuis V est la même que la topologie de la norme induite $(M, \|.\|)$.

7.9.7 Intérieur, adhérence et frontière

7.164.
Choses déjà faites :

- Intérieur, définition 7.16.
- Adhérence, qui est la même chose que fermeture, définition 7.19, et précisé par le lemme 7.20.

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ dans lequel les boules forment une base de la topologie nous pouvons encore préciser de la façon suivante :

$$x \in \operatorname{Adh} A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \varnothing \tag{7.136}$$

Proposition 7.165.
Pour $A \subset \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\operatorname{Int} A \subseteq A \subseteq \operatorname{Adh} A \tag{7.137}$$

DEFooACVLooRwehTl

Définition 7.166.
*La **frontière** ou le **bord** de A est défini par $\partial A = \operatorname{Adh} A \setminus \operatorname{Int} A$.*

LEMooMPZWooGrqYIX

Lemme 7.167.
Une partie A d'un espace topologique est ouverte si $A = \operatorname{Int} A$, et fermée si $A = \operatorname{Adh} A$.

PROPooFHURooGXcekV

Proposition 7.168 ([1])**.**
Un ouvert n'intersecte pas sa frontière.

Démonstration. Soit un ouvert A. Nous avons $\partial(A) = \bar{A} \setminus \operatorname{Int}(A)$. Oh mais comme A est ouvert, $\operatorname{Int}(A) = A$. Donc les éléments de A sont exclus de ∂A. □

PROPooTHOPooCOGmZD

Proposition 7.169 ([1])**.**
Toute frontière est fermée. Plus précisément : si S est une partie de l'espace topologique X, nous avons :

ITEMooCIGTooOyNTYt

(1) $\partial S = \bar{S} \cap \overline{E \setminus S}$.

ITEMooCSHKooHibSre

(2) ∂S est fermée.

Démonstration. Pour (1), nous utilisons la proposition 7.21 : $\overline{X \setminus S} = X \setminus \operatorname{Int}(S)$. Donc

$$\overline{S} \cap \overline{X \setminus S} = \bar{S} \cap \big(X \setminus \operatorname{Int}(S)\big) = \bar{S} \setminus \operatorname{Int}(S) = \partial(S). \tag{7.138}$$

Nous avons utilisé le lemme 1.41(4).

En ce qui concerne (2), ∂S est fermé en tant qu'intersection de deux fermés. □

PROPooYHIGooMDVKNy

Proposition 7.170 ([1])**.**
Soit une partie S d'un espace topologique X. Soit un ouvert $A \subset S$. Si $A \cap \partial S = \varnothing$, alors $\bar{A} \subset S$.

LEMooEUYEooYcUfKr

Lemme 7.171 (Caractérisation équivalente de la frontière)**.**
Soient X un espace topologique et $S \subset X$. Un point $x \in X$ est dans ∂S si et seulement si tout voisinage de x contient un point de S et un point de S^c.

Démonstration. Supposons que tout voisinage de x contienne un point de S et un point de S^c. Alors $x \in Adh(S)$ (définition 7.19), mais pas dans l'intérieur de S parce que x ne possède pas de voisinage contenu dans S. Donc $x \in \partial S$.

À l'inverse, si $x \in \partial S$ alors x est dans l'adhérence de S et tout voisinage de x contient un point de S. Mais x n'est pas dans l'intérieur de S et tout voisinage de x contient un point qui n'est pas dans S, aka un point de S^c. □

Corolaire 7.172.
Un ensemble et son complémentaire ont même frontière.

Démonstration. Conséquence du lemme 7.171. Les points de $\partial(S^c)$ sont caractérisés par le fait que tout voisinage contient un point de S^c et un point de $(S^c)^c = S$. □

Exemple 7.173.
Soit $X = [0,1]$ muni de la topologie de la distance $|x-y|$ (définition 7.142). Les points 0 et 1 *ne sont pas* dans la frontière de X. En effet une boule ouverte autour de 1 est un ensemble de la forme

$$B(1,r) = \{x \in X \text{ tel que } |x-1| < r\} =]1-r, 1] \tag{7.139}$$

où nous avons supposé $r < 1$.

Les points 0 et 1 sont par contre sur la frontière de $[0,1]$ lorsque cet ensemble est vu comme partie de l'espace métrique $\mathbb{R}$. △

LEMooLKWEooItGnkP

Lemme 7.174 (Passage de douane[249, 250])**.**
Dans un espace topologique, toute partie connexe qui rencontre à la fois une partie A et son complémentaire rencontre nécessairement la frontière de A.

Démonstration. Nommons C la partie connexe qui intersecte A et A^c. Les ouverts $\text{Int}(A)$ et $X \setminus \bar{A}$ ne peuvent pas recouvrir C parce que ce sont deux ouverts disjoints alors que C est connexe (voir la définition 7.102 de la connexité). Donc C doit contenir des points qui sont dans $\bar{A}$ mais pas dans $\text{Int}(A)$. C'est-à-dire des points de ∂A. □

On vérifiera que les notations et les dénominations sont cohérentes en prouvant la proposition suivante.

Proposition 7.175.
Pour $\epsilon > 0$,

(1) *l'adhérence de $B(x,\epsilon)$ est $\bar{B}(x,\epsilon)$,*

(2) *l'intérieur de $\bar{B}(x,\epsilon)$ est $B(x,\epsilon)$,*

(3) *la boule ouverte $B(x,\epsilon)$ est un ouvert,*

(4) *la boule fermée $\bar{B}(x,\epsilon)$ est un fermé.*

Nous avons également les liens suivants entre intérieur, adhérence, ouvert, fermé et passage au complémentaire (noté ^{c}) :

Proposition 7.176.
Si $A \subset \mathbb{R}^n$ et $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$, nous avons

(1) $(\text{Int}\, A)^c = \text{Adh}(A^c)$ *et* $(\text{Adh}\, A)^c = \text{Int}(A^c)$,

(2) *A est ouvert si et seulement si A^c est fermé,*

(3) $\text{Int}\, A$ *est le plus grand ouvert contenu dans A,*

(4) $\text{Adh}\, A$ *est le plus petit fermé contenant A,*

ExBFLooUNyvbw

Exemple 7.177.
Il n'est en général pas vrai que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Par exemple si $A = [0,1[$ et $B =]1,2]$. Dans ce cas, $A \cap B = \varnothing$ alors que $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$. △

7.9.8 Boules ouvertes, fermées, sphères

DEFooPDSJooFcUqKH

Définition 7.178.
Soit un espace métrique (E,d).

(1) *Nous nommons **boule fermée** la fermeture de la boule ouverte, c'est-à-dire les parties de la forme $\overline{B(a,r)}$.*

(2) *La **sphère** de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ est la frontière*[72] *de la boule : $S(a,r) = \partial B(a,r)$.*

7.179.
Les différences entre boules ouverts, fermées et sphères sont très importantes. D'abord, les *boules* sont pleines tandis que la *sphère* est creuse. En comparant à une pomme, la boule ouverte serait la pomme « sans la peau », la boule fermée serait « avec la peau » tandis que la sphère serait seulement la peau.

[72] Frontière, définition 7.166.

LEMooDYYYooHZitMZ

Lemme 7.180.
Quelques liens entre les boules et les sphères.

(1) *La sphère est donnée par* $S(a,r) = \{x \in V \text{ tel que } d(x,a) = r\}$.

(2) *La fermeture de la boule est* $\overline{B(a,r)} = \{x \in V \text{ tel que } d(x,a) < r\}$;

(3) *Nous avons* $\overline{B(a,r)} = B(a,r) \cup S(a,r)$.

7.9.9 Espace localement compact

DefEIBYooAWoESf

Définition 7.181.
Un espace topologique est ***localement compact*** *si tout élément possède un voisinage compact.*

LEMooAXESooYvyesg

Lemme 7.182.
Si X est un espace topologique localement compact et si K est compact dans X, il existe un ouvert V tel que $K \subset V$ et $\bar{V}$ est compact.

LEMooKYMKooPxZjWN

Lemme 7.183.
Soient un espace localement compact X, un compact K et un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $K \subset \mathcal{O}$. Il existe un ouvert relativement compact V tel que

$$K \subset V \subset \bar{V} \subset \mathcal{O}. \tag{7.140}$$

PROPooVLOZooLlYNNa

Proposition 7.184 ([251, 252, 253])**.**
Soit un espace topologique séparé X. Les faits suivants sont équivalents :

ITEMooZLNUooHcTakl

(1) *X est localement compact*[73].

ITEMooYMKMooUkcNzd

(2) *Tout éléments de X a un voisinage compact.*

ITEMooXYYHooTCZMJr

(3) *Tout point de X possède une base de voisinages formés d'ouverts à fermeture compactes.*

ITEMooBTECooDDsTuo

(4) *Tout point de X possède un voisinage ouvert à fermeture compacte.*

Démonstration. Nous avons (1) ⇔ (2) parce que c'est la définition de localement compact. À part ça, on va faire un plusieurs parties.

(1) **(2) ⇒ (4)** Soit $X \in X$. Par (2) nous avons un ouvert A et un compact K tels que $x \in A \subset K$. La partie $\bar{A}$ est un fermé dans le compact K et est donc compacte par le lemme 7.121(1).

(2) **(4) ⇒ (2)** Soit $x \in X$. Si A est le voisinage ouvert à fermeture compacte, alors $\bar{A}$ est un voisinage compact.

(3) **(2) ⇒ (3)** Soit un ouvert U contenant x. Nous allons montrer qu'il existe un ouvert A autour de x tel que $\bar{A}$ est compact et $A \subset U$. Soit un point $x \in X$. Par (2), il possède un voisinage compact K.

Nous considérons la frontière $\partial(U \cap K)$. C'est une partie fermée de X par la proposition 7.169(2). Et comme $\partial(U \cap K)$ est contenu dans K, il est un fermé dans un compact. Donc $\partial(U \cap K)$ est compact.

Si $y \in \partial(U \cap K)$, alors $y \neq x$ parce que U est un ouvert et n'intersecte pas sa frontière[74]. Étant donné que X est séparé, pour chaque $y \in \partial(U \cap K)$, nous trouvons des voisinages ouverts V_y de y et W_y de x tels que $V_y \cap W_y = \varnothing$.

Notons que $K \cap U$ contient un ouvert autour de x parce que K en contient un et que U en est un. Nous pouvons donc choisir $W_y \subset K \cap U$. L'ensemble de parties $\{V_y\}_{y \in \partial(U \cap K)}$ est un recouvrement du compact $\partial(U \cap K)$ par des ouverts. Nous pouvons donc choisir $y_1, \dots, y_n \in \partial(U \cap K)$ tel que

$$\partial(U \cap K) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}. \tag{7.141}$$

Donc $A = W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}$ est un voisinage de x qui :

(3a) est inclut dans $U \cap K$,

(3b) n'intersecte aucun des V_{y_i},

[73] Définition 7.181.
[74] Proposition 7.168.

(3c) n'intersecte donc pas $\partial(U \cap K)$.

La proposition 7.170 dit que la fermeture $\bar{A} = \overline{W_{y_1} \cap \ldots \cap W_{y_n}}$ est encore dans $U \cap K$. Et comme $U \cap K$ est compact, nous déduisons que $\bar{A}$ est compact.

(4) **(3) ⇒ (4)** Si on a une base de voisinages, à fortiori, on a un voisinage.

□

7.9.10 Compactifié d'Alexandrov

PROPooHNOZooPSzKIN

Proposition-Définition 7.185 ([254]).
Soit un espace topologique séparé localement compact[75] X. *Nous considérons un élément* $\omega \notin X$ *et l'ensemble* $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$. *Nous nommons « ouverts de* $\hat{X}$ *» les parties suivantes :*

- *les ouverts de* X,
- *les parties de la forme* $A \cup \{\omega\}$ *avec* $X \setminus A$ *compact dans* X.

Alors $\hat{X}$ *est un espace topologique compact (cela justifie le nom « ouvert » donné aux parties sus-définies).*

Démonstration. La première chose à faire est de prouver que $\hat{X}$ est bien un espace topologique (définition 7.1). Nous notons τ la topologie sur X et $\hat{\tau}$ l'ensemble des « ouverts » de $\hat{X}$. Le but est de prouver que $\hat{\tau}$ est une topologie.

(1) **L'espace lui-même** $\hat{X} \in \hat{\tau}$ parce que $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$ et que $X \setminus X = \varnothing$ est compact.

(2) **Le vide** $\varnothing \in \tau \subset \hat{\tau}$.

(3) **Union quelconque** Soient A_i $(i \in I)$ des éléments de $\hat{\tau}$. Nous posons $I_1 = \{i \in I \text{ tel que } A_i \subset X\}$ et $I_2 = I \setminus I_1$. Nous avons

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \big(\bigcup_{i\in I_1} A_i\big) \cup \big(\bigcup_{i\in I_2} A_i\big) = B \cup \big(\bigcup_{i\in I_2} B_i \cup \{\omega\}\big) \tag{7.142}$$

où B et les B_i sont des ouverts de X tels que $X \setminus B_i$ est compact dans X. Nous récrivons ça sous la forme

$$\bigcup_{i\in I} A_i = B \cup \big(\bigcup_{i\in I_2} B_i\big) \cup \{\omega\}. \tag{7.143}$$

La question est de savoir si

$$X \setminus \Big(B \cup \big(\bigcup_{i\in I_2} B_i\big)\Big) \tag{7.144}$$

est compact dans X. Un peu de réécriture :

$$X \setminus \Big(B \cup \big(\bigcup_{i\in I_2} B_i\big)\Big) = (X \setminus B) \cap X \setminus \big(\bigcup_{i\in I_2} B_i\big) = (X \setminus B) \cap \big(\bigcap_{i\in I_2} (X \setminus B_i)\big). \tag{7.145}$$

La partie $X \setminus B$ est fermée dans X parce que B est ouverte. La proposition 7.125 dit qu'une intersection de compacts est compacte (parce que X est séparé). Nous sommes donc en présence de l'intersection entre un compact et un fermé.

Tout compact d'un espace séparé est fermé[76]. Donc nous sommes en présence de l'intersection de deux fermés. Donc $(X \setminus B) \cap \big(\bigcap_{i\in I_2}(X \setminus B_i)\big)$ est fermé. Mais c'est contenu dans le compact $\bigcap_{i\in I_2}(X \setminus B_i)$. Fermé dans un compact, donc compact (lemme 7.121).

(4) **Intersection finie** Nous considérons les « ouverts » $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ de $\hat{X}$. Si ce sont tous des ouverts de X, l'intersection est un ouvert de X et on est bon.

Supposons que tous les A_i soient de la forme $A_i = B_i \cup \{\omega\}$ avec $X \setminus B_i$ compact. Alors

$$\bigcap_{i=1}^{n} (B_i \cup \{\omega\}) = \Big(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\Big) \cup \{\omega\} \tag{7.146}$$

[75] Définition 7.181.
[76] Lemme 7.121(2).

Mais le lemme 1.41 (appliqué un nombre fini de fois) donne

$$X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus B_i) \tag{7.147}$$

qui est compact en tant qu'union finie de compacts[77].

Enfin, nous supposons que les A_i sont un mélange des deux types, nous les séparons entre ceux qui sont directement des ouverts de X et les autres :

$$A_i = \begin{cases} B_i & \text{si } i \leqslant q \\ C_i \cup \{\omega\} & \text{si } q < i \leqslant n \end{cases} \tag{7.148}$$

où B_i sont ouverts et C_i sont des parties de X telles que $X \setminus C_i$ est compacte.

Nous avons

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{q} B_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=q+1}^{n} (C_i \cup \{\omega\}) \right) \tag{7.149a}$$

$$= B \cap \left(\bigcap_{i=q+1}^{n} C_i \right). \tag{7.149b}$$

Justifications.

- Nous avons posé B est l'intersection des B_i.
- Vu que ω n'est pas dans B, nous pouvons l'oublier dans les $C_i \cup \{\omega\}$.

C'est le moment d'étudier $E = \bigcap_{i=q+1}^{n} C_i$. Nous avons

$$X \setminus E = X \setminus \left(\bigcap_{i=q+1}^{n} C_i \right) = \bigcup_{i=q+1}^{n} (X \setminus C_i). \tag{7.150}$$

Vu que $X \setminus C_i$ est compact, il est fermé[78]. La partie $X \setminus E$ est donc fermée comme union finie de fermés[79]. Et donc E est ouvert. Et finalement

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = B \cap E \tag{7.151}$$

est un ouvert de X comme intersection d'ouverts. C'est donc aussi un ouvert de $\hat{X}$.

Nous avons fini de prouver que $(\hat{X}, \hat{\tau})$ est un espace topologique. Nous montrons à présent que $\hat{X}$ est compact.

Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de $\hat{X}$ par des ouverts. Pour au moins un $i_0 \in I$ nous avons $\omega \in A_{i_0}$. Nous posons $A_{i_0} = B \cup \{\omega\}$ avec $X \setminus B$ compact dans X.

Les ouverts $\{A_i\}_{i \in I}$ forment un recouvrement de $X \setminus B$ par des ouverts. Nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini :

$$X \setminus B \subset \bigcup_{i \in I_1} A_i. \tag{7.152}$$

Nous avons alors

$$\hat{X} \subset \bigcup_{i \in I_1 \cup \{i_0\}} A_i. \tag{7.153}$$

EQooJQFMooKPXLkh

Et voilà que $\hat{X}$ est recouvert par un nombre fini des A_i. Notez que (7.153) est une égalité, mais nous n'en avons pas besoin. □

7.186.

Oh bien entendu, les plus férus de questions embarrassantes demanderont, si X est l'espace considéré, où prendre ce ω ? Quel « objet » existe en-dehors de X ? Qui m'assure que X n'est pas tellement grand que tout est dedans ? Le fait est qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles (c'est le corolaire 1.83). Nous pouvons donc toujours trouver un ensemble ω qui n'est pas dans X.

En ce qui concerne $\mathbb{R}$ auquel nous pouvons attacher deux infinis ($+\infty$ et $-\infty$), ce sera la définition 12.26.

Pour $\mathbb{C}$, nous donnerons une caractérisation de la limite en ∞ dans le lemme 12.87.

[77] Lemme 7.124.

[78] Par le lemme 7.121(2) et le fait que nous considérons un espace séparé.

[79] Par le lemme 7.6(2).

7.9.11 Continuité séquentielle

PropFnContParSuite

Corolaire 7.187 (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point[1])**.**
Une application entre deux espaces topologiques continue en un point y est séquentiellement continue.

Démonstration. Soit une application $f\colon X \to Y$ entre les espaces topologiques X et Y. Nous supposons que f est continue en $a \in X$. Soit une suite convergente $x_k \xrightarrow{X} a$. Nous devons prouver que $f(x_k) \to f(a)$.

Soit un voisinage V de $f(a)$ dans Y. Le fait que f soit continue en a signifie[80] que $f(a)$ est une limite de f en a, c'est-à-dire[81] qu'il existe un voisinage W de a tel que $f(W \setminus \{a\}) \subset V$.

Puisque $x_k \to a$, il existe N tel que $x_k \in W$ pour tout $k \geqslant N$. Pour ces valeurs de k, nous avons $f(x_k) \in V$.

Nous avons prouvé que pour tout voisinage V de $f(a)$ dans Y, il existe N tel que $f(x_k) \in V$ dès que $k \geqslant N$. Cela signifie exactement que $f(x_k) \to f(a)$. □

7.9.11.1 Les boules, une base de topologie

PropNBSooraAFr

Proposition 7.188.
Un espace métrique séparable[82] *accepte une base de topologie*[83] *dénombrable.*

Soit A dense et dénombrable dans l'espace métrique séparable (E, d). Si $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une énumération de A et $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une énumération de $\mathbb{Q}$, alors

$$\mathcal{B} = \{B(a_i, r_j)\}_{i,j\in\mathbb{N}} \tag{7.154}$$

est une base de la topologie[84] *de E.*

Démonstration. Soient $x \in E$ et V un voisinage de x. Ce dernier contient une boule $B(x, r)$ et quitte à prendre r un peu plus petit nous supposons que $r \in \mathbb{Q}$ (existence d'un tel rationnel par le lemme 1.556).

Soit $a \in A$ avec $\|a - x\| < \frac{r}{3}$ (existe par densité de A dans E) ; nous avons $B(a, \frac{2r}{3}) \subset B(x, r)$ parce que si $y \in B(a, \frac{2r}{3})$ alors

$$\|y - x\| \leqslant \|y - a\| + \|a - x\| < \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}r = r. \tag{7.155}$$

La seconde inégalité est stricte parce que les boules sont ouvertes. Le tout montre que $y \in B(x, r)$. Par ailleurs $x \in B(a, \frac{2}{3}r)$ et nous avons trouvé un élément de $\mathcal{B}$ contenant x tout en étant inclus dans V. Cela prouve que $\mathcal{B}$ est bien une base de la topologie de E. □

RemIPVLooHUXyeW

Remarque 7.189.
Il est vite vu que les cubes ouverts forment aussi une base de la topologie de $\mathbb{R}^n$. Cela est à mettre en rapport avec le fait que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ (proposition 10.61).

Voir aussi le corolaire 14.274 qui donnera tout ouvert comme union de pavés presque disjoints.

DefEnsembleBorne

Définition 7.190.
*Soit (X, d) un espace métrique. Un sous-ensemble $A \subset X$ est **borné** si il existe une boule de X contenant A.*

PROPooJIOAooWqzKMu

Proposition 7.191.
Toute réunion finie de parties bornés est bornée. Toute partie d'un ensemble borné est un ensemble borné.

Démonstration. Soient des parties bornées $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$. Si m_i est un majorant de A_i, alors $M = \max\{m_i\}_{i=1,\dots,n}$ est un majorant de $\bigcup_{i=1}^n A_i$. Notons que M est bien défini par le lemme 1.216.

Pour la seconde affirmation, si A est borné (notons m un majorant de A) et si $B \subset A$, alors m est un majorant de B. □

7.9.12 Continuité et compacité

Un résultat important dans la théorie des fonctions sur les espaces vectoriels normés est qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Ce résultat sera énormément utilisé pour trouver des maximums et minimums de fonctions. Le théorème exact est le suivant.

[80] C'est la définition 7.45 de la continuité en un point.
[81] Définition 7.135 d'une limite.
[82] Qui possède une partie dense dénombrable, définition 7.75.
[83] Base de topologie, définition 7.2.
[84] Définition 7.2.

LemQFXOWyx

Lemme 7.192 (de Lebesgue[255]).
Soit (X, d) un espace métrique tel que toute suite ait une sous-suite convergente à l'intérieur de l'espace. Si $\{V_i\}$ est un recouvrement par des ouverts de X, alors il existe ϵ tel que pour tout $x \in X$, nous ayons $B(x, \epsilon) \subset V_i$ pour un certain i.

Démonstration. Par l'absurde, nous supposons que pour tout n, il existe un $x_n \in X$ tel que la boule $B(x_n, \frac{1}{n})$ n'est contenue dans aucun des V_i. De ces x_n, nous extrayons une sous-suite convergente (que nous nommons encore (x_n)) et nous posons $x_n \to x$. Pour n assez grand ($\frac{1}{n} < \epsilon$) nous avons $x_n \in B(x, \epsilon)$, donc tous les x_n suivants sont dans le V_i qui contient x. □

LemMGQqgDG

Lemme 7.193 ([255]).
Soit (X, d) un espace métrique tel que toute suite possède une sous-suite convergente. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble fini $\{x_i\}_{i \in I}$ tel que les boules $B(x_i, \epsilon)$ recouvrent X.

Démonstration. Soit par l'absurde un $\epsilon > 0$ contredisant le lemme. Il n'existe pas de parties finies de X autour des points desquels les boules de taille ϵ recouvrent X.

Nous construisons par récurrence une suite ne possédant pas de sous-suite convergente. Le premier terme, x_0 est pris arbitrairement dans X. Ensuite si nous avons déjà N termes de la suite, nous savons que les boules de rayon ϵ centrées sur les points $\{x_i\}_{i=1,\dots,N}$ ne recouvrent pas X. Donc nous prenons x_{N+1} hors de l'union de ces boules.

Ainsi nous avons une suite (x_n) dont tous les termes sont à distance plus grande que ϵ les uns des autres. Une telle suite ne peut pas contenir de sous-suite convergente. Contradiction. □

ThoBWFTXAZNH

Théorème 7.194 (Bolzano-Weierstrass[255], thème 33).
Un espace métrique est compact si et seulement si toute suite admet une sous-suite qui converge à l'intérieur de l'espace.

Démonstration. Soient X un espace métrique compact et (x_n) une suite dans X. Nous considérons la suite de fermés emboîtés

$$X_n = \overline{\{x_k \text{ tel que } k > n\}}. \tag{7.156}$$

Ce sont des fermés ayant la propriété d'intersection finie non vide, et donc la proposition 7.117 nous dit qu'ils ont une intersection non vide. Un élément de cette intersection est automatiquement un point d'accumulation de la suite[85].

Nous passons à l'autre sens. Nous supposons que toute suite dans X contient une sous-suite convergente, et nous considérons $\{V_i\}_{i \in I}$, un recouvrement de X par des ouverts. Par le lemme 7.192, nous considérons un ϵ tel que pour tout x, il existe un $i \in I$ avec $B(x, \epsilon) \subset V_i$. Par le lemme 7.193, nous considérons un ensemble fini $\{y_i\}_{i \in A}$ tel que les boules $B(y_i, \epsilon)$ recouvrent X.

Par construction, chacune de ces boules $B(y_i, \epsilon)$ est contenue dans un des ouverts V_i. Nous sélectionnons donc parmi les V_i le nombre fini qu'il faut pour recouvrir les $B(y_i, \epsilon)$ et donc pour recouvrir X. □

ExEFYooTILPDk

Exemple 7.195 (Non compacité de la boule unité en dimension infinie).
Le théorème de Bolzano-Weierstrass permet de voir tout de suite que la boule unité n'est pas compacte dans un espace vectoriel de dimension infinie : la suite des vecteurs de base ne possède pas de sous-suite convergente. △

Le théorème de Bolzano–Weierstrass 7.194 a l'importante conséquence suivante.

ThoWeirstrassRn

Théorème 7.196 (Weierstrass).
Une fonction continue à valeurs réelles définie sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soient K un compact et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Nous désignons par A l'ensemble des valeurs prises par f sur K :

$$A = f(K) = \{f(x) \text{ tel que } x \in K\}. \tag{7.157}$$

Nous considérons le supremum $M = \sup A = \sup_{x \in K} f(x)$ avec la convention suivante : si A n'est pas borné supérieurement, nous posons $M = \infty$ (voir définition 1.579).

Nous allons maintenant construire une suite (x_n) de deux façons différentes selon que $M = \infty$ ou non.

[85] Définition 7.43.

(1) Si $M = \infty$, nous choisissons, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un $x_n \in K$ tel que $f(x_n) > n$. C'est certainement possible parce que si A n'est pas borné, nous pouvons y trouver des nombres aussi grands que nous voulons.

(2) Si $M \neq \infty$, nous savons que pour tout ε, il existe un $y \in A$ tel que $y > M - \varepsilon$. Pour chaque n, nous choisissons donc $x_n \in K$ tel que $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$.

Quel que soit le cas dans lequel nous sommes, la suite (x_n) est une suite dans K qui est compact, et donc nous pouvons en extraire une sous-suite convergente à l'intérieur de K par le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.194. Afin d'alléger la notation, nous allons noter (x_n) la sous-suite convergente. Nous avons donc

$$x_n \to x \in K. \tag{7.158}$$

Par la proposition 7.187, nous savons que f prend en x la valeur

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n). \tag{7.159}$$

Donc $f(x) < \infty$. Évidemment, si nous avions été dans le cas où $M = \infty$, la suite x_n aurait été choisie pour avoir $f(x_n) > n$ et donc il n'aurait pas été possible d'avoir $\lim_{n\to\infty} f(x_n) < \infty$. Nous en concluons que $M < \infty$, et donc que f est bornée sur K.

Afin de prouver que f atteint sa borne, c'est-à-dire que $M \in A$, nous considérons les inégalités

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M. \tag{7.160}$$

En passant à la limite $n \to \infty$, ces inégalités deviennent

$$M \leqslant f(x) \leqslant M, \tag{7.161}$$

et donc $f(x) = M$, ce qui prouve que f atteint sa borne M au point $x \in K$. □

LEMooQLVAooICaPvR

Lemme 7.197 ([1])**.**
Soient des compacts A, B et une fonction continue $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$. Alors

$$\sup_{(x,y)\in A\times B} |f(x,y)| = \sup_{x\in A}\big(\sup_{y\in B}|f(x,y)|\big). \tag{7.162}$$

Démonstration. Pour chaque $x \in A$, la fonction $f_x\colon B \to \mathbb{R}$ donnée par $f_x(y) = |f(x,y)|$ est continue et atteint donc sa borne[86] en $y_M(x)$. Notons que cela ne définit pas de façon univoque $y_M(x)$ parce que f_x peut atteindre son maximum en plusieurs points. L'important est que pour tout x, le nombre $|f\big(x, y_M(x)\big)|$ ne dépend pas du choix de $y_M(x)$ parmi les y qui réalisent le maximum.

Notons (x_0, y_0) un point de $A \times B$ sur lequel $|f|$ réalise son maximum[87] :

$$\sup_{(x,y)\in A\times B} |f(x,y)| = |f(x_0,y_0)|. \tag{7.163}$$

EQooDDXDooVsnlKG

Nous avons d'une part

$$\sup_{x\in A}\big(\sup_{y\in B}|f(x,y)|\big) = \sup_{x\in A}|f\big(x,y_M(x)\big)| \leqslant |f(x_0,y_0)| \tag{7.164}$$

Et d'autre part, quelques calculs avec justifications en-dessous :

SUBEQooPYJPooBJyEgN

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in A}\big(\sup_{y\in B}|f(x,y)|\big) &\leqslant \sup_{x\in A}\sup_{y\in B}|f(x_0,y_0)| && \text{(7.165a)}\\
&= |f(x_0,y_0)| && \text{(7.165b)}\\
&\leqslant |f\big(x_0,y_M(x_0)\big)| && \text{(7.165c)}\\
&\leqslant \sup_{x\in A}|f\big(x,y_M(x)\big)| && \text{(7.165d)}\\
&\leqslant \sup_{x\in A}\big(\sup_{y\in B}|f(x,y)|\big). && \text{(7.165e)}
\end{aligned}$$

SUBEQooAKPOooPdkvMJ
SUBEQooDYVPooUgOpfD
SUBEQooVOFAooNtzSpt

Justifications.

- Pour (7.165a). Le point (x_0, y_0) est un maximum de $|f|$.

[86] Théorème 7.196.
[87] Encore une fois, ce point n'est pas déterminé de façon unique par cette propriété.

- Pour (7.165c). y_M est définie pour maximiser, en fonction de x, la quantité $|f(x, y_M(x))|$.
- Pour (7.165d). Au lieu de conserver la valeur x_0 fixé, nous prenons le maximum sur tous les x possibles.

Vu que les premiers et derniers termes des inégalités (7.165) sont égaux, toutes les inégalités sont en réalité des égalités. En particulier, en reprenant (7.163),

$$\sup_{(x,y)\in A\times B} |f(x,y)| = |f(x_0,y_0)| = \sup_{x\in A}\big(\sup_{y\in B}|f(x,y)|\big). \tag{7.166}$$

□

7.9.13 Distance à un ensemble

DEFooGNNUooFUZINs

Définition 7.198.
Si A est une partie de l'espace métrique (X,d), et si $b\in X$, nous définissons

$$d(b,A) = \inf_{y\in A} d(b,y). \tag{7.167}$$

LEMooEQIZooLpsbOe

Lemme 7.199 ([1]).
Soit un fermé F de l'espace métrique (X,d). Si $a\in X$ vérifie $d(a,F)=0$, alors $a\in F$.

Démonstration. Supposons que $d(a,F)=0$, c'est-à-dire que $\inf_{x\in F} d(a,x)=0$. Il existe donc une suite (x_k) dans F telle que $d(a,x_k)\to 0$.

Cela signifie que $x_k \xrightarrow{(X,d)} a$. La proposition 7.78 nous dit alors que $a\in F$. □

Exemple 7.200 (Pas avec un ouvert).
En prenant l'ouvert $A=]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ nous avons $d(0,A)=0$, alors que 0 n'est pas dans A. △

LEMooJNRTooZyKiFC

Lemme 7.201 ([1]).
Soient un espace métrique (X,d) ainsi qu'une partie $A\subset X$. Soit $r>0$. La partie

$$\mathcal{O} = \{x\in X \text{ tel que } d(x,A)<r\} \tag{7.168}$$

est ouverte.

Démonstration. Soit $y\in\mathcal{O}$; nous avons $d(y,A)<r$. Autrement dit,

$$\inf_{a\in A} d(y,a) < r \tag{7.169}$$

et donc il existe $a\in A$ tel que $d(y,a)<r$. Soit $\delta=d(y,a)<r$. Nous montrons à présent que $B(y,r-\delta)$ est dans $\mathcal{O}$. En effet si $z\in B(y,r-\delta)$, alors

$$d(z,a)\leqslant d(z,y)+d(y,a)<r-\delta+\delta=r. \tag{7.170}$$

□

PROPooTXYMooDGnfKB

Proposition 7.202 (Inégalité triangulaire point-partie[256]).
Soit un espace métrique[88] (X,d) et soit une partie non vide $A\subset X$. Pour tout $x,y\in A$ nous avons :

$$d(x,A)\leqslant d(x,A)+d(x,y) \tag{7.171}$$

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire pour tout $a\in A$ nous avons $d(x,a)\leqslant d(x,y)+d(y,a)$ et en arrangeant :

$$d(y,a)\geqslant d(x,a)-d(x,y). \tag{7.172}$$

Et maintenant on peut calculer deux secondes :

$$\begin{aligned}
d(y,A) &= \sup_{a\in A} d(y,a) && \text{(7.173a)}\\
&\geqslant \sup_{a\in A}\big(d(x,a)-d(x,y)\big) && \text{(7.173b)}\\
&= \big(\sup_{a\in A} d(x,a)\big) - d(x,y) && \text{(7.173c)}\\
&= d(x,A)-d(x,y). && \text{(7.173d)}
\end{aligned}$$

□

[88] Espace métrique, définition 7.139.

LEMooCFGTooIfdcfk

Lemme 7.203 ([1, 257]).
Soit une partie A de l'espace métrique (X, d). Alors

ITEMooDXSHooPhCXlR

(1) Pour tout $x, y \in X$ nous avons

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y). \tag{7.174}$$

ITEMooGNSEooDVZrFp

La fonction

$$\begin{aligned} f\colon X &\to [0, \infty[\\ x &\mapsto d(x, A) \end{aligned} \tag{7.175}$$

est continue.

Démonstration. Nous utilisons l'inégalité triangulaire point-partie 7.202. D'abord $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$ que nous récrivons

EQooCJKBooXdbzts

$$d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y). \tag{7.176}$$

Ensuite $d(y, A) \leqslant d(x, y) + d(x, A)$ que nous récrivons

EQooKHPCooDSsfTh

$$d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(x, y). \tag{7.177}$$

Notez que les équations (7.176) et (7.177) sont de la forme

$$\begin{cases} u - v \leqslant \alpha & \text{(7.178a)} \\ v - u \leqslant \alpha, & \text{(7.178b)} \end{cases}$$

dont nous déduisons $|u - v| \leqslant \alpha$. Bref, nous avons

EQooNAQCooJzmFoj

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y). \tag{7.179}$$

Voilà qui prouve déjà (1).

Pour prouver 7.203, nous considérons $x_n \xrightarrow{X} x$, et écrivons (7.179) pour x et x_n : pour tout n nous avons

$$|d(x_n, A) - d(x, A)| \leqslant d(x_n, x). \tag{7.180}$$

Vu que $d\colon X \times X \to X$ est continue, en prenant la limite $n \to \infty$, à droite nous avons zéro[89] et donc

$$\lim_{n\to\infty} |d(x_n, A) - d(x, A)| = 0, \tag{7.181}$$

ou encore

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| = 0, \tag{7.182}$$

ce qui signifie que f est continue en x parce que la continuité séquentielle implique la continuité par la proposition 7.157. □

7.9.14 Espace métrisable

PROPooXWBTooCvGLOj

Proposition 7.204 ([258]).
Soit un espace topologique métrisable[90] X.

ITEMooOXVRooBsKwuq

(1) Tout fermé de X est une intersection dénombrable d'ouverts.

(2) Tout ouvert de X est une union dénombrable de fermés.

Démonstration. Soit une métrique d compatible avec la topologie de X et un fermé A. Nous posons

$$V_n = \{x \in X \text{ tel que } d(x, A) < \frac{1}{n}\}. \tag{7.183}$$

Et juste pour faire simple nous notons $V_0 = X$.

[89] Parce que d est continue, proposition 7.159.
[90] Définition 7.140.

(1) **Les parties V_n sont ouvertes** Soit $x \in V_n$. Trouvons un voisinage de x contenu dans V_n afin de pouvoir encore invoquer le théorème 7.8. D'abord, vu que $x \in V_n$, il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) < \frac{1}{n}$ (ici les inégalités strictes sont importantes).

Soient $\epsilon > 0$ que nous fixerons plus bas, et $y \in B(x,\epsilon)$. L'inégalité triangulaire donne

$$d(y,a) \leqslant d(y,x) + d(x,a) < \epsilon + \frac{1}{n}. \tag{7.184}$$

Nous pouvons donc choisir ϵ de telle sorte que $d(y,a) < 1/n$. Avec ce ϵ, nous avons, pour tout $y \in B(x,\epsilon)$:

$$d(y,A) \leqslant d(y,a) < \frac{1}{n} \tag{7.185}$$

et donc $y \in V_n$.

(2) **A est l'intersection des V_n** Nous avons évidemment $A \subset V_n$ pour tout n. Et d'autre part, si $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ alors $d(a,A) < \frac{1}{n}$ pour tout n. Cela implique $d(a,A) = 0$, et donc $a \in A$ par le lemme 7.199.

Ceci démontre le point (1).

En ce qui concerne la seconde partie, nous appliquons la première partie au complémentaire. Si $\mathcal{O}$ est ouvert, $\mathcal{O}^c$ est fermé et

$$\mathcal{O}^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n, \tag{7.186}$$

ce qui donne immédiatement

$$\mathcal{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n^c \tag{7.187}$$

où les V_n^c sont fermés. □

COROooTWFYooCNMieM

Corolaire 7.205.
Si X est un espace topologique métrisable, alors X accepte une base dénombrable de topologie autour de chaque point.

Démonstration. Il s'agit seulement de remarquer que les singletons sont fermés et d'appliquer la proposition 7.204. □

7.9.15 Connexité

PROPooUQNTooAegKwA

Proposition 7.206 ([1]).
Tout espace métrique[91] *est complètement normal.*

Démonstration. Soient un espace métrique (X,d) ainsi que deux parties $A, B \subset X$ telles que $A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} = \varnothing$. Vu que $A \cap \bar{B} = \varnothing$, pour chaque $a \in A$, il existe une boule $B(a,r_a)$ telle que $B(a,r_a) \cap B = \varnothing$. Même histoire pour $b \in B$.

Nous posons $U = \bigcup_{a\in A} B(a,r_a/2)$ et $V = \bigcup_{b\in B} B(b,r_b/2)$. Les parties U et V sont ouvertes comme union d'ouverts. Nous avons évidemment $A \subset U$ et $B \subset V$.

Pour voir que $U \cap V = \varnothing$, supposons $x \in U \cap V$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x \in B(a,r_a/2) \cap B(b,r_b/2)$. Remarquons que $d(a,b) > r_a$ et $d(a,b) > r_b$: nous avons choisi r_a et r_b pour cela. Nous avons le calcul

$$d(a,b) \leqslant d(a,x) + d(x,b) \leqslant \frac{r_a + t_b}{2} < d(a,b). \tag{7.188}$$

Cela est une contradiction. □

PROPooBMFBooIQJMNC

Proposition 7.207 ([1]).
Tout n-connexe[92] *d'un espace métrique est connexe*[93].

Démonstration. Une espace métrique est complètement normal (proposition 7.206) et tout n-connexe d'un espace complètement normal est connexe (proposition 7.99). □

[91] Définition 7.139.
[92] Définition 7.97
[93] Définition 7.95

7.9.16 Convexité

DEFooQQEOooAFKbcQ

Définition 7.208 (Partie convexe)**.**
*Une partie A d'un espace vectoriel est **convexe** si pour tout $a, b \in A$ et pour tout $t \in [0,1]$, le point $ta + (1-t)b$ est dans A.*

Autrement dit, une partie est convexe lorsqu'elle contient tous les segments joignant ses points.

PROPooJOCEooUKhkqQ

Proposition 7.209 ([259])**.**
Toute intersection de convexes est convexe.

Démonstration. Soit un espace vectoriel E ainsi que des parties convexes $\{C_i\}_{i\in I}$ indexées par un ensemble quelconque I. Nous prouvons que $C = \bigcap_{i\in I} C_i$ est convexe.

Soient $x, y \in C$, ainsi que $i \in I$. Nous avons $x, y \in C_i$ et donc $\{tx + (1-t)y\}_{t\in[0,1]} \subset C_i$. Vu que cela est vrai pour tout i, nous avons

$$\{tx + (1-t)y\}_{t\in[0,1]} \subset \bigcap_{i\in I} C_i, \tag{7.189}$$

et donc le résultat attendu. □

PROPooJOXUooEZELna

Proposition 7.210 ([260])**.**
Si A et B sont des convexes d'un espace vectoriel topologique, alors $A - B$ est convexe.

Démonstration. Soient $a_1, a_2 \in A$ et $b_1, b_2 \in B$. Nous devons prouver que $t(a_1 - b_1) + (1-t)(a_2 - b_2)$ est dans $A - B$. C'est un simple calcul :

$$t(a_1 - b_1) + (1-t)(a_2 - b_2) = \underbrace{ta_1 + (1-t)a_2}_{\in A} - \underbrace{\big(tb_1 + (1-t)b_2\big)}_{\in B} \in A - B. \tag{7.190}$$

□

LEMooEFCCooOuStrb

Lemme 7.211.
L'intérieur d'un convexe est convexe.

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

7.9.17 Norme

DefNorme

Définition 7.212 ([261], thème 25)**.**
*Soit E un espace vectoriel (pas spécialement de dimension finie) sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une **norme** sur E est une application $N : E \to [0, \infty[$ telle que*

(1) $N(x) \geqslant 0$

(2) $N(x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$;

ItemDefNormeii

(3) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

ItemDefNormeiii

(4) $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$

pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

*La propriété (4) est appelée **inégalité triangulaire**.*

*Un espace vectoriel muni d'une norme est un **espace vectoriel normé**.*

En prenant $\lambda = -1$ dans la propriété (3), nous trouvons immédiatement que $N(-x) = N(x)$.

PropNmNNm

Proposition 7.213.
Toute norme N sur l'espace vectoriel E vérifie l'inégalité

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x - y) \tag{7.191}$$

pour tout $x, y \in E$.

Démonstration. Nous avons, en utilisant le point (4) de la définition 7.212,

subEqNNNxxyyya
$$N(x) = N(x - y + y) \leqslant N(x - y) + N(y), \tag{7.192a}$$
subEqNNNxxyyyb
$$N(y) = N(y - x + x) \leqslant N(y - x) + N(x). \tag{7.192b}$$

Supposons d'abord que $N(x) \geqslant N(y)$. Dans ce cas, en utilisant (7.192a),

$$\big|N(x) - N(y)\big| = N(x) - N(y) \leqslant N(x-y) + N(y) - N(y) = N(x-y). \tag{7.193}$$

Si par contre $N(x) \leqslant N(y)$, alors nous utilisons (7.192b) et nous trouvons

$$\big|N(x) - N(y)\big| = N(y) - N(x) \leqslant N(y-x) + N(x) - N(x) = N(y-x) = N(x-y). \tag{7.194}$$

Dans les deux cas, nous avons retrouvé l'inégalité annoncée. □

Cette proposition signifie aussi que

EqNleqNNleqNvqlqbs
$$-N(x-y) \leqslant N(x) - N(y) \leqslant N(x-y). \tag{7.195}$$

Le lemme suivant dit que nous pouvons remplacer l'inégalité triangulaire par la convexité de la boule unité dans la définition de norme.

LEMooAVIJooFhdXXr

Lemme 7.214 ([262]).
Soit une application $N\colon E \to [0,\infty[$ telle que

(1) $N(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$,

(2) $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,

(3) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

Alors N est une norme si et seulement si la partie

$$B = \{x \in E \text{ tel que } N(x) \leqslant 1\} \tag{7.196}$$

est convexe[94].

Démonstration. Dans les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que N est une norme et nous prouvons que la boule B est convexe. Soient $x, y \in B$ et $\lambda \in [0,1]$. Nous avons

$$\begin{aligned} N\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &\leqslant N(\lambda x) + N\big((1-\lambda)y\big) && \text{(7.197a)}\\ &= \lambda N(x) + (1-\lambda)N(y) && \text{(7.197b)}\\ &\leqslant \lambda + (1-\lambda) && \text{(7.197c)}\\ &= 1. && \text{(7.197d)} \end{aligned}$$

Nous avons utilisé diverses propriétés de la norme, ainsi que la majoration $N(x), N(y) \leqslant 1$.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que B est convexe, et nous prouvons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Soient $x, y \in E$ que nous choisissons tous deux non nuls (sinon c'est trop facile). Nous posons

EQooCIMBooFeOtWg
$$z = \frac{x+y}{N(x)+N(y)} \tag{7.198}$$

et la subtilité sera d'écrire z de telle sorte à être une somme de deux éléments de B. L'astuce est de poser

$$\lambda = \frac{N(x)}{N(x)+N(y)}. \tag{7.199}$$

Une simple vérification montre qu'alors

$$z = \lambda \frac{x}{N(x)} + (1-\lambda)\frac{y}{N(y)}. \tag{7.200}$$

Nous avons évidemment $x/N(x) \in B$ (et de même avec y). Puisque B est convexe, nous avons $z \in B$. Exprimons le fait que $z \in B$ à partir de la définition (7.198) :

$$\frac{N(x+y)}{N(x)+N(y)} \leqslant 1. \tag{7.201}$$

Cela signifie exactement $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

[94] Définition 7.208.

□

7.215.
Afin de suivre une notation proche de celle de la valeur absolue, à partir de maintenant, la norme d'un vecteur v sera notée $\|v\|$ au lieu de $N(v)$. La proposition 7.213 s'énoncera donc

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|. \tag{7.202}$$

Un espace vectoriel E muni d'une norme est, on l'a déjà dit, un **espace vectoriel normé** ; on le notera $(E, \|.\|)$ pour distinguer la norme fixée.

Une autre inégalité utile de temps en temps.

CORooDFBGooAqVRfS

Corolaire 7.216.
Si a et b sont dans un espace vectoriel normé, alors

$$\big|\|a - b\| - \|b\|\big| \leqslant \|a\|. \tag{7.203}$$

Démonstration. Il s'agit seulement de la proposition 7.213 avec $x = a - b$ et $y = b$. □

LEMooWGBJooYTDYIK

Lemme-Définition 7.217 (Distance induite par une norme)**.**
Soit un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. Nous posons

EQooZYJRooAHnsIG

$$d(x, y) = \|x - y\|. \tag{7.204}$$

Alors

ITEMooLITDooPeReOk

(1) d est invariante par translations : $d(a, b) = d(a + u, b + u)$

(2) d est une distance[95] sur E.

*C'est la **distance induite** par la norme.*

Démonstration. Le fait que la formule (7.204) soit invariante par translations est immédiat. En ce qui concerne le fait que ce soit une distance, le seul point délicat à vérifier est l'inégalité triangulaire. Mais, pour tous $x, y, z \in E$, on a

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y). \tag{7.205}$$

□

7.9.18 Topologie

DEFooPMVFooPSYVNQ

Définition 7.218.
La topologie associée à une norme est celle associée à la distance donnée en 7.217 par le théorème 7.142.

7.10 Espaces vectoriels topologiques

DefEVTopologique

Définition 7.219.
*Un espace vectoriel V sur le corps valué[96] $\mathbb{K}$ muni d'une topologie est un **espace vectoriel topologique** si*

(1) la somme de deux vecteurs est une application continue $V \times V \to V$; et

(2) la multiplication par un scalaire est une application continue $\mathbb{K} \times V \to V$.

Ici, sur $V \times V$ et sur $\mathbb{K} \times V$ nous avons la topologie produit.
Dans toute la suite, nous supposons que $\mathbb{K}$ est un corps avec une topologie métrique.

On le redit quand même : le corps[97] lui-même doit avoir sa topologie. Dans la grande majorité des cas, ce corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de la topologie usuelle.

Mine de rien, le fait que les deux opérations usuelles soient continues a de belles conséquences sur la topologie de l'espace…

[95] Définition 7.139.
[96] Définition 1.110.
[97] Définition 1.390

PROPooDXLFooFghbWk

Proposition 7.220 ([263]).
Soit un espace vectoriel topologique V. Pour $x \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ fixés, les fonctions T_x et M_λ définies par :

$$T_x : V \to V \qquad \text{et} \qquad M_\lambda : V \to V \tag{7.206}$$
$$y \mapsto x + y \qquad\qquad y \mapsto \lambda y \tag{7.207}$$

sont des automorphismes[98] *de l'espace topologique V.*

Démonstration. Ce sont des bijections continues, dont les inverses sont respectivement T_{-x} et $M_{1/\lambda}$. □

PROPooJYLVooPpLWFX

Proposition 7.221.
Soit un espace vectoriel topologique X. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert dans X, alors pour tout $x \in X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les parties $\mathcal{O} + x$ et $\lambda\mathcal{O}$ sont des ouverts.

LEMooEZIYooBBxdJj

Lemme 7.222 ([1]).
Soit un espace vectoriel topologique V sur le corps $\mathbb{K}$. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert autour de 0 dans V et si $\lambda \neq 0 \in \mathbb{K}$, il existe un ouvert U autour de 0 tel que $\lambda U \subset \mathcal{O}$.

Démonstration. La réponse est $U = \lambda^{-1}\mathcal{O}$. En effet par définition d'un espace vectoriel topologique, la fonction donnée par $f(x) = \lambda x$ est continue ; donc $U = f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert. De plus $\lambda U = \mathcal{O}$. □

PROPooHKGZooDaNaHU

Proposition 7.223 ([1]).
Une application linéaire entre espaces vectoriels topologiques est continue si et seulement si elle est continue en 0.

Démonstration. Soient deux espaces vectoriels topologiques. Soit une application linéaire $f : E \to F$. Nous supposons qu'elle est continue en 0 (définition 7.45(1)), et nous montrons qu'elle est alors continue en $a \in E$.

Soit un voisinage W de $f(a)$ dans F. Alors la proposition 7.221 dit que $W - f(a)$ est un voisinage de $0 = f(0)$ dans F. Vu que f est continue en 0, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $f(V) \subset W - f(a)$. Alors

$$f(V + a) = f(V) + f(a) \subset W, \tag{7.208}$$

et le voisinage $V + a$ de a dans E fait l'affaire.

Nous avons prouvé que f est continue en chaque point de E. La proposition 7.46 dit que f est alors continue sur E. □

7.10.1 De complexe à réel

Si E est un espace topologique sur $\mathbb{C}$, nous aurons besoin de le voir comme espace topologique sur $\mathbb{R}$.

PROPooAIMVooYtZVJV

Proposition 7.224 ([1]).
Soit un espace topologique complexe (X, τ, m_X, s_X) où τ est la topologie sur X, $m_X : \mathbb{C} \times X \to X$ est la multiplication et $s_X : X \times X \to X$ est la somme.

Alors en posant $E = X$ (comme ensembles) ainsi que

$$\begin{aligned} s_E : E \times E &\to E \\ (x, y) &\mapsto s_X(x, y), \end{aligned} \tag{7.209}$$

et

$$\begin{aligned} m_E : \mathbb{R} \times E &\to E \\ (\lambda, x) &\mapsto m_X(\lambda, x), \end{aligned} \tag{7.210}$$

la quadruplet (E, τ, m_E, s_E) est un espace topologique.

PROPooQMGXooBnJblx

Proposition 7.225 ([1]).
Soit X un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{C}$. Si $f : X \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, nous posons

$$\phi(x) = f(x) - if(ix). \tag{7.211}$$

Alors

(1) L'application ϕ est $\mathbb{C}$-linéaire.

(2) Nous avons $\|\phi\| = \|f\|$.

(3) Si f est continue, alors ϕ est continue.

[98] Définition 7.51.

7.10.2 Base de topologie

Toute base de voisinage de 0 se transporte en tout point de l'espace vectoriel topologique.

PropInvarianceTopologie

Corolaire 7.226 (Invariance de la topologie[263]).
Soit un espace vectoriel topologique (X, τ). Si $\mathcal{B}_0$ est une base de topologie en 0, alors $\mathcal{B}_0 + a$ est une base de topologie en a.

Démonstration. Soit un ouvert U contenant a. Alors $U - a$ est un ouvert contenant 0 (proposition 7.221). Il existe donc $B \in \mathcal{B}_0$ tel que $0 \in B \subset U - a$. Nous avons alors $a \in B + a \subset U$. □

7.10.2.1 Somme directe topologique

PropKZDqTR

Proposition-Définition 7.227 ([264, 265, 1]).
Soit V un espace vectoriel topologique et une décomposition en somme directe[99] $V = V_1 \oplus V_2$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes.

ITEMooMUELooWdJQeW

(1) La bijection

$$\begin{aligned}\psi\colon V_1 \times V_2 &\to V\\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1 + x_2\end{aligned} \tag{7.212}$$

est un homéomorphisme[100].

ITEMooDKOYooUpEfOR

(2) Les parties V_1 et V_2 sont fermées dans V et la projection $s\colon V_2 \to V/V_1$ est un homéomorphisme.

ITEMooFSSMooCQzTIc

(3) Les parties V_1 et V_2 sont fermées dans V et la projection $\pi_2\colon V \to V_2$ est continue.

*Lorsqu'une décomposition en somme directe vérifie ces conditions, nous disons que la décomposition est **topologique**.*

Démonstration. Avant de commencer, nous rappelons les topologies.

- Sur V_1 et V_2 nous avons la topologie induite, définition 7.27.
- La topologie produit sur $V_1 \times V_2$ est la définition 7.63.
- La topologie quotient sur V/V_1 est la définition 7.67.

Voici quelques points qui ne dépendent pas des hypothèses (1), (2) ou (3).

(1) **La projection $p\colon V \to V/V_1$ est continue** La projection est toujours continue pour la topologie quotient ; c'est la définition même, voir 7.67.

(2) **ψ est une bijection continue** Le fait que ψ soit continue fait partie de la définition 7.219 d'un espace vectoriel topologique. Pour que ce soit une bijection, c'est le lemme 4.150.

(3) **s est injective** Soient $v, w \in V_2$ tels que $s(v) = s(w)$. Alors $\{v + x_1\}_{x_1 \in V_1} = \{w + y_1\}_{y_1 \in V_1}$. En particulier $v \in \{w + y_1\}_{y_1 \in V_1}$. Il existe donc $y_1 \in V_1$ tel que $v = w + y_1$. Donc $v - w \in V_1$. Mais comme V_2 est un espace vectoriel, nous avons aussi $v - w \in V_2$. Donc $v - w \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

(4) **s est surjective** Soit $x \in V$. Nous devons trouver $v \in V_2$ tel que $s(v) = [x]$. Nous savons qu'il existe $x_1 \in V_1$ et $x_2 \in V_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Nous avons alors $[x] = s(x_2)$.

(5) **s est continue** Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de V/V_1. La partie $p^{-1}(\mathcal{O})$ est ouverte dans V (proposition 7.68), et donc

$$s^{-1}(\mathcal{O}) = p^{-1}(\mathcal{O}) \cap V_2 \tag{7.213}$$

est ouvert dans V_2 parce que la topologie sur V_2 est celle induite[101] de la topologie de V.

Et maintenant on prouve les équivalences.

(1) **Si (1) alors V_1 est fermé** La partie $V_1 \times \{0\}$ est fermée dans $V_1 \times V_2$. Vu que ψ^{-1} est continue, nous en déduisons que $\psi\big(V_1 \times \{0\}\big)$ est fermée dans V par le lemme 7.52. Mais comme $\psi\big(V_1 \times \{0\}\big) = V_1$, nous avons que V_1 est fermé dans V.

[99] Définition 4.149.
[100] C'est-à-dire isomorphisme d'espaces vectoriels : bijection continue de réciproque continue. En ce qui concerne la topologie sur $V_1 \times V_2$, elle est donné par la définition 7.63.
[101] Topologie induite, définition 7.27.

(2) **(1) ⇒ (3)** Nous supposons que $\psi\colon V_1 \times V_2 \to V$ est un homéomorphisme. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\sigma\colon V_1 \times V_2 &\to V_1 \times V_2\\ (x,y) &\mapsto (0,y).\end{aligned} \tag{7.214}$$

Cette application est continue et permet d'écrire π_2 sous la forme $\pi_2 = \psi \circ \sigma$. En tant que composée d'applications continues, l'application π_2 est continue.

(3) **(3) ⇒ (2)** L'application $\pi\colon V \to V_2$ est constante sur les classes (modulo V_1). Donc elle descend aux classes[102] en l'application

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}\colon V/V_1 &\to V_2\\ [x] &\mapsto \pi(x).\end{aligned} \tag{7.215}$$

Cette application est continue parce que π l'est et parce que le lemme 7.70 le dit. Le point à remarquer est que $s^{-1} = \tilde{\pi}$ parce que pour tout $x \in V_2$ nous avons

$$s\Big(\tilde{\pi}\big([x]\big)\Big) = s\big(\pi(x)\big) = s(x) = [x] \tag{7.216}$$

parce que $\pi(x) = x$ du fait que $x \in V_2$. Vu que $\tilde{\pi}$ est continue, l'application s^{-1} est également continue.

(4) **(2) ⇒ (1)** Nous pouvons écrire la projection $\pi_2\colon V \to V_2$ comme composée $\pi_2 = s^{-1} \circ p$. En effet pour $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$ nous avons $(s^{-1} \circ p)(v_1 + v_2) = s^{-1}\big([v_2]\big) = v_2 = \pi_2(v_1 + v_2)$.

Nous savons que p est continue (construction de la topologie et tout ça), et que s^{-1} est également continue par hypothèse. Donc π_2 est continue. Étant donné que $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}$ et que l'identité est continue, nous déduisons que π_1 est également continue.

□

7.228 ([266]).
Si V est normé, il existe une façon plus directe (mais pas spécialement plus simple) de prouver l'implication (1) ⇒ (2), et en particulier la continuité de s^{-1}. Voyez 10.93.

Si V est de Banach, la continuité de s^{-1} peut venir du théorème d'isomorphisme de Banach 27.1 parce que s est une bijection continue entre espaces de Banach. Attention toutefois à vérifier que V/V_1 est de Banach[103].

COROooJHSGooUkGepQ

Corolaire 7.229 ([1]).
Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique de dimension finie est fermé.

7.10.2.2 Limite dans un espace vectoriel topologique

LEMooAHIGooJhpPvo

Lemme 7.230 (Changement de variables).
Soient un espace vectoriel topologique[104] X *ainsi qu'un espace séparé* Y *et une application* $f\colon X \to Y$. *Nous supposons que* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. *Alors* $\lim_{x\to b} f(x+a-b)$ *existe et vaut* ℓ.

Démonstration. Soit un voisinage V de ℓ dans Y. Il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subset V$. Nous posons $U' = U - a + b$. C'est un voisinage de b. En posant $g(x) = f(x+a-b)$ nous avons

$$g(U') = f(U - a + b + a - b) = f(U) \subset V. \tag{7.217}$$

Donc $\lim_{x\to b} g(x) = \ell$. C'est cette égalité qui signifie $\lim_{x\to b} f(x+a-b)$. □

PROPooXWNDooGHDXTa

Proposition 7.231 ([1]).
Soient un espace vectoriel topologique X, *un espace topologique* Y *et une application* $f\colon X \to Y$. *Si*

$$\lim_{x\to b} f(a+x) = l, \tag{7.218}$$

EQooMUQJooLClnMP

alors $\lim_{x\to a+b} f(x)$ *existe et vaut* l.

[102] Voir la définition 7.69.
[103] Je ne l'ai pas fait, et au doigt mouillé je dirais que ça m'étonnerais que ce soit vrai pour tout choix de sous-espace vectoriel V_1. À vos risques et périls. Écrivez-moi si vous avez une idée.
[104] Définition 7.219.

Démonstration. Soit un voisinage V de l. Nous devons prouver qu'il existe un voisinage U de $a+b$ tel que $f(U)\subset V$. Par (7.218), il existe un voisinage U' de b tel que $f(a+u)\in V$ pour tout $u\in U'$. La partie $U=U'+a$ est un voisinage de $a+b$ (parce que c'est un ouvert et qu'il contient $a+b$). Et si $x\in U$, alors $x=a+u$ pour un certain $u\in U'$. Nous avons $f(x)=f(a+u)\in V$.

Cela prouve que $f(U)\subset V$ comme nous le voulions. □

PROPooFGWXooFjvTYj

Proposition 7.232 (Limite de fonction composée[267]).
Soient des fonctions $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{y\to l} f(y)=z \tag{7.219a}$$

$$\lim_{x\to a} g(x)=l. \tag{7.219b}$$

Nous supposons qu'il existe un intervalle ouvert I contenant l tel que $g(x)\neq l$ sur $I\setminus\{a\}$.

Alors

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=\lim_{y\to l} f(y)=z. \tag{7.220}$$

PROPooKNVHooXlQyVA

Proposition 7.233 (Limite de fonction composée[267]).
Soient des fonctions $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{y\to l} f(y)=z \tag{7.221a}$$

$$\lim_{x\to a} g(x)=l. \tag{7.221b}$$

Nous supposons que f est continue en l.

Alors

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=\lim_{y\to l} f(y)=z. \tag{7.222}$$

PROPooBEHTooBrLWuh

Proposition 7.234.
Toute application linéaire entre espaces vectoriels topologiques de dimension finie est continue.

7.10.3 Corps topologique

DEFooWKLOooPdsxQl

Définition 7.235 (Anneau topologique[268]).
*Un **anneau topologique** est un anneau*[105] *muni d'une topologie dans laquelle l'addition et la multiplication sont continues*[106].

PROPooAWAKooKRmbGT

Proposition-Définition 7.236.
Si $(\mathbb{K},|.|)$ est un corps totalement ordonné avec sa valeur absolue usuelle[107]*, alors l'application*

$$\begin{aligned} d\colon\mathbb{K}\times\mathbb{K}&\to\mathbb{R}^+\\ (x,y)&\mapsto|x-y| \end{aligned} \tag{7.223}$$

est une distance[108].

Un corps valué muni de sa topologie métrique[109] *est un corps topologique*[110].

Démonstration. Il s'agit des différentes propriétés du lemme 1.114. □

7.10.4 Voisinage symétrique et équilibré

DEFooKBMAooAhYQAm

Définition 7.237 (Partie symétrique[263]).
*Une partie U d'un espace vectoriel topologique est **symétrique** si $x\in U$ implique $-x\in U$.*

DEFooPNRIooEFAlii

Définition 7.238 (Partie équilibrée[263]).
*Une partie U d'un espace vectoriel topologique V est **équilibrée** si pour tout $|\alpha|\leqslant 1$ dans $\mathbb{K}$, $\alpha U\subset U$.*

[105] Définition 1.92.
[106] Définition 7.45(2).
[107] Définition 1.113.
[108] Distance, définition 7.139.
[109] Définition 7.142.
[110] Définition 7.235.

DEFooMNZJooSIAVGZ

Définition 7.239 (Partie absorbante[269]).
*Soit un espace vectoriel X. Une partie U est **absorbante** si pour tout $x \in X$, il existe $\rho_x > 0$ tel que $\lambda x \in U$ pour tout $|\lambda| \leqslant \rho_x$.*

DEFooYSWJooPkcrJe

Définition 7.240 (Partie absolument convexe).
*Une partie est **absolument convexe** si elle est convexe et équilibrée.*

LEMooXKOTooLWDXhp

Lemme 7.241.
Si A est équilibré ou absorbant, alors $0 \in A$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Si A est équilibré** Pour tout $|\alpha| < 1$, nous avons $\alpha A \subset A$. En particulier pour $\alpha = 0$ nous voyons que $0 \in A$.

(2) **Si A est absorbant** Si $x \in X$, alors il existe ρ tel que $\lambda x \in A$ pour tout $|\lambda| < \rho$. En particulier avec $\lambda = 0$ nous avons encore $0 \in A$.

□

LEMooEEKYooVCnBMq

Lemme 7.242 ([270]).
Dans un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tout ouvert contenant 0 est absorbant[111].

Démonstration. Soient un ouvert U contenant 0 et $x_0 \in X$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} m\colon \mathbb{K} \times X &\to X \\ (t, x) &\mapsto tx \end{aligned} \tag{7.224}$$

qui est continue par définition 7.219. La partie $m^{-1}(U) \subset \mathbb{K} \times X$ est un ouvert contenant $(0, x_0)$. Par définition 7.63 de la topologie produit, il existe un $r > 0$ et un ouvert B de X contenant x_0 tels que

$$(0, x_0) \in B(0, r) \times B \subset m^{-1}(U). \tag{7.225}$$

Si $\lambda < r$, alors nous avons

$$\lambda x_0 = m(\lambda, x_0) \in m\big(B(0, r), B\big) \subset U. \tag{7.226}$$

□

LEMooKBRIooUAAPXV

Lemme 7.243.
Si A est équilibré et si $\xi \neq 0$ (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors

$$\xi A = |\xi| A \tag{7.227}$$

Démonstration. Vu que le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe $s \in \mathbb{K}$ tel que $|s| = 1$ et $\xi = s|\xi|$ (prendre $s = \xi/|\xi|$). Vu que $|s| = 1$ et que A est équilibré, $sA \subset A$ et donc $\xi A = s|\xi|A \subset |\xi|A$.

Pour l'inclusion dans l'autre sens, nous savons que $|s^{-1}| = 1$ et donc que $|\xi|A = s^{-1}\xi A \subset \xi A$. □

LEMooYSWXooNqAcOQ

Lemme 7.244 ([263, 1]).
Soit un espace vectoriel topologique.

ITEMooSWWQooTreWIE

(1) Soit un ouvert A autour de 0 dans l'espace vectoriel topologique V. Il existe $\delta > 0$ dans le corps $\mathbb{K}$ et un voisinage ouvert W de 0 tel que $\lambda W \subset A$ pour tout $|\lambda| < \delta$.

ITEMooXZNHooGVplpu

(2) Tout voisinage de 0 contient un ouvert équilibré.

ITEMooRLVSooGihcLc

(3) Tout voisinage de 0 contient un ouvert équilibré et symétrique.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Nous savons que $0 \cdot 0 = 0$ et que l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{K} \times V &\to V \\ \lambda, x &\mapsto \lambda x \end{aligned} \tag{7.228}$$

[111] Définition 7.239.

est continue. La partie $f^{-1}(A)$ contient $(0,0)$. Il existe donc un voisinage ouvert S de 0 dans $\mathbb{K}$ et un voisinage ouvert W de 0 dans V tel que $S \times W \subset f^{-1}(A)$.

Puisque $\mathbb{K}$ est un corps dont la topologie est métrique[112], il existe une boule $S' = B(0,\delta) \subset S$.

Donc nous avons $f(S' \times W) \subset A$ et pour tout $|\lambda| < \delta$, $\lambda W \subset A$.

(2) **Pour (2)** Soit un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de 0 dans V. Par le point (1), nous considérons un voisinage W de 0 et un $\delta > 0$ tel que $\lambda W \subset \mathcal{O}$ pour tout $|\lambda| < \delta$.

Nous posons

$$U = \{\lambda w < \text{ tel que } |\lambda| < \delta, w \in W\}. \tag{7.229}$$

Nous avons $U \subset \mathcal{O}$ par définition de W. De plus U est équilibré parce que si $|\mu| < 1$, et si $x \in U$, il existe $|\lambda| < \delta$ et $w \in W$ tels que $x = \lambda w$. Alors $\mu x = \mu\lambda w$. Nous avons $|\mu\lambda| < \delta$ et donc $\mu\lambda w \in U$.

(3) **Pour (3)** Nous considérons U équilibré comme dans (2). Ensuite nous posons $U' = U \cap (-U)$. La partie U' est symétrique, elle est ouverte (intersection d'ouverts). Et elle est équilibrée parce que si $x \in U'$ et $|\lambda| < 1$ alors :

- $x \in U$ et U est équilibré, donc $\lambda x \in U$.
- $x \in -U$ et U est équilibré, donc il existe $y \in U$ tel que $x = -y$. Pour ce y nous avons $\lambda y \in U$ et donc $\lambda x = -\lambda y \in -U$. Donc $\lambda x \in -U$.
- Au final, $\lambda x \in U \cap (-U) = U'$ et U' est équilibré.

□

LEMooQEFRooHAxOys

Lemme 7.245 ([271]).
Soit un espace vectoriel topologique V ainsi qu'un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de 0 dans V. Il existe des voisinages ouverts U_1 et U_2 de 0 dans V tels que

$$U_1 + U_2 \subset \mathcal{O}. \tag{7.230}$$

Démonstration. Par définition d'un espace vectoriel topologique, l'application

$$\begin{aligned} f\colon V \times V &\to V \\ x, y &\mapsto x + y \end{aligned} \tag{7.231}$$

est continue. Donc la partie $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $V \times V$ (c'est la définition 7.45(2) de la continuité). La définition 7.63 de la topologie produit, appliquée au point $(0,0) \in V \times V$ implique qu'il existe des voisinages U_1 et U_2 de 0 dans V tels que

$$U_1 \times U_2 \subset f^{-1}(\mathcal{O}). \tag{7.232}$$

Donc $f(U_1 \times U_2) \subset \mathcal{O}$ et en particulier $U_1 + U_2 \subset \mathcal{O}$. □

PROPSommeTopologique

Proposition 7.246 ([263, 1]).
Soit V un espace vectoriel topologique, et $\mathcal{O}$ un voisinage ouvert de 0. Il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que

(1) U est symétrique[113],

(2) U est équilibré[114]

(3) U vérifie $U + U \subset \mathcal{O}$.

(4) U vérifie $U + U + U + U \subset \mathcal{O}$.

Démonstration. En plusieurs petits pas.

(1) **Le point de départ** Le lemme 7.245 donne des voisinages ouverts U_1 et U_2 de 0 dans V tels que $U_1 + U_2 \subset \mathcal{O}$.

(2) **Symétrique** En posant $U' = U_1 \cap U_2 \cap (-U_1) \cap (-U_2)$, on a un sous-ensemble symétrique de U_1 et U_2 qui vérifie $U' + U' \subset U_1 + U_2 \subset \mathcal{O}$. De plus U' est encore un voisinage ouvert de 0 dans V.

(3) **équilibré** C'est le moment d'utiliser le lemme 7.244. La partie U' contient un voisinage ouvert U'' de 0 qui est symétrique et équilibré. Ce U'' vérifie encore $U'' + U'' \subset \mathcal{O}$.

[112] Le corps $\mathbb{K}$ est un corps valué, et donc métrique par la définition 7.236.
[113] Définition 7.237.
[114] Définition 7.238.

(4) **En 4 parties** Maintenant nous ré-appliquons tout ce que nous venons de faire à U'' pour obtenir un voisinage symétrique et équilibré de 0 tel que $U+U\subset U'$. Nous avons alors $U+U+U+U\subset\mathcal{O}$.

Notons que ce U vérifie à fortiori $U+U\subset\mathcal{O}$.

□

LEMooKLOKooEfKhgN

Lemme 7.247 ([269, 272]).
Soit une partie B d'un espace vectoriel topologique.

(1) Si B est équilibré, alors la fermeture $\bar{B}$ est équilibrée.

ITEMooLZZEooAqoQVO

(2) Si B est équilibré et si $0\in\mathrm{Int}(B)$, alors $\mathrm{Int}(B)$ est équilibré.

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

7.10.5 Espace topologique localement convexe

DefPJokvAa

Définition 7.248 ([269]).
*Un espace topologique est **localement convexe** il admet une base de voisinages de l'origine dont les éléments sont des parties convexes.*

PROPooCZJGooRlyEOV

Proposition 7.249 ([273]).
Soit un espace topologique X. Nous avons équivalence entre les points suivants :

(1) X est localement convexe[115]*.*

(2) Pour tout ouvert U de X, les composantes connexes de U sont des ouverts de X.

(3) Les ouverts connexes forment une base des ouverts de E.

LEMooWGOCooHSoCzb

Lemme 7.250 ([274]).
Soit un espace topologique localement connexe X. Soient un fermé F de X, et D, une composante connexe de $X\setminus F$. Alors la frontière de D est dans F :

$$\partial D\subset F. \tag{7.233}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **∂D est fermé** Par définition, $\partial D=\bar{D}\setminus D$. Utilisant 1.44(5) nous écrivons

$$X\setminus\partial D=(X\setminus\bar{D})\cap D. \tag{7.234}$$

Vu que $\bar{D}$ est fermé, $X\setminus\bar{D}$ est ouvert. De plus D est ouvert par la proposition 7.249. Donc $X\setminus\partial D$ est ouvert.

(2) **Par l'absurde** Supposons qu'il existe $p\in\partial D\setminus F$. Vu que F est fermé, il existe $r>0$ tel que $B(p,r)\cap F=\varnothing$. Étant donné que $p\in\partial D$, tout voisinage de p contient un point de D : il existe $x\in B(p,r)\cap D$.

Donc $B(p,r)$ et D sont des ouverts connexes qui ont une intersection non vide. La proposition 7.107 nous indique que $D\cup B(p,r)$ est un ouvert connexe strictement plus grand que D.

Cela contredit la maximalité de D en tant que composante connexe.

□

PROPooOAXHooOGhRbu

Proposition 7.251 ([269]).
Un espace vectoriel topologie localement convexe a une base de voisinage constituée d'éléments qui sont :

(1) ouverts

(2) absorbants

(3) convexes

(4) équilibrés

[115] Définition 7.248.

Démonstration. Soit un voisinage N de 0 dans l'espace vectoriel topologique X. Vu que X est localement convexe, il existe un voisinage convexe W de 0 contenu dans N. Par le lemme 7.244, W contient un ouvert équilibré U. Nous considérons enfin l'enveloppe convexe $S = \mathcal{C}\text{onv}(U)$ de U, et nous montrons que l'intérieur $\text{Int}(S)$ vérifie tout ce qu'il faut.

ouvert Parce que c'est un intérieur.

convexe L'intérieur d'un convexe est convexe par le lemme 7.211.

absorbant Tout ouvert contenant 0 est absorbant par le lemme 7.242

contient 0 La partie U contient 0 parce qu'elle est équilibrée et le lemme 7.241. Vu que U est ouvert, il contient un voisinage de tout ses points. Donc 0 est dans l'intérieur de U. Il est donc également dans l'intérieur de son enveloppe convexe.

équilibré Par le lemme 7.247(2) parce que c'est un ouvert contenant 0.

contenu dans N Nous avons les inclusions $U \subset W \subset N$. Étant donné que W est convexe, nous avons aussi $\mathcal{C}\text{onv}(U) \subset W$, et donc

$$\text{Int}(S) \subset S = \mathcal{C}\text{onv}(U) \subset W \subset N. \tag{7.235}$$

□

THOooPTLOooJLaHGE

Théorème 7.252 ([269]).
Soit un espace vectoriel topologique localement convexe[116]*. Il existe une base de voisinages $\mathcal{B}$ de 0 tels que :*

(1) les éléments sont absorbants et absolument convexes[117]*.*

(2) pour tout $A, B \in \mathcal{B}$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subset A \cap B$,

(3) pour tout $A \in \mathcal{B}$, et pour tout $\rho > 0$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subset \rho A$.

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

Voici une réciproque du théorème 7.252.

THOooKNXGooEebnxI

Théorème 7.253 ([269]).
Soit en espace vectoriel X et une collection $\mathcal{B}$ de parties de X vérifiant

(1) les éléments sont absorbants et absolument convexes.

(2) pour tout $A, B \in \mathcal{B}$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subset A \cap B$,

(3) pour tout $A \in \mathcal{B}$, et pour tout $\rho > 0$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subset \rho A$.

Alors il existe une unique topologie τ sur X telle que

(1) τ est compatible avec la structure vectorielle de X,

(2) (X, τ) est localement convexe

(3) la collection $\mathcal{B}$ est une base de voisinages de 0

PROPooUQLUooDQfYLT

Proposition 7.254.
Soit un espace vectoriel normé[118] *$(V, \|.\|)$. Pour tout $a \in V$ et $r > 0$, la boule $B(a, r)$ est convexe*[119]*. La boule fermée $\overline{B(a, r)}$ également.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **La boule centrée en zéro** Soient $x, y \in B(0, r)$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leqslant |\lambda|\|x\| + |1-\lambda|\|y\| < (|\lambda| + |1-\lambda|)r \leqslant r \tag{7.236}$$

où nous avons utilisé le fait que $|\lambda| = \lambda$ et $|1-\lambda| = 1-\lambda$.

Cela prouve que $\lambda x + (1-\lambda)y \in B(0, r)$. Notez l'inégalité stricte due au fait que $\|x\| < r$ et $\|y\| < r$. Dans le cas de la boule fermée, nous avons une inégalité large.

[116] Définition 7.248.
[117] Absolument convexe : convexe et équilibrée.
[118] Définition 7.212.
[119] Définition 7.208.

(2) **La boule centrée autre part**

Soient $x, y \in B(a,r)$. Alors $x-a$ et $y-a$ sont dans $B(0,r)$, de telle sorte que

$$\lambda(x-a)+(1-\lambda)(y-a) \in B(0,r) \tag{7.237}$$

par la première partie. En développant et simplifiant,

$$\lambda x+(1-\lambda)y-a \in B(0,r), \tag{7.238}$$

ce qui signifie que $\lambda x+(1-\lambda)y \in B(a,r)$.

□
PROPooBVWIooZocheH

Proposition 7.255.
Tout espace métrique est localement convexe[120].

Démonstration. Les boules ouvertes forment une base de topologie par 7.143. La proposition 7.254 dit que ces boules sont convexes. □

7.10.6 Limite de suites

7.256.
Si (x_n) est une suite dans un espace vectoriel topologique, rien ne garantit qu'elle ait une limite, ni qu'elle soit unique. Donc lorsque nous écrivons

$$x_n \xrightarrow{V} x, \tag{7.239}$$

nous sous-entendons seulement que x est une limite.

De même, dans la proposition 7.260, nous montrerons que $x_n+y_n \xrightarrow{V} x+y$ et $\lambda x_n \xrightarrow{V} \lambda x$. Cela signifie que si x et y sont des limites de (x_n) et (y_n), alors $x+y$ est une limite de (x_n+y_n) et que λx est une limite de (λx_n).

Si V est un espace vectoriel topologique dans lequel il n'y a pas unicité de la limite[121], nous ne pouvons pas exactement dire que le processus de limite est une opération linéaire sur l'ensemble des suites convergentes.
PROPooTJQPooMHtOAv

Proposition 7.257 ([1])**.**
Soit une suite (x_k) dans l'espace vectoriel topologique X. L'élément x est une limite de (x_k) si et seulement si 0 est une limite de $(x-x_k)$.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Supposons que x est une limite de (x_k). Soit un ouvert $\mathcal{O}$ autour de 0. La partie $\mathcal{O}+x$ est un ouvert autour de x (proposition 7.257). Donc il existe N tel que si $n \geqslant N$, alors $x_n \in \mathcal{O}+x$. Pour ces valeurs de n nous avons $x_n - x \in \mathcal{O}$.

(2) $\Leftarrow$ Soit un ouvert $\mathcal{O}$ autour de x. La partie $\mathcal{O}-x$ est un ouvert autour de 0. À partir de là la preuve fonctionne comme dans l'autre sens.

□
PROPooQIQSooHbNkIy

Proposition 7.258 ([1])**.**
Soient deux suites (x_k) et (y_k) dans l'espace vectoriel topologique X. Si x est une limite[122] *de (x_k) et si y est une limite de (y_k), alors $x+y$ est une limite de (x_k+y_k).*

Démonstration. En deux parties

(1) **Le cas $x=y=0$** Nous commençons avec $x=y=0$. Soit un ouvert A autour de 0. La proposition 7.246 nous permet de considérer un voisinage U de 0 tel que $U \subset A$ et $U+U \subset A$.

Vu que 0 est une limite de (x_k), il existe N tel que $x_n \in U$ pour tout $b \geqslant N$. Quitte à prendre le maximum, nous supposons aussi que $y_n \in U$ pour $n \geqslant N$. Avec ça, $x_n+y_n \in U+U \subset A$. Cela montre que 0 est une limite de (x_k+y_k).

[120] Définition 7.248.
[121] La proposition 7.82 dit qu'il y a unicité de la limite dans les espaces topologiques séparés.
[122] Limite de suite, définition 7.14.

(2) **Le cas général** Nous supposons que x est une limite de (x_k) et que y est une limite de (y_k). La proposition 7.257 nous dit que 0 est une limite de $x - x_k$ et de $y - y_k$. La première partie dit alors que 0 est une limite de

$$k \mapsto x - x_k + y - y_k = x_k + y_k - (x + y). \tag{7.240}$$

La proposition 7.257, prise dans l'autre sens nous dit alors que $x + y$ est une limite de $k \mapsto x_k + y_k$.

□

LEMooJDJVooHUKdSe

Lemme 7.259.
Soient un espace vectoriel topologique V ainsi qu'une suite (x_n) dans V. Nous avons

$$x_n \xrightarrow{V} x \tag{7.241}$$

si et seulement si

$$x_n - x \xrightarrow{V} 0. \tag{7.242}$$

Dans la proposition 7.260, nous considérons un espace vectoriel topologique. Il n'y a pas de produit. Pour la convergence

$$x_k y_k \xrightarrow{xy}, \tag{7.243}$$

voir la proposition 9.28.

PROPooZRCBooKiJhDg

Proposition 7.260 ([1])**.**
Soit V, un espace vectoriel topologique. Soient deux suites convergentes $x_n \xrightarrow{V} x$ et $y_n \xrightarrow{V} y$ ainsi que $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

ITEMooSHPAooQyEkgT

(1)

$$x_n + y_n \xrightarrow{V} x + y. \tag{7.244}$$

ITEMooYHHYooYATzWE

(2)

$$\lambda x_n \xrightarrow{V} \lambda x. \tag{7.245}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) **(1)** Nous allons montrer que $x_n + y_n - (x + y) \xrightarrow{V} 0$; ce sera suffisant par le lemme 7.259.

Soit un ouvert $\mathcal{O}$ autour de 0. Soient des ouverts U_1 et U_2 autour de 0 tels que $U_1 + U_2 \subset \mathcal{O}$ (lemme 7.245).

Vues les convergences de (x_n) et de (y_n), il existe un N tel que $n \geqslant N$ implique $x_n - x \in U_1$ et $y_n - y \in U_2$. Dans ce cas, $x_n + y_n - (x + y) \in U_1 + U_2 \subset \mathcal{O}$.

Donc pour $n \geqslant N$ nous avons bien $x_n - y_n - (x + y) \in \mathcal{O}$, ce qui signifie que $x_n + y_n \xrightarrow{V} x + y$.

(2) **(2)** En plusieurs étapes.

(2a) $x_n - x \xrightarrow{V} 0$ C'est le lemme 7.259.

(2b) $\lambda x_n - \lambda x \xrightarrow{V} 0$ Soit un ouvert $\mathcal{O}$ autour de 0. Par le lemme 7.222, il existe un ouvert U autour de 0 tel que $\lambda U \subset \mathcal{O}$. Comme $x_n - x \xrightarrow{V} 0$, il existe N tel que $n \geqslant N$ implique $x_n - x \in U$. Pour ces N et n nous avons aussi $\lambda(x_n - x) \in \lambda U \subset \mathcal{O}$. Nous avons donc démontré que $\lambda x_n - \lambda x \xrightarrow{V} 0$.

(2c) **Conclusion** Encore le lemme 7.259 nous permet de déduire que $\lambda x_n \xrightarrow{V} \lambda x$.

□

7.11 Applications continues

7.11.1 Continuité

La définition de la continuité d'une fonction est donnée en 7.45.

7.261.
Lorsque nous écrivons $f\colon X \to Y$, nous entendons que f est définie sur tout X, mais pas qu'elle soit surjective sur Y. En particulier, pour que f soit continue en a, il faut que a soit dans le domaine de définition de f.

Dans le cas de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'espace X sera la partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle f sera définie, et la topologie sera la topologie induite de $\mathbb{R}$.

PROPooOXBCooIzLaPe

Proposition 7.262 ([275]).
Soient deux espaces topologiques X et Y. Une application $f\colon X \to Y$ est continue[123] *si et seulement si pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage*[124] *V de $f(x)$, la partie $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X.*

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Soient $x \in X$ et un voisinage V de $f(x)$ dans Y. Il existe alors un ouvert $\mathcal{O}$ de Y tel que $f(x) \in \mathcal{O} \subset V$.

La partie $f^{-1}(\mathcal{O})$ vérifie :

- $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X parce que f est continue.
- $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$
- $f^{-1}(\mathcal{O}) \subset f^{-1}(V)$.

Donc $f^{-1}(V)$ contient un ouvert contenant x. Donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X.

(2) $\Leftarrow$ Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de Y. Nous devons prouver que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X. Pour cela nous prouvons que $f^{-1}(\mathcal{O})$ contient un ouvert autour de chacun de ses éléments et utilisons le théorème 7.8.

Soit donc $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. La partie $\mathcal{O}$ est un voisinage de $f(x)$. Donc $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un voisinage de x. Il existe donc un ouvert V de X tel que

$$x \in V \subset f^{-1}(\mathcal{O}). \tag{7.246}$$

Nous en déduisons que $f^{-1}(\mathcal{O})$ contient bien un ouvert autour de chacun de ses points.

□

La proposition 7.351 donnera des détails sur ce qu'il se passe lorsque l'espace est métrique.

ThoESCaraB

Théorème 7.263.
Une fonction $f\colon X \to Y$ est une fonction continue si et seulement si elle est continue en chacun des points de X.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que f est une fonction continue. Soient $a \in X$ et W un voisinage de $f(a)$. Nous considérons $\mathcal{O}$, un voisinage ouvert de $f(a)$ contenu dans W ; l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{O})$ est alors un ouvert contenant a, et l'image de $f^{-1}(\mathcal{O})$ par f est bien entendu contenue dans W.

(2) $\Leftarrow$ Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de Y. Pour prouver que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X, nous allons considérer un élément $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$ et montrer qu'il existe un voisinage ouvert de a contenu dans $f^{-1}(\mathcal{O})$; le théorème 7.8 nous assurera alors que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert.

L'ensemble $\mathcal{O}$ est un voisinage ouvert de $f(a)$ parce que a a été choisi dans $f^{-1}(\mathcal{O})$. Donc la continuité de f en a nous assure qu'il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset \mathcal{O}$. En prenant un ouvert contenant a à l'intérieur de W nous avons un voisinage ouvert de a contenu dans $f^{-1}(\mathcal{O})$.

□

Remarque 7.264.
À cause de l'éventuelle non unicité de la limite, deux fonctions continues et égales sur un sous-ensemble dense ne sont pas spécialement égales. Ce sera vrai sur les espaces métriques et plus généralement pour les espaces séparés. Voir l'exemple 7.73 et la proposition 7.138.

[123] Définition 7.45.
[124] Définition 7.4

LEMooCQQWooVSAWiy

Lemme 7.265 ([1]).
Soient une fonction $f\colon X \to Y$, et un point d'accumulation $a \in X$[125]. La fonction f est continue en a si et seulement si $f(a)$ est une limite de f en a.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que f est continue en $a \in X$. Soit un ouvert V de Y contenant $f(a)$. Par continuité de f au point[126] a, il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subset V$. À fortiori, $f\big(U \setminus a\big) \subset W$ comme le demande la définition de la limite.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $f(a)$ est une limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a. Si W est un ouvert de Y contenant $f(a)$, il existe un voisinage V de a dans X tel que $f\big(V \setminus a\big) \subset W$. Mais puisque $f(a) \in W$, nous avons $f(V) \subset W$.

□

LEMooQFISooYWkzPR

Lemme 7.266 ([1]).
Soient des espaces topologiques X et Y ainsi qu'une application continue $f\colon X \to Y$. Soient

(1) $a \in X$ et $b = f(a) \in Y$.

(2) Un voisinage ouvert V de b dans Y.

Alors il existe un voisinage ouvert U de a tel que $f(U) \subset V$.

7.11.1.1 Composition

PROPooCNTBooTkOJuK

Proposition 7.267 (Composée d'application continues[1]).
Soient des espaces topologiques X, Y, Z ainsi que des applications continues $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$. Alors l'application $g \circ f\colon X \to Z$ est continue.

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de Z. Nous avons

$$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{O}) = (f^{-1} \circ g^{-1})(\mathcal{O}) = f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{O})\big). \tag{7.247}$$

Vu que f est continue, la partie $g^{-1}(\mathcal{O})$ est ouverte dans Y. Et comme f est continue, $f^{-1}\Big(g^{-1}(\mathcal{O})\Big)$ est ouvert dans X. □

7.11.2 Continuité et topologie induite

PROPooNPLBooPfmmym

Proposition 7.268 ([1]).
Soit une fonction $f\colon X \to Y$, continue sur l'ouvert A de X au sens où elle est continue en chaque point de A. Alors la fonction restriction $\tilde{f}\colon A \to Y$ est également continue pour la topologie sur A, induite[127] de X.

Démonstration. Soit $a \in A$, et montrons que $\tilde{f}$ est continue en a, c'est-à-dire que $\tilde{f}(a) = f(a)$ soit une limite de $\tilde{f}$ en a. Soit un voisinage V de $\tilde{f}(a)$ dans Y. Par la continuité de f, nous avons un ouvert W de X tel que

$$f\big(W \setminus \{a\}\big) \subset V. \tag{7.248}$$

La partie $W \cap A$ est un voisinage de a pour la topologie de A, et vérifie

$$f\big(W \cap A \setminus \{a\}\big) \subset V. \tag{7.249}$$

donc $f(a)$ est une limite de $\tilde{f}$ pour $x \to a$. La fonction $\tilde{f}\colon A \to Y$ est continue en chaque point de A. □

Au niveau de la notion de continuité, il n'y a pas trop de changements en passant de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite.

[125] Un point d'accumulation de X n'est pas spécialement dans X, si X est un sous-espace d'un autre. Par exemple 0 est un point d'accumulation de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$. Ici nous supposons que $a \in X$, sinon il n'y a de toute façon pas de continuité en a.
[126] Continuité en un point, définition 7.45(1).
[127] Définition 7.27.

EXooHWIIooYYbfGE

Exemple 7.269.
Que signifie d'être continue pour une fonction $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$? D'après le théorème 7.263, il s'agit d'être continue en chaque point de $\mathbb{Q}$. Il s'agit donc, par la définition 7.45 que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, le nombre $f(q)$ soit une limite de f pour $x \to q$.

L'espace d'arrivée étant $\mathbb{R}$, un voisinage de $f(q)$ est pris comme une boule de taille ϵ. La continuité de f exige qu'il y ait un voisinage W de q dans $\mathbb{Q}$ tel que pour tout $q' \in W$ (différent de q), $|f(q) - f(q')| < \epsilon$.

Qu'est-ce qu'un ouvert dans $\mathbb{Q}$? D'après la définition 7.27 de la topologie induite, ce sont les ensembles $\mathbb{Q} \cap \mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}$ ouvert dans $\mathbb{R}$. Tout cela pour dire que pour tout $\epsilon > 0$, il doit exister $\delta > 0$ tel que pour tout $q' \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < |q - q'| < \delta$, nous ayons $|f(q) - f(q')| < \epsilon$.

Bref, c'est exactement le mécanisme usuel de la continuité sur $\mathbb{R}$, sauf qu'il ne faut considérer que les rationnels. △

LEMooHAODooYSPmvH

Lemme 7.270 (Application partielle[1])**.**
Soient trois espaces topologiques X_1, X_2 et Y. Nous considérons une fonction continue $f\colon X_1 \times X_2 \to Y$ ainsi que $x_1 \in X_1$. Alors l'application

$$\begin{aligned} g\colon X_2 &\to Y \\ x_2 &\mapsto f(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{7.250}$$

est continue.

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de Y ; par hypothèse sur f, la partie $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouverte dans $X_1 \times X_2$. Notre but est de prouver que $g^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X_2. Nous avons :

$$g^{-1}(\mathcal{O}) = \{x_2 \in X_2 \text{ tel que } (x_1, x_2) \in f^{-1}(\mathcal{O})\}. \tag{7.251}$$

Nous considérons $x_2 \in g^{-1}(\mathcal{O})$ et nous prouvons qu'il existe dans X_2 un voisinage de x_2 entièrement contenu dans $g^{-1}(\mathcal{O})$.

Étant donné que (x_1, x_2) est dans $f^{-1}(\mathcal{O})$ qui est ouvert, la définition 7.63 de la topologie sur $X_1 \times X_2$ nous donne des ouverts A_1 dans X_1 et A_2 dans X_2 tels que

$$(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2 \subset f^{-1}(\mathcal{O}). \tag{7.252}$$

Nous montrons à présent que $A_2 \subset g^{-1}(\mathcal{O})$. Soit $y_2 \in A_2$. Par construction $(x_1, y_2) \in A_1 \times A_2 \subset f^{-1}(\mathcal{O})$, donc

$$g(y_2) = f(x_1, y_2) \in \mathcal{O}. \tag{7.253}$$

Cela termine la démonstration. □

7.11.3 Continuité et connexité

PropConnexiteViaFonction

Proposition 7.271.
Un espace topologique X est connexe si et seulement si toute application continue[128] *$X \to \mathbb{Z}$ est constante.*

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Soit une fonction continue $f\colon X \to \mathbb{Z}$. Supposons qu'elle ne soit pas constante. Nous allons en déduire que X n'est pas connexe. En effet supposons que $f(a) = u$ et $f(b) = v$ avec $u \neq v$. Nous posons

$$\begin{aligned} A &= f^{-1}(u) \\ B &= X \setminus A. \end{aligned} \tag{7.254}$$

La partie A est ouverte parce que $\{u\}$ est ouvert dans $\mathbb{Z}$. La partie B est également ouverte parce que c'est une union d'ouverts : $B = \bigcup_{n \neq u} f^{-1}(n)$. La parie A contient a, et B contient b.

Voilà. Ce sont deux parties ouvertes non vides, disjointes qui recouvrent X. Donc X n'est pas connexe.

(2) $\Leftarrow$ Encore par l'absurde nous supposons que X n'est pas connexe. Soient deux ouverts A et B qui font ce qu'il faut. Alors en définissant

$$\begin{aligned} f\colon X &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B, \end{cases} \end{aligned} \tag{7.255}$$

nous avons une fonction continue non constante sur X à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

[128] La topologie sur $\mathbb{Z}$ est celle de l'ensemble des parties. C'est également la topologie induite de $\mathbb{R}$, mais ça n'a aucune importance pour l'instant.

□
NORMooSCAWooPFnrVj

7.272.
Pour mettre les idées au clair, dire qu'une partie A n'est pas connexe[129] signifie qu'il existe des ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ vérifiant
ITEMooRACDooKLaVXP

(1) $\mathcal{O}_i \cap A \neq \varnothing$
ITEMooNCQVooNjAYCT

(2) $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$
ITEMooPIHJooNJYpQo

(3) $A \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$.
LemConncontconn

Lemme 7.273.
L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Démonstration. Soit une application continue $f\colon X \to Y$ entre deux espaces topologiques.

Nous allons prouver la contraposée. Soit A une partie de Y telle que $f(A)$ ne soit pas connexe. Nous allons prouver que A elle-même n'est pas connexe. Vu que $f(A)$ n'est pas connexe, il existe des ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ recouvrant $f(A)$ et intersecant tous deux A. Nous prouvons que A n'est pas connexe en considérant les parties $A_1 = f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $A_2 = f^{-1}(\mathcal{O}_2)$, et en vérifiant les propriétés de 7.272.

(1) **A_i est ouvert** Les parties A_i sont ouvertes parce qu'elles sont images inverses d'ouverts par une fonction continue (définition 7.45(2)).

(2) **Pour (1)** Nous devons prouver que $A_i \cap A \neq \varnothing$, c'est-à-dire qu'il existe un $x \in f^{-1}(\mathcal{O}_i) \cap A$.

Nous commençons par considérer $y \in \mathcal{O}_i \cap f(A)$. Nous avons d'une part $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(\mathcal{O}_i) = A_i$. D'autre part, vu que $y \in f(A)$, nous avons $f^{-1}(y) \cap A \neq \varnothing$. Nous prenons donc $x \in f^{-1}(y) \cap A$.

Ce x vérifie $x \in f^{-1}(y) \cap A \subset A_i \cap A$.

(3) **Pour (2)** Si $x \in f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2)$, alors $f(x) \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont disjoints. Il n'y a donc pas d'éléments dans l'intersection de $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et de $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$.

(4) **Pour (3)** Si $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ ne recouvrent pas A, il existe un x dans A qui n'est dans aucun des deux. Dans ce cas, $f(x)$ est dans $f(A)$, mais n'est ni dans $\mathcal{O}_1$, ni dans $\mathcal{O}_2$, ce qui contredirait le fait que ces deux derniers recouvrent $f(A)$.

Nous déduisons que A n'est pas connexe. Et donc le lemme. □

Une application de ce lemme sera le théorème des valeurs intermédiaires 9.95.

Exemple 7.274.
Les espaces topologiques $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. △

Démonstration. Supposons par l'absurde que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ soit un homéomorphisme. Nous posons $E = f\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$ et $z_0 = f(0)$. Puisque f est bijective nous avons

$$E = \mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\}, \tag{7.256}$$

qui est connexe.

Comme E est connexe et que f^{-1} est continue, le lemme 7.273 nous dit que $f^{-1}(E)$ est connexe. Mais par définition, $f^{-1}(E) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui n'est pas connexe. □

7.11.4 Continuité et compacité

La proposition 7.347 dira que l'image d'un compact par une application continue est compacte. Nous démontrons ici en général.
ThoImCompCotComp

Théorème 7.275.
L'image d'un compact[130] *par une fonction continue est un compact.*

[129] Connexe, définition 7.102.
[130] Définition 7.109.

Démonstration. Soit $K \subset X$, un ensemble compact, et étudions $f(K)$; en particulier, nous considérons Ω, un recouvrement de $f(K)$ par des ouverts. Nous avons

$$f(K) \subseteq \bigcup_{\mathcal{O}\in\Omega} \mathcal{O}. \tag{7.257}$$

Par construction, nous avons aussi

$$K \subseteq \bigcup_{\mathcal{O}\in\Omega} f^{-1}(\mathcal{O}), \tag{7.258}$$

en effet, si $x \in K$, alors $f(x)$ est dans un des ouverts de Ω, disons $f(x) \in \mathcal{O}$, et évidemment, $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Les $f^{-1}(\mathcal{O})$ recouvrent le compact K, et donc on peut en choisir un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire un choix de $\{f^{-1}(\mathcal{O}_1), \dots, f^{-1}(\mathcal{O}_n)\}$ tels que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(\mathcal{O}_i). \tag{7.259}$$

Dans ce cas, nous avons

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i, \tag{7.260}$$

ce qui prouve la compacité de $f(K)$. □

7.11.5 Distance uniforme

PROPooNSCCooJuqOQe

Proposition 7.276 ([276]).
Soient un compact K et un espace métrique[131] *(E, d). Nous notons $C(K, X)$ l'ensemble des applications continues*[132] *de K vers X. Alors l'application*

$$\begin{aligned} d_\infty \colon C(K,E) \times C(K,E) &\to \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto \sup_{x\in K} d\big(f(x), g(x)\big) \end{aligned} \tag{7.261}$$

est une distance.

7.11.6 Continuité de la réciproque sur un compact

LEMooNEEVooSeHYzx

Lemme 7.277.
Soit un espace compact K et un espace topologique séparé X. Si $f \colon K \to X$ est une bijection continue, alors f est un isomorphisme d'espaces topologiques.

LEMooPLGTooATIGov

Lemme 7.278 ([277]).
Soit une application continue et bijective $f \colon K \to X$ où K est compact et X est métrique. Alors la réciproque $f^{-1} \colon X \to K$ est continue.

Démonstration. Nous allons montrer que si F est fermé dans K, alors $(f^{-1})^{-1}(F)$ est fermé dans X. Le lemme 7.49 conclura. Si F est fermé dans K, alors F est compact (lemma 7.121(1)). Le théorème 7.275 dit que l'image d'un compact par une application continue est compacte. Donc $f(F)$ est compact dans X. Mais comme X est métrique, tout compact est fermé (lemme 7.121(2)). Bref, $f(F)$ est fermé. □

LEMooKSDKooDbKKeB

Lemme 7.279 ([1]).
Soit un espace vectoriel normé V ainsi qu'une application continue $f \colon [a, b] \to V$. Nous supposons que $f \colon [a, b[\to V$ est injective.

Alors en posant $S = f\big([a, b[\big)$, l'application réciproque

$$f^{-1} \colon S \to [a, b[\tag{7.262}$$

est continue.

Démonstration. Pour tout $x \in [a, b]$ nous notons $V_x = f\big([a, x]\big)$.

Par hypothèse d'injectivité, l'existence de f^{-1} sur V_b est assurée. En ce qui concerne sa continuité, pour chaque $x \in]a, b[$, l'application $f \colon [a, x] \to V_x$ vérifie le lemme 7.278. Donc l'application réciproque $f^{-1} \colon V_x \to [a, x]$ est continue.

[131] Définition 7.139.
[132] Pour la topologie métrique 7.142.

Le théorème 7.263 dit alors que l'application f^{-1} est donc continue en chaque point de V_x pour tout $a < x < b$. Elle est donc continue en chaque point de $f\big([a,b[\big)$ parce que chacun de ces points est dans un V_x. Le théorème 7.263 (dans l'autre sens) montre alors que ${}^{-1}\colon S \to [a,b[$ est continue. □

7.11.7 Espace vectoriel topologique

PROPooHUWQooPWYBUu

Proposition 7.280 ([1]).
Soient un espace vectoriel topologique E et une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,V)$ où V est un espace vectoriel normé. Si f est bornée sur un voisinage de 0, alors f est continue.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **f est continue en 0** Nous vérifions la définition 7.45(1) d'une fonction continue en un point. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de V contenant $f(0) = 0$. Vu que V est normé, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset \mathcal{O}$. Comme f est bornée sur un voisinage de 0, nous pouvons considérer un voisinage U de 0 dans E tel que $f(U) \subset B(0,m)$. Si nous prenons $\delta < r/m$, alors

$$f\big(\delta U\big) = \delta f(U) \subset \delta B(0,m) = B(0,\delta m) = B(0,r) \subset \mathcal{O}. \tag{7.263}$$

Donc le voisinage δU[133] de 0 fait fonctionner la définition 7.45(1).

(2) **Continue partout** C'est la proposition 7.223.

□

7.12 Produit fini d'espaces vectoriels normés

sec_prod

Dans cette section nous parlons de produits finis d'espaces. Cela ne signifie pas que chacun des espaces soient séparément de dimension finie.

7.12.1 Distance et norme produit

DefZTHxrHA

Proposition-Définition 7.281 (Distance produit).
Si (E_1,d_1),..., (E_n,d_n) sont des espaces métriques alors la formule

$$d(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} d_i(x_i,y_i) \tag{7.264}$$

*définit une distance sur le produit cartésien $E = E_1 \times \dots \times E_n$. Elle est la **distance produit**.*

La définition de la norme sur un produit d'espaces vectoriels normés découle immédiatement de la définition de la distance 7.281 :

DefFAJgTCE

Lemme-Définition 7.282 ([278]).
Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si (v_1,w_1) et (v_2,w_2) sont des éléments de $V \times W$ et si λ est un élément de $\mathbb{K}$, alors les opérations suivantes donnent une structure d'espace vectoriel au produit $V \times W$:

- $(v_1,w_1) + (v_2,w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$
- $\lambda(v_1,w_1) = (\lambda v_1, \lambda w_1)$.

Démonstration. Il faut seulement faire les vérifications d'usage. □

LEMooFQMSooLmdIvD

Lemme-Définition 7.283 (Norme produit).
Soient deux espaces vectoriels normés V et W.

(1) L'opération

$$\|(v,w)\|_{V\times W} = \max\{\|v\|_V, \|w\|_W\}. \tag{7.265}$$

EqNormeVxWmax

est une norme[134] *sur $V \times W$.*

(2) La topologie de cette norme[135] *est la même que la topologie produit*[136] *sur $V \times W$.*

[133] C'est un voisinage par la proposition 7.221.
[134] Définition 7.212.
[135] Topologie associée à une norme : c'est la topologie associée à la distance correspondante, définition 7.218.
[136] Topologie produit, définition 7.63.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Norme** On doit vérifier les trois conditions de la définition 7.212.

- Soit (v,w) dans $V\times W$ tel que $\|(v,w)\|_{V\times W}=\max\{\|v\|_V,\|w\|_W\}=0$. Alors $\|v\|_V=0$ et $\|w\|_W=0$, donc $v=0_V$ et $w=0_W$. Cela implique $(v,w)=(0_v,0_w)=0_{V\times W}$.
- Pour tout a dans $\mathbb{R}$ et (v,w) dans $V\times W$, la norme $\|a(v,w)\|_{V\times W}$ se calcule de la façon suivante :

$$\|a(v,w)\|_{V\times W}=\max\{\|av\|_V,\|aw\|_W\}=|a|\max\{\|v\|_V,\|w\|_W\}=|a|\|(v,w)\|_{V\times W}. \tag{7.266}$$

- Soient (v_1,w_1) et (v_2,w_2) dans $V\times W$.

$$\begin{aligned}\|(v_1,w_1)+(v_2,w_2)\|_{V\times W}&=\max\{\|v_1+v_2\|_V,\|w_1+w_2\|_W\}\\&\leqslant\max\{\|v_1\|_V+\|v_2\|_V,\|w_1\|_W+\|w_2\|_W\}\\&\leqslant\max\{\|v_1\|_V,\|w_1\|_W\}+\max\{\|v_2\|_V,\|w_2\|_W\}\\&=\|(v_1,w_1)\|_{V\times W}+\|(v_2,w_2)\|_{V\times W}.\end{aligned} \tag{7.267}$$

(2) **Équivalence**

Dans cette preuve, nous considérons la « topologie de $V\times W$ » comme étant la topologie produit et « la topologie métrique de $V\times W$ » la topologie de la norme produit.

(2a) **Dans un sens** La définition 7.63 de la topologie produit dit qu'une prébase de $V\times W$ est donnée par

$$\big\{B(v,r)\times B(w,s)\text{ tel que }v\in V;w\in W;r,s>0\big\}. \tag{7.268}$$

Nous prouvons maintenant que la partie $S=B(v_0,r)\times B(w_0,s)$ est un ouvert de l'espace $\big(V\times W,\|.\|_{V\times W}\big)$. Pour cela nous prouvons que tout élément de S contient un voisinage métrique contenu dans S.

Soit $(v_1,w_1)\in S$. Nous posons

$$d\big((v_1,w_1),(v_0,w_0)\big)=\delta<\max\{r,s\}. \tag{7.269}$$

Nous considérons $\epsilon>0$ et nous montrons que si ϵ est assez petit, $B\big((v_1,w_1),\epsilon\big)\subset S$. Pour cela nous considérons $(v,w)\in B\big((v_1,w_1),\epsilon\big)$ et nous calculons un tout petit peu :

$$\begin{aligned}d\big((v,w),(v_0,w_0)\big)&\leqslant d\big((v,w),(v_1,w_1)\big)+d\big((v_1,w_1),(v_0,w_0)\big)&\text{(7.270a)}\\&<\epsilon+\delta.&\text{(7.270b)}\end{aligned}$$

Si ϵ est assez petit, le tout reste plus petit que $\max\{r,s\}$.

Donc S est bien un ouvert métrique par le théorème 7.8. Vu que la topologie métrique contient une prébase de la topologie produit, tout ouvert de la topologie produit est un ouvert de la topologie métrique.

(2b) **Dans l'autre sens** Soient un ouvert métrique $\mathcal{O}$ ainsi que $(v_0,w_0)\in\mathcal{O}$; il existe $r>0$ tel que

$$B\big((v_0,w_0),r\big)\subset\mathcal{O}. \tag{7.271}$$

Nous affirmons que $B(v_0,r)\times B(w_0,r)$ est contenu dans $\mathcal{O}$, de telle sorte que $\mathcal{O}$ soit un ouvert de la topologie produit. Pour $(v_1,w_1)\in B(v_0,r)\times B(w_0,r)$ nous avons

$$d\big((v_1,w_1),(v_0,w_0)\big)=\max\{\|v_1-v_0\|,\|w_1-w_0\|\}<r \tag{7.272}$$

parce que $v_1\in B(v_0,r)$ et $w_1\in B(w_0,r)$.

Donc tout élément de $\mathcal{O}$ admet un voisinage « produit » contenu dans $\mathcal{O}$; donc $\mathcal{O}$ est ouvert pour le topologie produit.

□

7.284.

En particulier, pour la topologie de la norme maximum, la convergence d'une suite implique la convergence « composante par composante » par la proposition 7.85.

On remarque tout de suite que la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ est la norme de l'espace produit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. En outre cette définition nous permet de trouver plusieurs nouvelles normes dans les espaces $\mathbb{R}^p$. Par exemple, si nous écrivons $\mathbb{R}^4$ comme $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ on peut munir $\mathbb{R}^4$ de la norme produit

$$\|(x_1,x_2,x_3,x_4)\|_{\infty,2}=\max\{\|(x_1,x_2)\|_\infty,\|(x_3,x_4)\|_2\}.$$

Les applications de projection de l'espace produit $V\times W$ vers les espaces «facteurs», V W sont notées $\mathtt{proj}_V$ et $\mathtt{proj}_W$ et sont définies par

$$\begin{aligned}\mathtt{proj}_V\colon V\times W&\to V\\(v,w)&\mapsto v\end{aligned}\tag{7.273}$$

et

$$\begin{aligned}\mathtt{proj}_W\colon V\times W&\to W\\(v,w)&\mapsto w.\end{aligned}\tag{7.274}$$

Les inégalités suivantes sont évidentes

$$\begin{aligned}\|\mathtt{proj}_V(v,w)\|_V&\leqslant\|(v,w)\|_{V\times W}\\\|\mathtt{proj}_W(v,w)\|_W&\leqslant\|(v,w)\|_{V\times W}.\end{aligned}\tag{7.275}$$

La topologie de l'espace produit est induite par les topologies des espaces «facteurs». La construction est faite en deux passages : d'abord nous disons que une partie $A\times B$ de $V\times W$ est ouverte si A et B sont des parties ouvertes de V et de W respectivement. Ensuite nous définissons que une partie quelconque de $V\times W$ est ouverte si elle est une intersection finie ou une réunion de parties ouvertes de $V\times W$ de la forme $A\times B$.

Ce choix de topologie donne deux propriétés utiles de l'espace produit

(1) Les projections sont des **applications ouvertes**. Cela veut dire que l'image par $\mathtt{proj}_V$ (respectivement $\mathtt{proj}_W$) de toute partie ouverte de $V\times W$ est une partie ouverte de V (respectivement W).
(2) Pour toute partie A de V et B de W, nous avons $\operatorname{Int}(A\times B)=\operatorname{Int}A\times\operatorname{Int}B$.[PgovlABeqbAbB]

Une propriété moins facile à prouver est que pour toute partie A de V et B de W nous avons $\overline{A\times B}=\bar{A}\times\bar{B}$. Voir la proposition 10.95.

Ce que nous avons dit jusqu'ici est valable pour tout produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels normés. En particulier, pour tout $m>0$ l'espace $\mathbb{R}^m$ peut être considéré comme le produit de m copies de $\mathbb{R}$.

Exemple 7.285.
Si V et W sont deux espaces vectoriels, nous pouvons considérer le produit $E=V\times W$. Les projections $\mathtt{proj}_V$ et $\mathtt{proj}_W$, définies dans la section 7.12, sont des applications linéaires.

En effet, la projection $\mathtt{proj}_V\colon V\times W\to V$ est donnée par $\mathtt{proj}_V(v,w)=v$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathtt{proj}_V\big((v,w)+(v',w')\big)&=\mathtt{proj}_V\big((v+v'),(w+w')\big)\\&=v+v'\\&=\mathtt{proj}_V(v,w)+\mathtt{proj}_V(v',w'),\end{aligned}\tag{7.276}$$

et

$$\mathtt{proj}_V\big(\lambda(v,w)\big)=\mathtt{proj}_V\big((\lambda v,\lambda w)\big)=\lambda v=\lambda\,\mathtt{proj}_V(v,w).\tag{7.277}$$

Nous laissons à la lectrice le soin d'adapter ces calculs pour montrer que $\mathtt{proj}_W$ est également une projection[137]. △

PropDXR_KbaLC

Proposition 7.286.
Si $\mathcal{O}$ est un voisinage de (a,b) dans $V\times W$ alors $\mathcal{O}$ contient un ouvert de la forme $B(a,r)\times B(b,r)$.

Démonstration. Puisque $\mathcal{O}$ est un voisinage, il contient un ouvert et donc une boule

$$B\big((a,b),r\big)=\{(v,w)\in V\times W\text{ tel que }\max\{\|v-a\|,\|w-b\|\}<r\}.\tag{7.278}$$

Évidemment l'ensemble $B(a,r)\times B(b,r)$ est dedans. □

CORooMWCUooKyoyZV

Corolaire 7.287.
Un espace vectoriel normé[138] est un espace vectoriel topologique : en d'autres mots, l'addition et la multiplication par un élément du corps sont continues.

[137] Écrivez-moi si ça pose un problème.
[138] Rappel que la définition 7.212 ne définit les espaces vectoriels normés que dans le cas où le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Démonstration. Nous nommons $\mathbb{K}$ le corps de base, qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour rappel, la topologie produit et la topologie de la norme produit sont identiques par le lemme 7.283. Nous allons donc considérer cette topologie sur $E \times E$ et sur $\mathbb{K} \times E$.

(1) **Pour l'addition**

Soit

$$\begin{aligned} s\colon E \times E &\to E \\ (x, y) &\mapsto x + y, \end{aligned} \tag{7.279}$$

et prouvons que s est continue. Soit un ouvert A de E ; nous montrons que $s^{-1}(A)$ est ouvert dans $E \times E$. Pour cela nous considérons $(a, b) \in s^{-1}(A)$. Vu que A est ouvert et que $a + b \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a + b, r) \subset A$. Nous allons trouver $\epsilon > 0$ tel que

$$s\big(B(a, \epsilon) \times B(b, \epsilon)\big) \subset A. \tag{7.280}$$

Notez que le produit de boules est ouvert pour la définition 7.63 de la topologie produit. Si $x \in B(a, \epsilon)$, il existe $\delta \in E$ tel que $x = a + \delta$ avec $\|\delta\| < \epsilon$ et si $y \in B(b, \epsilon)$, nous avons $y = b + \mu$ avec $\|\mu\| < \epsilon$. Nous avons

$$s(x, y) = x + y = a + b + \delta + \mu \tag{7.281}$$

et donc[139]

$$\|(a + b) - s(x, y)\| = \|\delta + \mu\| \leqslant \|\sigma\| + \|\mu\| < 2\epsilon. \tag{7.282}$$

Il suffit donc de prendre $\epsilon < r/2$.

(2) **Pour la multiplication** Nous prouvons à présent que

$$\begin{aligned} m\colon \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned} \tag{7.283}$$

est continue. Soit A ouvert dans E, soit $(\lambda, a) \in m^{-1}(A)$. Nous cherchons comme avant un $\epsilon > 0$ tel que

$$m\big(B(\lambda, \epsilon) \times B(a, \epsilon)\big) \subset A. \tag{7.284}$$

Soient $\lambda + \mu \in B(\lambda, \epsilon)$ et $a + x \in B(x, \epsilon)$. Nous avons

$$\|m(\lambda + \mu, a + x) - m(\lambda, a)\| = \|\lambda x + \mu a + \mu x\| \tag{7.285a}$$

$$\leqslant |\epsilon|\big(|\lambda| + \|a\| + |\epsilon|\big). \tag{7.285b}$$

Nous considérons donc $r > 0$ tel que $B(\lambda a, r) \subset A$, puis $\epsilon > 0$ assez petit pour que

$$\epsilon|\big(|\lambda| + \|a\| + |\epsilon|\big) < r. \tag{7.286}$$

□

PROPooYMCUooERvDpk

Proposition 7.288.
La norme est une application continue sur un espace vectoriel normé.

Plus précisément, si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé[140]*, alors l'application*

$$\begin{aligned} f\colon E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned} \tag{7.287}$$

est continue.

Démonstration. Soit la boule $B(a, r)$ dans $\mathbb{R}$. Nous montrons que $f^{-1}(B(a, r))$ est un ouvert de E pour la topologie métrique. Soit $x_0 \in f^{-1}\big(B(a, r)\big)$. Nous prenons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\big|\|x_0\| - a\big| < \alpha < r$. Et nous considérons la boule $B_E(x_0, \epsilon)$ avec ϵ que nous allons fixer plus tard.

Pour tout $x \in B_E(x_0, \epsilon)$, nous avons

$$\big|\|x\| - a\big| \leqslant \big|\|x\| - \|x_0\|\big| + \big|\|x_0\| - a\big| \tag{7.288a}$$

$$< \alpha + \epsilon. \tag{7.288b}$$

En prenant ϵ tel que $\alpha + \epsilon < r$ nous avons $f(x) \in B(a, r)$. □

[139] En utilisant 7.212(4).

[140] Dont la topologie métrique est donnée par 7.142.

PROPooQUAZooGXskwF

Proposition 7.289.
La norme sur un espace vectoriel normé est une fonction de classe C^∞.

LEMooSCIIooRyRrHA

Lemme 7.290.
Soient un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ ainsi qu'une isométrie $f : V \to V$. Si A est une partie de V telle que $f(A) \subset A$, alors

$$\bar{A} = f(\bar{A}). \tag{7.289}$$

PROPooMHAVooRgJjMB

Proposition 7.291 ([1])**.**
Soient des espaces vectoriels normés v et w. Nous considérons des suites convergentes $v_k \xrightarrow{V} v$ et $w_k \xrightarrow{W} w$. Alors nous avons

$$(v_k, w_k) \xrightarrow{V\times W} (v, w). \tag{7.290}$$

L'espace $V \times W$ est l'espace vectoriel normé muni de la topologie de la norme produit.

Nous étudierons plus en détail les espaces vectoriels topologiques à partir de la définition 7.219.

7.13 Topologie réelle en dimension n

Nous considérons sur $\mathbb{R}$ la topologie donnée par la valeur absolue, et sur $\mathbb{R}^n$ celle de la topologie produit ou du maximum, qui sont identiques par le lemme 7.283.

En particulier, nous n'avons pas encore la norme donnée par $\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$, parce qu'elle demande la racine carré, définie en 9.100.

7.13.1 Ouverts et fermés

La proposition suivante est évidemment à mettre en rapport avec le théorème 7.8.

PROPooEQYJooBbPiAj

Proposition 7.292.
Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est ouverte si et seulement si pour tout $a \in A$ il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

Démonstration. C'est la définition 7.125 de la topologie métrique. □

LemMESSExh

Lemme 7.293.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$ la boule[141] $B(x, r)$ est ouverte.

Démonstration. Afin de prouver que la boule est ouverte, nous prenons un point $p \in B(x, r)$, et nous allons montrer qu'il existe une boule autour de p qui est contenue dans $B(x, r)$.

Étant donné que $p \in B(x, r)$, nous avons $d(p, x) < r$. Prouvons que la boule $B\big(p, r - d(p, x)\big)$ est contenue dans $B(x, r)$. Pour cela, nous prenons $p' \in B\big(p, r - d(p, x)\big)$, et nous essayons de prouver que $p' \in B(x, r)$. En effet, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$d(x, p') \leqslant d(x, p) + d(p, p') \leqslant d(x, p) + r - d(p, x) = r. \tag{7.291}$$

□

7.13.2 Point d'accumulation, point isolé

Les définitions de point d'accumulation et de point isolé sont 7.43 et 7.44. Nous voyons maintenant ce que ces définitions donnent dans le cas de l'espace topologique $\mathbb{R}$.

Lemme 7.294.
Soit $D \subset \mathbb{R}$. Un point $a \in D$ est isolé dans D si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap D = \{a\}. \tag{7.292}$$

Autrement dit, il existe un intervalle autour de a dans lequel a est le seul élément de D.

Lemme 7.295.
Un point $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de D si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\Big([a - \varepsilon, a + \varepsilon] \setminus \{a\}\Big) \cap D \neq \varnothing. \tag{7.293}$$

[141] Définition 7.142.

Autrement dit, quel que soit l'intervalle autour de a que l'on considère, le point a n'est pas tout seul dans D.

Exemple 7.296.
Prenons $D = [0,1[\cup]2,3]$. Cet ensemble n'a pas de point isolé, et l'ensemble de ses points d'accumulation est $[0,1] \cup [2,3]$.

Notez que les points 1 et 2 sont des points d'accumulation de D qui ne font pas partie de D. Il est possible d'être un point d'accumulation de D sans être dans D, mais pour être un point isolé dans D, il faut être dans D. △

Exemple 7.297.
Soit $D = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tous les points de cet ensemble sont des points isolés (vérifier !). Aucun point de D n'est point d'accumulation. Cependant 0 est un point d'accumulation. △

EXooWOYQooJolaTV

Exemple 7.298.
Soit $D =]1,2[\cup \{12\}$. Le point 12 est adhérence, mais pas d'accumulation parce que le voisinage $]9,14[$ n'intersectionne pas $D \setminus \{12\}$. △

7.13.3 Limite de suite

Définition 7.299 (Limite d'une suite dans $\mathbb{R}^m$)**.**
*Une suite de points (x_n) dans $\mathbb{R}^m$ est dite **convergente** si il existe un élément $\ell \in \mathbb{R}^m$ tel que*

EqCondLimSuite

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N,\ \|x_n - \ell\| < \varepsilon. \tag{7.294}$$

*Dans ce cas, nous disons que ℓ est la **limite** de la suite (x_n) et nous écrivons $\lim x_n = \ell$ ou plus simplement $x_n \to \ell$.*

Remarque 7.300.
Nous n'écrivons pas « $\lim_{n\to\infty} x_n$ » parce que, lorsqu'on parle de suites, la limite est *toujours* lorsque n tend vers l'infini. Il n'y a aucun intérêt à chercher par exemple $\lim_{n\to 4} x_n$ parce que cela vaudrait x_4 et rien d'autre.

Ceci est une différence importante avec les limites de fonctions.

Lemme 7.301 (Unicité de la limite)**.**
Il ne peut pas y avoir deux nombres différents qui satisfont à la condition (7.294). En d'autres termes, si ℓ et ℓ' sont deux limites de la suite (x_n), alors $\ell = \ell'$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous considérons N tel que

$$\|x_n - \ell\| < \varepsilon \tag{7.295}$$

pour tout $n \geqslant N$, et $N' > 0$ tel que

$$\|x_n - \ell'\| < \epsilon \tag{7.296}$$

pour tout $n > N'$. Maintenant, nous prenons n plus grand que N et N' de telle façon que les deux équations pour x_n soient vérifiées en même temps. Alors

$$\|\ell - \ell'\| = \|\ell - x_n + x_n - \ell'\| \leqslant \|\ell - x_n\| + \|x_n - \ell'\| < 2\varepsilon. \tag{7.297}$$

Cela prouve que $\|\ell - \ell'\| = 0$. □

Le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.194 dit que dans le cas métrique, la compacité séquentielle est équivalente à la compacité.

7.14 Topologie et distance

LemDUJXooWsnmpL

Lemme 7.302.
Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques séparables. Alors $X_1 \times X_2$ admet une base dénombrable de topologie constituée de produits de boules de X_1 par des boules de X_2. Plus précisément si A_i est dénombrable et dense dans X_i alors l'ensemble des produits

$$\big\{B(y_1, r_1) \times B(y_2, r_2)\big\}_{\substack{y_i \in A_i \\ r_i \in \mathbb{Q}^+}} \tag{7.298}$$

est une base de topologie pour $X_1 \times X_2$.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $X_1 \times X_2$ et $(x_1, x_2) \in \mathcal{O}$. Par définition de la topologie produit[142], il existe $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^+$ tels que $B(x_1, r_1) \times B(x_2, r_2) \subset \mathcal{O}$. Les parties A_i étant denses, il existe $y_i \in B(x_i, r_i/2) \cap A_i$. Avec ces choix nous avons $x_i \in B(y_i, \frac{r_i}{2})$. Nous avons donc

$$(x_1, x_2) \in B(y_1, \frac{r_1}{2}) \times B(y_2, \frac{r_2}{2}). \tag{7.299}$$

Il est facile de voir que $B(y_i, r_i/2) \subset B(x_i, r_i)$. En effet si $z_i \in B(y_i, r_i/2)$ alors

$$d_i(z_i, x_i) \leqslant d(z_i, y_i) + d(y_i, x_i) \leqslant \frac{r_i}{2} + \frac{r_i}{2} = r_i. \tag{7.300}$$

Au final,

$$(x_1, x_2) \in B(y_1, \frac{r_1}{2}) \times B(y_2, \frac{r_2}{2}) \subset \mathcal{O}. \tag{7.301}$$

□

Définition 7.303.
*Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont des espaces métriques, une **isométrie** est une application bijective $f : X \to Y$ telle que pour tout $x, y \in X$ nous ayons*

$$d_Y\big(f(x), f(y)\big) = d_X(x, y). \tag{7.302}$$ EQooVUOXooKJntMN

Remarque 7.304.
Une application vérifiant (7.302) est automatiquement injective. En pratique, il ne faut donc vérifier que la surjectivité.

Exemple 7.305 (Manque de surjectivité)**.**
Si $X = [0, \infty[$ et $f(x) = x + 1$ alors f vérifie (7.302) pour la distance $d(x, y) = |x - y|$, mais n'est pas surjective. △

Proposition-Définition 7.306 (Groupe des isométries)**.**
Si (X, d) est un espace métrique,

(1) l'ensemble des isométries de X, noté $\mathrm{Isom}(X)$ *est un groupe pour la composition.*

(2) Ce groupe agit fidèlement[143] sur X.

PropLYMgVMJ

Proposition 7.307.
Une isométrie entre deux espaces métriques est continue.

Démonstration. Soient $f : X \to Y$ une application isométrique et $\mathcal{O}$ un ouvert de Y. Soit $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$; si $d(a, b) < r$, alors $d\big(f(a), f(b)\big) < r$ et donc $b \in f^{-1}\big(B(f(a), r)\big)$. Donc autour de chaque point de $f^{-1}(\mathcal{O})$ nous pouvons trouver une boule ouverte contenue dans $f^{-1}(\mathcal{O})$, ce qui prouve que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert. □

Exemple 7.308.
Si X est un ensemble, nous pouvons écrire la **distance discrète** :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases} \tag{7.303}$$

La topologie résultante est la topologie discrète, côtoyée dans l'exemple 7.10[144].

Pour cette métrique, le groupe des isométries est le groupe symétrique de X, c'est-à-dire le groupe de toutes les bijections de X sur lui-même. △

7.14.0.1 Distance point-ensemble

Définition 7.309.
*Si A est une partie de l'espace métrique (X, d) et si $x \in X$, nous disons que la **distance** entre A et x est le nombre*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a). \tag{7.304}$$ EqdefDistaA

[142] Définition 7.63.
[143] Si vous ne savez pas ce que c'est, alors vous avez zappé la définition 2.31.
[144] Vérifiez-le tout de même !

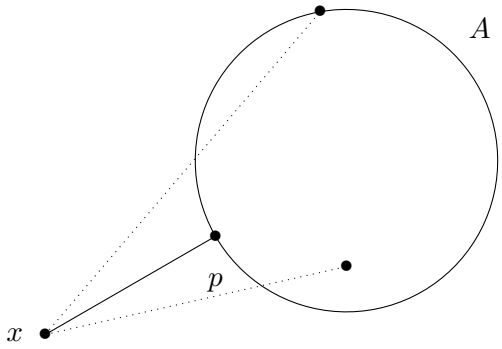


FIGURE 7.1 : La distance entre x et A est donnée par la distance entre x et p. Les distances entre x et les autres points de A sont plus grandes que $d(x,p)$. LabelFigDistanceEnsemble

7.15 Suites de Cauchy, métrique et espaces complets

7.15.1 Généralités

DefZSnlbPc

Définition 7.310 (Suite de τ-Cauchy, espace vectoriel topologique[260, 263])**.**
*Soit E un espace vectoriel topologique. Une suite (x_k) dans E est une **suite τ-Cauchy** si pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de 0 il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_k - x_l \in \mathcal{U}$ pour tout $k, l \geqslant N$.*

DEFooVQDBooNxprFU

Définition 7.311 (Espace τ-complet)**.**
*Nous disons qu'une partie A d'un espace vectoriel topologique est **τ-complet** si toute suite τ-Cauchy d'éléments de A converge[145] vers un élément de A.*

DEFooXOYSooSPTRTn

Définition 7.312 (Suite de Cauchy, espace métrique)**.**
*Une suite (a_k) dans un espace métrique (V,d) est **de Cauchy** si pour tout $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$, il existe N tel que si $n, m \geqslant N$ alors $d(a_n, a_m) < \epsilon$.*

Notons qu'ici, même si l'espace V n'a rien à voir avec $\mathbb{R}$, nous prenons ϵ dans $\mathbb{R}$ et la distance à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cela semble une évidence, mais il faut se rendre compte que $\mathbb{R}$ commence à prendre une place centrale dans nos constructions. Ce n'était pas le cas du temps où nous parlions de suites de Cauchy et de complétude dans des corps totalement ordonnés (définitions 1.493). Dans ce contexte, le ϵ était pris dans le corps lui-même.

DEFooHBAVooKmqerL

Définition 7.313 (Métrique complète)**.**
*Soit (E,d) un espace métrique. Nous disons que la métrique d est **complète** si toute suite de Cauchy dans (E,d) converge dans E.*

7.314.
Ces définitions méritent quelques remarques.

(1) Dans le cas des espaces vectoriels topologiques, nous définissons les notions de suite τ-Cauchy et d'espace topologique τ-complet. Nous ajoutons le préfixe τ pour indiquer que ce sont des notions topologiques.

(2) Dans le cas des espaces métriques, nous définissons la notion de *métrique* complète. C'est bien la métrique qui est complète, et non l'espace. En effet nous allons voir dans l'exemple 7.317 que le même espace topologique peut accepter plusieurs distances différentes (donnant la même topologie) donnant lieu à des suites de Cauchy différentes.

(3) Si un espace vectoriel a une topologie issue d'une distance, rien ne dit que ses suites τ-Cauchy et ses suites de Cauchy sont les mêmes. Ce sont deux notions à priori séparées. Si V est un espace vectoriel topologique que l'on peut munir de deux distances d_1, d_2 donnant toutes deux la topologie, dire que V est τ-complet, dire que d_1 est complète et dire que d_2 est complète sont trois choses différentes. Même si les trois topologies sont identiques.

(4) Nous allons bien entendu voir que dans de larges gammes d'exemples, les notions de suite de Cauchy et τ-Cauchy coincident.

[145] Définition 7.14.

PROPooTGCKooRsmoLx

Proposition 7.315 ([1]).
Tout compact d'un espace métrique est complet.

7.15.2 Espace de Banach

DefVKuyYpQ

Définition 7.316 (espace de Banach, algèbre de Banach[279]).
*Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet*[146] *pour la topologie de la norme.*

*Une **algèbre de Banach** est une algèbre commutative et associative qui est un espace vectoriel normé complet.*

EXooNMNVooXyJSDm

Exemple 7.317 (La complétude n'est pas une propriété topologique[280]).
Le fait pour un espace d'être complet n'est pas une propriété topologique, mais une propriété métrique. Plus exactement, il existe des espaces topologiques isomorphes, mais dont l'un est complet et l'autre non.

Nous considérons la distance suivante sur $\mathbb{N}$:

$$d_1(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|. \tag{7.305}$$

Pour vérifier que cette formule définit bien une distance (définition 7.139), le seul point non immédiat est l'inégalité triangulaire :

$$d_1(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right|+\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\right|=d_1(x,z)+d_1(z,y). \tag{7.306}$$

Au niveau de la topologie induite par cette distance, c'est la topologie discrète. En effet, soit $x\in\mathbb{N}$ et $\epsilon>0$; nous voulons déterminer la boule $B(x,\epsilon)$ en résolvant l'équation

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|<\epsilon \tag{7.307}$$

pour $y\in\mathbb{N}$. Nous trouvons que $\frac{1}{y}>\frac{1}{x}-\epsilon$ et $\frac{1}{y}<\frac{1}{x}+\epsilon$, soit

$$\begin{cases} y>\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\epsilon} & \text{(7.308a)}\\ y<\dfrac{1}{\frac{1}{x}-\epsilon}. & \text{(7.308b)}\end{cases}$$

Si ϵ est assez petit, la seule solution entière est $y=x$. Les ouverts sont donc toutes les parties parce que tous les singletons sont ouverts.

L'espace topologique associé à $(\mathbb{N},d_1)$ est donc la topologie discrète[147].

Si nous considérons par contre la distance usuelle sur $\mathbb{N}$, à savoir $d(x,y)=|x-y|$, nous obtenons encore la topologie discrète. Nous avons donc un isomorphisme d'espaces topologiques

$$(\mathbb{N},d)\simeq(\mathbb{N},d_1). \tag{7.309}$$

Nous pouvons même donner un isomorphisme explicite : $f(n)=n$.

La suite $(x_n)=n$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{N},d_1)$ parce que si $\epsilon>0$ est donné, il suffit de prendre N assez grand pour avoir $\frac{1}{N}<\epsilon$ (possible par le lemme 1.556) nous avons, pour $n,m>N$:

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\epsilon. \tag{7.310}$$

Or cette suite ne converge pas. Soit en effet un candidat limite k. Calculons

$$d_1(x_n,k)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right|\to\frac{1}{k}\neq 0. \tag{7.311}$$

L'espace $(\mathbb{N},d_1)$ n'est pas complet.

Notons que cette suite n'est pas de Cauchy dans $(\mathbb{N},d)$.

En résumé :

(1) Les espaces topologiques $(\mathbb{N},d)$ et $(\mathbb{N},d_1)$ sont isomorphes.

[146] Définition 7.313.
[147] Celle dont toutes les parties sont des ouverts.

(2) Ils ont les mêmes notions de suites convergentes : une suite convergente pour l'un est convergente pour l'autre.

(3) Ils n'ont pas les mêmes notions de suites de Cauchy.

(4) Dans $(\mathbb{N}, d_1)$, il existe des suites de Cauchy qui ne convergent pas (pas complet).

(5) L'espace $(\mathbb{N}, d)$ est complet, mais $(\mathbb{N}, d_1)$ n'est pas complet.

(6) Le fait pour un espace topologique métrique d'être complet n'est pas intrinsèque à sa topologie : la complétude est une propriété de la distance. La complétude est une propriété de la métrique, et non de la topologie qui s'en suit.

△

LemCAIPooPMNbXg

Lemme 7.318.
Si E et F sont des espaces de Banach[148]*, l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est également de Banach.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$; si $x \in E$ il existe N tel que si $l, m > N$ alors $\|u_l - u_m\| < \epsilon$, c'est-à-dire que pour tout $\|x\| = 1$ on a $\|u_l(x) - u_n(x)\| < \epsilon$. Cela signifie que $u_n(x)$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet F. Cette suite converge et nous pouvons définir l'application $u : E \to F$ par

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x). \tag{7.312}$$

Il suffit maintenant de prouver que u est linéaire, ce qui est une conséquence directe de la linéarité de la limite :

$$u(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} \big(\alpha u_n(x) + \beta u_n(y)\big). \tag{7.313}$$

□

PROPooUNVAooRDxkyI

Proposition 7.319.
Tout sous-espace fermé d'un espace de Banach est de Banach pour la norme induite.

PROPooOVGGooNffWJW

Proposition 7.320 ([281])**.**
Le dual[149] *d'un espace de Banach*[150] *est de Banach.*

PROPooAPVCooFyMigL

Proposition 7.321 ([1])**.**
Soit un espace ce Banach E. Soient $v_k \in E$. Si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ converge, alors $\{|v_k|\}_{k\in\mathbb{N}}$ est borné.

7.15.3 Espace topologique métrique

Dans les espaces vectoriels topologiques métriques, il n'y a pas d'ambiguïté.

PropooUEEOooLeIImr

Proposition 7.322 (Caractérisations avec la distance d)**.**
Soit (E, d) un espace vectoriel topologique métrique.

ItemooROYMooAQCXnj

(1) Une suite (x_n) dans E est convergente[151] *vers x si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe N_ϵ tel que pour tout $n \geqslant N_\epsilon$ nous avons $d(x_n, x) \leqslant \epsilon$.*

(2) Une suite (x_n) dans E est de Cauchy[152] *si pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, il existe un N_ϵ tel que si $p, q \geqslant N_\epsilon$, nous avons $d(x_p, x_q) \leqslant \epsilon$.*

Démonstration. En ce qui concerne la convergence :

(1) **Sens direct**

Nous supposons que $x_k \to x$ dans E. Soit $\epsilon > 0$; vu que $B(x, \epsilon)$ est un ouvert contenant x, il existe un $N_\epsilon > 0$ tel que $k > N_\epsilon$ implique $x_k \in B(x, \epsilon)$. Cela signifie $d(x, x_k) \leqslant \epsilon$.

(2) **Réciproque**

Nous supposons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon > 0$ tel que si $k > N_\epsilon$ alors $x_k \in B(x, \epsilon)$. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ autour de x. Nous sommes dans un espace métrique ; ergo la topologie est donné par le théorème 7.142 et en particulier la liste des ouverts est donnée par (7.125). Il existe donc une boule $B(x, \epsilon)$ incluse à $\mathcal{O}$. Pour tout $k > N_\epsilon$ nous avons alors $x_k \in B(x, \epsilon) \subset \mathcal{O}$.

[148] Je crois qu'il ne faut pas que E soit complet.
[149] Définition 4.135.
[150] Définition 7.316.
[151] Définition 7.14.
[152] Définition 7.310.

En ce qui concerne les suites de Cauchy :

(1) **Sens direct** Si (x_n) est une suite de Cauchy et si $\epsilon > 0$ est donné, alors $B(0,\epsilon)$ est un voisinage de 0 et il existe N_ϵ tel que si $p, q \geqslant N_\epsilon$ alors $x_p - x_q \in B(0,\epsilon)$. Posons $u = x_p - x_q$; en utilisant l'invariance par translation (lemme 7.217(1)) nous avons

$$d(u,0) = d(x_p - x_q, 0) = d(x_p, x_q). \tag{7.314}$$

Par conséquent $d(x_p, x_q) \leqslant \epsilon$.

(2) **Réciproque** Soit $\mathcal{O}$ un voisinage de 0. Il existe ϵ tel que $B(0,\epsilon) \subset \mathcal{O}$. Par hypothèse il existe N_ϵ tel que $d(x_p, x_q) \leqslant \epsilon$ dès que $p, q \geqslant N_\epsilon$. En utilisant encore l'invariance par translation nous avons

$$d(x_p, x_q) = d(x_p - x_q, 0), \tag{7.315}$$

et comme cela est plus petit que ϵ, nous avons $x_p - x_q \in B(0,\epsilon) \subset \mathcal{O}$.

□

PROPooZZNWooHghltd

Proposition 7.323 ([282]).
Toute suite convergente dans un espace métrique est de Cauchy.

Démonstration. Nous utilisons les caractérisations de la proposition 7.322 des suites convergentes et de Cauchy.

Soit un espace métrique (X,d) et $x_n \to \ell$ une suite convergente. Si $\epsilon > 0$, la proposition 7.322(1), dit qu'il existe N tel que pour tout $n > N$ nous ayons $d(x_n, \ell) < \epsilon$. Par conséquent si $n, m > N$ alors

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_m, \ell) + d(l, x_m) \leqslant 2\epsilon. \tag{7.316}$$

Cela prouve que (x_n) est une suite de Cauchy. □

7.15.4 Compacts, fermés

PROPooRMAOooZIgXwy

Proposition 7.324 (Séparation [263, 283]).
Soit V, un espace vectoriel topologique. Soient des parties K et F de V telles que :

(1) K est compact,

(2) F est fermé,

(3) $K \cap F = \varnothing$.

Alors il existe un voisinage U de 0 tel que

$$(K + U) \cap (F + U) = \varnothing. \tag{7.317}$$

Autrement dit, la topologie d'un espace vectoriel topologique sépare les fermés des compacts.

Démonstration. Soit un élément $x \in K$. La partie F^c est un ouvert qui contient x ; donc $F^c - x$ est un voisinage ouvert de 0.

(1) **Quelque chose sans intersection avec F** Par la proposition 7.246, il existe un ouvert symétrique U_x autour de 0 tel que

$$U_x + U_x + U_x + U_x \subset F^c - x. \tag{7.318}$$

En enlevant un des éléments de la somme, nous gardons la même inclusion :

$$U_x + U_x + U_x \subset F^c - x. \tag{7.319}$$

Et en passant le x de l'autre côté :

$$x + U_x + U_x + U_x \subset F^c. \tag{7.320}$$

Cela pour dire que nous avons, pour chaque $x \in K$ un voisinage ouvert U_x de 0 tel que

$$(x + U_x + U_x + U_x) \cap F = \varnothing. \tag{7.321}$$

EQooPXUVooVyUEoN

(2) $(x+U_x+U_x)\cap(U_x+F)=\varnothing$ Supposons $z\in(x+U_x+U_x)\cap(U_x+F)$, et déduisons une contradiction. En particulier $z\in U_x+F$ et donc il existe $u\in U_x$, $f\in F$ tel que $z=v+f$. Nous avons alors (nous utilisons le fait que U_x soit symétrique)

$$f=z-v\in z+U_x \tag{7.322}$$

Mais z est aussi dans $x+U_x+U_x$. Donc

$$f\in z+U_x\subset x+U_x+U_x+U_x. \tag{7.323}$$

Cela prouve que $x+U_x+U_x+U_x\cap F\neq\varnothing$, en contradiction avec (7.321). Nous en concluons que

$$(x+U_x+U_x)\cap(U_x+F)=\varnothing. \tag{7.324}$$

EQooNLCRooWTEoye

(3) **Un sous-recouvrement fini** Fini de rigoler. Si nous avons un compact dans les hypothèses, il fallait que ça arrive. Pour chaque $x\in K$ nous avons un voisinage ouvert U_x de 0 et donc un voisinage ouvert $x+U_x$ de x. Du coup $\{U_x+x\}_{x\in K}$ forme un recouvrement de K par des ouverts. Et hop, sous-recouvrement fini (c'est la définition 7.109 d'un compact) : nous avons $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ tels que

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+U_{x_i}). \tag{7.325}$$

Nous posons $U=\bigcap_{i=1}^{n}U_{x_i}$. Même si c'est évident, remarquez que U est un ouvert autour de 0 et que U est plus petit que chacun des U_{x_i}. Récrivons (7.324) pour chacun des x_i :

$$(x+U_{x_i}+U_{x_i})\cap(F+U_{x_i})=\varnothing. \tag{7.326}$$

EQooGEAGooENFlCG

Lorsqu'on enlève des éléments dans une intersection vide, l'intersection reste vide. Donc en remplaçant des U_{x_i} par des U dans (7.326), nous conservons une intersection vide :

$$(x+U_{x_i}+U)\cap(F+U)=\varnothing. \tag{7.327}$$

(4) **Conclusion** Aucun ensemble de la forme $x+U_{x_i}+U$ n'intersecte $F+U$. L'union ne l'intersecte pas non plus :

$$\bigcup_{i=1}^{n}(x+U_{x_i})+U\cap(F+U)=\varnothing. \tag{7.328}$$

Et donc

$$(K+U)\cap(F+U)=\varnothing, \tag{7.329}$$

comme nous le voulions.

□

DEFooGTOZooRcvGHg

Définition 7.325.
*Une distance d sur un espace vectoriel topologique V est dite **compatible** avec la topologie si la topologie induite*[153] *de d est celle de V.*

DEFooEUXVooEBYhNU

Définition 7.326.
*Une distance d sur un espace vectoriel V est dite **invariante** si pour tout $x,y,a\in V$ nous avons*

$$d(x+a,y+a)=d(x,y). \tag{7.330}$$

Notons que lorsque nous parlons d'une distance compatible avec un espace vectoriel topologique, nous parlons de compatibilité avec la topologie, pas avec la structure vectorielle.

LEMooZNBAooOhEwJd

Lemme 7.327 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel muni d'une distance invariante. Alors

$$B(a,r)+x=B(a+x,r). \tag{7.331}$$

Démonstration. Un élément de $B(a,r)+x$ est de la forme $y+x$ avec $d(a,y)<r$. Nous avons alors $d(y+x,a+x)=d(y,a)<r$, de telle sorte que $y+x\in B(a+x,r)$.

Dans le sens inverse, si $y\in V$ vérifie $d(a+x,y)<r$, alors je prétend que $y-x\in B(a,r)$. En effet $d(y-x,a)=d(y-x+x,a+x)=d(y,a+x)<r$. □

[153] Définition 7.142.

Une version plus complète du lemme suivant sera dans la proposition 10.181 et ce qui suit.

LEMooIQBXooUEtdoy

Lemme 7.328.
Nous introduisons l'ensemble $\mathbb{D}_2$ des suites finies[154] $\mathbb{N}\setminus\{0\}\to\{0,1\}$[155]. *Nous notons*

$$l(x)=\max\{i\in\mathbb{N}\text{ tel que }x_i\neq 0\}. \tag{7.332}$$

L'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon\mathbb{D}_2&\to[0,1[\\ x&\mapsto\sum_{i=1}^{l(x)}\frac{x_i}{2^i}.\end{aligned} \tag{7.333}$$

est injective.

Démonstration. Le lemme 1.611 donne la somme partielle de la série géométrique. Dans notre cas, $q=1/2$. Si $x\in D_n$, alors en majorant chacun des c_i par 1,

$$x\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i=\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1/2}-1=1-(1/2)^{n+1}<1. \tag{7.334}$$

Donc c'est bon pour dire que φ prend ses valeurs dans $[0,1[$.

Il reste à voir l'injectivité. Nous supposons que $\varphi(x)=\varphi(y)$. Quitte à alonger x ou y par des zéros, nous supposons qu'elles ont même longueur N. Enfin nous définissons n_0 le plus petit indice pour lequel $x_i\neq y_i$. Nous avons :

$$0=\frac{1}{2^{n_0}}+\sum_{i=n_0+1}^{N}\frac{x_i-y_i}{2^i}. \tag{7.335}$$

EQooEUKNooVoJfFC

Le deuxième terme est majoré de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=n_0+1}^{N}\frac{x_i-y_i}{2^i}\right|&\leqslant\sum_{i=n_0+1}^{N}\frac{|x_i-y_i|}{2^i}&(7.336a)\\ &\leqslant\sum_{i=n_0+1}^{N}\frac{1}{2^i}&(7.336b)\\ &=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^i-\sum_{i=1}^{n_0}\left(\frac{1}{2}\right)^i&(7.336c)\\ &=\frac{1-(1/2)^{N+1}}{1/2}-\frac{1-(1/2)^{n_0+1}}{1/2}&(7.336d)\\ &=\frac{1}{2^{n_0}}-\frac{1}{2^N}&(7.336e)\\ &<\frac{1}{2^{n_0}}.&(7.336f)\end{aligned}$$

L'égalité (7.335) n'est donc pas possible. Nous déduisons que n_0 n'existe en fait pas et que $x=y$. D'où l'injectivité de φ. □

Pour faire les sommes dans $\mathbb{D}_2$, nous introduisons $\mathbb{D}_2'$, l'ensemble des suites finies $\mathbb{N}\to\{0,1\}$ et

$$\begin{aligned}\varphi'\colon\mathbb{D}_2'&\to[0,2[\\ x&\mapsto\sum_{i=0}^{l}(x)\frac{x_i}{2^i}.\end{aligned} \tag{7.337}$$

DEFooRJSFooDvbkrx

Définition 7.329 ([1]).
Si $x,y\in\mathbb{D}_2$, nous définissons $z,r\in\mathbb{D}_2'$ par récurrence (à l'envers) de la façon suivantes[156]. *D'abord, quitte à ajouter des zéros, nous supposons que x et y aient la même longueur l.*

D'abord posons $r_l=0$.

Ensuite, pour tout k nous considérons les trois cas possibles.

[154] Les suites donc nous parlons sont indexées en commençant à 1, et non à 0. C'est une précision importante.

[155] C'est en gros ce qui se fera dans 10.179 pour les développements de nombres dans une base donnée, sauf qu'ici nous n'avons pas besoin de subtilités sur les queues de suites.

[156] z va être la somme en binaire et r va être la suite des reports.

Si $x_k + y_k + r_k$ vaut 0 ou 1 *Dans ce cas nous posons*

- $z_k = x_k + y_k + r_k$
- $r_{k-1} = 0$

Si $x_k + y_k + r_k = 2$ *Nous posons*

- $z_k = 0$
- $r_{k-1} = 1$

Si $x_k + y_k + r_k = 3$ *Nous posons*

- $z_k = 1$
- $r_{k-1} = 1$.

Et enfin nous posons $z_0 = r_0$.

LEMooIUDHooNDlVtg

Lemme 7.330 ([1]).
Si $r_k = 1$, alors $z_k \neq x_k + y_k$.

Démonstration. Il y a seulement quelques cas à traiter.

x_k	y_k	r_k	z_k
0	0	1	$z_k = 1 \neq x_k + y_k$
0	1	1	$z_k = 0 \neq x_k + y_k$
1	0	1	$z_k = 0 \neq x_k + y_k$
1	1	1	$z_k = 1 \neq x_k + y_k$

□
PROPooGHPZooEwXqMH

Proposition 7.331 ([1]).
Soient $x, y \in \mathbb{D}_2$ ainsi que z défini par 7.329. Nous avons

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi'(z). \tag{7.338}$$

Démonstration. Nous supposons que x et y sont de longueur l, et nous faisons une récurrence à l'envers. D'abord

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \sum_{i=1}^{l} \frac{x_i + y_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{l-2} \frac{x_i + y_i}{2^i} + \frac{x_{l-1} + y_{l-1}}{2^{l-1}} + \frac{x_l + y_l}{2^l}. \tag{7.339}$$

Il y a deux possibilités. Si $x_l + y_l$ vaut 0 ou 1, alors $r_{l-1} = 0$ et $z_l = x_l + y_l$, de telle sorte que

$$\frac{x_{l-1} + y_{l-1}}{2^{l-1}} + \frac{x_l + y_l}{2^l} = \frac{x_{l-1} + y_{l-1} + r_{l-1}}{2^{l-1}} + \frac{z_l}{2^l}. \tag{7.340}$$

Si $x_l + y_l = 2$, alors $r_{l-1} = 1$ et $z_l = 0$ de telle sorte que

$$\frac{x_{l-1} + y_{l-1}}{2^{l-1}} + \frac{x_l + y_l}{2^l} = \frac{x_{l-1} + y_{l-1}}{2^{l-1}} + \frac{2}{2^l} \tag{7.341a}$$

$$= \frac{x_{l-1} + y_{l-1} + 1}{2^{l-1}} + \frac{z_l}{2^l} \tag{7.341b}$$

$$= \frac{x_{l-1} + y_{l-1} + r_{l-1}}{2^{l-1}} + \frac{z_l}{2^l}. \tag{7.341c}$$

En ce qui concerne la récurrence, il faut faire les trois cas pour montrer que dans tous les cas,

$$\frac{x_k + y_k}{2^k} + \frac{x_{k+1} + y_{k+1} + r_{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{x_k + y_k + r_k}{2^k} + \frac{z_{k+1}}{2^{k+1}}. \tag{7.342}$$

□
LEMooEAIBooMxCDHF

Lemme 7.332 ([1]).
Soit $z \in \mathbb{D}'_2$. Nous avons $\varphi'(z) < 1$ si et seulement si $z_0 = 0$.

Démonstration. D'une part, si $z_0 = 0$, alors

$$\varphi'(z) = \varphi'(0, z_1, \dots, z_l) = \varphi(z_1, \dots, z_l) \in [0, 1[. \tag{7.343}$$

D'autre part, si $z_0 \neq 0$, c'est que $z_0 = 1$. Et dans ce cas, nous avons

$$\varphi'(z) = z_0 + \sum_{i=1}^{l}(z)\frac{z_i}{2^i} \geqslant z_0 = 1. \tag{7.344}$$

Cela prouve que si $z_0 \neq 0$, alors $\varphi'(z) \geqslant 1$. □

Toujours avec l'injection φ du lemme 7.328 nous avons ceci.

LEMooVDPWooWLQzbF

Lemme 7.333 ([1]).
Soient $s, t \in \varphi(\mathbb{D}_2)$ tels que $s + t < 1$. Alors $s + t \in \varphi(\mathbb{D}_2)$.

Démonstration. Nous considérons $x, y \in \mathbb{D}_2$ tels que $s = \varphi(x)$ et $t = \varphi(y)$. En considérant $z \in \mathbb{D}_2'$ et r comme avant, la proposition 7.331 donne $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi'(z)$. En particulier $\varphi'(z) < 1$. Le lemme 7.332 dit alors que $z_0 = 0$. En posant $z' = (z_1, \dots, z_l)$, nous avons

$$\varphi(z') = \varphi'(z) = \varphi(x) + \varphi(y). \tag{7.345}$$

Et donc z' est l'élément de $\mathbb{D}_2$ que nous cherchions : $s + t = \varphi(z')$. □

LEMooQYILooMimKHS

Lemme 7.334.
Soient $s, t \in \varphi(\mathbb{D}_2)$ tels que $s + t < 1$. Nous posons $x = \varphi^{-1}(s)$, $y = \varphi^{-1}(t)$ et $z = \varphi^{-1}(s + t)$. Si k est le plus petit entier tel que $z_k \neq x_k + y_k$, alors $x_k = y_k = 0$ et $z_k = 1$.

Démonstration. Il suffit de traiter les 8 cas possible de x_k, y_k et r_k et voir ceux qui vont. Voici le tableau à remplir :

x_k	y_k	r_k	z_k	r_{k-1}
0	0	1		
0	1	1		
1	0	1		
1	1	1		
0	0	0		
0	1	0		
1	0	0		
1	1	0		

Et voici le tableau rempli :

x_k	y_k	r_k	z_k	r_{k-1}
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Par le lemme 7.330, nous voulons une ligne qui satisfait $z_k \neq x_k + y_k$ et $r_{k-1} = 0$. Cherchez un peu et vous verrez qu'il y a une seule ligne, et c'est celle qui donne $x_k = y_k = 0$, $r_k = 1$, $z_k = 1$ et $r_{k-1} = 0$. □

THOooAGBXooZnvQLK

Théorème 7.335 (Espace topologique métrisable[263, 1]).
Si V est un espace vectoriel topologique. Nous supposons :

(1) Tout point admet une base dénombrable de topologie[157].

(2) Le singleton $\{0\}$ est fermé[158].

[157] Définition 7.2.

[158] Attention : dans [263], cela fait partie de la définition d'un espace vectoriel topologique et n'est donc pas listé dans les hypothèses de ce théorème.

Alors il existe une distance d sur V telle que

(1) d est compatible avec la topologie de V,

(2) d est invariante par translation.

Démonstration. Vu que V admet une base dénombrable de topologie, nous en considérons une autour de 0 dans V : $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

(1) **Nouvelle base de topologie** Nous construisons une nouvelle base de topologie $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ autour de 0 de la façon suivante. La proposition 7.246 donne un ouvert symétrique équilibré dans A_0. Nous le nommons U_0 :

$$U_0 \subset A_0. \tag{7.346}$$

Pour les suivants, U_{k+1} est un ouvert symétrique équilibré dans $U_k \cap A_k$ vérifiant

$$U_{k+1} + U_{k+1} + U_{k+1} + U_{k+1} \subset A_k \cap U_k. \tag{7.347}$$ EQooECMVooLllLhu

Le fait est que $A_k \cap U_k$ est un ouvert autour de 0 ; donc la proposition 7.246 permet de construire un ouvert symétrique et équilibré U_{k+1} autour de 0 ayant la propriété demandée.

(2) **C'est bien une base** Notons d'abord que $U_k \subset A_k$. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert autour de 0, il existe k tel que $A_k \subset \mathcal{O}$: c'est la définition 7.2 d'une base de topologie. Nous avons donc $U_k \subset A_k \subset \mathcal{O}$, et les $\{U_k\}$ forment une base dénombrable de la topologie autour de 0.

(3) **Quelques inclusions** Notons au passage quelques inclusions. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$U_{n+1} + U_{n+1} + U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n. \tag{7.348}$$ EqBaseTopoMetriquePf1

À fortiori nous avons

$$U_{n+1} \subset U_n \tag{7.349}$$ EQooARBRooOiAVhH

et pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, nous obtenons alors

$$U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{n+(k-1)} + U_{n+k} \subset U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n. \tag{7.350}$$ EqBaseTopoMetriquePf2

(4) **L'ensemble D** Nous considérons l'ensemble $\mathbb{D}_2$ et l'application φ du lemme 7.328. Nous notons $D = \varphi(\mathbb{D}_2) \subset [0,1[$. L'application $\varphi\colon \mathbb{D}_2 \to D$ est injective, et nous pouvons donc parler de $\varphi^{-1}(r)$ pour tout $r \in D$.

(5) **La fonction ϕ**

Nous définissons maintenant une fonction à valeurs dans la topologie τ_V de V :

$$\begin{aligned} \phi\colon D \cup [1,+\infty[&\to \tau_V \\ r &\mapsto \begin{cases} V & \text{si } r \geqslant 1; \\ \sum_i \varphi^{-1}(r)_i U_i & \text{si } r \in D. \end{cases} \end{aligned} \tag{7.351}$$

La dernière somme est toujours une somme finie et est un ouvert parce que la multiplication par un scalaire et l'addition sont des ouverts.

Notez aussi que plus r est petit, plus ce sont les grands i qui tendront à avoir $\varphi^{-1}(r) \neq 0$. En effet, pour $r = 1/8$, nous avons $\varphi^{-1}(1/8) = (0,0,0,1)$, et plus généralement pour $r < 1/2^N$, les N premiers termes de $\varphi^{-1}(r)$ seront nuls.

Quelques remarques sur cette fonction.

(5a) **Une égalité facile** Si je ne me trompe pas d'un off-by-one, nous avons

$$\phi(1/2^N) = U_N. \tag{7.352}$$

(5b) **$0 \in \phi(r)$ pour tout r** En effet, $\phi(r)$ n'est jamais vide, c'est toujours un voisinage de 0.

(5c) **$\phi(r) + \phi(s) \subset \phi(r+s)$** Si $r + s \geqslant 1$, c'est clair. Sinon, nous posons $u = \varphi^{-1}(r)$, $v = \varphi^{-1}(s)$ et $w = \varphi^{-1}(r+s)$. Dans la suite, nous prolongeons u et v pour qu'elles aient le même nombre d'éléments que nous notons N.

Deux cas se produisent : soit $w_i = u_i + v_i$ pour tout i soit non.

(5c.i) **Premier cas** Si $w_i = u_i + v_i$ pour tout i, alors en particulier les u_i et v_i ne peuvent pas être 1 en même temps et nous pouvons séparer clairement les termes de la somme :

$$\phi(r+s) = \sum_i w_i U_i = \sum_i u_i U_i + \sum_i v_i U_i = \phi(r) + \phi(s); \tag{7.353}$$

(5c.ii) **Second cas** Sinon, posons k le plus petit entier tel que $w_k \neq u_k + v_k$. Alors le lemme 7.334 dit que $u_k = v_k = 0$ et $w_k = 1$. Nous avons d'abord

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^{k-1} u_i U_i + \sum_{i=k+1}^{n} u_i U_i \subset \sum_{i=1}^{k-1} u_i U_i + U_{k+1} + U_{k+1} \tag{7.354}$$

où nous avons utilisé (7.349) pour tous les derniers termes. De même nous avons :

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^{k-1} v_i U_i + \sum_{i=k+1}^{n} v_i U_i \subset \sum_{i=1}^{k-1} v_i U_i + U_{k+1} + U_{k+1}. \tag{7.355}$$

En combinant, et en utilisant (7.348),

$$\phi(r) + \phi(s) = \sum_{i=1}^{k-1} u_i U_i + \sum_{i=1}^{k-1} v_i U_i + \underbrace{U_{k+1} + U_{k+1} + U_{k+1} + U_{k+1}}_{\subset U_k} \tag{7.356a}$$

$$\subset \sum_{i=1}^{k-1} w_i U_i + U_k \tag{7.356b}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} w_i U_i \tag{7.356c}$$

$$\subset \phi(r+s). \tag{7.356d}$$

SUBEQooZKWWooERHgta

Pour (7.356c) nous avons utilisé le fait que $w_k = 1$. Au final nous avons bien $\phi(r) + \phi(s) \subset \phi(r+s)$.

(5d) **ϕ est croissante** Dans notre contexte « croissante » signifie que si $r < s$ alors $\phi(r) \subset \phi(s)$. Il suffit d'écrire

$$\phi(r) \subset \phi(r) + \phi(s-r) \subset \phi(s). \tag{7.357}$$

(6) **Définition de la distance (enfin !)** Nous définissons l'application

$$\begin{aligned} f\colon V &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \inf\{r \text{ tel que } x \in \phi(r)\}, \end{aligned} \tag{7.358}$$

et ensuite ce qui va être notre distance :

$$d(x,y) = f(y-x). \tag{7.359}$$

EqDefDistanceCompatible

Notons que cet infimum est un réel, et qu'il n'est pas spécialement dans $\varphi(\mathbb{D}_2)$. Nous devons prouver que ce d est une distance invariante par translation et compatible avec la topologie.

(7) **d est invariante par translation** Il s'agit seulement d'écrire $d(x+a, y+a)$ et de remarquer que $(y+a) - (x+a) = y - x$.

$d(x,x) = 0$ Oui, car 0 est dans $\phi(r)$, pour tout r, puisque les U_i sont des voisinages de 0.

(8) **$d(x,y) = 0$ implique $x = y$** Nous montrons que $f(x) \neq 0$ dès que $x \neq 0$. Rappellez-vous que nous avons posé l'hypothèse que $\{0\}$ est un fermé dans V. Vu que $\{x\}$ est un compact[159], la proposition 7.324 nous indique qu'il existe un voisinage A de 0 qui ne contient pas x.

Vu que les $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base de la topologie autour de 0, il existe un n_0 tel que $x \notin U_{n_0}$. Et comme $U_{k+1} \subset U_k$ nous avons

$$x \notin U_k \tag{7.360}$$

[159] Les singletons sont toujours des compacts dans les espaces topologiques.

pour tout $k \geqslant n_0$. Nous savons aussi que ϕ est croissante et que $\phi(1/2^N) = U_N$. Donc pour tout $\epsilon < \frac{1}{2^k}$, nous avons

$$\phi(\epsilon) \subset U_k \tag{7.361}$$

et donc $x \notin \phi(\epsilon)$. Donc

$$f(x) \geqslant \frac{1}{2^k} > 0 \tag{7.362}$$

la dernière inégalité est stricte et c'est important.

En ce qui concerne la distance, si $d(x,y) = 0$, alors $f(y-x) = 0$. Cela signifie que $y - x = 0$ et donc que $x = y$. Ok.

(9) $d(x,y) = d(y,x)$ Oui, car tous les voisinages considérés sont symétriques. Donc $x - y \in \phi(r)$ si et seulement si $y - x \in \phi(r)$.

(10) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ Nous supposons que x, y et z sont trois points distincts, de telle sorte que les trois distances soient strictement positives.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition des distances comme infimums, et grâce au corolaire 1.561, il existe r et s dans $\varphi(\mathbb{D}_2)$ tels que :

$$d(x,y) < r < d(x,y) + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad d(y,z) < s < d(y,z) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{7.363}$$

En sommant :

$$d(x,y) + d(y,z) < r + s < d(x,y) + d(y,z) + \epsilon. \tag{7.364}$$

Vu que ϕ est croissante, on a $y - x \in \phi(r)$ et $z - y \in \phi(s)$; donc

$$z - x = (y - x) + (z - y) \in \phi(r) + \phi(s) \subset \phi(r + s) \tag{7.365}$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$d(x,z) \leqslant r + s < d(x,y) + d(y,z) + \epsilon. \tag{7.366}$$

(11) **Compatibilité avec la topologie** Nous devons montrer que les d-ouverts sont les mêmes que les ouverts de la topologie de V. Nous allons utiliser la proposition 7.2.

(11a) **Les ouverts sont des d-ouverts** Soit un ouvert $\mathcal{O}$ contenant $x \in V$. Alors $\mathcal{O} - x$ est un ouvert contenant 0, et il existe un n tel que

$$U_n \subset \mathcal{O} - x. \tag{7.367}$$

Nous avons alors

$$B(0, \frac{1}{2^n}) \subset U_n \subset \mathcal{O} - x. \tag{7.368}$$

Nous utilisant le lemme 7.327 pour additionner x dans toutes les inclusions :

$$B(x, \frac{1}{2^n}) = B(0, \frac{1}{2^n}) + x \subset \mathcal{O}. \tag{7.369}$$

Les boules forment donc une base de la topologie de V. Donc tous les ouverts de V sont des unions de boules et sont donc des d-ouverts.

(11b) **Les d-ouverts sont des ouverts**

Considérons une boule $B(0,r)$. Il existe un n tel que $B(0, 1/2^n) \subset B(0,r)$ et donc tel que

$$U_n \subset B(0,r). \tag{7.370}$$

En procédant par translations et tout ça, on en déduit que les $\{U_n + x\}_{n\in\mathbb{N}, x\in V}$ forment une base de la d-topologie. Donc les d-ouverts sont des ouverts.

□

7.15.5 Équivalence entre Cauchy et $\tau-$Cauchy

LEMooIAHSooFkXjvr

Lemme 7.336.
Soit un espace vectoriel topologique[160] V *et une distance* $d\colon V\times V\to\mathbb{R}^+$ *compatible*[161] *avec la topologie de* V*. Si* d *est invariante*[162]*, alors les suites de Cauchy pour* d *et les suites* τ*-Cauchy sont les mêmes.*

Démonstration. Nous avons deux implications à prouver.

(1) **Cauchy pour d implique τ-Cauchy** Soit (x_n), une suite de Cauchy dans V pour d, et un voisinage U de 0. Vu que d est compatible avec la topologie de V, il existe une boule ouverte $B(0,\epsilon)$ incluse à U. Soit $N>0$ tel que $m,n>N$ implique $d(x_n,x_m)<\epsilon$. Par invariance de la métrique, nous avons aussi
$$d(0,x_m-x_n)<\epsilon, \tag{7.371}$$
c'est-à-dire $x_m-x_n\in B(0,\epsilon)\subset U$. La suite (x_n) est donc τ-Cauchy.

(2) **τ-Cauchy implique Cauchy pour d** Soit (x_n), une suite τ-Cauchy dans V et $\epsilon>0$. Vu que $B(0,\epsilon)$ est un voisinage de 0 dans V, il existe N tel que $m,n>N$ implique $x_n-x_m\in B(0,\epsilon)$. Cela signifie que $d(0,x_n-x_m)<\epsilon$ et toujours par invariance, que $d(x_n,x_m)<\epsilon$.

□

Tout ceci nous mène à donner une large classe d'espaces vectoriels topologiques sur lesquelles les notions de suites de Cauchy pour une distance et τ-Cauchy coïncident.

THOooGQZSooAmQolf

Théorème-Définition 7.337.
Soit V *un espace vectoriel topologique métrisable*[163]*, alors il admet une métrique* d *compatible avec la topologie telle que une suite dans* V *est de Cauchy pour* d *si et seulement si elle est* τ*-Cauchy.*

Une ***suite de Cauchy*** *dans un espace vectoriel métrique* (E,d) *est une suite* τ*-Cauchy ou de Cauchy pour* d*.*

Démonstration. Soit d une métrique sur V satisfaisant au théorème 7.335. Vu qu'elle est invariante par translation, les suites d-Cauchy sont exactement les suites τ-Cauchy par le lemme 7.336. □

REMooUFQYooUVCCjs

Remarque 7.338.
Même si V est métrisable, si on choisit la métrique n'importe comment, on ne peut rien espérer.

7.339.
Sur les espaces vectoriels topologiques métrisables, nous pouvons donc parler de suite de Cauchy sans préciser si nous parlons de τ-Cauchy ou de d-Cauchy, parce que nous sous-entendons avoir choisi une métrique non seulement compatible avec la topologie, mais également invariante par translation.

Il reste cependant à traiter le cas d'un espace vectoriel topologique non métrisable. Dans ce cas, il n'y a pas de métrique, et la question de l'équivalence des définitions ne se pose pas.

Le théorème suivant donne la complétude de $\mathbb{R}$ et le critère de Cauchy pour les définitions métriques et topologiques usuelles. Lorsqu'on dit que $\mathbb{R}$ est complet, le plus souvent nous parlons de ce théorème, et non de 1.571 qui en est un lemme indispensable mais qui parle de notions différentes, bien que très liées.

THOooNULFooYUqQYo

Théorème 7.340 (Complétude de $\mathbb{R}$, critère de Cauchy[35])**.**
Nous avons :

(1) L'espace métrique $(\mathbb{R},d)$ *est complet (définition 7.313).*

ITEMooUUFCooIVtGgz

(2) Une suite dans $\mathbb{R}$ *est convergente (définition 7.14) si et seulement si elle est de Cauchy (définition 7.337).*

Démonstration. Tout ce théorème se base sur le fait que la définition de suite de Cauchy dans $(\mathbb{R},d)$ et de suite convergente dans $(\mathbb{R},d)$ coïncident avec les définitions correspondantes dans $\mathbb{R}$ vu comme simple corps ordonné (définitions 1.493).

Donc si (x_n) est de Cauchy dans $(\mathbb{R},d)$, elle est de Cauchy dans le corps ordonné $(\mathbb{R},\leqslant)$. Donc le théorème 1.571 nous dit que (x_n) est convergente dans $(\mathbb{R},\leqslant)$. Et donc convergente dans $(\mathbb{R},d)$.

Toutes les autres affirmations se prouvent de la même manière. □

[160] Définition 7.219.
[161] Définition 7.325.
[162] Définition 7.326.
[163] Voir la proposition 7.335 pour une condition suffisante.

Si vous n'êtes pas sûr ou si vous ne voulez pas étudier les notations de convergence et de suites de Cauchy dans les corps, vous pouvez simplement recopier la démonstration du théorème 1.571 en remplaçant partout $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{R}$, et aussi en remplaçant les $|x-y|$ par $d(x,y)$.

7.341.
Nous pouvons également mettre une structure d'espace métrique sur $\mathbb{C}$ en posant

$$d(z,z') = |z-z'|. \tag{7.372}$$

PROPooOIQKooPtyXgm

Proposition 7.342.
L'espace métrique $(\mathbb{C},d)$ est complet.

Démonstration. Commençons par nous rendre compte que pour tout $z\in\mathbb{C}$ nous avons $|\operatorname{Re}(z)|\leqslant|z|$. C'est bon ? Vous vous en êtes rendu compte ? Ok. Continuons.

Soit une suite de Cauchy (z_k) dans $\mathbb{C}$ et $\epsilon>0$. Si nous posons $x_j=\operatorname{Re}(z_j)$, nous avons

$$|x_k-x_l| = |\operatorname{Re}(z_k-z_l)| \leqslant |z_k-z_l|. \tag{7.373}$$

Vu que (z_k) est de Cauchy, il existe un N tel que si $k,l\geqslant N$,

$$|x_k-x_l| \leqslant |z_k-z_l| \leqslant \epsilon. \tag{7.374}$$

Donc la suite des parties réelles converge par la complétude de $(\mathbb{R},d)$ du théorème 7.340. Notez que le d ici n'est pas tout à fait le même, et que la démonstration fonctionne parce que la distance prise sur $\mathbb{R}$ est la restriction à $\mathbb{R}$ de la distance prise sur $\mathbb{C}$. Notons x la limite de (x_k).

De la même manière la suite des parties imaginaires $y_k=\operatorname{Im}(z_k)$ converge vers un réel que nous notons y. Avec tout cela, la suite z_k converge dans $\mathbb{C}$ vers $x+iy$. En effet pour ϵ donné et pour un k suffisament grand,

$$|z_k-(x+iy)| = \big|\operatorname{Re}(z_k)-x+i(\operatorname{Im}(z_k)-y)\big| \leqslant |x_k-x|+|y_k-y| \leqslant \epsilon. \tag{7.375}$$

□

7.16 Norme, espace vectoriel normé

SECooWKJNooKOqpsx

La valeur absolue est essentielle pour introduire les notions de limite et de continuité pour les fonctions d'une variable. Par exemple nous verrons dans la proposition 9.84 que la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue en a si et seulement si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $\delta>0$ tel que

$$|x-a|\leqslant\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon. \tag{7.376}$$

La quantité $|x-a|$ donne la « distance » entre x et a ; la définition de la continuité signifie que pour tout ε, il existe un δ tel que si a et x sont au plus à la distance δ l'un de l'autre, alors $f(x)$ et $f(a)$ ne seront éloignés au plus d'une distance ε.

La valeur absolue, dans $\mathbb{R}$, nous sert donc à mesurer des distances entre les nombres. Les principales propriétés de la valeur absolue sont :

(1) $|x|=0$ implique $x=0$,

(2) $|\lambda x|=|\lambda||x|$,

(3) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$

pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Afin de donner une notion de limite pour les fonctions de plusieurs variables, nous devons trouver un moyen de définir les notions de « taille » d'un vecteur et de distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$, avec $n>1$. La notion de « taille » doit satisfaire propriétés analogues à celles de la valeur absolue.

La première notion de « taille » pour un vecteur de $\mathbb{R}^2$ que nous vient à l'esprit est la longueur du segment entre l'origine et l'extrémité libre du vecteur. Cela peut être calculée à l'aide du théorème de Pythagore :

$$\text{taille de } (a,b) = \sqrt{a^2+b^2}. \tag{7.377}$$

Nous pouvons introduire une notion de distance entre les éléments de $\mathbb{R}^2$ de façon similaire :

$$d\big((a_x,a_y),(b_x,b_y)\big) = \sqrt{(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2}. \tag{7.378}$$

Cette définition a l'air raisonnable ; est-elle mathématiquement correcte ? Peut-elle jouer le rôle de la valeur absolue dans $\mathbb{R}^2$? Est-elle la seule définition possibles de « taille » et distance en $\mathbb{R}^2$?

Nous voulons formaliser les notions de « taille » et de distance dans $\mathbb{R}^n$, et plus généralement dans un espace vectoriel V de dimension finie. Pour cela nous nous inspirons des propriétés de la valeur absolue.

7.16.0.1 Critère de Cauchy

THOooRDYOooJHLfGq

Théorème 7.343 (Bolzano-Weierstrass, thème 33)**.**
Toute suite contenue dans un compact admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Nous faisons la preuve par l'absurde en supposant que (x_k) n'admette pas de sous-suite convergente. Soit $a \in K$; aucune sous-suite de (x_k) ne converge vers a. En particulier, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}_a$ de a et une partie finie I_a de $\mathbb{N}$ tel que $x_k \in \mathcal{O}_a$ seulement pour $k \in I_a$.

Les ouverts $\mathcal{O}_a$ recouvrent K ; nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini (c'est la définition 7.109 de la compactié). Nous avons donc des points $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{a_i} \tag{7.379}$$

et tels que pour chaque $\mathcal{O}_{a_i}$, nous avons $x_k \in \mathcal{O}_{a_i}$ seulement pour $k \in I_{a_i}$. Bien entendu, toute la suite est dans K et donc dans l'union.

En conclusion, nous avons $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{n} I_{a_i}$, ce qui prouve que $\mathbb{N}$ est un ensemble fini. Contradiction avec la proposition 1.204 qui dit que $\mathbb{N}$ est infini. □

CORooBTIPooUYWucb

Corolaire 7.344 ([1])**.**
Une suite dans un compact dont toutes les sous-suites convergentes convergent vers la même limite est convergente.

Démonstration. Soient un espace topologique X, un compact K et une suite (x_k) dans K. Nous supposons que toutes les sous-suites convergentes de (x_k) convergent vers $a \in X$. Nous devons montrer que $x_k \xrightarrow{X} a$.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe un voisinage V de a tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe k tel que $x_k \notin V$. Cela produit une sous-suite hors de V. Cette sous-suite est encore dans K et possède donc une sous(-sous)-suite convergente (théorème 7.343). Par hypothèse, cette sous-sous-suite doit converger vers a, ce qui est impossible.

Contradiction et le corolaire est prouvé. □

Lemme 7.345.
Une suite de Cauchy[164] *dans un espace vectoriel normé admettant une sous-suite convergente est elle-même convergente vers la même limite.*

Démonstration. Soit (a_n) une suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé E et ℓ la limite d'une sous-suite de (a_n). Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|a_m - a_p\| < \epsilon$ dès que $m, p \geqslant N$. Nous allons montrer que si $k > N$ alors $\|a_k - \ell\| < 2\epsilon$. Pour cela nous considérons un $n > N$ tel que $\|a_n - \ell\| \leqslant \epsilon$ et nous calculons

$$\|a_k - \ell\| \leqslant \|a_k - a_n\| + \|a_n - \ell\| \leqslant 2\epsilon. \tag{7.380}$$

□

Dans le cas des espaces de dimension finie, le fait d'être complet est automatique, comme le montre la proposition suivante.

PROPooGJDTooXOoYfw

Proposition 7.346.
Soit $\big(E, \|.\|\big)$ un espace vectoriel normé de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ qui est complet[165]*. Alors E est complet*[166]*.*

Pour rappel, la complétude de l'espace métrique $\mathbb{R}$ est la proposition 1.520.

Démonstration. Nous considérons une suite de Cauchy (f_n) dans E et si $\{e_\alpha\}$ est une base orthonormée de E nous définissons les coefficients $f_n = \sum_\alpha a_{n\alpha} e_\alpha$. La somme sur α est finie par hypothèse sur la dimension de E.

Nous avons

$$\|f_n - f_m\| = \|\sum_\alpha (a_{n\alpha} - a_{m\alpha}) e_\alpha\| = \sum_\alpha |a_{n\alpha} - a_{m\alpha}|^2. \tag{7.381}$$

[164] Définition 7.312.
[165] La définition est 1.493, mais si vous n'avez pas envie de vous embarquer trop loin, dites juste « toutes les suites de Cauchy convergent ». Typiquement c'est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
[166] Définition 7.313.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que si $m, n > N$ alors $\|f_n - f_m\| < \epsilon$. Avec ces conditions sur N, n et m nous avons

$$\sum_\alpha |a_{n\alpha} - a_{m\alpha}|^2 < \epsilon. \tag{7.382}$$

Pour chaque α nous avons donc $|a_{n\alpha} - a_{m\alpha}| < \sqrt{\epsilon}$.

Autrement dit, pour chaque α, la suite $(a_{n\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ et converge donc dans $\mathbb{K}$. Soit a_α la limite et définissons $f = \sum_\alpha a_\alpha e_\alpha$. Nous avons alors

$$\|f_n - f\| = \|\sum_\alpha (a_{n\alpha} - a_\alpha)e_\alpha\|, \tag{7.383}$$

dont la limite $n \to \infty$ est bien zéro. Donc la suite (f_n) converge vers $f \in E$. L'espace E est alors complet. □

PropContinueCompactBorne

Proposition 7.347.
Soient V et W deux espaces vectoriels normés. Soient K une partie compacte de V et $f\colon K \to W$ une fonction continue. Alors l'image $f(K)$ est compacte dans W.

Ce résultat est démontré dans un cadre plus général par le théorème 7.275.

Démonstration. Nous allons prouver que $f(K)$ est fermée et bornée.

(1) $f(K)$ **est fermé** Nous allons prouver que si (y_n) est une suite convergente contenue dans $f(K)$, alors la limite est également contenue dans $f(K)$. Dans ce cas, nous aurons que l'adhérence de $f(K)$ est contenue dans $f(K)$ et donc que $f(K)$ est fermé. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le vecteur y_n appartient à $f(K)$ et donc il existe un $x_n \in K$ tel que $f(x_n) = y_n$. La suite (x_n) ainsi construite est une suite dans le fermé K et possède donc une sous-suite convergente (proposition 7.343). Notons (x'_n) cette sous-suite convergente, et a sa limite : $\lim(x'_n) = a \in K$. Le fait que la limite soit dans K provient du fait que K est fermé.

Nous pouvons considérer la suite $f(x'_n)$ dans W. Cela est une sous-suite de la suite (y_n), et nous avons $\lim f(x'_n) = f(a)$ parce que f est continue. Par conséquent nous avons

$$f(a) = \lim f(x'_n) = \lim y_n. \tag{7.384}$$

Cela prouve que la limite de (y_n) est dans $f(K)$ et par conséquent que $f(K)$ est fermé.

(2) $f(K)$ **est borné** Si $f(K)$ n'est pas borné, nous pouvons trouver une suite (x_n) dans K telle que

EqfxnWgecn

$$\|f(x_n)\|_W > n \tag{7.385}$$

Mais par ailleurs, l'ensemble K étant compact (et donc fermé), nous avons une sous-suite (x'_n) qui converge dans K. Disons $\lim(x'_n) = a \in K$.

Par la continuité de f nous avons alors $f(a) = \lim f(x'_n)$, et donc

$$\|f(a)\|_W = \lim \|f(x'_n)\|_W. \tag{7.386}$$

La suite $f(x'_n)$ est alors une suite bornée, ce qui n'est pas possible au vu de la condition (7.385) imposée à la suite de départ (x_n).

□

CorFnContinueCompactBorne

Corolaire 7.348.
Si $f\colon K \to \mathbb{R}$ est une application continue où K est une partie compacte d'un espace vectoriel normé, alors $f(K)$ est borné.

Démonstration. En effet, la proposition 7.347 montre que $f(K)$ est compact et donc borné. □

7.17 Espaces métriques

7.17.1 Espaces métrisables

Définition 7.349.
*Un espace topologique est **métrisable** si il est homéomorphe à un espace métrique.*

PROPooKNVUooMbLZoy

Proposition 7.350.
Une fonction séquentiellement continue sur un espace métrisable et à valeurs dans un espace métrique est continue.

Démonstration. Soient E un espace métrique et $\phi\colon X \to (E,d)$ un homéomorphisme. Nous supposons que $f\colon X \to Y$ est séquentiellement continue. Nous considérons l'application $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon E &\to Y\\ a &\mapsto f\big(\phi^{-1}(a)\big).\end{aligned} \tag{7.387}$$

L'application ϕ^{-1} est continue et donc séquentiellement continue. De plus $\tilde{f}$ est séquentiellement continue. En effet si $a_k \xrightarrow{E} a$, alors

$$\tilde{f}(a_k) = f\big(\phi^{-1}(a_k)\big), \tag{7.388}$$

mais ϕ^{-1} est séquentiellement continue, donc $\phi^{-1}(a_k) \xrightarrow{X} \phi^{-1}(a)$, ce qui signifie que $\phi^{-1}(a_k)$ est une suite convergente dans X et donc

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{f}(a_k) = \lim_{k\to\infty} f\big(\phi^{-1}(a_k)\big) = f\big(\phi^{-1}(a)\big) = \tilde{f}(a). \tag{7.389}$$

L'application $\tilde{f}$ est donc séquentiellement continue. Mais étant donné que $\tilde{f}$ est définie sur un espace métrique (E) et à valeurs dans un métrique, elle est continue par la proposition 7.157. L'application $f = \tilde{f} \circ \phi$ est donc continue en tant que composée d'applications continues. □

7.17.2 Fonctions continues

La propriété suivante donne des caractérisations importantes de la continuité dans le cas des espaces métriques.

PropQZRNpMn

Proposition 7.351 (Continuité, ouverts et voisinages et limite[284])**.**
Soient $f\colon E \to F$ une application entre espaces métriques et $a \in E$. Alors nous avons équivalence entre les choses suivantes :

ItemCBUoRWJi
(1) *f est continue en a,*

ItemCBUoRWJii
(2) *Pour tout voisinage ouvert W de $f(a)$, il existe un voisinage ouvert V de a tel que $f(V) \subset W$.*

ItemCBUoRWJiii
(3) *Pour toute boule $W' = B\big(f(a),\epsilon\big)$, il existe une boule $V' = B(a,\delta)$ telle que $f(V) \subset W'$.*

ItemCBUoRWJiv
(4) *$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $f\big(B(a,\delta)\big) \subset B\big(f(a),\epsilon\big)$.*

ItemYNQpikrii
(5) *$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ où la limite est donnée par la définition 7.135,*

ItemYNQpikriii
(6) *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x-a\| < \delta$ implique $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$.*

La proposition 7.401 nous montrera que ces équivalences tiennent encore lorsque l'espace a une topologie de seminormes.

Démonstration. L'équivalence (1) ⇔ (2) est la définition 7.45. L'équivalence (3) ⇔ (4) est une simple paraphrase.

Montrons (2) ⇒ (3). Si $W' = B\big(f(a),\delta\big)$, nous avons un voisinage V de a tel que $f(V) \subset W'$. L'ensemble V contenant une boule autour de chacun de ses points[167], il en contient un autour de a : $V' = B(a,\delta) \subset V$. A fortiori nous avons $f(V') \subset W$.

Montrons (3) ⇒ (2). Si W est un ouvert autour de $f(a)$, il contient une boule autour de $f(a)$: $B\big(f(a),\epsilon\big) \subset W$. Il existe donc une boule $V' = B(a,\delta)$ telle que $f(V') \subset B\big(f(a),\epsilon\big) \subset W$.

L'équivalence (1) ⇔ (5) est la définition 7.45 de la continuité en un point couplée à l'unicité de la limite due à la proposition 7.138 parce qu'un espace métrique est séparé.

Prouvons (5) ⇒ (6). Soient $\epsilon > 0$ et $V = B\big(f(a),\epsilon\big)$. Étant donné que $f(a)$ est une limite de f pour $x \to a$, il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset V$. Soit $\delta > 0$ tel que $B(a,\delta) \subset W$; alors si $\|x-a\| < \delta$ nous avons $x \in B(x,\delta) \subset W$ et donc $f(x) \in B\big(f(a),\epsilon\big)$, c'est-à-dire $\|f(a) - f(x)\| < \epsilon$.

Enfin l'implication (2) ⇒ (5) est une réécriture de la définition de la limite en un point. □

[167] Cela est le théorème-définition 7.142 des ouverts dans un espace métrique, à ne pas confondre avec le théorème 7.8.

Voici un théorème qui parle de fermés emboîtés dans un espace métrique. Le corolaire 7.118 parle du cas $\cap_i A_i = \varnothing$ dans un compact.

ThoCQAcZxX

Théorème 7.352 (Théorème [285]).
Soit (E, d) un espace métrique. Il est complet si et seulement si toute suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro a une intersection qui se réduit à un seul point.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Condition suffisante**

Soit $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite de fermés emboités. Si nous choisissons des points $x_n \in F_n$, nous obtenons une suite (x_n) de Cauchy et qui est par conséquent convergente vu que l'espace est par hypothèse complet. De plus, pour chaque $N \geqslant n$, la queue de suite $(x_n)_{n\geqslant N}$ est contenue dans F_N et donc converge vers un élément de F_N (parce que ce dernier est fermé). Donc la limite de (x_n) est dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

De plus cette intersection a diamètre nul parce que le diamètre de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est majoré par tous les diamètres des F_n, lesquels sont arbitrairement petits par hypothèse. Donc l'intersection est réduite a un point.

(2) **Condition nécessaire**

Soit (x_n) un suite de Cauchy. Nous considérons les ensembles

$$F_n = \overline{\{x_i \text{ tel que } i \geqslant n\}}. \tag{7.390}$$

Le fait que la suite soit de Cauchy implique que $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$. Par hypothèse, nous avons alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{a\}. \tag{7.391}$$

Pour s'assurer que a est bien la limite de (x_n), il suffit de remarquer que

$$d(x_n, a) \leqslant \operatorname{diam} F_n \to 0. \tag{7.392}$$

□

PropGULUooNzqZKj

Proposition 7.353.
Soient (X, d) un espace topologique métrique et F un fermé de X. Nous avons $d(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

Démonstration. Si $x \in F$ alors $d(x, F) = 0$ parce que $d(x, x)$ fait partie de l'ensemble sur lequel nous prenons l'infimum.

Si réciproquement $d(x, F) = 0$, cela signifie que pour tout ϵ, il existe $x_\epsilon \in F$ tel que $d(x_\epsilon, x) \leqslant \epsilon$. En prenant $\epsilon = 1/k$ nous construisons une suite (x_k) d'éléments dans F vérifiant $d(x_k, x) = \frac{1}{k}$. Cela signifie que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ par la proposition 7.322(1).

Par la caractérisation séquentielle des fermés (un fermé contient les limites de toutes ses suites, proposition 7.154), la suite (x_k) étant dans F, la limite est dans F. Donc $x \in F$. □

LemooynkH

Lemme 7.354.
Soit A_n une suite décroissante de fermés non vides dans un espace métrique[168] compact K. Alors

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \tag{7.393}$$

est non vide.

Démonstration. Soit (x_n) une suite dans K telle que $x_n \in A_n$. La suite étant contenue dans A_1, et A_1 étant compact (lemme 7.121), elle possède une sous-suite $(y_n = x_{\sigma_1(n)})$ convergente dont la limite est dans A_1 par le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.194. Une queue de la suite y_n est dans A_2 et nous considérons donc une sous-suite convergente dans A_2 donnée par

$$z_n = y_{\sigma_2(n)} = x_{\sigma_1\sigma_2(n)}. \tag{7.394}$$

[168] L'hypothèse métrique provient de l'utilisation de Bolzano-Weierstrass, lequel est vrai pour les espaces séquentiellement compacts, dont les espaces métriques.

En continuant ainsi nous construisons une suite convergente dans A_k. Nous considérons enfin la suite

$$y_n = x_{\sigma_1 \dots \sigma_n(n)}. \tag{7.395}$$

Pour tout k, une queue de cette suite est une sous-suite de $x_{\sigma_1 \dots \sigma_k(n)}$ et par conséquent cette suite converge dans A_k. La limite de cette suite est donc dans l'intersection demandée. □

Remarque 7.355.
Cette propriété est fausse pour les ouverts. Par exemple

$$\bigcap_{n>1}]0, \frac{1}{n}[= \varnothing. \tag{7.396}$$

LemKIcAbic

Lemme 7.356.
Si K est un compact dans un espace métrique et F un fermé disjoint de K, alors $d(K,F) > 0$.

Démonstration. La fonction

$$\begin{aligned} K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x,F) \end{aligned} \tag{7.397}$$

est une fonction continue sur K, et donc atteint son minimum par le théorème de Weierstrass 7.196. Soit $x_0 \in K$ un point de K qui réalise ce minimum. Si $d(x_0,F) = 0$, alors on aurait une suite (x_n) dans F qui convergerait vers x_0, mais F étant fermé cela signifierait que x_0 serait dans F, ce qui contredirait l'hypothèse que F et K sont disjoints. □

PropLHWACDU

Proposition 7.357.
Soient (X,d) un espace métrique compact et (u_n) une suite de X telle que

$$\lim_{n\to\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0. \tag{7.398}$$

Alors l'ensemble des points d'accumulation[169] *de (u_n) est connexe.*

Démonstration. Nous notons Γ l'ensemble des points d'accumulation de la suite.

(1) **Γ est compact** Nous notons $A_p = \{u_n \text{ tel que } n \geqslant p\}$ et nous avons

$$\Gamma = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p} \tag{7.399}$$

parce que si $x \in \Gamma$, alors pour tout n, il existe $m > n$ tel que $x_m \in B(x,\epsilon)$, et donc tel que $x \in B(x_m,\epsilon)$. Donc pour tout ϵ et pour tout p, l'intersection $B(x,\epsilon) \cap A_p$ est non vide.

En tant qu'intersection de fermés, Γ est fermé (lemme 7.6). En tant que fermé dans un compact, Γ est compact (lemme 7.121).

(2) **Recouvrement par deux compacts**

Supposons que Γ ne soit[170] pas connexe. Nous pouvons alors considérer S et O, deux ouverts disjoints recouvrant Γ et intersectant tous deux Γ. Nous posons alors

$$A = S \cap \Gamma \tag{7.400a}$$
$$B = O \cap \Gamma, \tag{7.400b}$$

et nous avons évidemment $\Gamma = A \cup B$. Montrons que A est fermé (B le sera aussi par le même raisonnement). Soit une suite d'éléments de $S \cap \Gamma$ convergent dans X. Alors la limite est dans $\bar{\Gamma} = \Gamma$ et donc elle est donc O ou S, mais elle est certainement dans $\bar{S}$. Cependant $\bar{S}$ n'intersecte pas O. En effet si $x \in \bar{S} \cap O$, alors tout voisinage de x intersecterait S, mais il y a des voisinages de x étant inclus dans O parce que O est ouvert ; cela donnerait une intersection entre O et S, ce qui est impossible. Donc la limite n'est pas dans O et donc elle est dans S. Au final la limite est dans $S \cap \Gamma$, ce qui prouve son caractère fermé.

Comme d'habitude, $\Gamma \cap S$ est compact parce que fermé dans un compact[171].

[169] Définition 7.43.
[170] est-ce qu'il faut vraiment un subjonctif ici ?
[171] Lemme 7.121.

(3) **Décomposition en trois morceaux**

Vu que A et B sont des compacts disjoints, nous avons $d(A,B)=\alpha>0$ pour un certain α par le lemme 7.356. Nous notons

$$A'=\{x\in X \text{ tel que } d(x,A)<\frac{\alpha}{3}\} \tag{7.401a}$$

$$B'=\{x\in X \text{ tel que } d(x,B)<\frac{\alpha}{3}\} \tag{7.401b}$$

Nous avons $A'=\bigcup_{x\in A}B(x,\frac{\alpha}{3})$ et donc en tant qu'union d'ouverts, A' est ouvert (définition de la topologie). Même chose pour B'.

Enfin nous notons

$$K=X\setminus(A'\cup B') \tag{7.402}$$

qui est fermé en tant que complémentaire d'ouvert, et donc compact. Étant donné que $A\subset A'$ et $B\subset B'$, nous avons $K\cap\Gamma=\varnothing$.

L'idée est maintenant de montrer que K contient un point d'accumulation de (u_n).

(4) **Sous-suites de (u_n)**

L'hypothèse sur la suite (u_n) nous indique qu'il existe un N_0 tel que $\forall n\geqslant N_0$,

$$d(u_n,u_{n+1})<\frac{\alpha}{3}. \tag{7.403}$$ EqIHioHjW

Soient $N>N_0$ et $x_0\in A$. Étant donné que x_0 est point d'accumulation de la suite, il existe $n_1>N$ tel que $d(x_0,u_{n_1})<\frac{\alpha}{3}$. Même chose dans B : nous prenons $y_0\in B$ et un naturel $n_2>n_1$ tel que $d(y_0,u_{n_2})<\frac{\alpha}{3}$. Nous avons $u_{n_1}\in A'$ et $u_{n_2}\in B'$.

Soit n_0 le plus petit naturel supérieur à n_1 tel que $u_{n_0}\notin A'$. Cela existe parce que $u_{n_2}\in B'$ et $B'\cap A'=\varnothing$, mais n_0 n'est pas n_2 lui-même parce que $d(A',B')\geqslant\frac{\alpha}{3}$ alors que nous considérons $n_0,n_1,n_2>N_0$ et donc pour tous les i entre n_1 et n_2 (compris), $d(u_i,u_{i+1})<\frac{\alpha}{3}$. Notons qu'ici le strict dans la condition (7.403) est important. Nous avons donc $N_0<n_1<n_0<n_2$.

Nous allons maintenant montrer que u_{n_0} est dans K. C'est fait pour : il est loin en même temps de A' et de B'. En utilisant l'inégalité triangulaire à l'envers, nous avons

$$\begin{aligned}d(u_{n_0},B)&\geqslant d(u_{n_0-1},B)-d(u_{n_0-1},u_{n0})\\&\geqslant d(A,B)-d(u_{n_0-1},A)-d(u_{n_0-1},u_{n_0})\\&\geqslant\alpha-\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha}{3}\\&=\frac{\alpha}{3}.\end{aligned} \tag{7.404}$$

Pour la dernière inégalité nous avons utilisé le fait que u_{n_0-1} n'est pas dans A'. Bref, nous avons montré que u_{n_0} n'est pas dans B' (dans la définition de ce dernier nous avons bien une inégalité stricte). Vu que par définition u_{n_0} n'est pas non plus dans A', nous avons $u_{n_0}\in K$.

Nous avons montré jusqu'à présent que pour tout $N\geqslant N_0$, il existe un $n_0\geqslant N$ tel que $u_{n_0}\in K$. Cela nous construit donc une sous-suite (v_n) de (u_n) contenue dans K. En tant que suite dans le compact K, la suite (v_n) admet un point d'accumulation dans K. Ce point est également point d'accumulation de la suite (u_n) complète, ce qui donne un point d'accumulation de (u_n) dans K et donc une contradiction.

Nous concluons que Γ est connexe. □

Encore une petite conséquence sans ambition du théorème de Bolzano-Weierstrass.

PropHNylIAW

Proposition 7.358.
Si (x_n) est une suite dans un compact telle que toute sous-suite convergente ait le même point x comme limite. Alors la suite entière converge vers x.

Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe un ϵ tel que pour tout $N>0$, il existe $n>N$ avec $d(x_n,x)>\epsilon$. Cela nous donne une sous-suite de (x_n) composée d'éléments tous à une distance de x supérieure à ϵ. Nous la nommons (y_n) ; c'est une suite dans un compact qui admet donc une sous-suite convergente (et une telle sous-suite est une sous-suite de (x_n)) dont la limite devrait être x, mais c'est impossible par construction. □

LemGDeZlOo

Lemme-Définition 7.359 ([286]).
Soit Ω un ouvert dans un espace métrique E. Il existe une suite (K_n) de compacts tels que

(1) $K_n \subset \Omega$

(2) $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \Omega$

(3) $K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})$.

Une telle suite de compacts vérifie alors

(1) Il existe δ_n tel que pour tout $z \in K_n$, $B(z, \delta_n) \subset K_{n+1}$.

ITEMooBPYPooEMhSmY

(2) Tout compact de Ω est inclus dans $\text{Int}(K_n)$ pour un certain n.

*Une telle suite de compacts est une **suite exhaustive** de compacts pour Ω.*

Démonstration. Nous considérons les ensembles

$$V_n = \{z \in E \text{ tel que } |z|\} \cup \bigcup_{a \notin \Omega} B(a, \frac{1}{n}), \tag{7.405}$$

et nous définissons $K_n = V_n^c$. Vérifions que ces ensembles vérifient tout ce qu'il faut.

(1) $\underline{K_n \subset \Omega}$ Si $a \notin \Omega$ alors a est dans tous les V_n et donc dans aucun des K_n ; nous avons donc bien $\overline{K_n \subset \Omega}$.

(2) $\underline{\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \Omega}$ Nous avons déjà prouvé que $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n \subset \Omega$. Pour avoir l'inclusion dans l'autre sens, soit $z \in \Omega$. Nous prenons $n_1 > |z|$ puis n_2 tel que $B(z, \frac{1}{n_2}) \subset \Omega$. Alors $z \in K_n$ avec $n > \max(n_1, n_2)$. Pour ce choix de n, nous avons $z \in K_n$. Cela prouve que $\Omega \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$.

(3) $\underline{K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})}$ Soit $z \in K_n$. L'élément z vérifie $d(z, \Omega^c) \geqslant \frac{1}{n}$. Du coup si nous prenons δ tel que

$$\frac{1}{n+1} < \delta < \frac{1}{n} \tag{7.406}$$

alors $B(z, \delta) \subset K_{n+1}$.

(4) $\underline{\textbf{Les } K_n \textbf{ sont compacts}}$ Enfin, les K_n sont tous compacts. En effet ils sont bornés parce que $K_n \subset \overline{B(0, n)}$ et ensuite K_n est fermé en tant que complémentaire d'un ouvert (V_n est ouvert en tant qu'union d'ouverts).

Nous passons maintenant aux propriétés, qui sont indépendantes de la façon dont nous avons construit les K_n vérifiant les conditions.

(1) Nous pouvons considérer la fonction $K_n \to \mathbb{R}$ donnée par $z \mapsto d(z, K_{n+1}^c)$. Vu que $K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})$, c'est une fonction (continue sur le compact K_n) prenant des valeurs strictement positives. Elle a donc un minimum strictement positif. Si δ_n est plus petit que ce minimum nous avons $B(z, \delta_n) \subset K_{n+1}$ pour tout $z \in K_n$.

(2) D'abord nous avons $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Int}(K_n)$. En effet nous avons

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Int}(K_{n+1}) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Int}(K_n). \tag{7.407}$$

L'inclusion dans l'autre sens est facile.

Soit K compact dans Ω. Vu que Ω est l'union des $\text{Int}(K_n)$, nous avons

$$K \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Int}(K_n). \tag{7.408}$$

Cela donne à K un recouvrement par des ouverts dont nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini par compacité. Les K_n étant croissants, du recouvrement fini, il suffit de prendre le plus grand (disons K_m) et nous avons $K \subset \text{Int}(K_m)$.

□

Notons qu'avec la suite de K_n telle que construite, le dernier point est réglé en prenant

$$\frac{1}{n+1} < \delta_n < \frac{1}{n}. \tag{7.409}$$

LEMooWRIXooSBHavt

Lemme 7.360 ([287]).
Soient un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ ainsi que des ouverts $\{\Omega_i\}_{i=1,\dots,n}$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$.
Il existe des compacts $\{K_i\}_{i=1,\dots,n}$ tels que

- $K_i \subset \Omega_i$,
- $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$.

Démonstration. Soit $x \in K$. Vu que les Ω_i recouvrent K, il existe un $k(x) \in \{1,\dots,n\}$ tel que $x \in \Omega_{k(x)}$. De plus, vu que $\Omega_{k(x)}$ est ouvert, il existe un voisinage de x contenu dans $\Omega_{k(x)}$ (théorème 7.8). Autrement dit, il existe $r(x) > 0$ tel que

$$\overline{B\big(x, r(x)\big)} \subset \Omega_{k(x)}. \tag{7.410}$$

Vu que l'ensemble $\{B\big(x, r(x)\big)\}_{x\in k}$ est un recouvrement de K par des ouverts, nous pouvons en extraire un sous-recouvrent fini[172]. Soient donc $x_1, \dots, x_m \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B\big(x_i, r(x_i)\big). \tag{7.411}$$

EQooETROooCMLJsx

Pour chaque $j = 1, \dots, n$, nous posons

$$A_j = \big\{l \in \{1,\dots,m\} \text{ tel que } k(x_l) = j\big\}. \tag{7.412}$$

Et enfin nous définisssons, pour $j = 1, \dots, n$ les parties

$$K_j = \bigcup_{l\in A_j} \overline{B\big(x_l, r(x_l)\big)} \tag{7.413}$$

et il nous reste à prouver que ces ensembles répondent bien à la question.

(1) $\bigcup_{j=1}^n A_j = \{1,\dots,m\}$ **est une union disjointe** Un élément l de $A_i \cap A_j$ devrait vérifier $i = k(x_l) = j$. Si $s \in \{1,\dots,m\}$, alors $s \in A_{k(x_s)}$. Donc oui, l'union des A_j est tout $\{1,\dots,m\}$.

(2) $K_j \subset \Omega_j$ Nous avons

$$K_j = \bigcup_{l\in A_j} \overline{B\big(x_l, r(x_l)\big)} \subset \bigcup_{l\in A_j} \Omega_{k(x_l)} = \bigcup_{l\in A_j} \Omega_j = \Omega_j. \tag{7.414}$$

(3) $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$. Par (7.411), et vu que $\{1,\dots,m\} = \bigcup_{j=1}^n A_j$,

$$\begin{aligned}
K &\subset \bigcup_{i=1}^m B\big(x_i, r(x_i)\big) && \text{(7.415a)}\\
&= \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{l\in A_j} B\big(x_l, r(x_l)\big) && \text{(7.415b)}\\
&= \bigcup_{j=1}^n \underbrace{\bigcup_{l\in A_j} \overline{B\big(x_l, r(x_l)\big)}}_{K_j} && \text{(7.415c)}\\
&= \bigcup_{j=1}^n K_j. && \text{(7.415d)}
\end{aligned}$$

□

[172] C'est la définition 7.109 d'un compact.

7.17.3 Théorème de Tykhonov

Pour des versions plus simples du théorème de Tykhonov, voir le thème 33.

ThoFWXsQOZ

Théorème 7.361 (Tykhonov)**.**
Un produit quelconque d'espaces métriques non vides est compact si et seulement si chacun de ses facteurs est compact.

PROPooDXUIooUUmgYN

Proposition 7.362 ([1])**.**
Soient des espaces topologiques $\{X_i\}_{i\in I}$ et des parties compactes $K_i \subset X_i$. Alors $\prod_{i\in I} K_i$ est compact dans $\prod_{i\in I} X_i$.

7.17.4 Ensembles enchainés

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 7.363.
*Une **ϵ-chaine** joignant les points a et b de X est une suite finie $(u_0, \dots, u_n)$ dans X telle que $u_0 = a$, $u_n = b$ et pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$ nous avons $d(u_n, u_{n+1}) \leqslant \epsilon$.*

*Une partie A de X est **bien enchainée** si pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $a, b \in A$, il existe une ϵ-chaine joignant a et b dans A.*

Lemme 7.364.
Les rationnels dans $\mathbb{R}$ sont bien enchainés.

Démonstration. Soient p et q des rationnels avec $p < q$, ainsi que $\epsilon > 0$. Le lemme 1.556 nous permet de considérer un rationnel δ vérifiant $0 < \delta < \epsilon$. Et nous définissons les rationnels

$$r_k = p + k\delta. \tag{7.416}$$

Vu que $\mathbb{Q}$ est archimédien[173], il existe K tel que $r_K > q$. D'autre part, $r_0 = p < q$. Donc il existe $N = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } r_k < q\}$.

Nous considérons la chaine $(r_0, \dots, r_N, q)$. Elle débute à $r_0 = p$ et termine à q ; pas de problèmes avec ça. À part pour le dernier pas, nous avons

$$|r_n - r_{n-1}| = \delta < \epsilon, \tag{7.417}$$

donc c'est bien une ϵ-chaine. Il reste à voir $|q - r_N|$. Nous avons $r_N \leqslant q \leqslant r_{N+1}$, et donc

$$0 \leqslant q - r_N \leqslant r_{N+1} - r_N = \delta \leqslant \epsilon. \tag{7.418}$$

Donc ok aussi pour ce dernier pas. □

PROPooBUNOooIvfugn

Proposition 7.365 ([288, 1])**.**
Un espace métrique connexe[174] est bien enchainé.

Démonstration. Soit un espace métrique X et $\epsilon > 0$. La relation $x \sim y$ si et seulement si x et y peuvent être reliés par une ϵ-chaine est une relation d'équivalence.

Soit $x \in X$. Nous prouvons que la classe $[x]$ est ouverte. En effet soit $y \in [x]$, si $z \in B(y, \epsilon)$ nous avons $z \in [y]$, et donc $z \in [x]$. Nous en déduisons que $B(y, \epsilon) \subset [x]$, et donc que $[x]$ est ouvert par le théorème 7.8.

Donc les classes sont des ouverts.

Supposons que X n'est pas bien enchainé. Alors il existe ϵ pour lequel X possède plus qu'une classe d'équivalence. Soit $\{[x_k]\}_{k\in I}$ l'ensemble des classes d'équivalences.

Nous considérons un $i_0 \in I$ quelconque, et nous définissons les ouverts $A = [x_{i_0}]$ et

$$B = \bigcup_{k\in I\setminus\{i_0\}} [x_k]. \tag{7.419}$$

Ce sont deux ouverts disjoints qui recouvrent X qui n'est donc pas connexe. □

PROPooXHTWooZibddZ

Proposition 7.366.
La fermeture d'un ensemble bien enchainé dans un espace métrique compact (X, d) est connexe.

[173] Proposition 1.514.
[174] Définition 7.102.

Démonstration. Soit $A \subset X$ un ensemble bien enchainé, et soient $a, b \in \bar{A}$. Nous construisons une suite (u_k) dans A de la façon suivante. Pour chaque $n > 0$ nous prenons $a' \in B(a, \frac{1}{n}) \cap A$ et $b' \in B(b, \frac{1}{n}) \cap A$. Ensuite nous considérons une $\frac{1}{n}$-chaine $\{v_i^{(n)}\}_{i \in I_n}$ dans A entre a' et b'. Ici l'ensemble I_n est fini. La suite (u_k) est simplement construite en mettant bout à bout les éléments $v_i^{(n)}$.

La suite ainsi construite est une suite dans A admettant a et b comme points d'accumulation (les autres points d'accumulation sont également dans $\bar{A}$) et telle que $\lim_{k\to\infty} d(u_k, u_{k+1}) = 0$. Par conséquent la proposition 7.357 nous dit que l'ensemble des points d'accumulation de (u_k) est connexe dans X. Nous le notons $C_{a,b}$.

Si nous fixons $a \in \bar{A}$, alors nous avons

$$\bigcup_{x \in \bar{A}} C_{a,x} = \bar{A}. \tag{7.420}$$

Vu que le membre de gauche est une union de connexes, c'est un connexe par la proposition 7.107. □

CORooSIKCooTncoQm

Corolaire 7.367.
Un espace métrique compact est connexe si et seulement si il est bien enchainé.

Démonstration. Dans le sens direct, c'est la proposition 7.365. Dans l'autre sens, si X est compact, alors X est fermé par le lemme 7.121(2). Et vu qu'il est fermé et bien enchainé, la proposition 7.366 implique qu'il est connexe. □

7.17.5 Produit fini d'espaces métriques

Pour rappel, la distance sur un espace produit est donnée par la définition 7.281.

THOIYmxXuu

Théorème 7.368 ([1]).
Un produit fini d'espaces métriques non vides est compact si et seulement si chacun de ses facteurs est compact.

Démonstration. Soient K_1,..., K_n des compacts et $K = K_1 \times \ldots \times K_n$ le produit muni de sa métrique usuelle de la définition (7.281) (attention : chacun des K_i peut être de dimension infinie) :

$$d(\alpha, \beta) = \max\{d_i(\alpha_i, \beta_i)\} \tag{7.421}$$

où d_i est la distance sur K_i. Si (α_n) est une suite dans K alors la suite $(\alpha_n)_1$ est une suite dans le compact K_1 dont nous pouvons extraire une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass 7.194). De la sous-suite de α correspondante nous extrayons la sous-suite pour la seconde composante, etc.

En fin de compte nous avons une sous-suite (que nous nommons α également) donc chacune des composantes est convergente. Notez que nous utilisons ici de façon cruciale le fait que nous ayons qu'un nombre fini de facteurs.

Autrement dit, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, l'application $p \mapsto (\alpha_p)_i$ est une suite dans K_i, et cette suite converge vers ℓ_i.

Soit $\epsilon > 0$ pour chaque $i = 1, \ldots, n$, il existe $N_i > 0$ tel que si $p > N_i$ alors

$$d_i\big((\alpha_p)_i, \ell_i\big) \leqslant \epsilon. \tag{7.422}$$

En prenant $N = \max_k N_k$ et $n > N$ nous avons

$$d\big(\alpha_n, (\ell_1, \ldots, \ell_n)\big) \leqslant \epsilon. \tag{7.423}$$

Par conséquent de la suite (α) nous avons extrait une sous-suite convergente et la partie « réciproque » de Bolzano-Weierstrass nous assure alors que K est compact.

À l'inverse si un des facteurs n'est pas compact (mettons K_1) alors nous prenons un recouvrement $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ de K_1 par des ouverts duquel il est impossible d'extraire un sous-recouvrement fini. Ensuite nous posons

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{O}_i \times K_2 \times \ldots \times K_n, \tag{7.424}$$

qui est un recouvrement de K par des ouverts (de K) d'où aucun sous-recouvrement fini ne peut être extrait. □

Pour la culture générale, il y a bien entendu moyen de faire des produits dénombrables et pire d'espaces métriques.

Définition 7.369 ([289]).
Soient (E_n, d_n) des espaces métriques. Sur l'ensemble produit $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ nous définissons la métrique

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} d'_k(x_i, y_i) \tag{7.425}$$

où $d'_i = \min(d_i, 1)$.

On peut montrer que ce d est bien une distance et que (E,d) devient un espace métrique.

ThoKKBooNaZgoO

Théorème 7.370 (Tykhonov dénombrable[289]).
Un produit dénombrable d'espaces métriques non vides est compact si et seulement si chacun de ses facteurs est compact.

Note : ce résultat est encore valable pour un produit quelconque, c'est le théorème de Tykhonov 7.361.

7.17.6 Équicontinuité

DEFooDHQDooFfIvsX

Définition 7.371 ([1, 290, 291]).
*Soient un espace topologique X et un espace vectoriel topologique Y. Une famille H d'applications $X \to Y$ est **équicontinue** en $a \in X$ si pour tout voisinage V de 0 dans Y, il existe un voisinage U de a dans X tel que*

$$h(U) \subset h(a) + V \tag{7.426}$$

pour tout $h \in H$.

Nous disons que H est équicontinue si elle est équicontinue en tout point.

LEMooMIHJooUhvPgM

Lemme 7.372 ([1]).
Soient un espace métrique X, un espace vectoriel normé Y ainsi qu'une famille H d'isométries linéaires $X \to Y$. Alors H est équicontinue.

Démonstration. Nous suivons la définition 7.371 de l'équicontinuité. Soient $a \in X$ et un voisinage V de 0 dans Y. Nous considérons $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset V$, et nous posons $U = B(a,r)$.

Si $x \in U$ et $h \in H$, nous avons

$$\|h(x) - h(a)\| = \|h(x-a)\| = d(x,a) < r, \tag{7.427}$$

de telle sorte que $h(x) \in h(a) + B(0,r)$.

Donc H est équicontinue en a. Vu que a est arbitraire, H est équicontinue en tout point et donc équicontinue sur X. □

LEMooKEMRooYyqsBl

Lemme 7.373 ([291]).
Soit une famille de fonctions $f_i \colon X \to E$ indexée par un ensemble I où X est un espace topologique et E un espace métrique. Cette famille est équicontinue[175] en $x \in X$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$\|f_i(x) - f_i(y)\| < \epsilon \tag{7.428}$$

pour tout i dès que $y \in V$.

La proposition suivante permet de montrer que certaines fonctions définies par une limite sont continues. Ce sera par exemple le cas de la fonction puissance, proposition 12.431.

PROPooICNNooAMjcut

Proposition 7.374 ([1, 291]).
Soit une suite équicontinue (f_i) de fonctions qui converge simplement vers f, alors f est continue.

Démonstration. Soit une suite équicontinue $f_i \colon X \to E$ convergeant simplement vers f. Soit $a \in X$. Nous prouvons que f est continue en a. Pour cela nous considérons $\epsilon > 0$ et, conformément à l'hypothèse équicontinuité un voisinage V de a tel que $|f_i(a) - f_i(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in V$.

Nous avons la majoration

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(a)| + |f_i(a) - f(a)|. \tag{7.429a}$$

Plusieurs majorations.

[175] Définition 7.371.

- Vu que $f_i \to f$, il existe N_1 tel que $|f(x) - f_i(x)| < \epsilon$ pour tout $i > N_1$.
- De plus, par définition de V, nous avons aussi $|f_i(x) - f_i(a)| \leqslant \epsilon$.
- Vu que $f_i \to f$, il existe N_2 tel que $|f_i(a) - f(a)| < \epsilon$ pour tout $i > N_2$.

Donc en prenant $x \in V$ et $i > \max\{N_1, N_2\}$ nous avons

$$|f(x) - f(a)| \leqslant 3\epsilon. \tag{7.430}$$

□

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 7.375
Je n'ai pas du tout vérifié si le lemme 7.376 est correct. Sinon, il faudra trouver autre chose dans la preuve de la proposition 21.89.

LEMooSXWKooAmqeic

Lemme 7.376 ([1]).
Si A est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$, alors $\texttt{proj}_{\mathbb{R}^+}(A)$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

7.17.7 Continuité uniforme

DEFooYIPXooQTscbG

Définition 7.377 ([292]).
*Soient deux espaces métriques (E, d) et (E', d'). Une application $f : E \to E'$ est **uniformément continue** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $d(x, y) \leqslant \delta$ implique $d'\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \epsilon$.*

Dans l'uniforme continuité, le α qui fait fonctionner ϵ doit le faire fonctionner pour tous les $x, y \in E$. C'est la différence avec la continuité simple dans laquelle nous pouvons choisir, pour un même ϵ, un δ différent en chaque point.

Nous parlons plus d'uniforme continuité dans la section 12.7.

7.18 Partie maigre et nulle part dense

Une des caractérisations 7.418 des espaces de Baire parle de parties maigres.

DEFooTYNBooIaQINO

Définition 7.378 (nulle part dense[293]).
Soit un espace topologique X et une partie $A \subset X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

ITEMooFFSAooUdcUuV

(1) $\text{Int}(\bar{A}) = \varnothing$

ITEMooYKDEooYwNblV

(2) Tout ouvert de X inclus dans $\bar{A}$ est vide.

ITEMooOYOCooLkyrFx

(3) A n'est dense dans aucun ouvert non vide de X.

ITEMooGYICooSAelba

(4) Pour tout ouvert non vide U de X, il existe un ouvert V non vide tel que $V \subset U$ et $V \cap A = \varnothing$.

*Une telle partie est **nulle part dense**.*

DEFooYKHUooPGZvLz

Définition 7.379 ([294]).
Soient un espace topologique X et une partie A de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) A est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

(2) A est réunion dénombrable de parties nulle part denses[176]

*Une telle partie est dite **maigre**.*

ThoQGalIO

Théorème 7.380 (Baire[295]).
Une réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses est d'intérieur vide.

Démonstration. Soient $a \in S$ et $\epsilon > 0$. Nous allons trouver un élément dans $B(a, \epsilon)$ qui n'est pas dans S. Nous commençons par choisir $x_1 \in B(a, \epsilon)$ et $r_1 < \frac{\epsilon}{2}$ tel que

$$B(x_1, r_1) \cap A_1 = \varnothing. \tag{7.431}$$

Ensuite nous choisissons $x_2 \in B(x_1, r_1)$ et $r_2 < \epsilon/4$ tel que $B(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1)$ et $B(x_2, r_2) \cap A_2 = \varnothing$. Notons que $B(x_2, r_2) \cap A_1 = \varnothing$ aussi, par construction.

Par récurrence nous construisons une suite d'éléments x_n et de rayons $r_n < \epsilon/2^n$ tels que

[176] Définition 7.378.

(1) $B(x_n, r_n) \cap A_j = \varnothing$ pour tout $j \leqslant n$,

(2) $\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})$.

Cette suite étant de Cauchy (parce que contenue dans des intervalles emboîtés de rayon décroissant vers zéro), elle converge[177] donc vers un point qui en particulier appartient à $B(a, \epsilon)$. Mais la limite n'est dans aucun des A_n et donc pas dans S. □

7.19 Seminormes

Les principaux espaces topologiques construit avec des seminormes seront les espaces de fonctions de la définition 30.14. Nous verrons également la topologie $*$-faible sur $\mathscr{D}'(\Omega)$ en la définition 30.30.

7.19.1 Seminorme

DefPNXlwmi

Définition 7.381.
*Si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), une **seminorme** sur E est une application $p\colon E \to \mathbb{R}$ telle que*

ItemSHnimhDii

(1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

ItemSHnimhDiii

(2) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$

pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque 7.382.
Deux remarques.

(1) La seule différence avec une norme est qu'une seminorme peut s'annuler en des éléments non-nuls de l'espace.

(2) Une seminorme prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. En particulier pour que p soit une seminorme, il faut que $p(x) < \infty$ pour tout x.

LEMooHTOAooGmRGZL

Lemme 7.383 ([296, 269])**.**
Soit une seminorme[178] p. Nous avons

ITEMooFRCRooZBWTxH

(1) $p(0) = 0$,

ITEMooHVWHooAVZsTf

(2) $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y)$.

ITEMooXCHBooDoBvpL

(3) $p(x) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in X$.

ITEMooQIGMooVNDakF

(4) $\ker(p)$ *est un sous-espace vectoriel.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Pour la première affirmation, il suffit de poser $\lambda = 0$ dans l'inégalité de définition $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

(2) **Pour (2)** Nous avons d'une part $p(x + h) \leqslant p(x) + p(h)$ et d'autre part $p(x) \leqslant p(x + h) + p(-h) = p(x + h) + p(h)$. En isolant $p(x + h) - p(x)$ dans chacune ce des deux inégalités,

$$-p(h) \leqslant p(x + h) - p(x) \leqslant p(h) \tag{7.432}$$

ou encore

$$|p(x + h) - p(x)| \leqslant p(h) \tag{7.433}$$

qui donne le résultat demandé en posant $h = y - x$.

(3) **Pour (3)** Soit $x \in X$. Nous appliquons le point (2) avec $y = 0$, en nous souvenant que $p(0) = 0$: $|p(x) - p(0)| \leqslant p(x - 0)$, c'est-à-dire $0 \leqslant |p(x)| \leqslant p(x)$.

[177] Par la proposition 1.520
[178] Définition 7.381.

(4) **Pour (4)** Soient $x, y \in \ker(p)$ ainsi que $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. En utilisant les points précédents,

$$0 \leqslant p(\alpha x + \beta y) \leqslant |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0. \tag{7.434}$$

Vu que les inégalités commencent par 0 et finissent par zéro, ce sont toutes les égalités, et en particulier $p(\alpha x + \beta y) = 0$.

□

DEFooNFOAooRAUuOk

Définition 7.384 ([297]).
*Soit un espace vectoriel complexe X. Une application $f\colon X \to \mathbb{C}$ est **dominée** par la seminorme p si pour tout x dans X nous avons $|f(x)| \leqslant p(x)$.*

*Si M est un sous-espace vectoriel de X, nous disons qu'une application $f\colon M \to \mathbb{R}$ est **dominée par le dessus** par la seminorme p si $f(m) \leqslant p(m)$ pour tout $m \in M$.*

LEMooKTSKooIteFGq

Lemme 7.385 ([297]).
Une application linéaire est dominée par une seminorme si et seulement si sa partie réelle est dominée par le dessus[179].

Démonstration. Soit une application linéaire $f\colon X \to \mathbb{C}$. Nous la décomposons en parties réelles et imaginaires par

$$f(x) = u(x) + iv(x) \tag{7.435}$$

où u et v sont des applications à valeurs réelles.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $|f(x)| \leqslant p(x)$ pour tout $x \in X$. Nous avons les majorations

$$u(x) \leqslant |u(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant p(x). \tag{7.436}$$

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $u(x) \leqslant p(x)$, et nous devons prouver que $|f(x)| \leqslant p(x)$. Nous notons $z = f(x)$. Si $z = 0$ nous avons évidemment $|z| \leqslant p(x)$. Nous supposons que $z \neq 0$. Nous avons[180]

$$f(\frac{|z|}{z}x) = \frac{|z|}{z} f(x) = |z|. \tag{7.437}$$

En particulier $f(\frac{|z|}{z}x)$ est réel et est donc donné par u :

$$f(\frac{|z|}{z}x) = u(\frac{|z|}{z}x). \tag{7.438}$$

Nous avons alors le calcul

$$r = f(\frac{|z|}{z}x) = u(\frac{|z|}{z}x) \leqslant p(\frac{|z|}{z}x) = |\frac{|z|}{z}| p(x) = p(x). \tag{7.439}$$

□

7.19.2 Fonctionnelle de Minkowski

DEFooJQXHooGDaJtW

Définition 7.386 ([269]).
Soient un espace vectoriel X et une seminorme p sur X. Nous posons

$$\mathring{U}_p = \{x \in X \text{ tel que } p(x) < 1\} \tag{7.440a}$$
$$U_p = \{x \in X \text{ tel que } p(x) \leqslant 1\}. \tag{7.440b}$$

Notez qu'il n'y a aucune raison particulière de croie que U_p serait la fermeture de $\mathring{U}_p$ parce que pour l'instant nous n'avons aucune topologie sur X.

DEFooYQYBooRkAfjG

Définition 7.387 (Fonctionnelle de Minkowski[269]).
*Soient un espace vectoriel X ainsi qu'une partie $A \subset X$. La **fonctionnelle de Minkowski** de A est l'application*

$$\begin{aligned} p_A\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\}. \end{aligned} \tag{7.441}$$

Nous posons aussi $p_A(x) = \infty$ si l'ensemble est vide.

[179] Définition 7.384.

[180] Notez que si on écrit z en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, le nombre $z/|z|$ est $e^{i\theta}$. Passez par les polaires pour simplifier les notations si cela vous chante, mais remarquez que le théorème 18.63 n'arrive que dans longtemps.

LEMooEIWEooPgoskd

Lemme 7.388 ([269]).
Soient un espace vectoriel X sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ainsi qu'une partie $A \subset X$ qui est non vide, absorbante[181] *et absolument convexe*[182]*. Alors*

(1) La fonctionnelle de Minkowski p_A est une seminorme.

(2) Nous avons[183]

$$\mathring{U}_{p_A} \subset A \subset U_{p_A}. \tag{7.442}$$

*Note : le lemme 7.389 donnera la même inclusion en mieux parce qu'il n'y aura pas besoin de l'*absolue *convexité.*

Démonstration. En plusieurs parties.

C'est une seminorme.

(1) $p_A(x) < \infty$ **pour tout** x Nous avons supposé que A est absorbant. Soit $x \in X$. Il existe $\rho > 0$ tel que $\lambda x \in A$ pour tout $|\lambda| < \rho$. En particulier $\rho x \in A$, et donc $x \in \frac{1}{\rho}A$. L'ensemble $\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\}$ est donc non vide parce qu'il contient $1/\rho$. Nous en déduisons que $p_A(x) \leqslant 1/\rho < \infty$.

(2) $p_A(0) = 0$ Le lemme 7.241 nous dit que $0 \in A$, de telle sorte que $0 \in \lambda A$ pour tout $\lambda > 0$. Donc

$$p_A(0) = \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } 0 \in \lambda A\} = 0. \tag{7.443}$$

(3) **Condition pour** $\xi x \in \lambda A$ SPITEMooGDCDooMBDsPB Soit $x \in X$. Nous prouvons que $\xi x \in \lambda A$ si et seulement si $x \in \frac{\lambda}{|\xi|}A$. En utilisant le lemme 7.243, nous avons

$$\lambda A = \frac{\lambda}{|\xi|}|\xi|A = \frac{\lambda}{|\xi|}\xi A. \tag{7.444}$$

Donc $\xi x \in \lambda A$ si et seulement si $\xi x \in \frac{\lambda}{|\xi|}\xi A$ si et seulement si $x \in \frac{\lambda}{|\xi|}A$.

(4) $p_A(\xi x) = |\xi| p_A(x)$ Soient $x \in X$ et $\xi \in \mathbb{K}$ avec $\xi \neq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
p_A(\xi x) &= \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } \xi x \in \lambda A\} && (7.445a)\\
&= \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \frac{\lambda}{|\xi|}A\} && \text{par (3)} \quad (7.445b)\\
&= \inf\{|\xi|\frac{\lambda}{|\xi|} > 0 \text{ tel que } x\frac{\lambda}{|x|}A\} && (7.445c)\\
&= |\xi| \inf\{\frac{\lambda}{|\xi|} > 0 \text{ tel que } x \in \frac{\lambda}{|\xi|}A\} && (7.445d)\\
&= |\xi| \inf\{\mu > 0 \text{ tel que } x \in \mu A\} && \text{cf. justif.} \quad (7.445e)\\
&= |\xi| p_A(x). && (7.445f)
\end{aligned}$$

SUBEQooIHJHooWkXRtA

Pour (7.445e). Si λ prend toutes les valeurs strictement positives, alors $\lambda/|\xi|$ aussi.

(5) $p_A(x+y) \leqslant p_A(x) + p_A(y)$ Soit $\epsilon > 0$. Nous notons $S_A(x) = \{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\}$. Vu que $p_A(x)$ et $p_A(y)$ sont définis comme des infimums, il existe $\lambda, \mu > 0$ tels que

$$\begin{aligned}
\lambda &\leqslant p_A(x) + \epsilon && (7.446a)\\
\mu &\leqslant p_A(y) + \epsilon && (7.446b)
\end{aligned}$$

avec $x \in \lambda A$ et $y \in \mu A$.

Vu que A est convexe, et vu que

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} = 1, \tag{7.447}$$

pour tout $z, z' \in A$ nous avons

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}z + \frac{\mu}{\lambda+\mu}z' \in A, \tag{7.448}$$

[181] Définition 7.239.
[182] Définition 7.240.
[183] Avec les notations de 7.386.

ou encore : $\lambda z + \mu z' \in (\lambda + \mu)A$. En particulier pour z et z' choisis tels que $\lambda z = x$ et $\mu z' = y$ nous avons $x + y \in (\lambda + \mu)A$. Nous avons alors

$$p_A(x + y) = \inf\{\delta > 0 \text{ tel que } x + y \in \delta A\} \leqslant \lambda + \mu \leqslant p_A(x) + p_A(y) + 2\epsilon. \tag{7.449}$$

Étant donné que ϵ est arbitraire, nous avons prouvé que $p_A(x + y) \leqslant p_A(x) + p_A(y)$.

(6) **p_A est une seminorme** Nous avons prouvé toutes les conditions de la définition 7.381.

$$\mathring{U}_{p_A} \subset A \subset U_{p_A}$$

(1) **Première inclusion** Soit $x \in \mathring{U}_{p_A}$, c'est-à-dire $p_A(x) < 1$, ou encore

$$\inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\} < 1. \tag{7.450}$$

Donc il existe $\lambda \in [0, 1[$ tel que $x \in \lambda A$. Vu que A est équilibré (ça fait partie d'être absolument convexe) et que $\lambda < 1$, nous avons $\lambda A \subset A$. Bref,

$$x \in \lambda A \subset A. \tag{7.451}$$

Cela prouver que $x \in A$.

(2) **Seconde inclusion** Soit $x \in A$. Nous avons $1 \in \{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\}$, et donc

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\} \leqslant 1, \tag{7.452}$$

ce qui signifie que $x \in U_{p_A}$.

□

LEMooFUXVooJumScW

Lemme 7.389 ([298]).
Soit un espace vectoriel topologique X ainsi qu'une partie convexe et absorbante A. Alors

$$\{x \in X \text{ tel que } p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X \text{ tel que } p_A(x) \leqslant 1\}. \tag{7.453}$$

Démonstration. Nous prouvons les deux inclusions séparément.

(1) **Première inclusion** Soit $x \in X$ vérifiant $p_A(x) < 1$. Nous avons

$$\inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\} < 1. \tag{7.454}$$

Soit $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x \in \lambda A$. En particulier $x/\lambda \in A$. Étant donné que A est convexe et que $0 \in A$ (toute partie absorbante contient 0), le segment joignant 0 à x/λ est contenu dans A. En particulier, nous avons

$$x = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} x \right) + (1 - \lambda)0 \in A \tag{7.455}$$

(2) **Seconde inclusion** Soit $x \in A$. Nous avons évidemment

$$1 \in \{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\}. \tag{7.456}$$

Donc $p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\} \leqslant 1$.

□

LEMooFWCIooVwGutp

Lemme 7.390 ([269]).
Soit une seminorme q sur l'espace vectoriel X. Alors

(1) $\mathring{U}_q$ est absorbant.

(2) $\mathring{U}_q$ est absolument convexe.

(3) $q = p_{\mathring{U}_q}$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) $\mathring{U}_q$ **est absorbant** Soit $x \in X$. Nous devons montrer l'existence de $\rho_x > 0$ tel que pour tout $|\lambda| < \rho_x$, nous ayons $\lambda x \in \mathring{U}_q$.
Si $q(x) = 0$, alors $q(\lambda x) = |\lambda| q(x) = 0 < 1$ et donc n'importe quel $\rho_x > 0$ fait l'affaire.
Si $q(x) > 0$, alors il suffit de prendre $\rho_x \in]0, 1/q(x)[$. En effet si $|\lambda| < \rho_x$, nous avons

$$q(\lambda x) = |\lambda| q(x) \leqslant \frac{1}{q(x)} q(x) = 1, \tag{7.457}$$

et donc $\lambda x \in \mathring{U}_q$.

(2) $\mathring{U}_q$ **est équilibré** Soient $|\alpha| \leqslant 1$, et $x \in \mathring{U}_q$. Nous avons

$$q(\alpha x) = |\alpha| q(x) \leqslant q(x) < 1. \tag{7.458}$$

Donc $\alpha x \in \mathring{U}_q$.

(3) $\mathring{U}_q$ **est convexe** Soient $x, y \in \mathring{U}_q$ ainsi que $t \in [0, 1]$. Nous avons

$$\begin{aligned} q\big(tx + (1-t)y\big) &\leqslant q(tx) + q\big((1-t)y\big) && \text{(7.459a)}\\ &= |t| q(x) + |1-t| q(y) && \text{(7.459b)}\\ &\leqslant |t| + |1-t| && \text{(7.459c)}\\ &= t + (1-t) && \text{(7.459d)}\\ &= 1. && \text{(7.459e)} \end{aligned}$$

Donc $tx + (1-t)y \in \mathring{U}_q$.

(4) $q = p_{\mathring{U}_q}$ Soit $x \in X$. Nous avons

$$p_{\mathring{U}_q}(x) = \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda \mathring{U}_q\} = \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } q(x) < \lambda\} = q(x). \tag{7.460}$$

□
LEMooQSAJooCgPNnD

Lemme 7.391 ([299]).
Soit un espace vectoriel X, ainsi qu'une seminorme p sur X. Nous posons[184]

$$\begin{aligned} B_p(0,1) &= \{x \in X \text{ tel que } p(x) < 1\}\\ \bar{B}_p(0,1) &= \{x \in X \text{ tel que } p(x) \leqslant 1\}. \end{aligned} \tag{7.461}$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$ nous avons

$$\begin{aligned} \epsilon B_p(0,1) &= \{x \in X \text{ tel que } p(x) < \epsilon\}\\ \epsilon \bar{B}_p(0,1) &= \{x \in X \text{ tel que } p(x) \leqslant \epsilon\}. \end{aligned} \tag{7.462}$$

PROPooDDURooJHfHLw

Proposition 7.392 ([299, 300]).
Soit un espace vectoriel topologique X, ainsi qu'une seminorme p. Les faits suivants sont équivalents.
ITEMooCAOXooGNBeSB

(1) p est continue.
ITEMooWWUSooEPkoWU

(2) p est continue en 0.
ITEMooPKFLooTRlKwo

(3) $B_p(0,1)$ est un voisinage de 0.
ITEMooRTFZooUXUVnA

(4) $\bar{B}_p(0,1)$ est un voisinage de 0.

Démonstration. Nous prouvons les implications dans l'ordre cyclique (1) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (2) ⇒ (1). Courage, c'est parti.

(1) **(1) ⇒ (3)** Nous avons

$$B_p(0,1) = \{x \in X \text{ tel que } p(x) < 1\} = p^{-1}\big(]-\infty, 1[\big). \tag{7.463}$$

Vu que p est continue et que $]-\infty, 1[$ est ouvert, la partie $B_p(0,1)$ est un ouvert contenant 0.

[184] Nous ne supposons pas de compatibilité particulière entre la topologie de X et p. Donc à priori $\bar{B}_p(0,1)$ n'est pas la fermeture de $B_p(0,1)$. Si ça avait été le cas, nous aurions écrit $\overline{B_p(0,1)}$.

(2) **(3) ⇒ (4)** La partie $\bar{B}_p(0,1)$ contient $B_p(0,1)$ qui est un ouvert contenant 0.

(3) **(4) ⇒ (2)** Nous vérifions la condition de la définition 7.45(1). D'abord $p(0)=0$. Nous considérons donc un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant 0, et nous allons chercher un voisinage V de 0 dans X tel que $p(V)\subset W$.

Soit $r>0$ tel que $B(0,r)\subset W$. Par hypothèse $\bar{B}_p(0,1)$ est un voisinage de 0. Comme la topologie de X est vectorielle, la partie $\epsilon\bar{B}_p(0,1)$ est également un voisinage de 0 pour tout $\epsilon>0$. Montrons que

$$p\Big(\frac{r}{2}\bar{B}_p(0,1)\Big)\subset B(0,r)\subset W. \tag{7.464}$$

Soit $x\in\frac{r}{2}\bar{B}_p(0,1)$. Nous avons $p(x)\leqslant r/2$ par le lemme 7.391, et donc $p(x)\in B(0,r)\subset W$.

Bref, en posant $V=\frac{r}{2}\bar{B}_p(0,1)$, nous avons bien $p(V)\subset W$.

(4) **(2) ⇒ (1)** Nous supposons que p est continue en $0\in X$ et nous devons prouver qu'elle est continue en $a\in X$. Soient $x\in X$, et $r>0$. Pour prouver la continuité de p en x (définition 7.45(1)), nous devons prouver l'existence d'un voisinage V de x tel que $f(V)\subset B\big(p(x),r\big)$.

Pour $\epsilon>0$ nous posons

$$U_\epsilon=p^{-1}\big(B(0,\epsilon)\big). \tag{7.465}$$

Cette partie est ouverte parce que p est continue en 0 et que $p(0)=0$. Nous allons prouver que si ϵ est assez petit, alors $p(x+E_\epsilon)\subset B\big(p(x),r\big)$.

Soit $z\in U_\epsilon$. Nous avons

$$\begin{aligned}|p(x)-p(x+z)|&\leqslant p\big(x-(x+y)\big) && \text{lem.7.383} && (7.466a)\\ &=p(-z) && && (7.466b)\\ &=p(z) && && (7.466c)\\ &\subset B(0,\epsilon). && && (7.466d)\end{aligned}$$

Donc $p(x+z)\in B\big(p(x),\epsilon\big)$ et nous avons montré que $p(x+U_\epsilon)\subset B\big(p(x),\epsilon\big)$. Donc en prenant $\epsilon\leqslant r$, c'est bon.

□

7.20 Topologie des seminormes

Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille de seminormes sur E. Il existe plusieurs façons de construire une topologie sur E à partir des seminormes.

7.20.1 Topologie initiale des seminormes

La première topologie qui nous tombe sous la main est celle de la topologie initiale[185] des p_i.

PROPooVUYTooJXkRYW

Proposition 7.393 ([1, 301]).
Soient un espace vectoriel X et une seminorme $p\colon X\to\mathbb{R}$. Soit $x_0\in X$. En posant

$$B_\epsilon=\{x\in X\text{ tel que }|p(x)-p(x_0)|<\epsilon\}, \tag{7.467}$$

l'ensemble $\mathcal{B}=\{B_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ est une base de voisinages de x_0 pour la topologie initiale de p.

Démonstration. Nous nommons τ la topologie initiale de p sur X. Posons $y_0=p(x_0)$. Une base de voisinages de y_0 (dans $\mathbb{R}$) est $\{B(y_0,\epsilon)\}_{\epsilon>0}$. Donc la proposition 7.57 dit qu'une base de voisinages de x_0 dans X est donnée par

$$\{p^{-1}\Big(B\big(p(x_0),\epsilon\big)\Big)\}_{\epsilon>0}. \tag{7.468}$$

Or nous avons

$$\begin{aligned}p^{-1}\Big(B\big(p(x_0),\epsilon\big)\Big)&=\{x\in X\text{ tel que }p(x)\in B\big(p(x_0),\epsilon\big)\} && (7.469a)\\ &=\{x\in X\text{ tel que }|p(x)-p(x_0)|<\epsilon\}. && (7.469b)\end{aligned}$$

□

[185] La topologie minimale rendant les p_i continue, définition 7.55.

La topologie initiale des seminormes n'est pas une bonne idée, parce qu'elle ne donne en général pas lieu à une structure d'espace vectoriel topologique[186].

Exemple 7.394 ([301]).
Nous considérons $\mathbb{R}$ avec la seminorme

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x|. \end{aligned} \tag{7.470}$$

Nous considérons sur $\mathbb{R}$ la topologie initiale de cette seminorme. En vertu de la proposition 7.393, une base de topologie en $x_0 \in \mathbb{R}$ est donnée par les parties

$$B_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \big||x| - |x_0|\big| < \epsilon\}. \tag{7.471}$$

Considérons la suite constante $x_k = 1$. Le nombre 1 est évidemment une limite de (x_k). Mais en y regardant bien, le nombre -1 est également une limite. En effet une base de voisinages autour de -1 est donnée par

$$B_\epsilon(-1) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \big||x| - 1\big| < \epsilon\}. \tag{7.472}$$

Et donc $1 \in B_\epsilon(-1)$ pour tout ϵ.

Si $\mathbb{R}$ muni de cette topologie était un espace vectoriel topologique, la proposition 7.221 dirait que $-1+1=0$ serait une limite de $(x_k + x_k)$. La suite $(x_k + x_k)$ est la suite constante égale à 2. Or un voisinage typique autour de 0 est

$$B_\epsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}' |x| < \epsilon\}. \tag{7.473}$$

Autant dire que la suite $(x_k + x_k) = 2$ n'y rentre pas souvent. △

7.20.2 Topologie avec des boules

DEFooROXMooCpmTwa

Définition 7.395.
Soit un espace vectoriel E sur lequel nous avons des seminormes $\{p_i\}_{i\in I}$. Pour chaque $i \in I$ nous posons

$$B_i(x,r) = \{y \in E \text{ tel que } p_i(y-x) < r\}. \tag{7.474}$$

Si J est une partie finie de I, nous considérons les parties

$$B_J(x,r) = \{y \in E \text{ tel que } p_j(y-x) < r \, \forall j \in J\}. \tag{7.475}$$

LEMooCNRNooWCejjZ

Lemme 7.396.
Soit un espace vectoriel E sur lequel nous avons des seminormes $\{p_i\}_{i\in I}$. Pour chaque $a \in E$, nous considérons la translation

$$\begin{aligned} t_a\colon E &\to E \\ x &\mapsto x + a. \end{aligned} \tag{7.476}$$

Pour toute partie finie $J \subset I$ nous avons

$$t_a\big(B_J(x,r)\big) = B_J(x+a,r) \tag{7.477}$$

Démonstration. D'une part si $y \in B_J(x+a,r)$, nous avons $p_j(y-x-a) < r$ pour tout $j \in J$. Dans ce cas, $y - a \in B_j(x,r)$, et nous avons donc bien $y = t_a(y-a) \in t_a\big(B_J(x,r)\big)$.

Pour l'inclusion dans l'autre sens, c'est le même raisonnement. □

DEFooZTKAooWYUyDa

Proposition-Définition 7.397 (Topologie et seminormes[302, 303, 269]).
Soient des seminormes $\{p_i\}_{i\in I}$ sur l'espace vectoriel E. Nous posons[187]

EQooNHMNooGJSeQr

$$\tau_B = \{\mathcal{O} \subset E \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{O}, \exists J, r \text{ tel que } B_J(x,r) \subset \mathcal{O}\} \cup \{\varnothing\}. \tag{7.478}$$

Dans cette formule, les J sont des parties finies de I.

Pour chaque $i \in I$ et $x \in E$ nous posons

$$\begin{aligned} p_{i,x}\colon E &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto p_i(y-x). \end{aligned} \tag{7.479}$$

Alors

[186] Espace vectoriel topologique, définition 7.219.

[187] Nous ajoutons explicitement l'ensemble vide parce que nous n'avons pas envie de vérifier des propriétés du genre $\forall x \in \varnothing$, blah blah…Mais bon. En principe c'est pas obligatoire parce que l'ensemble vide est obtenu avec $r = 0$.

ITEMooQPVRooKyOBPi

(1) *Les parties τ_B forment une topologie sur E.*

ITEMooQIYWooAmPCdI

(2) *Les applications $p_i\colon E\to\mathbb{R}$ sont continues pour (E,τ_B).*

ITEMooYGNWooYhBzSa

(3) *Les applications $p_{i,x}\colon E\to\mathbb{R}$ sont continues pour τ_B.*

ITEMooMUUZooBKBhsH

(4) *Si τ est une topologie sur E dans laquelle tous les $p_{i,x}$ sont continus, alors $\tau_B\subset\tau$.*

ITEMooEGVFooNqDkdN

(5) *L'espace topologique (E,τ_B) est un espace vectoriel topologique localement convexe*[188].

*Cette topologie est la **topologie des seminormes** sur E.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Vérifier les trois conditions de la définition 7.1. D'abord E et $\varnothing$ sont dans τ_B. Ensuite si $\{\mathcal{O}_s\}_{s\in T}$ sont des éléments de τ_B, nous considérons $x\in\bigcup_{s\in T}\mathcal{O}_s$, et nous montrons que x est contenu dans une boule contenue dans $\bigcup_{s\in T}\mathcal{O}_s$. Nous considérons $s\in T$ tel que $x\in\mathcal{O}_s$. Vu que $\mathcal{O}_s\in\tau_B$, il existe J,r tels que

$$x\in B_J(x,r)\subset\mathcal{O}_s\subset\bigcup_{s\in T}\mathcal{O}_s.\tag{7.480}$$

Enfin pour l'intersection finie, l'intersection $B_J(x,r)\cap B_{J'}(x,r')$ contient la boule $B_{J\cup J'}(x,\delta)$ avec $\delta=\min\{r,r'\}$.

(2) **Pour (2)** Pour montrer que p_i est continue, nous montrons que l'image inverse d'un ouvert est ouverte. Soit $a\in\mathbb{R}$ ainsi que $r>0$. Nous considérons l'ouvert $B(a,r)$ et nous montrons que $p_i^{-1}\big(B(a,r)\big)\in\tau_B$. Soit $x\in p_i^{-1}\big(B(a,r)\big)$. Nous allons montrer que si δ est assez petit, alors $B_i(x,\delta)\subset p_i^{-1}\big(B(a,r)\big)$.

Soit $y\in B_i(x,\delta)$. Par définition nous avons $p_i(y-x)<\delta$, et par le lemme 7.383,

$$|p_i(y)-p_i(x)|\leqslant p_i(x-y)<\delta.\tag{7.481}$$

D'autre part, vu que $x\in p_i^{-1}\big(B(a,r)\big)$, nous avons $|p_i(x)-a|<r$. Nous considérons $s>0$ tel que $|p_i(x)-a|<r-s$. Avec tout ça,

$$\begin{aligned}|p_i(y)-a|&\leqslant|p_i(y)-p_i(x)|+|p_i(x)-a|&(7.482a)\\&<\delta+r-s&(7.482b)\\&<r&(7.482c)\end{aligned}$$

dès que nous choisissons $\delta<s$.

Nous avons donc montré que $p_i(y)\in B(a,r)$, et donc que $p_i\big(x,\delta\big)\subset B(a,r)$. Donc p_i est continue.

(3) **Les translations sont continues** Nous considérons les translations $t_a\colon E\to E$ données par $t_a(x)=x+a$. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ dans E. Nous prouvons que $t_a^{-1}(\mathcal{O})=t_{-a}(\mathcal{O})$ est ouvert. Pour cela nous considérons un élément $x\in t_{-a}(\mathcal{O})$ et nous prouvons qu'il existe une boule autour de x contenue dans $t_{-a}(\mathcal{O})$. Soit $y\in\mathcal{O}$ tel que $x=y-a$; vu que $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe r,J tels que $B_J(y,r)\subset\mathcal{O}$. Nous avons alors

$$t_{-a}\big(B_J(y,r)\big)\subset t_{-a}(\mathcal{O}),\tag{7.483}$$

et donc

$$B_J(y-a,r)=t_{-a}\big(B_J(y,r)\big)\subset t_{-a}(\mathcal{O}).\tag{7.484}$$

(4) **Pour (3)** Nous avons $p_{i,x}=p_i\circ t_{-x}$. Nous avons déjà prouvé que p_i et t_{-x} sont continues.

(5) **Pour (4)** Soit une topologie τ telle que toutes les applications $p_{i,a}$ sont continues. Nous avons

$$B_i(a,r)=\{y\in E\text{ tel que }p_i(y-a)<r\}=\{y\in E\text{ tel que }p_{i,a}(y)<r\}=p_{i,a}^{-1}\big(B(0,r)\big).\tag{7.485}$$

Étant donné que $B(0,r)$ est ouverte et que $p_{i,a}$ est continue, la partie $p_{i,a}^{-1}\big(B(0,r)\big)$ est ouverte. Donc τ contient toutes les boules de la forme $B_i(a,r)$.

Vu que τ est une topologie, elle contient toutes les intersections finies d'ouvert. En particulier si J est une partie finie de I, τ doit contenir toutes les boules de la forme $B_J(a,r)$.

[188] Définition 7.248.

(6) **Pour (5)** Le point (5), ce sont les points suivants.

(7) **L'addition est continue** Nous prouvons que l'application

$$\begin{aligned} a\colon E\times E &\to E\\ (x,y)&\mapsto x+y \end{aligned} \tag{7.486}$$

est continue pour la topologie τ_B. Soit $\mathcal{O}\in\tau_B$; nous devons prouver que la partie

$$a^{-1}(\mathcal{O})=\{(x,y)\in E\times E \text{ tel que } x+y\in\mathcal{O}\} \tag{7.487}$$

est ouvert dans $E\times E$ (topologie produit). Soit $(x_0,y_0)\in a^{-1}(\mathcal{O})$. Vu que $x_0+y_0\in\mathcal{O}$, il existe un r et un $i\in I$ tels que $B_i(x_0+y_0,r)\subset\mathcal{O}$.

Nous prouvons que si ϵ est assez petit,

$$B_i(x_0,\epsilon)\times B_i(y_0,\epsilon)\subset a^{-1}\Big(B_i(x_0,y_0,r)\Big)\subset a^{-1}(\mathcal{O}). \tag{7.488}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} p_i\big((x+y)-(x_0+y_0)\big)&=p_i\big((x-x_0)+(y-y_0)\big) && && (7.489a)\\ &\leqslant p_i(x-x_0)+p_i(y-y_0) && \text{def. 7.381(2)} && (7.489b)\\ &\leqslant 2\epsilon. && && (7.489c) \end{aligned}$$

En prenant $\epsilon<r/2$ nous avons donc $a(x,y)\in B_i\big(x_0+y_0,r\big)\subset\mathcal{O}$.

(8) **La multiplication est continue** Nous considérons la multiplication

$$\begin{aligned} m\colon \mathbb{K}\times E&\to E\\ (\lambda,x)&\mapsto \lambda x, \end{aligned} \tag{7.490}$$

et nous montrons que c'est une application continue. Soit un ouvert $\mathcal{O}\subset E$, nous considérons $(\lambda_0,x_0)\in m^{-1}(\mathcal{O})$, et nous allons prouver que $\mathbb{K}\times E$ contient un ouvert contenant (λ_0,x_0) et contenu dans $m^{-1}(\mathcal{O})$.

Il existe $r>0$ et $i\in I$ tels que $B_i(\lambda_0x_0,r)\subset\mathcal{O}$. Nous allons trouver une valeur de $\epsilon>0$ telle que l'ouvert $B(\lambda_0,\epsilon)\times B_i(x_0,\epsilon)$ vérifie

$$(\lambda_0,x_0)\in B(\lambda_0,\epsilon)\times B_i(x_0,\epsilon)\subset m^{-1}\big(B_i(\lambda_0x_0,r)\big)\subset m^{-1}(\mathcal{O}). \tag{7.491}$$

Soit $(\lambda,x)\in B(\lambda_0,\epsilon)\times B_i(x_0,\epsilon)$. Nous avons $|\lambda|<|\lambda_0|+\epsilon$ et le calcul suivant :

$$\begin{aligned} p_i(\lambda x-\lambda_0x_0)&=p_i(\lambda x-\lambda x_0+\lambda x_0-\lambda_0x_0) && (7.492a)\\ &=p_i\big(\lambda(x-x_0)+(\lambda-\lambda_0)x_0\big) && (7.492b)\\ &\leqslant|\lambda|p_i(x-x_0)+|\lambda-\lambda_0|p_i(x_0) && (7.492c)\\ &\leqslant\big(|\lambda_0|+\epsilon\big)\underbrace{p_i(x-x_0)}_{<\epsilon}+\underbrace{|\lambda-\lambda_0|}_{<\epsilon}p_i(x_0) && (7.492d)\\ &<\epsilon\big(|\lambda_0|+\epsilon\big)+\epsilon p_i(x_0) && (7.492e)\\ &=\epsilon^2+\epsilon\big(|\lambda_0|+p_i(x_0)\big). && (7.492f) \end{aligned}$$

Il n'y a pas de problèmes pour trouver un $\epsilon>0$ pour que le tout soit plus petit que r.

(9) **Espace vectoriel topologique** Nous avons prouvé que (E,τ_B) était un espace vectoriel topologique.

(10) **Localement convexe en 0** Nous montrons que $B_i(0,r)$ est convexe. Soient $x,y\in B_i(0,r)$ ainsi que $t\in[0,1]$. Nous avons

$$\begin{aligned} p_i\big(tx+(1-t)y\big)&\leqslant|t|p_i(x)+|1-t|p_i(y) && (7.493a)\\ &\leqslant tr+(1-t)r && (7.493b)\\ &=r. && (7.493c) \end{aligned}$$

Donc $tx+(1-t)y\in B_i(0,r)$.

(11) **Localement convexe** Soit $a \in E$, et montrons que $B_i(a,r)$ est convexe. Si t_a est la translation de vecteur a, le lemme 7.396 donne $B_i(a,r) = t_a\big(B_i(0,r)\big)$. Soient $x, y \in B_i(a,r)$. Nous avons $x-a, y-a \in B_i(0,r)$, et vu que la boule $B_i(0,r)$ est convexe,

$$t(x-a) + (1-t)(y-a) \in B_i(0,r). \tag{7.494}$$

Un tout petit peu de calcul :

$$t(x-a) + (1-t)(y-a) = tx + (1-t)y - ta - (1-t)a \tag{7.495a}$$
$$= tx + (1-t)y - a. \tag{7.495b}$$

Cela prouve que $tx + (1-t)y - a \in B_i(0,r)$, et donc que $tx + (1-t)y \in B_i(a,r)$, ce qu'il fallait.

□
PROPooNAFAooShzixo

Proposition 7.398 ([269, 1]).
Soit un espace vectoriel X ainsi qu'un ensemble de seminormes $\{p_i\}_{i\in I}$. Il existe une unique topologie τ sur X telle que

(1) (X,τ) est un espace vectoriel topologique localement convexe.

(2) Une base de topologie de τ en 0 est donnée par

$$\mathcal{B}_0 = \{B_J(0,\epsilon) \text{ tel que } J \text{ est fini dans } I, \epsilon > 0\}. \tag{7.496}$$

Cette topologie est la topologie τ_B donnée en (7.478).

Démonstration. En ce qui concerne l'existence, la topologie τ_B donnée dans la proposition 7.397 fait l'affaire. Nous démontrons l'unicité. Soit une topologie τ sur X vérifiant les conditions. Nous allons prouver que $\tau = \tau_B$.

En deux inclusions.

(1) $\tau_B \subset \tau$ La topologie τ_B a une base formée de parties de la forme $B_J(x,r)$. Nous montrons que ces parties sont dans τ. En utilisant le lemme 7.396 et la proposition 7.221, nous avons

$$B_J(x,r) = B_J(0,r) + x \subset \mathcal{B}_0 + x \subset \tau. \tag{7.497}$$

Vu que τ contient une base de la topologie τ_B, nous avons $\tau_B \subset \tau$.

(2) $\tau \subset \tau_B$ Les $B_J(0,r)$ qui forment une base de topologie de τ en 0 sont des éléments de τ_B. Les $B_J(x,r) = B_J(0,r) + x$ forment une base de topologie de τ en x, et font aussi partie de τ_B.

□
PropQPzGKVk

Proposition 7.399.
Soit un ensemble E muni de la topologie des seminormes $\{p_i\}_{i\in I}$. Une suite (x_n) dans E converge vers x si et seulement si pour tout $i \in I$,

$$p_i(x - x_n) \to 0. \tag{7.498}$$

Démonstration. Si la suite (x_n) converge[189] vers x, alors pour tout ouvert $\mathcal{O}$ autour de x, il existe un N tel que si $n \geqslant N$, alors $x_n \in \mathcal{O}$. En particulier pour tout j et pour tout $\epsilon > 0$, il doit exister un $n \geqslant N_j$ tel que $x_n \in B_j(x,\epsilon)$.

Voyons l'implication inverse. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $i \in I$, il existe un N_i tel que $n \geqslant N_i$ implique $p_i(x - x_n) \leqslant \epsilon$. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert, il doit contenir une boule du type $B_J(x,r)$ pour un certain ensemble fini $J \subset I$.

En prenant $N = \max\{N_j \text{ tel que } j \in J\}$, nous avons $p_j(x - x_n) \leqslant \epsilon$ pour tout j et donc $x_n \in B_J(x,r)$.

□
PROPooGXGQooLRTwvH

Proposition 7.400 ([304, 1]).
Un espace vectoriel muni de seminormes sur un corps valué est un espace vectoriel topologique[190].

Démonstration. Soit un espace vectoriel E muni des seminormes $\{p_i\}_{i\in I}$. Sa topologie est donnée par la définition 7.397. Sur le corps $\mathbb{K}$, nous avons la topologie métrique 7.236.

[189] Définition 7.14.
[190] Définition 7.219.

(1) **Somme**

Nous commençons par prouver que

$$\begin{aligned} f\colon E\times E &\to E\\ (x,y)&\mapsto x+y \end{aligned} \tag{7.499}$$

est continue. Soit un ouvert A de E ; nous allons prouver que $f^{-1}(A)$ est ouvert dans $E\times E$ en prouvant qu'il contient un ouvert autour de chacun de ses points (théorème 7.8).

Soit $(a,b)\in f^{-1}(A)$. Vu que A est ouvert dans $(E,\{p_i\}_{i\in I})$, par définition de la topologie, il existe $i\in I$ et $r>0$ tels que $B_i\big(f(a,b),r\big)\subset A$. Il nous faut un ouvert $U\in\tau_E$ autour de a et un ouvert $V\in\tau_E$ autour de b tels que $f(U\times V)\subset A$. Posons $U=B_i(a,\epsilon)$ et $V=B_i(b,\epsilon)$, considérons $x\in U$, $y\in V$ et montrons que $f(x,y)\in B_i\big(f(a,b),r\big)$. Nous avons

$$\begin{aligned} p_i\big(f(x,y)-f(a,b)\big)&=p_i\big((x-a)+(y-b)\big) && && (7.500a)\\ &\leqslant p_i(x-a)+p_i(y-b) && \text{def. 7.381(2)} && (7.500b)\\ &<2\epsilon. && && (7.500c) \end{aligned}$$

En choisissant $\epsilon<r/2$ c'est bon.

(2) **Produit** Nous nommons $\mathbb{K}$ le corps de l'espace vectoriel E. Nous devons voir que l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{K}\times E&\to E\\ (\lambda,x)&\mapsto \lambda x \end{aligned} \tag{7.501}$$

est continue.

La topologie sur $\mathbb{K}$ est sa topologie métrique, c'est-à-dire la topologie de son unique seminorme $\lambda\mapsto|\lambda|$. La topologie sur $\mathbb{K}\times E$ est donc celle des seminormes

$$\begin{aligned} q_i\colon \mathbb{K}\times E&\to\mathbb{R}\\ (\lambda,x)&\mapsto\max\{|\lambda|,p_i(x)\}. \end{aligned} \tag{7.502}$$

EQooFSBEooWDsHot

Nous pouvons donc reprendre le même cheminement que celui que nous avons pris pour la somme. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ dans E ; nous considérons $(\lambda,a)\in f^{-1}(\mathcal{O})$. Vu que $f(\lambda,a)\in\mathcal{O}$, et que $\mathcal{O}$ est ouvert pour la topologie des $\{p_i\}_{i\in I}$, il existe[191] $i\in I$ et $r>0$ tel que $B_i\big(f(\lambda,a),r\big)\subset\mathcal{O}$.

Nous allons prouver qu'il existe $s>0$ tel que

$$f\Big(B_i\big((\lambda,a),s\big)\Big)\subset B_i(\lambda a,r). \tag{7.503}$$

Ici encore, à gauche B_i est la boule pour la seminorme q_i donnée en (7.502). Soit $(\mu,x)\in B_i\big((\lambda,a),s\big)$, c'est-à-dire

$$q_i\big((\mu,x)-(\lambda,a)\big)=\max\{|\lambda-\mu|,p_i(a-x)\}<s. \tag{7.504}$$

En particulier nous avons les deux inégalités

$$\begin{cases} |\lambda-\mu|<s, & (7.505a)\\ p_i(a-x)<s. & (7.505b) \end{cases}$$

SUBEQSooHWMSooBJsRgy

Nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} p_i\big(f(\mu,x),\lambda a\big)&=p_i(\mu x-\lambda a) && (7.506a)\\ &=p_i(\mu x-\lambda x+\lambda x-\lambda a) && (7.506b)\\ &\leqslant p_i\big((\mu-\lambda)x\big)+|\lambda|p_i(x-a) && (7.506c)\\ &=|\mu-\lambda|p_i(x)+|\lambda|p_i(x-a) && (7.506d)\\ &\leqslant sp_i(x)+|\lambda|s. && (7.506e) \end{aligned}$$

C'est le moment de chercher une majoration pour $p_i(x)$:

$$p_i(x)=p_i\big(a+(x-a)\big)\leqslant p_i(a)+p_i(x-a)\leqslant p_i(a)+s. \tag{7.507}$$

[191] Voir la définition 7.397.

Nous pouvons continuer la majoration (7.506) tout en ne nous posant pas de questions sur le sens de l'inégalité parce que nous cherchons $s > 0$:

$$\begin{aligned} p_i\big(f(\mu,x),\lambda a\big) &\leqslant sp_i(x) + |\lambda|s && (7.508a)\\ &\leqslant s\big(p_i(a)+s\big) + |\lambda|s && (7.508b)\\ &= s^2 + \big(|\lambda| + p_i(a)\big)s. && (7.508c) \end{aligned}$$

Nous devons prouver l'existence d'un $s > 0$ tel que $s^2 + \big(|\lambda| + p_i(a)\big)s < r$; autrement dit nous devons résoudre l'inéquation

$$s^2 + \big(|\lambda| + p_i(a)\big)s - r < 0. \tag{7.509}$$

Nous sommes en présence d'un polynôme du second degré en s qui vaut $-r < 0$ en $s = 0$. Par continuité, il existe un voisinage de $s = 0$ dans $\mathbb{R}$ sur lequel le polynôme reste strictement négatif. Il suffit de prendre un s positif dans ce voisinage.

□

La proposition suivante est pratiquement une copie de la proposition 7.351.

PropNGjQnqF

Proposition 7.401.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to (E, p_i)_{i\in I}$ une application. Nous avons équivalence entre

ItemHNxGMpCi

(1) la fonction f est continue en $t_0 \in \mathbb{R}$,

ItemHNxGMpCii

(2) si W est un voisinage ouvert de $f(t_0)$ il existe un voisinage ouvert V de t_0 (dans $\mathbb{R}$) tel que $f(V) \subset W$,

ItemHNxGMpCiii

(3) pour tout $i \in I$ et $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$f\big(B(t_0,\delta)\big) \subset B_i\big(f(t_0),\epsilon\big). \tag{7.510}$$

Démonstration. L'équivalence (1) ⇔ (2) est la définition 7.45.

Prouvons (2) ⇒ (3). Soient $i \in I$ et $\epsilon > 0$. Considérons la boule $B_i\big(f(t_0),\epsilon\big)$, qui est un ouvert de E contenant $f(t_0)$. Il existe donc un ouvert V autour de t_0 tel que $f(V) \subset B_i\big(f(t_0),\epsilon\big)$. En particulier V contient une boule $B(t_0,\delta)$ et nous avons

$$f\big(B(t_0,\delta)\big) \subset f(V) \subset B_i\big(f(t_0),\epsilon\big). \tag{7.511}$$

Prouvons (3) ⇒ (2). Soit W un ouvert autour de $f(t_0)$. Il existe un $i \in I$ et $\epsilon > 0$ tel que $B_i\big(f(t_0),\epsilon\big) \subset W$. Nous avons alors un $\delta > 0$ tel que

$$f\big(B(t_0,\delta)\big) \subset B_i\big(f(t_0),\epsilon\big) \subset W. \tag{7.512}$$

□

Lorsqu'on a un espace E muni d'une quantité dénombrable de seminormes $\{p_k\}_{k\in I}$ nous définissons l'écart[192]

EqAAghjUR

$$d(x,y) = \sup_{k\geqslant 1} \min\big\{\frac{1}{k}, p_k(x-y)\big\}. \tag{7.513}$$

Notons que cet écart est invariant par translation au sens où pour tout x, y, h dans E nous avons

$$d(x+h,y+h) = \sup_{k\geqslant 1} \min\big\{\frac{1}{k}, p_k(x-y)\big\} = d(x,y). \tag{7.514}$$

7.20.3 Seminorme et métrisable

Définition 7.402 ([269]).
*Soit un espace vectoriel topologique X. Une famille $\{p_i\}_{i\in I}$ de seminormes est **séparante** si pour tout $x \in X \setminus \{0\}$, il existe $i \in I$ tel que $p_i(x) \neq 0$.*

PROPooMJEQooHtIyeX

Proposition 7.403.
Si X est un espace topologique dont la topologie est donnée par une famille dénombrable et séparante de seminormes[193], alors il est métrisable[194].

[192] Dans le cas de $E = \mathscr{D}(K)$, la première seminorme est numérotée à zéro, donc il faudra poser $d(\varphi_1,\varphi_2)$ avec p_{k-1} au lieu de p_k.
[193] Topologie des seminormes, proposition 7.397.
[194] Métrisable, définition 7.140.

Démonstration. Nous utilisons le théorème 7.335. Nous considérons les seminormes $\{p_i\}_{i\in I}$ où I est dénombrable.

(1) **Base dénombrable** Vu que I est dénombrable, l'ensemble des parties finies de I est dénombrable[195]. Pour $a \in X$, l'ensemble des boules de la forme $B_J(a, 1/n)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et J fini dans I est donc dénombrable et forme une base de topologie en a.

(2) **Singleton fermé** Prouvons que $\{0\}$ est fermé. Pour cela nous prouvons que le complémentaire est ouvert. Soit $a \neq 0$. Vu que $\{p_i\}_{i\in I}$ est séparante, il existe $i \in I$ tel que $p_i(a) \neq 0$. L'application p_i est continue par 7.397(2). Donc pour tout $\epsilon > 0$, la partie $p_i^{-1}\Big(B\big(p_i(a), \epsilon\big)\Big)$ est un ouvert contenant a.

En prenant $0 < \epsilon < p_i(a)$ et en tenant compte du fait que $p_i(0) = 0$,

$$|p_i(0) - p_i(a)| = |p_i(a)| > \epsilon, \tag{7.515}$$

et donc $p_i(0) \notin B\big(p_i(a), \epsilon\big)$ ou encore

$$0 \notin p_i^{-1}\Big(B\big(p_i(a), \epsilon\big)\Big). \tag{7.516}$$

Bref, l'ouvert $p_i^{-1}\Big(B\big(p_i(a), \epsilon\big)\Big)$ contient a mais pas 0.

□

7.20.4 Boules et topologie

PropLOwUvCO

Proposition 7.404 ([296])**.**
La topologie donnée par les boules

$$B_k(a, r) = \{x \in E \text{ tel que } \forall k \leqslant \frac{1}{r}, p_k(x - a) < r\} \tag{7.517}$$

EqGHfYIlO

est la même que celle « usuelle » donnée par les seminormes. En disant « la même » nous entendons le fait que les ouverts sont les mêmes : A est ouvert pour une des deux topologies si et seulement si il est ouvert pour l'autre.

Démonstration. Pour cette démonstration nous allons préfixer par d les notions topologiques issues des boules (7.517) et par P celle des seminormes : P-continue, d-ouvert, etc.

D'abord nous avons

$$B(a, r) = \bigcap_{k\leqslant\frac{1}{k}} B_k(a, r). \tag{7.518}$$

EqRIUIRpQo

Si $\mathcal{O}$ est un d-ouvert, il contient une d-boule autour de chacun de ses points. Or d'après la formule (7.518), une d-boule est une intersection *finie* de P-ouverts et donc est un P-ouvert par définition. Donc $\mathcal{O}$ contient un P-ouvert autour de tous ses points et est donc P-ouvert.

Inversement nous supposons que $\mathcal{O}$ est un P-ouvert. Commençons par prouver que les seminormes p_k sont d-continues. En effet soient $k \in \mathbb{N}$, $\epsilon \leqslant \frac{1}{k}$ et $x, y \in E$ tels que $d(x, y) \leqslant \epsilon$; nous avons

$$\begin{aligned}
|p_k(y) - p_k(x)| &\leqslant p_k(x - y) && \text{(7.519a)}\\
&= \min\{\frac{1}{k}, p_k(x - y)\} && \text{(7.519b)}\\
&\leqslant d(x, y) && \text{(7.519c)}\\
&\leqslant \epsilon. && \text{(7.519d)}
\end{aligned}$$

Montrons à présent que $\mathcal{O}$ est d-ouverte. Si $a \in \mathcal{O}$, il existe k et r tels que $B_k(a, r) \subset \mathcal{O}$. Soit $x \in B_k(a, r)$. Montrons que si ϵ est suffisamment petit, la d-boule $B(x, \epsilon)$ est incluse à $B_k(a, r)$. Pour cela prenons $y \in B(x, \epsilon)$; nous avons

$$\big|p_k(a - x) - p_k(a - y)\big| \leqslant d(x, y) \leqslant \epsilon. \tag{7.520}$$

Par conséquent le nombre $p_k(a - y)$ est dans l'intervalle

$$p_k(a - x) \pm \epsilon \tag{7.521}$$

et il suffit de prendre $\epsilon < \frac{r - p_k(a-x)}{2}$. □

[195] Lemme 1.231.

THOooTKWYooYYiBNa

Théorème 7.405 ([305]).
Soit une famille de seminormes $\{p_i\}_{i\in I}$ sur E. Pour une seminorme q sur E, les conditions suivantes sont équivalentes.

ITEMooHKNYooARXiXs

(1) L'application $q\colon E\to\mathbb{R}$ est continue.

ITEMooBBNCooGwHrUI

(2) Il existe une partie finie J de I et un nombre $M\in\mathbb{R}$ tels que

$$q(x)\leqslant M\max_{j\in J}p_j(x) \tag{7.522}$$

pour tout $x\in E$.

ITEMooWXSWooVfvSUy

(3) L'application q est bornée dans un voisinage de 0.

Démonstration. En trois parties.

(1) **(1) ⇒ (3)**
C'est la proposition 7.162.

(2) **(3) ⇒ (2)**
Soit un voisinage V de 0 sur lequel q est borné par μ. Ce voisinage contient une boule centrée en 0. Par la définition 7.397, nous avons une partie finie $J\subset I$ et $r>0$ tels que q est bornée par μ sur $B_J(0,r)$.
Soit $x\in E$. Nous posons

$$t\in\left]0,\min_{j\in J}\frac{r}{p_j(x)}\right[. \tag{7.523}$$

Pour $l\in J$ nous avons alors

$$\begin{aligned}
p_l(tx)&=tp_l(x) && (7.524a)\\
&<\min_{j\in J}\frac{r}{p_j(x)}p_l(x) && (7.524b)\\
&<\frac{r}{p_l(x)}p_l(x) && (7.524c)\\
&=r. && (7.524d)
\end{aligned}$$

Donc $tx\in B_J(0,r)$. En ce qui concerne q nous avons alors $tq(x)=q(tx)<\mu$ et donc

$$q(x)<\frac{\mu}{t}. \tag{7.525}$$

En utilisant la proposition 1.566,

$$\begin{aligned}
q(x)&<\mu\frac{1}{t} && (7.526a)\\
&=\mu\frac{1}{\min_{j\in J}\frac{r}{p_j(x)}} && (7.526b)\\
&=\mu\max_{j\in J}\frac{p_j(x)}{r} && (7.526c)\\
&=\frac{\mu}{r}\max_{j\in J}p_j(x). && (7.526d)
\end{aligned}$$

En posant $M=\mu/r$ nous avons

$$q(x)\leqslant M\max_{j\in J}p_j(x), \tag{7.527}$$

comme demandé.

(3) **(2) ⇒ (1)**
Nous avons une partie finie $J\subset I$ et $M\in\mathbb{R}$ tels que $q(x)\leqslant M\max_{j\in J}p_j(x)$ pour tout $x\in E$.
Soit $x\in E$. Nous prouvons que q est continue en x. Pour tout y nous avons

$$|q(y)-q(x)|\leqslant q(x-y)\leqslant M\max_{j\in J}p_j(x-y). \tag{7.528}$$

Soit $\epsilon>0$. Si nous prenons $y\in B_J(x,\epsilon)$, alors nous avons

$$|q(y)-q(x)|\leqslant M\epsilon. \tag{7.529}$$

Cela prouve que q est continue en x, et donc continue sur E par la proposition 7.46.

□
CORooSLUCooRaZyYK

Corolaire 7.406 ([305]).
Soient une famille de seminormes P sur E, ainsi qu'une famille Q de seminormes sur F. Une application linéaire $f: E \to F$ est continue si et seulement si $q \circ f$ est une seminorme continue sur E pour tout $q \in Q$.
CORooGMVHooNgYOaY

Corolaire 7.407 ([305]).
Soient des seminormes $P = \{p_i\}_{i\in I}$ sur E. Soit une application linéaire $f: E \to \mathbb{K}$. Elle est continue si et seulement si il existe une partie finie $J \subset I$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que

$$|f(x)| < M \max_{j\in J} p_j(x) \tag{7.530}$$

pour tout $x \in E$.

7.20.4.1 Norme induite sur la topologie quotient

PROPooDUAVooEfrEGI

Proposition-Définition 7.408 (Norme quotient[306]).
Soient un espace vectoriel topologique normé E, et un sous-espace M. Pour $\alpha \in E/M$ nous posons

$$\|\alpha\|_{E/M} = d(\alpha, M) \tag{7.531}$$

où $d(\alpha, M)$ est la distance entre la partie α et la partie M.
Nous avons :
ITEMooQOZXooZiZdTn

(1) La formule $\|\alpha\| = \inf_{u\in\alpha} \|u\|_E$.
ITEMooFEOGooTTDgCj

(2) L'opération $\|.\|$ est une seminorme[196] sur l'espace vectoriel E/M.
ITEMooWCCSooMeqQHL

(3) C'est une norme si et seulement si M est fermé.

*Nous parlons de **(semi)norme quotient**.*

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** La définition de $\|\alpha\|$ est $\|\alpha\| = d(\alpha, M) = \inf_{\substack{u\in\alpha\\ v\in M}} \|u - v\|$. Mais

$$\{u - v \text{ tel que } u \in \alpha, v \in M\} = \alpha, \tag{7.532}$$

donc

$$d(\alpha, M) = \inf_{u\in\alpha} \|u\|. \tag{7.533}$$

(2) **Pour (2)** Nous devons vérifier les propriétés de la définition 7.381. D'abord en tant que distance, nous avons $\|\alpha\| \geqslant 0$ pour tout α.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ nous avons aussi

$$\|\lambda\alpha\| = \inf_{u\in\lambda\alpha} \|u\| = \inf_{u\in\alpha} \|\lambda u\| = |\lambda| \inf_{u\in\alpha} \|u\| = |\lambda|\|\alpha\|. \tag{7.534}$$

Enfin si $\alpha, \beta \in E/M$, nous avons

$$\inf_{u\in\alpha+\beta} \|u\| \leqslant \inf_{\substack{u\in\alpha\\ v\in\beta}} \|u + v\| \leqslant \inf_{\substack{u\in\alpha\\ v\in\beta}} \big(\|u\| + \|v\|\big) = \inf_{u\in\alpha} \|u\| + \inf_{v\in\beta} \|v\| = \|\alpha\| + \|b\|. \tag{7.535}$$

(3) **Pour (3) en supposant que M est fermé** Nous supposons que M est fermé et nous montrons que $\|.\|$ est une norme. Nous supposons donc que $d(\alpha, M) = 0$ et nous prouvons que $\alpha = 0$. Soit $x \in E$ tel que $\alpha = [x]$. Nous avons donc

$$\alpha = \{x - v \text{ tel que } v \in M\} \tag{7.536}$$

Notez qu'on a écrit $-v$ et non $+v$. De toutes façons M est vectoriel ; ça ne change rien et ça tombera mieux plus bas.

Nous avons donc

$$0 = \|\alpha\| = d(\alpha, M) = \inf_{u\in\alpha} \|u\| = \inf_{v\in M} \|x - v\|. \tag{7.537}$$

Il existe donc une suite (v_n) dans M telle que $\|x - v_n\| \to 0$. La suite est donc convergente : $v_n \to x$. Comme M est fermé, la proposition 7.154 nous indique que la limite doit être dans M. Autrement dit : $x \in M$. Par définition des classes nous avons alors $\alpha = [x] = 0$.

[196] Définition 7.381.

(4) **Pour (3) en supposant que $\|.\|$ est une norme**

Supposons que M n'est pas fermé. Il ne contient donc pas son adhérence. Soit $a \in \mathrm{Adh}(M) \setminus M$. Vu que M est vectoriel, nous supposons que $a \neq 0$.

Étant donné que a est dans l'adhérence de M nous avons $d(a, M) = 0$ et donc $\|[a]\| = 0$.

□

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 7.409
Je ne suis pas certain de la proposition 7.410. Peut-être qu'il faut ajouter l'hypothèse que M est fermé.
PROPooKLXSooSOUZkc

Proposition 7.410.
Soient un espace vectoriel topologique normé E, et un sous-espace M. La topologie quotient[197] *sur E/M est la même que celle de la seminorme induite*[198].

7.20.5 Espace dual

Nous parlerons plus en détail d'espace dual d'un espace normé en la section 10.18.

DefHUelCDD

Lemme-Définition 7.411.
Soient F un espace métrique et E un espace topologique vectoriel. Pour chaque $v \in E$, l'application

$$\begin{aligned} p_v \colon \mathcal{L}(E, F) &\to \mathbb{R} \\ T &\mapsto \|T(v)\|_F \end{aligned} \tag{7.538}$$

est une seminorme.

*La **topologie $*$-faible** sur $\mathcal{L}(E, F)$ est la topologie des ces seminormes.*

7.412.
C'est une famille de seminormes indicées par les éléments de E. Si E est un espace métrique, c'est cette topologie qui sera considérée sur son dual topologique E' des applications continues $E \to \mathbb{R}$.

La topologie ainsi définie est, dans l'idée, celle qui sera choisie pour les espaces de distributions, voir la définition 30.30.

La proposition suivante indique qu'elle est un peu la topologie de la convergence ponctuelle.

PROPooQWOOooUBhBiG

Proposition 7.413.
Soient E un espace muni de la topologie des seminormes $\{p_i\}_{i\in I}$ et F un espace métrique. Soient une suite (T_n) dans $\mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Nous avons $T_n \xrightarrow{*} T$ si et seulement si $T_n(v) \xrightarrow{F} T(v)$ pour tout $v \in E$.

Démonstration. Nous avons équivalence entre les lignes suivantes :

$$T_n \xrightarrow{*} T \tag{7.539a}$$
$$p_v(T_n - T) \to 0 \, \forall v \in E \qquad \text{proposition 7.399} \tag{7.539b}$$
$$\|T_n(v) - T(v)\|_F \to 0 \, \forall v \in E \tag{7.539c}$$
$$T_n(v) \xrightarrow{E} T(v). \tag{7.539d}$$

□

7.20.6 Espace $C^k(\mathbb{R}, E')$

Nous revenons à nos histoires de limites de la définition 7.14.

PropRBCiHbz

Proposition 7.414 (Unicité de la limite dans un dual topologique)**.**
Soient E un espace métrique et E' son dual topologique muni de sa topologie de la définition 7.411. Il y a unicité de l'élément de E' vers lequel une fonction $u \colon \mathbb{R} \to E'$ peut converger.

Démonstration. Soit T un élément vers lequel u_t converge lorsque $t \to t_0$. Soient $\epsilon > 0$ et $x \in E$. La boule $B_x(T, \epsilon)$ de E' subordonnée à la norme p_x et centrée en T est un ouvert de E'. Étant donné que u converge vers T il existe $\delta > 0$ tel que $u_t \in B_x(T, \epsilon)$ dès que $|t - t_0| \leqslant \delta$. Nous avons donc, pour tout $x \in E$, la limite (dans $\mathbb{R}$) :

$$\lim_{t\to t_0} u_t(x) = T(x). \tag{7.540}$$

[197] Topologie quotient, définition 7.67.
[198] Voir la définition 7.408.

Cela prouve que la convergence de u vers T implique l'existence pour tout x de la limite de $u_t(x)$ dans $\mathbb{R}$. Si T' est un autre élément vers lequel u_t converge, nous avons par le même raisonnement que

$$\lim_{t\to t_0} u_t(x) = T'(x). \tag{7.541}$$

Par unicité de la limite dans $\mathbb{R}$ nous devons alors avoir $T(x) = T'(x)$ pour tout x, c'est-à-dire $T = T'$. □

PropVKSNflB

Proposition 7.415.
Soit $u\colon \mathbb{R} \to E'$ une fonction continue. Alors

ItemLSJjfZdi

(1) pour tout $x \in E$ la fonction $t \mapsto u_t(x)$ est continue,

ItemLSJjfZdii

(2) pour tout $x \in E$ nous avons la limite dans $\mathbb{R}$

EqWKdFPVO

$$\lim_{t\to t_0} u_t(x) = u_{t_0}(x), \tag{7.542}$$

ItemLSJjfZdiii

(3) nous avons la limite dans E'

$$\lim_{t\to t_0} u_t = u_{t_0}. \tag{7.543}$$

Démonstration. Soient $x \in E$ et $\epsilon > 0$. Par la proposition 7.401 la continuité de u donne un $\delta > 0$ tel que

$$u_{B(t_0,\delta)} \subset B_x(u_{t_0}, \epsilon). \tag{7.544}$$

C'est-à-dire que si $|t - t_0| \leqslant \delta$ nous avons

$$\big|u_{t_0}(x) - u_t(x)\big| < \epsilon, \tag{7.545}$$

ce qui signifie bien que la fonction $t \mapsto u_t(x)$ est continue en tant que fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Cela est le point (1). Le théorème de limite et continuité dans $\mathbb{R}$ nous donne immédiatement la limite (7.542).

Nous passons à la preuve du point (3). Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de E' contenant u_{t_0}. Il existe donc un $i \in I$ et $\epsilon > 0$ tel que $B_i(u_{t_0}, \epsilon) \subset \mathcal{O}$. Étant donné que u est continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$u_{B(t_0,\delta)} \subset B_i(u_{t_0}, \epsilon) \subset \mathcal{O}. \tag{7.546}$$

Cela signifie bien que

$$|t - t_0| \leqslant \delta \Rightarrow u_t \in \mathcal{O}, \tag{7.547}$$

c'est-à-dire que nous avons la limite $\lim_{t\to t_0} u_t = u_{t_0}$ dans E'. Pour dire cela nous avons utilisé la définition 7.135 de la limite et le résultat d'unicité 7.414. □

DefDZsypWu

Définition 7.416.
*Si nous avons une application $u\colon \mathbb{R} \to E'$ nous considérons sa **dérivée** donnée par la limite*

$$u'_{t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{u_t - u_{t_0}}{t - t_0}. \tag{7.548}$$

Cela est un nouvel élément de E' (pour peu que la limite existe). La fonction $u'\colon \mathbb{R} \to E'$ ainsi définie peut être continue ou non. Cela nous permet de définir les espaces $C^k(\mathbb{R}, E')$ et $C^\infty(\mathbb{R}, E')$.

Une des principales utilisations que nous ferons de ces espaces seront les espaces de fonctions à valeurs dans les distributions tempérées dont nous parlerons dans la section 30.4.

7.21 Espaces de Baire

LEMooRTXFooCMCaHC

Lemme 7.417 ([1])**.**
Soit un espace topologique X. Une partie A est un ouvert dense si et seulement si $X \setminus A$ est un fermé d'intérieur vide.

Démonstration. Nous savons, par définition que le complémentaire d'un ouvert est fermé et inversement. Soient une partie $A \subset X$ ainsi que son complémentaire $F = X \setminus A$. Nous avons équivalence entre :

- F est d'intérieur vide,
- aucun ouvert non vide n'est contenu dans F

- tout ouvert non vide intersecte $X \setminus F$
- tout ouvert non vide intersecte A
- A est dense dans X.

□
DEFooYEMNooLSXLYa

Proposition-Définition 7.418 (Espace de Baire[1, 307, 308])**.**
Soit un espace topologique X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

ITEMooBHOOooKyToBw

(1) Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

ITEMooFMDAooUPaULP

(2) Toute union dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

ITEMooKSNYooIgzLey

(3) Le seul ouvert maigre[199] de X est le vide.

Quand X vérifie ces propriétés, nous disons que X est une ***espace de Baire****.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) implique (2)** Soient des fermés d'intérieur vide $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Nous posons $A_i = X \setminus F_i$ et nous utilisons le lemme 1.45 pour dire que

$$\bigcup_i F_i = \bigcup_i (X \setminus A_i) = X \setminus \big(\bigcap_i A_i\big). \tag{7.549}$$

Par hypothèse, $\bigcap_i A_i$ est un ouvert dense. Par le lemme 7.417 son complémentaire est un fermé d'intérieur vide.

(2) **(2) implique (1)** Soient des ouverts denses $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$. En notant $F_i = X \setminus A_i$, nous avons

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (X \setminus F_i) = X \setminus \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\big). \tag{7.550}$$

Par hypothèse $\bigcup_i F_i$ est un fermé d'intérieur vide. Donc son complémentaire est un ouvert dense.

(3) **(1) implique (3)** Soient un espace de Baire X et un ouvert maigre $A \subset X$. Nous avons $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ où les A_i sont des parties nulle part denses[200]. Nous devons montrer que $A = \varnothing$.

Vu que A_i est nulle part dense, $\text{Int}(\bar{A}_i) = \varnothing$ pour tout i. Nous avons :

$$\text{Int}(A) \subset \text{Int}\big(\bigcup_i A_i\big) \subset \text{Int}\big(\bigcup_i \bar{A}_i\big) = \varnothing \tag{7.551}$$

parce que X étant de Baire, l'union de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. Nous avons prouvé que $\text{Int}(A) = \varnothing$. Mais A étant ouvert nous avons $\text{Int}(A) = A$.

(4) **(3) implique (1)** Nous supposons que tout ouvert maigre de X est vide. Soient des fermés $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'intérieurs vides. Nous considérons la partie $A = \text{Int}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\big)$.

(4a) **A est ouvert** Parce que c'est l'intérieur d'une partie.

(4b) **F_i est nulle part dense** Vu que F_i est fermé nous avons $\bar{F}_i = F_i$ et donc $\text{Int}(\bar{F}_i) = \text{Int}(F_i) = \varnothing$.

Donc l'ouvert A est une réunion dénombrable de parties nulle part denses. C'est donc un ouvert maigre, et nous en déduisons que $A = \varnothing$.

Par 7.418 nous savons que X est de Baire.

□
PROPooGVTDooRMaEUK

Proposition 7.419 ([218, 309])**.**
Plusieurs choses à propos d'espaces de Baire.

ITEMooYZKYooEvcLTx

(1) Tout espace de Baire Hausdorff[201] sans point isolé est non dénombrable.

[199] Définition 7.379
[200] Définition 7.378.
[201] Définition 7.74.

ITEMooBZCAooIYQpvO

(2) *Si U est une partie ouverte d'un espace de Baire X, alors toute partie maigre dans U (topologie induite) est maigre dans X.*

ITEMooGHMTooDYUicn

(3) *Si U est ouvert dans l'espace de Baire X, alors U est un espace de Baire pour la topologie induite.*

Démonstration. Plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Soit un espace de Baire Hausdorff. Un singleton est fermé par le lemme 7.76 et d'intérieur vide. En effet si U est un ouvert contenant a, il contient forcément autre chose que a parce que X n'a pas de points isolés. Donc il n'y a pas d'ouverts contenus dans $\{a\}$.

Une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide parce que X est de Baire (définition 7.418). Donc X n'est pas une union dénombrable de singletons.

(2) **Pour (2)** Soit une partie maigre M de X. Nous avons $M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ où F_i est fermé d'intérieur vide dans U. Le lemme 7.35 nous dit que

$$\text{Int}_X\big(\text{Adh}_X(F_i)\big) = \varnothing. \tag{7.552}$$

En particulier $\text{Adh}_X(F_i) \cap U$ est nulle part dense dans X (définition 7.378(1)).

La formule (7.25) dit que $F_i = \text{Adh}_X(F_i) \cap U$, et donc

$$M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big(\text{Adh}_X(F_i) \cap U\big) \tag{7.553}$$

est une union dénombrable de parties nulle part denses. Donc M est maigre dans X.

(3) **Pour (3)** Soit un ouvert maigre A de U. Par le point (2), A est maigre dans X et donc vide parce que X est de Baire. Cela prouve que tout ouvert maigre de U est vide et donc que U est de Baire (définition 7.418).

□

ThoBBIljNM

Théorème 7.420 (Théorème de Baire[308, 218, 309])**.**
Les espaces suivants sont de Baire :

(1) *les espaces topologiques localement compacts*[202]*,*

(2) *les espaces métriques complets (donc ceux de Banach en particulier),*

(3) *tout ouvert d'un espace de Baire.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Espaces topologiques localement compacts** Nous allons utiliser les propriétés de 7.418. Soient un espace topologique localement compact X ainsi que des fermés F_i d'intérieurs vides. Nous posons $F = \bigcap_{i=0}^{\infty} F_i$, et nous prouvons que F est d'intérieur vide. Pour cela nous considérons un ouvert $U \subset X$ et nous prouvons que U n'est pas entièrement inclus dans F.

Par 7.184, il existe un ouvert à fermeture compacte $U_0 \subset U$. Vu que F_1 est fermé, $U_0 \setminus F_1$ est ouvert et comme F_1 est d'intérieur vide, il ne contient aucun ouvert, donc l'ouvert $U_0 \setminus F_1$ est non vide.

Si $x \in U_0 \setminus F_1$, alors $\{x\}$ est compact et le lemme 7.183 dit qu'il existe un ouvert V_1 tel que $\bar{V}_1$ est compact et tel que

$$x \in V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_0 \setminus F_1. \tag{7.554}$$

Maintenant V_1 étant ouvert, il n'est pas contenu dans $V_1 \setminus F_2$ qui est un ouvert non vide..

Bref, je vous laisse écrire la récurrence proprement, mais nous avons des ouverts V_n tels que $\bar{V}_n$ est compact et $\bar{V}_n \subset V_{n-1} \setminus F_n$.

Les parties $\bar{V}_n$ sont des compacts emboîtés non vides. La proposition 7.123 dit que $\bigcap_n \bar{V}_n$ est non vide. Soit $a \in \bigcap_n \bar{V}_n$. Pour tout $k \neq 1$ nous avons

$$a \in \bigcap_n \bar{V}_n \subset \bar{V}_k \subset V_{k-1} \setminus F_k. \tag{7.555}$$

[202] Définition 7.181.

Donc a n'est pas dans F_k. De plus $a \in \bar{V}_1 \subset U_0 \setminus F_1$. Donc a n'est pas non plus dans F_1. Bref, a n'est pas dans F.

Nous devons encore voir que $a \in U_0$. Cela est facile :

$$a \in \bigcup_n \bar{V}_n \subset \bar{V}_1 \subset U_0 \setminus F_1 \subset U_0. \tag{7.556}$$

(2) **Espaces métriques complets** Soit (E, d) un espace métrique complet. Soient V un ouvert quelconque de E et U_n une suite d'ouverts denses. Le but est de prouver que l'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ intersecte V. Vu que V est ouvert dans un espace métrique, il contient une boule ouverte et donc une boule fermée B_0 de rayon strictement positif. L'ensemble U_1 est dense et intersecte donc un ouvert contenu dans B_0. L'intersection est un ouvert qui contient alors une boule fermée B_1 de rayon strictement positif. Continuant ainsi nous construisons une suite de fermés emboités B_n telle que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \cap V \tag{7.557}$$

contient l'intersection des B_n. Par le théorème 7.352 des fermés emboîtés (que nous utilisons parce que E est métrique et complet), cette intersection est non vide.

(3) **Ouvert d'un espace de Baire** C'est la proposition 7.419(3).

□

Parmi les applications du théorème de Baire, nous avons

- Le théorème de Banach-Steinhaus 10.188.
- Le théorème de l'application ouverte 10.197.

Chapitre 8

Espaces vectoriels (encore)

8.1 Déterminants

SecGYzHWs

8.2 Applications multilinéaires

À propos d'analyse sur les formes multilinéaires (contiuité, norme), voir 10.7.

DefFRHooKnPCT

Définition 8.1 (Application multilinéaire)**.**
*Soient des espaces vectoriels $V_1, \dots, V_k$ ainsi qu'un espace vectoriel W. Une application $T\colon V^k \to W$ est dite k-**linéaire** ou k-**multilinéaire** si pour tout $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ les applications*

$$\begin{aligned} T_i\colon V_i &\to W \\ x &\mapsto T(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_k) \end{aligned} \tag{8.1}$$

sont linéaires.

*En particulier lorsque $k = 2$, nous parlons d'applications **bilinéaires**.*

Nous notons $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W)$ ou $\mathcal{L}_k(V_1, \dots, V_k; W)$ l'ensemble des applications k-linéaires de $V_1 \times \dots \times V_k$ vers W. Lorsque tout les V_i sont identiques nous notons $\mathcal{L}_k(V, W)$.

DEFooZFCKooGIoYrE

Définition 8.2.
*Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme multilinéaire $f\colon E^k \to \mathbb{K}$ est **antisymétrique** si*

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k) \tag{8.2}$$

pour tout couple (i, j).

8.3.
Il serait une erreur[1] de noter $\mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$ l'ensemble de applications bilinéaires sur V. En effet, $\mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$ est l'ensemble des applications linéaires $V \times V \to \mathbb{R}$.

Si $S \in \mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$, il n'y a pas de formules particulières pour $S(u, \lambda v)$. Par contre si $T \in \mathcal{L}_2(V, W)$, alors

$$T(u, \lambda v) = \lambda T(u, v). \tag{8.3}$$

Nous avons par contre

$$T(\lambda u, \lambda v) = \lambda^2 T(u, v) \tag{8.4}$$

alors que

$$S(\lambda u, \lambda v) = S\big(\lambda(u, v)\big) = \lambda S(u, v). \tag{8.5}$$

Certains[310] notent $\otimes^k V^*$ l'espace des formes k-linéaires sur V, voir la proposition 10.219.

Exemple 8.4.
Soit une application linéaire $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. L'application de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ associée à A définie par

$$\begin{aligned} T_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ x, y &\mapsto x \cdot Ay \end{aligned} \tag{8.6}$$

est une forme bilinéaire.

[1] Mais je crois que c'est fait à plusieurs endroits dans le Frido. Faire attention.

Elle est aussi donnée par la formule

$$T_A(x,y) = x \cdot Ay = \sum_{i,j} A_{ij} x_i y_j. \tag{8.7}$$

△

PROPooXIWIooWVeEJo

Proposition 8.5.
Si $T\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ est une application k-multilinéaire, alors nous avons

$$T\big(x^{(1)},\dots,x^{(k)}\big) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} S_{i_1,\dots,i_k} x^{(1)}_{i_1} \dots x^{(k)}_{i_k} \tag{8.8}$$

où $S_{i_1,\dots,i_k} = T(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$.

Démonstration. Pour chaque j nous posons $x^{(j)} = \sum_l x^{(j)}_l e_l$ et en utilisant la multilinéarité,

$$T(x^{(1)},\dots,x^{(k)}) = T\big(\sum_{i_1} x^{(1)}_{i_1} e_{i_1},\dots,\sum_{i_k} x^{(k)}_{i_k} e_{i_k}\big) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} x^{(1)}_{i_1}\dots x^{(k)}_{i_k} T(e_{i_1},\dots,e_{i_k}). \tag{8.9}$$

□

8.2.1 Formes multilinéaires alternées

DEFooYWOBooUGJojy

Définition 8.6.
*Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application multilinéaire **alternée** sur E est une application k-linéaire $f\colon E^k \to \mathbb{K}$ telle que $f(v_1,\dots,v_k) = 0$ dès que $v_i = v_j$ pour certains $i \neq j$.*

*Une application multilinéaire alternée est une **forme linéaire**.*

LemHiHNey

Lemme 8.7 ([311])**.**
Une forme k-linéaire alternée est antisymétrique[2]. Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, alors une forme antisymétrique est alternée[3].

Démonstration. Soit f une forme alternée ; quitte à fixer toutes les autres variables, nous pouvons travailler avec une 2-forme et simplement montrer que $f(x,y) = -f(y,x)$. Pour ce faire nous écrivons

$$0 = f(x+y,x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) = f(x,y) + f(y,x). \tag{8.10}$$

Pour la réciproque, si f est antisymétrique, alors $f(x,x) = -f(x,x)$. Cela montre que $f(x,x) = 0$ lorsque $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de deux. □

ProprbjihK

Proposition 8.8 ([312])**.**
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, où la caractéristique de $\mathbb{K}$ n'est pas deux. L'espace des n-formes multilinéaires alternées sur E est de $\mathbb{K}$-dimension 1.

Démonstration. Soient $\{e_i\}$, une base de E, une n-forme linéaire alternée $f\colon E \to \mathbb{K}$ ainsi que des vecteurs $(v_1,\dots,v_n)$ de E. Nous pouvons les écrire dans la base

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \tag{8.11}$$

et alors exprimer f par

$$f(v_1,\dots,v_n) = f\big(\sum_{i_1=1}^{n} \alpha_{1i_1} e_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^{n} \alpha_{ni_n} e_{i_n}\big) \tag{8.12a}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_n} \alpha_{1i_1}\dots\alpha_{ni_n} f(e_{i_1},\dots,e_{i_n}). \tag{8.12b}$$

[2] Antisymétrique, définition 8.2.
[3] Définition 8.6.

Étant donné que f est alternée, les seuls termes de la somme sont ceux dont les i_k sont tous différents, c'est-à-dire ceux où $\{i_1,\dots,i_n\}=\{1,\dots,n\}$. Il y a donc un terme par élément du groupe des permutations S_n et

$$f(v_1,\dots,v_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_{\sigma(1)1}\dots\alpha_{\sigma(n)n}f(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)}). \tag{8.13}$$

En utilisant encore une fois le fait que la forme f soit alternée, $f=f(e_1,\dots,e_n)\Pi$ où

$$\Pi(v_1,\dots,v_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\dots\alpha_{\sigma(n)n}. \tag{8.14}$$

Pour rappel, la donnée des v_i est dans les nombres α_{ij}.

L'espace des n-formes alternées est donc *au plus* de dimension 1. Pour montrer qu'il est exactement de dimension 1, il faut et suffit de prouver que Π est alternée. Par le lemme 8.7, il suffit de prouver que cette forme est antisymétrique[4].

Soient donc $v_1,\dots,v_n$ tels que $v_i=v_j$. En posant $\tau=(1i)$ et $\tau'=(2j)$ et en sommant sur $\sigma\tau\tau'$ au lieu de σ, nous pouvons supposer que $i=1$ et $j=2$. Montrons que $\Pi(v,v,v_3,\dots,v_n)=0$ en tenant compte que $\alpha_{i1}=\alpha_{i2}$:

$$\begin{aligned}
\Pi(v,v,v_3,\dots,v_n)&=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\alpha_{\sigma(3)3}\dots\alpha_{\sigma(n)n} && \text{(8.15a)}\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma\tau)\alpha_{\sigma\tau(1)1}\alpha_{\sigma\tau(2)2}\alpha_{\sigma\tau(3)3}\dots\alpha_{\sigma\tau(n)n} \qquad \text{où } \tau=(12) && \text{(8.15b)}\\
&=-\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\alpha_{\sigma(3)3}\dots\alpha_{\sigma(n)n} && \text{(8.15c)}\\
&=-\Pi(v,v,v_3,\dots,v_n). && \text{(8.15d)}
\end{aligned}$$

□

8.2.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Nous considérons un corps $\mathbb{K}$ et l'espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

DEFooODDFooSNahPb

Définition 8.9 (Déterminant d'une famille de vecteurs[13])**.**
*Le **déterminant** de la famille de vecteurs $(v_1,\dots,v_n)$ dans la base $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ est l'élément de $\mathbb{K}$*

$$\det{}_{(b_1,\dots,b_n)}(v_1,\dots,v_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}b^*_{\sigma(i)}(v_i) \tag{8.16}$$

EQooOJEXooXUpwfZ

où

- *la somme porte sur le groupe symétrique,*
- *le nombre $\epsilon(\sigma)$ est la signature*[5] *de la permutation σ,*
- *les éléments $\{b_i^*\}$ sont la base duale*[6] *de $\{b_i\}$.*

8.10.
La base $\{e_i\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et l'élément e_k^* est la forme linéaire définie par

$$\begin{aligned}
e_k^*\colon\mathbb{K}^n&\to\mathbb{K}\\
\sum_i x_ie_i&\mapsto x_k.
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Il n'est pas sous-entendu que $\mathbb{K}^n$ ait un produit scalaire. Il n'est donc pas autorisé de dire que $\{e_i\}$ est une base orthonormée et que $e_k^*(x)=\langle e_k,x\rangle$. Ce genre d'égalités sont vraies dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, mais n'ont pas de sens en général.

Le lemme 10.5 va un peu parler du cas où $\mathbb{K}^n$ est muni d'une base orthonormée.

LemJMWCooELZuho

Lemme 8.11 ([13])**.**
Les propriétés du déterminant. Soit B une base de E.

[4] C'est ici que joue l'hypothèse sur la caractéristique de $\mathbb{K}$.
[5] Définition 1.292.
[6] Définition 4.136.

ITEMooAHOHooDZgtSB

(1) *L'application* $\det_B : E^n \to \mathbb{K}$ *est n-linéaire.*

ITEMooTXXBooBmDtzd

(2) *L'application* $\det_B : E^n \to \mathbb{K}$ *est n-linéaire est antisymétrique et alternée*[7].

ITEMooNFJTooTqGoPr

(3) *Pour toute base,* $\det_B(B) = 1$.

ITEMooALRQooDvBzDQ

(4) *Le déterminant ne change pas si on remplace un vecteur par une combinaison linéaire des autres :*

$$\det_B(v_1, \dots, v_n) = \det_B\big(v_1 + \sum_{s=2}^{n} a_s v_s, v_2, \dots, v_n\big). \tag{8.18}$$

ITEMooQTTRooMbzqyW

(5) *Si on permute les vecteurs,*

$$\det_B(v_1, \dots, v_n) = \epsilon(\sigma) \det_B(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}). \tag{8.19}$$

ITEMooIPIDooTrerVF

(6) *Si* B' *est une autre base :*

EqAWICooBLTTQY

$$\det_B = \det_B(B') \det_{B'} \tag{8.20}$$

ITEMooXKTAooXynFTE

(7) *Nous avons aussi la formule* $\det_B(B') \det_{B'}(B) = 1$.

ItemDWFLooDUePAf

(8) *Les vecteurs* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *forment une base si et seulement si* $\det_B(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Démonstration. Point par point.

(1) (1) En posant $v_1 = x_1 + \lambda x_2$ nous avons

$$\det_B(x_1 + \lambda x_2, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} e^*_{\sigma(i)}(v_i) \tag{8.21a}$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \Big(e^*_{\sigma(1)}(x_1 + \lambda x_2)\Big) \prod_{i=2}^{n} e^*_{\sigma(i)}(v_i). \tag{8.21b}$$

À partir de là, la linéarité de $e^*_{\sigma(1)}$ montre que $\det_B$ est linéaire en son premier argument. Pour les autres arguments, le même calcul tient.

(2) (2)

Nous prouvons à présent que det est alternée. Si votre corps est de caractéristique différente de deux, vous pouvez lire la proposition 8.12.

Supposons $v_k = v_l$, et considérons la permutation $\beta = (k, l)$. Nous savons par la proposition 5.47 que $S_n = A_n \cup A_n\beta$. Cela nous permet de décomposer la somme sur S_n en deux parties :

EQooWFHQooTrTTWl

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_i \epsilon^*_{\sigma(i)}(v_i) = \sum_{\sigma \in A_n} (-1)^\sigma \prod_i \epsilon^*_{\sigma(i)}(v_i) + \sum_{\sigma \in A_n} (-1)^{\sigma\beta} \prod_i \epsilon^*_{(\sigma\beta)(i)}(v_i). \tag{8.22}$$

D'abord $(-1)^\sigma = 1$ et $(-1)^{\sigma\beta} = -1$. Ensuite, pour un $\sigma \in A_n$ donné, nous avons

$$\prod_i \epsilon^*_{(\sigma\beta)(i)}(v_i) = \epsilon^*_{(\sigma\beta)(k)}(v_k)\epsilon^*_{(\sigma\beta)(l)}(v_l) \prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \epsilon^*_{(\sigma\beta)(i)}(v_i) \tag{8.23a}$$

$$= \epsilon^*_{\sigma(l)}(v_k)\epsilon^*_{\sigma(k)}(v_l) \prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \epsilon^*_{\sigma(i)}(v_i) \tag{8.23b}$$

$$= \epsilon^*_{\sigma(l)}(v_l)\epsilon^*_{\sigma(k)}(v_k) \prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \epsilon^*_{\sigma(i)}(v_i) \tag{8.23c}$$

$$= \prod_i \epsilon^*_{\sigma(i)}(v_i). \tag{8.23d}$$

Donc les deux termes de la somme (8.22) ne diffèrent que par un signe. Elle est donc nulle, et la forme déterminant est alternée.

La fonction det est antisymétrique parce que alternée, voir le lemme 8.7.

[7] Alternée, définition 8.6. En caractéristique 2, alternée n'est pas équivalent à symétrique.

(3) (3) Nous avons

$$\det_B(B) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \underbrace{e^*_{\sigma(i)}(e_i)}_{=\delta_{\sigma(i),i}}. \tag{8.24}$$

Si σ n'est pas l'identité, le produit contient forcément un facteur nul. Il ne reste de la somme que $\sigma = \mathrm{Id}$ et le résultat est 1.

(4) (4) Vu que $\det_B$ est linéaire en tous ses arguments,

$$\det_B\left(v_1 + \sum_{s=2}^{n} a_s v_s, v_2, \ldots, v_n\right) = \det_B(v_1, \ldots, v_n) + \sum_{s=2}^{n} a_s \det_B(v_s, v_2, \ldots, v_n). \tag{8.25}$$

Chacun des termes de la somme est nul parce qu'il y a répétition de v_s parmi les arguments alors que la forme est alternée.

(5) (5) Nous devons calculer $\det_B(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$, et pour y voir plus clair nous posons $w_i = v_{\sigma(i)}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\det_B(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) &= \sum_{\sigma'} \epsilon(\sigma') \prod_{i=1}^{n} e^*_{\sigma'(i)}(w_i) && \text{(8.26a)}\\
&= \sum_{\sigma'} \epsilon(\sigma') \prod_{i=1}^{n} e^*_{\sigma'(i)}(v_{\sigma(i)}) && \text{(8.26b)}\\
&= \sum_{\sigma'} \epsilon(\sigma') \prod_{i=1}^{n} e^*_{\sigma^{-1}\sigma'(i)}(v_i) && \text{(8.26c)}\\
&= \sum_{\sigma'} \epsilon(\sigma\sigma') \prod_{i=1}^{n} e^*_{\sigma'(i)}(v_i) && \text{(8.26d)}\\
&= \epsilon(\sigma) \det_B(v_1, \ldots, v_n). && \text{(8.26e)}
\end{aligned}$$

Justifications : nous avons d'abord modifié l'ordre des éléments du produit et ensuite l'ordre des éléments de la somme. Nous avons ensuite utilisé le fait que $\epsilon\colon S_n \to \{0, 1\}$ était un morphisme de groupe (proposition 1.299).

(6) (6) Étant donné que l'espace des formes multilinéaires alternées est de dimension 1, il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_B = \lambda \det_{B'}$. Appliquons cela à B' :

$$\det_B(B') = \lambda \det_{B'}(B'), \tag{8.27}$$

donc $\lambda = \det_B(B')$.

(7) (7) Il suffit d'appliquer l'égalité précédente à B en nous souvenant que $\det_B(B) = 1$.

(8) (8) Si $B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base alors $\det_B(B') \neq 0$, sinon il n'est pas possible d'avoir $\det_B(B') \det_{B'}(B) = 1$.

À l'inverse, si B' n'est pas une base, c'est que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est liée par la proposition 4.19. Il y a donc moyen de remplacer un des vecteurs par une combinaison linéaire des autres. Le déterminant s'annule alors.

□

PROPooXNLDooGGkHpd

Proposition 8.12.
Si la caractéristique du corps de base n'est pas deux, le déterminant est antisymétrique et alterné.

Démonstration. Si la caractéristique du corps de base n'est pas deux, une forme antisymétrique est alternée (lemme 8.7).

Pour prouver que le déterminant est antisymétrique, remarquez que permuter v_k et v_l revient à calculer le nombre $\det_B(v_{\sigma_{kl}(1)}, \ldots, v_{\sigma_{kl}(n)})$ au lieu de $\det_B(v_1, \ldots, v_n)$. Cela revient à changer la somme $\sum_\sigma$ en $\sum_{\sigma\circ\sigma_{kl}}$. Cela multiplie $\epsilon(\sigma)$ par -1 parce qu'on ajoute une permutation.

Donc le déterminant est antisymétrique. Nous en déduisons qu'il est alterné parce que, en permutant trivialement v_1 et v_1, nous obtenons $\det_B(v_1, v_1) = -\det_B(v_1, v_1)$. Si le corps est de caractéristique différente de deux, cela implique que $\det_B(v_1, v_1) = 0$. □

D'après la proposition 8.8, il existe une unique forme n-linéaire alternée égale à 1 sur B, et c'est $\det_B\colon E^n \to \mathbb{K}$.

8.2.3 Déterminant d'un endomorphisme

L'interprétation géométrique du déterminant en termes d'aires et de volumes est donnée après le théorème 14.272. Pour un déterminant entre deux espaces différents, voir la proposition 10.91.

8.13.
Voici une définition du déterminant d'une application linéaire $f\colon E\to E$. Comme expliqué dans [313], il est peu probable qu'il existe une définition satisfaisante de déterminant pour une application linéaire $f\colon E\to F$, même si E et F ont une même dimension finie.

Cela soit dit en passant, ça rend plus compliqué que prévu la preuve que $\mathrm{GL}(E,F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$. Il ne suffira pas de dire que le déterminant est une application continue. Voir la proposition 10.91.
LEMooQTRVooAKzucd

Lemme-Définition 8.14 (Déterminant d'un endomorpisme)**.**
Si $f\colon E\to E$ est un endomorphisme, et si les parties B et B' sont deux bases, alors[8]

$$\det_B\big(f(B)\big)=\det_{B'}\big(f(B')\big). \tag{8.28}$$

Ce nombre, indépendant de la base choisie est nommé le ***déterminant*** *de f et est noté* $\det(f)$.

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon E^n&\to\mathbb{K}\\ v_1,\dots,v_n&\mapsto\det_B\big(f(v_1),\dots,f(v_n)\big)\end{aligned} \tag{8.29}$$

est n-linéaire et alternée ; il existe donc $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\varphi=\lambda\det_B$. En appliquant cela à B :

$$\det_B\big(f(B)\big)=\lambda\det_B(B)=\lambda. \tag{8.30}$$

Nous avons donc déjà prouvé que $\lambda=\det_B\big(f(B)\big)$, c'est-à-dire

$$\det_B\big(f(v)\big)=\det_B\big(f(B)\big)\det_B(v). \tag{8.31}$$

Nous allons maintenant introduire B' là où il y a du v en utilisant les formules (8.20) :

$$\det_B\big(f(v)\big)=\det_B(B')\det_{B'}\big(f(v)\big) \tag{8.32a}$$
$$\det_B(v)=\det_B(B')\det_{B'}(v). \tag{8.32b}$$

Nous obtenons

$$\det_{B'}\big(f(v)\big)=\det_B\big(f(B)\big)\det_{B'}(v). \tag{8.33}$$

Et on applique cela à $v=B'$:

$$\det_{B'}\big(f(B')\big)=\det_B\big(f(B)\big)\underbrace{\det_{B'}(B')}_{=1}. \tag{8.34}$$

□
PropYQNMooZjlYlA

Proposition 8.15.
Principales propriétés géométriques du déterminant d'un endomorphisme.
ItemUPLNooYZMRJy

(1) Si f et g sont des endomorphismes, alors $\det(f\circ g)=\det(f)\det(g)$.
ITEMooNZNLooODdXeH

(2) L'endomorphisme f est un automorphisme[9] *si et seulement si* $\det(f)\neq 0$.
ITEMooZMVXooLGjvCy

(3) Si $\det(f)\neq 0$ *alors* $\det(f^{-1})=\det(f)^{-1}$.
ItemooPJVYooYSwqaE

(4) L'application $\det\colon\mathrm{GL}(E)\to\mathbb{K}\setminus\{0\}$ *est un morphisme de groupe.*

Démonstration. Point par point.

(1) Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon E^n&\to\mathbb{K}\\ v&\mapsto\det_B\big(f(v)\big).\end{aligned} \tag{8.35}$$

[8] Définition de $\det_B(B')$, 8.9.
[9] Endomorphisme inversible, définition 4.38.

Comme d'habitude nous avons $\varphi(v) = \lambda \det_B(v)$. En appliquant à B et en nous souvenant que $\det_B(B) = 1$ nous avons $\det_B\big(f(B)\big) = \lambda$. Autrement dit :

$$\lambda = \det(f). \tag{8.36}$$

Calculons à présent $\varphi\big(g(B)\big)$: d'une part,

$$\varphi\big(g(B)\big) = \det_B\big((f \circ g)(B)\big) \tag{8.37}$$

et d'autre part,

$$\varphi\big(g(B)\big) = \lambda \det_B\big(g(B)\big) = \lambda \det(g) \tag{8.38}$$

En égalisant et en reprenant la la valeur déjà trouvée de λ,

$$\det\big((f \circ g)(B)\big) = \det(f)\det(g), \tag{8.39}$$

ce qu'il fallait.

(2) Supposons que f soit un automorphisme. Alors si B est une base, $f(B)$ est une base. Par conséquent $\det(f) = \det_B\big(f(B)\big) \neq 0$ parce que $f(B)$ est une base (lemme 8.11(8)).

Réciproquement, supposons que $\det(f) \neq 0$. Alors si B est une base quelconque nous avons $\det_B\big(f(B)\big) \neq 0$, ce qui est uniquement possible lorsque $f(B)$ est une base. L'application f transforme donc toute base en une base et est alors un automorphisme d'espace vectoriel.

(3) Vu que le déterminant de l'identité est 1 et que f est inversible, $1 = \det(f \circ f^{-1}) = \det(f)\det(f^{-1})$.

□
PROPooFKDXooKMSolt

Proposition 8.16.
Soient deux espaces vectoriels E et F de dimension finies n et m sur le corps $\mathbb{K}$ munis de bases $\{e_i\}$ et $\{f_\alpha\}$. À une matrice $A \in \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{K})$ nous associons l'application linéaire[10]

$$f_A(x) = \sum_{i\alpha} A_{\alpha i} x_i f_\alpha. \tag{8.40}$$

Alors, en ce qui concerne les déterminants[11]*, nous avons*

(1) $\det(f_A) = \det(A)$

(2) $\det(f_{AB}) = \det(f_A)\det(f_B)$

Démonstration. Nous devons étudier la formule

$$\det(f_A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} e^*_{\sigma(i)}\big(f_A(e_i)\big). \tag{8.41}$$

En premier lieu nous avons

$$f_A(e_i) = \sum_{jk} A_{jk}(e_i)_k e_j = \sum_j A_{ji} e_j. \tag{8.42}$$

Nous avons alors

$$e^*_{\sigma(i)}\big(f_A(e_i)\big) = \sum_j A_{ji} \underbrace{e^*_{\sigma(i)}(e_j)}_{\delta_{j\sigma(i)}} = A_{\sigma(i)i}. \tag{8.43}$$

Au final,

$$\det(f_A) = \sum_\sigma \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i)i} = \det(A^t) = \det(A) \tag{8.44}$$

où la dernière égalité est autorisée par le lemme 4.85.

Cela prouve la formule $\det(f_A) = \det(A)$.

En ce qui concerne la seconde formule, il s'agit de se souvenir de la proposition 4.77 qui donne $f_{AB} = f_A \circ f_B$, et ensuite de la proposition 8.15(1) qui donne $\det(f_A \circ f_B) = \det(f_A)\det(f_B)$. □

[10] Dont nous avons déjà beaucoup parlé entre autres dans la proposition 4.77.
[11] Définition 8.14 pour les applications linéaires et 4.83 pour les matrices.

Exemple 8.17.
Le déterminant de Vandermonde (proposition 4.126) est alterné, semi-symétrique et non symétrique. Le fait qu'il soit alterné est le fait qu'il soit un déterminant. Étant donné qu'il est alterné, il est semi-symétrique parce que sur A_n, nous avons $\epsilon = 1$. Étant donné qu'il est alterné, il change de signe sous l'action des éléments impairs de S_n et n'est donc pas symétrique. △

PropUDqXax

Proposition 8.18.
Un polynôme semi-symétrique $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ se décompose de façon unique en

$$f = P + VQ \tag{8.45}$$

où P et Q sont deux polynômes symétriques.

Démonstration. Nous commençons par prouver l'unicité en montrant que si $f = P + VQ$ avec P et Q symétrique, alors P et Q sont donnés par des formules explicites en termes de f.

Si σ_1 et σ_2 sont deux permutations impaires de $\{1, \ldots, n\}$, alors $\sigma_1 \cdot f = \sigma_2 \cdot f$ parce que l'élément $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ est pair (proposition 1.299), de telle sorte que $\sigma_2^{-1}\sigma_1 \cdot f = f$. Nous posons donc $g = \tau \cdot f$ où τ est une permutation impaire quelconque – par exemple une transposition.

Vu que V est alternée et que τ est une transposition nous avons

$$g = \tau \cdot f = P - VQ. \tag{8.46}$$

Donc $f + g = 2P$ et $f - g = 2VQ$. Cela donne P et Q en termes de f et g, et donc l'unicité.

Attention : cela ne donne pas un moyen de prouver l'existence parce que rien ne prouve pour l'instant que $f - g$ peut effectivement être écrit sous la forme VQ, c'est-à-dire que $f - g$ soit divisible par V. C'est cela que nous allons nous atteler à démontrer maintenant.

Nous commençons par prouver que $f + g$ est symétrique et $f - g$ alterné. Si σ est une transposition,

$$\sigma \cdot (f + g) = \sigma \cdot f + \sigma\tau \cdot f = g + f \tag{8.47}$$

parce que $\sigma\tau$ est pair. De la même façon,

$$\sigma \cdot (f - g) = g - f = \epsilon(\sigma)(f - g). \tag{8.48}$$

Dans les deux cas nous concluons en utilisant le fait que toute permutation est un produit de transpositions (proposition 1.291) et que ϵ est un homomorphisme[12].

Soient maintenant deux entiers $h < k$ dans $\{1, \ldots, n\}$ et l'anneau

$$\big(\mathbb{K}[T_1, \ldots, \hat{T}_k, \ldots, T_n]\big)[T_k]. \tag{8.49}$$

Cet anneau contient le polynôme $T_k - T_h$ où T_k est la variable et T_h est un coefficient. Nous faisons la division euclidienne de $f - g$ par $T_k - T_h$ parce que nous avons dans l'idée de faire arriver le déterminant de Vandermonde et donc le produit de toutes les différences $T_k - T_h$:

$$f - g = (T_k - T_h)q + r \tag{8.50}$$

EqSHdgrG

où $\deg_{T_k} r < 1$, c'est-à-dire que r ne dépends pas de T_k. Nous revoyons maintenant l'égalité (8.50) dans $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ et nous y appliquons la transposition τ_{kh}. Nous savons que $\tau_{kh}(f - g) = -(f - g)$ et $\tau_{kh}(T_k - T_h) = -(T_k - T_h)$, et donc

$$-(f - g) = -(T_k - T_h)\tau_{kh} \cdot q + \tau_{kh} \cdot r \tag{8.51}$$

EqVOhjKB

où $\tau_{kh} \cdot r$ ne dépend pas de T_h. Nous appliquons à (8.51) l'application

$$\begin{aligned} t\alpha \colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] &\to \mathbb{K}[T_1, \ldots, \hat{T}_k, \ldots, T_n] \\ \alpha(PT_1, \ldots, \hat{T}_k, \ldots, T_n) &= P(T_1, \ldots, T_h, \ldots, T_n). \end{aligned} \tag{8.52}$$

Cette application vérifie $\alpha\big(\tau_{kh} \cdot r\big) = \alpha(r)$ et nous avons

$$-\alpha(f - g) = \alpha(r). \tag{8.53}$$

Puis en appliquant α à la relation $f - g = (T_k - T_h)q + r$, nous trouvons

$$\alpha(f - g) = \alpha(r), \tag{8.54}$$

[12] Voir -1.1.

et par conséquent $\alpha(r) = 0$. Ici nous utilisons l'hypothèse de caractéristique différente de deux. Dire que $\alpha(r) = 0$, c'est dire que r est divisible par $T_k - T_h$, mais r étant de degré zéro en T_k, nous avons $r = 0$. Par conséquent $T_k - T_h$ divise $f - g$ pour tout $h < k$, et nous pouvons définir un polynôme Q par

$$f - g = 2Q \prod_{h<k} \prod_{k\leqslant n} (T_k - T_h) = 2Q(T_1, \ldots, T_n)V(T_1, \ldots, T_n), \tag{8.55}$$

où nous avons utilisé la formule du déterminant de Vandermonde de la proposition 4.126.

Étant donné que $f+g$ est un polynôme symétrique, nous allons aussi poser $f+g = 2P$ avec P symétrique.

Montrons à présent que Q est un polynôme symétrique. Soit $\sigma \in S_n$; vu que nous savons déjà que $f - g$ est alternée, nous avons

$$\sigma \cdot (f - g) = \epsilon(\sigma)(f - g) = \epsilon(\sigma)2QV, \tag{8.56}$$

Mais en appliquant σ à l'équation (8.55),

$$\sigma \cdot (f - g) = 2(\sigma \cdot V)(T_1, \ldots, , T_n)(\sigma \cdot Q)(T_1, \ldots, T_n) \tag{8.57a}$$
$$= 2\epsilon(\sigma)V(T_1, \ldots, T_n)(\sigma \cdot Q)(T_1, \ldots, T_n). \tag{8.57b}$$

Nous égalisons cela avec (8.56) et nous souvenant que l'anneau $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ est intègre par le théorème 3.92. Ensuite nous simplifions par $2\epsilon(\sigma)V$ pour obtenir

$$Q = \sigma \cdot Q, \tag{8.58}$$

c'est-à-dire que Q est symétrique.

Au final nous avons $f + q = 2P$ et $f - g = 2VQ$ avec P et Q symétriques. En faisant la somme,

$$f = P + VQ. \tag{8.59}$$

□

8.2.4 Déterminant de Gram

Si $x_1, \ldots, x_r$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel, alors le **déterminant de Gram** est le déterminant

$$G(x_1, \ldots, x_r) = \det\big(\langle x_i, x_j\rangle\big). \tag{8.60}$$

Notons que la matrice est une matrice symétrique.

Proposition 8.19.
Si F est un sous-espace vectoriel de base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et si x est un vecteur, alors le déterminant de Gram est un moyen de calculer la distance entre x et F par

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{8.61}$$

8.2.5 Déterminant de Cauchy

Soient des nombres a_i et b_i $(i = 1, \ldots, n)$ tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout couple (i, j). Le **déterminant de Cauchy** est

$$D_n = \det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right). \tag{8.62}$$

Proposition 8.20 ([314]).
Le déterminant de Cauchy est donné par la formule

$$D_n = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)\prod_{i<j}(b_j - b_i)}{\prod_{ij}(a_i + b_j)}. \tag{8.63}$$

8.2.6 Matrice de Sylvester

Définition 8.21 (Matrice de Sylvester, résultant[315]).
Soient P et Q deux polynômes non nuls, de degrés respectifs n et m :

$$P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n \tag{8.64a}$$
$$Q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_m x^m. \tag{8.64b}$$

*La **matrice de Sylvester** associée à P et Q est la matrice carrée $m + n \times m + n$ définie ainsi :*

(1) la première ligne est formée des coefficients de P, suivis de 0 :

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & p_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \tag{8.65}$$

(2) la seconde ligne s'obtient à partir de la première par permutation circulaire vers la droite ;

(3) les $(m-2)$ lignes suivantes s'obtiennent en répétant la même opération ;

(4) la ligne $(m+1)$ est formée des coefficients de Q, suivis de 0 :

$$\begin{pmatrix} q_m & q_{m-1} & \cdots & q_1 & q_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \tag{8.66}$$

(5) les $(n-1)$ lignes suivantes sont formées par des permutations circulaires.

Le déterminant de la matrice de Sylvester associée à P et Q est appelé le ***résultant*** *de P et Q et noté* $\operatorname{res}(P,Q)$.

Ainsi dans le cas $n=4$ et $m=3$, la matrice obtenue est

$$S_{p,q} = \begin{pmatrix} p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}. \tag{8.67}$$ EqPFgtle

Attention : si P est de degré n et Q de degré m, il y a m lignes pour P et n pour Q dans le déterminant du résultant (et non le contraire).

LemBFrhgnA

Lemme 8.22 ([316])**.**
Si P et Q sont deux polynômes de degrés n et m à coefficients dans l'anneau $\mathbb{A}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{A}$,

$$\operatorname{res}(\lambda P, Q) = \lambda^m \operatorname{res}(P,Q) \tag{8.68a}$$
$$\operatorname{res}(P, \lambda Q) = \lambda^n \operatorname{res}(P,Q). \tag{8.68b}$$

Démonstration. Cela est simplement un comptage du nombre de lignes. Il y a m lignes contenant les coefficients de P ; donc prendre λP revient à multiplier m lignes dans un déterminant et donc le multiplier par λ^m. □

L'équation de Bézout (6.114) peut être traitée avec une matrice de Sylvester. Soient P et Q, deux polynômes donnés et à résoudre l'équation

$$xP + yQ = 0 \tag{8.69}$$ EqSsyXQo

par rapport aux polynômes inconnus x et y dont les degrés sont $\deg(x) < \deg(Q)$ et $\deg(y) < \deg(P)$. Si nous notons $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ la liste des coefficients de x et y (dans l'ordre décroissant de degré), nous pouvons récrire l'équation (8.69) sous la forme

$$S_{PQ}^t \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = 0. \tag{8.70}$$

Pour s'en convaincre, écrivons pour les polynômes de l'exemple (8.67) :

$$\begin{pmatrix} p_4 & 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_4 & 0 & q_2 & q_3 & 0 & 0 \\ p_2 & p_3 & p_4 & q_1 & q_2 & q_3 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & 0 & q_0 & q_1 & q_2 \\ 0 & p_0 & p_1 & 0 & 0 & q_0 & q_1 \\ 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2p_4 + y_3q_3 \\ p_3x_2 + p_4x_1 + q_2y_3 + q_3y_2 \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \end{pmatrix} \tag{8.71}$$

Nous voyons que sur la ligne numéro k (en partant du bas et en numérotant de à partir de zéro) nous avons les produits p_ix_j et q_iy_j avec $i+j=k$. La colonne de droite représente donc bien les coefficients du polynôme $xP+yQ$.

PropAPxzcUl

Proposition 8.23.
Le résultant de deux polynômes est non nul si et seulement si les deux polynômes sont premiers entre eux.

Un polynôme P a une racine double en a si et seulement si P et P' ont a comme racine commune, ce qui revient à dire que P et P' ne sont pas premiers entre eux.

Une application importante de ces résultats sera le théorème de Rothstein-Trager 20.97 sur l'intégration de fractions rationnelles.

Exemple 8.24.
Si nous prenons $P = aX^2 + bX + c$ et $P' = 2aX + b$ alors la taille de la matrice de Sylvester sera $2 + 1 = 3$ et

$$S_{P,P'} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix}. \tag{8.72}$$

Le résultant est alors

$$\operatorname{res}(P, P') = -a(b^2 - 4ac). \tag{8.73}$$

Donc un polynôme du second degré a une racine double si et seulement si $b^2 - 4ac = 0$. Cela est un résultat connu depuis longtemps mais qui fait toujours plaisir à revoir. △

La matrice de Sylvester permet aussi de récrire l'équation de Bézout pour les polynômes ; voir le théorème 6.47 et la discussion qui s'ensuit.

Une proposition importante du résultant est qu'il peut s'exprimer à l'aide des racines des polynômes.

PropNDBOGNx

Proposition 8.25.
Si

$$P(X) = a_p \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i) \tag{8.74a}$$

$$Q(X) = b_q \prod_{j=1}^{q} (X - \beta_i) \tag{8.74b}$$

alors nous avons les expressions suivantes pour le résultant :

$$\operatorname{res}(P, Q) = a_p^q b_q^p \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{q} (\beta_j - \alpha_i) = b_q^p \prod_{j=1}^{q} P(\beta_j) = (-1)^{pq} a_p^q \prod_{i=1}^{p} Q(\alpha_i). \tag{8.75}$$

EqCFUumix

Démonstration. Si P et Q ne sont pas premiers entre eux, d'une part la proposition 8.23 nous dit que $\operatorname{res}(P, Q) = 0$ et d'autre part, P et Q ont un facteur irréductible en commun, ce qui signifie que nous devons avoir un des $X - \alpha_i$ égal à un des $X - \beta_j$. Autrement dit, nous avons $\alpha_i = \beta_j$ pour un couple (i, j). Par conséquent tous les membres de l'équation (8.75) sont nuls.

Nous supposons donc que P et Q sont premiers entre eux. Nous commençons par supposer que les polynômes P et Q sont unitaires, c'est-à-dire que $a_p = b_q = 1$. Nous considérons alors l'anneau

$$\mathbb{A} = \mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q]. \tag{8.76}$$

Dans cet anneau, l'élément $\beta_j - \alpha_i$ est irréductible (tout comme $X - Y$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X, Y]$). Le résultant $R = \operatorname{res}(P, Q)$ est un élément de $\mathbb{A}$ parce que tous leurs coefficients peuvent être exprimés à l'aide des α_i et des β_j. Dans $\mathbb{A}$, l'élément $\beta_j - \alpha_i$ divise R. En effet lorsque $\beta_j = \alpha_i$, le déterminant définissant le résultant est nul, ce qui signifie que $\beta_j - \alpha_i$ est un facteur irréductible de R.

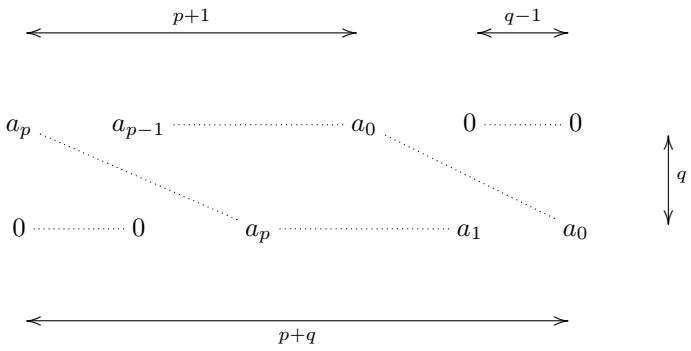
Par conséquent il existe un polynôme $T \in \mathbb{A}$ tel que

$$R = T(\alpha_1, \ldots, \beta_q) \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{r} (\beta_j - \alpha_i). \tag{8.77}$$

Comptons les degrés. Pour donner une idée de ce calcul de degré, voici comment se présente, au niveau des

dimensions, le déterminant :

EqJCaATQH



(8.78)

si les a_i sont les coefficients de P. Mais chacun des a_i est de degré 1 en les α_i, donc le déterminant dans son ensemble est de degré q en les α_i, parce que R contient q lignes telles que (8.78). Le même raisonnement montre que R est de degré p en les β_j. Par ailleurs le polynôme $\prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{r}(\beta_j-\alpha_i)$ est de degré p en les β_j et q en les α_i. Nous en déduisons que T doit être un polynôme ne dépendant pas de α_i ou de β_j.

Nous pouvons donc calculer la valeur de T en choisissant un cas particulier. Avec $P(X)=X^p$ et $Q(X)=X^q+1$, il est vite vu que $R(P,Q)=1$ et donc que $T=1$.

Si les polynômes P et Q ne sont pas unitaires, le lemme 8.22 nous permet de conclure.

□

8.2.7 Théorème de Kronecker

Nous considérons K_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$

(1) unitaires de degré n,

(2) dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont de modules plus petits ou égaux à 1,

(3) et qui ne sont pas divisés par X.

Un tel polynôme s'écrit sous la forme

$$P=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k. \tag{8.79}$$

ThoOWMNAVp

Théorème 8.26 (Kronecker[128])**.**
Les racines des éléments de K_n sont des racines de l'unité.

Démonstration. Vu que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos nous pouvons considérer les racines $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ de P dans $\mathbb{C}$. Nous les considérons avec leurs multiplicités.

Soit $R=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}b_kX^k$ un élément de K_n dont nous notons $\beta_1,\dots,\beta_n$ les racines dans $\mathbb{C}$. Les relations coefficients-racines stipulent que

$$b_k=\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_{n-k}\leqslant n}\prod_{j=1}^{n-k}\beta_{i_j}. \tag{8.80}$$

En prenant le module et en se souvenant que $|\beta_l|\leqslant 1$ pour tout l, nous trouvons que

$$|b_k|\leqslant\binom{n}{n-k}. \tag{8.81}$$

Mais comme $b_k\in\mathbb{Z}$, nous avons

$$b_k\in\Big\{-\binom{n}{n-k},-\binom{n}{n-k}+1,\dots,0,\dots,\binom{n}{n-k}\Big\} \tag{8.82}$$

qui est de cardinal $2\binom{n}{n-k}+1$. Nous avons donc

$$\mathrm{Card}(K_n)\leqslant\prod_{k=0}^{n-1}\Big(1+\binom{n}{n-k}\Big)<\infty. \tag{8.83}$$

La conclusion jusqu'ici est que K_n est un ensemble fini.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ nous considérons les polynômes

$$P_k = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i^k) \tag{8.84a}$$

$$Q_k = X^k - Y \in \mathbb{Z}[X, Y], \tag{8.84b}$$

et puis nous considérons le résultant $R_k = \text{res}_X(P, Q_k) \in \mathbb{Z}[Y]$:

$$R_k = \text{res}_X(P, Q_k) = \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -Y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -Y & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -Y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -Y \end{pmatrix} \tag{8.85}$$

Cela est un polynôme en Y dont le terme de plus haut degré est $(-1)^n Y^n$. Les petites formules de la proposition 8.25 nous permettent d'exprimer $R_k(Y)$ en termes des racines de P :

$$R_k(Y) = \prod_{i=1}^{n} Q_k(\alpha_i) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i^k - Y) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i^k) = (-1)^n P_k(Y). \tag{8.86}$$

Vu que $P \in K_n$ nous savons que les α_i ne sont pas tous nuls ; donc $P_k \in K_n$. Cependant nous avons vu que K_n est un ensemble fini ; donc parmi les P_k, il y a des doublons (et pas un peu)[13]. Nous regardons même l'ensemble des P_{2^n} dans lequel nous pouvons en trouver deux les mêmes. Soit $l > k$ tels que $P_{2^k} = P_{2^l}$. Si α est racine de P_{2^k}, alors il est de la forme $\alpha = \beta^{2^k}$ pour une certaine racines β de P. Par conséquent

$$\alpha^{2^l/2^k} = \alpha^{2^{l-k}} \tag{8.87}$$ EqBEgJtzm

est racine de P_{2^l}. Notons que dans cette expression il n'y a pas de problèmes de définition d'exposant fractionnaire dans $\mathbb{C}$ parce que $l > k$. Vu que (8.87) est racine de P_{2^l}, il est aussi racine de P_{2^k}. Donc

$$\left(\alpha^{2^{l-k}}\right)^{2^{l-k}} = \alpha^{2^{2(l-k)}} \tag{8.88}$$

est racine de P_{2^l} et donc de P_{2^k}. Au final nous savons que tous les nombres de la forme $\alpha^{2^{n(l-k)}}$ sont racines de P_{2^k}. Mais comme P_{2^k} a un nombre fini de racines, nous pouvons en trouver deux égales. Si nous avons

$$\alpha^{2^{n(l-k)}} = \alpha^{2^{m(l-k)}} \tag{8.89}$$

pour certains entiers $m > n$, alors

$$\alpha^{2^{n(l-k)} - 2^{m(l-k)}} = 1, \tag{8.90}$$

ce qui prouve que α est une racine de l'unité. Nous avons donc prouvé que toutes les racines de P_{2^k} sont des racines de l'unité et donc que les racines de P sont racines de l'unité. □

8.3 Orientation

8.3.1 Cas vectoriel

DEFooNVRHooEBHUSu

Proposition-Définition 8.27 ([317]).
Soient deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ d'un espace vectoriel réel E. Nous définissons la relation $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$[14].

[13] Ici dans [128], il déduit qu'on a un k tel que $P_k = P_1 = P$. Moi je vois pourquoi on a un k et un l tels que $P_k = P_l$, mais pourquoi on peut en trouver un spécialement égal au premier ? Une réponse à cette question permettrait de solidement réduire la lourdeur de la suite de la preuve.

[14] Définition 8.9.

Cela est une relation d'équivalence[15] *sur l'ensemble des bases de E, et les classes sont les* ***orientations*** *de E.*

Démonstration. Tout est dans le lemme 8.11. D'abord quand $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ ensuite, nous passons en revue les points qu'il faut pour être une relation d'équivalence.

(1) $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$ parce que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1 > 0$.

(2) Vu que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}$, les deux sont positifs en même temps ou pas du tout.

(3) Si $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}''$, alors en utilisant la formule

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}''), \tag{8.91}$$

nous voyons que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') > 0$.

□

Lemme 8.28.
Soit un espace vectoriel réel E. L'ensemble des bases de E possède exactement deux orientations[16]

Démonstration. Nous considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$[17] à partir de laquelle nous définissons une autre base : $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$. Nous allons prouver que ces deux bases ne sont pas équivalentes, et que toute base de E est équivalente soit à $\mathcal{B}$ soit à $\mathcal{B}'$.

(1) **Au moins deux classes** Le fait que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$ vient du fait que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ et que l'application $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire ; en multipliant par -1 le premier argument, la valeur du déterminant est multipliée par -1.

Donc les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ne sont pas équivalentes et il existe au moins deux classes.

(2) **Au plus deux classes** Nous montrons à présent que toute base est équivalente soit à $\mathcal{B}$ soit à $\mathcal{B}'$. Supposons que $\mathcal{B}''$ ne soit pas équivalente à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') < 0$. Nous utilisons encore la formule (8.20),

$$\underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')}_{<0} = \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_{<0} \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}''), \tag{8.92}$$

et nous déduisons que $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') > 0$.

□

8.29.
Vu qu'il n'y a que deux classes d'équivalence parmi les bases, nous pouvons utiliser le vocable « avoir la même orientation que » ou « avoir l'orientation contraire de ». Ce n'est pas ambigu.

Proposition 8.30 ([317])**.**
Si $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E de dimension n, et si τ est une transposition[18] *de S_n, alors la base $\tau(\mathcal{B})$ est de sens contraire.*

Démonstration. Le lemme 8.11(2) dit que $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme anti-symétrique ; donc

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -\det_{\mathcal{B}}\big(\tau(\mathcal{B})'\big). \tag{8.93}$$

Si l'un est positif, l'autre est négatif. Elles ont donc des orientations contraires. □

Corolaire 8.31.
Si $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E de dimension n, et si $\sigma \in S_n$, la base $\sigma(\mathcal{B})$ a même orientation que $\mathcal{B}$ si et seulement si $\sigma \in A_n$.

Démonstration. Notons c_1 la classe d'orientation de $\mathcal{B}$ et c_2 l'autre classe. La permutation σ se décompose en produit de transpositions dont la parité est fixée (proposition 1.295). Posons $\sigma = \tau_k \dots \tau_1$.

En posant $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_{l+1} = \tau_{l+1}(\mathcal{B}_l)$, pour tout l, la base $\mathcal{B}_l$ est d'orientation contraire à celle de la base $\mathcal{B}_{l-1}$. Une base sur deux a l'orientation de $\mathcal{B}$ et l'autre sur deux a l'orientation contraire.

Donc $\sigma(\mathcal{B})$ a la même orientation que $\mathcal{B}$ si et seulement si k est pair. Mais $\sigma \in A_n$ si et seulement si k est pair. C'est bon. □

[15] Définition 1.50.
[16] Définition 8.27.
[17] Nous notons (e_1, e_2) et non $\{e_1, e_2\}$ parce que l'ordre est important.
[18] Définition 1.288.

PROPooNBAXooKNUrnk

Proposition-Définition 8.32 ([317]).
Soit un espace vectoriel réel, et un endomorphisme f de E. Deux définitions.

ITEMooOAXFooLIPHlW

*(1) L'endomorphisme f est **direct** si sont déterminant est strictement positif.*

ITEMooNKYCooXTgKJA

*(2) L'endomorphisme **préserve l'orientation** si il transforme toute base de E en une base de même orientation.*

Un endomorphisme est direct si et seulement si il préserve l'orientation.

Démonstration. En deux sens.

(1) **Direct implique préserve l'orientation** Soit une base $\mathcal{B}$ de E et un endomorphisme direct u. D'abord, u est inversible du fait que son déterminant est non nul par la proposition 8.15(2). Donc u transforme une base en une base par le lemme 4.8.

La définition 8.14 du déterminant de u est que

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big) > 0. \tag{8.94}$$

Donc $\mathcal{B}$ et $u(\mathcal{B})$ ont même orientation.

(2) **Préserve l'orientation implique direct** Le fait que u préserve l'orientation signifie en particulier qu'il transforme une base en une base et qu'il est inversible par le lemme 4.8.

Donc si $\mathcal{B}$ est une base, $u(\mathcal{B})$ est encore une base et nous avons, parce que $\mathcal{B}$ et $u(\mathcal{B})$ ont même orientation,

$$0 < \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big) = \det(u). \tag{8.95}$$

□

8.3.2 Cas affine

DEFooOTFPooIVkHFP

Définition 8.33.
*Nous disons qu'une application affine $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ **préserve l'orientation** si sa partie linéaire préserve l'orientation.*

8.4 Hermitien, orthogonal, adjoint

NORMooWGEJooCtGtqZ

8.34.
Une des choses à retenir de la définition de l'opérateur adjoint est que la notion de A^* dépend du produit scalaire considéré.

Il se fait que le plus souvent, sur $\mathbb{R}^n$, nous considérons le produit scalaire usuel et la base canonique. De ce fait, les notions d'opérateur adjoint et d'opérateur transposés se confondent avec la notion de matrice transposée. Ce sont pourtant, en général, trois notions distinctes.

DEFooROVNooFlTbSK

Proposition-Définition 8.35 (Définition de la transposée[1]).
Soient deux espaces vectoriels euclidiens ou hermitiens E et F et une application linéaire $A\colon E \to F$.

ITEMooRUZWooSZgGnf

(1) Il existe une unique application linéaire $B\colon F \to E$ telle que

EQooHWYKooFzAGgB

$$\langle Ax, y\rangle_F = \langle x, By\rangle_E \tag{8.96}$$

pour tout $x \in E$ et $y \in F$.

ITEMooXXEUooPtfPKY

(2) Si $\{e_i\}$ est une base orthonormée de E et $\{f_\alpha\}$ est une base orthonormée de F, alors la matrice de A et B pour ces bases sont liées par

EQooUSNVooQtRNGL

$$B_{i\alpha} = A_{\alpha i}. \tag{8.97}$$

*L'application B ainsi définie set nommée **adjoint** de A et sera notée $B = A^*$.*

Démonstration. Pour l'unicité, nous écrivons la condition avec $x = e_j$ pour obtenir :

$$\langle Ae_j, y\rangle = \langle e_j, By\rangle = (By)_j \tag{8.98}$$

c'est-à-dire que les coefficients $B(y)_j$ de $B(y)$ dans la base canonique sont fixés par la condition.

Pour l'existence, il suffit de vérifier que poser

$$B(y) = \sum_j \langle Ae_j, y\rangle e_j \tag{8.99}$$

fonctionne. Pour cela il faut utiliser la bilinéarité du produit scalaire et le fait que $\langle x, e_j\rangle = x_j$. Nous avons :

$$\langle x, B(y)\rangle = \langle x, \sum_j \langle A(e_j), y\rangle e_j\rangle \tag{8.100a}$$
$$= \sum_j \langle A(e_j), y\rangle\langle x, e_j\rangle \tag{8.100b}$$
$$= \sum_j \langle A(x_j e_j), y\rangle \tag{8.100c}$$
$$= \langle A(x), y\rangle. \tag{8.100d}$$

En ce qui concerne la matrice de l'application B ainsi définie, nous écrivons la condition (8.96) avec $y = e'_\alpha$ et $x = e_i$, de telle sorte que

$$A(x) = A(e_i) = \sum_\beta A_{\beta i} e'_\beta \tag{8.101}$$

et

$$B(y) = B(e'_\alpha) = \sum_j B_{j\alpha} e_j. \tag{8.102}$$

Alors nous avons :

$$\sum_\beta A_{\beta i}\langle e'_\beta, e'_\alpha\rangle = \sum_j B_{j\alpha}\langle e_i, e_j\rangle, \tag{8.103}$$

donc

$$A_{\alpha i} = B_{i\alpha}. \tag{8.104}$$

□

8.36.
À cause de l'expression (8.97) pour la matrice de A^*, cette application est souvent appelé **transposé** de A et noté A^t. Nous allons cependant voir plus tard (définition8.184) que la transposée de A est une application $A^t\colon F^* \to E^*$. Il nous arrivera cependant d'écrire des égalités comme $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle$.

PROPooSHZMooGwdfBd

Proposition 8.37.
En ce qui concerne le déterminant,

$$\det(A^*) = \det(A)^* \tag{8.105}$$

où l'étoile à droite dénote la conjugaison complexe dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Écrivons l'expression explicite (8.16) du déterminant. Le tout avec la base canonique :

$$\det(A) = \det_{(e_1,\dots,e_n)}(Ae_1, \dots, Ae_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n e^*_{\sigma(i)}(Ae_i). \tag{8.106}$$

Mais nous pouvons développer :

$$e^*_{\sigma(i)}(Ae_i) = \langle e_{\sigma(i)}, Ae_i\rangle = \langle A^* e_{\sigma(i)}, e_i\rangle = \langle e_i, A^* e_{\sigma(i)}\rangle^* = e_i^*(A^* e_{\sigma(i)})^*. \tag{8.107}$$

Notez que dans la dernière expression, les trois * ont trois significations différentes. Par conséquent,

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n e_i^*(A^* e_{\sigma(i)})^*. \tag{8.108}$$

Mais $e_i^*(A^* e_{\sigma(i)}) = e^*_{\sigma(j)}(A^* e_j)$ pour $j = \sigma(i)$, donc le produit ne change pas si on déplace le σ :

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n e^*_{\sigma(i)}(A^* e_i)^* = \det(A^*)^*. \tag{8.109}$$

Nous avons donc $\det(A) = \det(A^*)^*$, c'est-à-dire $\det(A)^* = \det(A^*)$. Pour information, la dernière étoile est la conjugaison complexe. □

PROPooVPSYooRuoEFi

Proposition 8.38 ([1]).
Si $A\colon E_2 \to E_3$ et $B\colon E_1 \to E_2$ sont des applications linéaires, alors

$$(AB)^* = B^*A^* \tag{8.110}$$

où la « multiplication » est la composition.

Démonstration. L'existence de $(AB)^*$, de A^* et de B^* ne donne pas lieu à débat parce que la proposition 8.35 ne souffre pas de discussions. La propriété que $(AB)^*$ est unique a avoir est que

$$\langle ABx, y\rangle = \langle x, (AB)^*y\rangle \tag{8.111}$$

pour tout $x \in E_1$ et $y \in E_3$. Or l'application B^*A^* possède également cette propriété parce que

$$\langle x, B^*A^*y\rangle = \langle Bx, A^*y\rangle = \langle ABx, y\rangle. \tag{8.112}$$

La partie unicité de la proposition 8.35 nous impose donc d'accepter que les applications $(AB)^*$ et B^*A^* sont en réalité les mêmes[19]. □

8.39.
Un grand moment d'utilisation de la notion d'adjoint pour un opérateur non carré sera la définition d'une intégrale sur une variété ; en particulier dans la proposition 20.9.

Lemme 8.40.
Si E est un espace euclidien, un endomorphisme $f\colon E \to E$ est autoadjoint si et seulement si pour tout $x, y \in E$ nous avons $\langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$.

Démonstration. Dans le sens direct, nous avons

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle = \langle x, f(y)\rangle. \tag{8.113}$$

La première égalité est la définition de f^* et la seconde est l'hypothèse $f = f^*$.

Dans l'autre sens, l'hypothèse est que l'endomorphisme f vérifie $\langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$. Mais la proposition 8.35(1) spécifie que f^* est l'unique endomorphisme à satisfaire cette égalité. Donc $f = f^*$. □

8.4.1 Opérateur orthogonal, matrice orthogonale

DEFooYKCSooURQDoS

Définition 8.41.
*Un opérateur est **orthogonal** lorsque $A^* = A^{-1}$ où A^* est l'adjoint de A défini en 8.35.*

DEFooUHANooLVBVID

Définition 8.42.
*Une matrice U est **orthogonale** si $U^t = U^{-1}$. Le **groupe orthogonal** noté $\mathrm{O}(n)$ est l'ensemble des matrices orthogonales $n \times n$.*

LEMooSSALooSBFzJb

Lemme 8.43.
Soit un opérateur $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Il est orthogonal si et seulement si sa matrice dans la base canonique est orthogonale[20].

Démonstration. Soit la base canonique $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de $\mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\langle AA^*e_i, e_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \tag{8.114}$$

donc $\big((AA^*)e_i\big)_j = \delta_{ij}$, ou encore $(AA^*)_{ij} = \delta_{ij}$, ce qui signifie que la matrice AA^* est l'identité. □

PropKBCXooOuEZcS

Proposition 8.44 (Thème 78).
À propos de matrices orthogonales.

ITEMooHSTAooIbVrwa

(1) L'ensemble des matrices réelles orthogonales forme un groupe noté $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

(2) Si A est une matrice orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.

ITEMooOWMBooHUatNb

(3) Le groupe $\mathrm{O}(n)$ est le groupe des isométries linéaires[21] de $\mathbb{R}^n$.

[19] Et ce même si vous croyez les avoir déjà vu ensemble dans la même pièce.
[20] Définition 8.42.
[21] Au sens où, parmi les applications linéaires, les isométries sont les éléments de $\mathrm{O}(n)$. À part ça, il y a aussi les translations, mais c'est une autre histoire qui vous sera contée une autre fois.

Démonstration. Commençons par prouver que $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est un groupe. La matrice $\mathbb{1}$ est orthogonale. De plus si A et B sont orthogonale, la matrice produit AB est orthogonale :

$$(AB)(AB)^t = ABB^tA^t = A\mathbb{1}A^t = \mathbb{1}. \tag{8.115}$$

Nous avons donc bien un groupe.

En ce qui concerne le déterminant, $AA^t = \mathbb{1}$ donne $\det(A)\det(A^t) = 1$, mais la proposition 8.37 dit que $\det(A) = \det(A^t)$, donc $\det(A)^2 = 1$. D'où le fait que $\det(A) = \pm 1$.

D'autre part si A est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ nous avons $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. En particulier,

$$\langle A^tAx, y\rangle = \langle x, y\rangle \tag{8.116}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. En prenant $y = e_i$ nous trouvons

$$(A^tAx)_i = x_i, \tag{8.117}$$

ce qui signifie que pour tout x, $A^tAx = x$, ou encore que A^tA est l'identité.

Réciproquement si A^tA est l'identité nous avons

$$\langle x, y\rangle = \langle A^tAx, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle, \tag{8.118}$$

ce qui prouve que A est une isométrie. □

En ce qui concerne les valeurs propres des matrices de $\mathrm{O}(n)$ ainsi que leurs formes canoniques (avec des fonctions trigonométriques) pour $\mathrm{O}(3)$ et $\mathrm{SO}(3)$, ce sera pour la proposition 18.219 et ce qui s'ensuit.

DEFooJLNQooBKTYUy

Définition 8.45.
Le sous-groupe des matrices orthogonales de déterminant 1 *est le groupe* ***spécial orthogonal*** *noté* $\mathrm{SO}(n)$.

8.5 Topologie

8.5.1 Boules et sphères

Un espace vectoriel normé (définition 7.212) vient avec sa topologie métrique (théorème 7.142). Sphères et boules fermées viennent dans la définition 7.178.

Définition 8.46.
Une partie A de V est dite ***bornée*** *si il existe un réel R tel que $A \subset B(0_V, R)$.*

Une partie est donc bornée si elle est contenue dans une boule de rayon fini.

Exemple 8.47.
Dans $\mathbb{R}$, les boules sont les intervalles ouverts et fermés tandis que la sphère est donnée par les points extrêmes des intervalles :

$$\begin{aligned} B(a,r) &=]a-r, a+r[, \\ \bar{B}(a,r) &= [a-r, a+b], \\ S(a,r) &= \{a-r, a+r\}. \end{aligned} \tag{8.119}$$

△

Exemple 8.48.
Si nous considérons $\mathbb{R}^2$, la situation est plus riche parce que nous avons plus de normes. Essayons de voir les sphères de centre $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon r pour les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

Pour la norme $\|.\|_1$, la sphère de rayon r est donnée par l'équation

$$|x| + |y| = r. \tag{8.120}$$

Pour la norme $\|.\|_2$, l'équation de la sphère de rayon r est

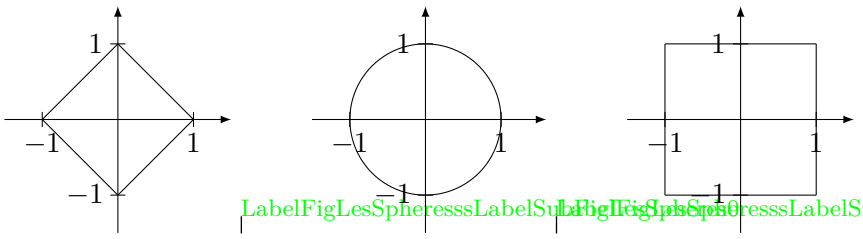
$$\sqrt{x^2 + y^2} = r, \tag{8.121}$$

et pour la norme supremum, la sphère de rayon r a pour équation

$$\max\{|x|, |y|\} = r. \tag{8.122}$$

Elles sont dessinées sur la figure 8.1

△



LabelFigLesSpheresssLabelSu LabelFigLesSpheresssLabelSu LabelFigLesSpheresssLabelSu

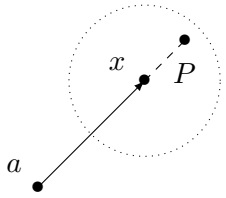
(a) La sphère unité pour la norme $\|.\|_1$ (b) La sphère unité pour la norme $\|.\|_2$ (c) La sphère unité pour la norme $\|.\|_\infty$

FIGURE 8.1 : Les sphères de rayon 1 pour les trois normes classiques. LabelFigLesSpheres

PropBoitPtLoin

Proposition 8.49.
Soient V un espace vectoriel normé, a dans V et x tel que $d(a,x) = r$, c'est-à-dire $x \in S(a,r)$. Dans ce cas, toute boule centrée en x contient un point P tel que $d(P,a) > r$ et un point Q tel que $d(Q,a) < r$.

Démonstration. Soit une boule de rayon δ autour de x. Le but est de trouver un point P tel que $d(P,a) > r$ et $d(P,x) < \delta$. Pour cela, nous prenons P sur la même droite que x (en partant de a), mais juste « un peu plus loin », comme sur la figure suivante :



Plus précisément, nous considérons le point

$$P = x + \frac{v}{N} \tag{8.123}$$

où $v = x - a$ et N est suffisamment grand pour que $d(x,P)$ soit plus petit que δ. Cela est toujours possible parce que

$$d(P,x) = \|P - x\| = \frac{\|v\|}{N} \tag{8.124}$$

peut être rendu aussi petit que l'on veut par un choix approprié de N. Montrons maintenant que $d(a,P) > d(a,x)$:

$$\begin{aligned} d(a,P) &= \|a - x - \frac{v}{N}\| \\ &= \|a - x + \frac{a}{N} - \frac{x}{N}\| \\ &= \|\big(1 + \frac{1}{N}\big)(a - x)\| \\ &> \|a - x\| = d(a,x). \end{aligned} \tag{8.125}$$

Nous laissons en exercice le soin de trouver un point Q tel que $d(Q,a) < r$ et $d(Q,x) < \delta$. □

8.5.2 Ouverts, fermés, intérieur et adhérence

Définition 8.50.
*Soit $(V, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et A, une partie de V. Un point a est dit **intérieur** à A si il existe une boule ouverte centrée en a et contenue dans A.*

*On appelle **l'intérieur** de A l'ensemble des points qui sont intérieurs à A. Nous notons $\mathrm{Int}(A)$ l'intérieur de A.*

Notons que $\mathrm{Int}(A) \subset A$ parce que si $a \in \mathrm{Int}(A)$, nous avons $B(a,r) \subset A$ pour un certain r et en particulier $a \in A$.

Exemple 8.51.
Trouver l'intérieur d'un intervalle dans $\mathbb{R}$ consiste à « ouvrir là où c'est fermé ».

(1) $\text{Int}\big([0,1[\big) =]0,1[$.

Prouvons d'abord que $]0,1[\subset \text{Int}([0,1[)$. Si $a \in]0,1[$, alors a est strictement supérieur à 0 et strictement inférieur à 1. Dans ce cas, la boule de centre a et de rayon $\frac{\min\{a,1-a\}}{2}$ est contenue dans $]0,1[$ (voir figure 8.2). Cela prouve que a est dans l'intérieur de $[0,1[$.

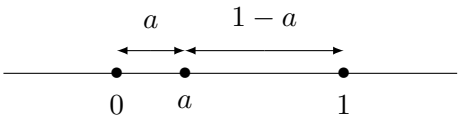


FIGURE 8.2 : Trouver le rayon d'une boule autour de a. Une boule qui serait centrée en a avec un rayon strictement plus petit à la fois de a et de $1-a$ est entièrement contenue dans le segment $]0,1[$. LabelFigIntervalleUn

Prouvons maintenant que $\text{Int}\big([0,1[\big) \subset]0,1[$. Vu que l'intérieur d'un ensemble est inclus dans l'ensemble, nous savons déjà que $\text{Int}\big([0,1[\big) \subset [0,1[$. Nous devons donc seulement montrer que 0 n'est pas dans l'intérieur de $[0,1[$. C'est le cas parce que toute boule du type $B(0,r)$ contient le point $-r/2$ qui n'est pas dans $[0,1[$.

(2) $\text{Int}\Big([0,\infty[\Big) =]0,\infty[$.

(3) $\text{Int}\big(]2,3[\big) =]2,3[$.

△

ExempleIntBoules

Exemple 8.52.
Les intérieurs des boules et sphères sont importantes à savoir.

(1) $\text{Int}\big(B(a,r)\big) = B(a,r)$. Si $x \in B(a,r)$, nous avons $d(a,x) < r$. Alors la boule $B\big(x, r - d(x,a)\big)$ est incluse à $B(a,r)$, et donc x est dans l'intérieur de $B(a,r)$. Conseil : faire un dessin.

(2) $\text{Int}\big(\bar{B}(a,r)\big) = B(a,r)$. Par le point précédent, la boule $B(a,r)$ est certainement dans l'intérieur de la boule fermée. Il reste à montrer que les points de $\bar{B}(a,r)$ qui ne sont pas dans $B(a,r)$ ne sont pas dans l'intérieur. Ces points sont ceux dont la distance à a est *égale* à r. Le résultat découle alors de la proposition 8.49.

(3) $\text{Int}\big(S(a,r)\big) = \varnothing$. Si $x \in S(a,r)$, toute boule centrée en a contient des points qui ne sont pas à distance r de a.

Notez que la sphère est un exemple d'ensemble non vide mais d'intérieur vide.

△

Définition 8.53.
*Une partie A de l'espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ est dite **ouverte** si chacun de ses points est intérieur. La partie A est donc ouverte si $A \subset \text{Int}(A)$. Par convention, nous disons que l'ensemble vide $\varnothing$ est ouvert.*

*Une partie est dite **fermée** si son complémentaire est ouvert. La partie A est donc fermée si $V \setminus A$ est ouverte.*

Remarque : un ensemble A est ouvert si et seulement si $\text{Int}(A) = A$.

Définition 8.54.
*Une partie A de l'espace vectoriel normé V est dite **compacte** si elle est fermée et bornée.*

Nous verrons tout au long de ce cours que les ensembles compacts, et les fonctions définies sur ces ensembles ont de nombreuses propriétés agréables.

ExempleFermeIntevrR

Exemple 8.55.
En ce qui concerne les intervalles de $\mathbb{R}$,

- $]1,2[$ est ouvert ;
- $[3,4]$ est fermé ;
- $[5,6[$ n'est ni ouvert ni fermé ;

Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont toujours compacts. △

PropTopologieAx

Proposition 8.56.
Soit V un espace vectoriel normé.

(1) L'ensemble V lui-même et le vide sont à la fois fermés et ouverts.

(2) Toute union d'ouverts est ouverte.

(3) Toute intersection finie *d'ouverts est ouverte.*

ItemPropTopologieAxiv

(4) Le vide et V sont les seules parties de V à être à la fois fermées et ouvertes.

Démonstration. L'ingrédient principal de cette démonstration est que si a est un point d'un ouvert $\mathcal{O}$, alors il existe une boule autour de a contenue dans $\mathcal{O}$ parce que a doit être dans l'intérieur de $\mathcal{O}$.

(1) Nous avons déjà dit que, par définition, l'ensemble vide est ouvert. Cela implique que V lui-même est fermé (parce que son complémentaire est le vide). De plus, V est ouvert parce que toutes les boules sont inclues à V. Le vide est alors fermé (parce que son complémentaire est V).

(2) Soit une famille $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ d'ouverts[22], et l'union

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i. \tag{8.126}$$

Soit maintenant $a \in \mathcal{O}$. Nous devons prouver qu'il existe une boule centrée en a entièrement contenue dans $\mathcal{O}$. Étant donné que $a \in \mathcal{O}$, il existe $i \in I$ tel que $a \in \mathcal{O}_i$ (c'est-à-dire que a est au moins dans un des $\mathcal{O}_i$). Par hypothèse l'ensemble $\mathcal{O}_i$ est ouvert et donc tous ses points (en particulier a) sont intérieurs ; il existe donc une boule $B(a,r)$ centrée en a telle que $B(a,r) \subset \mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}$.

(3) Soit une famille finie d'ouverts $(\mathcal{O}_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$, et $a \in \mathcal{O}$ où

$$\mathcal{O} = \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_k. \tag{8.127}$$

Vu que a appartient à chaque ouvert $\mathcal{O}_k$, nous pouvons trouver, pour chacun de ces ouverts, une boule $B(a,r_k)$ contenue dans $\mathcal{O}_k$. Chacun des r_k est strictement positif, et nous n'en avons qu'un nombre fini, donc le nombre $r = \min\{r_1,\ldots,r_n\}$ est strictement positif. La boule $B(a,r)$ est incluse dans toutes les autres (parce que $B(a,r) \subset B(a,r')$ lorsque $r \leqslant r'$), par conséquent

$$B(a,r) \subset \bigcap_{k=1}^{n} B(a,r_k) \subset \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_k = \mathcal{O}, \tag{8.128}$$

c'est-à-dire que la boule de rayon r est une boule centrée en a contenue dans $\mathcal{O}$, ce qui fait que a est intérieur à $\mathcal{O}$.

(4) Je n'ai pas encore de démonstration de ce point[23].

□

La proposition dit que toute intersection *finie* d'ouvert est ouverte. Il est faux de croire que cela se généralise aux intersections infinies, comme le montre l'exemple suivant :

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[= \{0\}. \tag{8.129}$$

Chacun des ensembles $]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$ est ouvert, mais le singleton $\{0\}$ est fermé (pourquoi ?).

Nous reportons à la proposition 1.579 la preuve du fait que tout ensemble borné de $\mathbb{R}$ possède un infimum et un supremum.

Définition 8.57.
L'ensemble des ouverts de V est la ***topologie*** *de V. La topologie dont nous parlons ici est dite* ***induite*** *par la norme $\|.\|$ de V (parce que cette norme définit la notion de boule et qu'à son tour la notion de boule définit la notion d'ouverts). Un* ***voisinage*** *de a dans V est un ensemble contenant un ouvert contenant a.*

[22] L'ensemble I avec lequel nous « numérotons » les ouverts $\mathcal{O}_i$ est *quelconque*, c'est-à-dire qu'il peut être $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ ou n'importe quel autre ensemble, fini ou infini.

[23] Rédigez une preuve, photographiez votre feuille, et envoyez-la moi.

Il existe de nombreuses topologies sur un espace vectoriel donné, mais certaines sont plus fameuses que d'autres. Dans le cas de $V = \mathbb{R}^n$, la topologie **usuelle** est celle induite par la norme euclidienne. Lorsque nous parlons de boules, de fermés, de voisinages ou d'autres notions topologiques (y compris de convergence, voir plus bas) dans $\mathbb{R}^n$, nous sous-entendons toujours la topologie de la norme euclidienne.

Exemple 8.58.
Les ensembles suivants sont des voisinages de 3 dans $\mathbb{R}$:

- $]1, 5[$;
- $[0, 10]$;
- $\mathbb{R}$.

Les ensembles suivants ne sont pas des voisinages de 3 dans $\mathbb{R}$:

- $]1, 3[$;
- $]1, 3]$;
- $[0, 5[\backslash\{3\}$.

△

Proposition 8.59.
Dans un espace vectoriel normé,

(1) toute intersection de fermés est fermée ;

(2) toute union finie *de fermés est fermée.*

Encore une fois, l'hypothèse de finitude de l'intersection est indispensable comme le montre l'exemple suivant :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] =]-1, 1[. \tag{8.130}$$

Chacun des intervalles dont on prend l'union est fermé tandis que l'union est ouverte.

LEMooHPQTooHKdoiL

Lemme 8.60.
Soit A, une partie de l'espace vectoriel normé V. Un point $a \in V$ est adhérent[24] *à A dans V si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing. \tag{8.131}$$

Démonstration. En deux implications.

(1) $\Rightarrow$ Soient un point adhérent a et un $\epsilon > 0$. Vu que $B(a, \epsilon)$ est un ouvert contenant a, nous avons $B(a, \epsilon) \cap A \neq \varnothing$.

(2) $\Leftarrow$ Soit un point a tel que pour tout ϵ, l'intersection $B(a, \epsilon) \cap A$ est non vide. Si S est un ouvert contenant a, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $a \in B(a, \epsilon) \subset S$. Vu que $B(a, \epsilon) \cap A \neq \varnothing$, nous avons aussi $S \cap A\varnothing$.

□

Un point peut être adhérent à A sans faire partie de A, et nous avons toujours $A \subset \text{Adh}(A)$.

EXooICLBooJzQFNY

Exemple 8.61.
La terminologie « fermeture » de A pour désigner $\bar{A}$ provient de deux origines.

(1) L'ensemble $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Cela signifie que si B est un fermé qui contient A, alors $\bar{A} \subset B$. Cela est fondamentalement le sens de la définition 7.19.

(2) Pour les intervalles dans $\mathbb{R}$, trouver $\bar{A}$ revient à fermer les extrémités qui sont ouvertes, comme on en a parlé dans l'exemple 8.55.

△

[24] Définition 7.19.

Exemple 8.62.
Dans $\mathbb{R}$, l'infimum et le supremum d'un ensemble sont des points adhérents. En effet si M est le supremum de $A \subset \mathbb{R}$, pour tout ε, il existe un $a \in A$ tel que $a > M - \varepsilon$, tandis que $M > a$. Cela fait que $a \in B(M, \varepsilon)$, et en particulier que pour tout rayon ε, nous avons $B(M, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

Le même raisonnement montre que l'infimum est également dans l'adhérence de A. △

ParlerEncoredeF

Exemple 8.63.
Il ne faut pas conclure de l'exemple précédent qu'un point limite ou adhérent est automatiquement un minimum ou un maximum. En effet, si nous regardons l'ensemble formé par les points de la suite $x_n = (-1)^n/n$, le nombre zéro est un point adhérent et une limite, mais pas un infimum ni un maximum. △

Lemme 8.64.
Si B est une partie fermée de V, alors $B = \bar{B}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $a \in \bar{B}$ tel que $a \notin B$. Alors il n'y a pas d'ouverts autour de a qui soit contenu dans $\complement B$. Cela prouve que $\complement B$ n'est pas ouvert, et par conséquent que B n'est pas fermé. Cela est une contradiction qui montre que tout point de $\bar{B}$ doit appartenir à B lorsque B est fermé. □

Exemple 8.65.
Au niveau des intervalles dans $\mathbb{R}$, prendre l'adhérence consiste à « fermer là où c'est ouvert ». Attention cependant à ne pas fermer l'intervalle en l'infini.

(1) $\overline{[0,2[} = [0,2]$.

(2) $\overline{]3,\infty[} = [3,\infty[$.

Si au lieu de travailler dans $\mathbb{R}$, vous travaillez dans une extension comme le compactifié d'Alexandrov $\hat{\mathbb{R}}$ (définition 7.185) ou dans la droite réelle achevée (définition 12.26), vous devez un peu réfléchir avant de décider si il faut fermer les intervalles en $\pm\infty$ ou en ω. Bref, ne faites rien mécaniquement et posez-vous des questions de topologie quand vous cherchez des fermetures. △

PROPooEURXooHHpkhd

Proposition 8.66.
Soit V un espace vectoriel normé et $a \in V$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $a \in \bar{A}$;

(2) il existe une suite d'éléments x_n dans A qui converge vers a ;

(3) $d(a, A) = 0$.

Notez que dans cette proposition, nous ne supposons pas que a soit dans A.

PropComleIntBar

Proposition 8.67.
Pour toute partie A d'un espace vectoriel normé nous avons

(1) $V \setminus \bar{A} = \text{Int}(V \setminus A)$,

(2) $V \setminus \text{Int}(A) = \overline{V \setminus A}$.

En utilisant les notations du complémentaire (définition 1.6), les deux points de la proposition se récrivent

(1) $\complement \bar{A} = \text{Int}(\complement A)$,

(2) $\complement \,\text{Int}(A) = \overline{\complement A}$.

ItemLemPropComplementiv

Démonstration. Nous avons $a \in V \setminus \bar{A}$ si et seulement si $a \notin \bar{A}$. Or ne pas être dans $\bar{A}$ signifie qu'il existe un rayon ε tel que la boule $B(a, \varepsilon)$ n'intersecte pas A. Le fait que la boule $B(a, \varepsilon)$ n'intersecte pas A est équivalent à dire que $B(a, \varepsilon) \subset V \setminus A$. Or cela est exactement la définition du fait que a est à l'intérieur de $V \setminus A$. Nous avons donc montré que $a \in V \setminus \bar{A}$ si et seulement si $a \in \text{Int}(V \setminus A)$. Cela prouve la première affirmation.

Pour prouver la seconde affirmation, nous appliquons la première au complémentaire de A : $\complement(\overline{\complement A}) = \text{Int}(\complement\complement A)$. En prenant le complémentaire des deux membres nous trouvons successivement

$$\begin{aligned} \complement\complement(\overline{\complement A}) &= \complement \,\text{Int}(\complement\complement A), \\ \overline{\complement A} &= \complement \,\text{Int}(A), \end{aligned} \tag{8.132}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Attention à ne pas confondre $\complement\bar{A}$ et $\overline{\complement A}$. Ces deux ensembles ne sont pas égaux. En effet, en tant que complément d'un fermé, l'ensemble $\complement\bar{A}$ est certainement ouvert, tandis que, en tant que fermeture, l'ensemble $\overline{\complement A}$ est fermé. Pouvez-vous trouver des exemples d'ensembles A tels que $\complement\bar{A} = \overline{\complement A}$?

PROPooRAZUooVMxPic

Proposition 8.68.
Soient A et B deux parties de l'espace vectoriel normé V.

(1) Pour les inclusions, si $A \subset B$, alors $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.

(2) Pour les unions, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

(3) Pour les intersections, $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Int}(A \cap B)$ et $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$.

Démonstration. (1) Si a est dans l'intérieur de A, il existe une boule autour de a contenue dans A. Cette boule est alors contenue dans B et donc est une boule autour de a contenue dans B, ce qui fait que a est dans l'intérieur de B. Si maintenant a est dans l'adhérence de A, toute boule centrée en a contient un élément de A et donc un élément de B, ce qui prouve que a est dans l'adhérence de B.

(2) Nous avons $A \subset A \cup B$ et donc, en utilisant le premier point, $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$. De la même manière, $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. En prenant l'union, $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Réciproquement, soit $a \in \overline{A \cup B}$ et montrons que $a \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Supposons par l'absurde que a ne soit ni dans $\bar{A}$ ni dans $\bar{B}$. Il existe donc des rayons ε_1 et ε_2 tels que

$$\begin{aligned} B(a, \varepsilon_1) \cap A = \varnothing, \\ B(a, \varepsilon_2) \cap B = \varnothing. \end{aligned} \tag{8.133}$$

En prenant $r = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, la boule $B(a, r)$ est incluse aux deux boules citées et donc n'intersecte ni A ni B. Donc $a \notin \overline{A \cup B}$, d'où la contradiction.

(3) Si nous appliquons le second point à $\complement A$ et $\complement B$, nous trouvons

$$\overline{\complement A \cup \complement B} = \overline{\complement A} \cup \overline{\complement B}. \tag{8.134}$$

En utilisant les propriétés du lemme 1.44, le membre de gauche devient

$$\overline{\complement A \cup \complement B} = \overline{\complement(A \cap B)} = \complement\,\mathrm{Int}(A \cap B), \tag{8.135}$$

Eq2707CACBCAR

tandis que le membre de droite devient

$$\overline{\complement A} \cup \overline{\complement B} = \complement\,\mathrm{Int}(A) \cup \complement\,\mathrm{Int}(A) = \complement\Big(\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)\Big). \tag{8.136}$$

Eq2707cAcBACAACR

En égalisant le membre de droite de (8.135) avec celui de (8.136) et en passant au complémentaire nous trouvons

$$\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B), \tag{8.137}$$

comme annoncé.

La dernière affirmation provient du fait que $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$ et de la propriété équivalente pour B.

□

Remarque 8.69.
Nous avons prouvé que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. Il arrive que l'inclusion soit stricte, comme dans l'exemple suivant. Si nous prenons $A = [0, 1]$ et $B =]1, 2]$, nous avons $A \cap B = \varnothing$ et donc $\overline{A \cap B} = \varnothing$. Par contre nous avons $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$.

Définition 8.70.
*La **frontière** d'un sous-ensemble A de l'espace vectoriel normé V est l'ensemble des points $a \in V$ tels que*

$$\begin{aligned} B(a, r) \cap A \neq \varnothing, \\ B(a, r) \cap \complement A \neq \varnothing, \end{aligned} \tag{8.138}$$

pour tout rayon r. En d'autres termes, toute boule autour de a contient des points de A et des points de $\complement A$. La frontière de A se note ∂A.

PropDescFrpbsmI

Proposition 8.71.
La frontière d'une partie A d'un espace vectoriel normé V s'exprime sous la forme

$$\partial A = \bar{A} \setminus \mathrm{Int}(A). \tag{8.139}$$

Démonstration. Le fait pour un point a de V d'appartenir à $\bar{A}$ signifie que toute boule centrée en a intersecte A. De la même façon, le fait de ne pas appartenir à $\mathrm{Int}(A)$ signifie que toute boule centrée en a intersecte $\complement A$. □

La description de la frontière donnée par la proposition 8.71 est celle qu'en pratique nous utilisons le plus souvent. Dans certains textes, elle est prise comme définition de la frontière.

Lemme 8.72.
La frontière de A peut également s'exprimer des façons suivantes :

$$\partial A = \bar{A} \cap \complement \,\mathrm{Int}(A) = \bar{A} \cap \overline{\complement A}, \tag{8.140}$$

Démonstration. En partant de $\partial A = \bar{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$, la première égalité est une application de la propriété (4) du lemme 1.44. La seconde égalité est alors la proposition 8.67. □

Exemple 8.73.
Dans $\mathbb{R}$, la frontière d'un intervalle est la paire constituée des points extrêmes. En effet

$$\partial[a,b[= \overline{[a,b[} \setminus \mathrm{Int}\,\big([a,b[\big) = [a,b] \setminus \,]a,b[= \{a,b\}. \tag{8.141}$$

Toujours dans $\mathbb{R}$ nous avons

$$\partial\mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}} \setminus \mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \varnothing, \tag{8.142}$$

et

$$\partial\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}} \setminus \mathrm{Int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \varnothing = \mathbb{R}. \tag{8.143}$$

△

Exemple 8.74.
Dans $\mathbb{R}^n$, nous avons

$$\partial B(a,r) = \partial \bar{B}(a,r) = S(a,r). \tag{8.144}$$

Cela est un boulot pour la proposition 8.49. Si $x \in S(a,r)$ alors tout boule autour de x contient des points à distance strictement plus grande et plus petite que $d(a,x)$, c'est-à-dire des points dans $B(a,r)$ et hors de $B(a,r)$. Cela prouve que les points de $S(a,r)$ font partie de $\partial B(a,r)$, c'est-à-dire que $S(a,r) \subset \partial B(a,r)$; et idem pour $\bar{B}(a,r)$.

Pour prouver l'inclusion inverse, soit $x \in \partial B(a,r)$. Vu que toute boule autour de x contient des points intérieurs à $B(a,r)$, pour tout $\epsilon > 0$, $d(a,x) - \epsilon < r$, c'est-à-dire que $d(a,x) \leqslant r$. De la même manière toute boule autour de x contient des points hors de $B(a,r)$ signifie que pour tout ϵ, $d(a,x) + \epsilon > r$ ou encore que $d(a,x) \geqslant r$. Nous avons donc $d(a,x) = r$. △

Remarque 8.75.
Il serait toutefois faux de croire que $\partial A = \partial \bar{A}$ pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$. En effet si $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nous avons $\partial A = \{0\}$ et $\bar{A} = \mathbb{R}$, donc $\partial \bar{A} = \varnothing$.

8.5.3 Point isolé, point d'accumulation

LEMooOMVNooVBlQMD

Lemme 8.76.
Soit un espace vectoriel normé V ainsi qu'une partie D de V.

(1) Un point $a \in D$ est isolé[25] *de D dans V si et seulement si existe un $r > 0$ tel que*

$$B(a,r) \cap D = \{a\}. \tag{8.145}$$

(2) Un point $a \in V$ point d'accumulation[26] *de D si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\Big(B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}\Big) \cap D \neq \varnothing. \tag{8.146}$$

[25] Définition 7.44.
[26] Définition 7.43.

Démonstration. Deux parties.

(1) **Pour le point isolé** D'une part si il existe un $r > 0$ tel que $B(a,r) \cap D = \{a\}$, la définition 7.44 est vérifiée. D'autre part, si la définition 7.44 est vérifiée, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ contenant a et tel que $\mathcal{O} \cap D = \{a\}$. Vu que les boules forment une base de la topologie normée[27], il existe un $r > 0$ tel que $a \in B(a,r) \subset \mathcal{O}$.

(2) **Pour le point d'accumulation** Il s'agit encore de dire que tout voisinage ouvert de a contient une boule centrée en a.

□

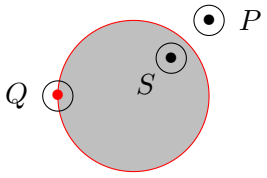


FIGURE 8.3 : L'ensemble décrit par l'équation (8.147). Le point P est un point isolé de D, tandis que les points S et Q sont des points d'accumulation. LabelFigAccumulationIsole

Exemple 8.77.
Considérons la partie suivante de $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x,y) \text{ tel que } x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1,1)\}. \tag{8.147}$$ Eq2807BouleIso

Comme on peut le voir sur la figure 8.3, le point $P = (1,1)$ est un point isolé de D parce qu'on peut tracer une boule autour de P sans inclure d'autres points de D que P lui-même. Le point $Q = (-1,0)$ est un point d'accumulation de D parce que toute boule autour de Q contient des points de D.

Le point S, étant un point intérieur, est un point d'accumulation : toute boule autour de S intersecte D.

Notez cependant que le point Q lui-même n'est pas dans D parce que l'inégalité qui définit D est stricte. △

Remarque 8.78.
À propos de la position des points d'accumulation et des points isolés.

(1) Les points intérieurs sont tous des points d'accumulation.

(2) Les points isolés ne sont jamais intérieurs.

(3) Certains points d'accumulation ne font pas partie de l'ensemble. Par exemple le point 1 est un point d'accumulation de $E =]0,1[$.

(4) Les points de la frontière sont soit d'accumulation soit isolés.

Exemple 8.79.
Tous les points de $\mathbb{R}$ sont des points d'accumulation de $\mathbb{Q}$ parce que dans toute boule autour d'un réel, on peut trouver un nombre rationnel. △

Remarque 8.80.
L'ensemble des points d'accumulation d'un ensemble n'est pas exactement son adhérence. En effet, un point isolé dans A est dans l'adhérence de A, mais n'est pas un point d'accumulation de A.

8.5.4 Des exemples

ItemExoEVN3i

Exemple 8.81.
Nous considérons l'ensemble.

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 5x + 6 < y \leqslant 2\}. \tag{8.148}$$

Si un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $x^2 - 5x + 6 < y$, alors dans une boule centrée en (x,y) (de rayon r_1), l'inégalité reste vraie (parce que la fonction $x^2 - 5x + 6 - y$ est une fonction continue). De la même manière,

[27] La définition (7.125) exprime le fait que tout ouvert contenant a contient une boule centrée en a.

si nous avons $y < 2$ en (x, y), alors nous avons encore l'inégalité dans une boule de rayon r_2. En prenant $r = \min\{r_1, r_2\}$, les deux inégalités restent vraies dans la boule de rayon r.

Donc les points (x, y) tels que $x^2 - 5x + 6 < y < 2$ sont dans l'intérieur de A_1.

Pour les mêmes raisons, autour d'un point (x, y) tel que $x^2 - 5x + 6 > y$, nous pouvons trouver une boule dans laquelle l'inégalité reste stricte. Ces points ne sont donc pas dans l'adhérence de A_1. Un point qui vérifie $x^2 - 5x + 6 = y = 2$ est par contre dans l'adhérence parce que dans toute boule, on pourra trouver un x tel que $x^2 - 5x + 6 < y$, et un y. L'adhérence est donc donnée par les inéquations

$$\bar{A}_1 \equiv x^2 - 5x + 6 \leqslant y \leqslant 2. \tag{8.149}$$

La frontière est donnée par les points de l'adhérence qui ne sont pas dans l'intérieur de A_1. Attention : **ne pas dire** que la frontière est alors donnée simplement en remplaçant les inégalités par des égalités : $\partial A_1 \equiv x^2 - 5x + 6 = y = 2$. Quel est cet ensemble ?

Trouver la frontière demande un peu plus de travail. Le point marqué sur la figure 8.4 est sur la frontière parce que toute boule intersecte l'intérieur et l'extérieur. Cela est dû au fait que, sur ce point, nous ayons $x^2 - 5x + 6 = y$ en même temps que $y < 2$. Donc si on prend une boule assez petite, on conserve $y < 2$, mais on obtient des points tels que $x^2 - 5x + 6 < y$.

En voyant le dessin, la chose à faire pour écrire la frontière est de trouver les deux points d'intersection entre la parabole et la droite horizontale. Ces points sont les points (x, y) qui satisfont au système

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = y & \text{(8.150a)} \\ y = 2. & \text{(8.150b)} \end{cases}$$

En substituant la seconde équation dans la première, il vient $x^2 - 5x + 6 = 2$, ce qui nous donne à résoudre le polynôme du second degré $x^2 - 5x + 4 = 0$. Les éventuelles solutions entières sont les diviseurs de 4. Par chance[28], on voit que $x = 1$ et $x = 4$ sont des solutions. Le théorème 3.118 nous assure qu'il n'y a pas d'autres racines. Les deux points d'intersection sont les points $P = (1, 2)$ et $Q = (4, 2)$. Les points de la frontière de A_1 sont donc donnés par

$$\begin{aligned} \partial A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 - 5x + 6 = y \text{ et } 1 \leqslant x \leqslant 4\} \\ \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = 2 \text{ et } 1 \leqslant x \leqslant 4\}. \end{aligned} \tag{8.151}$$

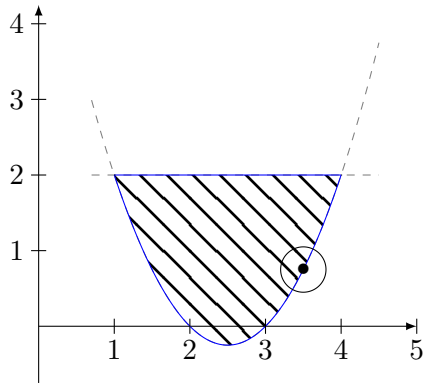


FIGURE 8.4 : En hachuré : l'intérieur ; en trait plein : la frontière. L'adhérence est l'union des deux. Exemple8.81. LabelFigAdhIntFr

Notez que les points de la parabole qui sont sur la frontière ne font pas partie de l'ensemble A_1 lui-même, tandis que ceux de la frontière qui sont sur la droite horizontale en font partie sauf $(4, 2)$ et $(1, 2)$.

L'intérieur de A_1 n'étant pas égal à A_1, cet ensemble n'est pas ouvert ; de la même manière, vu que $\bar{A}_1 \neq A_1$, l'ensemble n'est pas fermé. L'ensemble A_1 est par contre borné parce qu'il est contenu par exemple dans la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon 5. Les points d'accumulation de A_1 sont les points de sa fermeture. △ ItemExoEVN3ii

Exemple 8.82.
Nous étudions

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 1 < y < 2x\}. \tag{8.152}$$

Pour les mêmes raisons que dans l'exemple 8.81 l'intérieur est donné par

$$\text{Int}(A_2) \equiv x + 1 < y < 2x; \tag{8.153}$$

[28] Sinon, il aurait fallu utiliser la proposition 9.118.

L'adhérence est donnée par

$$\overline{A_2} \equiv x + 1 \leqslant y \leqslant 2x, \tag{8.154}$$

Pour la frontière, les deux droites dont il est question dans la définition de A_2 (les droites $y = x + 1$ et $y = 2x$) se coupent en $x = 1$ (refaire soi-même le dessin de la figure 8.5). Lorsque $x < 1$, les conditions $x + 1 < y$ et $y < 2x$ sont incompatibles : aucun point de A_2 n'est dans la partie $x < 1$ du plan. Lorsque $x > 1$, alors les points situés *entre* les deux droites font partie de A_2. La frontière est donc donnée par ces deux droites pour $x \geqslant 1$.

Étant donné que $\text{Int}(A_2) = A_2$, cet ensemble est ouvert (et donc pas fermé par la proposition 8.56(4)). Il n'est par contre pas borné parce qu'il contient des points (x, y) avec des x arbitrairement grands. △

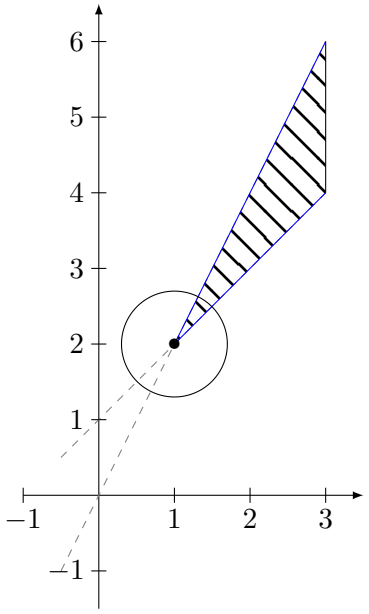


FIGURE 8.5 : Notez que le point d'angle fait partie de la frontière, mais pas de l'ensemble. Exemple 8.82.

Proposition 8.83 ([318]).
Tout partie de $\mathbb{R}$ sans point d'accumulation est dénombrable.

Démonstration. Soit une partie S de $\mathbb{R}$ ne contenant pas de points d'accumulation. Pour chaque $s \in S$, il existe un $\epsilon_s > 0$ tel que

$$B(s, \epsilon_s) \cap S = \{s\}. \tag{8.155}$$

Rien ne garantit cependant que $B(s, \epsilon_s) \cap B(t, \epsilon_t) = \varnothing$, alors que nous en aurons besoin pour la suite.

Le nombre

$$\inf\{|s - v| \text{ tel que } v \in S \setminus \{s\}\} \tag{8.156}$$

est au moins égal à ϵ_s et est don strictement positif. Nous posons

$$r_s = \frac{\inf\big\{|s - v| \text{ tel que } v \in S \setminus \{s\}\big\}}{4}, \tag{8.157}$$

et

$$I_s = B(s, r_s). \tag{8.158}$$

Nous avons maintenant $I_s \cap I_t = \varnothing$. Soit en effet $u \in I_s \cap I_t$. Alors

$$\begin{aligned} |s - t| &\leqslant |s - u| + |u - t| && \text{(8.159a)}\\ &\leqslant r_s + t_t && \text{(8.159b)}\\ &\leqslant 2r_s && \text{(8.159c)} \end{aligned}$$

où nous avons supposé $r_s \geqslant r_t$. Si ce n'est pas le cas, changer s et t dans ce qui suit ; les deux points ont des rôles symétrique. Nous avons donc

$$|s - t| \leqslant 2r_s = \frac{\inf\big\{|s - v| \text{ tel que } v \in S \setminus \{s\}\big\}}{2} \leqslant \frac{|s - t|}{2}. \tag{8.160}$$

Donc $|s-t|=0$ et $s=t$.

Cela pour dire que I_s ne possède d'intersection avec I_t que si $s=t$.

Nous définissons alors une application

$$\begin{aligned}\varphi\colon S &\to \mathbb{Q}\\ s &\mapsto q_s\end{aligned} \tag{8.161}$$

où q_s est un choix de rationnel dans I_s. C'est le lemme 1.556 qui nous permet de choisir un tel rationnel.

La construction des intervalles I_s garantit que φ est une injection. Le fait qu'il existe une injection de $\mathbb{Q}$ vers S et le fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable impliquent que S est au plus dénombrable. □

8.6 Valeur propre et vecteur propre

8.6.1 Généralités

Nous savons qu'une application *linéaire* $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est complètement définie par la donnée de son action sur les trois vecteurs de base, c'est-à-dire par la donnée de

$$Ae_1, \quad Ae_2 \quad \text{et} \quad Ae_3. \tag{8.162}$$

La matrice d'une application A se forme en mettant simplement les vecteurs Ae_1, Ae_2 et Ae_3 en colonne. Donc la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.163}$$ EqExempleALin

signifie que l'application linéaire A envoie le vecteur e_1 sur $\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$, le vecteur e_2 sur $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur e_3 sur $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Pour savoir comment A agit sur n'importe quel vecteur, on applique la règle de produit vecteur×matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z\\ 4x+5y+6z\\ 7x+8y+9z \end{pmatrix}. \tag{8.164}$$

Une chose intéressante est de savoir quelles sont les directions invariantes de la transformation linéaire. Par exemple, on peut lire sur la matrice (8.163) que la direction $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est invariante : elle est simplement multipliée par 3. Dans cette direction, la transformation est juste une dilatation. Afin de savoir si v est un vecteur d'une direction conservée, il faut voir si il existe un nombre λ tel que $Av=\lambda v$, c'est-à-dire voir si v est simplement dilaté.

L'équation $Av=\lambda v$ se récrit $(A-\lambda\mathbb{1})v=0$, c'est-à-dire qu'il faut résoudre l'équation

$$(A-\lambda\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8.165}$$

Nous savons qu'une telle équation ne peut avoir de solutions que si $\det(A-\lambda\mathbb{1})=0$. La première étape est donc de trouver les λ qui vérifient cette condition.

8.6.2 Dans le vif du sujet

DefooMMKZooVcskCc

Proposition-Définition 8.84.
*Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $T\colon E\to E$. Un **vecteur propre** de T est un vecteur $v\neq 0$ tel que $T(v)=\lambda v$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{K}$. Dans ce cas, λ est la **valeur propre** de v.*

*Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. L'ensemble des vecteurs propres de T pour la valeur propre λ est un espace vectoriel nommé **espace propre**.*

Démonstration. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. Soient des vecteurs propres v,w pour la valeur propre λ. Si $\alpha\in\mathbb{K}$, en utilisant la linéarité de T, nous avons

$$T(\alpha v+w)=\alpha T(v)+T(w)=\alpha\lambda v+\lambda w=\lambda(\alpha v+w), \tag{8.166}$$

donc $\alpha v+w$ est un vecteur propre de T pour la même valeur propre λ. □

Définition 8.85.
*L'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme T est son **spectre** et est noté* $\mathrm{Spec}(T)$.

Remarque 8.86.
Le nombre zéro peut être une valeur propre ; c'est le vecteur zéro qui ne peut pas être vecteur propre. La matrice nulle est une matrice diagonalisable.

LEMooWHWUooFFXlzT

Lemme 8.87 ([319])**.**
Le spectre d'une matrice est égal au spectre de sa transposée : $\mathrm{Spec}(T) = \mathrm{Spec}(T^t)$.

Démonstration. Nous savons que T est inversible si et seulement si T^t l'est parce que si $TS = \mathbb{1}$ alors $S^tT^t = \mathbb{1}$. Nous avons équivalence entre les énoncés suivants :

- λ est une valeur propre de T
- il existe v tel que $(T - \lambda\mathbb{1})v = 0$
- $T - \lambda\mathbb{1}$ n'est pas inversible
- $(T^t - \lambda\mathbb{1})$ n'est pas inversible
- il existe w tel que $T^tw = \lambda w$.
- λ est valeur propre de T^t.

□

LemjcztYH

Lemme 8.88.
Soient un espace vectoriel E, un endomorphisme $T \in \mathrm{End}(E)$, ainsi que ses sous-espaces propres $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathrm{Spec}(T)}$. Toute somme finie de la forme

$$E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p} \tag{8.167}$$

est directe[29].

Démonstration. Nous utilisons le lemme 4.151. Soient $v_i \in E_{\lambda_i}$ un choix de vecteurs tels que

$$\sum_{i=1}^{p} v_i = 0. \tag{8.168}$$

EQooROAXooFpgxxF

Soit un entier j_0 entre 1 et p. Nous allons montrer que $v_{j_0} = 0$. Pour cela nous remarquons d'abord que, pour tout $i \neq j_0$,

$$\prod_{k\neq j_0} (\lambda_i - \lambda_k) = 0. \tag{8.169}$$

EQooGVPYooXRPEVU

Nous appliquons l'opérateur $\prod_{k\neq j_0}(T - \lambda_k\mathbb{1})$ à l'égalité (8.168) :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{p} \prod_{k\neq j_0} (T - \lambda_k)v_i && \text{(8.170a)}\\
&= \sum_{i=1}^{p} \prod_{k\neq j_0} (\lambda_i - \lambda_k)v_i && \text{(8.170b)}\\
&= \prod_{k\neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_k)v_{j_0}. && \text{(8.170c)}
\end{aligned}$$

SUBEQooHHGJooTvCcDb

SUBEQooSHQYooNLVoVZ

Justifications.

- Pour (8.170b). Pour chaque k et i nous avons $(T - \lambda_k)v_i = Tv_i - \lambda_kv_i = \lambda_iv_i - \lambda_kv_i$ parce que v_i est un vecteur propre de T pour la valeur propre λ_i.
- Pour (8.170c). Dans la somme, seul le terme $i = j_0$ est non nul, à cause de (8.169).

Donc $v_{j_0} = 0$ parce que le produit $\prod_{k\neq j_0}(\lambda_{j_0} - \lambda_k)$, lui, est non nul. □

[29] Définition 4.149.

8.7 Polynômes d'endomorphismes

SECooUEQVooLBrRiE
Soit A un anneau commutatif et $\mathbb{K}$, un corps commutatif. L'injection canonique $A \to A[X]$ se prolonge en une injection

$$\mathbb{M}(A) \to \mathbb{M}\big(A[X]\big). \tag{8.171}$$

8.7.1 Polynômes d'endomorphismes

Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi_u\colon \mathbb{K}[X] &\to \mathrm{End}(E)\\ P &\mapsto P(u).\end{aligned} \tag{8.172}$$
EqOVKooeMJuv

L'image de φ_u est un sous-espace vectoriel. En effet si $A = \varphi_u(P)$ et $B = \varphi_u(Q)$, alors $A + B = \varphi_u(P + Q)$ et $\lambda A = (\lambda P)(u)$. En particulier c'est un espace fermé[30].

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et P, un polynôme. Nous disons que P est un polynôme **annulateur** de u si $P(u) = 0$ en tant qu'endomorphisme de E.

LemQWvhYb
Lemme 8.89.
Si P et Q sont des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ et si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, nous avons

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u). \tag{8.173}$$

Démonstration. Si $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_j b_j X^j$, alors le coefficient de X^k dans PQ est

$$\sum_l a_l b_{k-l}. \tag{8.174}$$
EqCoefGPyVcv

Par conséquent $(PQ)(u)$ contient $\sum_l a_l b_{k-l} u^k$. Par ailleurs $P(u) \circ Q(u)$ est donné par

$$\sum_i a_i u^i \left(\sum_j b_j u^j \right)(x) = \sum_{ij} a_i b_j u^{i+j}(x). \tag{8.175}$$

Le coefficient du terme en u^k est bien le même que celui donné par (8.174). □

ThoDecompNoyayzzMWod
Théorème 8.90 (Décomposition des noyaux ou lemme des noyaux[320])**.**
Soit u un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace[31] vectoriel E. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que $P(u) = 0$. Nous supposons que P s'écrive comme le produit $P = P_1 \dots P_n$ de polynômes deux à deux étrangers[32]. Alors

(1) Nous avons la formule

$$E = \ker P_1(u) \oplus \dots \oplus \ker P_n(u). \tag{8.176}$$

(2) En posant $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j$, il existe des polynômes R_i tels que

$$R_1 Q_1 + \dots + R_n Q_n = 1. \tag{8.177}$$
ITEMooMOBPooPVXuXj

(3) Les projecteurs sur $\ker\big(P_j(u)\big)$ sont donnés par

$$\mathit{proj}_{\ker(P_i(u))} = (R_i Q_i)(u). \tag{8.178}$$

Démonstration. Dans ce qui suit, nous allons beaucoup utiliser le fait que $\mathbb{K}[X]$ soit commutatif (lemme 1.478). Nous posons

$$Q_i = \prod_{j \neq i} P_j. \tag{8.179}$$

(1) **Utilisation de Bézout**

Par le lemme 6.48 ces polynômes sont étrangers entre eux et le théorème de Bézout (théorème 6.47) donne l'existence de polynômes R_i tels que

$$R_1 Q_1 + \dots + R_n Q_n = 1. \tag{8.180}$$
EQooMMCVooRzlXpA

[30] Proposition 7.229.
[31] Le corps $\mathbb{K}$ est commutatif comme tous les corps dans le Frido.
[32] Définition 3.99.

(2) **Une première somme, pas directe** Si nous appliquons cette égalité à u et ensuite à $x \in E$ nous trouvons

$$\sum_{i=1}^{n}(R_iQ_i)(u)(x) = x, \tag{8.181}$$

et en particulier si nous posons $E_i = \text{Image}\big(R_iQ_i(u)\big)$ nous avons

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i. \tag{8.182}$$

Cette dernière somme n'est éventuellement pas une somme directe.

(3) **Q_iQ_j est multiple de P** Si $i \neq j$, en utilisant la commutativité de $\mathbb{K}[X]$,

$$Q_iQ_j = \left(\prod_{k\neq i} P_k\right)\left(\prod_{l\neq j} P_l\right) = \Big(\prod_{\substack{k\neq i\\k\neq j}} P_k\Big)P_j\left(\prod_{l\neq j} P_l\right) = \prod_{\substack{k\neq i\\k\neq j}} P_k \prod_{k} P_l = S_{ij}P, \tag{8.183}$$

où S_{ij} est un polynôme. Nous voyons que Q_iQ_j est multiple de P.

(4) **Une somme directe** Toujours avec $i \neq j$, en utilisant le lemme 8.89,

$$(R_iQ_i)(u) \circ (R_jQ_j)(u) = \big(R_iQ_iR_jQ_j\big)(u) = \big(R_iR_j \underbrace{Q_iQ_j}_{=S_{ij}P}\big)(u) = (R_iR_jS_{ij})(u) \circ P(u) = 0 \tag{8.184}$$

Nous pouvons voir E comme un $\mathbb{K}$-module et appliquer le théorème 1.458. Les opérateurs $R_iQ_i(u)$ ont l'identité comme somme et sont orthogonaux, et nous avons donc la décomposition en somme directe :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} R_iQ_i(u)E. \tag{8.185}$$

(5) $R_iQ_i(u)E \subset \ker P_i(u)$ Attention : utilisation massive du lemme 8.89. Un élément de $R_iQ_i(u)E$ est de la forme $(R_iQ_i)(u)x$ avec $x \in E$. Nous appliquons l'endomorphisme $P_i(u)$ à cet élément, et nous vérifions que nous obtenons zéro :

$$\begin{aligned}
P_i(u)\big((R_iQ_i)(u)x\big) &= (P_iR_iQ_i)(u)x && \text{(8.186a)}\\
&= (R_i \underbrace{P_iQ_i}_{=P})(u)x && \text{(8.186b)}\\
&= (R_iP)(u)x && \text{(8.186c)}\\
&= \big(R_i(u) \circ \underbrace{P(u)}_{=0}\big)x && \text{(8.186d)}\\
&= 0. && \text{(8.186e)}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\text{Image}(R_iQ_i(u)) \subset \ker P_i(u). \tag{8.187}$$

(6) **Et la somme qu'il nous fallait** Le fait que la somme (8.185) soit directe n'est en fait pas crucial. En effet, vu que chacun des termes est inclus dans $\ker P_i(u)$, nous avons la somme (pas directe à priori)

$$E = \sum_{i=1}^{n} R_iQ_i(u)E \subset \sum_{i=1}^{n} \ker P_i(u). \tag{8.188}$$

Mais cette fois, nous prouvons qu'elle est directe en utilisant la caractérisation du lemme 4.151(4). Supposons que, pour un certain k,

$$x \in \ker P_k(u) \cap \Big(\sum_{j\neq k} \ker P_j(u)\Big). \tag{8.189}$$

Nous allons montrer que $x = 0$.

(6a) $Q_i(u)x = 0$ **si** $i \neq k$ Si $i \neq k$, nous avons

$$Q_i(u)x = \Big(\prod_{\substack{j\neq i\\ j\neq k}} P_j\Big)P_k(u)x = 0 \tag{8.190}$$

parce que $x \in \ker P_k(u)$.

(6b) $Q_k(u)x = 0$ Nous savons qu'il existe $z_l \in \ker P_l(u)$ tel que $x = \sum_{l\neq k} z_l$. Nous avons alors

$$Q_k(u)x = \Big(\prod_{j\neq k} P_j\Big)\sum_{l\neq k} z_l = \sum_{l\neq k}\Big(\prod_{j\neq k} P_j(u)\Big)z_l = 0 \tag{8.191}$$

parce que parmi les $P_j(u)$ $(j \neq k)$, il y a $P_l(u)$ qui annule z_l.

(6c) **Et finalement** Nous avons prouvé que $Q_i(u)x = 0$ pour tout i. La formule de Bézout (8.180) donne alors

$$\sum_i R_i \subset \underbrace{Q_i(u)x}_{=0} = x \tag{8.192}$$

et donc $x = 0$.

(6d) **Conclusion pour la somme directe** Nous venons de prouver que les $\ker\big(P_i(u)\big)$ sont en somme directe. L'équation (8.188) donne alors $E \subset \bigoplus_i \ker\big(P_i(u)\big)$ et donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker\big(P_i(u)\big). \tag{8.193}$$

(7) **Les projecteurs** Nous avons déjà tout et pour faire bien, on va poser plein de notations. D'abord $K_i = \ker\big(P_i(u)\big)$, et ensuite $s_i = (R_iQ_i)(u)$. L'équation (8.188) dit que

$$E = \bigoplus_i K_i, \tag{8.194}$$ EQooAEXKooOYaRdR

et (8.187) dit que

$$s_i(E) \subset K_i, \tag{8.195}$$

et aussi, par (8.181) :

$$\sum_i s_i = \mathrm{Id}\,. \tag{8.196}$$ EQooQVPUooUConGX

Nous devons prouver que s_k est la projection sur K_k parallèle aux autres K_i (définition 4.153). Pour cela nous vérifions les conditions du lemme 4.154.

D'abord s_i est linéaire en tant que composition et somme d'applications linéaires.

Soit $x \in K_i$. En posant $y_l = s_l(x)$ et en utilisant (8.196) :

$$y_1 + \ldots + y_n = \sum_l s_l(x) = x \in K_i. \tag{8.197}$$

Vu que la somme (8.194) est directe nous avons $y_j = 0$ si $j \neq i$ et $y_i = x$. En prenant $i = k$ et $i \neq k$ nous avons les deux conditions du lemme 4.154.

□

8.91.
Ce résultat est utilisé pour prouver que toute représentation est décomposable en représentations irréductibles, proposition 16.10 ainsi que pour le théorème 8.217 qui dit que si le polynôme minimal d'un endomorphisme est scindé à racine simple alors il est diagonalisable.

CorKiSCkC

Corolaire 8.92.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, un endomorphisme semi-simple dont la décomposition du polynôme minimal μ_f en facteurs irréductibles sur $\mathbb{K}[X]$ est $\mu_f = M_1^{\alpha_1}\cdots M_r^{\alpha_r}$. Si F est un sous-espace stable par f, alors

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker M_i^{\alpha_i}(f) \cap F. \tag{8.198}$$

Démonstration. Nous posons $E_i = \ker M_i^{\alpha_i}(f)$ et $F_i = E_i \cap F$. Les polynômes $M_i^{\alpha_i}$ sont deux à deux étrangers et $\mu_f(f) = 0$, donc le lemme des noyaux (8.90) s'applique et

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r. \tag{8.199}$$

Nous pouvons décomposer $x \in F$ en termes de cette somme :

$$x = x_1 + \cdots + x_r \tag{8.200}$$ EqbBbrdj

avec $x_i \in E_i$. Toujours selon le lemme des noyaux, les projections sur les espaces E_i sont des polynômes en f. Par conséquent F est stable sous toutes ces projections $\texttt{proj}_i \colon E \to E_i$, et en appliquant $\texttt{proj}_i$ à (8.200), $\texttt{proj}_i(x) = x_i$. Puisque $x \in F$, le membre de gauche est encore dans F et $x_i \in E_i \cap F$. Nous avons donc

$$F \subset \bigoplus_{i=1}^{r} F_i. \tag{8.201}$$

L'inclusion inverse est immédiate parce que $F_i \subset F$ pour chaque i. □ LemVISooHxMdbr

Lemme 8.93.
Si x est un vecteur propre de valeur propre λ pour l'endomorphisme u et si P est un polynôme, alors x est vecteur propre de $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

Démonstration. C'est un simple calcul de $P(u)x$ en ayant noté[33] $P(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^n$:

$$P(u)x = \sum_{k=0}^{n} c_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k x = P(\lambda)x. \tag{8.202}$$

□

8.7.2 Polynôme minimal et minimal ponctuel

Nous avons déjà vu la définition de polynôme minimal en 6.64. Le lemme suivant permet de parler de polynôme minimal d'endomorphisme. LEMooQJQGooRcAxmJ

Lemme 8.94.
Soit un endomorphisme $f \colon E \to E$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Il existe un unique polynôme annulateur unitaire de degré minimum[34].

Tout endomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède un polynôme minimal[35].

Démonstration. Pour l'unicité, soient P et Q deux polynômes annulateurs de f de même degré minimum N et ayant tous deux 1 comme coefficient de x^N. Alors $P - Q$ est de degré $N - 1$ tout en étant encore annulateur. Vu que nous avions dit que N était le degré minimum, le seul polynôme annulateur de degré $N - 1$ est le polynôme nul. Donc $P - Q = 0$.

Pour l'existence, les endomorphismes Id, f, f^2, … ne peuvent pas être tous linéairement indépendants parce que la dimension de $\mathrm{End}(E)$ est finie. Il existe donc un nombre N et des coefficients a_k tels que $\sum_{k=0}^{N} a_k f^k = 0$. Le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ est donc annulateur de f.

Une autre façon de le dire est que l'application linéaire $\varphi \colon \mathbb{K}[X] \to \mathrm{End}(E)$ donnée par $\varphi(P) = P(f)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie vers un espace vectoriel de dimension finie. Il ne peut donc pas être injectif et possède donc un noyau non réduit à zéro.

L'existence d'un polynôme minimal est maintenant seulement dû au fait que, avec les notations de la définition 6.64, l'idéal I_f n'est pas réduit à $\{0\}$. □

Remarque 8.95.
La preuve donnée ci-dessus montre que $\deg(\mu) \leqslant \dim(E)^2$. Comme conséquence du théorème de Cayley-Hamilton 8.116 nous verrons qu'en réalité le degré du polynôme minimal est majoré par la dimension de l'espace.

Dans la suite, l'endomorphisme f du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n est fixé. Pour $x \in E$ nous notons

$$E_x = \{P(f)x \text{ tel que } P \in \mathbb{K}[X]\}. \tag{8.203}$$ EqooOAYDooEpZELo

[33] En complète violation de ce qu'on disait dans 1.479.
[34] Degré minimum au sens où il existe peut-être d'autres polynômes annulateurs, mais ils seront de degré plus élevé.
[35] Définition 6.64.

Nous considérons le morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{K}[X] &\to \mathrm{End}(E)\\ P &\mapsto P(f)\end{aligned} \tag{8.204}$$

et si $x \in E$ est donné nous considérons le morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

$$\begin{aligned}\varphi_x\colon \mathbb{K}[X] &\to E\\ P &\mapsto P(f)x.\end{aligned} \tag{8.205}$$

Les noyaux de ces applications sont des idéaux, entre autres par le lemme 8.89. Ils ont donc un unique générateur unitaire (chacun) par le théorème 6.43. En termes de vocabulaire, l'ensemble

$$\ker(\varphi) = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(f) = 0\} \tag{8.206}$$

est l'**idéal annulateur** de f et un polynôme P tel que $P(f) = 0$ est un polynôme annulateur de f.

DEFooUICRooBGYhqQ

Proposition-Définition 8.96.
La partie $\ker(\varphi_x)$ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$ *qui possède un unique générateur unitaire.*

Le générateur unitaire de $\ker(\varphi_x)$ *est le* ***polynôme minimal ponctuel*** *de* f *en* x*. Il sera noté* $\mu_{f,x}$ *ou* μ_x *lorsque la dépendance en* f *est claire dans le contexte.*

Nous notons μ le générateur unitaire du noyau de φ et μ_x celui de φ_x. Puisque $\mu \in \ker(\varphi_x)$ pour tout x nous avons $\mu_x \mid \mu$ pour tout x.

ExooDTUJooIMqSKn

Exemple 8.97 (Pas en dimension infinie)**.**
En dimension infinie, il n'y a pas toujours de polynôme annulateur. Si E est un espace vectoriel de dimension infinie ayant une base dénombrable $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ alors l'opérateur donné par $f(e_i) = e_{i+1}$ n'a pas de polynôme annulateur. Même pas ponctuel en quel que point que ce soit.

De même l'opérateur donné par $g(e_1) = 0$ et $g(e_i) = e_{i-1}$ si $i \neq 1$ n'a pas de polynôme annulateur, mais il a un polynôme annulateur ponctuel évident en $x = e_1$. L'exemple 15.104 donnera un habillage à peine subtil à cet exemple. △

PropAnnncEcCxj

Proposition 8.98.
Si P *est un polynôme tel que* $P(f) = 0$*, alors le polynôme minimal* μ_f *divise* P*. Autrement dit, le polynôme minimal engendre l'idéal des polynômes annulateurs.*

Démonstration. L'ensemble $\ker(\varphi) = \{Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } Q(f) = 0\}$ est un idéal par le lemme 8.89. Le polynôme minimal de f est un élément de degré plus bas dans I et par conséquent $I = (\mu_f)$ par le théorème 6.43. Nous concluons que μ_f divise tous les éléments de I. □

La proposition suivante permet de caractériser le polynôme minimal.

PROPooVUJPooMzxzjE

Proposition 8.99 ([153])**.**
Soit une application linéaire f *sur un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Il existe un unique polynôme unitaire*[36] $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que*

(1) $P(f) = 0$ *;*

(2) l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \frac{\mathbb{K}[X]}{(P)} &\to \mathrm{End}(E)\\ \bar{Q} &\mapsto Q(f)\end{aligned} \tag{8.207}$$

EQooIBMDooVTaEbf

est injective.

Démonstration. En ce qui concerne l'existence, il existe le polynôme minimal de f qui satisfait les conditions. Pour l'unicité nous y travaillons maintenant.

Supposons que l'application (8.207) soit injective. Alors pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(f) = 0$ nous avons $\bar{Q} = 0$, c'est-à-dire $Q = PR$ pour un certain $R \in \mathbb{K}[X]$. Autrement dit : P est un générateur unitaire de l'idéal annulateur de f. Le théorème 6.43(3) nous dit alors que $P = \mu$ parce que μ est également générateur unitaire. □

[36] À mon avis, « unitaire » manque dans [153].

LemSYsJJj

Lemme 8.100 ([321]).
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Il existe un élément $x \in E$ tel que $\mu_{f,x} = \mu_f$.

Démonstration. Soit une décomposition en irréductibles du polynôme minimal $\mu = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$. Nous notons $E_i = \ker\big(P_i^{\alpha_i}(f)\big)$. Les polynômes P_i sont étrangers deux à deux (un diviseur commun aurait a fortiori été un diviseur et aurait contredit l'irréductibilité). Le lemme des noyaux 8.90 nous donne la somme directe

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker\big(P_i^{\alpha_i}(f)\big). \tag{8.208}$$

Si $x_i \in E_i$ alors μ_{x_i} est une puissance de P_i. En effet $\mu_{x_i} \mid \mu$ et est donc un produit des puissances des P_j. Or si $(QP_j)(f)x_i = 0$ alors $(P_jQ)(f)x_i = 0$, ce qui donne $Q(f)x_i \in E_j \cap E_i = \{0\}$ si $j \neq i$. Donc μ_{x_i} n'est pas de la forme QP_j pour $j \neq i$. Nous en déduisons que μ_{x_i} est une puissance de P_i dès que $x_i \in E_i$. Nous choisissons $x_i \in E_i$ tel que $\mu_{x_i} = P_i^{\alpha_i}$.

Nous posons enfin $a = x_1 + \dots + x_r$; par définition du polynôme annulateur μ_a, nous avons

EqooVIGGooSfuywB
$$0 = \mu_a(f)a = \mu_a(f)x_1 + \dots + \mu_a(f)x_r. \tag{8.209}$$

Mais $\mu_a(f)x_i \in E_i$, et la somme des E_i est directe, donc l'annulation de la somme (8.209) implique l'annulation de chacun des termes : $\mu_a(f)x_i = 0$ pour tout i. Cela prouve que $\mu_{x_i} \mid \mu_a$. Mais comme les μ_{x_i} sont premiers deux à deux (parce que ce sont les $P_i^{\alpha_i}$), nous concluons que le produit divise encore μ_a :

$$\prod_{i=1}^{r} \mu_{x_i} \mid \mu_a, \tag{8.210}$$

c'est-à-dire $\mu \mid \mu_a$. Comme nous avons aussi $\mu_a \mid \mu$, nous déduisons $\mu_a = \mu$. □

DEFooFEIFooNSGhQE

Définition 8.101 (Matrices, endomorphismes et vecteurs cycliques).
*Une matrice est **cyclique** si elle est semblable à une matrice compagnon. Un endomorphisme $f : E \to E$ est **cyclique** si il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\{f^k(x)\}_{k=0,\dots,n-1}$ est une base de E. Un vecteur ayant cette propriété est un **vecteur cyclique** pour f.*

LemAGZNNa

Lemme 8.102.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme cyclique[37] f de E. Soit un vecteur cyclique v de f, alors le polynôme minimal de f est égal au polynôme minimal de f au point v : $\mu_f = \mu_{f,v}$.

Démonstration. Montrons que $\mu_{f,v}$ est un polynôme annulateur de f, ce qui prouvera que μ_f divise $\mu_{f,v}$ par la proposition 8.98. Étant donné que v est cyclique, tout élément de E s'écrit sous la forme $x = Q(f)v$. Prenons un polynôme P annulateur de f en v : $P(f)v = 0$. Nous montrons que P est alors un polynôme annulateur de f. En effet, nous avons

$$P(f)x = \big(P(f) \circ Q(f)\big)v = \big(Q(f) \circ P(f)\big)v = 0 \tag{8.211}$$

où nous avons utilisé le lemme 8.89. □

LEMooOWDAooWPbPda

Lemme 8.103 ([321]).
Soit $a \in E$ un vecteur cyclique pour f, tel que $\mu_a = \mu$. Alors E_a est un sous-espace stable par f pour lequel il existe un supplémentaire stable.

Démonstration. Soit $l = \deg(\mu) = \deg(\mu_a)$. L'espace E_a étant engendré par les $f^k(a)$ nous savons que $e_1 = a$, $e_2 = f(a)$,..., $e_l = f^{l-1}(a)$ forment une base de E_a. Nous pouvons la compléter en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E. Et nous posons[38]

$$G = \{x \in E \text{ tel que } e_l^*\big(f^k(x)\big) = 0, \forall k \geqslant 0\} \tag{8.212a}$$
$$= \bigcap_{k \geqslant 0} \ker\{e_l^* \circ f^k\} \tag{8.212b}$$
$$= \bigcap_{k=0}^{l-1} \ker(e_l^* \circ f^k). \tag{8.212c}$$

[37] Voir la définition 8.101.
[38] ici, comme presque partout, e_l^* est le dual de e_l, c'est-à-dire l'application linéaire sur E donnée par $e_l^*(e_i) = \delta_{li}$, voir la définition 4.136.

La dernière égalité est due au fait que l soit le degré de μ. Du coup f^l est une combinaison linéaire des f^i avec $i \leqslant l-1$.

Nous avons $f(G) \subset G$ et de plus $E_a \cap G = \{0\}$ parce qu'un élément de E_a est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $f^j(a)$ $(j \leqslant l)$. Après application de f^{l-j}, ces éléments obtiennent une composante $f^l(a) = e_l$. De plus G est un sous-espace vectoriel du fait que $e_l^* \circ f^i$ est une application linéaire.

Montrons enfin que $\dim(G) = n-l$. Pour cela nous remarquons que G est une intersection d'hyperplans, et nous montrons que les équations définissant ces hyperplans sont linéairement indépendantes. Soit donc

$$\sum_{j=0}^{l-1} \lambda_j \big(e_l^* \circ f^j\big) = 0 \tag{8.213}$$

EqooOHESooRtBUfc

et montrons que $\lambda_j = 0$ pour tout j est l'unique solution. Soit $x \in E$ et appliquons l'opération (8.213) au vecteur $f^i(x)$; le résultat est zéro :

$$0 = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda_j (e_l^* \circ f^i \circ f^j) = (e_l^* \circ f^i)P(u) \tag{8.214}$$

où nous avons posé $P(X) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda_j X^j$. Appliquons cela à a : pour tout i nous avons

$$(e_l^* \circ f^i)\big(P(f)a\big) = 0. \tag{8.215}$$

Mais par définition de E_a, l'élément $P(f)a$ est dans E_a. Nous en déduisons que

$$P(f)a \in G \cap E_a = \{0\}, \tag{8.216}$$

c'est-à-dire que P est un polynôme annulateur de a. Mais P est de degré $l-1$ alors que le polynôme minimal de a est de degré l. Par conséquent $P = 0$ et $\lambda_j = 0$ pour tout j. □

DEFooBOHVooSOopJN

Définition 8.104.
*L'endomorphisme f d'un espace vectoriel est **semi-simple** si tout sous-espace stable par f possède un supplémentaire stable.*

LemrFINYT

Lemme 8.105.
Si le polynôme minimal d'un endomorphisme est irréductible, alors cet endomorphisme est semi-simple[39].

Démonstration. Soit f, un endomorphisme dont le polynôme minimal est irréductible et F, un sous-espace stable par f. Nous devons en trouver un supplémentaire stable. Si $F = E$, il n'y a pas de problème. Sinon nous considérons $u_1 \in E \setminus F$ et

$$E_{u_1} = \{P(f)u_1 \text{ tel que } P \in \mathbb{K}[X]\}, \tag{8.217}$$

qui est un espace stable par f.

Montrons que $E_{u_1} \cap F = \{0\}$. Pour cela nous étudions l'idéal

$$I_{u_1} = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(f)u_1 = 0\}. \tag{8.218}$$

C'est un idéal non réduit à $\{0\}$ parce que le polynôme minimal de f par exemple est dans I_{u_1}. Soit P_{u_1} un générateur unitaire de I_{u_1}. Étant donné que $\mu_f \in I_{u_1}$, nous avons P_{u_1} divise μ_f et donc, $P_{u_1} = \mu_f$, parce que μ_f est irréductible par hypothèse.

Soit $y \in E_{u_1} \cap F$. Par définition il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(f)u_1$ et si $y \neq 0$, cela signifie que $P \notin I_{u_1}$, c'est-à-dire que P_{u_1} ne divise pas P. Étant donné que P_{u_1} est irréductible cela implique que P_{u_1} et P sont premiers entre eux (ils n'ont pas d'autre pgcd que 1).

Nous utilisons maintenant des coefficients de Bézout (théorème 6.47) $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$AP + BP_{u_1} = 1. \tag{8.219}$$

Nous appliquons cette égalité à f et puis à u_1 :

$$u_1 = A(f) \circ \underbrace{P(f)u_1}_{=y} + B(f) \circ \underbrace{P_{u_1}(f)u_1}_{=0} = A(f)y. \tag{8.220}$$

Mais $y \in F$, donc $A(f)y \in F$. Nous aurions donc $u_1 \in F$, ce qui est impossible par choix. Nous savons maintenant que l'espace $E_{u_1} \oplus F$ est stable sous f. Si cet espace est E alors nous arrêtons. Sinon nous

[39] Définition 8.104.

reprenons le raisonnement avec $E_{u_1} \oplus F$ en guise de F et en prenant $u_2 \in E \setminus (E_{u_1} \oplus F)$. Étant donné que E est de dimension finie, ce procédé s'arrête à un certain moment et nous aurons

$$E = F \oplus E_{u_1} \oplus \ldots \oplus E_{u_k} \tag{8.221}$$

où chacun des E_{u_i} sont stables. □

ThoFgsxCE

Théorème 8.106.
Un endomorphisme est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est produit de polynômes irréductibles distincts deux à deux.

Démonstration. Supposons que f soit semi-simple et que son polynôme minimal soit donné par $\mu_f = M_1^{\alpha_1} \ldots M_r^{\alpha_r}$ où les M_i sont des polynômes irréductibles deux à deux distincts. Nous devons montrer que $\alpha_i = 1$ pour tout i. Soit i tel que $\alpha_i \geqslant 1$ et $N \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mu_f = M^2 N$ où l'on a noté $M = M_i$. Nous étudions l'espace

$$F = \ker M(f) \tag{8.222}$$

qui est stable par f, et qui possède donc un supplémentaire S également stable par f. Nous allons montrer que MN est un polynôme annulateur de f.

D'abord nous prenons $x \in S$. Étant donné que F est le noyau de $M(f)$,

$$M(f)\big(MN(f)x\big) = \mu_f(f)x = 0, \tag{8.223}$$

ce qui signifie que $MN(f)x \in F$. Mais puisque S est stable par f nous avons aussi $MN(f)x \in S$. Finalement $MN(f)x \in F \cap S = \{0\}$. Autrement dit, $MN(f)$ s'annule sur S.

Prenons maintenant $y \in F$. Nous avons

$$MN(f) = N(f)\big(M(f)y\big) = 0 \tag{8.224}$$

parce que $y \in F = \ker M(f)$.

Nous avons prouvé que $MN(f)$ s'annule partout et donc que $MN(f)$ est un polynôme annulateur de f, ce qui contredit la minimalité de $\mu_f = M^2 N$.

Nous passons au sens inverse. Soit $m_f = M_1 \ldots M_r$ une décomposition du polynôme minimal de l'endomorphisme f en irréductibles distincts deux à deux. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. Nous notons

$$E_i = \ker(M_i(f)) \tag{8.225}$$

et $f_i = f|_{E_i}$. Par le lemme 8.92 nous avons

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} (F \cap E_i). \tag{8.226}$$

Les espaces E_i sont stables par f et étant donné que M_i est irréductible, il est le polynôme minimal de f_i. En effet, M_i est annulateur de f_i, ce qui montre que le polynôme minimal de f_i divise M_i. Mais M_i étant irréductible, M_i est le polynôme minimal. Étant donné que $\mu_{f_i} = M_i$, l'endomorphisme f_i est semi-simple par le lemme 8.105.

L'espace $F \cap E_i$ étant stable par l'endomorphisme semi-simple f_i, il possède un supplémentaire stable que nous notons S_i :

$$E_i = S_i \oplus (F \cap E_i). \tag{8.227}$$

Étant donné que sur chaque S_i nous avons $f|_{S_i} = f_i$, l'espace $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_r$ est stable par f. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
E &= E_1 \oplus \ldots \oplus E_r && \text{(8.228a)}\\
&= \big(S_1 \oplus (F \cap E_1)\big) \oplus \ldots \oplus \big(S_r \oplus (F \cap E_r)\big) && \text{(8.228b)}\\
&= \big(\bigoplus_{i=1}^{r} S_i\big) \oplus \big(\bigoplus_{i=1}^{r} F \cap E_i\big) && \text{(8.228c)}\\
&= S \oplus F, && \text{(8.228d)}
\end{aligned}$$

ce qui montre que F a bien un supplémentaire stable par f et donc que f est semi-simple. □

Exemple 8.107 (L'espace engendré par $\mathbb{1}$, A, A^2,...).
Soit A une matrice, et

$$E = \text{Span}\{A^k \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}. \tag{8.229}$$

Nous montrons que $\dim(E)$ est le degré du polynôme minimal de A.

D'abord l'idéal annulateur de A est engendré par le polynôme minimal[40] que nous notons $\mu = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. La partie $\{\mathbb{1}, \dots, A^{p-1}\}$ est libre parce qu'une combinaison linéaire nulle de ces éléments serait un polynôme annulateur en A de degré plus petit que p. Donc $\dim(E) \geqslant p$.

La partie $\{\mathbb{1}, A, \dots, A^p\}$ est liée à cause du polynôme minimal. Isoler A^p dans $\mu(A) = 0$ donne un polynôme f de degré $p-1$ tel que $A^p = f(A)$.

Nous allons montrer à présent que la famille $\{\mathbb{1}, A, \dots, A^{p-1}\}$ est génératrice (alors $\dim(E) \leqslant p$). Soit un entier $q \geqslant p$ et de division euclidienne[41] $np + r = q$ avec $r < p$. Nous avons $A^q = A^{np}A^r$. D'une part

$$A^{np} = (A^p)^n = f(A)^n \tag{8.230}$$

est de degré $n(p-1)$. Par conséquent

$$A^q = f(A)^n A^r \tag{8.231}$$

qui est de degré $n(p-1)+r = q-n$. Autrement dit il existe un polynôme g_1 de degré $q-n$ tel que $A^q = g_1(A)$. Si $q - n > p - 1$ alors nous pouvons recommencer et obtenir un polynôme g_2 de degré strictement inférieur à celui de g_1 tel que $A^q = g_2(A)$. Au bout du compte, il existe un polynôme g de degré au maximum $p-1$ tel que $A^q = g(A)$. Cela prouve que la partie $\{\mathbb{1}, A, \dots, A^{p-1}\}$ est génératrice de E.

La dimension de E est donc p, le degré du polynôme minimal. △

PropooCFZDooROVlaA

Proposition 8.108.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Nous avons l'isomorphisme d'espace vectoriel

$$\mathbb{K}[f] \simeq \frac{\mathbb{K}[X]}{(\mu_f)} \tag{8.232}$$

La dimension en est $\deg(\mu_f)$.

Démonstration. Notons avant de commencer que (μ) est l'idéal engendré par μ. Les classes dont il est question dans le quotient $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ sont

$$\bar{P} = \{P + S\mu\}_{S \in \mathbb{K}[X]}. \tag{8.233}$$

Nous allons montrer que l'application suivante fournit l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \psi\colon \frac{\mathbb{K}[X]}{(\mu)} &\to \mathbb{K}[f] \\ \bar{P} &\mapsto P(f). \end{aligned} \tag{8.234}$$

(1) **ψ est bien définie** Si $Q \in \bar{P}$ alors $Q = P + S\mu$ pour un certain $S \in \mathbb{K}[X]$. Du coup nous avons

$$\psi(\bar{Q}) = P(f) + (S\mu)(f). \tag{8.235}$$

Mais $\mu(f) = 0$ donc le deuxième terme est nul. Donc $\psi(\bar{P})$ est bien défini.

(2) **Injectif** Si $\psi(\bar{P}) = 0$ nous avons $P(f) = 0$, ce qui signifie que $P = S\mu$ pour un polynôme S. Par conséquent $P \in (\mu)$ et donc $\bar{P} = 0$.

(3) **Surjectif** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. L'élément $P(f)$ de $\mathbb{K}[f]$ est dans l'image de ψ parce que c'est $\psi(\bar{P})$.

En ce qui concerne la dimension, le corolaire 6.44 en parle déjà : une base est donnée par les projections de $1, X, \dots, X^{\deg(\mu_f)-1}$. □

8.7.3 Polynôme caractéristique

DefOWQooXbybYD

Définition 8.109.
Soit un anneau commutatif A. Si $u \in \mathbb{M}(n, A)$, nous définissons le ***polynôme caractéristique de*** *u :*

$$\chi_u(X) = \det(u - X\mathbb{1}_n). \tag{8.236}$$

Eqkxbdfu

Nous définissons de même le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u\colon E \to E$.

[40] Proposition 8.98.
[41] Théorème 1.352.

Remarque 8.110.
Quelques remarques à propos du signe[42].

- Certains auteurs définissent le polynôme caractéristique par $\det(X-u)$ au lieu de $\det(u-X)$.
- Wikipédia francophone[322] prend la définition $\det(X-u)$ (donc opposée de la nôtre). Allez lire la page de discussion.
- Sur les Wikipédias en d'autres langues, ça varie.
- Un avantage de $\det(u-X)$ est que $\det(u)=\chi_u(0)$.
- Un avantage de $\det(X-u)$ est qu'il est unitaire.

LemooWCZMooZqyaHd

Lemme 8.111.
Soit un endomorphisme $u\colon E\to E$.

ITEMooAALOooGlQYOs

(1) Le polynôme caractéristique χ_u a pour degré la dimension de E.

(2) Si la dimension de E est paire, alors le polynôme caractéristique χ_u est unitaire.

ThoNhbrUL

Théorème 8.112.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et un endomorphisme $u\in\mathrm{End}(E)$. Alors

(1) Le polynôme caractéristique divise $(\mu_u)^n$ dans $\mathbb{K}[X]$.

(2) Les polynômes caractéristiques et minimaux ont mêmes facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

(3) Les polynômes caractéristiques et minimaux ont mêmes racines dans $\mathbb{K}[X]$.

(4) Le polynôme caractéristique est scindé si et seulement si le polynôme minimal est scindé.

ThoWDGooQUGSTL

Théorème 8.113.
Soit $u\in\mathrm{End}(E)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Les conditions suivantes sont équivalentes

ItemeXHXhHi

(1) $\lambda\in\mathrm{Spec}(u)$

ItemeXHXhHii

(2) $\chi_u(\lambda)=0$

ItemeXHXhHiii

(3) $\mu_u(\lambda)=0$.

Démonstration. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Dire que λ est dans le spectre de u signifie que l'opérateur $u-\lambda\mathbb{1}$ n'est pas inversible, ce qui est équivalent à dire que $\det(u-\lambda\mathbb{1})$ est nul par la proposition 8.15(1) ou encore que λ est une racine du polynôme caractéristique de u.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). C'est une application directe du théorème 8.112 qui précise que le polynôme caractéristique a les mêmes racines dans $\mathbb{K}$ que le polynôme minimal. □

ExICOJcFp

Exemple 8.114.
Sur $\mathbb{R}^2$, nous considérons la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ qui a pour polynôme caractéristique[43] le polynôme $\chi_A=(X-1)^2$. Le nombre $\lambda=1$ est une racine double de ce polynôme, et pourtant il n'y a qu'une seule dimension d'espace propre :

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \tag{8.237}$$

entraine $x=0$.

Ici la multiplicité algébrique est différente de la multiplicité géométrique. △

PropNrZGhT

Proposition 8.115 ([323])**.**
Soit f, un endomorphisme de E et $x\in E$. Alors

(1) L'espace $E_{f,x}$ est stable par f.

ItemfzKOCo

(2) L'espace $E_{f,x}$ est de dimension

$$p_{f,x}=\dim E_{f,x}=\deg(\mu_{f,x}) \tag{8.238}$$

où $\mu_{f,x}$ est le générateur unitaire de $I_{f,x}$.

[42] Attention : je crois qu'il y a des incohérences dans le Frido à propos de ce choix
[43] Définition 8.109.

ItemKHNExH

(3) *Le polynôme caractéristique de $f|_{E_{f,x}}$ est $\mu_{f,x}$.*

ItemHMviZw

(4) *Nous avons*

$$\chi_{f|_{E_{f,x}}}(f)x = \mu_{f,x}(f)x = 0. \tag{8.239}$$

Démonstration. Le fait que $E_{f,x}$ soit stable par f est classique. Le point (4) est une application du point (3). Les deux gros morceaux sont donc les points (2) et (3).

Étant donné que $\mu_{f,x}$ est de degré minimal dans $I_{f,x}$, l'ensemble

$$B = \{f^k(x) \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant p_{f,x} - 1\} \tag{8.240}$$

est libre. En effet une combinaison nulle des vecteurs de B donnerait un polynôme en f de degré inférieur à $p_{f,x}$ annulant x. Nous écrivons

$$\mu_{f,x}(X) = X^{p_{f,x}} - \sum_{i=0}^{p_{f,x}-1} a_i X^i. \tag{8.241}$$

Étant donné que $\mu_{f,x}(f)x = 0$ et que la somme du membre de droite est dans $\text{Span}(B)$, nous avons $f^{p_{f,x}}(x) \in \text{Span}(B)$. Nous prouvons par récurrence que $f^{p_{f,x}+k}(x) \in \text{Span}(B)$. En effet en appliquant f^k à l'égalité

$$0 = f^{p_{f,x}}(x) - \sum_{i=0}^{p_{f,x}-1} a_i f^i(x) \tag{8.242}$$

nous trouvons

$$f^{p_{f,x}+k}(x) = \sum_{i=0}^{p_{f,x}-1} a_i f^{i+k}(x), \tag{8.243}$$

alors que par hypothèse de récurrence le membre de droite est dans $\text{Span}(B)$. L'ensemble B est alors générateur de $E_{f,x}$ et donc une base d'icelui. Nous avons donc bien $\dim(E_{f,x}) = p_{f,x}$.

Nous montrons maintenant que $\mu_{f,x}$ est annulateur de f au point x. Nous savons que

$$\mu_{f,x}(f)x = 0. \tag{8.244}$$

En y appliquant f^k et en profitant de la commutativité des polynômes sur les endomorphismes (proposition 8.89), nous avons

$$0 = f^k\big(\mu_{f,x}(f)x\big) = \mu_{f,x}(f)f^k(x), \tag{8.245}$$

de telle sorte que $\mu_{f,x}(f)$ est nul sur B et donc est nul sur $E_{f,x}$. Autrement dit,

$$\mu_{f,x}\big(f|_{E_{f,x}}\big) = 0. \tag{8.246}$$

Montrons que $\mu_{f,x}$ est même minimal pour $f|_{E_{f,x}}$.

Supposons avoir Q, un polynôme non nul de degré $p_{f,x}-1$ annulant $f|_{E_{f,x}}$. En particulier $Q(f)x = 0$. Cela signifie que B est un système lié, alors que nous avons montré que c'était un système libre. Contradiction. Nous concluons que $\mu_{f,x}$ est le polynôme minimal de $f|_{E_{f,x}}$. □

Cette histoire de densité permet de donner une démonstration alternative du théorème de Cayley-Hamilton.

ThoCalYWLbJQ

Théorème 8.116 (Cayley-Hamlilton)**.**
Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Une démonstration plus simple via la densité des diagonalisables est donnée en théorème 13.31.

Démonstration. Nous devons prouver que $\chi_f(f)x = 0$ pour tout $x \in E$. Pour cela nous nous fixons un $x \in E$, nous considérons l'espace $E_{f,x}$ et $\chi_{f,x}$, le polynôme caractéristique de $f|_{E_{f,x}}$. Étant donné que $E_{f,x}$ est stable par f, le polynôme caractéristique de $f|_{E_{f,x}}$ divise χ_f, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q_x tel que

$$\chi_f = Q_x \chi_{f,x}, \tag{8.247}$$

et donc aussi

$$\chi_f(f)x = Q_x(f)\big(\chi_{f,x}(f)x\big) = 0 \tag{8.248}$$

parce que la proposition 8.115 nous indique que $\chi_{f,x}$ est un polynôme annulateur de $f|_{E_{f,x}}$. □

Corolaire 8.117.
Le degré du polynôme minimal est majoré par la dimension de l'espace.

Démonstration. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique parce qu'il engendre l'idéal des polynômes annulateurs par la proposition 8.98. Or le degré du polynôme caractéristique est la dimension de l'espace par le lemme 8.111. □

Exemple 8.118 (Calcul de l'inverse d'un endomorphisme)**.**
Le théorème de Cayley-Hamilton donne un moyen de calculer l'inverse d'un endomorphisme inversible pourvu que l'on connaisse son polynôme caractéristique. En effet, supposons que

$$\chi_f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k. \tag{8.249}$$

Nous aurons alors

$$0 = \chi_f(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k. \tag{8.250}$$

Nous appliquons f^{-1} à cette dernière égalité en sachant que $f^{-1}(0) = 0$:

$$0 = a_0 f^{-1} + \sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1}, \tag{8.251}$$

et donc

$$f^{-1} = -\frac{1}{\det(f)} \sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1} \tag{8.252}$$

où nous avons utilisé le fait que $a_0 = \chi_f(0) = \det(f)$. △

PropooBYZCooBmYLSc

Proposition 8.119.
Si $(X-z)^l$ $(l \geqslant 1)$ est la plus grande puissance de $(X-z)$ dans le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f alors

$$1 \leqslant \dim(E_z) \leqslant l. \tag{8.253}$$

C'est-à-dire que nous avons au moins un vecteur propre pour chaque racine du polynôme caractéristique.

Démonstration. Si $(X-z)$ divise χ_f alors en posant $\chi_f = (X-z)P(X)$ nous avons

$$\det(f - X\mathbb{1}) = (X-z)P(X), \tag{8.254}$$

ce qui, évalué en $X = z$, donne $\det(f - z\mathbb{1}) = 0$. L'annulation du déterminant étant équivalente à l'existence d'un noyau non trivial, nous avons $v \neq 0$ dans E tel que $(f - z\mathbb{1})v = 0$. Cela donne $f(v) = zv$ et montre que v est vecteur propre de f pour la valeur propre z. Et aussi que $\dim(E_z) \geqslant 1$.

Si $\dim(E_z) = k$ alors le théorème de la base incomplète 4.14 nous permet d'écrire une base de E dont les k premiers vecteurs forment une base de E_z. Dans cette base, la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} z & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & z & * \\ & & & * \end{pmatrix} \tag{8.255}$$

où les étoiles représentent des blocs à priori non nuls. En tout cas, sous cette forme, il est visible que $(X-z)^k$ divise χ_f. □

8.8 Formes bilinéaires et quadratiques

Plus à propos de formes bilinéaires dans le thème 16.

DEFooEEQGooNiPjHz

Définition 8.120 ([324])**.**
*Soient trois espaces vectoriels E, F et V sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$. Une application $b\colon E \times F \to V$ est **bilinéaire** si elle est séparément linéaire en ses deux variables, c'est-à-dire si*

(1) $b(u_1 + u_2, v) = b(u_1, v) + b(u_2, v)$,

(2) $b(u, v_1 + v_2) = b(u, v_1) + b(u, v_2)$

(3) $b(\lambda u, v) = b(u, \lambda v) = \lambda b(u, v)$

pour tout $u, u_1, u_2 \in E$, $v, v_1, v_2 \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

(1) *Dans le cas $E = F$ et $V = \mathbb{K}$, nous parlons de* ***forme bilinéaire*** *sur E.*

(2) *Nous parlons de forme bilinéaire* ***symétrique*** *si de plus $b(u, v) = b(v, u)$.*

DefBSIoouvuKR

Définition 8.121 ([325])**.**
Soit un espace vectoriel E et $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique différente de 2. Une ***forme quadratique*** *sur E est une application $q\colon E \to \mathbb{F}$ pour laquelle il existe une forme bilinéaire symétrique $b\colon E \times E \to \mathbb{F}$ satisfaisant $q(x) = b(x, x)$ pour tout $x \in E$.*

L'ensemble des formes quadratiques réelles sur E est noté $Q(E)$.

La topologie sur $Q(E)$ sera la topologie métrique donnée dans le lemme 8.136.

DEFooJIAQooZkBtTy

Définition 8.122 (Application bilinéaire définie positive, thème 39)**.**
Si b est une application bilinéaire[44] *sur un espace vectoriel E nous disons qu'elle est*

TTEMooRVGDooQmNqyg

(1) ***définie positive*** *si $b(x, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$ et $b(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

(2) ***semi-définie positive*** *si $b(x, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$. Nous dirons aussi parfois qu'elle est simplement « positive ».*

Note : nous disons souvent « strictement définie positive » pour « définie positive », pour éviter les confusions.

8.123.
Une application bilinéaire $E \times E \to \mathbb{K}$ n'est pas une application linéaire ; la distinction est importante. La linéarité est

$$b(\lambda u, \lambda v) = b\big(\lambda(u, v)\big) = \lambda b(u, v) \tag{8.256}$$

et la bilinéarité est

$$b(\lambda u, v) = b(u, \lambda v) = \lambda b(u, v). \tag{8.257}$$

En réalité la seule forme qui soit à la fois linéaire et bilinéaire est la forme identiquement nulle : la condition

$$b(\lambda u, \lambda v) = \lambda^2 b(u, v) = \lambda b(u, v) \tag{8.258}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ implique $b(u, v) = 0$.

EXooKFBOooJjXZwu

Exemple 8.124 ([326])**.**
L'application

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{M}(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{M}(n, \mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ (A, B) &\mapsto \mathrm{Tr}(AB) \end{aligned} \tag{8.259}$$

est une forme bilinéaire symétrique.

La vérification est un calcul :

$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_i (BA)_{ii} = \sum_{ik} B_{ik} A_{ki} = \sum_{ik} A_{ki} B_{ik} = \sum_k (AB)_{kk} = \mathrm{Tr}(AB). \tag{8.260}$$

△

8.8.1 Dégénérescence d'une forme bilinéaire

Soit b, une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur l'espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2. Nous notons q la forme quadratique associée.

DEFooNUBFooLfCqaK

Définition 8.125.
Une forme bilinéaire est ***non dégénérée*** *si $b(x, z) = 0$ pour tout z implique $x = 0$.*

LemyKJpVP

Lemme 8.126.
Soit b une forme bilinéaire non dégénérée. Si x et y sont tels que $b(x, z) = b(y, z)$ pour tout z, alors $x = y$.

Démonstration. C'est immédiat du fait de la linéarité en le premier argument et de la non-dégénérescence : si $b(x, z) - b(y, z) = 0$ alors

$$b(x - y, z) = 0 \tag{8.261}$$

pour tout z, ce qui implique $x - y = 0$. □

[44] Définition 8.120.

8.8.2 Orthogonal pour une forme bilinéaire

DEFooENZGooXMWfUy

Définition 8.127.
Soit un espace vectoriel E et une forme bilinéaire symétrique b. Si $A \subset E$ nous notons

$$A^\perp = \{z \in E \text{ tel que } b(z,x) = 0 \, \forall x \in A\}. \tag{8.262}$$

*C'est l'**orthogonal** de A par rapport à la forme b.*

DEFooQQBQooKJdwxO

Définition 8.128.
*Soit un espace vectoriel E et une forme bilinéaire symétrique b. Le **noyau** est la partie*

$$\ker(b) = \{z \in E \text{ tel que } b(z,x) = 0 \forall x \in E\}. \tag{8.263}$$

PROPooWPKRooUAnVzd

Proposition 8.129 ([327]).
Soit un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Soit une forme bilinéaire symétrique b sur E. Si A et B sont des parties de E nous avons :

ITEMooCGEIooKpSNXS

(1) $A^\perp$ *est un sous-espace vectoriel.*

ITEMooRRAOooTaVYgm

(2) Si $A \subset B$ *alors* $B^\perp \subset A^\perp$.

ITEMooBKXFooEpObWC

(3) $A^\perp = \text{Span}(A)^\perp$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)**
Soient $x, y \in A^\perp$, $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous avons alors

$$b(x + \lambda y, a) = b(x,a) + \lambda b(y,a) = 0 \tag{8.264}$$

(2) **Pour (2)**
Soient $x \in B^\perp$ et $a \in A$. Nous avons $b(x,a) = 0$ parce que $a \in A \subset B$ et $x \in B^\perp$.

(3) **Pour (3)** Deux inclusions à prouver.

(3a) **Première inclusion** Nous avons $A \subset \text{Span}(A)$, donc le point (2) montre que $\text{Span}(A)^\perp \subset A^\perp$.

(3b) **Deuxième inclusion** Soit $x \in A^\perp$ et $y \in \text{Span}(A)$. Nous avons $y = \sum_i \lambda_i a_i$ pour certains $a_i \in A$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Alors

$$b(x,y) = \sum_i \lambda_i b(x, a_i) = 0. \tag{8.265}$$

□

PROPooSACFooQTsiJL

Proposition 8.130 ([327]).
Soit un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Soit une forme bilinéaire symétrique b sur E. Si V est un sous-espace de E, alors :

ITEMooYHJUooQnbKQc

(1) Si $b_V : V \times V \to \mathbb{K}$ *est la restriction de* b, *alors* $V \cap V^\perp = \ker(b_V)$[45].

ITEMooUZZFooDbuddF

(2) $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$.

ITEMooSZAGooLgkzYw

(3) $V \subset (V^\perp)^\perp$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)**
En deux parties.

(1a) $V \cap V^\perp \subset \ker(b_V)$ Soit $x \in V \cap V^\perp$. Si $v \in V$, nous avons $b(x,v) = 0$ parce que $x \in V^\perp$.

(1b) $\ker(b_V) \subset V \cap V^\perp$ Soit $x \in \ker(b_V)$. Nous avons $x \in V$ parce que $x \in \ker(b_V) \subset V$. Pour montrer que $x \in V^\perp$ nous considérons $y \in V$ et nous remarquons que $b(x,y) = 0$ parce que $x \in V^\perp$.

[45] Définition du noyau de b, définition 8.128.

(2) **Pour (2)** En deux parties.

(2a) $(V+W)^\perp \subset V^\perp \cap W^\perp$ Soit $x \in (V+W)^\perp$. Si $v \in V$, alors $v \in V+W$, donc $f(x,v)=0$. Cela prouve que $x \in V^\perp$. Nous prouvons que $x \in W^\perp$ de même.

(2b) $V^\perp \cap W^\perp \subset (V+W)^\perp$ Un élément de $V+W$ est de la forme $v+w$ avec $v \in V$ et $w \in W$. Nous avons

$$b(x, v+w) = b(x,v) + b(x,w) = 0. \tag{8.266}$$

(3) **Pour (3)** Si $x \in V$, alors $b(x,z)=0$ pour tout $V^\perp$.

□
PROPooMAZZooRZZoHj

Proposition 8.131.
Soit une forme bilinéaire non dégénérée b sur l'espace vectoriel E de dimension finie. L'application

$$\begin{aligned} \varphi_b \colon E &\to E^* \\ x &\mapsto b(x,.) \end{aligned} \tag{8.267}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Linéaire**

Le fait que φ_b soit linéaire est une conséquence de la bilinéarité de b.

(2) **Injectif** Si $\varphi_b(v) = \varphi_b(w)$, alors pour tout $x \in E$ nous avons $\varphi_b(v)x = \varphi_b(w)x$, c'est-à-dire

$$b(v-w,x) = 0. \tag{8.268}$$

Vu que b est non dégénérée, cela implique $v-w=0$.

(3) **Isomorphisme** Nous savons que $\dim(E) = \dim(E^*)$ par le lemme 4.136. Une application linéaire injective entre espaces de même dimension est toujours une bijection par le corolaire 4.51.

□
LEMooRXMMooAvvOjF

Lemme 8.132 ([328])**.**
Soit une forme bilinéaire non dégénérée b sur l'espace vectoriel E de dimension finie. Soit un sous-espace vectoriel V. Nous avons

$$\dim(E) = \dim(V) + \dim(V^\perp). \tag{8.269}$$
EQooLFJBooNNIHgP

Démonstration. Nous considérons les applications

$$\begin{aligned} \varphi_b \colon E &\to E^* \\ x &\mapsto b(x,.). \end{aligned} \tag{8.270}$$

et l'application de restriction

$$\begin{aligned} r \colon E^* &\to V^* \\ \alpha &\mapsto \alpha|_F \end{aligned} \tag{8.271}$$

(1) **Théorème du rang** Nous appliquons le théorème du rang 4.51 à l'application r :

$$\mathrm{rk}(r) + \dim\big(\ker(r)\big) = \dim(E). \tag{8.272}$$
EQooSABBooUdWyZL

(2) $\mathrm{rk}(r) = \dim(V)$

Étant donné que r est surjective, $\mathrm{rk}(r) = \dim(V^*) = \dim(V)$. La seconde égalité est l'égalité des dimensions du lemme 4.136.

(3) $\varphi_b(V^\perp) \subset \ker(r)$ Soit $x \in V^\perp$. Pour tout $v \in V$ nous avons

$$r\big(\varphi_b(x)\big)v = \varphi_b(x)v = b(x,v) = 0. \tag{8.273}$$

Donc $\varphi_b(x) \in \ker(r)$.

(4) $\varphi_b\colon V^\perp \to \ker(r)$ **est surjective** Soit $\alpha \in \ker(r)$. Vu que φ_b est une bijection, il existe $x \in E$ tel que $\alpha = \varphi_b(x)$, c'est-à-dire $\alpha = b(x, \cdot\ )$. Nous avons $\alpha(y) = 0$ pour tout $y \in V$, c'est-à-dire $b(x, y) = 0$ pour tout $y \in V$, ce qui signifie que $x \in V^\perp$. Donc $\alpha \in \varphi_b(V^\perp)$.

(5) $\dim(V^\perp) = \dim\big(\ker(r)\big)$ L'application φ_b étant globalement injective, elle est une bijection entre $V^\perp$ et $\ker(r)$. Donc ces deux ont la même dimension.

(6) **Conclusion** Nous pouvons reprendre l'équation (8.272) et y mettre nos découvertes : $\mathrm{rk}(r) = \dim(V)$ et $\dim\big(\ker(r)\big) = \dim(V^\perp)$. Cela donne la formule demandée

$$\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E). \tag{8.274}$$

□

LEMooYYGLooYIDmoa

Lemme 8.133.
Si V est un sous-espace de E de dimension finie, alors

$$(V^\perp)^\perp = V. \tag{8.275}$$

Démonstration. Nous avons déjà vu dans la proposition 8.130 que $V \subset (V^\perp)^\perp$.

Nous écrivons maintenant la formule (8.269) pour V, et pour $V^\perp$ (qui est un sous-espace vectoriel par la proposition 8.129(1)) :

$$\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E) \tag{8.276a}$$
$$\dim(V^\perp) + \dim\Big((V^\perp)^\perp\Big) = \dim(E). \tag{8.276b}$$

En soustrayant ces deux équations membre à membres, nous trouvons $\dim(V) = \dim\Big((V^\perp)^\perp\Big)$. Vu que V s'injecte (par l'identité) dans $(V^\perp)^\perp$ et qu'ils ont la même dimension, ils sont égaux. □

8.8.3 Formes quadratiques

LEMooOQIDooPSOeXL

Lemme 8.134 ([329]).
Soit une forme quadratique Q sur E. Si F est un sous-espace de E, alors

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) \geqslant n \tag{8.277}$$

où $F^\perp$ est l'orthogonal par rapport à Q.

Démonstration. Nous posons $p = \dim(F)$. Nous considérons une base $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E telle que $\{f_i\}_{i=1,\dots,p}$ est une base de F[46]. Nous posons

$$\begin{aligned}\phi\colon E &\to F\\ x &\mapsto \sum_{i=1}^{p} B(x, f_i) f_i\end{aligned} \tag{8.278}$$

où B est la forme bilinéaire associée à Q. Ce ϕ est une application linéaire à qui nous appliquons le théorème du rang (4.51) :

$$\dim(E) = \mathrm{rk}(\phi) + \dim\big(\ker(\phi)\big). \tag{8.279}$$

EQooCLWLooCFxVDq

Mais vu que l'image de ϕ est dans F, nous avons $\mathrm{rk}(\phi) \leqslant \dim(F)$. De plus, $\ker(\phi) = F^\perp$. Donc (8.279) devient

$$\dim(E) \leqslant \dim(F) + \dim(F^\perp). \tag{8.280}$$

□

LEMooUOZOooYvEcji

Lemme 8.135 ([329]).
Soit un espace vectoriel E de dimension finie et un sous-espace F sur lequel la forme quadratique Q est strictement définie positive ou négative. Alors

$$E = F \oplus F^\perp. \tag{8.281}$$

[46] Théorème de la base incomplète, 4.26.

Démonstration. D'abord nous montrons que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Si $v \neq 0$ est dans F, alors $Q(v) > 0$, et donc v n'est pas dans $F^\perp$. Donc $F \cap F^\perp \subset \{0\}$. L'inclusion inverse est immédiate.

Nous avons vu dans le lemme 8.134 que

$$\dim(E) \leqslant \dim(F) + \dim(F^\perp). \tag{8.282}$$

Vu que F et $F^\perp$ n'ont pas d'intersection autre que $\{0\}$, nous avons

$$\dim(E) \geqslant \dim(F \oplus F^\perp) = \dim(F) + \dim(F^\perp) \geqslant \dim(E). \tag{8.283}$$

Toutes ces inégalités sont donc des égalités et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$. □

LEMooWRCIooWkMpoF

Lemme 8.136.
La topologie considérée sur $Q(E)$[47] est celle de la norme L'application

$$\begin{aligned} N\colon Q(E) &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto \sup_{\|x\|_E=1} |q(x)|, \end{aligned} \tag{8.284}$$

EqZYBooZysmVh

est une norme.

L'application

$$\begin{aligned} N\colon S(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \sup_{\|x\|_E=1} |x \cdot Ax| \end{aligned} \tag{8.285}$$

EQooJETQooIixRWu

est une norme. À droite, nous trouvons le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$.

Ces normes sont celles que nous considérons pour la topologie sur $Q(E)$ et $S(n,\mathbb{R})$.

PROPooZLXVooOsXCcB

Proposition 8.137.
*Soit une forme bilinéaire b et la forme quadratique associée q. Alors nous avons l'**identité de polarisation** :*

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x) + q(y) - q(x-y)\big). \tag{8.286}$$

EqMrbsop

Démonstration. Il suffit de substituer dans le membre de droite $q(x) = b(x,x)$ et d'utiliser la bilinéarité :

$$\begin{aligned} q(x) + q(y) - q(x-y) &= b(x,x) + b(y,y) - b(x-y,x-y) && \text{(8.287a)} \\ &= b(x,x) + b(y,y) - b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) - b(y,y) && \text{(8.287b)} \\ &= 2b(x,y) && \text{(8.287c)} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que b est symétrique : $b(x,y) = b(y,x)$. □

PropFSXooRUMzdb

Proposition 8.138 (Matrice associée à une forme bilinéaire)**.**
Soit $\{e_i\}$ une base de E. L'application

$$\begin{aligned} \phi\colon Q(E) &\to S(n,\mathbb{R}) \\ q &\mapsto \big(b(e_i,e_j)\big)_{i,j} \end{aligned} \tag{8.288}$$

où b est forme bilinéaire associée à q est une bijection linéaire et continue[48].

Démonstration. Si $\phi(q) = \phi(q')$; alors

$$q(x) = \sum_{i,j} \phi(q)_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j} \phi(q')_{ij} x_i x_j = q'(x). \tag{8.289}$$

Donc $q = q'$. L'application ϕ est donc injective

De plus elle est surjective parce que si $B \in S(n,\mathbb{R})$ alors la forme quadratique

$$q(x) = \sum_{i,j} B_{ij} x_i x_j \tag{8.290}$$

a évidemment B comme matrice associée. L'application ϕ est donc surjective.

[47] $Q(E)$ sont les formes quadratiques réelles sur E, définition 8.121.
[48] Pour les topologies des normes données dans le lemme 8.136.

Notre application ϕ est de plus linéaire parce que l'association d'une forme quadratique à la forme bilinéaire associée est linéaire.

En ce qui concerne la continuité, nous la prouvons en zéro en considérant une suite convergente $q_n \xrightarrow{Q(E)} 0$. C'est-à-dire que

$$\sup_{\|x\|=1} |q_n(x)| \to 0. \tag{8.291}$$

Nous rappelons l'identité de polarisation[49] :

$$b_n(x,y) = \frac{1}{2}\big(q_n(x-y) - q_n(x) - q_n(y)\big). \tag{8.292}$$

En ce qui concerne deux des trois termes, il n'y a pas de problèmes :

$$\big|\phi(q_n)_{ij}\big| = \big|b_n(e_i,e_j)\big| \leqslant \frac{1}{2}\big|q_n(e_i-e_j)\big| + \frac{1}{2}\big|q_n(e_i)\big| + \frac{1}{2}\big|q_n(e_j)\big|. \tag{8.293}$$

Si n est assez grand, nous avons tout de suite

$$\big|\phi(q_n)_{ij}\big| \leqslant \frac{1}{2}\big|q_n(e_i-e_j)\big| + \epsilon. \tag{8.294}$$

Nous définissons e_{ij} et α_{ij} de telle sorte que $e_i - e_j = \alpha_{ij}e_{ij}$ avec $\|e_{ij}\| = 1$. Si $\alpha = \max\{\alpha_{ij}, 1\}$ alors nous avons

$$q_n(e_i - e_j) = \alpha_{ij}^2 q_n(e_{ij}) \leqslant \alpha^2 q_n(e_{ij}). \tag{8.295}$$

Il suffit maintenant de prendre n assez grand pour avoir $\sup_{\|x\|=1}|q_n(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{\alpha^2}$ pour avoir

$$\big|\phi(q_n)_{ij}\big| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{\alpha^2}. \tag{8.296}$$

□

8.8.4 Isotropie

DefVKMnUEM

Définition 8.139 (Isotropie[330])**.**
Quelques définitions.

(1) *Un vecteur est* ***isotrope*** *pour b si il est perpendiculaire à lui-même. En d'autres termes, x est isotrope si et seulement si $b(x,x) = 0$.*

(2) *Un sous-espace $W \subset E$ est* ***isotrope*** *si $W \cap W^\perp \neq \{0\}$.*

(3) *Un sous-espace $W \subset E$ est* ***totalement isotrope*** *si pour tout $x, y \in W$, nous avons $b(x,y) = 0$.*

Le ***cône isotrope*** *de b est l'ensemble de ses vecteurs isotropes :*

$$C(b) = \{x \in E \text{ tel que } b(x,x) = 0\}. \tag{8.297}$$

Nous introduisons quelques notations. D'abord pour $y \in E$ nous notons

$$\begin{aligned}\Phi_y\colon E &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto b(x,y)\end{aligned} \tag{8.298}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}\Phi\colon E &\to E^*\\ y &\mapsto \Phi_y.\end{aligned} \tag{8.299}$$

DEFooHKQVooPuWZiP

Définition 8.140.
Le fait pour une forme bilinéaire b d'être dégénérée signifie que l'application Φ n'est pas injective. Le ***noyau*** *de la forme bilinéaire est celui de Φ, c'est-à-dire*

$$\ker(b) = \{z \in E \text{ tel que } b(z,y) = 0\, \forall y \in E\}. \tag{8.300}$$

Autrement dit, $\ker(b) = E^\perp$ où le perpendiculaire est pris par rapport à b.

Notons tout de même que nous utilisons la notation $\perp$ même si b est dégénérée et éventuellement pas positive ; c'est-à-dire même si la formule $(x,y) \mapsto b(x,y)$ ne fournit pas un produit scalaire.

[49] Proposition 8.137.

LEMooOTVGooRAOyaD

Lemme 8.141.
Si E est de dimension finie, et si V est un sous-espace non isotrope[50] *de E, alors $V^\perp$ est également non-isotrope.*

Démonstration. En dimension finie, le lemme 8.133 nous indique que $(V^\perp)^\perp = V$. Si $V^\perp$ était isotrope nous aurions $V^\perp \cap (V^\perp)^\perp \neq \varnothing$. Cela donne alors immédiatement $V^\perp \cap V \neq \varnothing$, qui serait que V est isotrope. □

8.9 Formes bilinéaires et quadratiques

Plus à propos de formes bilinéaires dans le thème 16.

LEMooLKNTooSfLSHt

Lemme 8.142.
Si q est une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire b telle que $q(x) = b(x, x)$.

Démonstration. L'existence n'est pas en cause : c'est la définition d'une forme quadratique. Pour l'unicité, étant donné une forme quadratique, la forme bilinéaire b doit forcément vérifier l'identité de polarisation de la proposition 8.137. Elle est donc déterminée par q. □

Notons la division par 2 qui est le pourquoi de la demande de la caractéristique différente de 2 pour $\mathbb{F}$ dans la définition de forme quadratique.

DEFooGECOooCCGVXG

Définition 8.143.
*Soit une forme quadratique q sur E. Nous disons que $v, w \in E$ sont q-**orthogonaux** si $b(v, w) = 0$ où b est la forme bilinéaire associée à q par le lemme 8.142.*

8.9.1 Matrice associée à une forme bilinéaire

DEFooAOGPooXWXUcN

Définition 8.144.
Soit une forme bilinéaire[51] *$b\colon E \times E \to \mathbb{K}$ et une base quelconque $\{f_\alpha\}$ de E. Nous définissons les nombres*

$$B_{\alpha\beta} = b(f_\alpha, f_\beta), \tag{8.301}$$

EQooCUGFooRlKUtu

*qui forment une matrice symétrique dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Cette matrice est la **matrice associée** à la forme bilinéaire b.*

La matrice d'une forme quadratique est celle associée à sa forme bilinéaire associée.

LEMooDCIOooTlVZMR

Lemme 8.145.
Soit une forme bilinéaire $b\colon E \times E \to \mathbb{K}$ et une base quelconque $\{f_\alpha\}$ de E. Nous notons B la matrice de b (definition 8.144) et q la forme quadratique associée.

Alors nous avons

$$b(x, y) = \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta. \tag{8.302}$$

EQooQFMWooVKVLMx

et

$$b(x, y) = x \cdot By. \tag{8.303}$$

où le point est le produit scalaire usuel (composante par composante).

Démonstration. Si $x = \sum_\alpha x_\alpha f_\alpha$ et $y = \sum_\beta y_\beta f_\beta$:

En utilisant la convention (4.92) et les choses autour (voir aussi -1.1),

$$b(x, y) = \sum_\alpha x_\alpha \sum_\beta B_{\alpha\beta} y_\beta = \sum_\alpha x_\alpha (By)_\alpha = x \cdot By. \tag{8.304}$$

□

[50] Définition 8.139.
[51] Définition 8.120.

8.9.2 Changement de base : matrice d'une forme bilinéaire

PROPooOKTGooOYukoB

Proposition 8.146 ([1]).
Soient une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ et une application linéaire $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. La matrice de $q \circ \phi$ est

$$\phi^t q \phi \tag{8.305}$$

où l'on a noté q la matrice de q et ϕ celle de ϕ.

Démonstration. C'est un calcul direct de $(q \circ \phi)(x)$:

$$\begin{aligned} q\big(\phi(x)\big) &= \sum_{ij} q_{ij}\phi(x)_i\phi(x)_j && (8.306a)\\ &= \sum_{ij}\sum_{k}\sum_{l} q_{ij}\phi_{ik}x_k\phi_{jl}x_l && \text{prop. 4.75} \quad (8.306b)\\ &= \sum_{kl}\Big(\sum_{ij}\phi_{ik}q_{ij}\phi_{jl}\Big)x_kx_l && = \sum_{kl}(\phi^t q\phi)_{kl}x_lx_l. \quad (8.306c) \end{aligned}$$

Et voilà. □

PROPooLBIOooUpzxXA

Proposition 8.147 (Voir la section -1.1).
Soit une forme bilinéaire[52] *$b\colon V \times V \to \mathbb{K}$ dont la matrice*[53] *dans la base $\{e_i\}$ est A et celle dans la base $\{f_\alpha\}$ est B. Nous supposons que les bases sont liées par $f_\alpha = \sum_i Q_{i\alpha}e_i$. Alors*

EQooZUVTooKjqnJj

$$B = Q^t A Q. \tag{8.307}$$

Démonstration. Soit $x, x' \in V$ de coordonnées (x_i) et (x'_i) dans la base $\{e_i\}$ et (y_α), (y'_α) dans la base $\{f_\alpha\}$. Par définition de la matrice associée à une forme bilinéaire,

$$b(x, x') = \sum_{ij} A_{ij}x_ix'_j = \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}y_\alpha y'_\beta. \tag{8.308}$$

En remplaçant les x_i et x'_i par leurs valeurs en fonction de y_α et y'_β données par la proposition 4.122, nous trouvons

$$\begin{aligned} b(x, x') &= \sum_{ij\alpha\beta} A_{ij}Q_{i\alpha}y_\alpha Q_{j\beta}y'_\beta && (8.309a)\\ &= \sum_{\alpha\beta}(Q^tAQ)_{\alpha\beta}y_\alpha y'_\beta && (8.309b) \end{aligned}$$

où Q^t désigne la transposée de la matrice Q : $Q^t_{ij} = Q_{ji}$. Vu que les nombres y_α et y'_β sont arbitraires nous déduisons[54] que $B = Q^tAQ$. □

REMooNEJLooSqgeih

Remarque 8.148.
Notons que cette « loi de transformation » n'est pas la même que celle pour une application linéaire[55]. Ici nous avons Q^t alors que pour les applications linéaires nous avions Q^{-1}.

Pour cette raison, tant que nous travaillons avec des bases orthonormées, c'est-à-dire tant que Q est orthogonale[56], nous pouvons confondre une application linéaire avec une application bilinéaire en passant par la matrice. Mais cette identification n'est pas du tout canonique : elle repose sur le fait que les bases soient orthonormées.

Il en découle que la réduction des endomorphismes et la réduction des formes bilinéaires ne sont pas tout à fait les mêmes théories. Par exemple la pseudo-diagonalisation simultanée (corolaire 10.52) est un résultat de réduction de forme bilinéaire et non d'endomorphismes.

8.9.3 Isométrie, forme quadratique et bilinéaire

Exemple 8.149.
La forme quadratique $q(x) = x_1^2 + x_2^2$ donne la norme euclidienne. La forme bilinéaire associée est $b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$, qui est le produit scalaire usuel. △

[52] Définition 8.120
[53] Définition 8.301.
[54] Lemme 4.71.
[55] Proposition 4.125.
[56] Définition 4.106.

Il ne faudrait pas déduire trop vite que la formule $\|x\|^2 = q(x)$ donne une norme dès que q est non dégénérée. En effet q peut ne pas être définie positive. La forme $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ prend des valeurs positives et négatives. A fortiori $d(x,y) = q(x-y)$ ne donne pas toujours une distance.

DEFooECTUooRxBhHf

Définition 8.150.
*Une **isométrie** pour la forme quadratique q est une application bijective $f : V \to V$ telle que*

$$q(x-y) = q\big(f(x) - f(y)\big). \tag{8.310}$$

Dans les cas où q donne une distance, alors c'est une isométrie au sens usuel.

DEFooIQURooMeQuqX

Définition 8.151 (Thème 78)**.**
*Soit un espace vectoriel E muni d'une forme bilinéaire b. Une **isométrie** pour b est une bijection $f : E \to E$ telle que*

$$b\big(f(x), f(y)\big) = b(x,y) \tag{8.311}$$

pour tout $x, y \in E$.

LemewGJmM

Lemme 8.152.
Soient q une forme quadratique et b la forme bilinéaire associée par le lemme 8.142. Une application $f : E \to E$ telle que $f(0) = 0$ est une isométrie pour b si et seulement si elle est une isométrie pour q.

Démonstration. Pour une application bijective $f : E \to E$ telle que $f(0) = 0$, nous devons prouver l'équivalence des propriétés suivantes :

(1) $b\big(f(x), f(y)\big) = b(x,y)$ pour tout $x, y \in E$;

(2) $q\big(f(x) - f(y)\big) = q(x-y)$ pour tout $x, y \in E$.

Dans le sens direct, en posant $x = y$ nous trouvons tout de suite $q(f(x)) = q(x)$; ensuite en utilisant la distributivité de b,

$$\begin{aligned} q\big(f(x) - f(y)\big) &= b\big(f(x) - f(y), f(x) - f(y)\big) && \text{(8.312a)}\\ &= q\big(f(x)\big) - 2b\big(f(x), f(y)\big) + q\big(f(y)\big) && \text{(8.312b)}\\ &= q(x) + q(y) - 2b(x,y) && \text{(8.312c)}\\ &= q(x-y). && \text{(8.312d)} \end{aligned}$$

Dans l'autre sens, nous commençons par remarquer que l'hypothèse $f(0) = 0$ donne $q(x) = q\big(f(x)\big)$. Ensuite nous utilisons l'identité de polarisation (8.286) :

$$\begin{aligned} b\big(f(x), f(y)\big) &= \frac{1}{2}\big[q\big(f(x)\big) + q\big(f(y)\big) - q\big(f(x-y)\big)\big] && \text{(8.313a)}\\ &= \frac{1}{2}\big[q(x) + q(y) - q(x-y)\big] && \text{(8.313b)}\\ &= b(x,y). && \text{(8.313c)} \end{aligned}$$

□

8.9.4 Isométries

Voici un théorème pas toujours bien énoncé dans les cours de physique qui font de la relativité. Au moment de « prouver » les transformations de Lorentz[57], beaucoup oublient de justifier pourquoi elles devraient être linéaires.

ThoDsFErq

Théorème 8.153 ([331])**.**
Une isométrie[58] d'une forme bilinéaire non dégénérée est linéaire.

Démonstration. Soient une forme bilinéaire non-dégénérée b sur l'espace vectoriel E ainsi qu'une isométrie f pour icelle. Soit $z \in E$; étant donné que f est bijective nous pouvons considérer l'élément $f^{-1}(z) \in E$ et

[57] Théorème 18.198.
[58] Définition 8.151.

calculer

$$\begin{aligned} b\big(f(x+y),z\big) &= b\big(f(x+y),f(f^{-1}(z))\big) && \text{(8.314a)}\\ &= b(x+y,f^{-1}(z)) && \text{(8.314b)}\\ &= b(x,f^{-1}(z))+b(y,f^{-1}(z)) && \text{(8.314c)}\\ &= b(f(x),z)+b(f(y),z) && \text{(8.314d)}\\ &= b\big(f(x)+f(y),z\big), && \text{(8.314e)} \end{aligned}$$

donc $f(x+y)=f(x)+f(y)$ par le lemme 8.126.

De la même façon on trouve $b\big(f(\lambda x),z\big)=b\big(\lambda f(x),z\big)$ qui prouve que $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ et donc que f est linéaire. □

Exemple 8.154.
Une isométrie peut ne pas être linéaire quand la forme bilinéaire est dégénérée. Par exemple pour la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$b\big((a,b),(x,y)\big)=ax, \tag{8.315}$$

nous pouvons faire

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} x\\ \lambda(x,y)\end{pmatrix} \tag{8.316}$$

où λ est n'importe quoi. △

DEFooVTXWooVXfUnc

Définition 8.155.
*Soient deux espaces vectoriels E et V. Une application $f\colon E\to V$ est **affine** si il existe une application linéaire $u\colon E\to V$ et un élément $\alpha\in V$ tel que*

$$f(x)=u(x)+\alpha \tag{8.317}$$

pour tout $x\in E$.

THOooHSGHooNCLebs

Théorème 8.156.
Soit un espace vectoriel E muni d'une forme quadratique q. Soit une isométrie $f\colon E\to E$ pour q. Alors

(1) si $f(0)=0$, alors f est linéaire ;

(2) si $f(0)\neq 0$ alors f est affine[59].

Démonstration. Nous considérons la forme bilinéaire associée b. Si $f(0)=0$, nous savons par le lemme 8.152 que $b\big(f(x),f(y)\big)=b(x,y)$. La proposition 8.153 nous dit alors que f est linéaire.

Si $f(0)\neq 0$, alors nous posons $g(x)=f(x)-f(0)$ qui vérifie $g(0)=0$ et

$$q\big(g(x)-g(y)\big)=q\big(f(x)-f(0)-f(y)+f(0)\big)=q(x-y). \tag{8.318}$$

Nous pouvons donc appliquer le premier point à g, déduire que g est linéaire et donc que f est affine. □

PROPooHSWIooKwiibH

Proposition 8.157 ([1]).
Soit un espace vectoriel E. Soient des points $a,x_1,\dots,x_n$ tels que $\{x_i-a\}_{i=1,\dots,n}$ forme une base de E. Si $f\colon E\to E$ est une application affine fixant a et tous les x_i, alors f est l'identité.

Démonstration. Nous décomposons $f(x)=u(x)+\alpha$ où u est linéaire et $\alpha\in E$. Nous avons, pour tout i :

$$\begin{cases} u(a)-a=\alpha & \text{(8.319a)}\\ u(x_i)-x_i=\alpha. & \text{(8.319b)}\end{cases}$$

En faisant la soustraction, nous obtenons $u(x_i-a)=x_i-a$. Donc u est une application linéaire fixant une base. Elle est donc l'identité. À partir de là, il est immédiat que $\alpha=0$. □

Nous pouvons maintenant particulariser tout cela au cas de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et de la norme associée pour voir quel résultat nous avons à peine prouvé.

Nous notons ici $T(n)$ le groupe des translations sur $\mathbb{R}^n$. Un élément de $T(n)$ est une translation τ_v donnée par un vecteur v et agissant sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} \tau_v\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n\\ x &\mapsto x+v. \end{aligned} \tag{8.320}$$

[59] Définition 8.155.

Ce groupe est isomorphe au groupe abélien $(\mathbb{R}^n, +)$, et nous allons souvent identifier τ_v à v.

Vous savez par culture générale que les isométries de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel sont les matrices orthogonales. En voici une petite généralisation (pensez à $\eta = \mathbb{1}$ dans le cas du produit scalaire usuel).

PROPooSYQMooEnZFdp

Proposition 8.158.
Soit une forme bilinéaire b sur $\mathbb{R}^n$ de matrice symétrique η. Si A est la matrice d'une application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$b(Ax, Ay) = b(x, y) \tag{8.321}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$A^t \eta A = \eta. \tag{8.322}$$

Démonstration. En suivant la formule générale (8.302),

$$b(Ax, Ay) = \sum_{ij} \eta_{ij} (Ax)_i (Ay)_j = \sum_{ijkl} \eta_{ij} A_{ik} A_{jl} x_k y_l. \tag{8.323}$$

En imposant que ce soit égal à $\sum_{kl} \eta_{kl} x_k y_l$ pour tout x, y nous avons la contrainte

$$\sum_{ij} \eta_{ij} A_{ik} A_{jl} = \eta_{kl} \tag{8.324}$$

qui signifie exactement $A^t \eta A = \eta$. □

8.10 Signature, théorème de Sylvester

DEFooWDCLooDkRYLK

Définition 8.159 (Signature[332])**.**
*Soit une forme quadratique[60] Q sur un espace vectoriel E de dimension finie n. L'**indice d'inertie** de Q est le nombre*

$$q = \max\{\dim(F) \text{ tel que } Q(v) < 0 \, \forall v \in F \setminus \{0\}\}. \tag{8.325}$$

Nous définissons aussi

$$p = \max\{\dim(G) \text{ tel que } Q(v) > 0 \, \forall v \in G \setminus \{0\}\}. \tag{8.326}$$

*Le couple (p, q) est la **signature** de Q.*

DEFooVITQooQaMaTF

Définition 8.160 (Rang d'une forme quadratique)**.**
Si $Q \colon E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique, nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f_Q \colon E &\to E^* \\ x &\mapsto \big[y \mapsto B(x, y) \big]. \end{aligned} \tag{8.327}$$

*Le **rang** de Q est le rang de l'application linéaire f_Q.*

PROPooLRZQooSfprff

Proposition 8.161.
Le rang d'une forme quadratique est le rang de sa matrice dans n'importe quelle base.

Démonstration. Nous considérons une forme quadratique Q sur l'espace vectoriel E. Sa trace est, par définition, la trace de l'application linéaire f_Q de la définition 8.160. Or cette dernière trace ne dépend pas des bases choisies sur E et E^*. Nous la calculons donc maintenant.

Soit une base $\{e_i\}$ de E ainsi que sa base duale $\{e_i^*\}$ de E^*. Si $v = \sum_k v_k e_k \in E$, alors

$$f_Q(e_i) v = \sum_k v_k B(e_i, e_k) = \sum_k Q_{ik} v_k \tag{8.328}$$

où nous avons noté B la forme bilinéaire associée à Q et utilisé la définition 8.144 de la matrice associée à la forme quadratique Q. Nous avons donc $f_Q(ei) = \sum_k Q_{ik} e_k^*$ ou encore

$$f_Q(e_i)_k = Q_{ik}, \tag{8.329}$$

ce qui signifie, par (1) que la matrice associée à f_Q est la matrice Q^t.

Le rang de f_Q est donc celui de Q^t, qui est le même que celui de la matrice Q (ici, nous avons noté Q la matrice de la forme quadratique Q). Le rang de f_Q est celui de sa matrice par la proposition 4.115. □

[60] Définition 8.121.

LEMooISHCooVDJEKo

Lemme 8.162 ([332]).
Soient une forme quadratique Q ainsi que deux bases Q-orthogonales $\{e_1,\dots,e_n\}$ et $\{e'_1,\dots,e'_n\}$. Nous posons

$$r = \text{Card}\{e_i \text{ tel que } Q(e_i) > 0\} \tag{8.330a}$$
$$r' = \text{Card}\{e_i \text{ tel que } Q(e'_i) > 0\} \tag{8.330b}$$
$$s = \text{Card}\{e_i \text{ tel que } Q(e_i) < 0\} \tag{8.330c}$$
$$s' = \text{Card}\{e_i \text{ tel que } Q(e'_i) < 0\} \tag{8.330d}$$

Alors $r = r'$ et $s = s'$.

Démonstration. Nous posons

$$I = \{i \text{ tel que } Q(e_i) \geqslant 0\} \tag{8.331a}$$
$$J = \{j \text{ tel que } Q(e'_j) \leqslant 0\} \tag{8.331b}$$

Nous commençons par prouver que $\{e_i\}_{i\in I} \cup \{e'_j\}_{j\in J}$ est libre. Supposons pour cela que

$$\sum_{i\in I} x_i e_i + \sum_{j\in J} y_j e'_j = 0, \tag{8.332}$$

et posons $z = \sum_{i\in I} x_i e_i$. Nous avons

EQooWGKAooElpFTd
$$Q(z) = \sum_{i\in I} x_i^2 Q(e_i) \geqslant 0. \tag{8.333}$$

Mais nous avons aussi $z = -\sum_{j\in J} y_j e'_j$, donc

EQooJYOCooZPXmTf
$$Q(z) = \sum_{j\in J} y_j^2 Q(e'_j) \leqslant 0. \tag{8.334}$$

Donc $Q(z) = 0$. Vu (8.333), et le fait que $Q(e_i) > 0$, avoir $Q(z) = 0$ impose $x_i = 0$ pour tout i. La relation (8.334) nous donne aussi immédiatement que les y_j sont nuls. Donc la partie $\{e_i\}_{i\in I} \cup \{e'_j\}_{j\in J}$ est libre.

Le lemme 4.12 nous indique qu'une partie libre est toujours de cardinal plus petit ou égal à la dimension de l'espace[61]. Tout ça pour dire que

$$\underbrace{\text{Card}(I)}_{=r} + \underbrace{\text{Card}(J)}_{=n-r'} \leqslant n, \tag{8.335}$$

et donc $r \leqslant r'$.

Le même raisonnement, en partant de $I = \{i \text{ tel que } Q(e_i) \leqslant 0\}$ et de $J = \{j \text{ tel que } Q(e'_j) > 0\}$, prouve que $r' \leqslant r$.

La preuve de $s = s'$ est du même tonneau. □

Pour l'équivalence de formes quadratiques, voir la définition 8.250 et la proposition 8.251.

8.11 Produit scalaire, produit hermitien

DefVJIeTFj

Définition 8.163.
*Un **produit scalaire** sur un espace vectoriel réel est une forme bilinéaire[62] symétrique strictement définie positive[63].*

La définition suivante est utile pour ceux qui veulent faire de la relativité[64].

DEFooLPBGooXLxubc

Définition 8.164.
*Un **produit pseudo-scalaire** sur un espace vectoriel réel est une forme bilinéaire et symétrique.*

[61] Ici nous utilisons l'hypothèse que V est de dimension finie.
[62] Définition 8.120.
[63] Définition 8.122.
[64] Voir le théorème 18.198 qui établit les transformations de Lorentz.

DEFooZBWTooIqXwRp

Définition 8.165.
*Nous dirons que deux vecteurs sont **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire*[65] *est nul. Nous écrivons que* $u \perp v$ *lorsque* $\langle u, v\rangle = 0$.

Si $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ *est une base de* E*, nous disons qu'elle est **orthonormée** si*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{8.336}$$

LEMooLPUFooVCvnwW

Lemme 8.166.
Un produit scalaire est toujours non dégénéré[66].

Démonstration. Si b est dégénérée, il existe un $x \neq 0$ tel que $b(x, z) = 0$ pour tout z. En particulier $b(x, x) = 0$, en contradiction avec la condition 8.122(1) de la stricte positivité. □

Vu que nous allons voir un pâté d'espaces avec des produits scalaires, nous leur donnons un nom.

DefLZMcvfj

Définition 8.167.
*Un espace vectoriel **euclidien** est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire (définition 8.163).*

Avouez que c'est drôle qu'un espace vectoriel est euclidien lorsqu'il possède une *multiplication* alors qu'un anneau est euclidien lorsqu'il possède une *division* (voir la définition 1.345). C'est pas très profond, mais si ça peut vous servir de moyen mnémotechnique…

PROPooSKVRooDGVCYj

Proposition-Définition 8.168 (Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, thème 25)**.**
Si $x, y \in \mathbb{R}^n$*, nous définissons*

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{8.337}$$

EQooFITHooEXDCGd

Cela est un produit scalaire.

*Ce produit scalaire est le **produit scalaire** qui sera toujours considéré. C'est de lui qui découle toujours la norme, et la topologie de* $\mathbb{R}^n$*. Il sera aussi souvent noté* $\langle x, y\rangle$.

Démonstration. Il faut que $b(x, y) = \sum_i x_i y_i$ soit bilinéaire, symétrique, strictement définie positive. Ce sont toutes des vérifications immédiates. Par exemple pour la symétrique, nous avons $\sum_i x_i y_i = \sum_i y_i x_i$. □

Calculons par exemple le produit scalaire de deux vecteurs de la base canonique : $\langle e_i, e_j\rangle$. En utilisant la formule de définition et le fait que $(e_i)_k = \delta_{ik}$, nous avons

$$\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}\delta_{jk}. \tag{8.338}$$

Nous pouvons effectuer la somme sur k en remarquant qu'à cause du δ_{ik}, seul le terme avec $k = i$ n'est pas nul. Effectuer la somme revient donc à remplacer tous les k par des i :

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ii}\delta_{ji} = \delta_{ji}. \tag{8.339}$$

Une des propriétés intéressantes du produit scalaire est qu'il permet de décomposer un vecteur dans une base, comme nous le montre la proposition suivante.

PropScalCompDec

Proposition 8.169.
Si nous notons v_i *les composantes du vecteur* v*, c'est-à-dire si* $v = \sum_{i=1}^{m} v_i e_i$*, alors nous avons* $v_j = \langle v, e_j\rangle$.

Démonstration.

$$v \cdot e_j = \sum_{i=1}^{m} \langle v_i e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{m} v_i \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{m} v_i \delta_{ij} \tag{8.340}$$

Eqvejscalcomp

En effectuant la somme sur i dans le membre de droite de l'équation (8.340), tous les termes sont nuls sauf celui où $i = j$; il reste donc

$$v \cdot e_j = v_j. \tag{8.341}$$

□

[65] Définition 8.163.
[66] Définition 8.125.

Le produit scalaire ne dépend en réalité pas de la base orthogonale choisie.

LEMooZMCWooDfbrIq

Lemme 8.170.
Si $\{e_i\}$ est la base canonique, et si $\{f_i\}$ est une autre base orthonormale[67]*, alors si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$, nous avons*

$$\sum_i u_i v_j = \sum_i u'_i v'_j \tag{8.342}$$

où u_i sont les composantes de u dans la base $\{e_i\}$ et u'_i sont celles dans la base $\{f_i\}$.

Démonstration. La preuve demande un peu d'algèbre linéaire. Étant donné que $\{f_i\}$ est une base orthonormale, il existe une matrice A orthogonale ($AA^t = \mathbb{1}$) telle que $u'_i = \sum_j A_{ij}u_j$ et idem pour v. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\sum_i u'_i v'_j &= \sum_i \left(\sum_j A_{ij}u_j \right) \left(\sum_k A_{ik}v_k \right) \\
&= \sum_{ijk} A_{ij}A_{ik}u_j v_k \\
&= \sum_{jk} \underbrace{\sum_i (A^t)_{ji}A_{ik}}_{=\delta_{jk}} u_j v_k \\
&= \sum_{jk} \delta_{jk} u_j v_k \\
&= \sum_k u_k v_k.
\end{aligned} \tag{8.343}$$

□

Cette proposition nous permet de réellement parler du produit scalaire entre deux vecteurs de façon intrinsèque sans nous soucier de la base dans laquelle nous exprimons les vecteurs.

8.11.1 Hermitien, unitaire, etc.

DefMZQxmQ

Définition 8.171 ([333]).
*Soit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une application $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ est **sesquilinéaire à droite** si pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,*

(1) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \bar{\lambda} y \rangle$,

(2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

(3) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

Définitions supplémentaires :

- *La forme $\langle .,. \rangle$ est **hermitienne** si de plus*

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}. \tag{8.344}$$

- *Un **produit hermitien** est une forme hermitienne strictement définie positive, c'est-à-dire telle que $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in E$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

PROPooRPRRooRYEMCB

Proposition-Définition 8.172.
Soit un espace hermitien $(E, \langle .,. \rangle)$. Soit un opérateur linéaire $A \in \mathrm{End}(E)$. Il existe un unique opérateur $B \in \mathrm{End}(E)$ tel que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle \tag{8.345}$$

pour tout $x, y \in E$.

*L'opérateur B ainsi défini est noté $A^\dagger$ et est nommé **hermitien conjugué** de A.*

LEMooBOXMooSDyCfm

Lemme 8.173.
Au niveau des matrices, nous avons

$$A^\dagger_{ij} = A^*_{ji} \tag{8.346}$$

où z^* est le conjugué complexe.

[67] Définition 8.165.

DEFooKEBHooWwCKRK

Définition 8.174.
Quelque définitions.

(1) *Un opérateur A est **hermitien** si $A^\dagger = A$.*

(2) *Un opérateur A est **unitaire** si $A^\dagger = A^{-1}$.*

Note : le conjugué hermitien est parfois noté A^* au lieu de $A^\dagger$.

8.175.
Le mot « hermitien » est réservé aux opérateurs sur des espaces hermitiens, c'est-à-dire des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Le mot « autoadjoint » par contre est plutôt utilisé dans le cadre d'opérateurs sur les espaces réels. En conséquence de quoi, ces deux mots sont synonymes, mais il est préférable d'utiliser « hermitien » lorsque l'espace vectoriel est sur $\mathbb{C}$ et « autoadjoint » lorsqu'il est sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des opérateurs autoadjoints de E est noté $\mathrm{S}(E)$. Cette notation provient du fait que dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, les opérateurs autoadjoints sont les matrices symétriques.

Remarque 8.176.
Le fait d'être hermitien n'implique en rien le fait d'être inversible.

8.177.
Les normes associées aux produits scalaires font intervenir une racine carré, et donc devront être données plus tard. Voir le thème 25.

PROPooMWUCooMbJuaJ

Proposition 8.178 ([1]).
Nous considérons $\mathbb{C}^n$ vu comme espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.

(1) *La formule, pour $x, y \in \mathbb{C}^n$,*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k \tag{8.347}$$

EqFormSesqQrjyPH

définit une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^n$.

(2) *L'ensemble $\mathbb{C}^n$ devient un espace vectoriel hermitien.*

8.11.2 Éléments de matrice

PROPooZKWXooWmEzoA

Proposition 8.179.
Soit une application linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Nous considérons le produit scalaire usuel[68] *sur $\mathbb{R}^n$. Alors :*

(1) *Les éléments de matrice de A sont donnés par $A_{ij} = e_i \cdot Ae_j$.*

(2) *Nous avons la formule $x \cdot Ay = \sum_{kl} A_{kl} x_k y_l$.*

Démonstration. Pour Ae_j nous utilisons la formule 4.91 avec des notations plus décontractées : $Ae_j = \sum_k A_{kj} e_k$. Ensuite nous faisons un calcul avec la formule (8.337) :

$$e_i \cdot Ae_j = e_i \cdot \sum_k A_{kj} e_k = \sum_k A_{kj} \delta_{i,k} = A_{ij}. \tag{8.348}$$

La seconde formule à prouver est du même tonneau, en utilisant cette fois la formule (4.92) :

$$x \cdot Ay = \sum_k x_k (Ay)_k = \sum_{kl} x_k A_{kl} y_l = \sum_{kl} A_{kl} x_k y_l. \tag{8.349}$$

□

La proposition suivante est une version plus « pragmatique » de la proposition 4.144.

PROPooNITTooCYcrrT

Proposition 8.180 ([162]).
Soient un espace euclidien[69] *de dimension finie V ainsi qu'un sous-espace M. Nous posons*

$$M^\perp = \{x \in V \text{ tel que } x \cdot y = 0 \forall y \in M\}. \tag{8.350}$$

Alors $M \oplus M^\perp = V$.

[68] Définition 8.168.
[69] Qui possède un produit scalaire, définition 8.167.

Démonstration. D'abord si $x \in M \cap M^\perp$, alors $x \cdot x = 0$ et donc $x = 0$. Donc nous avons déjà $M \cap M^\perp = \{0\}$. Nous considérons une base $\{b_1, \dots, b_k\}$ de M, et nous définissons l'application linéaire

$$\begin{aligned} f\colon V &\to \mathbb{R}^k \\ x &\mapsto (x \cdot b_1, \dots, x \cdot b_k). \end{aligned} \tag{8.351}$$

Nous avons que $M^\perp = \ker(f)$. Le théorème du rang 4.49 nous indique que

$$\dim(V) = \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\text{Image}(f)\big) \leqslant \dim(M^\perp) + k = \dim(M^\perp) + \dim(M). \tag{8.352}$$

Une justification : vu que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^k$, la dimension de son image est majorée par k.

Nous en déduisons que

$$\dim(M) + \dim(M^\perp) \geqslant \dim(V), \tag{8.353}$$

et la proposition 4.152 nous permet de conclure que $M \oplus M^\perp = V$. □

8.11.3 Transposée : pas d'approche naïve

SUBSECooGPXVooEYwIiJ

Il est légitime, si $t\colon E \to E$ est une application linéaire, de dire que sa transposée soit l'application linéaire $t^t\colon E \to E$ dont la matrice est la matrice transposée de celle de t. Lorsque nous travaillons sur $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique, cela ne pose pas de problème et nous pouvons écrire des égalités du type $\langle x, Ay\rangle = \langle A^t x, y\rangle$.

PROPooNARVooEuhweD

Proposition 8.181 (Matrice transposée et produit scalaire)**.**
Soit une matrice réelle A. En utilisant l'application linéaire associée[70] *$f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, nous avons*

$$x \cdot f_A(y) = f_{A^t}(x) \cdot y. \tag{8.354}$$

Cette formule est souvent écrite $x \cdot Ay = A^t x \cdot y$ ou $\langle x, Ay\rangle = \langle A^t x, y\rangle$.

Démonstration. Il s'agit d'un calcul utilisant la formule (4.86) et le produit scalaire (8.337) :

$$x \cdot f_A(y) = \sum_i x_i \big(f_A(y)\big)_i = \sum_i x_i \sum_j A_{ij} y_j = \sum_{ij} A^t_{ji} x_i y_j = \sum_j f_{A^t}(x)_j y_j = f_{A^t}(x) \cdot y. \tag{8.355}$$

□

Hélas nous allons voir que cette façon de définir une transposée est mauvaise.

Soit une application linéaire $t\colon E \to E$ de matrice A dans la base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ et de matrice B dans la base $\{f_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$. Nous notons Q la matrice de passage d'une base à l'autre :

$$e_i = \sum_\alpha Q^{-1}_{\alpha i} f_\alpha. \tag{8.356}$$

Nous nommons t_1 l'application linéaire associée à A^t dans la base $\{e_i\}$ et t_2 l'application linéaire associée à la matrice B^t dans la base $\{f_\alpha\}$. Définir la transposée d'une application linéaire comme étant l'application linéaire associée à la transposée de sa matrice ne sera une bonne définition que si $t_1 = t_2$.

La première chose facile à voir est

EQooAMHPooUQEkJo

$$t_1(e_i)_j = \sum_k (A^t)_{jk} (e_i)_k = A^t_{ji} = A_{ij}. \tag{8.357}$$

Pour calculer $t_2(e_i)_j$, c'est un peu plus laborieux :

$$t_2(e_i) = \sum_\alpha Q^{-1}_{\alpha i} t_2(f_\alpha) = \sum_{\beta\gamma\alpha} Q^{-1}_{\alpha i} B^t_{\gamma\beta} \underbrace{(f_\alpha)_\beta}_{\delta_{\alpha\beta}} f_\gamma = \sum_{\beta\gamma} Q^{-1}_{\beta i} B^t_{\gamma\beta} f_\gamma \tag{8.358a}$$

$$= \sum_{j\gamma} (B^t Q^{-1})_{\gamma i} Q_{j\gamma} e_j \tag{8.358b}$$

$$= \sum_j (QB^t Q^{-1})_{ji} e_j. \tag{8.358c}$$

Donc $t_2(e_i)_j = (QB^tQ^{-1})_{ji}$. En tenant compte du fait que $B = Q^{-1}AQ$ nous avons

$$t_2(e_i)_j = (QQ^t A^t (Q^{-1})^t Q^{-1})_{ji}. \tag{8.359}$$

[70] Définition 4.72. Ici nous considérons la base canonique sur $\mathbb{R}^n$

Ceci est égal à l'expression (8.357) lorsque $Q^t = Q^{-1}$. Nous voyons que confondre transposée d'une application linéaire avec transposée de la matrice associée n'est valable que si nous sommes certain de ne considérer que des changements de base par des matrices orthogonales.

C'est la situation typique dans laquelle nous nous trouvons lorsque nous considérons des applications linéaires sur $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique, et que nous n'avons aucune intention de changer de base, et encore moins de chercher une base non orthonormale. Cette situation est clairement la situation la plus courante.

Exemple 8.182 ([119]).
Soit la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Nous considérons l'application linéaire $t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$t(e_1) = e_1 \tag{8.360a}$$
$$t(e_2) = 0. \tag{8.360b}$$

La matrice de t dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.361}$$

Elle est symétrique : elle vérifie $A^t = A$. Si nous comptions sur la transposée de matrice pour définir la transposée de t, nous aurions $t^t = t$.

Soit maintenant la base $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$. Nous avons $t(f_1) = f_1$ et

$$t(f_2) = t(e_1) + t(e_2) = e_1 = f_1. \tag{8.362}$$

Donc la matrice de t dans cette base est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.363}$$

Et là, nous avons $B^t \neq B$. Donc en comptant sur cette base pour définir la transposée de t nous aurions $t^t \neq t$. △

NooMZVRooExWVKJ

8.183.
Autrement dit, la façon « usuelle » de voir la transposée d'une application linéaire, ne fonctionne dans les livres pour enfants uniquement parce qu'on y considère toujours $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique ou de bases orthonormées.

Notons que nous avons tout de même les notions d'opérateur adjoint et autoadjoint pour parler d'application orthogonale sans passer par la transposée, voir 8.41.

8.11.4 Transposée : la bonne approche

DefooZLPAooKTITdd

Définition 8.184.
*Si $f\colon E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels, la **transposée** est l'application $f^t\colon F^* \to E^*$ donnée par*

$$f^t(\omega)(x) = \omega\big(f(x)\big). \tag{8.364}$$

pour tout $\omega \in F^*$ et $x \in E$.

PROPooFAVAooDevBrT

Proposition 8.185 (transposée et conjuguée[1]).
Soit une application linéaire $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ainsi que l'isomorphisme canonique $\phi\colon \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$. Nous avons

$$A^\dagger = \phi \circ A^t \circ \phi \tag{8.365}$$

où A^t est l'opérateur transposé, défini en 8.184, et $A^\dagger$ est l'hermitien conjugué défini en 8.172.

NORMooFUZYooWeXjp

8.186.
Étant données les propositions 8.185, le fait que l'isomorphisme soit canonique, que la matrice de l'hermitien conjugué est la matrice transposée (dans le cas réel, par le lemme 8.173), nous écrirons souvent A^t pour $A^\dagger$, et donc nous écrirons des égalités comme

$$x \cdot Ay = A^t x \cdot y \tag{8.366}$$

alors qu'il faudrait écrire

$$x \cdot Ay = A^\dagger x \cdot y \tag{8.367}$$

Notons également que cette remarque est une raison pour laquelle je préfère noter A^t au lieu de ${}^tA$.

LEMooEMNNooPquZMg

Lemme 8.187.
Soit E muni de la base $\{e_i\}$ et F muni de la base $\{g_i\}$ et une application $f\colon E \to F$. Si A est la matrice de f dans ces bases, alors A^t est la matrice de f^t dans les bases $\{e_i^*\}$ et $\{g_i^*\}$ de E^* et F^*.

Autrement dit, en utilisant l'application $\psi\colon \mathbb{M} \to \mathcal{L}(F^*, E^*)$ de la proposition 4.75,

$$\psi(A^t) = f^t. \tag{8.368}$$

Démonstration. Attention aux indices, ça va chauffer[71].

Nous allons montrer que $f^t = \psi(A^t)$ sur la base $\{g_i^*\}$, et pour cela nous appliquons $f^t(g_i^*)$ à $x \in E$:

$$\begin{aligned}
f^t(g_i^*)x &= g_i^*\big(f(x)\big) && \text{Définition 8.184} && (8.369a)\\
&= g_i^*\big(\sum_k x_k f(e_k)\big) && && (8.369b)\\
&= g_i^*\big(\sum_{kl} x_k A_{lk} g_l\big) && \text{eq. (4.91)} && (8.369c)\\
&= \sum_{kl} x_k A_{lk} \underbrace{g_i^*(g_l)}_{=\delta_{i,l}} && && (8.369d)\\
&= \sum_k x_k A_{ik} && && (8.369e)\\
&= \sum_k (A^t)_{ki} x_k && && (8.369f)\\
&= \sum_k (A^t)_{ki} e_k^*(x). && && (8.369g)
\end{aligned}$$

Voilà. Donc nous avons

$$f^t(g_i^*) = \sum_k (A^t)_{ki} e_k^* = \psi(A^t) g_i^*. \tag{8.370}$$

□

8.188.
Intuitivement, les rangs de f et de f^t sont égaux parce que le rang est donné par la plus grande matrice carrée de déterminant non nul.

Nous donnons maintenant une vraie preuve de ce résultat.

LemSEpTcW

Lemme 8.189 ([334]).
Si $f\colon E \to F$ est une application linéaire, alors

$$\mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}(f^t). \tag{8.371}$$

Démonstration. Soient $n = \dim(E)$ et $r = \dim(F)$. Nous posons $\dim\ker(f) = p$ et donc $\mathrm{rk}(f) = n - p$. Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base de $\ker(f)$ que l'on complète en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E. Nous considérons maintenant les vecteurs

$$g_i = f(e_{p+i}) \tag{8.372}$$

pour $i = 1, \dots, n-p$. C'est-à-dire que les g_i sont les images des vecteurs qui ne sont pas dans le noyau de f. Prouvons qu'ils forment une famille libre. Si

$$\sum_{k=1}^{n-p} a_k f(e_{p+k}) = 0, \tag{8.373}$$

alors $f\big(\sum_k a_k e_{p+k}\big) = 0$, c'est-à-dire $\sum_k a_k e_{p+k} \in \ker(f)$. Comme une base de $\ker(f)$ est $\{e_1, \dots, e_p\}$, il existe des b_l tels que $\sum_k a_k e_{p+k} = \sum_{l=1}^{p} b_l e_l$. Autrement dit,

$$\sum_k a_k e_{p+k} - \sum_{l=1}^{p} b_l e_l = 0, \tag{8.374}$$

qui est une combinaison linéaire nulle des e_i. Donc $a_k = b_l = 0$ pour tout k et l. Tout ça pour dire que les $\{g_i\}_{i=1,\dots,n-p}$ est libre.

[71] Et merci à Alain Vigne pour m'avoir fait remarquer qu'il fallait mettre de l'ordre dans les indices.

Étant donné que les vecteurs $g_1, \dots, g_{n-p}$ sont libres, nous pouvons les compléter en une base de F :

$$\{\underbrace{g_1, \dots, g_{n-p}}_{\text{images}}, \underbrace{g_{n-p+1}, \dots, g_r}_{\text{complétion}}\}. \tag{8.375}$$

Nous prouvons maintenant que $\mathrm{rk}(f^t) \geqslant n-p$ en montrant que les formes $\{g_i^*\}_{i=1,\dots,n-p}$ forment une partie libre (et donc l'espace image de f^t est au moins de dimension $n-p$). Pour cela nous prouvons que $f^t(g_i^*) = e_{i+p}^*$. En effet

$$f^t(g_i^*)(e_k) = g_i^*(f(e_k)), \tag{8.376}$$

Si $k = 1, \dots, p$, alors $f(e_k) = 0$ et donc $g_i^*(f(e_k)) = 0$; si $k = p + l$ alors

$$f^t(g_i^*)(e_k) = g_i^*(f(e_{k+l})) = g_i^*(g_l) = \delta_{i,l} = \delta_{i,k-p} = \delta_{k,i+p}. \tag{8.377}$$

Donc $f^t(g_i^*) = e_{i+p}^*$. Cela prouve que les formes $f^t(g_i^*)$ sont libres et donc que

$$\mathrm{rk}(f^t) \geqslant n - p = \mathrm{rk}(f). \tag{8.378}$$

En appliquant le même raisonnement à f^t au lieu de f, nous trouvons

$$\mathrm{rk}\left((f^t)^t\right) \geqslant \mathrm{rk}(f^t) \tag{8.379}$$

et donc, sachant que $(f^t)^t = f$, nous obtenons $\mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}(f^t)$.

□

PropWOPIooBHFDdP

Proposition 8.190 ([335]).
Si f est une application linéaire entre les espaces vectoriels E et F, alors nous avons

$$\mathrm{Image}(f^t) = \ker(f)^\perp. \tag{8.380}$$

Démonstration. Soient donc l'application $f\colon E \to F$ et sa transposée $f^t\colon F^* \to E^*$. Nous commençons par prouver que $\mathrm{Image}(f^t) \subset (\ker f)^\perp$. Pour cela nous prenons $\omega \in \mathrm{Image}(f^t)$, c'est-à-dire $\omega = \alpha \circ f$ pour un certain élément $\alpha \in F^*$. Si $z \in \ker(f)$, alors $\omega(z) = (\alpha \circ f)(z) = 0$, c'est-à-dire que $\omega \in (\ker f)^\perp$.

Pour prouver qu'il y a égalité, nous n'allons pas démontrer l'inclusion inverse, mais plutôt prouver que les dimensions sont égales. Après, on sait que si $A \subset B$ et si $\dim A = \dim B$, alors $A = B$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\dim\left(\mathrm{Image}(f^t)\right) &= \mathrm{rk}(f^t) && && \text{(8.381a)}\\
&= \mathrm{rk}(f) && \text{lemme 8.189} && \text{(8.381b)}\\
&= \dim(E) - \dim\ker(f) && \text{théorème 4.49} && \text{(8.381c)}\\
&= \dim\left((\ker f)^\perp\right) && \text{proposition 4.144.} && \text{(8.381d)}
\end{aligned}$$

□

Lemme 8.191 ([153]).
Soit $\mathbb{K}$ un corps, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et une application linéaire $f\colon E \to F$. L'application f est injective si et seulement si sa transposée[72] f^t est surjective.

Démonstration. Supposons que f soit injective. Alors par le lemme 4.60, il existe $g\colon F \to E$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}\,|_E$. Nous avons alors aussi $(g \circ f)^t = \mathrm{Id}\,|_{E^*}$, mais $(g \circ f)^t = f^t \circ g^t$, donc f^t est surjective.

Inversement, nous supposons que $f^t\colon F^* \to E^*$ est surjective. Alors en nous souvenant que E et F sont de dimension finie et en faisant jouer les identifications $(f^t)^t = f$ et $(E^*)^* = E$ nous savons qu'il existe $s\colon E^* \to F^*$ tel que $f^t \circ s = \mathrm{Id}\,|_{E^*}$. En passant à la transposée,

$$s^t \circ f = \mathrm{Id}\,|_E, \tag{8.382}$$

qui implique que f est injective. □

8.11.5 Polynômes de Lagrange

Lemme-Définition 8.192.
Soit $E = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. Soient $n+1$ réels distincts $a_0, \dots, a_n$. Nous considérons les formes linéaires associées $f_i \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})^*$,

$$f_i(P) = P(a_i). \tag{8.383}$$

La partie $\{f_1, \dots, f_n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})^*$.

*Les **polynômes de Lagrange** aux points (a_i) sont les polynômes de la base préduale de la base $\{f_i\}$.*

[72] Définition 8.184.

Démonstration. Nous prouvons que l'orthogonal est réduit au singleton nul :

$$\text{Span}\{f_0,\dots,f_n\}^\perp = \{0\}. \tag{8.384}$$

La proposition 4.144 conclura. Si $P \in \text{Span}\{f_i\}^\perp$, alors $f_i(P) = 0$ pour tout i, ce qui fait que $P(a_i) = 0$ pour tout $i = 0,\dots,n$. Un polynôme de degré au plus n qui s'annule en $n+1$ points est automatiquement le polynôme nul. □

Proposition 8.193.
Les polynômes de Lagrange aux points $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ sont donnés par

$$P_i = \prod_{k\neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}. \tag{8.385}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que $f_j(P_i) = \delta_{i,j}$. Nous avons

$$f_j(P_i) = P_i(a_j) = \prod_{k\neq i} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k}. \tag{8.386}$$

Si $j \neq i$ alors un des termes est nul. Si au contraire $i = j$, tous les termes valent 1. □

8.11.6 Dual de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$

PropHOjJpCa

Proposition 8.194 ([128]).
Soit $\mathbb{K}$, un corps. Les formes linéaires sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ sont les applications de la forme

$$\begin{aligned} f_A\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ M &\mapsto \text{Tr}(AM). \end{aligned} \tag{8.387}$$

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{K}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{K})^* \\ A &\mapsto f_A \end{aligned} \tag{8.388}$$

et nous voulons prouver que c'est une bijection. Étant donné que nous sommes en dimension finie, nous avons égalité des dimensions de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ et $(\mathbb{M}(n,\mathbb{K}))^*$, et il suffit de prouver que f est injective. Soit donc A telle que $f_A = 0$. Nous l'appliquons à la matrice $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$:

$$0 = f_A(E_{ij}) = \sum_k (AE_{ij})_{kk} = \sum_{kl} A_{kl}(E_{ij})_{lk} = \sum_{kl} A_{kl}\delta_{il}\delta_{jk} = A_{ji}. \tag{8.389}$$

Donc $A = 0$. □

Corolaire 8.195 ([128]).
Soient un corps $\mathbb{K}$ ainsi qu'une application $\phi \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})^*$ telle que pour tout $M, N \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ on ait

$$\phi(MN) = \phi(NM). \tag{8.390}$$

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\phi = \lambda\,\text{Tr}$.

Démonstration. La proposition 8.194 nous donne une matrice $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ telle que $\phi = f_A$. L'hypothèse nous dit que $f_A(MN) = f_A(NM)$, c'est-à-dire

$$\text{Tr}(AMN) = \text{Tr}(ANM) \tag{8.391}$$

pour toutes matrices $M, N \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$. L'invariance cyclique de la trace[73] appliqué au membre de droite nous donne $\text{Tr}(AMN) = \text{Tr}(MAN)$, ce qui signifie que

$$\text{Tr}\big((AM - MA)N\big) = 0 \tag{8.392}$$

ou encore que $f_{AM-MA} = 0$, et ce, pour toute matrice M. La fonction f étant injective nous en déduisons que la matrice A doit satisfaire

$$AM = MA \tag{8.393}$$

[73] Lemme 4.69.

pour tout $M \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$. En particulier, en prenant pour M les fameuses matrices E_{ij} et en calculant un peu,

$$A_{li}\delta_{j,m} = \delta_{i,l}A_{jm} \tag{8.394}$$

pour tout i,j,l,m. Cela implique que $A_{ll} = A_{mm}$ pour tout l et m et que $A_{jm} = 0$ dès que $j \neq m$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda\mathbb{1}$. En fin de compte,

$$\phi(X) = f_{\lambda\mathbb{1}}(X) = \lambda \operatorname{Tr}(X). \tag{8.395}$$

□
CorICUOooPsZQrg

Corolaire 8.196 ([128]).
Soit $\mathbb{K}$ un corps. Tout hyperplan de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ coupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$. Il existe une forme linéaire ϕ sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{H} = \ker(\phi)$. Encore une fois la proposition 8.194 nous donne $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ telle que $\phi = f_A$; nous notons r le rang de A. Par le lemme 4.118 nous avons $A = PJ_rQ$ avec $P,Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ et

$$J_r = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.396}$$

Pour tout $M \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ nous avons

$$\phi(M) = \operatorname{Tr}(AM) = \operatorname{Tr}(PJ_rQM) = \operatorname{Tr}(J_rQMP), \tag{8.397}$$

la dernière égalité découlant de l'invariance cyclique de la trace[74]. Ce que nous cherchons est $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ telle que $\phi(M) = 0$. Nous commençons par trouver $N \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ telle que $\operatorname{Tr}(J_rN) = 0$. Celle-là est facile : c'est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbb{1}_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.398}$$

Les éléments diagonaux de J_rN sont tous nuls. Par conséquent en posant $M = Q^{-1}NP^{-1}$ nous avons notre matrice inversible dans le noyau de ϕ. □

8.12 Diagonalisation et trigonalisation

Ici encore $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

8.12.1 Matrices semblables

PROPooXGXTooQNAAxw

Proposition-Définition 8.197 (Matrices équivalentes).
Nous définissons, sur l'ensemble $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la relation $A \sim B$ si et seulement si il existe des matrices inversibles P et Q telles que $A = PBQ^{-1}$.

Cette relation est une relation d'équivalence.

Deux telles matrice sont dite ***équivalentes****.*

Démonstration. Il faut vérifier les points de la définition 1.50. D'abord $A \sim A$ en prenant $P = Q = \mathbb{1}$. Si $A \sim B$, alors il existe des matrices P et Q telles que $A = PBQ^{-1}$. En multipliant) gauche par P^{-1} et à droite par Q nous trouvons $B = P^{-1}AQ$, ce qui montre que $B \sim A$ par les matrices P^{-1} et Q^{-1}. Enfin si $A \sim B$ et $B \sim C$, nous avons des matrices P,Q,R,S tells que $A = PBQ^{-1}$ et $B = RCS^{-1}$. Nous avons alors

$$A = PBQ^{-1} = P(RCS^{-1})Q^{-1} = (PR)C(QS)^{-1}. \tag{8.399}$$

Donc A et C sont équivalentes par les matrices PR et $(QS)^{-1}$. □
DefCQNFooSDhDpB

Proposition-Définition 8.198 (matrices semblables[1]).
Nous définissons, sur l'ensemble $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la relation $A \sim B$ si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Cette relation est une relation d'équivalence.

Deux matrices équivalentes en ce sens sont dites ***semblables****.*

Démonstration. Comme 8.197, mais en plus facile parce qu'il n'y a qu'une seule matrice au lieu de deux. □

[74] Lemme 4.69.

PROPooIXFSooZsFWHm

Proposition-Définition 8.199 (Applications linéaires semblables)**.**
Soit un espace vectoriel E. Nous définissons sur $\mathrm{End}(E)$ *la relation $f \sim g$ si et seulement si il existe une application inversible $u\colon E \to E$ telle que $f = u^{-1} \circ g \circ u$.*

Cette relation est une relation d'équivalence.

Deux endomorphismes équivalents en ce sens sont dits ***semblables****.*

Démonstration. Toujours la même chose que 8.197. □

PROPooBGJBooXlDYEv

Proposition 8.200.
Deux applications linéaires sont semblables si et seulement si leurs matrices sont semblables dans une base.

Dans ce cas, les matrices sont semblables dans toutes les bases.

Démonstration. Supposons que $f \sim g$. Il existe un endomorphisme inversible u tel que $f = u^{-1} \circ g \circ u$. En vertu de la proposition 4.78, l'application qui a une application linéaire fait correspondre sa matrice est un morphisme d'algèbres. Donc si A est la matrice de f, si B est celle de g et X celle de u, nous avons

$$A = X^{-1}BX, \tag{8.400}$$

ce qui montre que $A \sim B$. □

LEMooKUHJooDfNKeg

Lemme 8.201.
Le polynôme caractéristique[75] *est un invariant sous les similitudes.*

Démonstration. En effet si P est une matrice inversible,

$$\begin{aligned}
\chi_{P^{-1}AP} &= \det(P^{-1}AP - \lambda X\mathbb{1}) && \text{(8.401a)}\\
&= \det\big(P(P^{-1}AP - \lambda X\mathbb{1})P^{-1}\big) && \text{(8.401b)}\\
&= \det(A - \lambda X\mathbb{1}) && \text{(8.401c)}\\
&= \chi_A. && \text{(8.401d)}
\end{aligned}$$

□

La permutation de lignes ou de colonnes ne sont pas des similitudes, comme le montrent les exemples suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. \tag{8.402}$$

Nous avons $\chi_A = X^2 - 5X - 2$ tandis que $\chi_B = X^2 - 5X + 2$ alors que le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

8.12.2 Trace de matrices semblables

PROPooRMYQooWkEpJJ

Proposition 8.202 ([1])**.**
Invariance de la trace par similarité.

(1) Soit une application linéaire f. Si la matrice de f dans une base est A et est B dans une autre base, alors

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B). \tag{8.403}$$

(2) Deux opérateurs semblables[76] *ont même trace.*

Démonstration. Les matrices A et B sont liées par la proposition 4.125 : $B = Q^{-1}AQ$ où Q est la matrice qui lie les vecteurs des deux bases. L'invariance cyclique de la trace donnée en le lemme 4.69 implique que

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(Q^{-1}AQ) = \mathrm{Tr}(QQ^{-1}A) = \mathrm{Tr}(A). \tag{8.404}$$

□

LEMooXXEYooKHyQjb

Lemme 8.203.
Soit une matrice A. Nous avons

$$\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \sum_{ij} |A_{ij}|^2. \tag{8.405}$$

[75] Définition 8.109.
[76] Opérateurs semblables, définition 8.198

Démonstration. Utilisant la proposition 8.173 pour les éléments de la matrice $A^\dagger$, nous avons

$$\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \sum_k (A^\dagger A)_{kk} = \sum_{kl} A^*_{lk} A_{lk} = \sum_{kl} |A_{lk}|^2. \tag{8.406}$$

□

LEMooQXFQooLGPcIt

Lemme 8.204 ([336])**.**
Si les matrices A et B sont unitairement semblables[77]*, alors*

$$\sum_{ij} |A_{ij}|^2 = \sum_{ij} |B_{ij}|^2. \tag{8.407}$$

Démonstration. Soit une matrice unitaire U telle que $B = UAU^\dagger$. Nous savons par le proposition 8.202 que des matrices semblables ont même trace. Or $B^\dagger B$ est unitairement semblable à $A^\dagger A$ parce que

$$B^\dagger B = UA^\dagger U^\dagger UAU^\dagger = UA^\dagger AU^\dagger. \tag{8.408}$$

Donc $\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \mathrm{Tr}(B^\dagger B)$. Le lemme 8.203 conclut. □

8.12.3 Endomorphismes nilpotents

DEFooHDFBooSbMgZN

Définition 8.205.
*La **trace** d'une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est la somme de ses éléments diagonaux :*

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}. \tag{8.409}$$

Une propriété importante est son invariance cyclique.

LemhbZTay

Lemme 8.206.
Quelques propriétés de la trace.

ITEMooBRUGooFWQDss

(1) Si A et B sont des matrices carrées, alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

(2) La trace est un invariant de similitude.

Démonstration. C'est un simple calcul :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{ik} A_{ik}B_{ki} = \sum_{ik} A_{ki}B_{ik} = \sum_{ik} B_{ik}A_{ki} = \sum_i (BA)_{ii} = \mathrm{Tr}(BA) \tag{8.410}$$

où nous avons simplement renommé les indices $i \leftrightarrow k$.

En particulier, la trace est un invariant de similitude parce que $\mathrm{Tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{Tr}(A^{-1}AB) = \mathrm{Tr}(B)$ par l'invariance cyclique démontrée en 4.69(2). □

PROPooSQLOooCbTQOC

Proposition-Définition 8.207.
Soit un espace vectoriel de dimension finie E. Soit une application linéaire $f : E \to E$. Nous considérons deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ pour E. Les matrices A et B sont celles de f dans ces deux bases.

Alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

*Ce nombre est appelé **trace** de f.*

Démonstration. La proposition 4.125 nous dit que les matrices A et B sont liées par $A = QBQ^{-1}$ pour une certaine matrice Q. Nous avons alors, en utilisant 8.206(1),

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(QBQ^{-1}) = \mathrm{Tr}(Q^{-1}QB) = \mathrm{Tr}(B). \tag{8.411}$$

□

PROPooLSBZooKGfeFI

Proposition 8.208.
Si la matrice est diagonalisable, alors la trace est la somme des valeurs propres.

LemzgNOjY

Lemme 8.209 ([137])**.**
L'endomorphisme $u \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ est nilpotent si et seulement si $\mathrm{Tr}(u^p) = 0$ pour tout p.

[77] Définition 8.198.

Démonstration. Supposons que u est nilpotent. Alors ses valeurs propres sont toutes nulles et celles de u^p le sont également. La trace étant la somme des valeurs propres, nous avons alors tout de suite $\mathrm{Tr}(u^p)=0$.

Supposons maintenant que $\mathrm{Tr}(u^p)=0$ pour tout p. Le polynôme caractéristique (8.236) est

$$\chi_u=(-1)^nX^\alpha(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\dots(X-\lambda_r)^{\alpha_r}. \tag{8.412}$$ EqfnCqWq

où les λ_i $(i=1,\dots,r)$ sont les valeurs propres non nulles distinctes de u.

Il est vite vu que le coefficient de X^{n-1} dans χ_u est $-\mathrm{Tr}(u)$ parce que le coefficient de X^{n-1} se calcule en prenant tous les X sauf une fois $-\lambda_i$. D'autre part le polynôme caractéristique de u^p est le même que celui de u, en remplaçant λ_i par λ_i^p ; cela est dû au fait que si v est vecteur propre de valeur propre λ, alors $u^pv=\lambda^pv$.

Par l'équation (8.412), nous voyons que le coefficient du terme X^{n-1} dans le polynôme caractéristique est

$$0=\mathrm{Tr}(u^p)=\alpha_1\lambda_1^p+\cdots+\alpha_r\lambda_r^p. \tag{8.413}$$ eqSoDSKH

Donc les nombres $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ sont une solution non triviale[78] du système EqDpvTnu

$$\begin{cases}\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_rX_r=0 & (8.414a)\\ \quad\vdots & (8.414b)\\ \lambda_1^rX_1+\cdots+\lambda_r^rX_r=0. & (8.414c)\end{cases}$$

Ce sont les équations (8.413) écrites pour $p=1,\dots,r$. Le déterminant de ce système est

$$\lambda_1\dots\lambda_r\det\begin{pmatrix}1&\dots&1\\ \lambda_1&\dots&\lambda_r\\ \vdots&&\vdots\\ \lambda_1^{r-1}&\dots&\lambda_r^{r-1}\end{pmatrix}\neq0, \tag{8.415}$$

qui est un déterminant de Vandermonde (proposition 4.126) valant

$$0=\lambda_1\dots\lambda_r\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r}(\lambda_i-\lambda_j). \tag{8.416}$$

Étant donné que les λ_i sont distincts et non nuls, nous avons une contradiction et nous devons conclure que $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ était une solution triviale du système (8.414). □

PropMWWJooVIXdJp

Proposition 8.210 ([337]).
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Un endomorphisme $u\in\mathrm{End}(E)$ est nilpotent si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est strictement triangulaire supérieure.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ Nous faisons la démonstration par récurrence sur la dimension de E. Lorsque $n=1$ nous avons $u=(a)$ avec $a\in\mathbb{K}$. Puisque $a^k=0$ pour un certain k nous avons $a=0$ parce qu'un corps est toujours un anneau intègre[79].

Lorsque $\dim(E)=n$ nous savons que u a un noyau non réduit au vecteur nul (parce qu'il est nilpotent). Soit donc un vecteur non nul $x\in\ker(u)$ et une base

$$\{x,e_2,\dots,e_n\} \tag{8.417}$$

donnée par le théorème de la base incomplète 4.14. La matrice de u dans cette base s'écrit

$$\left(\begin{array}{c|ccc}0&*&*&*\\ \hline 0&\multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{A}}\\ 0&&&\\ 0&&&\end{array}\right). \tag{8.418}$$

Un tout petit peu de calcul de produit de matrice montre que la matrice de u^k est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|ccc}0&*&*&*\\ \hline 0&\multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{A^k}}\\ 0&&&\\ 0&&&\end{array}\right). \tag{8.419}$$

[78] Si $\alpha_1=\dots=\alpha_r=0$, alors les valeurs propres sont toutes nulles et la matrice est en réalité nulle dès le départ.
[79] Lemme 1.336.

Étant donné que l'endomorphisme u est nilpotent, la matrice A l'est aussi. L'hypothèse de récurrence dit alors que A est strictement triangulaire supérieure (ou en tout cas peut le devenir par un changement de base adéquat).

(2) $\Leftarrow$ Soit une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ dans laquelle la matrice de u est strictement triangulaire supérieure.

Alors $u(e_1) = 0$ et plus généralement, $u(e_k) \in \text{Span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$. Voyez par récurrence que $u^l(e_k) \in \text{Span}\{e_1, \ldots, e_{k-l}\}$. Donc $u^l(e_k) = 0$ dès que $l \geqslant k$.

□

PROPooWTFWooXHlmhp

Proposition 8.211 (Thème 41)**.**
Soit E un espace de Banach (espace vectoriel normé complet[80]). Si $A \in \mathcal{L}(E, E)$ est nilpotente, alors $(\mathbb{1} - A)$ est inversible et son inverse est donné par

$$(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \tag{8.420}$$

où l'infini peut évidemment être remplacé par l'ordre de nilpotence de A.

Démonstration. En ce qui concerne la convergence de la somme, elle ne fait pas de doute parce que A étant nilpotente, la somme contient seulement une quantité finie de termes non nuls.

Montrons à présent que la somme est l'inverse de $\mathbb{1} - A$ en multipliant terme à terme :

$$\sum_{k=0}^{n} A^k(\mathbb{1} - A) = \sum_{k=0}^{n}(A^k - A^{k+1}) = \mathbb{1} - A^{n+1}. \tag{8.421}$$

Par conséquent

$$\|\mathbb{1} - \sum_{k=0}^{n} A^k(\mathbb{1} - A)\| = \|A^{n+1}\| \to 0. \tag{8.422}$$

La dernière limite est en réalité une égalité pour n assez grand. □

8.12.4 Endomorphismes diagonalisables

DefCNJqsmo

Définition 8.212 (Diagonalisable)**.**
Plusieurs notions.

*(1) Une matrice est **diagonalisable** si elle est semblable[81] à une matrice diagonale.*

*(2) Une matrice est **diagonale** si seuls ses éléments diagonaux sont non nuls.*

(3) Une application linéaire est diagonalisable si elle est semblable[82] à une application linéaire diagonale.

(4) Une application linéaire est diagonal si elle admet une base de vecteurs propres.

Dans une matrice diagonale, certains éléments diagonaux peuvent être nuls. Pour un opérateur diagonal par contre, il faut de vrais vecteurs propres. Donc une matrice diagonale n'est pas toujours la matrice d'un opérateur diagonal.

LEMooOCLHooBMwUtm

Lemme 8.213.
Un opérateur est diagonal si et seulement si il est diagonalisable.

PROPooDEETooSOMiGO

Proposition 8.214.
Si A est un opérateur diagonalisable[83] dont les valeurs propres sont λ_i, alors il existe un opérateur inversible Q tel que

$$A = Q^{-1}DQ \tag{8.423}$$

où D est l'opérateur diagonal contenant les λ_i sur sa diagonale.

[80] Définition 7.316.
[81] Définition 8.198.
[82] Définition 8.199.
[83] Définition 8.212.

Démonstration. Commençons par montrer que si u est un vecteur propre de A, alors $Q^{-1}u$ est un vecteur propre de D, pour la même valeur propre. En effet nous avons $D = Q^{-1}AQ$, et donc

$$D(Q^{-1}u) = Q^{-1}AQQ^{-1}u = Q^{-1}Au = \lambda Q^{-1}u. \tag{8.424a}$$

Donc si $\{e_i\}$ est une base de vecteurs propres de D, alors $\{Qe_i\}$ est une base de vecteurs propres de A. Pour les mêmes valeurs propres. □

Lemme 8.215.
Une matrice triangulaire supérieure avec des 1 *sur la diagonale n'est diagonalisable que si elle est diagonale (c'est-à-dire si c'est la matrice unité).*

Démonstration. Si A est une matrice triangulaire supérieure de taille n telle que $A_{ii} = 1$, alors $\det(A-\lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)^n$, ce qui signifie que $\text{Spec}(A) = \{1\}$. Pour la diagonaliser, il faudrait une matrice $P \in \text{GL}(n,\mathbb{K})$ telle que $\mathbb{1} = P^{-1}AP$, ce qui est uniquement possible si $A = \mathbb{1}$. □

LemgnaEOk

Lemme 8.216.
Soit F un sous-espace stable par u. Soit une décomposition du polynôme minimal

$$\mu_u = P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r} \tag{8.425}$$

où les P_i sont des polynômes irréductibles unitaires distincts. Si nous posons $E_i = \ker P_i^{n_i}$, alors

$$F = (F \cap E_1) \oplus \dots \oplus (F \cap E_r). \tag{8.426}$$

ThoDigLEQEXR

Théorème 8.217.
Soit E, un espace vectoriel de dimension n sur le corps commutatif $\mathbb{K}$ et $u \in \text{End}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

ItemThoDigLEQEXRiv

(1) L'endomorphisme u est diagonalisable.

ItemThoDigLEQEXRi

(2) Il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant, scindé sur $\mathbb{K}$, dont toutes les racines sont simples, tel que $P(u) = 0$.

ItemThoDigLEQEXRii

(3) Le polynôme minimal μ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et toutes ses racines sont simples[84].

ItemThoDigLEQEXRiii

(4) Tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u.

ITEMooZNJFooEiqDYp

(5) Dans une base adaptée, la matrice de u est diagonale et les éléments diagonaux sont ses valeurs propres.

Démonstration. Plein d'implications à prouver.

(1) **(2) implique (3)** Étant donné que $P(u) = 0$, il est dans l'idéal des polynômes annulateurs de u, et le polynôme minimal μ_u le divise parce que l'idéal des polynômes annulateurs est généré par μ_u par le théorème 6.43.

(2) **(3) implique (1)** Étant donné que le polynôme minimal est scindé à racines simples, il s'écrit sous forme de produits de monômes tous distincts, c'est-à-dire

$$\mu_u(X) = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_r) \tag{8.428}$$

où les λ_i sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Étant donné que $\mu_u(u) = 0$, le théorème de décomposition des noyaux (théorème 8.90) nous enseigne que

$$E = \ker(u-\lambda_1) \oplus \dots \oplus \ker(u-\lambda_r). \tag{8.429}$$

Mais $\ker(u-\lambda_i)$ est l'espace propre $E_{\lambda_i}(u)$. Donc u est diagonalisable.

(3) **(1) implique (4)** Soit $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base qui diagonalise u, soit F un sous-espace de E et $\{f_1,\dots,f_r\}$ une base de F. Par le théorème 4.18(2), nous pouvons compléter la base de F par des éléments de la base $\{e_i\}$. Le complément ainsi construit est stable par u.

[84] Le polynôme *caractéristique*, lui, n'a pas spécialement ses racines simples ; il peut encore être de la forme

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}, \tag{8.427}$$

mais alors $\dim(E_{\lambda_i}) = \alpha_i$.

(4) **(4) implique (1)** En dimension un, tout endomorphisme est diagonalisable, nous supposons donc que $\dim E = n \geqslant 2$. Nous procédons par récurrence sur le nombre de vecteurs propres connus de u. Supposons avoir déjà trouvé p vecteurs propres $e_1, \ldots, e_p$ de u. Considérons H, un hyperplan qui contient les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$. Soit F un supplémentaire de H stable par u ; par construction $\dim F = 1$ et si $e_{p+1} \in F$, il doit être vecteur propre de u.

(5) **(1) implique (2)** Nous supposons maintenant que u est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes, et considérons le polynôme

$$P(x) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_r). \tag{8.430}$$

Alors $P(u) = 0$. En effet si e_i est un vecteur propre pour la valeur propre λ_i,

$$P(u)e_i = \prod_{j \neq i} (u - \lambda_j) \circ (u - \lambda_i)e_i = 0 \tag{8.431}$$

par le lemme 8.89. Par conséquent $P(u)$ s'annule sur la base $\{e_i\}$.

(6) **(5) implique (2)** Si la matrice A est diagonale alors le polynôme $P = \prod_{i=1}^{n}(X - A_{ii})$ est annulateur de A. En effet,

$$P(A)e_k = \prod_{i=1}^{n}(A - A_{ii})x = \prod_{i=1}^{n}\big(u(e_k) - A_{ii}e_k\big) = \prod_{i=1}^{n}\big(A_{kk}e_k - A_{ii}e_k\big) = 0 \tag{8.432}$$

parce que le facteur $i = k$ est nul.

(7) **(3) implique (5)** le polynôme minimal de u s'écrit

$$\mu = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_r), \tag{8.433}$$

et les espaces E_i du lemme 8.216 sont les espaces propres $E_i = \ker(u - \lambda_i)$. Nous avons donc une somme directe

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r. \tag{8.434}$$

Dans chacun des espaces propres, u a une matrice diagonale avec la valeur propre correspondante sur la diagonale. Une base de E constituée d'une base de chacun des espaces propres est donc une base comme nous en cherchons.

□
CorQeVqsS

Corolaire 8.218.
Si u est diagonalisable et si F est un sous-espace stable par u, alors

$$F = \bigoplus_{\lambda} E_\lambda(u) \cap F \tag{8.435}$$

où $E_\lambda(u)$ est l'espace propre de u pour la valeur propre λ. En particulier la restriction de u à F, $u|_F$ est diagonalisable.

Démonstration. Par le théorème 8.217, le polynôme μ_u est scindé et ne possède que des racines simples. Notons le

$$\mu_u(X) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_r). \tag{8.436}$$

Les espaces E_i du lemme 8.216 sont maintenant les espaces propres.

En ce qui concerne la diagonalisabilité de $u|_F$, notons que nous avons une base de F composée de vecteurs dans les espaces $E_\lambda(u)$. Cette base de F est une base de vecteurs propres de u. □

Lemme 8.219.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathrm{End}(E)$. Si $\mathrm{Card}\big(\mathrm{Spec}(u)\big) = \dim(E)$ alors u est diagonalisable.

Démonstration. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de u. Nous savons que les espaces propres correspondants sont en somme directe (lemme 8.88). Par conséquent $\mathrm{Span}\{E_{\lambda_i}(u)\}$ est de dimension $n = \dim(E)$ et u est diagonalisable. □

Voici un résultat de diagonalisation simultanée. Nous donnerons un résultat de trigonalisation simultanée dans le lemme 12.107.

PropGqhAMei

Proposition 8.220 (Diagonalisation simultanée)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux.

ItemGqhAMei

(1) Si $i,j\in I$ alors tout sous-espace propre de u_i est stable par u_j. Autrement dit $u_j\big(E_\lambda(u_i)\big)\subset E_\lambda(u_i)$.

(2) Si les u_i sont diagonalisables, alors ils le sont simultanément.

Démonstration. Supposons que u_i et u_j commutent et soit x un vecteur propre de u_i : $u_i(x)=\lambda x$. Nous montrons que $u_j(x)\in E_\lambda(u_i)$. Nous avons

$$u_i\big(u_j(x)\big)=u_j\big(u_i(x)\big)=\lambda u_j(x). \tag{8.437}$$

Par conséquent $u_j(x)$ est vecteur propre de u_i de valeur propre λ.

Montrons maintenant l'affirmation à propos des endomorphismes simultanément diagonalisables. Si $\dim E=1$, le résultat est évident. Nous supposons également qu'aucun des u_i n'est multiple de l'identité. Nous effectuons une récurrence sur la dimension.

Soit u_0 un des u_i et considérons ses valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_r$. Pour chaque k nous avons

$$E_{\lambda_k}(u_0)\neq E, \tag{8.438}$$

sinon u_0 serait un multiple de l'identité. Par contre le fait que u_0 soit diagonalisable permet de décomposer E en espaces propres de u_0 :

$$E=\bigoplus_k E_{\lambda_k}(u_0). \tag{8.439}$$

Ce que nous allons faire est de simultanément diagonaliser les $(u_i)_{i\in I}$ sur chacun des E_{λ_k} séparément. Par le point (1), nous avons $u_i\colon E_{\lambda_k}(u_0)\to E_{\lambda_k}(u_0)$, et nous pouvons considérer la famille d'opérateurs

$$\Big(u_i|_{E_{\lambda_k}(u_0)}\Big)_{i\in I}. \tag{8.440}$$

Ce sont tous des opérateurs qui commutent et qui agissent sur un espace de dimension plus petite. Par hypothèse de récurrence nous avons une base de $E_{\lambda_k}(u_0)$ qui diagonalise tous les u_i. □

ExewINgYo

Exemple 8.221.
Soit un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Un opérateur **involutif** est un opérateur différent de l'identité dont le carré est l'identité. Typiquement une symétrie orthogonale dans $\mathbb{R}^3$. Le polynôme caractéristique d'une involution est $X^2-1=(X+1)(X-1)$.

Tant que $1\neq -1$, X^2-1 est donc scindé à racines simples et les involutions sont diagonalisables (8.217). Cependant si le corps est de caractéristique 2, alors $X^2-1=(X+1)^2$ et l'involution n'est plus diagonalisable.

Par exemple si le corps est de caractéristique 2, nous avons

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \tag{8.441a}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}. \tag{8.441b}$$

Cette matrice A représente donc une involution, mais n'est pas diagonalisable. △

8.12.5 Diagonalisation : cas complexe, pas toujours

Il n'est pas vrai qu'une matrice de $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ soit toujours diagonalisable. En effet le théorème 8.217(3) dit qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Certes sur $\mathbb{C}$ le polynôme minimal sera scindé, mais il ne sera pas spécialement à racines simples.

Exemple 8.222.
La matrice

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \tag{8.442}$$

a pour polynôme caractéristique $\chi_A(X)=X^2$. C'est également son polynôme minimal, qui n'est pas à racine simple.

Il est par ailleurs facile de voir que le seul espace propre de A est $\mathrm{Span}\{(1,0)\}$ (ici le span est sur $\mathbb{C}$). Donc l'espace $\mathbb{C}^2$ ne possède pas de base de vecteurs propres de A. △

Ce qui est vrai, c'est que le polynôme caractéristique a des racines, et que ces racines correspondent à des vecteurs propres. Mais il n'y a pas toujours autant de vecteurs propres que la multiplicité des racines.

8.223.
Lorsque la diagonalisation n'est pas possible, il est souvent possible de trigonaliser. Les matrices triangulaires ne sont pas aussi faciles à manipuler que les matrices diagonales, mais c'est toujours ça de pris.

Nous étudierons ça plus tard, en 12.10.1 parce que ça va nécéssiter le théorème de d'Alembert.

8.12.6 Diagonalisation : cas réel

LemSchureRelnrqfiy

Lemme 8.224 (Lemme de Schur réel)**.**
Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}AQ$ soit de la forme

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_r & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ c_s & d_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{8.443}$$

EqMtrTSqRTA

Le déterminant de A est le produit des déterminants des blocs diagonaux et les valeurs propres de A sont les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ et celles de ces blocs.

Démonstration. Si la matrice A a des valeurs propres réelles, nous procédons comme dans le cas complexe. Cela nous fournit le partie véritablement triangulaire avec les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sur la diagonale. Supposons donc que A n'a pas de valeurs propres réelles. Soit donc $\alpha + i\beta$ une valeur propre ($\beta \neq 0$) et $u + iv$ un vecteur propre correspondant où u et v sont des vecteurs réels. Nous avons

$$Au + iAv = A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv) = \alpha u - \beta v + i(\alpha v + \beta u), \tag{8.444}$$

et en égalisant les parties réelles et imaginaires,

$$Au = \alpha u - \beta v \tag{8.445a}$$
$$Av = \alpha v + \beta u. \tag{8.445b}$$

Sur ces relations nous voyons que ni u ni v ne sont nuls. De plus u et v sont linéairement indépendants (sur $\mathbb{R}$), en effet si $v = \lambda u$ nous aurions $Au = \alpha u - \beta\lambda u = (\alpha - \beta\lambda)u$, ce qui serait une valeur propre réelle alors que nous avions supposé avoir déjà épuisé toutes les valeurs propres réelles.

Étant donné que u et v sont deux vecteurs réels non nuls et linéairement indépendants, nous pouvons trouver une base orthonormée $\{q_1, q_2\}$ de $\text{Span}\{u, v\}$. Nous pouvons étendre ces deux vecteurs en une base orthonormée $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Nous considérons à présent la matrice orthogonale dont les colonnes sont formées de ces vecteurs : $Q = [q_1\, q_2\, \dots, q_n]$.

L'espace $\text{Span}\{e_1, e_2\}$ est stable par $Q^{-1}AQ$, en effet nous avons

$$Q^{-1}AQe_1 = Q^{-1}Aq_1 = Q^{-1}(aq_1 + bq_2) = ae_1 + be_2. \tag{8.446}$$

La matrice $Q^{-1}AQ$ est donc de la forme

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} & C_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \tag{8.447}$$

où C_1 est une matrice réelle $2 \times (n-1)$ quelconque et A_1 est une matrice réelle $(n-2) \times (n-2)$. Nous pouvons appliquer une récurrence sur la dimension pour poursuivre.

Notons que si A n'a pas de valeurs propres réelles, elle est automatiquement d'ordre pair parce que les valeurs propres complexes viennent par couple complexes conjugués.

En ce qui concerne les valeurs propres, il est facile de voir en regardant (8.443) que les valeurs propres sont celles des blocs diagonaux. Étant donné que $Q^{-1}AQ$ et A ont même polynôme caractéristique, ce sont les valeurs propres de A. □

ThoeTMXla

Théorème 8.225 (Théorème spectral, matrice symétrique[128])**.**
Une matrice symétrique réelle,

ITEMooJWHLooSfhNSW

(1) *a un spectre contenu dans* $\mathbb{R}$

ITEMooMWWRooXxGONW

(2) *est diagonalisable par une matrice orthogonale.*

Si M est une matrice symétrique réelle alors $\mathbb{R}^n$ possède une base orthonormée de vecteurs propres de M.

Démonstration. Soit A une matrice réelle symétrique. Elle agit sur l'espace $\mathbb{C}^n$ par la définition 4.72, et en particulier la formule 4.87. Nous munissons de plus $\mathbb{C}^n$ de la forme sesquilinéaire définie en la proposition 8.178.

Si λ est une valeur propre complexe pour le vecteur propre complexe v, alors d'une part $\langle Av, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$ et d'autre part $\langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$. Par conséquent $\lambda = \bar{\lambda}$, et λ est réelle.

Le lemme de Schur réel 8.224 donne une matrice orthogonale Q qui trigonalise A. Les valeurs propres étant toutes réelles, la matrice $Q^{-1}AQ$ est même triangulaire (il n'y a pas de blocs dans la forme (8.443)). Prouvons que $Q^{-1}AQ$ est symétrique :

$$(Q^{-1}AQ)^t = Q^tA^t(Q^{-1})^t = Q^{-1}A^tQ = Q^{-1}AQ \tag{8.448}$$

où nous avons utilisé le fait que Q était orthogonale ($Q^{-1} = Q^t$) et que A était symétrique ($A^t = A$). Une matrice triangulaire supérieure symétrique est obligatoirement une matrice diagonale.

En ce qui concerne la base de vecteurs propres, soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et Q une matrice orthogonale telle que $A = Q^tDQ$ avec D diagonale. Nous posons $f_i = Q^te_i$ et en tenant compte du fait que $Q^t = Q^{-1}$ nous avons $Af_i = Q^tDQQ^te_i = Q^t\lambda_ie_i = \lambda_if_i$. Donc les f_i sont des vecteurs propres de A. De plus ils sont orthonormés parce qu'en utilisant la proposition 8.181,

$$\langle f_i, f_j\rangle = \langle Q^te_i, Q^te_j\rangle = \langle e_i, Q^tQe_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{8.449}$$

□

Le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints sera traité plus bas parce qu'il a besoin de notions sur les formes bilinéaires, théorème 10.19.

RemGKDZfxu

Remarque 8.226.
Une matrice symétrique est diagonalisable par une matrice orthogonale. Nous pouvons en réalité nous arranger pour diagonaliser par une matrice de $\mathrm{SO}(n)$. Plus généralement si A est une matrice diagonalisable par une matrice $P \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ alors elle est diagonalisable par une matrice de $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ en changeant le signe de la première ligne de P. Et inversement.

En effet, si nous avons $P^tDP = A$, alors en notant $*$ les quantités qui ne dépendent pas de a, b ou c,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & * & * \\ b & * & * \\ c & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & * & * \\ b & * & * \\ c & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b & \lambda_1 c \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1a^2 + * & \lambda_1ab + * & \lambda_1ac + * \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{8.450}$$

Nous voyons donc que si nous changeons les signes de a, b et c en même temps, le résultat ne change pas.

PROPooQHHPooSqpgcb

Proposition 8.227.
Une forme bilinéaire est non-dénénérée[85] *si et seulement si sa matrice associée est inversible.*

Démonstration. Nous savons que la matrice associée est symétrique et qu'elle peut donc être diagonalisée (théorème 8.225). En nous plaçant dans une base de diagonalisation, nous devons prouver que la forme est non-dégénérée si et seulement si les éléments diagonaux de la matrice sont tous non nuls.

Écrivons $b(x,z)$ en choisissant pour z le vecteur de base e_k de composantes $(e_k)_j = \delta_{kj}$:

$$b(x,e_k) = \sum_{ij} x_i(e_k)_j = \sum_i b_{ik}x_i = b_{kk}x_k. \tag{8.451}$$

Si b est dégénérée et si x est un vecteur non nul (disons que la composante x_i est non nulle) de E tel que $b(x,z) = 0$ pour tout $z \in E$, alors $b_{ii} = 0$, ce qui montre que la matrice de b n'est pas inversible.

Réciproquement si la matrice de b est inversible, alors tous les b_{kk} sont différents de zéro, et le seul vecteur x tel que $b_{kk}x_k = 0$ pour tout k est le vecteur nul. □

[85] Définition 8.125.

8.12.7 Matrice définie positive

DefAWAooCMPuVM

Définition 8.228 (Matrice définie positive, opérateur défini positif)**.**
*Un opérateur sur un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ est **défini positif** si toutes ses valeurs propres sont réelles et strictement positives. Il est **semi-défini positif** si ses valeurs propres sont réelles positives ou nulles.*

Mêmes définitions pour une matrice.

Afin d'éviter l'une ou l'autre confusion, nous disons souvent *strictement* défini positif pour positif.

NORMooAJLHooQhwpvr

8.229.
Quelques ensembles de matrices symétriques.

(1) $S(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles $n\times n$.

(2) $S^+(n,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques $n\times n$ définies positives.

(3) $S^{++}(n,\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $S^+(n,\mathbb{R})$ des matrices strictement définies positives.

Remarque 8.230.
Nous ne définissons pas la notion de matrice définie positive pour une matrice non symétrique.

PropcnJyXZ

Proposition 8.231.
Soit M, une matrice symétrique. Nous avons

ITEMooTJVQooYmRkas

(1) $\det(M)>0$ *et* $\mathrm{Tr}(M)>0$ *implique M définie positive*[86],

(2) $\det(M)>0$ *et* $\mathrm{Tr}(M)<0$ *implique M définie négative,*

ItemluuFPN

(3) $\det(M)<0$ *implique ni semi-définie positive, ni définie négative*

(4) $\det(M)=0$ *implique M semi-définie positive ou semi-définie négative.*

Lorsqu'un énoncé parle d'une matrice symétrique, le premier réflexe est de la diagonaliser : considérer une matrice orthogonale Q telle que $Q^tMQ=D$ avec D diagonale. Et les valeurs propres sur la diagonale : $D_{kk}=\lambda_k$. Les matrices symétriques définies positives ont cependant des propriétés même en dehors de leur base de diagonalisation.

Pour rappel, $\langle x,y\rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ défini par la proposition 8.168.

LemWZFSooYvksjw

Lemme 8.232.
Soit une matrice symétrique M.

ITEMooSKRAooOgHbGA

(1) Elle est strictement définie positive si et seulement si $\langle x,Mx\rangle>0$ pour tout x non nul dans $\mathbb{R}^n$.

ITEMooMOZYooWcrewZ

(2) Elle est semi-définie positive si et seulement si $\langle x,Mx\rangle\geqslant 0$ pour tout x non nul dans $\mathbb{R}^n$.

ITEMooRRMFooHSOHxZ

(3) Si elle est seulement définie positive, alors $\langle x,Mx\rangle\geqslant\lambda\|x\|^2$ dès que $\lambda\geqslant 0$ minore toutes les valeurs propres.

Démonstration. Démonstration en trois parties.

(1) **(1)** Soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ une base orthonormée de vecteurs propres de M dont l'existence est assurée par le théorème spectral 8.225. Nous nommons x_i les coordonnées de x dans cette base. Alors,

$$\langle x,Mx\rangle=\sum_{i,j}x_i\langle e_i,x_jMe_j\rangle=\sum_{i,j}x_ix_j\langle e_i,\lambda_je_j\rangle=\sum_{ij}x_ix_j\lambda_j\delta_{ij}=\sum_i\lambda_ix_i^2 \tag{8.452}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de M. Le produit$\langle x,Mx\rangle$ est strictement positif pour tout x si et seulement si tous les λ_i sont strictement positifs.

(2) **(2)** Nous avons encore

$$\langle x,Mx\rangle=\sum_i\lambda_ix_i^2 \tag{8.453}$$

qui est plus grand ou égal à zéro si et seulement si tous les λ_i sont plus grands ou égaux à zéro.

[86] Définition 8.228.

(3) **(3)**

Soit une matrice orthogonale T diagonalisant M, c'est-à-dire telle que $T^tMT = D$ avec D diagonale. Nous allons vérifier que si $\lambda \leqslant \min\{\lambda_i\}$, alors

$$\langle Tx, MTx\rangle \geqslant \lambda\|Tx\|^2 \tag{8.454}$$

pour tout x. Si nous considérons la base de diagonalisation $\{e_k\}$ pour les valeurs propres λ_k, nous avons le calcul

$$\begin{aligned}
\langle Tx, MTx\rangle &= \langle x, T^tMTx\rangle && (8.455a)\\
&= \langle x, Dx\rangle && (8.455b)\\
&= \sum_k \langle x, x_k De_k\rangle && (8.455c)\\
&= \sum_k \lambda_k x_k \underbrace{\langle x, e_k\rangle}_{=x_k} && (8.455d)\\
&\geqslant \sum_k \lambda|x_k|^2 \qquad \text{en posant} \lambda = \min\{\lambda_i\} && (8.455e)
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\langle Tx, MTx\rangle \geqslant \sum_k \lambda|x_k|^2 = \lambda\|x\|^2 = \lambda\|Tx\|^2. \tag{8.456}$$

Au dernier passage nous avons utilisé le fait que T est une isométrie (proposition 8.44). L'inéquation (8.454) est démontrée.

Comme T est une bijection [87], cela implique le résultat pour tout x.

□

Les personnes qui aiment les vecteurs lignes et colonnes écriront des inégalités comme

$$x^tMx \geqslant x^tx. \tag{8.457}$$

Tout à l'autre bout du spectre des personnes névrosées des notations, on trouvera des inégalités comme

$$M(x \otimes x) \geqslant x \cdot x. \tag{8.458}$$

Le penchant personnel de l'auteur de ces lignes est la notation avec le produit tensoriel. Si vous aimez ça, vous pouvez lire la section 10.15.15 et en particulier ce qui suit (10.796).

La notation adoptée ici avec le produit scalaire $\langle x, Mx\rangle$, qui peut aussi être écrite $x \cdot Mx$ est entre les deux. Elle a l'avantage de n'être pas technologique comme le produit tensoriel (si vous y mettez les pieds, vous devez savoir ce que vous faites), tout en évitant de se casser la tête à savoir qui est un vecteur ligne ou un vecteur colonne.

Proposition 8.233.
Une application bilinéaire est définie positive[88] *si et seulement si sa matrice symétrique associée*[89] *l'est.*

Démonstration. La définition 8.122 dit que b est strictement définie positive lorsque $b(x,x) \geqslant 0$ et $b(x,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

D'autre part, le lemme 8.232 dit que la matrice B est strictement définie positive lorsque $x \cdot Bx \geqslant 0$ et $x \cdot Bx = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Le lien entre les deux est que le lemme 8.145 nous enseigne que pour tout x et y,

$$b(x,y) = x \cdot By \tag{8.459}$$

où B est la matrice de b. □

Proposition 8.234.
Soit une forme quadratique $q\colon E \to \mathbb{K}$ et sa matrice[90] *$(q_{ij}) \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$. Nous avons*

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^n q_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} q_{ij}x_ix_j. \tag{8.460}$$

[87] Une matrice orthogonale a un déterminant qui vaut ± 1.
[88] Définition 8.122.
[89] Par la proposition 8.138.
[90] Matrice associée à une forme quadratique, définition 8.144.

Démonstration. La première égalité est seulement l'expression de la matrice de q. Pour la seconde, on découpe la somme sur j en trois parties : $j < i$, $j = i$ et $j > i$:

$$q(x) = \sum_i \sum_{j<i} q_{ij}x_ix_j + \sum_i q_{ii}x_i^2 + \sum_i \sum_{j>i} q_{ij}x_ix_j. \tag{8.461}$$

EQooMKMDooGKqbJi

Nous pouvons utiliser le lemme 1.306 en posant $A = \{(i,j) \text{ tel que } j < i\}$, $B = \{(i,j) \text{ tel que } j > i\}$, et en considérant la bijection

$$\begin{aligned} \varphi\colon A &\to b \\ (i,j) &\mapsto (j,i). \end{aligned} \tag{8.462}$$

Nous avons alors

$$\sum_{(i,j)\in A} q_{ij}x_ix_j = \sum_{(i,j)\in B} q_{ji}x_jx_i = \sum_{(i,j)\in B} q_{ij}x_ix_j. \tag{8.463}$$

La première égalité est le lemme et la seconde est la symétrie de q. Bref, dans (8.461), le premier et le dernier termes sont égaux. □

8.235.
De nombreux auteurs préfèrent écrire des choses comme x^tBy ou xB^ty ou xBy^t et se poser de longues questions sur qui est un « vecteur colonne » et qui est un « vecteur ligne », et si la matrice B soit être transposée ou non. Toutes ces notations servent(?) à cacher un bête produit scalaire.

8.236.
Notons que la matrice associée à une forme bilinéaire (ou quadratique associée) est uniquement valable pour une base donnée. Si nous changeons de base, la matrice change. Cependant lorsque nous travaillons sur $\mathbb{R}^n$, la base canonique est tellement canonique que nous allons nous permettre de parler de « la » matrice associée à une forme bilinéaire.

Corolaire 8.237.
Une matrice symétrique strictement définie positive est inversible.

Démonstration. Si $Ax = 0$ alors $\langle Ax, x\rangle = 0$. Mais dans le cas d'une matrice strictement définie positive, cela implique $x = 0$ par le lemme 8.232. □

Lemme 8.238.
Pour une base quelconque, les éléments diagonaux d'une matrice symétrique semi-définie positive sont positifs. Si la matrice est strictement définie positive, alors les éléments diagonaux sont strictement positifs.

Démonstration. Il s'agit d'une application du lemme 8.232. Si A est définie positive et que $\{e_i\}$ est une base, alors

$$A_{ii} = \langle Ae_i, e_i\rangle \geqslant \lambda\|e_i\|^2 = \lambda \geqslant 0. \tag{8.464}$$

Si A est strictement définie positive, alors λ peut être choisi strictement positif. □

8.12.8 Réduction de Gauss

THOooOMMFooKxqICS

Théorème 8.239 (Réduction de Gauss[338, 339])**.**
Soit une forme quadratique non nulle q sur l'espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Il existe une base $\{l_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E^* et des coefficients $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tels que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i(x)^2. \tag{8.465}$$

Démonstration. Notre point de départ sont les formules (8.460) pour la forme quadratique. Nous allons faire la preuve par récurrence sur la dimension de l'espace. Si $n = 1$, alors nous avons seulement

$$q(x) = \alpha x^2 \tag{8.466}$$

et donc le théorème est fait avec $l(x) = x$.

Nous supposons que le théorème est prouvé pour tout espace de dimension n. Une forme quadratique pour un espace de dimension $n+1$ s'écrit

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n+1} m_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} m_{ij}x_ix_j. \tag{8.467}$$

Vu que q est non nulle, un des m_{ij} est non nul. Nous allons diviser en plusieurs cas.

- $m_{11} \neq 0$
- $m_{kk} \neq 0$ avec $k \neq 1$
- $m_{12} \neq 0$ et $m_{ii} = 0$ pour tout i.
- $m_{kl} \neq 0$ avec $(k,l) \neq (1,2)$ et $m_{ii} = 0$ pour tout i.

Ces cas ne sont pas exclusifs, mais ils couvrent toutes les possibilités.

(1) **Si $m_{11} \neq 0$** Nous écrivons q sous la forme

$$q(x) = m_{11}x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} m_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i+1}^{n+1} m_{ij}x_ix_j\Big) \tag{8.468a}$$

$$= m_{11}x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} m_{ii}x_i^2 + 2\sum_{j=2}^{n+1} m_{1j}x_1x_j + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i+1}^{n+1}(m_{ij}x_ix_j) \tag{8.468b}$$

$$= m_{11}x_1^2 + 2x_1\sum_{j=2}^{n+1} m_{1j}x_k + R(x_2,\dots,x_{n+1}) \tag{8.468c}$$

$$= m_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\sum_{j=2}^{n+1}\frac{m_{1j}}{m_{11}}x_j\right) + R(x_2,\dots,x_{n+1}) \tag{8.468d}$$

$$= m_{11}\big(x_1^2 + 2x_1 f(x_2,\dots,x_{n+1})\big) + R(x_2,\dots,x_{n+1}) \tag{8.468e}$$

$$= m_{11}\big(x_1 + f(x_2,\dots,x_{n+1})\big)^2 - m_{11}f(x_2,\dots,x_{n+1})^2 + R(x_2,\dots,x_{n+1}) \tag{8.468f}$$

où

- R est une forme quadratique de $n-1$ variables ;
- nous avons noté $f(x_2,\dots,x_{n+1}) = \sum_{j=2}^{n+1}\frac{m_{1j}}{m_{11}}x_j$.

Maintenant, toute la partie $-f(x_2,\dots,x_{n+1})^2 + R(x_2,\dots,x_{n+1})$ est une forme quadratique de n variables. Par hypothèse de récurrence, il existe des coefficients α_i et des formes linéairement indépendantes sur $\mathbb{K}^n$ $l'_i(x_2,\dots,x_{n+1})$ telles que

$$-f(x_2,\dots,x_{n+1})^2 + R(x_2,\dots,x_{n+1}) = \sum_{i=2}^{n+1}\alpha_i l'_i(x_2,\dots,x_{n+1})^2. \tag{8.469}$$

En posant ensuite $l_j(x_1,\dots,x_{n+1}) = l'_j(x_2,\dots,x_{n+1})$, ainsi que $l_1(x_1,\dots,x_{n+1}) = x_1 + f(x_2,\dots,x_{n+1})$, nous avons

$$q(x) = m_{11}l_1(x)^2 + \sum_{j=2}^{n+1}\alpha_j l_j(x)^2. \tag{8.470}$$

(2) **Si $m_{kk} \neq 0$ avec $k \neq 1$**
Nous nommons k le plus petit entier pour lequel $m_{kk} \neq 0$, et nous supposons que $k \neq 1$, parce que nous avons déjà couvert ce cas. Dans ce cas, nous avons

$$q(x) = m_{kk}x_k^2 + \sum_{j=k+1}^{n+1} m_{jj}x_j^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i+1}^{n+1} m_{ij}x_ix_j\Big), \tag{8.471}$$

et tout tourne comme dans le premier cas.

(3) **$m_{ii} = 0$ pour tout i et $m_{12} \neq 0$** Nous écrivons q en séparant les termes m_{1k} :

$$q(x) = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} m_{ij}x_ix_j \tag{8.472a}$$

$$= 2m_{12}x_1x_2 + 2\sum_{2\leqslant j\leqslant n+1} m_{1j}x_1x_j + 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n+1} m_{ij}x_ix_j \tag{8.472b}$$

$$= 2m_{12}x_1x_2 + 2x_1\sum_{2\leqslant j\leqslant n+1} m_{1j}x_j + 2\sum_{3\leqslant j\leqslant n+1} m_{2j}x_2x_j + 2\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n+1} m_{ij}x_ix_j \tag{8.472c}$$

$$= 2m_{12}x_1x_2 + x_1f(x_2,\dots,x_{n+1}) + x_2g(x_3,\dots,x_{n+1}) + T(x_3,\dots,x_{n+1}) \tag{8.472d}$$

SUBEQooLBXBooXoLyuw

où f et g sont linéaires et T est multilinéaire.

À ce moment, nous tentons de factoriser toute la partie concernant x_1 et x_2. L'idée est d'utiliser ceci :

$$(x_1+g)(x_2+f)=x_1x_2+x_1f+x_2g+fg, \tag{8.473}$$

mais en mettant les bons coefficients pour reproduire ce que nous avons dans (8.472d) :

$$(2m_{12}+2g)(x_2+\frac{f}{m_{12}})-\frac{2fg}{m_{12}}=2m_{12}x_1x_2+2x_1f+2x_2g. \tag{8.474}$$

Cela pour dire que

$$q(x)=2(m_{12}x_1+g)(x_2+\frac{f}{m_{12}})-\frac{2fg}{m_{12}}+T \tag{8.475}$$

où $-2fg/m_{12}+T$ est une forme quadratique de $x_3,\dots,x_{n+1}$, c'est-à-dire de $n-1$ variables.

L'hypothèse de récurrence nous donne des formes linéaires $(l_i)_{i=3,\dots,n+1}$ telles que

$$\frac{2fg}{m_{12}}+T=\sum_{i=3}^{n+1}\alpha_i l_i(x)^2. \tag{8.476}$$

Nous pouvons donc déjà écrire

$$q(x)=2l_1'(x)l_2'(x)+\sum_{i=3}^{n+1}\alpha_i l_i(x)^2 \tag{8.477}$$

où

- Les formes l_i avec $i\geqslant 3$ ne dépendent pas de x_1 et x_2, et sont donc indépendantes de l_1 et l_2.
- La forme l_1' ne dépend pas de x_2,
- La forme l_2' ne dépend pas de x_1.

Ce sont donc $n+1$ formes linéaires indépendantes. Le seul problème résiduel est que les formes l_1' et l_2' arrivent en produit l'une de l'autre. Nous en définissons donc deux de plus :

$$\begin{aligned}l_1(x)&=\frac{1}{2}(l_1'+l_2')\\ l_2(x)&=\frac{1}{2}(l_1'-l_2'),\end{aligned} \tag{8.478}$$

qui sont linéairement indépendantes l'une de l'autre et indépendantes des l_i ($i\geqslant 3$). Au final,

$$q(x)=l_1(x)^2+l_2(x)^2+\sum_{i=3}^{n+1}\alpha_i l_i(x)^2. \tag{8.479}$$

(4) **Si $m_{ii}=0$ et $m_{12}=0$ et $m_{kl}\neq 0$ avec $k<l$** Nous considérons la permutation

$$\begin{aligned}\sigma\colon\{1,\dots,n+1\}&\to\{1,\dots,n+1\}\\ i&\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } i=k\\ 2 & \text{si } i=l\\ k & \text{si } i=1\\ l & \text{si } i=2\\ i & \text{sinon,}\end{cases}\end{aligned} \tag{8.480}$$

c'est-à-dire que σ permute 1 et k ainsi que 2 et l. Ensuite nous posons

$$\begin{aligned}s\colon\mathbb{R}^{n+1}&\to\mathbb{R}^{n+1}\\ e_i&\mapsto e_{\sigma(i)}.\end{aligned} \tag{8.481}$$

Nous allons un peu considérer $q\circ s$, pour changer :

$$(q\circ s)(x)=\sum_{i,j}m_{ij}s(x)_i s(x)_j=\sum_{ij}x_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}. \tag{8.482}$$

EQooLVAWooAirEzP

parce que $s(x)_i = x_{\sigma(i)}$.

Utilisons un petit abus de notation pour considérer

$$\begin{aligned}\sigma\colon \{1,\dots,n+1\}\times\{1,\dots,n+1\} &\to \{1,\dots,n+1\}\times\{1,\dots,n+1\}\\ (i,j) &\mapsto \big(\sigma(i),\sigma(j)\big).\end{aligned} \tag{8.483}$$

Cela est une bijection ; nous pouvons utiliser le lemme 1.304 pour permuter les termes dans (8.482) :

$$(q\circ s)(x) = \sum_{ij} m_{\sigma(i)\sigma(j)}x_{\sigma\sigma(i)}x_{\sigma\sigma(j)} \tag{8.484a}$$

$$= \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j \tag{8.484b}$$

EQooPCTCooFnMWat

où nous avons posé $a_{ij} = m_{\sigma(i)\sigma(j)}$ et utilisé le fait que $\sigma = \sigma^{-1}$. Le point intéressant de l'histoire est que dans (8.484b), $a_{12} = m_{kl} \neq 0$. La forme $q\circ s$ est donc dans le cas déjà traité et il existe des formes linéaires l'_i telles que

$$(q\circ s)(x) = \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i l'_i(x)^2. \tag{8.485}$$

En évaluant cela en $s(x)$, et en tenant compte de $s = s^{-1}$, nous trouvons

$$q(x) = \sum_i \alpha_i (l_i\circ s)(x)^2, \tag{8.486}$$

de telle sorte que $l_i = l'_i\circ s$ soit la réponse à notre théorème.

□

8.12.9 Orthogonalité pour une forme bilinéaire

PROPooYXMMooYIuGRd

Proposition 8.240 ([339]).
Soient un espace vectoriel $(E,\mathbb{K})$ et une forme quadratique[91] *q. Une base de E est q-orthogonale*[92] *si et seulement si la matrice de q dans cette base est diagonale.*

Démonstration. La matrice de q est donnée par $Q_{ij} = b(e_i,e_j)$. Donc oui, cette matrice est diagonale si et seulement si les e_i sont orthogonaux. □

PROPooRERSooFHwWtB

Proposition 8.241 ([1]).
Si b est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, et si q est la forme quadratique associée, alors il existe une base q-orthogonale.

Les vecteurs de cette base ne sont pas isotropes[93]

Démonstration. Nous considérons une base $\{e_i\}$ de E. Vu que b est symétrique, elle est donnée par une matrice symétrique selon la formule $b(x,y) = \sum_{kl} S_{kl}x_ky_l$. Le théorème 8.225 permet de diagonaliser S par une matrice orthogonale : il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale A telles que $S = A^tDA$.

Nous posons alors $s_i = Ae_i$, et nous vérifions que c'est bon. Nous avons :

$$b(s_i,s_j) = \sum_{kl} S_{kl}(s_i)_k(s_j)_l \tag{8.487a}$$

$$= \sum_{kl} S_{kl}(Ae_i)_k(Ae_j)_l \tag{8.487b}$$

$$= \sum_{kl} S_{kl}A_{ki}A_{lj} \tag{8.487c}$$

$$= \sum_{kl} (A^t)_{ik}S_{kl}A_{lj} \tag{8.487d}$$

$$= D_{ij}. \tag{8.487e}$$

Vu que b n'est pas dégénérée, les éléments diagonaux de D ne sont pas nuls. Donc les vecteurs s_i vérifient $b(s_i,s_i)\neq 0$. □

[91] Définition 8.121.
[92] Définition 8.143.
[93] Définition 8.139.

PROPooZYISooQZNgeo

Proposition 8.242.
Soit une forme quadratique q. Si une base (e_i) de E est q-orthogonale, alors $\mathcal{B} = \{e_i \text{ tel que } q(e_i) = 0\}$ est une base de $\ker(q)$.

Démonstration. Nous considérons un vecteur de base e_j, et nous montrons que $q(e_j) = 0$ si et seulement si $e_j \in \ker(q)$. Nous savons par la proposition 8.240 que la matrice de q dans la base (e_i) est diagonale et que les éléments diagonaux sont les $q(e_i)$. Soit $K = \{i \text{ tel que } q(e_i) = 0\}$.

(1) $\underline{\text{Span}\{e_i\}_{i\in K} \subset \ker(q)}$ Si $x = \sum_{i\in K} x_i e_i$, alors

$$q(x) = b(x,x) = \sum_{i,j\in K} |x_i|^2 b(e_i,e_j) = \sum_{i,j\in K} |x_i|^2 \delta_{ij} q(e_i) = 0 \tag{8.488}$$

parce que $q(e_i) = 0$ dès que $i \in K$.

(2) $\underline{\ker(q) \subset \text{Span}\{e_i\}_{i\in K}}$ Soit $x \in \ker(q)$ et écrivons-le sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Nous avons

$$0 = q(x) = \sum_i |x_i|^2 q(e_i). \tag{8.489}$$

Mais $|x_i|^2 \geqslant 0$ et $q(e_i) \geqslant 0$, donc si $q(e_i) \neq 0$, alors $x_i = 0$. Donc les seules composantes non nulles de x sont celles sur lesquelles q s'annule. En d'autres termes $x = \sum_i x_i e_i \in \text{Span}\{e_i\}_{i\in K}$.

□

THOooIDMPooIMwkqB

Théorème 8.243 ([339, 1])**.**
Toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie admet une base formée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux (pour la forme considérée).

Démonstration. Nous considérons la base $\{l_i\}$ de E^* donnée par la réduction de Gauss (théorème 8.239). La forme quadratique q s'écrit

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i(x)^2. \tag{8.490}$$

La base préduale[94] $\{e_i\}$ de $\{l_i\}$ répond aux conditions. Pour le vérifier, nous considérons la forme bilinéaire associée à q par l'identité de polarisation 8.137 :

$$b(e_i,e_j) = \frac{1}{2}\big(q(e_i) + q(e_j) - q(e_i - e_j)\big). \tag{8.491}$$

Vu que $l_k(e_i) = \delta_{ki}$, nous avons

$$q(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k l_k(e_i)^2 = \alpha_i. \tag{8.492}$$

En utilisant la linéarité,

$$\begin{aligned} q(e_i - e_j) &= \sum_k \alpha_k l_k(e_i - e_j)^2 && \text{(8.493a)}\\ &= \sum_k \alpha_k (\delta_{ki} - \delta_{kj})^2 && \text{(8.493b)}\\ &= \sum_k \alpha_k (\delta_{ki} + \delta_{kj} - 2\delta_{ki}\delta_{kj}) && \text{(8.493c)}\\ &= \alpha_i + \alpha_j - 2\delta_{ij}\alpha_i. && \text{(8.493d)} \end{aligned}$$

Donc

$$b(e_i,e_j) = \delta_{ij}\alpha_i. \tag{8.494}$$

Les vecteurs $\{e_i\}$ sont donc bien deux à deux q-orthogonaux. □

Notons qu'en l'absence de notion de racine carrée sur $\mathbb{K}$, il n'est pas possible de considérer $\sqrt{\alpha_i}$ et donc de base q-orthonormée.

[94] Définition, existence, unicité dans la proposition 4.140.

PROPooPMYCooAAtHsB

Proposition 8.244 ([1]).
Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ est telle que $\det(A) = 0$, alors il existe des matrices de manipulation de lignes et de colonnes[95] *$G_1,\dots,G_p$ et $H_1,\dots,H_q$ telles que $G_1\dots G_N\, A\, H_1\dots H_q$ ait une colonne de zéros.*

Démonstration. Si la matrice A n'a pas de colonnes de zéros, il existe un i tel que $A_{i1} \neq 0$. Nous utilisons une matrice de permutation de ligne 1 et i :

$$\big(S(n,i,1)A\big)_{11} \neq 0. \tag{8.495}$$

Nous notons s ce nombre. Alors en multipliant la première ligne par $1/s$ nous avons un 1 dans la première case :

$$\big(T(n,1,1/s)S(n,i,1)A\big)_{11} = 1. \tag{8.496}$$

Pour la suite nous n'allons plus être aussi explicite.

Maintenant, en faisant des combinaisons entre la première colonne et les autres, nous pouvons annuler toutes les autres entrées 1_{1i}. Tout ça pour dire qu'il existe des matrices $G_1,\dots,G_{p'}$ et $H_1,\dots,H_{q'}$ telles que

$$G_1\dots G_{p'}AH_1\dots H_{q'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{8.497}$$

Si $A^{(1)}$ ne possède pas de colonnes de zéros, nous pouvons continuer.

Si nous parvenons à faire n pas de la sorte, alors nous aurions

$$G_1\dots G_pAH_1\dots H_q = \delta, \tag{8.498}$$

et donc, par le lemme 4.94, nous aurions $\det(G_1\dots G_p)\det(A)\det(H_1\dots H_q) = 1$, ce qui est impossible lorsque $\det(A) = 0$. Nous en concluons que le processus doit s'arrêter et qu'une des matrices $A^{(k)}$ doit avoir une colonne de zéros[96]. □

PROPooVUDJooLWjmSI

Proposition 8.245.
Une matrice dont le déterminant est nul n'est pas inversible.

Démonstration. Par la proposition 8.244, il existe des matrices de manipulation de lignes et de colonnes $G_1,\dots,G_p$ telles que la matrice $G_1\dots G_p\, A\, H_1\dots H_q$ ait une colonne de zéros. De là, la proposition 4.104 implique que la matrice

EQooQGXBooXxFOtb

$$G_1\dots G_pAH_1\dots H_q \tag{8.499}$$

n'est pas inversible. Vu les déterminants des matrices G_i, la proposition 4.103 implique que $G_1\dots G_p$ et $H_1\dots H_q$ sont inversibles. Si A était inversible, tout le produit serait inversible, ce qui est faux. □

THOooSNXWooSRjleb

Théorème 8.246.
Une matrice sur un corps commutatif est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Démonstration. Dans un sens c'est la proposition 4.103 et dans l'autre sens c'est la proposition 8.245. □

PROPooHQNPooIfPEDH

Proposition 8.247.
Soient des matrices A et B sur un corps commutatif. Alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{8.500}$$

Démonstration. Les propositions 4.107 et 4.108 ont déjà fait une grosse partie du travail. Il ne reste que le cas où $\det(A) = \det(B) = 0$.

Dans ce cas, les matrices A et B ne sont pas inversibles (proposition 8.246). Le produit AB n'est alors pas inversible non plus[97]. La proposition 8.246, utilisée dans le sens inverse, nous dit alors que $\det(AB) = 0$.

Au final dans le cas $\det(A) = \det(B) = 0$ nous avons $0 = \det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$. □

Faisons maintenant le cas général des manipulations de lignes et colonnes.

[95] Les opérations élémentaires sur les lignes sont résumées en 4.92.
[96] En réalité, le processus tel que nous l'avons décrit ne s'arrête que lorsque la première colonne est remplie de zéros.
[97] Citez le lemme 4.100 si vous voulez justifier ça.

PROPooSLLGooSZjQrv

Proposition 8.248.
Soit une matrice carrée $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. La matrice B obtenue par la substitution simultanée

$$C_j \to \sum_k a_{kj} C_k \tag{8.501}$$

a pour déterminant

$$\det(B) = \det(a)\det(A). \tag{8.502}$$

Démonstration. L'élément B_{ij} de la matrice B est une combinaison linéaire de tous les éléments de sa ligne :

$$B_{ij} = \sum_k a_{kj} A_{ik} = (Aa)_{ij}. \tag{8.503}$$

Donc $B = Aa$. La proposition 8.247 nous dit alors que $\det(B) = \det(a)\det(A)$. □

ThoQFVsBCk

Théorème 8.249 (de Sylvester[332])**.**
Soit Q une forme quadratique réelle de signature[98] *(p, q) sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant p + q)$. Alors pour toute base Q-orthogonale $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^{p+q}$ nous avons les propriétés suivantes.*

ITEMooCFQHooRWfmpT

(1) Les nombres p et q sont donnée par

$$p = \text{Card}\{i \text{ tel que } Q(e_i) > 0\} \tag{8.504a}$$
$$q = \text{Card}\{i \text{ tel que } Q(e_i) < 0\}. \tag{8.504b}$$

SUBEQooONWLooNsgmQY
SUBEQooFKXMooQVwyKR
ITEMooWLPVooSTOOjL

(2) Si A est la matrice de Q dans une base, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$P^t A P = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_q & & \\ & \mathbb{1}_p & \\ & & 0_{n-p-q} \end{pmatrix}. \tag{8.505}$$

ITEMooGOHCooPrNQwm

(3) Le rang de Q est $p + q$.

Démonstration. Soit F un sous-espace de dimension maximale q sur lequel Q est définie négative. Le fait que la dimension de F soit q est la définition 8.159 de la signature. Nous notons $F^\perp$ sont Q-orthogonal, c'est-à-dire que

$$F^\perp = \{v \in E \text{ tel que } B(v, x) = 0 \, \forall x \in F\}. \tag{8.506}$$

Le lemme 8.135 nous assure que $E = F \oplus F^\perp$.

Le théorème 8.243 sur l'existence de bases Q-orthogonales nous permet de considérer une base Q-orthogonale de F et une de $F^\perp$. En réunissant les deux, nous avons une base de E. Nous la notons $\{f_1, \dots, f_n\}$ avec

- La partie $\{f_1, \dots, f_q\}$ est une base de F,
- La partie $\{f_{q+1}, \dots, f_n\}$ est une base de $F^\perp$,
- Remarquez cependant qu'il n'est pas dit que $n = q + p$.

Notons que pour $i > q$, nous avons $Q(f_i) \geqslant 0$, sinon la maximalité de F serait contredite par $\text{Span}\{f_1, \dots, f_q, f_i\}$.

Cela prouve que

$$\text{Card}\{i \text{ tel que } Q(f_i) > 0\} = p. \tag{8.507}$$

Le lemme 8.162 nous dit alors que

$$\text{Card}\{i \text{ tel que } Q(e_i) > 0\} = \text{Card}\{i \text{ tel que } Q(f_i) > 0\} = p. \tag{8.508}$$

C'est l'égalité (8.504b). L'égalité (8.504a) se prouve de la même façon, en prenant F maximal pour la propriété que Q y est strictement définie positive.

Le point (1) est prouvé.

Dans une base Q-orthogonale, la matrice de Q est diagonale, et contient sur la diagonale les valeurs de $Q(e_i)$. Parmi celles-ci, on en a p strictement positives et q strictement négatives. Les $n - p - q$ autres

[98] Définition 8.159.

sont nulles. Vu que Q est à valeur réelle, nous avons une notion de racine carré, et nous pouvons considérer $e_i/\sqrt{|Q(e_i)|}$ au lieu de e_i. De cette façon, $Q(e_i)$ est normalisé. Avec ça, la matrice de Q est

$$D = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.509}$$ EQooLQNRooCsgKVF

Nous venons de prouver qu'il existe une base $\{e_i\}$ dans laquelle la matrice de Q est (8.509). Si A est la matrice de Q dans une base quelconque $\{f_i\}$ et si P est la matrice de changement de base $f_j = \sum_i P_{ij}e_i$, la proposition 8.147 donne $D = P^tAP$.

Le point (2) est prouvé.

Pour (3), la proposition 8.161 nous permet de calculer le rang de Q par le rang de sa matrice dans n'importe quelle base. Nous choisissons la base qui donne la matrice (8.509). Le rang est alors bien $p+q$. □

8.12.10 Équivalence de formes quadratiques

DEFooOLWYooMwhMJp

Définition 8.250 (Équivalence de forme quadratique[325])**.**
*Deux formes quadratiques q et q' sont **équivalentes** si il existe une application linéaire inversible ϕ telle que $q' = q \circ \phi$.*

PROPooBWXMooLsgyKm

Proposition 8.251 ([332])**.**
Deux formes quadratiques sont équivalentes[99] *si et seulement si elles ont même signature*[100]*.*

Démonstration. En deux parties, et en utilisant tout le temps le théorème de Sylvester 8.249. Dans la suite nous allons toujours noter de la même façon les formes quadratiques, les applications linéaires et leurs matrices correspondantes.

(1) $\Rightarrow$ Soient deux formes quadratiques équivalentes q et q'. Nous avons une application linéaire ϕ telle que $q' = q \circ \phi$. Soit une matrice inversible P telle que

$$P^tAP = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{q'} & & \\ & \mathbb{1}_{p'} & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.510}$$ EQooTCIRooFtWiTz

où (p', q') est la signature de q'. Par équivalence et par le changement de base de la proposition 8.146, nous avons $q' = \phi^t q \phi$, et donc

$$P^tq'P = (\phi P)^t q(\phi P). \tag{8.511}$$

Dans la base des $(\phi \circ P)e_i$, la matrice de q est (8.510). Donc le point 8.249(1) du théorème de Sylvester montre que la signature de q est également (p', q').

(2) $\Rightarrow$ Nous supposons que q et q' ont la même signature. Il existe donc des matrices inversibles P et Q telles que $P^tq'P$ et Q^tqQ aient la même forme (celle de la matrice (8.510)). Autrement dit,

$$q' \circ P = q \circ Q, \tag{8.512}$$

d'où nous déduisons que $q' = q \circ Q \circ P^{-1}$ parce que P est inversible. Comme l'application $Q \circ P^{-1}$ est inversible, les formes quadratiques q et q' sont équivalentes.

□

8.12.11 Diagonalisation

DEFooGVGGooWQEIET

Lemme-Définition 8.252.
Soit une forme quadratique[101] *q sur l'espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$. Soit A la matrice de q dans la base $\{e_i\}$ et B sa matrice dans la base $\{f_\alpha\}$. Nous supposons que le changement de base est orthogonal.*

Alors les valeurs propres de A et B sont les mêmes.

*Ces valeurs sont les **valeurs propres** de q.*

[99] Définition 8.250.
[100] Définition 8.159.
[101] Définition 8.121.

Démonstration. Nous nous rappelons de la définition 8.144 de la matrice associée à q, et à la proposition 8.147 qui parle de changement de base : $B = Q^tAQ$ où Q est orthogonale.

Soit un vecteur propre v de A, de valeur propre λ. Alors nous prouvons que Q^tv est un vecteur propre pour B, de même valeur propre λ. En effet,

$$BQ^tv = Q^tAQQ^tv = Q^tAv = \lambda Q^tv \tag{8.513}$$

où nous avons utilisé $QQ^t = \mathbb{1}$ et $Av = \lambda v$. □

PropFWYooQXfcVY

Proposition 8.253.
Dans la base de diagonalisation de sa matrice associée, une forme quadratique a la forme

$$q(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \tag{8.514}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice associée à q.

Démonstration. Soit q une forme quadratique et b la forme bilinéaire associée. Si $\{f_i\}$ est une base de diagonalisation[102] de la matrice de b alors dans cette base nous avons

$$q(x) = b(x,x) = \sum_{ij} x_ix_jb(f_i,f_j) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \tag{8.515}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice de b. □

Notons que si nous choisissons une autre base de diagonalisation, les λ_i ne changement pas (à part l'ordre éventuellement).

Cela justifie la définition pour dire que nous nous permettrons de parler des **valeurs propres** d'une forme quadratique comme étant les valeurs propres de la matrice associée.

Le théorème 8.243 a déjà donné une base orthogonale pour toute forme quadratique sur un espace vectoriel $(E, \mathbb{K})$ de dimension finie. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, nous pouvons en donner une preuve basée sur le théorème spectral, c'est la proposition 8.254.

PROPooUKRUooGRIDHt

Proposition 8.254.
Soit une forme bilinéaire symétrique b sur un $\mathbb{R}^n$. Il existe une matrice orthogonale Q telle que

(1) $D = Q^tbQ$ est diagonale

(2) $D(x,y) = b(Qx,Qy)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Il existe une base $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ qui est b-orthogonale.

Dans cet énoncé, nous mélangeons sans vergogne les formes et les matrices, en supposant qu'une base soit fixée[103]*. Par exemple*

$$D(x,y) = \sum_{ij} D_{ij}x_iy_j. \tag{8.516}$$

Démonstration. Pour la matrice diagonale, c'est le théorème spectral 8.225(2) qui joue parce que la matrice d'une forme bilinéaire symétrique est symétrique (c'est vu de la définition (8.301)).

Pour le reste c'est un calcul :

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \sum_{ijkl} Q^t_{ik}b_{kl}Q_{lj}x_iy_j && \text{(8.517a)}\\ &= \sum_{ijkl} b_{kl}(Q_{ki}x_i)(Q_{lj}y_j) && \text{(8.517b)}\\ &= \sum_{kl} b_{kl}(Qx)_k(Qy)_l && \text{(8.517c)}\\ &= b(Qx,Qy). && \text{(8.517d)} \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le produit matrice fois vecteur donné par (4.87).

En ce qui concerne l'existence d'une base b-orthogonale, vu que D est diagonale, nous avons, pour $i \neq j$ que $D(e_i,e_j) = 0$. Donc en posant $f_i = Qe_i$, nous trouvons

$$0 = D(e_i,e_j) = b(Qe_i,Qe_j) = b(f_i,f_j). \tag{8.518}$$

La base $(Qe_i)_{i=1,\dots,n}$ est donc b-orthogonale. □

[102] Qui existe parce que la matrice est symétrique, théorème 8.225.

[103] Autrement dit, si vous avez en tête d'utiliser cette proposition pour $\mathbb{R}^n$ c'est bon ; mais sinon vous devez choisir une base et considérer toutes les matrices dans cette base.

8.13 Fonctions

Sect_fonctions

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et une fonction f de E dans F. Il est maintenant facile de définir les notions de limites et de continuité pour de telles fonctions en copiant les définitions données pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et en changeant simplement les valeurs absolues par les normes sur E et F.

La proposition suivante explicite la définition 7.135 dans le cas où la topologie est donnée par des boules.

PropHOCWooSzrMjl

Proposition 8.255 (Caractérisation de la limite)**.**
Soient des espaces vectoriels normés. Soit $f\colon E \to F$ une fonction de domaine $\mathrm{Dom}(f) \subset E$ et soit a un point d'accumulation de $\mathrm{Dom}(f)$.

(1) Si F est séparé[104] *et si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.*

ITEMooSHKNooStKGKH

(2) La fonction f admet une limite en $a \in E$ si et seulement si il existe un élément $\ell \in F$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D = \mathrm{Dom}(f)$,

EqDefLimzxmasubV

$$0 < \|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon. \tag{8.519}$$

*Si la limite existe et est unique, nous écrivons $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et nous disons que ℓ est la **limite** de f lorsque x tend vers a.*

Démonstration. L'unicité est la proposition 7.138.

(1) $\Rightarrow$ La définition 7.135 nous assure de l'existence d'un élément ℓ tel que pour tout voisinage S de ℓ, il existe un ouvert U autour de a tel que $f\big(U \cap D \setminus \{a\}\big) \subset S$.

Soit $\epsilon > 0$. Nous posons $S = B(\ell, \epsilon)$. Il existe un voisinage U de a tel que $f\big(U \cap D \setminus \{a\}\big) \subset B(\ell, \epsilon)$. Puisque U est un voisinage de a, il contient une boule centrée en a (c'est dans la définition 7.142 de la topologie métrique). Soit donc $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset U$.

Un élément de D qui est dans $B(0, \delta) \setminus \{a\}$ est un élément de D qui vérifie $0 < \|x - a\| < \delta$. Nous avons donc, pour $x \in D$ que

$$0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \epsilon. \tag{8.520}$$

(2) $\Leftarrow$ C'est le même raisonnement.

□

Remarque 8.256.
Le fait que nous limitions la formule (8.519) aux x dans le domaine de f n'est pas anodin. Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, de domaine $|x| \geqslant 2$. Nous avons

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2 - 4} = 0. \tag{8.521}$$

Nous ne pouvons pas dire que cette limite n'existe pas en justifiant que la limite à gauche n'existe pas. Les points $x < 2$ sont hors du domaine de f et ne comptent dons pas dans l'appréciation de l'existence de la limite.

Vous verrez plus tard que ceci provient de la topologie induite de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble $[2, \infty[$.

8.14 Sous-espaces caractéristiques

Lorsqu'un opérateur n'est pas diagonalisable, les valeurs propres jouent quand même un rôle important.

DefFBNIooCGbIix

Définition 8.257.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathrm{End}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ nous définissons

$$F_\lambda(f) = \{v \in E \text{ tel que } (f - \lambda\mathbb{1})^n v = 0, n \in \mathbb{N}\} \tag{8.522}$$

*et nous appelons cet ensemble un **sous-espace caractéristique** de f.*

L'espace $F_\lambda(f)$ est l'ensemble de nilpotence de l'opérateur $f - \lambda\mathbb{1}$ et

[104] C'est le cas en dimension finie et en particulier pour $\mathbb{R}^n$. En dimension infinie, il faut être très prudent.

LemBLPooHMAoyJ

Lemme 8.258.
L'ensemble $F_\lambda(f)$ est non vide si et seulement si λ est une valeur propre de f. L'espace $F_\lambda(f)$ est invariant sous f.

Démonstration. Si $F_\lambda(f)$ est non vide, nous considérons $v \in F_\lambda(f)$ et n le plus petit entier non nul tel que $(f-\lambda)^n v = 0$. Alors $(f-\lambda)^{n-1}v$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ. Réciproquement, si v est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ, alors $v \in F_\lambda(f)$.

En ce qui concerne l'invariance, remarquons que f commute avec $f-\lambda\mathbb{1}$. Si $x \in F_\lambda(f)$ il existe n tel que $(f-\lambda\mathbb{1})^n x = 0$. Nous avons aussi

$$(f-\lambda\mathbb{1})^n f(x) = f\big((f-\lambda\mathbb{1})^n x\big) = 0, \tag{8.523}$$

par conséquent $f(x) \in F_\lambda(f)$. □

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, il n'est pas vrai que toute matrice à coefficient réel est diagonalisable, même pas sur $\mathbb{C}$. La raison est qu'une telle matrice peut très bien avoir des valeurs propres multiples.

ExBRXUooIlUnSx

Exemple 8.259.
Le théorème 8.217 nous donne une façon simple de trouver des matrices non diagonalisables sur $\mathbb{C}$: il suffit que le polynôme minimal ne soit pas scindé à racines simples. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.524}$$

dont le polynôme caractéristique est $\chi_A = (1-X)^2$. Ce polynôme n'a manifestement pas des racines simples. Nous pouvons faire le calcul explicite pour montrer que A n'est pas diagonalisable. D'abord l'unique valeur propre de A est 1 et nous pouvons sans peine résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{8.525}$$

qui revient au système

$$\begin{cases} x+y = x & \text{(8.526a)} \\ y = y. & \text{(8.526b)} \end{cases}$$

La première équation donne directement $y = 0$. Le seul espace propre est de dimension 1 et est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. △

Nous donnons maintenant un exemple un peu plus avancé de matrice réelle non diagonalisable, qui montre la multiplicité algébrique et géométrique d'une racine d'un polynôme caractéristique.

RemBOGooCLMwyb

Remarque 8.260.
Considérons l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ 0 & a & \gamma \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \tag{8.527}$$

avec $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\alpha \neq 0$, β et γ sont des nombres complexes quelconques. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_f(X) = (a-X)^2(b-X), \tag{8.528}$$

et les valeurs propres sont donc a et b. Nous trouvons les vecteurs propres pour la valeur a en résolvant

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ 0 & a & \gamma \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}. \tag{8.529}$$

La troisième équation est $bz = az$ qui oblige $z = 0$ parce que $a \neq b$ et $0 \neq a$. La première est $ax + \alpha y = ax$ qui implique $y = 0$ parce que $\alpha \neq 0$. Enfin la première équation se réduit à $ax = ax$ qui ne donne pas de contraintes sur x. En résumé : l'espace propre $E_a(f)$ est réduit à une seule dimension générée par $(1,0,0)$.

De la même façon l'espace propre correspondant à la valeur propre b est donné par le système

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ & a & \gamma \\ & & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx \\ by \\ bz \end{pmatrix} \tag{8.530}$$

La seconde équation donne $ay + \gamma z = by$, et donc

$$y = \frac{\gamma}{b-a} z. \tag{8.531}$$

La première équation est $ax + \alpha y + \beta z = bx$ qui donne

$$x = \frac{1}{b-a}(\alpha y + \beta z). \tag{8.532}$$

En y remettant la valeur déjà trouvée de y, nous trouvons que l'espace propre pour la valeur propre b est engendré par le vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b-a}\left(\beta + \frac{\alpha\gamma}{b-a}\right) \\ \frac{\gamma}{b-a} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.533}$$

Vu que nous savons que a et b sont les seules valeurs propres et que nous venons de voir que leurs espaces propres sont de dimension 1, il n'y a donc pas trois vecteurs propres linéairement indépendants, et l'opérateur f n'est pas diagonalisable.

Par contre nous pouvons voir que $(f - a\mathbb{1})^2 e_2 = 0$. En effet :

$$(f - a\mathbb{1})^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.534}$$

de telle sorte que le vecteur $(0, 1, 0)$ est également dans l'espace caractéristique $F_a(f)$.

Dans cet exemple, la multiplicité algébrique de la racine a du polynôme caractéristique vaut 2 tandis que sa multiplicité géométrique vaut seulement 1.

8.14.1 Théorèmes de décomposition

ThoSpectraluRMLok

Théorème 8.261 (Théorème spectral, décomposition primaire)**.**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ et $f \in \mathrm{End}(E)$. Alors

EqCTFHooBSGhYK
$$E = F_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus F_{\lambda_k}(f) \tag{8.535}$$

où la somme est sur les espaces caractéristiques engendrés par les valeurs propres distinctes de f.

Les projecteurs sur les espaces caractéristiques forment un système complet et orthogonal.

Démonstration. Soit P le polynôme caractéristique de f et une décomposition

$$P = (f - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (f - \lambda_r)^{\alpha_r} \tag{8.536}$$

en facteurs irréductibles. Par le théorème des noyaux (8.90) nous avons

EqDeFVSaYv
$$E = \ker(f - \lambda_1)^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus \ker(f - \lambda_r)^{\alpha_r}. \tag{8.537}$$

Les projecteurs sont des polynômes en f et forment un système orthogonal. Il nous reste à prouver que $\ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i} = F_{\lambda_i}(f)$. L'inclusion

EqzmNxPi
$$\ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i} \subset F_{\lambda_i}(f) \tag{8.538}$$

est évidente. Nous devons montrer l'inclusion inverse.

(1) $F_{\lambda_i}(f) \cap F_{\lambda_j}(f) = 0$

Soit $v \in F_{\lambda_i}(f) \cap F_{\lambda_j}(f)$. Le fait que $v \in F_{\lambda_i}(f)$ implique qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(f - \lambda_i)^n v \neq 0$ et $(f - \lambda_i)^{n+1} v = 0$ (éventuellement $n = 0$ si v est un vecteur propre). Posons $v_1 = (f - \lambda_i)^n v$.

Étant donné que $(f - \lambda_i)$ commute avec $(f - \lambda_j)$, ce v_1 est encore dans $F_{\lambda_j}(f)$. En effet, si k est tel que $(f - \lambda_j)^k v = 0$, alors

$$(f - \lambda_j)^k v_1 = (f - \lambda_j)^k (f - \lambda_i)^n v = (f - \lambda_i)^n (f - \lambda_j)^k v = 0. \tag{8.539}$$

Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $(f-\lambda_j)^m v_1 \neq 0$ et $(f-\lambda_j)^{m+1}v_1 = 0$. En posant $w = (f-\lambda_j)^m v_1$, nous avons

$$\begin{cases} (f-\lambda_i)w = (f-\lambda_j)^m (f-\lambda_i)^{n+1} v = 0 & (8.540a)\\ (f-\lambda_j)w = (f-\lambda_j)^{m+1} v_1 = 0. & (8.540b) \end{cases}$$

Ce w serait donc un vecteur propre simultané pour les valeurs propres λ_i et λ_j. Vu que les espaces propres sont linéairement indépendants, les seules possibilités sont $i = j$ ou $w = 0$.

(2) **Questions de dimension** Étant donné que espaces F_{λ_i} sont en somme directe, la somme de leurs dimensions est au maximum la dimension de E :

$$\sum_i \dim F_{\lambda_i}(f) \leqslant \dim E. \tag{8.541}$$

En tenant compte de l'inclusion (8.538) nous avons même

$$\dim E = \sum_i \dim \ker(f-\lambda_i)^{\alpha_i} \leqslant \sum_i \dim F_{\lambda_i}(f) \leqslant \dim E. \tag{8.542}$$

Vu qu'il y a $\dim(E)$ des deux côtés des inégalités, toutes les inégalités sont des égalités et nous avons

$$\sum_i \dim \ker(f-\lambda_i)^{\alpha_i} = \sum_i \dim F_{\lambda_i}(f). \tag{8.543}$$ EQooQPLMooDXAgZi

L'inclusion (8.538) nous dit qu'il y a une inégalité terme à terme dans les sommes de (8.543). Vu qu'il y a égalité des sommes, il y a en réalité égalité de chacun des termes : $\dim\ker(f-\lambda_i)^{\alpha_i} = \dim F_{\lambda_i}(f)$ et l'égalité des deux espaces de (8.538) :

$$\ker(f-\lambda_i)^{\alpha_i} = F_{\lambda_i}(f). \tag{8.544}$$

□

Si l'espace vectoriel est sur un corps algébriquement clos, alors les endomorphismes semi-simples[105] sont les endomorphismes diagonaux.

ThoRURcpW

Théorème 8.262 (Décomposition de Dunford)**.**
Soit E un espace vectoriel sur le corps algébriquement clos[106] *$\mathbb{K}$ et $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E.*

(1) L'endomorphisme u se décompose de façon unique sous la forme

$$u = s + n \tag{8.545}$$

où s est diagonalisable, n est nilpotent et $[s,n] = 0$[107]*.*

(2) Les endomorphismes s et n sont des polynômes en u et commutent avec u. ItemThoRURcpWiii

(3) Si notons $\{\lambda_i\}$ les valeurs propres distinctes de u, et $F_{\lambda_i}(u)$ les espaces caractéristiques correspondants, alors les parties s et n sont données par

$$s = \sum_i \lambda_i p_i \tag{8.546a}$$

$$n = \sum_i (s - \lambda_i \mathbb{1}) p_i \tag{8.546b}$$

$p_i \colon E \to F_{\lambda_i}(u)$ est la projection de E sur $F_{\lambda_i}(u)$.

[105] Définition 8.104.
[106] Je crois quo'n peut remplacer l'ypothèse de corps alébriquement clos par une hypothèse de polynôme caractéristique scindé. Écrivez-moi si vous avez une idée à ce propos.
[107] Lorsque a et b sont des opérateurs, la notation $[a,b]$ signifie le commutateur entre a et b, c'est-à-dire $a \circ b - b \circ a$. Dire que $[a,b] = 0$ signifie que $ab = ba$.

Démonstration. Le théorème spectral 8.261 nous indique que

$$E = \bigoplus_i F_{\lambda_i}(f). \tag{8.547}$$

Nous considérons l'endomorphisme s de E qui consiste à dilater d'un facteur λ_i l'espace caractéristique $F_{\lambda_i}(f)$:

$$s = \sum_i \lambda_i p_i \tag{8.548}$$

où $p_i : E \to F_{\lambda_i}(u)$ est la projection de E sur $F_{\lambda_i}(u)$.

Nous allons prouver que $[s, f] = 0$ et $n = f - s$ est nilpotent. Cela impliquera que $[s, n] = 0$.

Si $x \in F_\lambda(f)$, alors nous avons $sf(x) = \lambda f(x)$ parce que $f(x) \in F_\lambda(f)$ tandis que $fs(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Par conséquent f commute avec s.

Pour montrer que $f - s$ est nilpotent, nous en considérons la restriction

$$f - s : F_\lambda(f) \to F_\lambda(f). \tag{8.549}$$

Cet opérateur est égal à $f - \lambda\mathbb{1}$ et est par conséquent nilpotent.

Prouvons à présent l'unicité. Soit $u = s' + n'$ une autre décomposition qui satisfait aux conditions : s' est diagonalisable, n' est nilpotent et $[n', s'] = 0$. Commençons par prouver que s' et n' commutent avec u. En multipliant $u = s' + n'$ par s' nous avons

$$s'u = s'^2 + s'n' = s'^2 + n's' = (s' + n')s' = us', \tag{8.550}$$

par conséquent $[u, s'] = 0$. Nous faisons la même chose avec n' pour trouver $[u, n'] = 0$. Notons que pour obtenir ce résultat nous avons utilisé le fait que n' et s' commutent, mais pas leur propriétés de nilpotence et de diagonalisibilité.

Si $s' + n' = s + n$ est une autre décomposition, s' et n' commutent avec u, et par conséquent avec tous les polynômes en u. Ils commutent en particulier avec n et s. Les endomorphismes s et s' sont alors deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. Par la proposition 8.220, ils sont simultanément diagonalisables. Dans la base de diagonalisation simultanée, la matrice de l'opérateur $s' - s = n - n'$ est donc diagonale. Mais $n - n'$ est également nilpotent, en effet si A et B sont deux opérateurs nilpotents,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}. \tag{8.551}$$

Si n est assez grand, au moins un parmi A^k ou B^{n-k} est nul.

Nous savons que $n - n'$ est diagonal et nilpotent. Le seul opérateur diagonal à être nilpotent est l'opérateur nul[108]. Nous en déduisons que $n = n'$. Nous avons alors immédiatement aussi $s = s'$. □

8.263.
Le théorème 12.438 montrera que $A^n x \to 0$ pour tout x si et seulement si $\rho(A) < 1$, mais ça demande un résultat de vitesse comparée entre l'exponentielle et la puissance.

Une application de la décomposition de Jordan est l'existence d'un logarithme pour les matrices. La proposition suivante va d'une certaine manière donner un logarithme pour les matrices inversibles complexes. Dans le cas des matrices réelles m telles que $\|m - \mathbb{1}\| < 1$, nous donnerons au lemme 15.171 une formule pour le logarithme sous forme d'une série ; ce logarithme sera réel.

8.14.2 Valeurs singulières

DEFooZSCYooQnBzix

Définition 8.264.
*Soit M une matrice $m \times n$ sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un nombre réel σ est une **valeur singulière** de M si il existe des vecteurs unitaires $u \in \mathbb{K}^m$, $v \in \mathbb{K}^n$ tels que*

$$Mv = \sigma u \tag{8.552a}$$
$$M^*u = \sigma v. \tag{8.552b}$$

THOooSCOLooSKlVvd

Théorème 8.265 (Décomposition en valeurs singulières)**.**
Soit $M \in \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Alors M se décompose en

$$M = ADB \tag{8.553}$$

où il existe deux matrices unitaires $A \in \mathrm{U}(m \times m)$, $B \in \mathrm{U}(n \times n)$ et une matrice (pseudo)diagonale $D \in \mathbb{M}(m \times n)$ tels que

[108] Parce qu'une puissance d'un opérateur diagonal est diagonal.

(1) $A \in \mathrm{U}(m \times m)$, $B \in \mathrm{U}(n \times n)$ *sont deux matrices unitaires,*

(2) D *est (pseudo)diagonale,*

(3) *les éléments diagonaux de* D *sont les valeurs singulières de* M*,*

(4) *le nombre d'éléments non nuls sur la diagonale de* D *est le rang*[109] *de* M*.*

Corolaire 8.266.
Soit $M \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Il existe un isomorphisme $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tel que fM soit autoadjoint.

Démonstration. Si $M = ADB$ est la décomposition de M en valeurs singulières, alors nous pouvons prendre $f = \overline{B}^t A^{-1}$ qui est une matrice inversible. Pour la vérification que ce f répond bien à la question, ne pas oublier que D est réelle, même si M ne l'est pas. □

8.15 Extension du corps de base

SECooAUOWooNdYTZf

Nous avons discuté dans la section 6.4 de ce qui arrive au corps lorsqu'on l'étend. Dans cette section nous allons étudier ce qui arrive aux applications linéaires entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels lorsque nous étendons le corps $\mathbb{K}$ en un corps $\mathbb{L}$.

Soient $\mathbb{K}$ un corps (commutatif) et une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Soient E et F, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et entrons dans le vif du sujet[110].

8.15.1 Extension des applications linéaires

Définition 8.267 ([340]).
L'espace vectoriel obtenu par ***extension du corps de base*** *de E est l'espace vectoriel*

$$E_{\mathbb{L}} = \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} E. \tag{8.554}$$

Ce dernier est le quotient $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} E = (\mathbb{L} \times E)/\sim$ par la relation d'équivalence

$$(\lambda, v) \sim \big(a\lambda, \frac{1}{a}v\big) \tag{8.555}$$

pour tout $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Nous noterons $[\lambda, v]$ ou $\lambda \otimes v$ ou encore $\lambda \otimes_{\mathbb{K}} v$ la classe de (λ, v) pour la relation d'équivalence $\sim$:

$$[\lambda, v] = \{(\mu, w) \in \mathbb{L} \times E \text{ tel que } (\mu, w) \sim (\lambda, v)\}. \tag{8.556}$$

Un élément de $E_{\mathbb{L}}$ est de la forme $\sum_k [\lambda_k, v_k]$ avec $\lambda_k \in \mathbb{L}$ et $v_k \in E$. Si $f : E \to F$ est une applications linéaire, nous définissons

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{L}} : E_{\mathbb{L}} &\to F_{\mathbb{L}} \\ [\lambda, v] &\mapsto [\lambda, f(v)]. \end{aligned} \tag{8.557}$$

EQooYGVHooHYbMHX

Remarque 8.268.
Si deux vecteurs de $E_{\mathbb{L}}$ sont linéairement indépendants pour $\mathbb{K}$, ils ne le sont pas spécialement pour $\mathbb{L}$. Par exemple si $\mathbb{C}$ est vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors $\{1, i\}$ est une partie libre. Mais dans $\mathbb{C}$, vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, la partie $\{1, i\}$ n'est pas libre.

LEMooJIGTooMqiJSN

Lemme 8.269.
Soient trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F et G ainsi que deux applications linéaires $f : E \to F$ et $g : G \to E$. Si $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$, alors

$$f_{\mathbb{L}} \circ g_{\mathbb{L}} = (f \circ g)_{\mathbb{L}}. \tag{8.558}$$

Démonstration. Il suffit de composer la définition (8.557) :

$$\begin{aligned} (f_{\mathbb{L}} \circ g_{\mathbb{L}})\big([\lambda, v]\big) &= f_{\mathbb{L}}\big([\lambda, g(v)]\big) && \text{(8.559a)} \\ &= [\lambda, (f \circ g)(v)] && \text{(8.559b)} \\ &= (f \circ g)_{\mathbb{L}}\big([\lambda, v]\big). && \text{(8.559c)} \end{aligned}$$

□

[109] Définition 4.48.
[110] Le sujet étant le corps étendu.

Nous définissons aussi l'injection canonique

$$\begin{aligned}\tau\colon E &\to E_{\mathbb{L}}\\ v &\mapsto [1,v].\end{aligned} \tag{8.560}$$

PropooWECLooHPzIHw

Proposition 8.270 ([153]).
Injectivité et surjectivité respectées.

(1) L'application $f_{\mathbb{L}}$ est injective si et seulement si f est injective.

(2) L'application $f_{\mathbb{L}}$ est surjective si et seulement si f est surjective.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Si $f_{\mathbb{L}}$ est injective** Supposons pour commencer que $f_{\mathbb{L}}$ soit injective. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ E_{\mathbb{L}} & \xrightarrow[f_{\mathbb{L}}]{} & F_{\mathbb{L}} \end{array} \tag{8.561}$$

est un diagramme commutatif. En effet

$$(\tau\circ f)(v) = [1, f(v)] \tag{8.562}$$

tandis que

$$(f_{\mathbb{L}}\circ\tau)(v) = f_{\mathbb{L}}[1,v] = [1,f(v)]. \tag{8.563}$$

Donc si $f(v)=0$ avec $v\neq 0$ nous aurions $(\tau\circ f)(v)=0$ et donc aussi $(f_{\mathbb{L}}\circ\tau)(v)=0$, alors que $\tau(v)\neq 0$ dans $E_{\mathbb{L}}$.

(2) **Si f est injecive**
Nous supposons que f est injective et que $f_{\mathbb{L}}(\lambda\otimes v) = f_{\mathbb{L}}(\mu\otimes w)$. Cela signifie que $\lambda\otimes f(v) = \mu\otimes f(w)$, ou encore qu'il existe $a\neq 0$ dans $\mathbb{K}$ tel que

$$\begin{cases} \mu = a\lambda & \text{(8.564a)}\\ f(w) = \dfrac{1}{a}f(v). & \text{(8.564b)}\end{cases}$$

Par linéarité de f, $f(v)=f(aw)$ et par injectivité de f, nous déduisons que $v=aw$. Enfin nous avons l'injectivité de $f_{\mathbb{L}}$ parce que

$$\mu\otimes w = a\lambda\otimes\frac{v}{a} = \lambda\otimes v. \tag{8.565}$$

□

PROPooMHARooUycAts

Proposition 8.271 ([1, 341]).
Soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,p}$ une base de E. Alors $\{1\otimes e_i\}_i$ est une base de $E_{\mathbb{L}} = \mathbb{L}\otimes_{\mathbb{K}} E$.

Démonstration. L'espace vectoriel E peut être écrit comme somme directe $E=\bigoplus_i \mathbb{K}e_i$. Si $\lambda\in\mathbb{L}$ et $k\in\mathbb{K}$ nous avons

$$\lambda\otimes ke_i = \frac{\lambda}{k}\otimes e_i = \frac{\lambda}{k}(1\otimes e_i). \tag{8.566}$$

Cela pour introduire l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathbb{L}\otimes_{\mathbb{K}} E &\to \bigoplus_i \mathbb{L}(1\otimes e_i)\\ \sum_k \lambda_k\otimes v_k &\mapsto \oplus_i \sum_k (\lambda_k v_{ik})(1\otimes e_i)\end{aligned} \tag{8.567}$$

où $v_k = \sum_i v_{ik}e_i$ avec $v_{ik}\in\mathbb{K}$, qui représente un isomorphisme de $\mathbb{L}$-espaces vectoriels. La surjectivité est facile. En ce qui concerne l'injectivité, si

$$\sum_i\sum_k (\lambda_k v_{ik})(1\otimes e_i) = 0 \tag{8.568}$$

alors les quantités suivantes sont nulles également :

$$\sum_i \sum_k (\lambda_k v_{ik})(1 \otimes e_i) = \sum_{ik} (\lambda_k \otimes v_{ik} e_i) = \sum_k (\lambda_k \otimes \sum_i v_{ik} e_i) = \sum_k (\lambda_k \otimes v_k). \tag{8.569}$$

La dernière est l'argument de ψ. Le fait qu'il soit nul implique que ψ est injective. □

Remarque 8.272.
Nous n'avons pas dû prouver que chacun des $\lambda_k \otimes v_k$ était nul. Et encore heureux, parce que cela pouvait très bien être faux, puisqu'il y a plusieurs façons de noter un élément de $E_{\mathbb{L}}$ sous la forme de tels termes.
CORooTQGHooIKhNtr

Corolaire 8.273.
La $\mathbb{L}$-dimension de $E_{\mathbb{L}}$ est égale à la $\mathbb{K}$-dimension de E.

8.15.2 Projections

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 8.274
Nous allons définir `proj`: $\mathcal{L}(E_{\mathbb{L}}, F_{\mathbb{L}}) \to \mathcal{L}(E, F)$ en faisant appel à des bases et en prouvant que les quantités définies ne dépendent pas des bases choisies. Il y a surement une façon plus « intrinsèque » de faire.

Nous savons que $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dans lequel nous pouvons voir $\mathbb{K}$ comme un sous-espace (lemme 6.60). Dans cette optique nous choisissons dans $\mathbb{L}$ un supplémentaire de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{L}$ tel que

$$\mathbb{L} = \mathbb{K} \oplus V. \tag{8.570}$$

Nous avons alors naturellement une projection $\texttt{proj}: \mathbb{L} \to \mathbb{K}$.

Soit $\{e_i\}$ une base de E et $\{e_a\}$ une de F. Nous noterons également e_i et e_a les éléments $\tau(e_i)$ et $\tau(e_a)$ correspondants. Grâce à la proposition 8.271, ce sont des bases de $E_{\mathbb{L}}$ et $F_{\mathbb{L}}$. Si la fonction $f: E_{\mathbb{L}} \to F_{\mathbb{L}}$ s'écrit dans ces bases comme

$$f(e_i) = \sum_a f_{ai} e_a \tag{8.571}$$

alors nous définissons $\texttt{proj}(f)$ par

$$(\texttt{proj}\, f) e_i = \sum_a \texttt{proj}(f_{ai}) e_a. \tag{8.572}$$
EQooSAFRooJnfkLQ

PROPooOEHTooHyjuZQ

Proposition 8.275 ([1]).
L'application `proj` définie en (8.572) est indépendante du choix des bases.

Démonstration. Notons que dans ce qui suit, les sommes sur a ou b et celles sur i ou j ne vont pas jusqu'au même indice (dimensions de E et F). De plus nous manipulons deux quantités qui se notent `proj`. La première est la projection $\texttt{proj}: \mathbb{L} \to \mathbb{K}$ qui ne dépend que d'un choix de supplémentaire et que nous supposons fixée ici. D'autre part il y a $\texttt{proj}: E_{\mathbb{L}} \to E$ qui dépend à priori des bases choisies.

Nous choisissons de nouvelles bases qui sont liées aux anciennes bases par

$$\begin{cases} e'_b = \sum_a B_{ab} e_a & \text{(8.573a)} \\ e'_j = \sum_i A_{ji} e_i. & \text{(8.573b)} \end{cases}$$

Les matrices A et B sont dans $\mathrm{GL}(\mathbb{K})$. Nous allons écrire l'opérateur $\texttt{proj}'$ qui correspond à ces bases et montrer que pour toute application linéaire $f: E_{\mathbb{L}} \to F_{\mathbb{L}}$ nous avons $\texttt{proj}(f) = \texttt{proj}'(f)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} f(e'_j) &= \sum_i A_{ji} f(e_i) && \text{(8.574a)} \\ &= \sum_a \sum_b \sum_i A_{ji} f_{ai} (B^{-1})_{ba} e'b && \text{(8.574b)} \\ &= \sum_b \Big(\sum_{ai} A_{ji} f_{ai} (B^{-1})_{ba} \Big) e'b, && \text{(8.574c)} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(\texttt{proj}'\, f) e'_j = \sum_b \Big(\texttt{proj} \left(A_{ji} f_{ai} (B^{-1})_{ba} \right) \Big) e'_b. \tag{8.575}$$
EQooUQNBooMWHBbD

Nous calculons maintenant $(\texttt{proj}'\, f)e_j$ en substituant $e_j = \sum_l (A^{-1})_{lj} e'_l$ et en utilisant (8.575), la linéarité de $\texttt{proj}'$ et la $\mathbb{K}$-linéarité de $\texttt{proj}\colon \mathbb{L} \to \mathbb{K}$:

$$(\texttt{proj}'\, f)\Big(\sum_l (A^{-1})_{lj} e'_l\Big) = \sum_l (A^{-1})_{lj} \sum_b \sum_{ai} \texttt{proj}\left(A_{li} f_{ai} (B^{-1})_{ba}\right) e_b \tag{8.576a}$$

$$= \sum_a \texttt{proj}(f_{aj}) e_a \tag{8.576b}$$

$$= (\texttt{proj}\, f) e_j. \tag{8.576c}$$

Donc $\texttt{proj} = \texttt{proj}'$. □

Note au passage : il y a un abus systématique de notation entre $e_i \in E$ et $\tau(e_i) = 1 \otimes e_i \in E_{\mathbb{L}}$.

REMooBEXGooLgpHzg

Remarque 8.276 ([1])**.**
L'opération $\texttt{proj}\colon \mathcal{L}(E_{\mathbb{L}}, F_{\mathbb{L}}) \to \mathcal{L}(E, F)$ ne dépend pas des bases choisies un peu partout. Mais elle dépend de l'application $\texttt{proj}\colon \mathbb{L} \to \mathbb{K}$ déjà construite. Et celle-là dépend du choix d'un supplémentaire V qui fournit $\mathbb{L} = \mathbb{K} \oplus V$.

Si $\texttt{proj}(\lambda) = 0$ pour un de ces choix, cela n'implique nullement que $\lambda = 0$. Penser à $i \in \mathbb{C}$ si la projection $\texttt{proj}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est l'application $(x + iy) \mapsto x$ parallèle à l'axe des imaginaires.

Par contre si $\texttt{proj}(\lambda) = 0$ pour tout choix de V, alors nous avons bien $\lambda = 0$. Dans la suite nous « fixons » un choix de V générique, et lorsque nous rencontrerons l'égalité $\texttt{proj}(\lambda) = 0$ nous en déduirons $\lambda = 0$.

PROPooPWDKooFNFWRI

Proposition 8.277.
Si $f\colon E \to F$ et si $f_{\mathbb{L}}(e_j) = \sum_a (f_{\mathbb{L}})_{aj} e_a$ et si $f(e_j) = \sum_a f_{aj} e_a$ alors

(1) $\texttt{proj}\, f_{\mathbb{L}} = f$,

ITEMooNMPYooXosGhI

(2) $(f_{\mathbb{L}})_{aj} = f_{aj} \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Nous avons

$$f_{\mathbb{L}}(e_i) = \sum_a f_{ai}(1 \otimes e_a) = \sum_a f_{ai} \tau(e_a), \tag{8.577}$$

donc

$$(\texttt{proj}\, f_{\mathbb{L}}) e_i = \sum_a \texttt{proj}(f_{ai}) e_a = \sum_a f_{ai} e_a = f(e_i). \tag{8.578}$$

Cela prouve que $\texttt{proj}\, f_{\mathbb{L}} = f$.

Par ailleurs,

$$f_{\mathbb{L}}(\tau(e_i)) = f_{\mathbb{L}}(1 \otimes e_i) = 1 \otimes f(e_i) = \tau\big(f(e_i)\big) = \sum_a f_{ai} \tau(e_a) \tag{8.579}$$

EQooIOTFooNAdkit

alors que par définition,

$$f_{\mathbb{L}}(\tau(e_i)) = \sum_a (f_{\mathbb{L}})_{ai} \tau(e_a). \tag{8.580}$$

EQooMYSCooPFWATG

Les éléments $\tau(e_a)$ formant une base[111], la comparaison de (8.579) avec (8.580) donne $(f_{\mathbb{L}})_{ai} = f_{ai} \in \mathbb{K}$. □

LEMooWZGSooONEnjZ

Lemme 8.278.
Soient des espaces vectoriels E, F et G ainsi que des applications linéaires

(1) $f\colon E \to F$,

(2) $\tilde{h}\colon G_{\mathbb{L}} \to E_{\mathbb{L}}$.

Alors nous avons

$$\texttt{proj}(f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h}) = \texttt{proj}(f_{\mathbb{L}}) \circ \texttt{proj}(\tilde{h}). \tag{8.581}$$

De même[112] *si $f\colon E \to F$ et $\tilde{h}\colon F_{\mathbb{L}} \to G_{\mathbb{L}}$, alors*

$$\texttt{proj}(\tilde{h} \circ f_{\mathbb{L}}) = \texttt{proj}(\tilde{h}) \circ \texttt{proj}(f_{\mathbb{L}}). \tag{8.582}$$

[111] Encore la proposition 8.271.
[112] Je n'ai pas vérifié cette deuxième partie. Soyez prudente.

Démonstration. Nous considérons une base $\{e_i\}$ de E, une base $\{e_a\}$ de F, et une base $\{e_\alpha\}$ de G. Pour écrire $\texttt{proj}(f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h})$ à partir de la définition (8.572) nous commençons par écrire

$$(f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h})e_\alpha = \sum_a (f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h})_{a\alpha} e_a = \sum_{ai} (f_{\mathbb{L}})_{ai} (\tilde{h})_{i\alpha} e_a = \sum_a \Big(\sum_i f_{ai} (\tilde{h})_{i\alpha} \Big) e_a \tag{8.583}$$

où nous avons utilisé le fait que $(f_{\mathbb{L}})_{ai} = f_{ai}$. Donc, en utilisant la $\mathbb{K}$-linéarité de $\texttt{proj}$,

$$\texttt{proj}(f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h})e_\alpha = \sum_a \sum_i \texttt{proj}\Big(f_{ai} (\tilde{h})_{i\alpha} \Big) e_a = \sum_a \sum_i f_{ai}\, \texttt{proj}\Big((\tilde{h})_{i\alpha} \Big) e_a. \tag{8.584}$$

EQooZGCGooQsCBQH

D'autre part,

$$\begin{aligned} \texttt{proj}(f_{\mathbb{L}}) \circ \texttt{proj}(\tilde{h})e_\alpha &= \texttt{proj}(f_{\mathbb{L}}) \sum_i \texttt{proj}\Big((\tilde{h})_{i\alpha} \Big) e_i \\ &= \sum_i \texttt{proj}\Big((\tilde{h})_{i\alpha} \Big) \sum_a f_{ai} e_a \\ &= \sum_{ai} \texttt{proj}\Big((\tilde{h})_{i\alpha} \Big) f_{ai} e_a, \end{aligned} \tag{8.585}$$

et c'est égal à (8.584). □

Remarque 8.279.
Nous n'avons en général pas $\texttt{proj}(xy) = \texttt{proj}(x)\texttt{proj}(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{L}$. Par exemple si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ avec la projection canonique,

$$\texttt{proj}(i \cdot i) = \texttt{proj}(-1) = -1 \tag{8.586}$$

alors que $\texttt{proj}(i) = 0$.

PROPooHJJCooTXlzdH

Proposition 8.280.
Soient trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F et G. Nous considérons deux applications linéaires $f\colon E \to F$ et $g\colon E \to G$.

Il existe une application linéaire $h\colon F \to G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si il existe une application linéaire $\tilde{h}\colon F_{\mathbb{L}} \to G_{\mathbb{L}}$ telle que $g_{\mathbb{L}} = \tilde{h} \circ f_{\mathbb{L}}$.

Démonstration. Dans le sens direct, il suffit de poser $\tilde{h} = h_{\mathbb{L}}$ et d'invoquer le lemme 8.269.

Dans le sens inverse, si nous avons $\tilde{h}\colon F_{\mathbb{L}} \to G_{\mathbb{L}}$ tel que $g_{\mathbb{L}} = \tilde{h} \circ f_{\mathbb{L}}$ alors en appliquant $\texttt{proj}$ des deux côtés et en utilisant le lemme 8.278,

$$\texttt{proj}(g_{\mathbb{L}}) = \texttt{proj}(\tilde{h}) \circ \texttt{proj}(f_{\mathbb{L}}) \tag{8.587}$$

c'est-à-dire

$$g = \texttt{proj}(\tilde{h}) \circ f, \tag{8.588}$$

c'est-à-dire que l'application $\texttt{proj}(\tilde{h})\colon F \to G$ est la réponse à la proposition. □

8.15.3 Rang, polynôme minimal, polynôme caractéristique

PROPooJFQDooZSsxMf

Proposition 8.281 (Stabilité du rang par extension des scalaires[153])**.**
Si $f\colon E \to F$ est linéaire alors nous avons

$$\mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}(f_{\mathbb{L}}). \tag{8.589}$$

où à droite nous considérons le rang de l'application $\mathbb{L}$-linéaire $f_{\mathbb{L}}\colon E_{\mathbb{L}} \to F_{\mathbb{L}}$.

Démonstration. Il existe un supplémentaire V tel que $E = \ker(f) \oplus V$ avec $\dim(V) = \mathrm{rk}(f)$. Nous pouvons factoriser f en

$$f = f_2 \circ f_1 \tag{8.590}$$

avec $f_1\colon E \to V$ est la projection parallèle à $\ker(f)$ et est surjective (vers V) parce que $\dim(V) = \mathrm{rk}(f) = \dim\big(\mathrm{Image}(f)\big)$. De plus $f_2\colon V \to F$ est injective parce que si $v \in V$ est tel que $f_2(v) = 0$ alors on aurait

$$f(v) = (f_2 \circ f_1)(v) = f_2(v) = 0. \tag{8.591}$$

Cela donne $v \in \ker(f) \cap V = \{0\}$. Par la proposition 8.270, les applications $(f_1)_{\mathbb{L}}$ et $(f_2)_{\mathbb{L}}$ sont respectivement surjective et injective.

L'application $(f_2)_{\mathbb{L}} : V_{\mathbb{L}} \to F_{\mathbb{L}}$ est forcément surjective sur son image, donc

$$(f_2)_{\mathbb{L}} : V_{\mathbb{L}} \to \text{Image}(f_{\mathbb{L}}) \tag{8.592}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{L}$-espaces vectoriels. Nous avons alors les égalités

$$\dim_{\mathbb{L}}(V_{\mathbb{L}}) = \dim_{\mathbb{L}}\big(\text{Image}(f_{\mathbb{L}})\big) = \text{rk}(f_{\mathbb{L}}). \tag{8.593}$$

EQooWLOIooKlYWTL

Mais aussi, par les définitions posées plus haut,

$$\dim(V) = \text{rk}(f) = \dim\big(\text{Image}(f)\big). \tag{8.594}$$

EQooEVCGooAGjmoU

Mais le corolaire 8.273 nous dit que $\dim_{\mathbb{L}}(V_{\mathbb{L}}) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$. Donc il y a égalité des deux lignes (8.593) et (8.594), ce qui donne $\text{rk}(f) = \text{rk}(f_{\mathbb{L}})$. □

PROPooZAZFooUFdCUv

Proposition 8.282.
Nous avons

(1) $\det(f) = \det(f_{\mathbb{L}})$

(2) $\chi_f = \chi_{f_{\mathbb{L}}}$.

Démonstration. Dès que l'on a des bases nous avons $(f_{\mathbb{L}})_{ai} = f_{ai}$ par la proposition 8.277(2). Le nombre $\det(f) \in \mathbb{K}$ est un polynôme en les f_{ai}. Entendons nous : il existe un polynôme indépendant de f et de $\mathbb{K}$ et de $\mathbb{L}$ donnant le déterminant de n'importe quelle matrice. Donc $\det(f) = \det(f_{\mathbb{L}})$.

Même chose pour le polynôme caractéristique (définition 8.109) : les coefficients de ce polynôme sont des polynômes en les f_{ai} qui sont indépendants de $\mathbb{L}$, de $\mathbb{K}$ et de f.

Notons que $\chi_{f_{\mathbb{L}}}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. □

La situation est très différente avec le polynôme minimal[113]. Autant il existe une « recette » pour créer le polynôme caractéristique, il n'en n'existe pas pour le polynôme minimal (ou en tout cas, il ne suffit pas d'appliquer des polynômes en les coefficients de la matrice). La proposition suivante montre que le polynôme minimal est conservé par extension de corps, mais que pour le savoir, il faut travailler plus.

PROPooXVZMooXcJrsJ

Proposition 8.283 ([153, 1])**.**
Soit $\mathbb{L}$ une extension du corps $\mathbb{K}$ et une application linéaire $f : E \to F$ entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors $\mu_f = \mu_{f_{\mathbb{L}}}$.

Démonstration. Nous allons montrer que l'application

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \frac{\mathbb{L}[X]}{(\mu)} &\to \text{End}(E_{\mathbb{L}}) \\ [P] &\mapsto P(f_{\mathbb{L}}) \end{aligned} \tag{8.595}$$

est bien définie et injective. La proposition 8.99 nous dira alors que μ est le polynôme minimal de $f_{\mathbb{L}}$.

Pour prouver que l'application $\tilde{g}$ est bien définie, nous commençons par prouver que $P(f_{\mathbb{L}}) = P(f)_{\mathbb{L}}$:

$$\begin{aligned} P(f_{\mathbb{L}})\lambda \otimes v &= \sum_k a_k f_{\mathbb{L}}^k \lambda \otimes v && \text{(8.596a)} \\ &= \lambda \otimes \sum_k a_k f^k(v) && \text{(8.596b)} \\ &= \lambda \otimes P(f)v && \text{(8.596c)} \\ &= P(f)_{\mathbb{L}}\lambda \otimes v. && \text{(8.596d)} \end{aligned}$$

Par conséquent $\mu(f_{\mathbb{L}}) = 0$ et l'application est bien définie.

Sur $\mathbb{L}[X]/(\mu)$ nous considérons la base $\{1, [X], \dots, [X^{\deg(\mu)-1}]\}$, et sur $\text{End}(E_{\mathbb{L}})$ nous considérons une base qui commence[114] par $\{f_{\mathbb{L}}^k\}_{k=0,\dots,\deg(\mu)-1}$. Montrons tout de même que cette partie est libre (sinon le théorème de la base incomplète ne s'applique pas) : si $\sum_k \lambda_k f_{\mathbb{L}}^k = 0$ alors

$$\sum_k \texttt{proj}\left(\lambda_k f_{\mathbb{L}}^k\right) = 0. \tag{8.597}$$

EQooSFHVooLxqUEl

[113] Définition 6.64.
[114] Théorème de la base incomplète 4.14(2).

Pour détailler ce que cela implique, nous calculons ceci :

$$(\lambda f_{\mathbb{L}})(\tau(e_i)) = \lambda f_{\mathbb{L}}(\tau(e_i)) = \sum_a \lambda f_{ai} e_a, \tag{8.598}$$

par conséquent $\texttt{proj}(\lambda f_{\mathbb{L}})e_i = \sum_a \texttt{proj}(\lambda f_{ai})e_a$, et comme $\texttt{proj}$ est $\mathbb{K}$-linéaire et que $f_{ai} \in \mathbb{K}$,

$$\texttt{proj}(\lambda f_{\mathbb{L}})e_i = \texttt{proj}(\lambda) \sum_a f_{ai} e_a = \texttt{proj}(\lambda)\,\texttt{proj}(f_{\mathbb{L}})e_i = \texttt{proj}(\lambda) f(e_i). \tag{8.599}$$

Appliquer la projection $\texttt{proj}$ à l'équation (8.597) donne alors $\sum_k \texttt{proj}(\lambda)_k f^k = 0$. Mais comme les f^k sont linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$ nous avons pour tout k : $\texttt{proj}(\lambda_k) = 0$ (égalité dans $\mathbb{K}$). En nous souvenant de la remarque 8.276 nous en déduisons $\lambda_k = 0$ dans $\mathbb{L}$.

Dans les choix de bases effectués, l'application $\tilde{g}$ a la forme

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \tag{8.600}$$

qui est injective.

Puisque $\tilde{g}$ est injective, μ est le polynôme minimal de $f_{\mathbb{L}}$ et donc $\mu = \mu_{\mathbb{L}}$. □

8.16 Frobenius et Jordan

8.16.1 Matrice compagnon

DEFooOSVAooGevsda

Définition 8.284.
*Soit le polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_1 X - a_0$ dans $\mathbb{K}[X]$. La **matrice compagnon** de P est la matrice donnée par*

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \tag{8.601}$$

si $n \geqslant 2$ et par (a_0) si $n = 1$.

En formule :

$$C(P)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i,j+1} & \text{si } j < n \\ a_{i-1} & \text{si } j = n. \end{cases} \tag{8.602}$$

EQooXKMDooCNxcgK

Une matrice est dite compagnon si elle a cette forme.

PROPooNDCLooYMGHmX

Proposition 8.285.
Nous considérons le polynôme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Si f est l'endomorphisme associé à la matrice compagnon[115] $C(P)$, alors nous avons

(1)

$$f(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } 1 \leqslant i < n \\ (a_0, \ldots, a_{n-1}) & \text{si } i = n. \end{cases} \tag{8.603}$$

(2) La formule : $P(f)e_1 = 0$.

Démonstration. Nous calculons $f(e_i)$ à partir des éléments de matrice (8.602) et de la relation entre matrice et application linéaire donnée par la proposition 4.75. D'abord si $i \neq n$ nous avons

$$f(e_i) = \sum_j C(P)_{ji} e_j = \sum_j \delta_{j,i+1} e_j = e_{i+1}. \tag{8.604}$$

[115] Définition 8.284.

Ensuite pour $i = n$ nous avons

$$f(e_n) = \sum_j C(P)_{jn} e_j = \sum_j a_{j-1} e_j. \tag{8.605}$$

Pour la seconde partie, notez que $X^k(f)$ est en réalité f^k. Donc si $k < n$,

$$X^k(f)e_i = f^k(e_1) = e_{1+k}. \tag{8.606}$$

Et pour $k = n$,

$$X^n(f)e_1 = f^n(e_1) = f(e_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{i+1}. \tag{8.607}$$

En mettant ensemble,

$$P(f)e_1 = \big(f^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\big)(e_1) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{i+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} = 0. \tag{8.608}$$

□

LemkVNisk

Lemme 8.286 ([342]).
Un polynôme sur un corps commutatif est le polynôme caractéristique de sa matrice compagnon. En d'autres termes nous avons $\chi_{C(P)} = P$.

Démonstration. Nous notons f l'endomorphisme associé à $C(P)$. La propriété $P(f)e_1 = 0$ nous indique que le polynôme minimal ponctuel de f en e_1 divise P. L'ensemble des puissances de f appliquées à e_1, $\big(f^k(e_1)\big)_{k=1,\dots,n-1}$ est libre, donc le polynôme minimal ponctuel en e_1 est de degré n au minimum. En reprenant les notations du théorème 6.43, nous avons $I_{e_1} = (P)$ parce que P est de degré minimum dans I_{e_1} et $\chi_f \in I_{e_1}$.

Donc P divise χ_f et est de degré égal à celui de χ_f. Étant donné qu'ils sont tous deux unitaires, ils sont égaux. □

RemmQjZOA

Remarque 8.287.
Les matrices compagnons ne sont pas les seules dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal. En fait les matrices dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal sont denses dans l'ensemble des matrices. En effet une matrice dont le polynôme minimal n'est pas égal au polynôme caractéristique a un polynôme caractéristique avec une racine double. Il est possible, en modifiant arbitrairement peu la matrice, de séparer la racine double en deux racines distinctes.

8.16.2 Réduction de Frobenius

LEMooKUQDooKFeIYq

Lemme 8.288.
Soit un endomorphisme $f\colon E \to E$ sur l'espace vectoriel de dimension finie n. Nous notons μ et χ les polynômes minimal et caractéristique. Si f est cyclique, alors $\mu = \chi$.

Le théorème 8.301 donnera une version plus complète de ce lemme.

Démonstration. Soit v un vecteur cyclique de f, c'est-à-dire que $\{f^k(v)\}_{k=0,\dots,n-1}$ est libre. Donc si P est un polynôme de degré jusqu'à $n-1$ nous ne pouvons pas avoir $P(f) = 0$ parce que, appliqué à v, ce serait une combinaisons nulle non triviale des $f^k(v)$. Donc le polynôme minimal est au minimum de degré n. Mais le polynôme caractéristique est annulateur de degré n (Cayley-Hamilton 8.116), donc il est le polynôme minimal. □

THOooDOWUooOzxzxm

Théorème 8.289 (Réduction de Frobenius [343, 344, 345]).
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathrm{End}(E)$. Alors il existe une suite de sous-espaces $E_1, \dots, E_r$ stables par f tels que

ItemmpwjnSs

(1) $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$;

(2) pour chaque E_i, l'endomorphisme restreint $f_i = f|_{E_i}$ est cyclique ;

(3) si μ_i est le polynôme minimal de f_i alors μ_{i+1} divise μ_i ;

Une telle décomposition vérifie automatiquement $\mu_1 = \mu_f$ et $\mu_1 \cdots \mu_r = \chi_f$, et la suite $(\mu_i)_{i=1,\dots,r}$ ne dépend que de f, et non du choix de la décomposition du point (1).

Les polynômes μ_i sont les **invariants de similitude** de l'endomorphisme f.

Démonstration. Nous commençons par montrer que si une telle décomposition existe, alors subEqzcGouz

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{r} \mu_i \tag{8.609a}$$ EqTaxsvb

$$\mu_f = \mu_1 \tag{8.609b}$$

où χ_f est le polynôme caractéristique de f et μ_f est le polynôme minimal. D'abord le polynôme caractéristique de f devra être égal au produit des polynômes caractéristiques des $f|_{E_i}$, mais ces derniers endomorphismes étant cycliques[116], leurs polynômes caractéristiques sont égaux à leurs polynômes minimaux (lemme 8.288). Cela prouve l'égalité (8.609a). Ensuite tous les μ_i doivent diviser le polynôme minimal, donc $\text{ppcm}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ divise μ_f. Cependant le polynôme minimal doit contenir une et une seule fois chacun des facteurs irréductibles du polynôme caractéristique, et chacun de ces facteurs sont dans les polynômes μ_i. Par conséquent $\text{ppcm}(\mu_1, \dots, \mu_r) = \mu_f$. Mais par ailleurs $\mu_1 = \text{ppcm}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ parce qu'on a supposé $\mu_{i+1} \mid \mu_i$, donc $\mu_1 = \mu_f$.

Soit d, le degré du polynôme minimal de f et $y \in E$ tel que $\mu_f = \mu_{f,y}$ (voir lemme 8.100). Le plus petit espace stable sous f contenant y est

$$E_y = \text{Span}\{y, f(y), \dots, f^{d-1}(y)\}. \tag{8.610}$$

Nous notons $e_i = f^{i-1}(y)$. Notons que les vecteurs donnés forment bien une base de E_y parce que si les e_i n'était pas linéairement indépendants, alors nous aurions des a_k tels que $\sum_k a_k e_k = 0$ et avec lesquels

$$\big(\sum_k a_k X^k\big)(f)y = 0, \tag{8.611}$$

ce qui contredirait la minimalité de $\mu_{f,y}$.

La difficulté du théorème est de trouver un complément de E_y qui soit également stable sous f. Nous commençons par étendre[117] $\{e_1, \dots, e_d\}$ en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E. Ensuite nous allons montrer que

$$E = E_y \oplus F \tag{8.612}$$

avec

$$F = \{x \in E \text{ tel que } e_d^*\big(f^k(x)\big) = 0, \forall k \in \mathbb{N}\}. \tag{8.613}$$

qui fait appel aux définitions d'espace dual (définition 4.135) et de base duale (définition 4.136).

Par construction, F est invariant sous f. Montrons pour commencer que $E_y \cap F = \{0\}$. Un élément de E_y s'écrit

$$z = a_1 e_1 + \dots + a_k e_k \tag{8.614}$$

avec $k \leqslant d$. Étant donné que f décale les vecteurs de base, nous avons $e_d^*\big(f^{d-k}(z)\big) = a_k$. Du coup $z \in F$ si et seulement si $a_1 = \dots = a_d = 0$, c'est-à-dire que $E_y \cap F = \{0\}$.

Nous montrons maintenant que $\dim F = n - d$. Pour cela nous considérons l'application

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{K}[f] &\to E^* \\ g &\mapsto e_d^* \circ g. \end{aligned} \tag{8.615}$$

Cette application est injective. En effet un élément général de $\mathbb{K}[f]$ est

$$g = a_1 \,\text{Id} + a_2 f + \dots + a_p f^{p-1} \tag{8.616}$$

avec $p \leqslant d$. Si $T(g) = 0$, alors nous avons en particulier

$$0 = T(g)e_{d-p+1} = e_d^*(a_1 e_{d-p+1} + a_2 e_{d-p+2} + \dots + a_p e_d) = a_p. \tag{8.617}$$

Donc $a_p = 0$ et en appliquant maintenant $T(g)$ à e_{d-p} nous obtenons $a_{p-1} = 0$. Au final nous trouvons que $g = 0$ et donc que T est injective.

Étant donné que $\dim \mathbb{K}[f] = d$ et que T est injective, $\dim \text{Image}(T) = d$. Étudions l'orthogonal[118] de l'image de T :

$$(\text{Image}(T))^\perp = \{x \in E \text{ tel que } T(g)x = 0, \forall g \in \mathbb{K}[f]\} \tag{8.618a}$$

$$= \{x \in E \text{ tel que } e_d^*\big(g(x)\big) = 0, \forall g \in \mathbb{K}[f]\} \tag{8.618b}$$

$$= F. \tag{8.618c}$$

[116] Définition 8.101.

[117] Pour autant que j'aie compris, cette extension manque dans [343]. Corrigez-moi si je me trompe.

[118] Définition 4.143.

Par conséquent $F^\perp = \text{Image}(T)$. Puisque $\dim \text{Image}(T) = d$, nous avons donc $\dim F = n - d$ et il est établi que $E = E_y \oplus F$.

Nous avons donc trouvé F, stable par f et tel que $E = E_y \oplus F$. Nous devons maintenant nous assurer que cette décomposition tombe bien pour les polynômes minimaux. Si P_1 est le polynôme minimal de $f|_{E_y}$, alors par le lemme 8.102 nous avons $P_1 = \mu_{f,y} = \mu_f$ parce que $f|_{E_y}$ est cyclique sur E_y. Mettons P_2, le polynôme minimal de $f|_F$. Étant attendu que F est stable par f, le polynôme P_2 divise P_1. En recommençant la construction sur F, nous construisons un nouvel espace F' stable sous F et vérifiant $\mu_{f|_{F'}} = P_2$, etc.

Nous passons maintenant à la partie unicité du théorème. Soient deux suites $F_1, \dots, F_r$ et $G_1, \dots, G_s$ de sous-espaces stables par f et vérifiant

(1) $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$,

(2) $f|_{F_i}$ est cyclique,

(3) $\mu_{f|_{F_{i+1}}}$ divise $\mu_{f|_{F_i}}$,

et, *mutatis mutandis*, les mêmes conditions pour la famille $\{G_i\}$. Nous posons $P_i = \mu_{f|_{F_i}}$ et $Q_i = \mu_{f|_{G_i}}$. Nous allons montrer par récurrence que $P_i = Q_i$ et $\dim F_i = \dim G_i$. Il ne sera cependant pas garanti que $F_i = G_i$. D'abord, $P_1 = Q_1$ parce qu'ils sont tous deux égaux à μ_f par les relations (8.609). Nous supposons que $P_i = Q_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant j-1$ et nous tentons de montrer que $P_j = Q_j$.

Nous avons

$$P_j(f) = P_j(f)|_{F_1} \oplus \dots \oplus P_j(f)|_{F_{j-1}}. \tag{8.619}$$

En effet étant donné que P_{j+k} divise P_j, il existe un polynôme A tel que $P_j = AP_{j+k}$, et donc tel que[119] $P_j(f) = A(f) \circ P_{j+k}(f)$, mais $P_{j+k}(f)F_{j+k} = 0$, donc $P_j(f)F_{j+k} = 0$. Les espaces G_i n'ayant à priori aucun rapport avec les polynômes P_i, nous écrivons

$$P_j(f) = P_j(f)|_{G_1} \oplus \dots \oplus P_j(f)|_{G_{j-1}} \oplus P_j(f)|_{G_j} \oplus \dots \oplus P_j(f)|_{G_s}. \tag{8.620}$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant j-1$, nous avons supposé $P_i = Q_i$. Étant donné que la matrice de $f|_{F_i}$ est semblable à C_{P_i} et celle de $f|_{G_i}$ est semblable à C_{Q_i}, la matrice de $f|_{F_i}$ est semblable à la matrice de $f|_{G_i}$. En particulier,

$$\dim P_j(f)F_i = \dim P_j(f)G_i. \tag{8.621}$$

En prenant les dimensions des images dans les égalités (8.619) et (8.620), nous trouvons que

$$P_j(f)|_{G_j} = \dots = P_j(f)|_{G_s} = 0. \tag{8.622}$$

Par conséquent P_j est annulateur de $f|G_j$, et il divise donc Q_j, qui est générateur de l'idéal des polynômes annulateurs de $f|_{G_j}$. La situation étant symétrique entre P et Q, nous montrons de même que Q_j divise P_j et donc que $P_j = Q_j$.

Ceci achève la démonstration du théorème de réduction de Frobenius.

□

Remarque 8.290.
Sous forme matricielle, ce théorème dit que toute matrice est semblable à une matrice de la forme bloc-diagonale

$$f = \begin{pmatrix} C_{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{\mu_r} \end{pmatrix} \tag{8.623}$$

où les C_{μ_i} sont des matrices compagnons (définition 8.284).

En particulier, et ceci est très important, deux applications sont semblables si et seulement si elles ont même suite d'invariants de similitude.

Remarque 8.291.
Si nous travaillons sur $\mathbb{R}$, la réduite de Frobenius restera une matrice réelle, même si les valeurs propres sont complexes. En effet le procédé de Frobenius ne regarde absolument pas les valeurs propres, mais seulement les facteurs irréductibles du polynôme caractéristique. La réduite de Frobenius ne tente pas de résoudre ces polynômes, mais se contente d'en utiliser les matrices compagnon.

La situation sera différente dans le cas de la forme normale de Jordan.

8.16.3 Forme normale de Jordan

Il existe une preuve directe de la réduction de Jordan ne nécessitant pas la réduction de Frobenius[346]. Cette dernière passe par les espaces caractéristiques[120] et est à mon avis plus compliquée que la démonstration

[119] En vertu du lemme 8.89.
[120] Aussi appelés « espaces propres généralisés ».

de Frobenius elle-même. Nous allons donc nous contenter de donner la réduction de Jordan comme un cas particulier de réduction de Frobenius.

ThoGGMYooPzMVpe

Théorème 8.292 (Réduction de Jordan)**.**
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique χ_f est scindé[121]*. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit sous la forme*

$$M = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \\ 0 & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \tag{8.624}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de f (avec éventuelles répétitions) et $J_{n_i}(\lambda)$ représente le bloc $n_i \times n_i$

$$J_{n_i}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \\ & \lambda & 1 & 0 & \\ 0 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}. \tag{8.625}$$

En d'autres termes, $J_{n_i}(\lambda)_{ii} = \lambda$ et $J_n(\lambda)_{i-1,i} = 1$.

Démonstration. Nous commençons par le cas où f est nilpotente ; nous notons M sa matrice. Dans ce cas la seule valeur propre est zéro et le polynôme caractéristique est X^m pour un certain m. Nous savons par le lemme 8.286 que (la matrice de) f est semblable à sa matrice compagnon. En l'occurrence pour f nous avons

$$C_{X^m} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.626}$$

Ensuite le changement de base (qui est une similitude) $(e_1, e_2, \dots, e_n) \mapsto (e_n, \dots, e_2, e_1)$ montre que C_{X^m} est semblable à un bloc de Jordan $J_m(0)$.

Supposons à présent que f ne soit pas nilpotente. Par l'hypothèse de polynôme caractéristique scindé, nous supposons que f a m valeurs propres distinctes et que son polynôme caractéristique est

$$\chi_f = (X - \lambda_1)^{l_1} \dots (X - \lambda_m)^{l_m}. \tag{8.627}$$

Le lemme des noyaux (théorème 8.90) nous enseigne que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} \underbrace{\ker(f - \lambda_i \mathbb{1})^{l_i}}_{F_i}. \tag{8.628}$$

La restriction de $f - \lambda_i \mathbb{1}$ à F_i est par construction un endomorphisme nilpotent, et donc peut s'écrire comme un bloc de Jordan avec des zéros sur la diagonale. En utilisant la décomposition

$$f|_{F_i} = (f - \lambda_i \mathbb{1})|_{F_i} + \lambda_i \mathbb{1}_{F_i}, \tag{8.629}$$

nous voyons que $f|_{F_i}$ s'écrit comme un bloc de Jordan avec λ_i sur la diagonale. □

Remarque 8.293.
Nous pouvons calculer la forme normale de Jordan pour une matrice complexe ou réelle, mais dans les deux cas nous devons nous attendre à obtenir une matrice complexe parce que les valeurs propres d'une matrice réelle peuvent être complexes. Cependant nous demandons que le polynôme caractéristique de f soit scindé sur $\mathbb{K}$. En pratique, la décomposition de Jordan n'est garantie que sur les corps algébriquement clos, c'est-à-dire sur $\mathbb{C}$.

La suite des invariants de similitude sur laquelle repose la réduction de Frobenius, elle, est disponible sur tout corps, y compris $\mathbb{R}$.

[121] Définition 6.39. C'est à cause de cette hypothèse que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ n'est pas le bon exemple de contexte de travail.

8.17 Commutant et endomorphismes cycliques

8.17.1 Endomorphisme cyclique

LemSGmdnE

Lemme 8.294.
Si A est la matrice de l'endomorphisme f alors nous avons équivalence des propriétés suivantes :

(1) La matrice A est cyclique.

(2) L'endomorphisme f est cyclique.

Si f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E et si $x \in E$, nous notons

$$E_{f,x} = \text{Span}\{f^k(x) \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}. \tag{8.630}$$

DEFooIDMMooHIpUmT

Définition 8.295 (Commutant $\mathcal{C}(f)$ de f)**.**
*Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et un endomorphisme $f\colon E \to E$. Le **commutant** de f est l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f :*

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E,E) \text{ tel que } g \circ f = f \circ g\}. \tag{8.631}$$

Il n'est pas très compliqué de vérifier que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,E)$.

Notons l'inclusion évidente $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$. L'inclusion inverse va un peu nous occuper durant les prochaines pages.

8.17.2 Commutant : cas diagonalisable

PROPooRHHEooIRGmtl

Proposition 8.296 ([347])**.**
Si f est diagonalisable, alors

EQooOTFLooPUKAos

$$\dim\big(\mathcal{C}(f)\big) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim(E_\lambda)^2. \tag{8.632}$$

où les E_λ sont les espaces propres de f.

Démonstration. D'abord, soit $g \in \mathcal{C}(f)$ alors E_λ est stable par g. En effet si $v \in E_\lambda$ alors $f\big(g(v)\big) = g\big(f(v)\big) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$, ce qui montre que $g(v)$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ, et donc que $g(v) \in E_\lambda$.

Nous considérons ensuite l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathcal{C}(f) &\to \text{End}(E_1) \times \ldots \times \text{End}(E_r) \\ g &\mapsto g|_{E_1} \times \ldots \times g|_{E_r} \end{aligned} \tag{8.633}$$

qui est bien définie parce que g se restreint aux espaces propres de f. Nous allons noter $\psi(g)_\lambda$ la restriction de g à E_λ.

(1) ψ **est injective**

Supposons que $g, h \in \mathcal{C}(f)$ tels que $\psi(g) = \psi(h)$. Puisque f est diagonalisable nous pouvons décomposer $x \in E$ en ses composantes sur les espaces propres[122] :

$$x = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} x_\lambda \tag{8.634}$$

avec $x_\lambda \in E_\lambda$. Nous avons alors

$$g(x) = \sum_\lambda g(x_\lambda) = \sum_\lambda \psi(g)_\lambda(x_\lambda). \tag{8.635}$$

Par hypothèse nous avons $\psi(g)_\lambda = \psi(h)_\lambda$, et donc aussi

$$g(x) = \sum_\lambda \psi(g)_\lambda(x_\lambda) = \sum_\lambda \psi(h)_\lambda(x_\lambda) = \sum_\lambda h(x_\lambda) = h(x). \tag{8.636}$$

Cela prouve $g = h$ et donc que ψ est injective.

[122] Théorème 8.217(5).

(2) ψ **est surjective** Si nous avons pour chaque $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$ un endomorphisme g_λ de E_λ alors en posant

$$g(x) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(f)} g_\lambda(x_\lambda) \tag{8.637}$$

nous avons bien

$$\psi(g) = \big(g_{\lambda_1}, \dots, g_{\lambda_r}\big). \tag{8.638}$$

Nous pouvons donc conclure en écrivant

$$\dim\big(\mathcal{C}(f)\big) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(f)} \dim\big(\mathrm{End}(E_\lambda)\big) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(f)} \dim(E_\lambda)^2. \tag{8.639}$$

□
REMooUGFQooVzCOvV

Remarque 8.297.
Nous avons alors immédiatement

$$\dim\big(\mathcal{C}(f)\big) \geqslant \dim(E) \tag{8.640}$$

lorsque f est diagonalisable.

En suivant la notation (8.203), un endomorphisme est cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$.
PropooQALUooTluDif

Proposition 8.298 ([347])**.**
Si f est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension n. Nous avons équivalence des points suivants.
ITEMooSOYYooZVibjrii

(1) *Le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique : $\mu_f = \chi_f$*
ITEMooSOYYooZVibjrvi

(2) *L'endomorphisme f est cyclique.*
ITEMooSOYYooZVibjrv

(3) $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$[123].
ITEMooSOYYooZVibjriv

(4) $\dim\big(\mathcal{C}(f)\big) = n$
ITEMooSOYYooZVibjriii

(5) *L'endomorphisme f possède n valeurs propres distinctes.*
ITEMooSOYYooZVibjri

(6) $\dim\big(\mathbb{K}[f]\big) = n$

Démonstration. Le point important de cette proposition réside dans les équivalences (1)-(3). Les autres sont des résultats intermédiaires. En particulier, dans le cas diagonalisable, nous allons voir que le point (5) est essentiellement une reformulation de (1).

(1) **(4) implique (5)** Par la formule (8.632), les espaces propres de f ont tous une dimension de 1. Par conséquent f possède n valeurs propres distinctes.

(2) **(5) implique (6)** Le théorème 8.217 nous dit que le polynôme minimal est scindé à racines simples. Puisque f possède n valeurs propres distinctes, μ est de degré n. Par l'isomorphisme $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}[X]/(\mu)$ de la proposition 8.108 nous avons $\dim\big(\mathbb{K}[f]\big) = \deg(\mu) = n$ par la proposition 6.44.

(3) **(6) implique (1)** Par l'isomorphisme $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}[X]/(\mu)$ de la proposition 8.108 et la proposition 6.44 nous avons $n = \dim\big(\mathbb{K}[f]\big) = \deg(\mu)$. Comme χ est un polynôme annulateur (Caley-Hamilton 8.116), il est divisé par μ. Maintenant μ et χ sont des polynômes unitaires de degré n et μ divise χ. Ils sont donc égaux.

(4) **(1) implique (2)** Le fait que f soit diagonalisable permet d'utiliser le théorème 8.217 pour dire que μ est scindé à racines simples. L'égalisation avec χ nous permet de dire que f possède n valeurs propres distinctes. Soient $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de diagonalisation, et prouvons que le vecteur $v = e_1 + \cdots + e_n$ est cyclique. Nous avons

$$f^k(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i. \tag{8.641}$$

[123] Rappel : $\mathcal{C}(f)$ est le commutant de f, définition 8.295.

Pour prouver que cette famille (avec $k = 0, \dots, n-1$) est libre[124] nous en prenons une combinaison linéaire nulle et nous prouvons que les coefficients sont tous nuls. Soit donc

$$0 = \sum_{l=0}^{n-1} a_l f^l(v) = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^l e_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{l=0}^{n-1} a_l \lambda_i^l \Big) e_i. \tag{8.642}$$

Par hypothèse, la double somme est nulle, et nous avons pour tout i :

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_l \lambda_i^l = 0. \tag{8.643}$$

En posant la matrice $A_{ij} = \lambda_i^j$, cela revient à étudier le système $\sum_j A_{ij} a_j = 0$. Ce système n'a des solutions non nulles que si $\det(A) = 0$; sinon il possède une unique solution qui est $a_j = 0$ pour tout j. Nous devons donc calculer le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{8.644}$$

Il s'agit du déterminant de Vandermonde déjà étudié par la proposition 4.126. Nous avons $\det(A) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$. Ce déterminant est bien non nul parce que toutes les valeurs propres sont distinctes.

(5) **(2) implique (3)** Soit v un vecteur cyclique[125] de f. Si g est un endomorphisme, nous définissons des coefficients $(a_k(g))_{k=0,\dots,n-1}$ par

$$g(v) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(g) f^k(v). \tag{8.645}$$

C'est une bonne définition parce que $\{f^k(v)\}$ est une base.

Nous définissons alors l'application

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathcal{C}(f) &\to \mathbb{K}[f] \\ g &\mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a_k(g) f^k. \end{aligned} \tag{8.646}$$

C'est une application injective parce que si $\psi(g) = 0$ alors $g(v) = 0$ et pour tout k nous avons $g\big(f^k(v)\big) = f^k\big(g(v)\big) = 0$. L'endomorphisme g s'annulant sur une base, il est nul.

L'application ψ est surjective. En effet si un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ est donné, il suffit de poser

$$g(x) = \sum_k a_k f^k(x) \tag{8.647}$$

pour avoir $\psi(g) = P$.

(6) **(3) implique (4)** Si $n_1, \dots, n_r$ sont les dimensions des différents espaces propres de f, nous avons les inégalités

$$\dim\big(\mathbb{K}[f]\big) = \deg(\mu) \leqslant n = n_1 + \cdots + n_r \leqslant n_1^2 + \cdots + n_r^2 = \dim\big(\mathcal{C}(f)\big). \tag{8.648}$$

Par hypothèse d'égalité entre le premier et le dernier terme de cette suite d'inégalités, toutes les inégalités sont des égalités et en particulier $\dim\big(\mathcal{C}(f)\big) = n$.

Nous avons fini de prouver toutes les équivalences demandées. □

Exemple 8.299.
Pour mieux comprendre pourquoi le fait d'avoir n valeurs propres distinctes est équivalent à être cyclique, notons que si deux valeurs propres sont identiques, alors un morceau de la matrice de f serait par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, et dans ce cas n'importe quelle combinaison $ae_i + be_j$ reste proportionnelle à elle-même après application de f. Si nous avons des valeurs propres différentes par contre, nous avons par exemple dans $\mathbb{R}^2$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui donne $f(e_1 + e_2) = e_1 + 2e_2$. La partie $\{e_1 + e_2, e_1 + 2e_2\}$ est une base. △

[124] Ce sera alors une base parce que n vecteurs libres dans un espace de dimension n est toujours une base, proposition 4.19.
[125] Définition 8.295.

8.17.3 Commutant : cas général

Nous considérons encore un espace vectoriel E de dimension finie n et un endomorphisme $f\colon E\to E$. Nous notons μ son polynôme minimal et μ_x le polynôme minimal ponctuel en x.

LEMooDFFDooJTQkRu

Lemme 8.300 ([348, 343, 153]).
Nous avons

$$\dim\big(\mathcal{C}(f)\big)\geqslant\dim(E) \tag{8.649}$$

Démonstration. Si f est donnée, l'espace $\mathcal{C}(f)$ est l'espace des solutions de $fg=gf$. Supposons avoir choisi une base de E et notons A la matrice de f et X celle de g. L'équation est $AX-XA=0$.

(1) **Si A est trigonalisable** Nous supposons avoir choisi la base de telle sorte que A soit triangulaire supérieure, et nous allons nous contenter de chercher les solutions X qui sont également triangulaires supérieure. Si il y en a déjà plus que n, a fortiori le résultat sera vrai.

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures étant une matrice triangulaire supérieure, l'équation $AX-XA$ contient, pour les coefficients de X, $n(n+1)/2$ équations. Mais il se fait que les termes diagonaux ne sont pas de vraies équations parce que

$$(AX-XA)_{kk}=\sum_i\big(A_{ki}X_{ik}-X_{ki}A_{ik}\big)=\sum_{k\leqslant i\leqslant k}(A_{ki}X_{ik}-X_{ki}A_{ik})=0. \tag{8.650}$$

Nous avons donc au maximum

$$\frac{n(n+1)}{2}-n \tag{8.651}$$

équations linéairement indépendantes pour un minimum de $n(n+1)/2$ inconnues. L'espace des solutions est donc de dimension au minimum n.

Cela a l'air d'être une majoration assez large, mais il existe des cas d'égalité.

(2) **Si A n'est pas trigonalisable**

La preuve que nous donnons ici est valable même pour les endomorphismes trigonalisables.

Nous considérons le résultat de Frobenius 8.289. Nous avons donc la structure suivante :

- une décomposition en somme directe $E=E_1\oplus\ldots\oplus E_r$,
- les espaces E_i sont fixés par f,
- les endomorphismes $f_i=f|_{E_i}$ sont cycliques
- le polynôme minimal de f_i est μ_i et $\prod_{i=1}^r\mu_i=\chi_f$.

Les endomorphismes f_i^k commutent évidemment avec f_j, et la partie $\{f_i^k\}_{k=0,\ldots,\deg(\mu_i)-1}$ est libre. Libre en tout cas en tant que partie de $\mathrm{End}(E_i)$. Mais en prolongeant par 0 sur E, ça reste libre en tant que partie de $\mathrm{End}(E)$.

Bien entendu les f_j^k et les f_i^k $(i\neq j)$ sont linéairement indépendants dans $\mathrm{End}(E)$ parce qu'ils n'agissent pas sur les mêmes vecteurs. Donc les endomorphismes $f_i^{k_i}$ avec $k_i=0,\ldots,\deg(\mu_i)-1$ forment une partie libre de $\mathrm{End}(E)$ composée d'endomorphismes qui commutent avec f. Il y en a en tout

$$\sum_{i=1}^r\deg(\mu_i)=\deg(\chi_f)=n. \tag{8.652}$$

Par conséquent $\dim\big(\mathcal{C}(f)\big)\geqslant\dim(E)$.

□

THOooGLMSooYewNxW

Théorème 8.301 ([321]).
Soit un endomorphisme $f\colon E\to E$ sur l'espace vectoriel de dimension finie n. Nous notons μ et χ les polynômes minimal et caractéristique. Nous avons équivalence entre les points suivants :

ITEMooLRXIooLWaYqJi

(1) $\mu=\chi$,

ITEMooLRXIooLWaYqJii

(2) f *est cyclique,*

ITEMooLRXIooLWaYqJiii

(3) $\mathcal{C}(f)=\mathbb{K}[f]$.

Démonstration. Plusieurs implications. Notons que (2) implique (1) a déjà été démontré par le lemme 8.288.

(1) **(1) implique (2)** Conformément à ce que nous permet le lemme 8.100 nous choisissons[126] $a \in E$ de telle sorte à avoir $\mu_a = \mu$. De plus pour $x \in E$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x \colon \mathbb{K}[X] &\to E \\ P &\mapsto P(f)x. \end{aligned} \tag{8.653}$$

Nous avons $\varphi_a(P) = P(f)a$. Étant donné que E_a est engendré par les $f^k(a)$ nous avons $\varphi_a\big(\mathbb{K}[X]\big) = E_a$. De plus l'application φ_a passe aux classes pour (μ_a). Pour rappel, un élément de $\mathbb{K}[X]/(\mu_a)$ est de la forme

$$[P] = \{P + Q\mu_a\}_{Q\in\mathbb{K}[X]}. \tag{8.654}$$

Nous considérons donc l'application quotient

$$\begin{aligned} \psi \colon \frac{\mathbb{K}[X]}{(\mu_a)} &\to E_a \\ [P] &\mapsto \varphi_a(P), \end{aligned} \tag{8.655}$$

et nous prouvons que c'est un isomorphisme d'espace vectoriel.

(1a) **Linéaire** Parce que $(\lambda P + Q)(f) = (\lambda P)(f) + Q(f)$.

(1b) **Injectif** Si $\psi([P]) = 0$, alors $\varphi_a(P) = 0$, c'est-à-dire que $P \in \ker(\varphi_a)$. Mais, par définition 8.96 du polynôme minimal ponctuel, μ_a est générateur de $\ker(\varphi_a)$; donc il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q\mu_a$. Par conséquent $[P] = 0$, ce que nous voulions.

(1c) **Surjectif** Si $x \in E_a$ alors il existe des coefficients $x_k \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=0}^{\deg(\mu_a)-1} x_k f^k(a)$, c'est-à-dire $x = P(f)a = \varphi_a(P) = \psi([P])$.

Mais par hypothèse et par choix de a nous avons $\mu_a = \mu = \chi$, donc en fait $E_a = \mathbb{K}[X]/(\chi)$. Nous savons aussi que $\deg(\chi) = \dim(E)$ et que $\dim\big(\mathbb{K}[X]/P\big) = \deg(P)$ par la proposition 8.108. Au final nous avons $\dim(E_a) = \deg(\chi) = \dim(E)$. Et par conséquent $E_a = E$. Cela prouve que a est un vecteur cyclique pour f.

(2) **(2) implique (3)** Soit $g \in \mathcal{C}(f)$; nous devons prouver que g est un polynôme de f. Par hypothèse nous avons un vecteur cyclique que nous notons v. Nous avons un polynôme P (dépendant de g) tel que $g(v) = P(f)v$. Nous allons voir que $g = P(f)$. Soient $y \in E$ et Q un polynôme tels que $y = Q(f)v$; en notant que g commute avec $P(f)$ nous avons

$$g(y) = g\big(Q(f)v\big) = Q(f)\big(g(v)\big) = Q(f)\big(P(f)v\big) = P(f)Q(f)v = P(f)y. \tag{8.656}$$

Donc $g = P(f)$.

(3) **(3) implique (1)**

Nous avons les inégalités :

$$n \leqslant \dim\big(\mathcal{C}(f)\big) = \dim\big(\mathbb{K}[f]\big) = \deg(\mu) \leqslant \deg(\chi) = n. \tag{8.657}$$

La première inégalité est le lemme 8.300. Ensuite, toutes les inégalités se trouvent être des égalités. En particulier $\deg(\mu) = n$, ce qui signifie que $\mu = \chi$ parce que μ est un polynôme diviseur de χ, de même degré que χ et unitaire tout comme χ.

□
CORooAKQEooSliXPp

Corolaire 8.302 ([153]).
En suivant les notations sur les extensions de corps de base de la section 8.15, l'endomorphisme $f \colon E \to F$ est cyclique si et seulement si l'endomorphisme $f_{\mathbb{L}} \colon E_{\mathbb{L}} \to F_{\mathbb{L}}$ est cyclique.

Démonstration. Nous savons par le théorème 8.301 qu'un endomorphisme est cyclique si et seulement si son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique. Or par les propositions 8.282 et 8.283, nous savons que ces polynômes sont identiques pour f et pour $f_{\mathbb{L}}$. □
THOooHUFBooReKZWG

Théorème 8.303 (Similitude et extension de corps[153]).
Les applications linéaires $f, g \colon E \to E$ sont semblables si et seulement si $f_{\mathbb{L}}$ et $g_{\mathbb{L}}$ le sont.

[126] Dans toute la suite, nous devrions écrire μ_f et $\mu_{f,a}$ mais nous omettons d'indiquer explicitement la dépendance en f.

Démonstration. En ce qui concerne le sens direct, si il existe $m \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $f = mgm^{-1}$ alors il suffit d'appliquer le lemme 8.278 pour avoir $f_{\mathbb{L}} = m_{\mathbb{L}} g_{\mathbb{L}} m_{\mathbb{L}}^{-1}$.

Nous considérons les invariants de similitude de f du théorème 8.289. Il existe une unique suite de polynômes unitaires μ_i $(i = 1, \dots, s)$ tels que $\mu_{i+1} \mid \mu_i$ et pour laquelle nous avons une décomposition $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ pour laquelle $f|_{E_i} : E \to E_i$ est cyclique et de polynôme minimal μ_i.

Nous avons aussi $E_{\mathbb{L}} = (E_1)_{\mathbb{L}} \oplus \dots \oplus (E_s)_{\mathbb{L}}$ et les $(E_i)_{\mathbb{L}}$ sont stables sous $f_{\mathbb{L}}$ qui y sera également cyclique (corolaire 8.302). De plus le polynôme minimal de $f_{\mathbb{L}}|_{(E_i)_{\mathbb{L}}}$ est également μ_i.

Autrement dit, la suite μ_i est également la suite des invariants de similitude de $f_{\mathbb{L}}$. La remarque 8.290 nous permet de conclure que f et g sont semblables si et seulement si $f_{\mathbb{L}}$ et $g_{\mathbb{L}}$ le sont. □

8.18 Hyperplans et formes linéaires

DEFooEWDTooQbUQws

Proposition-Définition 8.304 ([1, 349, 350]).
Soient un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, et un sous-espace vectoriel H. Il y a équivalence entre

ITEMooUCWQooToKrop

(1) E possède une droite vectorielle supplémentaire[127] à H,

ITEMooXVIPooNxijzA

(2) Il existe une forme linéaire non nulle $f : E \to \mathbb{K}$ telle que $H = \ker(f)$.

*Quand ces conditions sont vérifiées, nous disons que H est un **hyperplan** de E.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **(1) ⇒ (2)** Soit V une droite vectorielle supplémentaire de H : pour tout $x \in E$, il existe des uniques $x_H \in H$ et $x_V \in V$ tels que $x = x_H + x_V$. Si $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base de H, nous prouvons que $B = \{e_i\}_{i\in I} \cup \{v\}$ est une base de E. Le fait que B soit générateur est immédiat. Pour que ce soit libre, nous supposons que $\sum_{i\in I} a_i e_i + bv = 0$ ($a_i \neq 0$ que pour une partie finie de I).

Le vecteur 0 s'écrit dans la décomposition $E = H \oplus V$ de façon unique $0 = 0 + 0$. Nous avons donc $\sum_i a_i e_i = 0$ et $b = 0$. Vu que $\{e_i\}_{i\in I}$ est libre, nous en déduisons également $a_i = 0$ pour tout i.

Maintenant nous posons

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{K} \\ x_H + bv &\mapsto b. \end{aligned} \tag{8.658}$$

C'est une application linéaire et $H = \ker(f)$.

(2) **(2) ⇒ (1)** Nous considérons une application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ et $H = \ker(f)$. Vu que $f \neq 0$, nous pouvons considérer un élément $v \in E$ tel que $f(v) \neq 0$. Par linéarité nous avons aussi $\mathrm{Image}(f) = \mathbb{K}$. Donc $\{f(v)\}$ est une base de $\mathrm{Image}(f)$.

Nous sortons maintenant le théorème du rang 4.49. Si B est une base de H, alors $B \cup \{v\}$ est une base de E. Donc $V = \mathbb{K}v$ est un supplémentaire de H dans E.

□

PROPooUZZDooPAKmvN

Proposition 8.305 ([351]).
Soit un espace vectoriel de dimension finie n. Une partie est un hyperplan si et seulement si c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Proposition 8.306 ([152]).
Soit un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit un sous-espace vectoriel V de E de dimension s. Alors V est une intersection de $n - s$ hyperplans de E.

Démonstration. Nous considérons une base de V que nous complétons[128] en une base de E : si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, nous avons $x \in V$ si et seulement si $x_{s+1} = \dots = x_n = 0$. Nous considérons les formes linéaires

$$\begin{aligned} \varphi_i : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_i, \end{aligned} \tag{8.659}$$

et nous considérons les parties $H_i = \ker(\varphi_i)$ qui sont de hyperplans (définition 8.304). Les H_i avec $s + 1 \leqslant i \leqslant n$ sont une famille de $n - s$ hyperplans qui vérifient

$$V = \bigcap_{i=s+1}^{n} \ker(\varphi_i) \tag{8.660}$$

[127] Définition 4.22.
[128] Théorème de la base incomplète, 4.14(4).

parce que $x \in \ker(\varphi_i)$ si et seulement si $x_i = 0$.

Donc V peut être écrit comme intersection de $n - s$ hyperplans de E. □

PROPooRCLNooJpIMMl

Proposition 8.307 ([152]).
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$. Si H_i sont des hyperplans de E, alors

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geqslant n - m. \tag{8.661}$$

Démonstration. N'oubliez pas de prouver que $\bigcap_{i=1}^{m} H_i$ est un espace vectoriel. À part ça, nous faisons une petite récurrence.

(1) **Pour $m = 2$** Nous savons déjà par la proposition 4.50 que

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2). \tag{8.662}$$

De plus $\dim(H_1 + H_2) \leqslant n$. En remplaçant, par les valeurs,

$$\begin{aligned}
\dim(H_1 \cap H_2) &= \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) && \text{(8.663a)}\\
&= n - 1 + n - 1 - \dim(H_1 + H_2) && \text{(8.663b)}\\
&\geqslant 2n - 2 - n && \text{(8.663c)}\\
&= n - 2. && \text{(8.663d)}
\end{aligned}$$

Donc $\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n - 2$.

(2) **La récurrence** Nous calculons $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_m \cap H_{m+1})$ en commençant encore par la proposition 4.50 :

$$\begin{aligned}
\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_m \cap H_{m+1}) &= \underbrace{\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_m)}_{\leqslant n-m} + \dim(H_{m+1}) && \text{(8.664a)}\\
&\quad - \underbrace{\dim\big((H_1 \cap \ldots H_m) + H_{m+1}\big)}_{\leqslant n} && \text{(8.664b)}\\
&\geqslant n - m + (n-1) - n && \text{(8.664c)}\\
&= n - m - 1. && \text{(8.664d)}
\end{aligned}$$

C'est bon pour la récurrence.

□

8.18.1 Trouver la matrice d'une symétrie donnée

SubSecMtrSym

Les notions de déterminants, produit scalaire et vectoriels[129] donnent une bonne intuition géométrique des matrices. Nous pouvons alors chercher les matrices de quelques symétries dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

8.18.1.1 Symétrie par rapport à un plan

Comment trouver par exemple la matrice A qui donne la symétrie autour du plan $z = 0$? La définition d'une telle symétrie est que les vecteurs du plan $z = 0$ ne bougent pas, tandis que les vecteurs perpendiculaires changent de signe. Ces informations vont permettre de trouver comment A agit sur une base de $\mathbb{R}^3$. En effet :

(1) Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le plan $z = 0$, donc il ne bouge pas,

(2) le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est également dans le plan, donc il ne bouge pas non plus,

(3) et le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan $z = 0$, donc il va changer de signe.

[129] Définitions 8.14, 8.163 et 10.40.

Cela nous donne directement les valeurs de A sur la base canonique et nous permet d'écrire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8.665}$$

Pour écrire cela, nous avons juste mis en colonne les images des vecteurs de base. Les deux premiers n'ont pas changé et le troisième a changé.

Et si maintenant on donne un plan moins facile que $z = 0$? Le principe reste le même : il faudra trouver deux vecteurs qui sont dans le plan (et dire qu'ils ne bougent pas), et puis un vecteur qui est perpendiculaire au plan[130], et dire qu'il change de signe.

Voyons ce qu'il en est pour le plan $x = -z$. Il faut trouver deux vecteurs linéairement indépendants dans ce plan. Prenons par exemple

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{8.666}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} Af_1 &= f_1 \\ Af_2 &= f_2. \end{aligned} \tag{8.667}$$

Afin de trouver un vecteur perpendiculaire au plan, calculons le produit vectoriel :

$$f_3 = f_1 \times f_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -e_1 - e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{8.668}$$

Nous avons

$$Af_3 = -f_3. \tag{8.669}$$

Afin de trouver la matrice A, il faut trouver Ae_1, Ae_2 et Ae_3. Pour ce faire, il faut d'abord écrire $\{e_1, e_2, e_3\}$ en fonction de $\{f_1, f_2, f_3\}$. La première des équations (8.666) dit que

$$f_1 = e_2. \tag{8.670}$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} f_2 &= e_1 - e_3 \\ f_3 &= -e_1 - e_3. \end{aligned} \tag{8.671}$$

La somme de ces deux équations donne $-2e_3 = f_2 + f_3$, c'est-à-dire

$$e_3 = -\frac{f_2 + f_3}{2} \tag{8.672}$$

Et enfin, nous avons

$$e_1 = \frac{f_2 - f_3}{2}. \tag{8.673}$$

Maintenant nous pouvons calculer les images de e_1, e_2 et e_3 en faisant

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \frac{Af_2 - Af_3}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ Ae_2 &= Af_1 = f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Ae_3 &= -\frac{f_2 - f_3}{2} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.674}$$

La matrice A s'écrit maintenant en mettant les trois images trouvées en colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.675}$$

[130] Pour le trouver, penser au produit vectoriel.

8.18.1.2 Symétrie par rapport à une droite

Le principe est exactement le même : il faut trouver trois vecteurs f_1, f_2 et f_3 sur lesquels on connaît l'action de la symétrie. Ensuite il faudra exprimer e_1, e_2 et e_3 en termes de f_1, f_2 et f_3.

Le seul problème est de trouver les trois vecteurs f_i. Le premier est tout trouvé : c'est n'importe quel vecteur sur la droite. Pour les deux autres, il faut un peu ruser parce qu'il faut impérativement qu'ils soient perpendiculaire à la droite. Pour trouver f_2, on peut écrire

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \tag{8.676}$$

et puis fixer le x pour que le produit scalaire de f_2 avec f_1 soit nul. Si il n'y a pas moyen (genre si f_1 a sa troisième composante nulle), essayer avec $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une fois que f_2 est trouvé (il y a des milliards de choix possibles), trouver f_3 est super facile : prendre le produit vectoriel entre f_1 et f_2.

8.18.1.3 En résumé

La marche à suivre est

(1) Trouver trois vecteurs f_1, f_2 et f_3 sur lesquels on connaît l'action de la symétrie. Typiquement : des vecteurs qui sont sur l'axe ou le plan de symétrie, et puis des perpendiculaires. Pour la perpendiculaire, penser au produit scalaire et au produit vectoriel.

(2) Exprimer la base canonique e_1, e_2 et e_3 en termes de f_1, f_2, f_3.

(3) Trouver Ae_1, Ae_2 et Ae_3 en utilisant leur expression en termes des f_i, et le fait que l'on connaisse l'action de A sur les f_i.

(4) La matrice s'obtient en mettant les images des e_i en colonnes.

8.19 Théorème de Burnside

LemwXXzIt

Lemme 8.308.
Soit P, un polynôme sur $\mathbb{K}$. Une racine de P est une racine simple si et seulement si elle n'est pas racine de P'.

ThoBurnsideoPuCtS

Théorème 8.309.
Toute représentation[131] *d'un groupe abélien d'exposant fini sur $\mathbb{C}^n$ a une image finie.*

Démonstration. Étant donné que G est d'exposant fini, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^\alpha = e$ pour tout $g \in G$. Le polynôme $P(X) = X^\alpha - 1$ est scindé à racines simples. En effet tout polynôme sur $\mathbb{C}$ est scindé. Le fait qu'il soit à racines simples provient du lemme 8.308 parce que si $a^\alpha = 1$, alors il n'est pas possible d'avoir $\alpha a^{\alpha-1} = 0$.

Par ailleurs $P(g) = 0$. Le fait que nous ayons un polynôme annulateur de g scindé à racines simples implique que g est diagonalisable (théorème 8.217). Le fait que G soit abélien montre qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle tous les éléments de G sont diagonaux. Nous devons par conséquent montrer qu'il existe un nombre fini de matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{8.677}$$

Nous savons que $\lambda_i^\alpha = 1$ parce que $g^\alpha = \mathbb{1}$, par conséquent chacun des λ_i est une racine de l'unité dont il n'existe qu'un nombre fini. □

ThooJLTit

Théorème 8.310 (Burnside[137, 352])**.**
Un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est fini si et seulement si il est d'exposant[132] *fini.*

[131] Définition 4.145.
[132] Définition 1.425.

Démonstration. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Si G est fini, l'ordre de ses éléments divise $|G|$ (corolaire 2.15 au théorème de Lagrange) et l'exposant est le PPCM qui est donc fini également. Le théorème est déjà démontré dans un sens.

Dans l'autre sens, nous notons $e<\infty$ l'exposant de G, et nous allons prouver que l'ensemble G est fini. Nous commençons par remarquer que tous les éléments de G sont des racines du polynôme X^e-1, et ensuite nous nous lançons dans le travail.

(1) **Générateurs**

Le groupe G est une partie de $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ dont nous considérons l'algèbre engendrée[133] $\mathcal{G}$. Soit $C_1,\dots,C_r$ une famille génératrice de $\mathcal{G}$ constituée d'éléments de G et la fonction

$$\begin{aligned}\tau\colon G&\to\mathbb{C}^r\\ A&\mapsto\big(\mathrm{Tr}(AC_1),\dots,\mathrm{Tr}(AC_r)\big).\end{aligned}\tag{8.678}$$

(2) **τ est injective** Soient $A,B\in G$ tels que $\tau(A)=\tau(B)$. Si C_i est un générateur de G, nous avons $\mathrm{Tr}(AC_i)=\mathrm{Tr}(BC_i)$ et par la linéarité de la trace, nous avons

$$\mathrm{Tr}(AM)=\mathrm{Tr}(BM)\tag{8.679}$$ EqnCYmKW

pour tout $M\in G$. Notons par ailleurs

$$N=AB^{-1}-\mathbb{1},\tag{8.680}$$

qui est diagonalisable parce que $AB^{-1}\in G$ et donc est annulé par le polynôme X^e-1 qui est scindé à racines simples. Du coup AB^{-1} est diagonalisable ; posons $PAB^{-1}P^{-1}=D$, alors $P\big(AB^{-1}-\mathbb{1}\big)P^{-1}=D-\mathbb{1}$ qui est encore diagonale. Donc N est diagonalisable.

Par ailleurs nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\big((AB^{-1})^p\big)&=\mathrm{Tr}\big(AB^{-1}(AB^{-1})^{p-1}\big)&&&(8.681a)\\ &=\mathrm{Tr}\big(BB^{-1}(AB^{-1})^{p-1}\big)&&(8.679)&(8.681b)\\ &=\mathrm{Tr}\big((AB^{-1})^{p-1}\big).&&&(8.681c)\end{aligned}$$

En continuant nous obtenons

$$\mathrm{Tr}\big((AB^{-1})^p\big)=\mathrm{Tr}(\mathbb{1})=n.\tag{8.682}$$

D'autre part,

$$N^k=(AB^{-1}-\mathbb{1})^k=\sum_{p=0}^{k}\binom{p}{k}(-1)^{k-p}(AB^{-1})^p\tag{8.683}$$

En prenant la trace, et en tenant compte du fait que $\mathrm{Tr}\big((AB^{-1})^p\big)=n$,

$$\mathrm{Tr}(N^k)=\sum_{p=0}^{k}\binom{p}{k}(-1)^{k-p}n=n(1-1)^k=0.\tag{8.684}$$

Donc la trace de N^k est nulle et le lemme 8.209 nous enseigne que N est alors nilpotente. Étant donné qu'elle est aussi diagonalisable, elle est nulle. Nous en concluons que $AB^{-1}=\mathbb{1}$ et donc que $A=B$. La fonction τ est donc injective.

(3) **Nombre fini de valeurs**

Les éléments de G sont annulés par X^e-1 qui est un polynôme scindé à racines simples. Dons le polynôme minimal d'un élément de G est (a fortiori) scindé à racines simples et le théorème 8.217 nous assure alors que ces éléments sont diagonalisables. Du coup les valeurs propres des matrices de G sont des racines $e$ièmes de l'unité. Par conséquent les traces des éléments de G ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs : toutes les sommes de n racines $e$ièmes de l'unité. Mais vu que les C_i sont dans G, nous avons

$$\mathrm{Image}(\tau)=\{\mathrm{Tr}(A)\text{ tel que }A\in G\}^r,\tag{8.685}$$

qui est un ensemble fini. Par conséquent G est fini parce que τ est injective.

□

[133] Définition 1.463.

8.20 Ellipsoïde

LemYVWoohcjIX

Lemme 8.311.
Toute matrice peut être décomposée de façon unique en une partie symétrique et une partie antisymétrique. Cette décomposition est donnée par

$$S = \frac{M + M^t}{2}, \quad A = \frac{M - M^t}{2} \tag{8.686}$$

subEqHIQooyhiWM

Démonstration. L'existence est une vérification immédiate de $S+A = M$ en utilisant (8.686). Pour l'unicité, si $S + A = S' + A'$ alors $S - S' = A - A'$. Mais $S - S'$ est symétrique et $A - A'$ est antisymétrique ; l'égalité implique l'annulation des deux membres, c'est-à-dire $S = S'$ et $A = A'$. □

DefOEPooqfXsE

Définition 8.312.
*Un **ellipsoïde** dans $\mathbb{R}^n$ centré en v est le lieu des points x vérifiant l'équation*

$$\langle x - v, M(x - v)\rangle = 1 \tag{8.687}$$

EqSNWooXfbTH

où M est une matrice symétrique strictement définie positive[134]*.*

Lorsque nous parlons d'ellipsoïde plein*, il suffit de changer l'égalité en une inégalité.*

Remarque 8.313.
Le fait que M soit symétrique n'est pas tout à fait obligatoire ; la chose important est que toutes les valeurs propres soient strictement positives. En effet si M a toutes ses valeurs propres strictement positives, nous nommons S la partie symétrique de M et A la partie antisymétrique (lemme 8.311). Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$x^tAx = \langle x, Ax\rangle = \langle A^tx, x\rangle = -\langle Ax, x\rangle = -\langle x, Ax\rangle, \tag{8.688}$$

donc $x^tAx = 0$. L'équation $x^tMx = 1$ est donc équivalente à $x^tSx = 1$ (elles ont les mêmes solutions).

De plus S reste strictement définie positive parce que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$0 < x^tMx = x^tSx. \tag{8.689}$$

PropWDRooQdJiIr

Proposition 8.314.
Si $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde centrée à l'origine, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle son équation est :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1. \tag{8.690}$$

Démonstration. Nous avons une matrice symétrique strictement définie positive S telle que l'équation soit $\langle x, Sx\rangle = 1$. Le théorème spectral 8.225 nous fournit une base orthonormale $\{e_i\}$ dans laquelle $Se_i = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i > 0$. En substituant dans l'équation $\langle x, Sx\rangle = 1$ nous trouvons l'équation

$$\sum_i \lambda_i x_i^2 = 1. \tag{8.691}$$

En posant $a_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$, nous trouvons le résultat. Cette définition des a_i est toujours possible parce que $\lambda_i > 0$. □

CorKGJooOmcBzh

Corolaire 8.315.
Un ellipsoïde plein centré en l'origine admet une équation de la forme $q(x) \leqslant 1$ où q est une forme quadratique strictement définie positive.

Pour rappel de notation, l'ensemble des formes quadratiques strictement définies positives sur l'espace vectoriel E est noté $Q^{++}(E)$.

Démonstration. Soit $\{e_i\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ telle que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ ait pour équation

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leqslant 1. \tag{8.692}$$

Nous considérons la forme quadratique

$$\begin{aligned} q\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, e_i\rangle^2}{a_i^2}. \end{aligned} \tag{8.693}$$

[134] Définition 8.228.

Nous avons évidemment $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x) \leqslant 1\}$. De plus la forme q est strictement définie positive parce que dès que $x \neq 0$, au moins un des produits scalaires $\langle x, e_i \rangle$ est non nul et $q(x) > 0$. □

8.21 Système d'équations linéaires : méthode de Gauss

Pour résoudre un système d'équations linéaires, on procède comme suit :

(1) Écrire le système sous forme matricielle.

$$\text{p.ex. } \begin{cases} 2x + 3y &= 5 \\ x + 2y &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

(2) Se ramener à une matrice avec un maximum de 0 dans la partie de gauche en utilisant les transformations admissibles :

(2a) Remplacer une ligne par elle-même + un multiple d'une autre ;

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{L_1 - 2.L_2 \mapsto L_1'}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

(2b) Remplacer une ligne par un multiple d'elle-même ;

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{-L_1 \mapsto L_1'}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

(2c) Permuter des lignes.

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{L_1 \mapsto L_2' \text{ et } L_2 \mapsto L_1'}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

(3) Retransformer la matrice obtenue en système d'équations.

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -2 \\ y &= 3 \end{cases}$$

Remarque 8.316. • Si on obtient une ligne de zéros, on peut l'enlever :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

- Si on obtient une ligne de zéros suivie d'un nombre non-nul, le système d'équations n'a pas de solution :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \cdots \\ \cdots \\ 0x + 0y + 0z = 7 \end{cases} \Rightarrow \textbf{Impossible}$$

- Si on a moins d'équations que d'inconnues, alors il y a une infinité de solutions qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Chapitre 9

Analyse réelle : topologie et continuité

9.1 Intervalles

DEFooKRRYooZlwiEo

Définition 9.1 (Intervalle)**.**
*Une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si pour tout $a, b \in I$ nous avons $t \in I$ dès que $a \leqslant t \leqslant b$.*

PROPooJJRZooACUmWN

Proposition 9.2.
À propos d'intervalles.

(1) Un intervalle[1] *est ouvert si il est de la forme $]a, b[$ avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.*

(2) Un intervalle est fermé si il est de la forme $[a, b]$ ou $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Remarque 9.3.
L'ensemble $\mathbb{R}$ ne contient pas $+\infty$ et $-\infty$. L'intervalle $[-\infty, 5]$ par exemple, n'est pas une partie de $\mathbb{R}$.

Exemple 9.4. (1) Les ensembles $]3, 7[$ et $]-\infty, \pi[$ sont des intervalles ouverts.

(2) Les ensembles $[10, 15]$ et $[-1, +\infty[$ sont des intervalles fermés.

(3) L'ensemble $]-4, -2[\cup]2, 9[$ n'est pas un intervalle (il y a un « trou » entre -2 et 2).

(4) L'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même est un intervalle ; par convention, il est à la fois ouvert et fermé.

Un intervalle peut n'être ni ouvert ni fermé ; par exemple $]4, 8]$. Cet intervalle est « ouvert en 4 et fermé en 8 » . △

Définition 9.5 (Fonction, domaine, image, graphe)**.**
*Soient X et Y deux ensembles. Une **fonction** f définie sur X et à valeurs dans Y est une partie de $X \times Y$ telle que pour tout $x \in X$, il existe un unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in f$.*

9.6.
Notons qu'il n'est pas demandé que pour tout y, il existe x tel que $(x, y) \in f$. Autrement dit, la notation « $f \colon X \to Y$ » ne suppose pas que f est surjective sur Y. Mais elle doit être définie sur tout X.

Nous écrivons $y = f(x)$ pour dire $(x, y) \in f$.

- La partie de X qui contient tous les x sur lesquels f peut opérer est dite **domaine** de f. Le domaine de f est indiqué par $\text{Domaine}\, f$.
- L'élément de $y \in Y$ associé par f à un élément $x \in \text{Domaine}\, f$ (c'est-à-dire $f(x) = y$) est appellé **image** de x par f. L'**image** de la fonction f est la partie de Y qui contient les images de tous les éléments de $\text{Domaine}\, f$. L'image de f est indiquée par $\Im f$.
- Le **graphe** de f est l'ensemble de tous les couples $(x, f(x))$ pour $x \in \text{Domaine}\, f$. Le graphe de f est une partie de l'ensemble noté $X \times Y$ et il est indiqué par $\text{Graph}\, f$. Dans ce chapitre $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, donc le graphe de f est contenu dans le plan cartésien.

Définition 9.7 (Fonction croissante, décroissante et monotone)**.**
Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

[1] Définition 9.1.

(1) *La fonction f est* ***croissante*** *sur I si pour tout $x < y$ dans I nous avons $f(x) \leqslant f(y)$. Elle est* strictement *croissante si $f(x) < f(y)$ dès que $x < y$.*

(2) *La fonction f est* ***décroissante*** *sur I si pour tout $x < y$ dans I nous avons $f(x) \geqslant f(y)$. Elle est* strictement *décroissante si $f(x) > f(y)$ dès que $x < y$.*

(3) *La fonction f est dite* ***monotone*** *sur I si elle est, soit croissante, soit décroissante, sur I.*

Exemple 9.8.
La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0, \infty[$. Elle n'est par contre ni croissante ni décroissante sur l'intervalle $[-4, 3]$. △

9.2 Application réciproque

9.2.1 Définitions

Les définitions d'injection, surjection, bijection et d'application réciproque sont les définitions 1.15 et 1.19.
EXooCWYHooLEciVj

Exemple 9.9. (1) La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ parce qu'il n'existe aucun x tel que $x^2 = -1$.

(2) Nous verrons un peu plus tard (12.404) que la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [0, +\infty[&\to [0, +\infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{9.1}$$

est une bijection. Notez que c'est la même fonction que celle de l'exemple précédent. Seul l'intervalle sur lequel nous nous plaçons a changé.

(3) La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to [0, \infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{9.2}$$

n'est pas une bijection parce qu'il existe plusieurs x pour lesquels $f(x) = 4$.
En conclusion : il est très important de préciser les domaines des fonctions considérées. △

Remarque 9.10.
Dire que la fonction $f\colon I \to J$ est bijective, c'est dire que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x peut être résolue de façon univoque pour tout $y \in J$.
LEMooSDMMooYYDDLs

Lemme 9.11.
Toute fonction strictement monotone sur un intervalle est injective.

Exemple 9.12.
Trouvons la fonction réciproque de la fonction affine $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$. Si $y \in \mathbb{R}$, le nombre $f^{-1}(y)$ est la valeur de x pour laquelle $f(x) = y$. Il s'agit donc de résoudre

$$3x - 2 = y \tag{9.3}$$

par rapport à x. La solution est $x = \frac{y+2}{3}$ et donc nous écrivons

$$f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}. \tag{9.4}$$

△

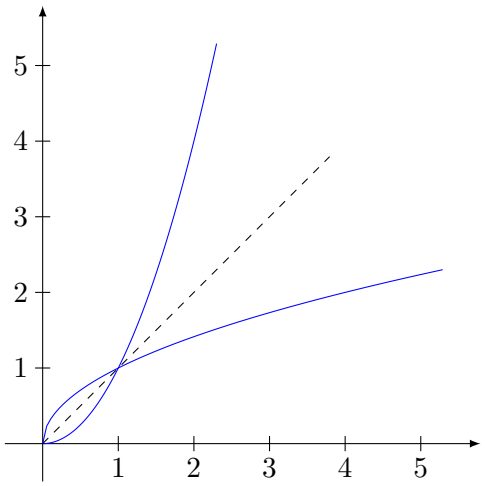
9.2.2 Graphe de la fonction réciproque

Par définition le graphe de la fonction f est l'ensemble des points de la forme (x, y) vérifiant $y = f(x)$. Afin de déterminer le graphe de la bijection réciproque nous pouvons faire le raisonnement suivant.

Le point (x_0, y_0) est sur le graphe de f
⇔
La relation $f(x_0) = y_0$ est vérifiée
⇔
La relation $x_0 = f^{-1}(y_0)$ est vérifiée
⇔
Le point (y_0, x_0) est sur le graphe de f^{-1}.

À retenir 9.13
Dans un repère orthonormal, le graphe de la bijection réciproque est obtenu à partir du graphe de f en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Le dessin suivant montre le cas de la courbe de la fonction carré comparé à celle de la racine carrée.



9.3 Topologie sur l'ensemble des réels

SECooGKHYooMwHQaD

Nous allons à présent donner la topologie sur $\mathbb{R}$ et ainsi résoudre les questions laissées en suspens lors de la construction des réels, voir 1.529.

Afin de pouvoir étudier la topologie des espaces métriques, il faut connaître quelques propriétés des réels, parce que nous allons étudier la fonction « distance » qui est une fonction continue à valeurs dans les réels.

La valeur absolue de la définition 1.113 permet de définir une norme sur $\mathbb{R}$.

LEMooBNAPooBTtXnX

Lemme 9.14.
L'application

$$x \mapsto |x| \tag{9.5}$$

est une norme[2] *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Grâce au lemme 1.114(5), on a, pour tout $x,\ y,\ \lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $|x| = 0$ implique $x = 0$,

(2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$,

(3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$,

et donc, les conditions de la définition 7.212 sont immédiatement vérifiées. □

DEFooNYGIooVGHSIA

Définition 9.15 (Topologie sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$)**.**
Le lemme 9.14 donne une norme sur $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{Q}$ *à partir de la valeur absolue. La définition 7.142 donne alors une structure d'espace topologique. Hors cas rarissimes qui seront signalés, nous utiliserons toujours cette topologie sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{Q}$.

PropooUHNZooOUYIkn

Proposition 9.16.
Les rationnels sont denses dans les réels[3].

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Nous devons prouver l'existence d'un rationnel dans $B(x, \epsilon)$. Le lemme 1.556 dit qu'il existe un rationnel dans $]x - \epsilon/2, x + \epsilon/2[$ et donc dans $B(x, \epsilon)$. □

PropSLCUooUFgiSR

Proposition 9.17 ([1])**.**
Quel que soit le réel x*, il existe une suite croissante de rationnels convergente vers* x.

[2] Définition 7.212.
[3] Pour les topologies usuelles données en la définition 9.15.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}$; comme $x - \delta$ et x sont des réels, le lemme 1.556 donne un élément $q_\delta \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x - \delta < q_\delta < x. \tag{9.6}$$

Il suffit alors de pêcher parmi ces q_δ pour trouver une suite croissante, et on montrera que cette suite converge vers x.

Soit x_0 un rationnel plus petit que x. Nous posons $\delta_0 = x - x_0$ et ensuite :

$$\begin{cases} \delta_i = x - x_i & \text{(9.7a)} \\ x_{i+1} = q_{\delta_i/2} \in \mathbb{Q}. & \text{(9.7b)} \end{cases}$$

Ainsi nous avons pour tout i les inégalités

$$x_i = x - \delta_i < x - \frac{\delta_i}{2} < x_{i+1} < x. \tag{9.8}$$

La suite (x_i) est donc une suite de rationnels, croissante et toujours plus petite que x. Mais nous avons à chaque étape $\delta_{i+1} < \frac{\delta_i}{2}$, ce qui implique que la suite des δ_i converge vers 0. Soit $\epsilon > 0$. Il existe k_0 tel que pour tout $k > k_0$, $\delta_k < \epsilon$. Pour un tel k, nous avons alors

$$x_{k+1} \in B(x, \frac{\delta_k}{2}) \subset B(x, \epsilon). \tag{9.9}$$

Tous les x_k, pour $k > k_0 + 1$, sont tels que $|x - x_k| < \epsilon$: la suite des x_k converge donc vers x. □

9.3.1 Compacité pour les réels

PROPooBFSAooKSugMj

Proposition 9.18.
Les parties compactes[4] *de* $\mathbb{R}$ *sont fermées et bornées.*

Démonstration. Prouvons d'abord qu'un ensemble compact est borné. Pour cela, supposons que K est un compact non borné vers le haut[5].

Nous posons $A_0 =]-\infty, 1[$ et $A_n =]n-1, n+1[$. Ces ouverts recouvrent $\mathbb{R}$ et donc K. Hélas tout choix d'un nombre fini des A_n est borné, et ne recouvre donc pas K. Les $\{A_i\}_{i=0,\dots,}$ forment un recouvrement de K par des ouverts dont on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini.

Cela prouve que K doit être borné.

Pour prouver que K est fermé, nous allons prouver que le complémentaire est ouvert. Et pour cela, nous allons prouver que si le complémentaire n'est pas ouvert, alors nous pouvons construire un recouvrement de K dont on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini.

Si $\mathbb{R} \setminus K$ n'est pas ouvert, il possède un point, disons x, tel que tout voisinage de x intersecte K. Soit $B(x, \epsilon_1)$, un de ces voisinages, et prenons $k_1 \in K \cap B(x, \epsilon_1)$. Ensuite, nous prenons ϵ_2 tel que k_1 ne soit pas dans $B(x, \epsilon_2)$, et nous choisissons $k_2 \in K \cap B(x, \epsilon_2)$. De cette manière, nous construisons une suite de $k_i \in K$ tous différents et de plus en plus proches de x. Prenons un recouvrement quelconque par des ouverts de la partie de K qui n'est pas dans $B(x, \epsilon_1)$. Les nombres k_i ne sont pas dans ce recouvrement.

Nous ajoutons à ce recouvrement les ensembles $\mathcal{O} =]k_i, k_{i+1}[$. Le tout forme un recouvrement (infini) par des ouverts dont il n'y a pas moyen de tirer un sous-recouvrement fini, pour exactement la même raison que la première fois. □

ThoBOrelLebesgue

Théorème 9.19 (Borel-Lebesgue)**.**
Un intervalle de $\mathbb{R}$ *est compact si et seulement si il est de la forme* $[a, b]$.

Démonstration. Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont listés dans la proposition 1.584. Un compact est fermé et borné (proposition 9.18). Donc les intervalles dont une borne est $\pm\infty$ ne sont pas compacts. Parmi les intervalles $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $[a, b]$, seul le dernier est fermé. Nous avons prouvé que si un intervalle est compact, alors il est de la forme $[a, b]$.

Nous prouvons à présent l'implication inverse : tous les intervalles de la forme $[a, b]$ sont compacts.

Soit Ω, un recouvrement du segment $[a, b]$ par des ouverts, c'est-à-dire que

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega} \mathcal{O}. \tag{9.10}$$

Nous notons par M le sous-ensemble de $[a, b]$ des points m tels que l'intervalle $[a, m]$ peut être recouvert par un sous-ensemble fini de Ω. C'est-à-dire que M est le sous-ensemble de $[a, b]$ sur lequel le théorème est vrai. Le but est maintenant de prouver que $M = [a, b]$.

[4] Définition 7.109.

[5] Nous laissons à titre d'exercice le cas où K est borné par le haut et pas par le bas.

M **est non vide** En effet, $a \in M$ parce qu'il existe un ouvert $\mathcal{O} \in \Omega$ tel que $a \in \mathcal{O}$. Donc $\mathcal{O}$ tout seul recouvre l'intervalle $[a, a]$.

M **est un intervalle** Soient m_1, $m_2 \in M$. Le but est de montrer que si $m' \in [m_1, m_2]$, alors $m' \in M$. Il y a un sous-recouvrement fini de l'intervalle $[a, m_2]$ (par définition de $m_2 \in M$). Ce sous-recouvrement fini recouvre évidemment aussi $[a, m']$ parce que $[a, m'] \subseteq [a, m_2]$, donc $m' \in M$.

M **est un ensemble ouvert** Soit $m \in M$. Le but est de prouver qu'il y a un ouvert autour de m qui est contenu dans M. Admettons que Ω' soit un sous-recouvrement fini qui contienne l'intervalle $[a, m]$. Dans ce cas, on a un ouvert $\mathcal{O} \in \Omega'$ tel que $m \in \mathcal{O}$. Tous les points de $\mathcal{O}$ sont dans M, puisqu'ils sont tous recouverts par Ω'. Donc $\mathcal{O}$ est un voisinage de m contenu dans M.

M **est un ensemble fermé** M est un intervalle qui commence en a, en contenant a, et qui finit on ne sait pas encore où. Il est donc soit de la forme $[a, m]$, soit de la forme $[a, m[$. Nous allons montrer que M est de la première forme en démontrant que M contient son supremum s. Ce supremum est un élément de $[a, b]$, et donc il est contenu dans un des ouverts de Ω. Disons $s \in \mathcal{O}_s$. Soit c, un élément de $\mathcal{O}_s$ strictement plus petit que s ; étant donné que s est supremum de M, cet élément c est dans M, et donc on a un sous-recouvrement fini Ω' qui recouvre $[a, c]$. Maintenant, le sous-recouvrement constitué de Ω' et de $\mathcal{O}_s$ est fini et recouvre $[a, s]$.

Nous pouvons maintenant conclure : le seul intervalle non vide de $[a, b]$ qui soit à la fois ouvert et fermé est $[a, b]$ lui-même (proposition 7.105), ce qui prouve que $M = [a, b]$, et donc que $[a, b]$ est compact[6]. □

LemOACGWxV

Lemme 9.20 ([353]).
Si $a < b \in \mathbb{R}$ alors le segment $[a, b]$ est compact[7]*.*

Démonstration. Soit $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de $[a, b]$ par des ouverts. Nous posons

$$M = \{x \in [a, b] \text{ tel que } [a, x] \text{ admet un sous-recouvrement fini extrait de } \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}\}. \tag{9.11}$$

Notre but est de prouver que $b \in M$.

(1) a **est dans** M Le point a est naturellement dans un des $\mathcal{O}_i$. L'intervalle $[a, a]$ est donc recouvert par un seul des $\mathcal{O}_i$.

(2) M **est un intervalle** Soient $m \in M$ et $m' \in [a, m[$. Le sous-recouvrement fini qui recouvre $[a, m]$ recouvre a fortiori $[a, m']$.

(3) **Les trois possibilités restantes** À ce niveau de la preuve, il reste trois possibilités pour M soit il est de la forme $[a, c]$ ou $[a, c[$ avec $c < b$, soit il est de la forme $[a, b]$. Nous allons maintenant éliminer les deux premiers cas.

(4) **Ce que** M **n'est pas** D'abord M n'est pas de la forme $[a, c[$ avec $c < b$. Par l'absurde, commençons par considérer $\mathcal{O}_{i_0}$ un ouvert du recouvrement qui contient c ; choisissons $m \in \mathcal{O}_{i_0}$ tel que $m < c$. Alors $m \in M$, et, si nous joignons $\mathcal{O}_{i_0}$ à un recouvrement fini de $[a, m]$ alors nous avons un recouvrement fini de $[a, c]$. On en déduit $c \in M$.

Ensuite M n'est pas de la forme $[a, c]$ avec $c < b$. En effet si on a un recouvrement fini de $[a, c]$ par des ouverts, alors un de ces ouverts contient c et donc contient des éléments de $[a, b]$ plus grands que c.

Nous déduisons que $M = [a, b]$ et qu'il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini recouvrant $[a, b]$. □

LemCKBooXkwkte

Lemme 9.21 ([1]).
Si K_1 et K_2 sont des compacts dans $\mathbb{R}$ alors $K_1 \times K_2$ est compact dans $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Soit $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de $K_1 \times K_2$ par des ouverts ; grâce au lemme 7.119 nous pouvons supposer que ce sont des carrés. Pour chaque $x \in K_1$, l'ensemble $\{x\} \times K_2$ est compact et donc recouvert par un nombre fini des $\mathcal{O}_i$. Soit R_x un ensemble fini des $\mathcal{O}_i$ recouvrant $\{x\} \times K_2$.

Comme R_x est une collection finie de carrés, nous pouvons considérer m_x, le minimum des rayons. L'ensemble K_1 est recouvert par les boules $B(x, m_x)$ et il existe donc une collection finie de $\{x_i\}_{i \in A}$ tels que $B(x_i, m_{x_i})$ recouvre K_1.

Alors $\{R_{x_i}\}_{i \in A}$ recouvre $K_1 \times K_2$ parce que R_{x_i} recouvre l'ensemble $B(x_i, m_{x_i}) \times \{K_2\}$. □

[6] Si vous n'aimez pas le coup du fermé et ouvert, le lemme 9.20 donne une autre preuve.
[7] Définition 7.109

DEFooCNCJooWgCCrF

Définition 9.22 (Partie inductive[354, 355])**.**
*Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Une partie S de $[a,b]$ est **inductive** si*

(1) $a \in S$,

(2) Si $a \leqslant x < b$ et si $x \in S$ alors il existe $y > x$ tel que $[x,y] \subset S$.

(3) Si $a < x \leqslant b$ et si $[a,x[\subset S$, alors $x \in S$.

PROPooQVQKooIjWBrk

Proposition 9.23 ([354])**.**
L'unique partie inductive[8] *de $[a,b]$ est $[a,b]$ lui-même.*

Démonstration. Le fait que $[a,b]$ soit inductif dans $[a,b]$ est immédiat. Nous prouvons que c'est la seule. Soit S inductif dans $[a,b]$. Nous posons $S' = [a,b] \setminus S$. Si S' est non vide, nous pouvons considérer le nombre $\inf(S')$.

(1) **Nous avons$\inf(S') > a$** D'abord nous savons que $\inf(S') \geqslant a$ parce que S' est une partie de $[a,b]$. De plus, vu que $a \in S$ il existe $y > a$ tel que $[a,y] \subset S$. Donc $S' \subset]y,b]$, de telle sorte que $\inf(S') \geqslant y > a$.

(2) **Si $\inf(S') \in S$** Si $\inf(S') = b$ alors $S = [a,b]$ et la preuve est faite. Supposons $\inf(S') < b$. Le nombre $\inf(S')$ vérifie $a < \inf(S') < b$ et $\inf(S') \in S$. Il existe donc $y > \inf(S')$ tel que $[\inf(S'), y] \subset S$. Nous avons alors $[a,y] \subset S$ et donc $\inf(S') > y$. Contradiction.

(3) **Si $\inf(S') \in S'$** Dans ce cas $[a, \inf(S')[\subset S$, et vu que S est inductif, $\inf(S') \in S$, contradiction.

Toutes les possibilités (à part $S' = \varnothing$) portant à des contradictions, nous déduisons que $S' = \varnothing$ et donc que $S = [a,b]$. □

9.3.2 Conséquence : les fermés bornés sont compacts

ThoXTEooxFmdI

Théorème 9.24 (Théorème de Borel-Lebesgue)**.**
Une partie d'un espace vectoriel normé réel de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Démonstration. Sens direct.

(1) **Compact implique borné** En effet si K est non borné dans E alors K contient une suite (x_n) avec $\|x_n\| > n$. Les boules $B_i(x_i, \frac{1}{3})$ sont disjointes. On pose $\mathcal{O}_0 = \complement \bigcup_i \overline{B(x_i, \frac{1}{5})}$, qui est ouvert comme complément d'un fermé. Pour $i \geqslant 1$ nous posons $\mathcal{O}_i = B(x_i, \frac{1}{4})$. Nous avons

$$K \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_i \tag{9.12}$$

mais puisque x_i est uniquement dans $\mathcal{O}_i$, nous ne pouvons pas extraire de sous-recouvrement fini.

(2) **Compact implique fermé** C'est le lemme 7.121(2).

Sens réciproque.

(1) **Un intervalle fermé et borné est compact dans $\mathbb{R}$** C'est le lemme 9.20.

(2) **Un produit de segments est compact** Le produit de deux compacts de $\mathbb{R}$ est un compact dans $\mathbb{R}^2$ par le lemme 9.21.

(3) **Un fermé et borné est compact** Soit K fermé et borné. Puisque K est borné, il est contenu dans un produit de segments. L'ensemble K est donc compact parce que fermé dans un compact, lemme 7.121.

□

LEMooNNHYooITNbyz

Lemme 9.25.
Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors la partie $[a,b]$ est compacte[9] *dans $\mathbb{R}$.*

[8] Définition 9.22.
[9] Définition 7.109.

Démonstration. Nous prouvons que c'est fermé et borné. Le théorème 9.24 fera le reste. Borné, c'est par définition 1.27 d'un intervalle. Pour montrer que $K = [a, b]$ est fermé, nous prouvons que le complémentaire est ouvert. Soit $x \in K^c$; nous allons montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(a, \epsilon) \subset K^c$. Il y a deux possibilités : $x < a$ et $x > a$. Nous traitons la seconde.

Étant donné que $a \leqslant x \leqslant b$ est contenu dans K nous avons $x > b$. Le lemme 1.556(1) donne un élément q tel que $b < q < x$. En posant $r = |x - q|/2$ nous avons $B(x, r) \subset \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } y > q\}$. Donc si $y \in B(x, r)$ alors $y > q > b$ et donc $y \in K^c$. □

Exemple 9.26 (Compacité de la boule unité)**.**
La boule unité fermée $\overline{B(0,1)}$ d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte parce que fermée et bornée. En dimension infinie, cela n'est plus le cas. Certes la boule unité est encore fermée et bornée, mais elle n'est plus compacte. En effet nous allons donner un recouvrement par des ouverts duquel il ne sera pas possible d'extraire un sous-recouvrement fini.

Autour de chacune des extrémités des vecteurs de base, nous considérons la boule $A_i = B(e_i, \frac{1}{3})$. Ensuite nous considérons aussi l'ouvert

$$B(0,1) \setminus \bigcup_i \overline{B(e_i, \frac{1}{4})}. \tag{9.13}$$

Le tout recouvre $B(0, 1)$ mais toutes les premières boules sont nécessaires. △

Le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.343 nous permettra de prouver plus simplement la non compacité en dimension infinie. Voir l'exemple 7.195.

9.3.3 Suites et limites dans les réels

9.3.3.1 Limites, convergence

PROPooOSXCooJWXkWH

Proposition 9.27.
Une suite (x_n) dans un espace vectoriel normé E est convergente[10] *si et seulement si il existe un élément $\ell \in E$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant N \Rightarrow \|x_n - \ell\| < \varepsilon. \tag{9.14}$$

EQooJRAMooEphgem

Dans ce cas, ℓ est la limite de la suite (x_n).

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct** Si $x_n \to \ell$ et si $\epsilon > 0$ il existe N_ϵ tel que pour tout $n \geqslant N$ nous avons $x_n \in B(\ell, \epsilon)$ (parce que cette boule est un ouvert contenant ℓ). Considérant la définition d'une boule, cette condition s'écrit bien $\|x_n - \ell\| < \epsilon$.

(2) **Sens inverse** Dans l'autre sens, soit $\mathcal{O}$ un ouvert contenant ℓ. Par définition de la topologie, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(\ell, \epsilon) \subset \mathcal{O}$. La condition (9.14) nous assure qu'il existe N_ϵ tel que pour tout $n \geqslant N_\epsilon$ nous ayons

$$x_n \in B(\ell, \epsilon) \subset \mathcal{O}, \tag{9.15}$$

ce qui assure que la suite (x_n) converge vers ℓ pour la topologie métrique de E.

□

Une façon équivalente d'exprimer le critère (9.14) est de dire que pour tout ϵ positif, il existe un rang $N \in \mathbb{R}$ tel que l'intervalle $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$ contient tous les termes x_n au-delà de N.

Il est à noter que le rang N dont il est question dans la définition de suite convergente dépend de ϵ.

9.3.4 Opérations sur les limites

PROPooIQOAooJPMoDD

Proposition 9.28 ([1])**.**
Soient des suites à valeurs réelles (a_i) et (b_j). Si elles sont convergentes, alors la suite ab est convergente et

$$\big(\lim_i a_i\big)\big(\lim_j b_j\big) = \lim_i (a_i b_i). \tag{9.16}$$

[10] Définition 7.14.

Démonstration. Nous nommons a et b les limites des suites (a_i) et (b_j). Soit $\epsilon > 0$ ainsi que $i \in \mathbb{N}$. Nous avons la majoration

$$|a_ib_i - ab| \leqslant |a_ib_i - a_ib| + |a_ib - ab| \tag{9.17a}$$
$$\leqslant |a_i||b_i - b| + |b||a_i - a|. \tag{9.17b}$$

Comme la suite (a_i) est convergente, elle est bornée[11]. Nous pouvons donc majorer $|a_i|$ par $R > 0$ qui ne dépend pas de i. Soit $\eta > 0$ tel que $(R + b)\eta < \epsilon$. Alors en prenant i assez grand pour que $|b_i - b| < \eta$ et $|a_i - a| < \eta$, nous avons bien

$$|a_ib_i - ab| \leqslant (R + b)\eta < \epsilon. \tag{9.18}$$

□

PROPooICZMooGfLdPc

Proposition 9.29.
Soient des suites (x_n) et (y_n) dans un espace vectoriel normé E. Si $x_n \xrightarrow{E} x$ et $y_n \xrightarrow{E} y$, alors

$$x_n + y_n \xrightarrow{E} x + y. \tag{9.19}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons N tel que si $n \geqslant N$, alors $\|x_n - x\| \leqslant \epsilon$ et $\|y_n - y\| \leqslant \epsilon$. En utilisant l'inégalité 7.212(4),

$$\|x_y + y_n - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \leqslant 2\epsilon. \tag{9.20}$$

Donc la suite $(x_n + y_n)$ converge vers $x + y$. □

LEMooGKIPooWgpFTB

Lemme 9.30.
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned} \tag{9.21}$$

est continue.

Démonstration. Pour rappel, la topologie considérée sur $\mathbb{R}^n$ est celle de la définition 7.282. En vertu de la proposition 7.157, il est suffisant de prouver la continuité séquentielle. Soit donc une suite convergente

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} (x, y). \tag{9.22}$$

Nous devons prouver que

$$f(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x, y). \tag{9.23}$$

La proposition 7.85 nous permet de déduire la convergence composante par composante : $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x$ et $y_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x$. En permutant somme et limite (proposition 9.29) nous avons le calcul

$$f(x_n, y_n) = x_n + y_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x + y = f(x, y). \tag{9.24}$$

D'où la convergence demandée. □

9.3.5 Exemples

LEMooNDSKooMsexOq

Lemme 9.31.
Quelques suites usuelles.

ITEMooWTAYooRisBLO

(1) La suite $x_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.

ITEMooOYSEooROKIKs

(2) La suite $x_n = (-1)^n$ ne converge pas.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soit $\epsilon > 0$. Le lemme 1.553 nous permet de considérer $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{1}{\epsilon}$. Grâce à la proposition 1.566, si $n > N$ nous avons

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon. \tag{9.25}$$

Donc $x_n < \epsilon$ pour tout $n > N$. Et comme $x_n > 0$ pour tout n, nous avons $|x_n| < \epsilon$ et donc $x_n \to 0$.

[11] Par 7.161. Attention : soyez capable d'adapter au cas présent.

(2) **Pour (2)** Nous supposons que (x_n) converge vers l. Il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ nous ayons $|x_n - l| < \frac{1}{2}$. Pour $n = 2N$ nous avons $x_n = 1$ et donc $|1 - l| < \frac{1}{2}$. Pour $n = 2N + 1$ nous avons $x_n = -1$ et donc $|-1 - l| < \frac{1}{2}$.

Le lemme 1.572 donne alors $l > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $l < -1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Contradiction.

□

9.3.6 Limites infinies

Deux limites pour voir comment ça fonctionne.

LEMooWCRSooWXVvcc

Lemme 9.32.
Si $r > 1$ nous avons :

(1) $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n} = \infty$.

Démonstration. Puisque $r > 1$ nous pouvons écrire $r = 1 + \delta$ avec $\delta > 0$. La formule du binôme de Newton (1.549) nous donne

$$(1 + \delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k > \binom{n}{1} \delta = n\delta. \tag{9.26}$$

La proposition 1.555 ($\mathbb{R}$ est archimédien) nous indique que $n\delta$ est arbitrairement grand lorsque n est grand, quelle que soit $\delta > 0$. Cela finit la preuve de la première limite.

Pour la seconde, nous posons $a_n = \frac{r^n}{n}$. Nous avons

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} r. \tag{9.27}$$

Comme $\frac{n}{n+1} \to 1$, la suite $\frac{n}{n+1} r$ tend vers $r > 1$, et en particulier pour tout $\delta > 0$ tel que $r > 1 + \delta$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$,

$$\frac{n}{n+1} r > 1 + \delta. \tag{9.28}$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$. En utilisant un produit télescopique,

$$a_{N+k} = a_N \frac{a_{N+1}}{a_N} \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} > a_N (1 + \delta)^{k-1}. \tag{9.29}$$

Or $(1 + \delta)^{k-1}$ tend vers ∞ lorsque $k \to \infty$ par le premier point. Donc nous avons $\lim_{n\to\infty} r^n/n = \infty$. □

DEFooEWRTooKgShmT

Définition 9.33.
*Nous disons que deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si il existe une application $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que*

(1) pour tout n à partir d'un certain rang, $u_n = v_n \alpha(n)$

(2) $\alpha(n) \to 1$.

9.3.7 Topologie et matrices

DEFooCQHDooYpUAhG

Lemme-Définition 9.34 (Topologie sur les matrices)**.**
Si $\mathbb{K}$ est un corps valué[12]*, alors l'opération*

$$\begin{aligned} \|.\|_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{K}) &\to \mathbb{R}^+ \\ M &\mapsto \max_{kl} \|M_{kl}\|_{\mathbb{K}}. \end{aligned} \tag{9.30}$$

est une norme[13]*.*

*Cette norme est appelée **norme maximum** et nous considérons sur $\mathbb{M}(n \times m, \mathbb{K})$ la topologie associée à cette norme*[14]

[12] Définition 1.110.
[13] Définition 7.212.
[14] Définition 7.218.

PROPooOEETooPhqWuf

Proposition 9.35.
La multiplication matricielle

$$\begin{aligned} m\colon \mathbb{M}(n,s)\times\mathbb{M}(s,l) &\to \mathbb{M}(n,l)\\ (A,B) &\mapsto AB \end{aligned} \tag{9.31}$$

est une opération continue[15].

Démonstration. D'après la proposition 7.281, nous pouvons tout faire avec la métrique produit. Supposons que $(A_k,B_k)\xrightarrow{\mathbb{M}(n,s)\times\mathbb{M}(s,l)}\mathbb{M}(n,l)$, et montrons que $\|m(A_k,B_k)-m(A,B)\|\to 0$. Notre hypothèse nous dit que

$$\|(A_k-A,B_k-B)\|\to 0, \tag{9.32}$$

c'est-à-dire (métrique produit)

$$\max\big\{\|A_k-A\|,\|B_k-B\|\big\}\to 0, \tag{9.33}$$

et donc $A_k\to A$ et $B_k\to B$ séparément. La définition 9.34 nous dit alors que pour tout (ij) nous avons

$$\begin{aligned} (A_k)_{ij}&\to A_{ij}\\ (B_k)_{ij}&\to B_{ij}. \end{aligned} \tag{9.34}$$

Nous avons [SUBEQSooHPHLooXdtxYY]

$$\Big(m(A_k,B_k)-m(A,B)\Big)_{ij} = (A_kB_k)_{ij}-(AB)_{ij} \tag{9.35a}$$

$$= \sum_l\Big((A_k)_{il}(B_k)_{lj}-A_{il}B_{lj}\Big). \tag{9.35b}$$

Soit $\epsilon>0$. Par la proposition 9.28, pour chaque triple (i,j,l), il existe un $u_{ijk}\in\mathbb{N}$ tel que si $k\geqslant u_{ijl}$ nous avons

$$|(A_k)_{il}(B_k)_{lj}-A_{il}B_{lj}|<\epsilon. \tag{9.36}$$

Nous pouvons reprendre (9.35) avec un tel k. Nous avons :

$$\|(A_knB_k)-(A,B)\|<\sum_l\epsilon<s\epsilon. \tag{9.37}$$

□

9.3.8 Suites croissantes et bornées

Une suite est dite **contenue** dans un ensemble A si $x_n\in A$ pour tout n. Une suite est **bornée supérieurement** si il existe un M tel que $x_n\leqslant M$ pour tout n. De la même manière, la suite est bornée inférieurement si il existe un m tel que $x_n\geqslant m$ pour tout n.

Le lemme suivant est souvent utilisé pour prouver qu'une suite est convergente. Une version pour les fonctions $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sera la proposition 12.38.

LemSuiteCrBorncv

Lemme 9.36 ([1]).
Une suite croissante et bornée supérieurement converge. Une suite décroissante bornée inférieurement est convergente.

Démonstration. Supposons que (x_n) soit une suite croissante non convergente. En particulier, par le théorème 7.340, cette suite n'est pas de Cauchy et il existe $\epsilon>0$ tel que pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe $p>N$ vérifiant

$$|x_p-x_N|>\epsilon. \tag{9.38}$$

Vu que $p>N$, et vu que la suite est croissante, nous pouvons récrire cette condition sous la forme $x_p\geqslant x_N+\epsilon$.

Nous définissons ainsi une application $p\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que

$$x_{p(N)}>x_N+\epsilon. \tag{9.39}$$

Une telle application n'est pas du tout unique, mais nous en considérons une telle.

Il est vite vu par récurrence que

$$x_{p^k(0)}\geqslant x_0+k\epsilon. \tag{9.40}$$

La suite $n\mapsto x_{p^n(0)}$ est donc une sous-suite qui tend vers l'infini. Or cela n'est pas possible parce que la suite (x_n) est bornée. Donc contradiction, donc (x_n) est convergente. □

[15] Topologies de la norme 9.34.

Une erreur courante est de croire que la borne est la limite : le lemme n'affirme pas ça. Par contre il est vrai que la borne donne … hum … une borne inférieure (ou supérieure) pour la limite.

PropCvRpComposante

Proposition 9.37.
Une suite (x_n) dans $\mathbb{R}^m$ est convergente dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si les suites de chaque composante sont convergentes dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas nous avons

$$\lim x_n = \Big(\lim(x_n)_1, \lim(x_n)_2, \dots, \lim(x_n)_m\Big) \tag{9.41}$$

où $(x_n)_k$ dénote la k-ième composante de (x_n).

Démonstration. Dans les deux sens. Nous notons $y_n^{(i)}$ la i-ième composante de x_n.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}^m} a$. Supposons que $y_n^{(i)}$ ne soit pas une suite convergente vers a_i. Il existe δ tel que pour tout $N > 0$, il existe $n > N$ vérifiant $|y_n^{(i)} - a_i| > \delta$. Pour un tel n nous avons alors

$$\|x_n - a\|^2 = \sum_k |y_n^{(k)} - a_k|^2 \tag{9.42a}$$
$$\geqslant |y_n^{(i)} - a_i| \tag{9.42b}$$
$$> \delta. \tag{9.42c}$$

Donc la suite (x_n) ne converge pas vers a.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que pour chaque i nous ayons $y_n^{(i)} \to a_i$. Soit $\epsilon > 0$. Pour chaque i, il existe N_i tel que si $n > N_i$ alors $|y_n^{(i)} - a_i| < \epsilon$. En posant $N = \max_i\{N_i\}$, nous avons

$$\|x_n - a\|^2 = \sum_i |y_n^{(i)} - a_i|^2 \tag{9.43a}$$
$$\leqslant \sum_i \epsilon^2 \tag{9.43b}$$
$$= m\epsilon^2. \tag{9.43c}$$

Cela prouve que $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}^m} a$.

□

Exemple 9.38.
La suite $x_n = \big(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\big)$ converge vers $(0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$. En effet, en utilisant la proposition 9.37, nous devons calculer séparément les limites

$$\begin{aligned}\lim \frac{1}{n} &= 0\\ \lim \big(1 - \frac{1}{n}\big) &= 1.\end{aligned} \tag{9.44}$$

△

Exemple 9.39.
Étant donné que la suite $(-1)^n$ n'est pas convergente, la suite $x_n = \big((-1)^n, \frac{1}{n}\big)$ n'est pas convergente dans $\mathbb{R}^2$. △

9.3.9 Suites adjacentes

DEFooDMZLooDtNPmu

Définition 9.40 ([356]).
*Les suites (a_n) et (b_n) sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $a_n - b_n \to 0$.*

THOooZJWLooAtGMxD

Théorème 9.41 (Théorème des suites adjacentes)**.**
Nous considérons des suites adjacentes (a_n) et (b_n) avec (a_n) croissante et (b_n) décroissante. Alors

(1) $b_n \geqslant a_n$ pour tout n,

(2) $a_n \leqslant b_q$ pour tout n et q. C'est-à-dire que toute la suite a est plus petite que toute la suite b.

(3) les suites a et b sont convergentes,

(4) les suites a et b convergent vers la même limite, notée ℓ,

(5) nous avons $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ pour tout n.

Démonstration. La suite $n \mapsto b_n - a_n$ est décroissante parce que $b_n - a_n \geqslant b_{n+1} - a_{n+1}$. Comme en plus $b_a - a_n \to 0$ nous avons

$$b_n - a_n \geqslant 0 \tag{9.45}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus $a_n \leqslant b_0$ pour tout n parce que si $a_N > b_0$ alors, b étant décroissante, $a_N > b_0 \geqslant b_N$ qui est contraire à ce que nous venons de prouver. La suite a étant croissante et majorée, elle est convergente[16] ; notons ℓ sa limite.

La suite b peut maintenant être écrite par

$$b_n = (b_n - a_n) + a_n \tag{9.46}$$

qui est une somme de deux suites convergentes. Elle est donc convergente et sa limite est la somme des limites[17], donc

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + \ell = \ell. \tag{9.47}$$

Voilà. Donc les suites a et b convergent et ont la même limite.

Pour tout $n, q \in \mathbb{N}$ nous avons l'inégalité $a_n \leqslant b_q$. En prenant la limite $n \to \infty$ nous trouvons

$$\ell \leqslant b_q \tag{9.48}$$

pour tout q. Et de la même façon, $b_n \geqslant a_q$ donne $\ell \geqslant a_q$. L'un avec l'autre donne

$$a_q \leqslant \ell \leqslant b_q \tag{9.49}$$

pour tout $q \in \mathbb{N}$. □

PROPooXOOCooGMqJNe

Proposition 9.42 ([357]).
Soit une suite (a_n) dans $\mathbb{R}$. Nous supposons que les suites extraites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers la même limite notée ℓ.

Alors $a_n \to \ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N_1 tel que $|a_{2n} - \ell| \leqslant \epsilon$ dès que $n \geqslant N_1$. Il existe également N_2 dès que $|a_{2n+1} - \ell| \leqslant \epsilon$ dès que $n \geqslant N_2$.

Nous posons $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 2\}$ et nous avons, pour tout $n \geqslant N$:

$$|a_n - \ell| \leqslant \epsilon, \tag{9.50}$$

c'est-à-dire que $a \to \ell$. □

9.3.10 Limite supérieure et inférieure

ooMVZAooVVCOnP

Lemme-Définition 9.43.
Soit (a_n) une suite dans $\bar{\mathbb{R}}$. Les limites suivantes existent dans $\bar{\mathbb{R}}$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geqslant n} a_k\big) \tag{9.51}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geqslant n} a_k\big). \tag{9.52}$$

*Elles sont nommées **limite supérieure** et **limite inférieure** de la suite (a_n).*

Démonstration. Pour la limite supérieure, l'ensemble des $k \geqslant n$ est de plus en plus petit lorsque n grandit. Donc les ensembles $A_n = \{a_k \text{ tel que } k \geqslant n\}$ sont emboîtés et la suite $n \to \sup A_n$ est une suite décroissante. Elle a donc une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$. □

[16] Proposition 9.36.
[17] Proposition 9.29.

ooEEQJooRMFzVR

9.44.
En ce qui concerne les suites d'ensembles, utiles en théorie des probabilités, nous définissons de même. Si les A_n sont des parties d'un ensemble Ω, nous définissons la **limite supérieure** et la **limite inférieure** de la suite A_n par

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k \tag{9.53}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k \tag{9.54}$$

Nous avons

$$\limsup A_n = \{\omega\in\Omega \text{ tel que } \omega\in A_n \text{ pour une infinité de } n\}. \tag{9.55}$$

ooAQTEooYDBovS

Lemme 9.45.
Nous avons les formules pratiques suivantes :

$$\limsup a_n = \inf_{n\geqslant 1}\big(\sup_{k\geqslant n} a_k\big) \tag{9.56a}$$

$$\liminf a_n = \sup_{n\geqslant 1}\big(\inf_{k\geqslant n} a_k\big). \tag{9.56b}$$

Démonstration. La suite $n\mapsto \sup_{k\geqslant n} a_k$ est une suite décroissante, donc la limite est l'infimum. Même argument pour l'autre. □

ooIQIKooXWwAmM

Lemme 9.46.
La suite (a_n) dans $\mathbb{R}$ converge si et seulement si

$$\limsup a_n = \liminf a_n. \tag{9.57}$$

Dans ce cas, $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que $\limsup a_n = \liminf a_n = l$, et nous prouvons que $\lim a_n$ existe et vaut l. Soit $\epsilon>0$. Il existe N tel que si $n\geqslant N$ nous avons

$$\big|\sup_{k\geqslant n} a_k - l\big| < \epsilon \tag{9.58}$$

et

$$\big|\inf_{k\geqslant n} a_k - l\big| < \epsilon. \tag{9.59}$$

Si $i\geqslant N$, alors[18] $a_i\leqslant \sup_{k\geqslant N}(a_k)\leqslant \ell+\epsilon$, et $a_i\geqslant \inf_{k\geqslant N}(a_k)\geqslant \ell-\epsilon$. Cela signifie que $a_n\in B(l,\epsilon)$, c'est-à-dire $a_k\to l$ par la proposition 9.27.

Dans l'autre sens, nous supposons que $\lim_n a_n = l$ et nous prouvons que la limite supérieure est égale à l[19]. Soit $\epsilon>0$ et N_ϵ tel que $|a_n-l|<\epsilon$ pour tout $n\geqslant N_\epsilon$. Si $n\geqslant N_\epsilon$ nous avons

$$\big|\sup_{k\geqslant n} a_k - l\big| \leqslant \epsilon \tag{9.60}$$

et donc la limite de $\sup_{k\geqslant n} a_k$ lorsque $n\to\infty$ est bien l. □

LEMooHGJVooCbgOEK

Lemme 9.47.
Soit une suite (a_i) dans $\mathbb{R}$. Notons $L=\limsup_i(a_i)$. Pour tout $\epsilon>0$, l'ensemble

$$S_\epsilon = \{n\in\mathbb{N} \text{ tel que } a_n\geqslant L+\epsilon\} \tag{9.61}$$

est fini.

Démonstration. Nous y allons par récurrence. Juste pour le sport, nous allons au passage montrer en détail comment on utilise le théorème 1.122.

Supposons que S_ϵ est infini. Alors pour tout n, la partie $S_\epsilon\setminus\{0,\dots,n\}$ est non vide (lemme 1.208) et nous pouvons considérer l'application

$$\begin{aligned} g\colon S_\epsilon &\to S_\epsilon \\ n &\mapsto \min\big(S_\epsilon\setminus\{0,\dots,n\}\big). \end{aligned} \tag{9.62}$$

[18] Voir le lemme 1.497(1).
[19] Je vous laisse faire la démonstration correspondante pour la limite inférieure. Contactez-moi si ça pose un problème.

Nous prenons $b > 1$ dans S_ϵ et considérons la fonction $f : \mathbb{N} \to S_\epsilon$ donnée par le théorème 1.122.

L'application f est strictement croissante parce que $f(n+1) = g\big(f(n)\big) \in \mathbb{N}\backslash\{0, \dots, f(n)\}$. En particulier $f(n) > n$ parce que nous avons décidé de commencer avec $f(0) = b > 1$.

Nous sommes maintenant armés pour contredire la définition 9.43 de la limite supérieure. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vu que $f(n) \in S_\epsilon$ nous avons

$$a_{f(n)} \geqslant L + \epsilon, \tag{9.63}$$

et donc $\sup_{k\geqslant n} a_k \geqslant a_{f(n)} \geqslant L + \epsilon$ parce que $f(n) \geqslant n$.

Nous avons prouvé que $\sup_{k\geqslant n} a_k \geqslant L + \epsilon$ pour tout n, donc

$$\lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geqslant n} a_k\big) \geqslant L + \epsilon > L. \tag{9.64}$$

Voilà. Donc si S_ϵ est infini, $\limsup_i a_i \geqslant L + \epsilon > L$. □

LEMooMTRDooBMxFmn

Lemme 9.48.
Si (a_n) est une suite réelle,

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n) = -\liminf_{n\to\infty}(-a_n). \tag{9.65}$$

Démonstration. En utilisant la proposition 1.581, nous avons

$$\limsup(a_n) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{k\geqslant n}(a_k)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(-\inf_{k\geqslant n}(-a_k)\Big) = -\liminf(-a_n). \tag{9.66}$$

□

PROPooUOYTooGwGZHz

Proposition 9.49 ([1]).
Si $a_n \to a$, alors

$$\liminf_n |a_n| = |a|. \tag{9.67}$$

9.3.11 Ouverts, voisinage, topologie

Lorsque $x \in E$, nous rappelons qu'un voisinage[20] de x est n'importe quel sous-ensemble de E qui contient une boule ouverte centrée en x. La proposition 7.8 nous dit qu'un ensemble est ouvert si il contient un voisinage de chacun de ses points. Au passage, rappelons que l'ensemble vide est ouvert.

Pour rappel, la proposition 7.143 dit que l'ensemble des boules ouvertes d'un espace métrique génère la topologie de l'espace.

Nous rappelons qu'une partie A d'un espace métrique est dite bornée[21] si il existe une boule[22] qui contient A.

Mais revenons à $\mathbb{R}$…

LemSupOuvPas

Lemme 9.50.
Une partie ouverte de $\mathbb{R}$ ne contient pas son supremum.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$, un ensemble ouvert et s, son supremum. Si s était dans $\mathcal{O}$, on aurait un voisinage $B = B(s, r)$ de s contenu dans $\mathcal{O}$. Le point $s + r/2$ est alors à la fois dans $\mathcal{O}$ et plus grand que s, ce qui contredit le fait que s soit un supremum de $\mathcal{O}$. □

Par le même genre de raisonnement, on montre que l'union et l'intersection de deux ouverts, sont encore des ouverts.

Remarque 9.51.
L'intersection d'une infinité d'ouverts n'est pas spécialement un ouvert comme le montrent les parties $\{\mathcal{O}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ donnés par

$$\mathcal{O}_k =]1, 2 + \frac{1}{k}[. \tag{9.68}$$

Tous les ensembles $\mathcal{O}_k$ contiennent le point 2 qui est donc dans l'intersection. Mais nous allons montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe n tel que $2 + \epsilon \notin \mathcal{O}_n$. Il suffit de prendre n tel que $\frac{1}{n} < \epsilon$ (lemme 1.556(2)).

PROPooANIOooIJHelX

Proposition 9.52.
Quelles que soient les parties A et B de $\mathbb{R}$, nous avons

$$\sup(A \cap B) \leqslant \sup A \leqslant \sup(A \cup B). \tag{9.69}$$

[20] Définition 7.4.
[21] Définition 7.190.
[22] À titre d'exercice, convainquez-vous que l'on peut dire boule *ouverte* ou *fermée* au choix sans changer la définition.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\sup(A \cap B) \leqslant \sup(A)$ Soit $s = \sup(A)$. En particulier, s est un majorant de A. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $s \geqslant x$. Donc s est également un majorant de $A \cap B$. Le lemme 1.580 conclut que $s \geqslant \sup(A \cap B)$.

(2) $\sup(A) \leqslant \sup(A \cup B)$ Soit $s = \sup(A \cup B)$. Par définition, s est un majorant de $A \cup B$. A fortiori, s est un majorant de A et donc est plus grand ou égal à $\sup(A)$.

□

9.3.12 Intervalles et connexité

Nous allons déterminer tous les sous-ensembles connexes[23] de $\mathbb{R}$. Pour cela nous relisons d'abord la notion d'intervalle donnée en 1.27 ainsi que la proposition 1.584 qui liste tous les intervalles de $\mathbb{R}$. La partie $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si pour tout $a, b \in I$, tout nombre entre a et b est également dans I. Cette définition englobe tous les exemples connus d'intervalles ouverts, fermés avec ou sans infini : $[a, b]$, $[a, b[$, $]-\infty, a]$, … L'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même est un intervalle.

Si I est un intervalle, les nombres $\inf(I)$ et $\sup(I)$[24] sont les **extrémités** de I.

DefLISOooDHLQrl

Définition 9.53.
*Étant donnés deux points a et b dans $\mathbb{R}^p$ on appelle **segment** d'extrémités a et b, et on note $[a, b]$, l'image de $[0, 1]$ par l'application $s : [0, 1] \to \mathbb{R}^p$, $s(t) = (1 - t)a + tb$. On pose $]a, b[= s(]0, 1[)$, et $]a, b] = s(]0, 1])$.*

Il faut observer que le segment $[a, b]$ est une courbe orientée : certes en tant que ensembles, $[a, b] = [b, a]$, mais si nous regardons la fonction de t correspondante à $[b, a]$, nous voyons qu'elle va dans le sens inverse de celle qui correspond à $[a, b]$. Nous approfondirons ces questions lorsque nous parlerons d'arcs paramétrés autour de la section 21.7.

Le segment $[b, a]$ est l'image de l'application $r\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^p$ donnée par $r(t) = (1 - t)b + ta$.

PropInterssiConn

Proposition 9.54.
Une partie de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si c'est un intervalle[25].

Démonstration. La preuve est en deux parties. D'abord nous démontrons que si un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est connexe, alors c'est un intervalle ; et ensuite nous démontrons que tout intervalle est connexe.

Afin de prouver qu'un ensemble connexe est toujours un intervalle, nous allons prouver que si un ensemble n'est pas un intervalle, alors il n'est pas connexe. Prenons A, une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle. Il existe donc a, $b \in A$ et un x_0 entre a et b qui n'est pas dans A. Comme le but est de prouver que A n'est pas connexe, il faut couper A en deux ouverts disjoints. L'élément x_0 qui n'est pas dans A est le bon candidat pour effectuer cette coupure. Prenons M, un majorant de A et m, un minorant de A, et définissons

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 &=]m, x_0[\\ \mathcal{O}_2 &=]x_0, M[.\end{aligned}$$

Si A n'a pas de minorant, nous remplaçons la définition de $\mathcal{O}_1$ par $]-\infty, x_0[$, et si A n'a pas de majorant, nous remplaçons la définition de $\mathcal{O}_2$ par $]x_0, \infty[$. Dans tous les cas, ce sont deux ensembles ouverts dont l'union recouvre tout A. En effet, $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ contient tous les nombres entre un minorant de A et un majorant sauf x_0, mais on sait que x_0 n'est pas dans A. Cela prouve que A n'est pas connexe.

Jusqu'à présent nous avons prouvé que si un ensemble n'est pas un intervalle, alors il ne peut pas être connexe. Pour remettre les choses à l'endroit, prenons un ensemble connexe, et demandons-nous si il peut être autre chose qu'un intervalle ? La réponse est *non* parce que si il était autre chose, il ne serait pas connexe.

Prouvons à présent que tout intervalle est connexe. Pour cela, nous refaisons le coup de la contraposée. Nous allons donc prendre une partie A de $\mathbb{R}$, supposer qu'elle n'est pas connexe et prouver qu'elle n'est alors pas un intervalle. Nous avons deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ tels que $A \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. Notons $A_1 = A \cap \mathcal{O}_1$ et $A_2 = A \cap \mathcal{O}_2$; et prenons $a \in A_1$ et $b \in A_2$. Pour fixer les idées, on suppose que $a < b$. Maintenant, le jeu est de montrer qu'il existe un point x_0 entre a et b qui ne soit pas dans A (cela montrerait que A n'est pas un intervalle). Nous allons prouver que c'est le cas du point

$$x_0 = \sup\{x \in \mathcal{O}_1 \text{ tel que } x < b\}.$$

[23] Définition 7.102.
[24] Qui existent par la proposition 1.579, quitte à poser $\pm\infty$ comme infimum et supremum lorsque I n'est pas borné.
[25] Définition 1.27.

Étant donné que l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{O}_1 \text{ tel que } x < b\}$ est ouvert[26], le point x_0 n'est pas dans l'ensemble par le lemme 9.50. Nous avons donc

- soit x_0 n'est pas dans $\mathcal{O}_1$,
- soit $x_0 \leqslant b$,
- soit les deux en même temps.

Nous allons montrer qu'un tel x_0 ne peut pas être dans A. D'abord, remarquons que $\sup \mathcal{A} \leqslant \sup \mathcal{O}_1$ parce que $\mathcal{A}$ est une intersection de $\mathcal{O}$ avec quelque chose. Ensuite, il n'est pas possible que x_0 soit dans $\mathcal{O}_2$ parce que tout élément de $\mathcal{O}_2$ possède un voisinage contenu dans $\mathcal{O}_2$. Un point de $\mathcal{O}_2$ est donc toujours strictement plus grand que le supremum de $\mathcal{O}_1$.

Maintenant, en remarquant que si $x_0 \leqslant b$, alors $x_0 = b$ sinon b serait un majorant de $\mathcal{A}$ plus petit que x_0, ce qui n'est pas possible puisque x_0 est le supremum de $\mathcal{A}$ et donc le plus petit majorant. Oui mais si $x_0 = b$, c'est que $x_0 \in \mathcal{O}_2$, ce qu'on vient de montrer être impossible. Nous voilà déjà débarrassés des deuxièmes et troisièmes possibilités.

Si la première possibilité est vraie, alors x_0 n'est pas dans A parce qu'on a aussi prouvé que $x_0 \notin \mathcal{O}_2$. Or n'être ni dans $\mathcal{O}_1$ ni dans $\mathcal{O}_2$ implique de ne pas être dans A. Ce point $x_0 = \sup \mathcal{A}$ est donc hors de A.

Oui, mais comme $a \in \mathcal{A}$, on a obligatoirement $x_0 \geqslant a$. Mais par construction, on a aussi $x_0 \leqslant b$ (ici, l'inégalité est même stricte, mais ce n'est pas important). Donc

$$a \leqslant x_0 \leqslant b$$

avec a, $b \in A$, et $x_0 \notin A$. Cela finit de prouver que A n'est pas un intervalle. □

Le lemme suivant dit que si on recouvre un intervalle avec des ouverts, alors on peut ordonner ces ouverts de telle sorte qu'ils s'enchainent bien : on peut sauter de l'un à l'autre en passant par les intersections. C'est donc un lemme qui permet de passer du local au global.

LEMooNMGWooTfQDeO

Lemme 9.55.
Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$ ainsi qu'un recouvrement $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1,\dots,n}$ de I par des ouverts connexes tels que $\mathcal{O}_i \cap I \neq \varnothing$ pour tout i[27]. Alors il existe une bijection $\psi\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ telle que

(1)

$$\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\psi(i)} \tag{9.70}$$

est connexe pour tout m.

(2)

$$\mathcal{O}_{\psi(m)} \cap \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_{\psi(i)} \neq \varnothing. \tag{9.71}$$

Démonstration. Nous allons construire ψ par récurrence ; plus précisément nous allons construire des applications $\psi_k\colon \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,n\}$ telle que

(1) ψ_k est injective.

(2) Si $i \leqslant k$ alors $\psi_k(i) = \psi_i(i)$.

(3) La partie

$$\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \tag{9.72}$$

EQooAMAGooDHHvGR

est connexe pour tout $m \leqslant k$.

(4) Nous avons

$$\mathcal{O}_{\psi_k(m)} \cap \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \neq \varnothing \tag{9.73}$$

EQooOOZUooKVlDPi

pour tout $m \leqslant k$.

[26] C'est l'intersection entre l'ouvert $\mathcal{O}_1$ et l'ouvert $\{x \text{ tel que } x < b\}$.
[27] Il est cependant possible que les $\mathcal{O}_i$ ne soient pas inclus dans I.

Nous commençons en douceur par

$$\begin{aligned}\psi_1\colon \{1\} &\to \{1,\dots,n\}\\ 1 &\mapsto 1.\end{aligned} \tag{9.74}$$

Ai-je besoin de vous prouver que c'est injectif ?

Nous supposons que les applications ψ_i sont correctement définies pour $i \leqslant k$, et nous construisons ψ_{k+1}. Nous posons

$$A = \psi_k\big(\{1,\dots,k\}\big) \tag{9.75a}$$
$$B = \{1,\dots,n\} \setminus A \tag{9.75b}$$
$$P = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \tag{9.75c}$$
$$Q = \bigcup_{i=k+1}^{n} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \tag{9.75d}$$

En tant qu'unions d'ouverts, les parties P et Q sont ouvertes dans $\mathbb{R}$. Elles recouvrent l'intervalle I qui est connexe par la proposition 9.54. De plus $P \cap I \neq \varnothing$ et $Q \cap I \neq \varnothing$; donc, par définition de la connexité nous avons $P \cap Q \neq \varnothing$.

Il existe donc $i_0 \in B$ tel que $P \cap \mathcal{O}_{i_0} \neq \varnothing$. Nous posons

$$\begin{aligned}\psi_{k+1}\colon \{1,\dots,k+1\} &\to \{1,\dots,n\}\\ i &\mapsto \begin{cases}\psi_k(i) & \text{si } i \neq k+1\\ i_0 & \text{si } i = k+1.\end{cases}\end{aligned} \tag{9.76}$$

Vérifions que ce ψ_{k+1} vérifie les conditions.

(1) ψ_{k+1} est injective. Soient i, j tels que $\psi_{k+1}(i) = \psi_{k+1}(j)$. Si $i = k+1$ et $j \neq k+1$ alors $\psi_{k+1}(i) = i_0 \in B$, alors que $\psi_{k+1}(j) = \psi_k(j) \in A$. Donc le cas $i = k+1$, $j \neq k+1$ n'est pas possible.

Si $i, j \neq k+1$, alors $\psi_{k+1}(i) = \psi_k(i)$ et $\psi_{k+1}(j) = \psi_k(j)$. L'injectivité de ψ_k implique que $i = j$.

(2) Si $i \leqslant k$, nous avons $\psi_{k+1}(i) = \psi_k(i) = \psi_i(i)$ en utilisant la récurrence.

(3) Nous séparons les cas $m = k+1$ et $m \neq k+1$. Si $m \neq k+1$ alors tous les ψ_{k+1} dans (9.72)[28] sont des ψ_k et la récurrence fonctionne. Si $m = k+1$ alors

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} \mathcal{O}_{\psi_{k+1}(i)} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \cup \mathcal{O}_{\psi_{k+1}(k+1)} = P \cup \mathcal{O}_{i_0}. \tag{9.77}$$

Le nombre i_0 a été choisi pour avoir $\mathcal{O}_{i_0} \cap P \neq \varnothing$. Comme $\mathcal{O}_{i_0}$ et P sont des connexes, la proposition 7.107(1) implique que $P \cup \mathcal{O}_{i_0}$ est connexe.

(4) Encore une fois, si $m \neq k+1$, tous les ψ_{k+1} de (9.73) deviennent des ψ_k et la récurrence fonctionne. Avec $m = k+1$ nous avons

$$\mathcal{O}_{\psi_{k+1}(k+1)} \cap \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\psi_{k+1}(i)} = \mathcal{O}_{i_0} \cap P. \tag{9.78}$$

Cette intersection est non vide, par choix du i_0.

Quand tous les ψ_k $(k = 1,\dots,n)$ sont construits, en posant $\psi = \psi_n$ nous avons le résultat annoncé. □

ThoMKKooAbHaro

Théorème 9.56 (Théorème des bornes atteintes)**.**
Une fonction à valeurs réelles continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

C'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in K$ tel que $f(x_0) = \inf\{f(x)$ tel que $x \in K\}$ ainsi que x_1 tel que $f(x_1) = \sup\{f(x)$ tel que $x \in K\}$.

Démonstration. Soient un espace topologique compact K et une fonction continue $f\colon K \to \mathbb{R}$. Alors le théorème 7.275 indique que $f(K)$ est compact. Par conséquent $f(K)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ par le théorème de Borel-Lebesgue 9.24. Puisque $f(K)$ est borné, la fonction f est bornée.

De plus $f(K)$ étant fermé, son infimum est un minimum et son supremum est un maximum : il existe $x \in K$ tel que $f(x) = \sup f(K)$ et il existe $y \in K$ tel que $f(y) = \inf f(K)$. □

[28] Nous sommes en train de parler de cette équation avec $k+1$ au lieu de k, parce que nous sommes dans un processus de récurrence. Il est donc normal de dire qu'il y a des ψ_{k+1} dans cette équation.

DEFooIVFZooLLlahl

Définition 9.57 (propriété de valeurs intermédiaires[358]).
*Un espace topologique X a la **propriété de valeurs intermédiaires** si pour toute fonctions continue $f\colon X \to \mathbb{R}$, si pour tout $a, b \in X$, nous avons $[r_1, r_2] \subset f(X)$.*

PROPooGURQooAwKNUJ

Proposition 9.58 ([358]).
Un espace topologique a la propriété des valeurs intermédiaires si et seulement si il est connexe.

Démonstration. Les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Soit un espace topologique X que nous supposons ne pas être connexe. Nous considérons des ouverts A et B tels que $A \cup B = X$ et $A \cap B = \varnothing$. Ensuite nous prenons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ -1 & \text{si } x \in B. \end{cases} \end{aligned} \tag{9.79}$$

Cette fonction ne vérifie manifestement pas la propriété des valeurs intermédiaires. Et pourtant elle est continue. En effet si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ peut valoir $\varnothing$, A, B ou X suivant que 1 ou -1 sont ou non dans $\mathcal{O}$. Or toutes ces parties sont ouvertes. Donc $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons maintenant que X est connexe, nous considérons une fonction continue $f\colon X \to \mathbb{R}$, et nous montrons qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Le lemme 7.273 dit que $f(X)$ est un connexe de $\mathbb{R}$. La proposition 9.54 dit alors que $f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

□

9.3.13 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème suivant est essentiellement inutile pour les raisons suivantes :

- Il est un cas particulier du théorème 7.194 qui donne pour tout espace métrique, l'équivalence entre la compacité et la compacité séquentielle.
- Il est un cas particulier du théorème 7.343 qui le donne pour tous les espaces compacts.

Bref, nous ne le laissons que pour le lecteur qui n'aurait pas en tête d'autres définitions de « compact » à part « fermé borné ».

ThoBolzanoWeierstrassRn

Théorème 9.59 (Théorème de Bolzano-Weierstrass).
Toute suite contenue dans un compact de $\mathbb{R}^m$ admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Nous rappelons qu'une partie compacte de $\mathbb{R}^m$ est fermée et bornée par le théorème de Borel-Lebesgue 9.24.

Soit (x_n) une suite contenue dans une partie bornée de $\mathbb{R}^m$. Considérons (a_n), la suite réelle des premières composantes des éléments de (x_n) : pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le nombre a_n est la première composante de x_n. Étant donné que la suite (x_n) est bornée, il existe un M tel que $\|x_n\| < M$. La croissance de la fonction racine carrée donne

$$|a_n| \leqslant \|x_n\| \leqslant M. \tag{9.80}$$

La suite (a_n) est donc une suite réelle bornée et donc contient une sous-suite convergente par le théorème correspondant dans $\mathbb{R}$: 7.194. Soit a_{I_1} une sous-suite convergente de a_n. Nous considérons maintenant x_{I_1}, c'est-à-dire la suite de départ dont on a enlevé tous les éléments qu'il faut pour qu'elle converge en ce qui concerne la première composante.

Si nous considérons la suite b_{I_1} des *secondes* composantes de x_{I_1}, nous en extrayons, de la même façon que précédemment, une sous-suite convergente, c'est-à-dire que nous avons un $I_2 \subset I_1$ tel que b_{I_2} est convergent. Notons que a_{I_2} est une sous-suite de la (sous) suite convergente x_{I_1}, et donc a_{I_2} est encore convergente.

En continuant ainsi, nous construisons une sous-sous-sous-suite x_{I_3} telle que la suite des *troisièmes* composantes est convergente. Lorsque nous avons effectué cette procédure m fois, la suite x_{I_m} est une suite dont toutes les composantes convergent, et donc est une suite convergente par la proposition 9.37.

Le tableau suivant donne un petit schéma de la façon dont nous procédons. Les • sont les éléments de la suite que nous gardons, et les × sont ceux que nous « jetons ».

$$\begin{array}{lcccccccccc} x_{\mathbb{N}} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots \\ x_{I_1} & \times & \bullet & \bullet & \times & \bullet & \times & \times & \bullet & \bullet & \bullet & \dots \\ x_{I_2} & \times & \bullet & \times & \times & \bullet & \times & \times & \bullet & \bullet & \times & \dots \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ x_{I_m} & \times & \times & \times & \times & \bullet & \times & \times & \times & \bullet & \times & \dots \end{array} \tag{9.81}$$

La première ligne, $x_{\mathbb{N}}$, est la suite de départ. □

CorFHbMqGGyi

Corolaire 9.60.
Si une suite est croissante et bornée alors elle est convergente.

Démonstration. Nous nommons (x_n) la suite et nous prenons un majorant M. Toute la suite est alors contenue dans le compact $[x_0, M]$, ce qui donne une sous-suite $(x_{\alpha(n)})$ convergente par le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.343. Si ℓ est la limite de cette sous-suite alors nous avons $\ell \geqslant x_n$ pour tout n.

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe K tel que si $n > K$ alors $|\ell - x_{\alpha(n)}| < \epsilon$. Comme ℓ majore la suite nous avons même

$$x_{\alpha(n)} + \epsilon > \ell. \tag{9.82}$$

Puisque la suite est croissante pour tout $m > \alpha(K)$ nous avons $x_m + \epsilon > \ell$, ce qui signifie $|x_m - \ell| < \epsilon$. □

Nous aurons une version pour les fonctions croissantes et bornées en la proposition 12.58.

La proposition suivante dit que la notion d'ensemble non dénombrable ne prend pas réellement de force entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$: il n'y a pas moyen de caser $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ de façon à ce qu'il y tienne à son aise.

Proposition 9.61.
Une partie non dénombrable de $\mathbb{R}^n$ possède un point d'accumulation[29].

Démonstration. Soit une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ sans point d'accumulation. Nous allons prouver que A est dénombrable.

Soient les compacts $K_n = \overline{B(0,n)}$. La partie $A \cap K_n$ est finie ; sinon elle aurait une partie en bijection avec $\mathbb{N}$ (proposition 1.235) et donc une suite. Or une suite dans un compact possède un point d'accumulation par le théorème 7.343.

Donc tous les $A \cap K_n$ sont finis. Puisque $A = \bigcup_n A \cap K_n$, l'ensemble A est une réunion dénombrable d'ensembles finis. Il est donc dénombrable. □

9.3.14 Recouvrement par des intervalles ouverts

Soit un ensemble E et un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de E. Soit $A \in \mathcal{A}$. Nous aimerions savoir quels sont les éléments de $\mathcal{A}$ qui sont atteignables en partant de A et en ne « sautant » que d'intersection en intersection.

Nous notons $\mathcal{A} = \{B_i\}_{i \in I}$ où I est un ensemble d'indices (un ensemble quelconque).

$$s_1(A) = \{i \in I \text{ tel que } B_i \cap A \neq \varnothing\} \tag{9.83a}$$

$$\sigma_1(A) = \bigcup_{B \in s_1(A)} B. \tag{9.83b}$$

Et ensuite :

$$s_{k+1}(A) = \{i \in I \text{ tel que } B_i \cap \sigma_k(A) \neq \varnothing\} \tag{9.84a}$$

$$\sigma_{k+1}(A) = \bigcup_{B \in s_{k+1}(A)} B \tag{9.84b}$$

LEMooJHMTooXwxSAa

Lemme 9.62.
Soient un intervalle A de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \{I_i\}_{i=1,\dots,N}$ un recouvrement de A par des intervalles ouverts. Si $I_1 \cap A \neq \varnothing$ alors

(1) $\sigma_N = \sigma_{N+1}$

(2) $A \subset \sigma_N(I_1)$.

[29] Définition 7.43.

Démonstration. Si $\sigma_{k+1}=\sigma_k$, alors tous les σ_{k+l} sont identiques. De plus si $\sigma_{k+1}\neq\sigma_k$, alors σ_{k+1} contient au moins un élément de plus que σ_k. Donc $\text{Card}(\sigma_k)\geqslant k$ et en particulier $N\leqslant\text{Card}(\sigma_N)\leqslant N$. Cela prouve le premier point.

L'ensemble $\sigma_N(I_1)$ est une union d'ouverts et est donc un ouvert. Quitte à renuméroter, nous écrivons

$$\sigma_N(I_1)=I_1\cup\ldots\cup I_n. \tag{9.85}$$

L'ensemble

$$\tau=\bigcup_{k=n+1}^{N}I_k \tag{9.86}$$

est ouvert et est disjoint de $\sigma_N(I_1)$ parce que si I_l ($l\geqslant n+1$) intersectait $\sigma_N(I_1)$, nous aurions $l\in s_{N+1}$ ou encore $I_l\subset\sigma_{N+1}\setminus\sigma_N$.

Donc τ et σ_N sont deux ouverts disjoints qui recouvrent A. Puisque A est un intervalle, il est connexe[30]. Donc, soit $A\subset\tau$, soit $A\subset\sigma_N$. Comme $I_1\cap A\neq\varnothing$ nous sommes dans le cas $A\subset\sigma_N$. □

LEMooGHPTooKgFvGb

Lemme 9.63.
Soit $x\in\mathbb{R}$. Si $\mathcal{A}=\{I_s\}_{s\in S}$ est un ensemble d'intervalles contenant x, alors $I=\bigcup_{s\in S}I_s$ est un intervalle[31].

Démonstration. Soient $a,b\in I$ (nous supposons $a<b$). Nous devons prouver que $[a,b]\subset I$. Pour cela nous considérons $y\in[a,b]$; il y a deux possibilités : soit $y<x$ soit $y>x$ (si $y=x$ alors $y\in I_s$).

Si $y<x$, alors $a\leqslant y<x$ et donc $y=\in I$. Si $y>x$, alors $x<y\leqslant b$ et $y\in I$. □

PROPooTXMBooZaSKFF

Proposition 9.64 ([359, 360])**.**
Un ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme union au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Plus précisément, si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe un ensemble $\mathcal{F}=\{I_s\}_{s\in S}$ où

(1) Chaque I_s est un intervalle ouvert contenu dans $\mathcal{O}$,

(2) Pour $s,t\in S$, si $I_s\neq I_t$, alors $I_s\cap I_t=\varnothing$.

(3) S est dénombrable,

Démonstration. Pour $x\in\mathcal{O}$, nous définissons J_x comme étant l'union de tous les intervalles ouverts contenus dans $\mathcal{O}$ et contenant x. Les J_x ne sont pas vides parce qu'ils contiennent toujours une boule centrée en x[32].

En tant qu'union d'intervalles, J_x est un intervalle par le lemme 9.63. De plus, J_x est ouvert parce que toute union d'ouverts est ouverte[33].

Nous notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des intervalles ouverts contenus dans $\mathcal{O}$, et

$$\mathcal{A}_x=\{I\in\mathcal{A}\text{ tel que }x\in I\}. \tag{9.87}$$

(1) **Si $y\in J_x$, alors $J_x=J_y$** Puisque $y\in J_x$, nous pouvons considérer $J=\mathcal{A}_x\cap\mathcal{A}_y$. Nous avons

$$J_y=\bigcup_{I\in\mathcal{A}_y}I\subset\bigcup_{I\in\mathcal{A}_y}\underbrace{(I\cup J)}_{\in\mathcal{A}_x}\subset\bigcup_{I\in\mathcal{A}_x}I=J_x. \tag{9.88}$$

L'inclusion dans l'autre sens s'obtient en écrivant la même équation en échangeant x et y.

(2) **Les J_x sont disjoints** Nous prouvons à présent que pour $x,y\in\mathcal{O}$, nous avons $J_x=J_y$ ou $J_x\cap J_y=\varnothing$. En effet si $a\in J_x\cap J_y$, alors $J_a=J_x$ et $J_a=J_y$. Donc $J_x=J_y$.

(3) **Dénombrable** C'est le moment d'écrire $\mathcal{F}=\{J_x\}_{x\in\mathcal{O}}$. Comme tout intervalle contient au moins un rationnel (proposition 9.16), nous avons aussi

$$\mathcal{F}=\{J_x\}_{x\in\mathcal{O}}=\{J_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap\mathcal{O}}. \tag{9.89}$$

Cet ensemble $\mathcal{F}$ vérifie les conditions demandées.

□

[30] Définition 7.102 et proposition 9.54.
[31] Définition 1.27.
[32] C'est la définition 7.125 de la topologie métrique.
[33] C'est dans la définition 7.1 d'une topologie.

9.4 Connexité par arcs

DEFooOXVCooBizpgK

Définition 9.65.
Une partie A d'un espace topologique est ***connexe par arcs*** *si pour tout $a, b \in A$, il existe une application continue $\gamma\colon [0,1] \to A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.*

9.66.
Un exemple d'ensemble connexe mais pas connexe par arcs est donné par la proposition 21.56. L'idée de cet exemple est de construire un ensemble en deux parties reliées par un chemin de longueur infinie.

Un espoir fou nous prend alors de croire que nous pouvons produire un exemple plus simple avec $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ parce que, dans cet ensemble, 1 et $+\infty$ sont reliés par un chemin de longueur infinie. La proposition 12.59 nous montrera que non.

LEMooQPYMooRKVSrv

Lemme 9.67.
Une partie connexe par arcs est connexe.

Beaucoup d'espaces connexe sont connexes par arcs. La proposition suivante couvre entre autres le cas de tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé comme l'espace euclidien.

PROPooYFDBooHbBjzF

Proposition 9.68 ([361])**.**
Tout espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

LEMooTVQMooFxrFaT

Lemme 9.69.
Soient deux espaces topologiques E et F, et $f : E \to F$ un homéomorphisme[34]*. E est connexe par arcs*[35] *si et seulement si F l'est.*

9.70.
Voici une idée de la preuve.

On montre en réalité que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs, ce qui implique chaque sens de l'équivalence de l'énoncé.

Soient p et q des points de F. Il existe un chemin reliant un antécédent de p et un antécédent de q (dans E). L'image de ce chemin est un chemin reliant p et q (dans F) puisque composé d'applications continues.

LEMooQFQFooDlxkw

Lemme 9.71.
Une sphère de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si $n > 1$

9.72.
Une idée de la preuve.

On voit qu'un cercle est connexe par arcs car on a un paramétrage en sinus et cosinus. Pour une sphère S de centre a en dimension $n > 2$, on se donne p et q sur S et on définit P le plan affine passant par a, p et q. Alors $P \cap S$ est un cercle, donc on peut relier p à q par un chemin dans cette intersection.

Pour voir sur une formule que $P \cap S$ est un cercle, on peut écrire $x - a = \lambda(a - p) + \mu(a - q)$ l'équation (en x) du plan P, et $|x - a|^2 = R^2$ l'équation (en x) de la sphère. En injectant, on obtient une équation du second degré en λ, μ qui se révèle être l'équation d'un cercle à une transformation affine près.

LEMooDYNSooOmJbYq

Lemme 9.73.
Un ouvert connexe par arcs dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) reste connexe par arcs même si on lui enlève un point.

9.74.
Une idée de la preuve.

En effet, soit U un tel ouvert connexe par arcs, et p un point de U. Soient x et y sur $U \setminus \{p\}$. Il existe un chemin γ de x à y. Si le chemin ne passe pas par p, c'est gagné. Si il passe par p, on choisit une boule B fermée (de rayon non-nul) centrée en p qui ne contient ni x ni y. On note $E = \gamma^{-1}(B) \subset [0;1]$ c'est un ensemble compact (fermé, par continuité de γ, et borné) dont on regarde le maximum $\bar{t}$ et le minimum $\underline{t}$.

Il reste enfin à définir un chemin entre p et q par morceaux

(1) Les points p et $\gamma(\underline{t})$ sont reliés par γ,

(2) Par connexité par arcs, il existe un chemin sur la sphère qui relie $\gamma(\underline{t})$ à $\gamma(\bar{t})$,

(3) et enfin $\gamma(\bar{t})$ et q sont reliés via γ ;

ce qui achève la construction d'un chemin continu entre p et q.

[34] Définition 7.51.
[35] Définition 9.65

Pour conclure l'exercice, par l'absurde, on prend un voisinage connexe et ouvert V de 0 dans le cône, homéomorphe à un ouvert connexe U de $\mathbb{R}^2$. Or $V \setminus \{0\}$ n'est pas connexe par arcs, alors que l'ouvert dont on retire un point reste connexe par arcs. C'est impossible, donc l'homéomorphisme n'existe pas, et le cône n'est pas une variété de dimension 2.

9.4.1 Des exemples

Exemple 9.75.
Nous étudions l'exemple suivant :

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y^2 + 4y + 2 < x \leqslant \sqrt{4-y^2},\ y \in [-1.5, 0.5[\}. \tag{9.90}$$

On commence par tracer la parabole $x = 2y^2+4y+2$, la circonférence $x^2+y^2 = 4$ et les droites $y = -1.5$ et $y = 1/2$. On voit tout de suite que l'aire délimitée par les quatre courbes est donnée par l'union de deux parties. Dans la première $\sqrt{4-y^2} \leqslant x \leqslant 2y^2+4y+2$, $y \in [0, 0.5]$ et dans l'autre $2y^2+4y+2 \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y^2}$, $y \in [-1.5, 0]$. L'ensemble A_1 est contenu dans la deuxième, 9.1. L'intérieur de A_1 est donné par $\text{Int}(A_1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y^2+4y+2 < x < \sqrt{4-y^2},\ y \in]-1.5, 0[\}$, et sa frontière est l'union de 3 morceaux de courbe ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 :

$$\begin{aligned}
\ell_1 &= \{(x,y) \,|\, x = 2y^2+4y+2,\ y \in [-1.5, 0]\} \\
\ell_2 &= \{(x,y) \,|\, x = \sqrt{4-y^2},\ y \in [-1.5, 0]\} \\
\ell_3 &= \{(x,y) \,|\, x \in [0.5, \sqrt{7/4}]\, y = -1.5\}.
\end{aligned} \tag{9.91}$$

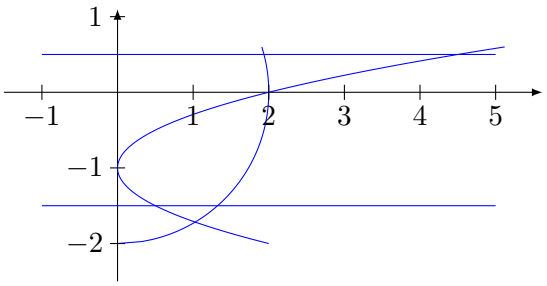


FIGURE 9.1 : LabelFigLAfWmaN

△
EXooEJWBooDjBfKV

Exemple 9.76.
Nous étudions

$$A_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Q}\}. \tag{9.92}$$

L'ensemble A_3 n'est pas ouvert, ni fermé, ni borné dans la topologie de $\mathbb{R}^2$. Le lemme 7.40 dit que $\mathbb{Q}$ a un intérieur vide et sa fermeture est $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{N}$, par contre est fermé et non borné. On peut remarquer que tous les points de $\mathbb{N}$ sont points isolés. La fermeture de A_3 est alors $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ et son intérieur est vide. On peut dessiner la fermeture de cet ensemble comme une famille de droites verticales $x = n$, pour tout n dans $\mathbb{N}$. △

Exemple 9.77.
Nous étudions l'ensemble

$$A_3 = \{(t, 2t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1]\ \}. \tag{9.93}$$

L'ensemble A_3 est un petit segment de droite. Son intérieur est vide parce que toute boule centrée en un point de la droite intersecte l'extérieur de la droite. Son adhérence et sa frontière sont A_3 lui-même parce que nous considérons les valeurs de t dans $[0,1]$ qui est un intervalle fermé. Si l'intervalle avait été ouvert, l'adhérence et la frontière auraient été trouvés en fermant :

$$\overline{\{(t,2t) \text{ tels que } t \in [0,1[\ \}} = \{(t,2t) \text{ tels que } t \in [0,1]\} \tag{9.94}$$

Étant donné que son adhérence est égal à lui-même, cet ensemble est fermé (et donc pas ouvert). Il est également borné parce qu'il est contenu dans une boule de rayon 3. △

Exemple 9.78.
Nous étudions l'ensemble

$$A_4 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}. \tag{9.95}$$

Dans $\mathbb{R}$ nous savons que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ et $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ parce que toute boule centrée en un rationnel contient un irrationnel, et inversement, toute boule centrée en un irrationnel contient un rationnel. Dans $\mathbb{R}^2$ nous avons le même phénomène parce dans la boule $B\big((p,q),r\big)$ avec $(p,q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, se trouvent en particulier les points de la forme (p,x) avec $x \in B(q,r) \subset \mathbb{R}$. Évidemment, certains de ces x ne sont pas dans $\mathbb{Q}$ et par conséquent, la boule $B\big((p,q),r\big)$ contient les points $(p,x) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

De la même manière, si (x,y) est un point de $\mathbb{R}^2$, dans toute boule centrée en (x,y), il y aura un élément de $\mathbb{Q}^2$.

Par conséquent, $\text{Int}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \varnothing$, $\overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\partial(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \mathbb{R}^2$.

Il n'est ni ouvert ni fermé (parce qu'il n'est égal ni à son intérieur ni à sa fermeture). Il n'est pas borné non plus parce qu'il existe des nombres rationnels arbitrairement grands. △

Exemple 9.79.
Nous étudions l'ensemble

$$A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0,1[, \sin\frac{1}{x} < y < 3\}. \tag{9.96}$$

La fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est une des fonctions dont le graphe doit être connu. La figure 9.2 montre la situation. Comme d'habitude, il est fortement recommandé de refaire le dessin soi-même.

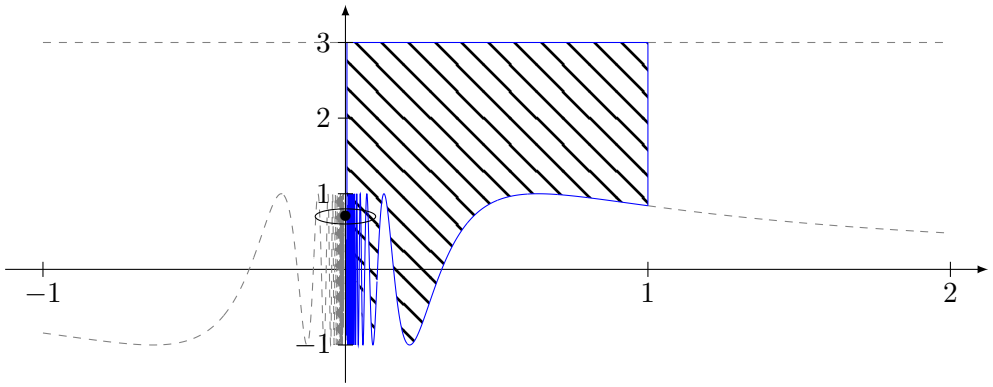


FIGURE 9.2 : Les points qui sont sur l'axe vertical entre 0 et 3 sont sur la frontière, mais pas dans l'ensemble A_5.
LabelFigAdhIntFrTrois

L'ensemble A_5 est ouvert parce que les conditions $x \in]0,1[$ et $\sin\frac{1}{x} < y < 3$ sont des conditions « ouvertes » au sens où si un point les vérifient, alors on peut trouver une boule dans lequel ces conditions restent vérifiées. Cela prouve que $\text{Int}(A_5) = A_5$.

La fermeture de A_5 contient en outre les points tels que $\sin\frac{1}{x} = y$ entre $x = 0$ et $x = 1$ (les bornes étant incluses) ainsi que les points des trois segments de droites suivants :

$$\begin{aligned} \{(0,y) \text{ tels que } y \in [-1,3]\} \\ \{(x,3) \text{ tels que } x \in [0,1]\} \\ \{(1,y) \text{ tels que } y \in [\sin(1),3]\}. \end{aligned} \tag{9.97}$$

La frontière est composée de ces trois segments et du graphe de la fonction $\sin\frac{1}{x}$ entre 0 et 1.

L'ensemble A_5 est borné parce qu'il est contenu par exemple dans la boule centrée en $(0,0)$ et de rayon 10. Il est ouvert et donc pas fermé. △
ItemexoEspVectoNorme0003iv

Exemple 9.80.
Nous étudions l'ensemble

$$A_6 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{(\frac{1}{n}, y) \mid y \in [0,1]\ \}. \tag{9.98}$$

L'ensemble A_6 est une union infinie de segments de droites verticaux, voir figure 9.3

L'intérieur est vide parce qu'autour de tout réel de la forme $\frac{1}{n}$, il y a un réel qui n'est pas de cette forme. En ce qui concerne la frontière et l'adhérence, il s'agit de l'union de tous ces segments plus le segment en $x = 0$.

En effet, la boule de rayon r autour du point $(0,y)$ contient le point $(\frac{1}{n}, y)$ avec n assez grand pour que $\frac{1}{n} < r$. △

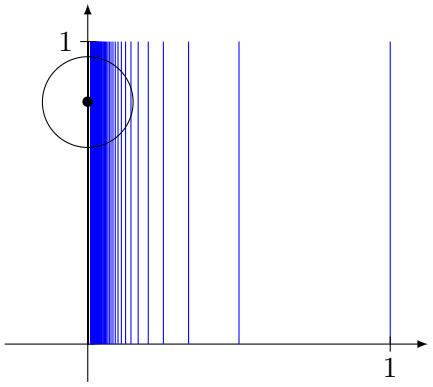


FIGURE 9.3 : Le segment sur l'axe vertical entre $y = 0$ et $y = 1$ fait partie de l'adhérence et de la frontière, mais pas de l'ensemble A_6 lui-même.
LabelFigAdhIntFrSix

9.4.2 Quelques mots à propos de la droite réelle achevée

Définition 9.81.
*La **droite réelle achevée** est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ où $\pm\infty$ sont deux nouveaux éléments. Nous la notons $\overline{\mathbb{R}}$ pour des raisons que nous verrons à peine plus bas.*

Cette définition ne servirait à rien si nous n'y mettions pas une topologie pour positionner les éléments $\pm\infty$ par rapport à ceux qui existaient déjà dans $\mathbb{R}$.

Définition 9.82 (Topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$)**.**
La topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$ est celle sur $\mathbb{R}$ à laquelle nous ajoutons les voisinages de $\pm\infty$ de la façon suivante. Une partie V de $\bar{\mathbb{R}}$ est un voisinage de $+\infty$ si il existe $m > 0$ tel que $]m, +\infty] \subset V$.

Le lemme suivant justifie la notation $\overline{\mathbb{R}}$ pour la droite réelle achevée[36].
LEMooPZXHooEEXsTC

Lemme 9.83.
L'adhérence[37] de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Il suffit de prouver que $+\infty$ et $-\infty$ sont dans l'adhérence de $\mathbb{R}$. Nous le faisons pour $+\infty$. Ce n'est pas très compliqué : si A est un ouvert contenant $+\infty$, il contient une partie de la forme $]a, +\infty]$, et donc contient des éléments de $\mathbb{R}$. □

Pour la suite nous utilisons la notation (pratique en probabilité)

$$\{f < a\} = \{x \in S \text{ tel que } f(x) < a\}. \tag{9.99}$$

9.5 Continuité

La définition de fonction continue est la définition 7.45.

(1) Dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la définition de la continuité devient la proposition 9.84.

(2) Une application continue vers un espace normé est localement bornée, proposition 7.162.
PROPooVNGEooPwbxXP

Proposition 9.84.
Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. La fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est continue[38] en a si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $x \in B(a, \delta) \cap A$ alors $|f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Si f est continue** Soit $\epsilon > 0$. L'ouvert $W = B\big(f(a), \epsilon\big)$ contient $f(a)$. La définition de la continuité en a dit qu'il existe un ouvert V de A contenant a et tel que $f(V) \subset B\big(f(a), \epsilon\big)$.

Vu que V est un ouvert de A[39], il contient une partie de la forme $B(a, \delta) \cap A$ pour un certain $\delta > 0$. Pour ce δ, nous avons bien que $f(x) \in B\big(f(a), \epsilon\big)$ dès que $x \in B(a, \sigma) \cap A$.

[36] Notez que l'espace métrique $\mathbb{R}$ est déjà complet. Il ne s'agit donc pas d'une completion.
[37] Définition 7.19.
[38] Définition 7.45(1).
[39] Topologie induite et tout ça.

(2) **Si f dans l'autre sens** Soit un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant $f(a)$. Nous avons un $\epsilon > 0$ tel que $\overline{B\big(f(a),\epsilon\big)} \subset W$. Il existe donc un $\delta > 0$ tel que

$$f\big(B(a,\delta) \cap A\big) \subset B\big(f(a),\epsilon\big) \subset W. \tag{9.100}$$

La partie $B(a,\delta) \cap A$ est un voisinage de a dans A.

□

Nous allons maintenant étudier quelques conséquences de la continuité sur $\mathbb{R}$.

(1) D'abord on voit que la continuité n'a été définie qu'en un point. On peut dire que la fonction f est continue *en tel point donné*, mais nous n'avons pas dit ce qu'est une fonction continue *dans son ensemble*.

(2) Le théorème 7.263 nous précise que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur I si et seulement si elle est continue en chaque point de I.

(3) Comme la définition de f continue en a fait intervenir $f(x)$ pour tous les x pas trop loin de a, il faut au moins déjà que f soit définie sur ces x. En d'autres termes, dire que f est continue en a demande que f existe sur un intervalle autour de a.

Ceci couplé à la définition précédente laisse penser qu'il est surtout intéressant d'étudier les fonctions qui sont continues sur un intervalle.

(4) L'intuition qu'une fonction continue doit pouvoir être tracée sans lever la main correspond aux fonctions continues sur des intervalles. Au moins sur l'intervalle où elle est continue, elle devrait être traçable en un coup. Cette intuition est complètement fausse (comme pratiquement toutes les intuitions), comme le montre l'exemple 9.85.

EXooJBGSooBOGSse

Exemple 9.85.
Il est très possible d'être continue en un seul point. Par exemple la fonction

$$f(x) = x(1 - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)) \tag{9.101}$$

où $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. △

PROPooUBUAooNIxjfg

Proposition 9.86.
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au point $a \in \mathbb{R}$ et si $f(a) \neq 0$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas.

Démonstration. Si f s'annulait sur tout voisinage de a (mais pas en a lui-même), nous aurions, pour tout n un réel

$$x_n \in B\big(a, \frac{1}{n}\big) \setminus \{a\} \tag{9.102}$$

tel que $f(x_n) = 0$. Cela donnerait une suite $x_n \to a$ avec $f(x_n) \to 0$, ce qui contredit la continuité de f en a en vertu de la proposition 7.152 sur la continuité séquentielle en un point. □

Notons que ce résultat se généralise : si f est continue et pas égale à r en a, alors il existe un voisinage de a sur lequel elle ne prend pas la valeur r.

9.5.1 Opération sur la continuité

Nous allons démontrer maintenant une série de petits résultats qui permettent de simplifier la démonstration de la continuité de fonctions.

Théorème 9.87.
Si la fonction f est continue au point a, alors la fonction λf est également continue en a.

Démonstration. Commençons par exprimer la continuité de f en a. Soit $\epsilon_1 > 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$(|x - a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon_1.$$

En travaillant avec λf au lieu de f,

$$(|x - a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| \leqslant |\lambda|\epsilon_1. \tag{9.103}$$

Passons à la continuité de λf. Soit $\epsilon > 0$. Nous posons $\epsilon_1 = \epsilon/|\lambda|$ et nous considérons le δ_1 correspondant :

$$(|x-a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| \leqslant |\lambda|\epsilon_1 = \epsilon.$$

Ce δ_1 est celui que l'on cherchait. □

PROPooBUJCooBHmKEG

Proposition 9.88 ([1])**.**
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue ne s'annulant pas, alors $x \mapsto 1/f(x)$ est une fonction continue.

THOooWRXOooUvKgkQ

Théorème 9.89.
Si f et g sont deux fonctions continues en a, alors

(1) La fonction $f+g$ est continue en a.

(2) La fonction fg est continue en a.

ITEMooSHMVooZPNtCv

Démonstration. Deux continuités à prouver en utilisant la caractérisation 9.84 de la continuité.

(1) **La somme**

La continuité des fonctions f et g au point a fait en sorte que pour tout choix de ϵ_1 et ϵ_2, il existe δ_1 et δ_2 tels que

$$(|x-a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon_1.$$

et

$$(|x-a| \leqslant \delta_2) \Rightarrow |g(x) - g(a)| \leqslant \epsilon_2.$$

La quantité que nous souhaitons analyser est $|f(x)+g(x)-f(a)-g(a)|$. Tout le jeu de la démonstration de la continuité est de triturer cette expression pour en tirer quelque chose en termes de ϵ_1 et ϵ_2. Si nous supposons avoir pris $|x-a|$ plus petit en même temps que δ_1 et que δ_2, nous avons

$$|f(x)+g(x)-f(a)-g(a)| \leqslant |f(x)-g(x)| + |g(x)-g(a)| \leqslant \epsilon_1 + \epsilon_2$$

en utilisant la formule générale $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. Maintenant, si on choisit ϵ_1 et ϵ_2 tels que $\epsilon_1+\epsilon_2 < \epsilon$, et les δ_1, δ_2 correspondants, on a

$$|f(x)+g(x)-f(a)-g(a)| \leqslant \epsilon,$$

pourvu que $|x-a|$ soit plus petit que δ_1 et δ_2. Le bon δ à prendre est donc le minimum de δ_1 et δ_2 qui eux-mêmes sont donnés par un choix de ϵ_1 et ϵ_2 tels que $\epsilon_1+\epsilon_2 \leqslant \epsilon$.

(2) **Le produit** Soit $\epsilon' > 0$. Nous considérons $\delta > 0$ tel que $|f(x)-f(a)| < \epsilon'$ et $|g(x)-g(a)| < \epsilon'$ pour tout $x \in B(a,\delta)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - (fg)(a)| &= |f(x)g(x) - f(a)g(a)| && \text{(9.104a)}\\
&\leqslant |f(x)g(x) - f(x)g(a)| + |f(x)g(a) - f(a)g(x)| && \text{(9.104b)}\\
&= |f(x)||g(x)-g(a)| + |g(a)|\underbrace{|f(x)-f(a)|}_{<\epsilon'} && \text{(9.104c)}\\
&\leqslant \epsilon'\big(|f(x)| + |g(a)|\big). && \text{(9.104d)}
\end{aligned}$$

Notons que $x \in B(a,\delta)$, donc $|f(x)-f(a)| < \epsilon'$ et donc $|f(x)| \leqslant |f(a)| + \epsilon'$. Nous avons prouvé que pour tout $\epsilon' > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $x \in B(a,\delta)$, alors

$$|(fg)(x) - (fg)(a)| < \epsilon'\big(M + \epsilon'\big) \tag{9.105}$$

EQooSMPXooIhJmnJ

où $M = |f(a)| + |g(a)|$.

Soit maintenant $\epsilon > 0$. En posant $\epsilon' < \min\{1, \epsilon/(M+1)\}$ nous avons bien $\epsilon'(M+\epsilon') < \epsilon$, et donc l'inégalité (9.105) donne la continuité de fg.

□

Pour résumer ces deux théorèmes, on dit que si f et g sont continues en a, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est également continue en a pour tout α, $\beta \in \mathbb{R}$.

PROPooVNKVooJvxarf

Proposition 9.90.
Soient des parties Ω_f et Ω_g dans $\mathbb{R}$. Soient $f\colon \Omega_f \to \mathbb{R}$ ainsi que $g\colon \Omega_g \to \mathbb{R}$ telles que

(1) g est continue en a et vaut $g(a) = \ell$.

(2) f est continue en ℓ et vaut $f(\ell) = b$.

(3) $g(\Omega_g) \subset \Omega_f$.

Alors $f \circ g$ est continue en a.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. La continuité de f dit que il existe $\eta > 0$ tel que

$$y \in B(\ell, \eta) \cap \Omega_f \Rightarrow |f(y) - f(\ell)| < \epsilon. \tag{9.106}$$

La continuité de g donne $\delta > 0$ tel que

$$x \in B(a, \delta) \cap \Omega_g \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \eta. \tag{9.107}$$

Si $x \in B(a, \delta) \cap \Omega_g$, alors $g(x) \in B(\ell, \eta) \cap \Omega_f$. Donc

$$|(f \circ g)(x) - f(\ell)| < \epsilon. \tag{9.108}$$

Mais $f(\ell) = (f \circ g)(a)$. Tout cela est la continuité de $f \circ g$ en a. □

Parmi les propriétés immédiates de la continuité d'une fonction, nous avons ceci qui est souvent bien utile.

CorNNPYooMbaYZg

Corolaire 9.91.
Si la fonction f est continue en a et si $f(a) > 0$, alors f est positive sur un intervalle autour de a.

Démonstration. Prenons $\epsilon < f(a)$ et voyons[40] ce que la continuité de f en a nous offre : il existe un δ tel que

$$(|x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon < f(a).$$

Nous en retenons que sur un intervalle (de largeur δ), nous avons $|f(x) - f(a)| \leqslant f(a)$. Par hypothèse, $f(a) > 0$, donc si $f(x) < 0$, alors la différence $f(x) - f(a)$ donne un nombre encore plus négatif que $-f(a)$, c'est-à-dire que $|f(x) - f(a)| > f(a)$, ce qui est contraire à ce que nous venons de démontrer. D'où la conclusion que $f(x) > 0$. □

9.5.2 La fonction la moins continue du monde

Parmi les exemples un peu sales de fonctions non continues, il y a celle-ci :

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, $\chi_{\mathbb{Q}}(0) = 1$, et[41] $\chi_{\mathbb{Q}}(\pi) = \chi_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2}) = 0$. Bien que $\chi_{\mathbb{Q}}(0) = 1$, il n'existe *aucun* voisinage de 1 sur lequel la fonction reste proche de 1, parce que tout voisinage va contenir au moins un irrationnel. À chaque millimètre, cette fonction fait une infinité de bonds !

Cette fonction n'est donc continue nulle part.

À partir de là, nous pouvons construire la fonction suivante qui n'est continue qu'en un point :

$$f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est continue en zéro. En effet, prenons $\delta > 0$; il nous faut un ϵ tel que $|x| \leqslant \epsilon$ implique $f(x) \leqslant \delta$ parce que $f(0) = 0$. Bon ben prendre simplement $\epsilon = \delta$ nous contente. Cette fonction est donc très facilement continue en zéro.

Et pourtant, dès que l'on s'écarte un tant soit peu de zéro, elle fait des bonds une infinité de fois par millionième de millimètre ! Cette fonction est donc la plus discontinue du monde en tous les points, sauf un (zéro), où c'est une fonction continue !

9.92.
J'ai longtemps cru que cette fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$ était la plus discontinue du monde. Je me trompais lourdement. Celle-ci est encore plus incroyable :

[40] ici, nous insistons sur le fait que nous prenons ϵ *strictement* plus petit que $f(a)$.

[41] Pour prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, c'est pas trop compliqué, mais pour prouver que π ne l'est pas non plus, il faudra encore manger de la soupe.

Numberphile : Conway's Base 13 Function
https://www.youtube.com/watch?v=zsBaApyf_Ns

Divulgâchis : avec cette fonction, chaque ouvert de $\mathbb{R}$ est surjectif sur $\mathbb{R}$. Elle fait donc une infinité non dénombrable de sauts sur chaque intervalle.

9.5.3 Approche topologique

Nous avons vu que sur tout ensemble métrique, nous pouvons définir ce qu'est un ouvert : c'est un ensemble qui contient une boule ouverte autour de chacun de ses points. Quand on est dans un ensemble ouvert, on peut toujours un peu se déplacer sans sortir de l'ensemble.

Le théorème suivant est une très importante caractérisation des fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) en termes de topologie, c'est-à-dire en termes d'ouverts.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 9.93
Le théorème suivant n'a aucun sens parce que c'est pratiquement la définition de la continuité d'une fonction, définition 7.45. Peut-être que ce qu'on a en tête est la proposition 7.46 qui donne l'équivalence entre application continue et continu en chaque point.

ThoContInvOuvert

Théorème 9.94.
Si I est un intervalle ouvert contenu dans $\operatorname{dom} f$, alors f est continue sur I si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$, l'image inverse $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert.

Démonstration. Dans un premier temps, nous allons transformer le critère de continuité en termes de boules ouvertes, et ensuite, nous passerons à la démonstration proprement dite. Le critère de continuité de f au point x dit que

$$\forall \delta > 0, \exists\, \epsilon > 0 \text{ tel que } \big(|x-a| < \epsilon\big) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta. \tag{9.109}$$

EqDEfCOntAn

Cette condition peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon \text{ tel que } a \in B(x,\epsilon) \Rightarrow f(a) \in B\big(f(x),\delta\big),$$

ou encore

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon \text{ tel que } f\big(B(x,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x),\delta\big). \tag{9.110}$$

EqRedefContBoules

Jusque ici, nous n'avons fait que du jeu de notations. Nous avons exprimé en termes de topologie des inégalités analytiques. La condition (9.110) est le plus souvent utilisée comme définition de la continuité d'une fonction en x, lorsque le contexte ne demande pas de définitions plus générales. Si tel est le choix, il faut pouvoir retrouver (9.109) à partir de (9.110).

Passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème.

D'abord, supposons que f est continue sur I, et prenons $\mathcal{O}$, un ouvert quelconque. Le but est de prouver que $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert. Pour cela, nous prenons un point $x_0 \in f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ et nous allons trouver un ouvert autour de ce point, contenu dans $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$. Nous écrivons $y_0 = f(x_0)$. Évidemment, $y_0 \in \mathcal{O}$, donc on a une boule autour de y_0 qui est contenue dans $\mathcal{O}$, soit donc $\delta > 0$ tel que

$$B(y_0,\delta) \subset \mathcal{O}.$$

Par hypothèse, f est continue en x_0, et nous pouvons donc y appliquer le critère (9.110). Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que

$$f\big(B(x_0,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x_0),\delta\big) \subset \mathcal{O}.$$

Cela prouve que $B(x_0,\epsilon) \subset f|_I^{-1}(\mathcal{O})$.

Dans l'autre sens, maintenant. Nous prenons $x_0 \in I$ et nous voulons prouver que f est continue en x_0, c'est-à-dire que pour tout δ, nous cherchons un ϵ tel que $f\big(B(x_0,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x_0),\delta\big)$. Oui, mais $B\big(f(x_0),\delta\big)$ est ouverte, donc par hypothèse, $f|_I^{-1}\Big(B\big(f(x_0),\delta\big)\Big)$ est ouvert, inclus dans I et contient x_0. Donc il existe un ϵ tel que

$$B(x_0,\epsilon) \subset f|_I^{-1}\Big(B\big(f(x_0),\delta\big)\Big),$$

et donc tel que

$$f\big(B(x_0,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x_0),\delta\big),$$

ce qu'il fallait prouver. □

ThoValInter

Théorème 9.95 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$, et supposons que $f(a) < f(b)$. Alors pour tout y tel que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, il existe un $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

Démonstration. Nous savons que $[a,b]$ est connexe parce que c'est un intervalle (proposition 9.54). Donc $f\big([a,b]\big)$ est connexe (lemme 7.273) et donc est un intervalle (à nouveau la proposition 9.54). Étant donné que $f\big([a,b]\big)$ est un intervalle, il contient toutes les valeurs intermédiaires entre n'importe quels deux de ses éléments. En particulier toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. □

PROPooIJZWooCAFPRn

Proposition 9.96.
Si $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ est continue et vérifie $f(0)=0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, alors f est surjective.

Démonstration. Soit $y\in[0,\infty[$. Vu que $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, il existe $a\in[0,\infty[$ tel que $f(a)>y$. Le théorème de valeurs intermédiaires 9.95 dit qu'il existe $x\in[0,a]$ tel que $f(x)=y$. □

CorImInterInter

Corolaire 9.97.
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. Soient I un intervalle, $\alpha<\beta\in f(I)$ et $\gamma\in\,]\alpha,\beta[$. Nous considérons $a,b\in I$ tels que $\alpha=f(a)$ et $\beta=f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires 9.95, il existe $t\in\,]a,b[$ tel que $f(t)=\gamma$. Par conséquent $\gamma\in f(I)$. □

CORooQXHDooWjSiKm

Corolaire 9.98 ([1])**.**
Soit une application continue $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant $f(a)>0$ et $f(x)\neq 0$ pour tout $x\in[a,b]$. Alors $f(b)>0$.

Démonstration. Supposons que $f(b)<0$. Alors le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 nous indique que pour tout y tel que $f(b)<y<f(a)$, il existe $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=y$. En prenant $y=0$ nous avons une contradiction. □

9.5.4 Limite sur des chemins

PROPooREUUooUNDFRi

Proposition 9.99.
Soit une application $f\colon X\to Y$ entre espaces topologiques. Nous supposons que $\lim_{x\to a} f(x)=b$. Alors pour toute application continue $\gamma\colon\mathbb{R}\to X$ telle que $\gamma(0)=a$, nous avons

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t)=b. \tag{9.111}$$

9.5.5 Racine carrée

DEFooGQTYooORuvQb

Corolaire-Définition 9.100 (Existence de la racine carrée)**.**
Si $x\geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$ alors il existe un unique réel $y\geqslant 0$ tel que $y^2=x$. Ce nombre est noté $\sqrt{x}$ et est nommé ***racine carrée*** *de x.*

Démonstration. La fonction $f\colon t\mapsto t^2$ est continue et strictement croissante. Nous avons $f(0)=0$ et[42] $f(x+1)>x$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 nous assure qu'il existe un unique $y\in[0,x+1]$ tel que $f(y)=x$. □

LEMooWSVNooKsymDy

Lemme 9.101.
Quelques formules.

(1) $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$ *si* $x,y\geqslant 0$.

ITEMooEPHBooCEeJOD

(2) $\sqrt{\lambda^2 x}=|\lambda|\sqrt{x}$ *si* $x\geqslant 0$.

LEMooSBOAooOOIotR

Lemme 9.102.
La fonction racine carrée est strictement croissante.

Démonstration. Supposons que $x<y$. Si $\sqrt{x}>\sqrt{y}$, alors la croissance de la fonction carré donne $x>y$ qui est contraire à l'hypothèse. □

9.5.6 Module sur les nombres complexes

LEMooVHDAooJyoakR

Lemme-Définition 9.103.
Si $z\in\mathbb{C}$, alors $z\bar{z}$ est un réel positif.
Nous définissons le ***module*** *sur $\mathbb{C}$ par*[43]

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}. \tag{9.112}$$

[42] Faites deux cas suivant $x\geqslant 1$ ou non si vous le voulez, moi je prends $x+1$.
[43] Définition de la racine carrée : 9.100.

Démonstration. Prouvons que $z\bar{z}$ est un réel positif. En effet si $z = a + bi$ alors

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2 \geqslant 0. \tag{9.113}$$

□

PROPooXLARooYSDCsF

Proposition 9.104.
Si z_1 et z_2 sont des nombres complexes, alors

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|. \tag{9.114}$$

Nous avons aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|z^n| = |z|^n. \tag{9.115}$$

EQooATTQooRpJeCo

Démonstration. D'abord $(a + bi)(c + di) = ac - db + (ad + bc)i$, de telle sorte que

$$|(a + bi)(c + di)|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \tag{9.116}$$

Mais en calculant d'autre part $|a + bi|^2|c + di|^2$, nous tombons sur la même valeur.

Une simple récurrence permet de conclure que $|z^n| = |z|^n$. □

Voilà. Vous êtes déjà content d'apprendre que l'on peut démontrer $|z^n| = |z|^n$ sans faire appel à la forme trigonométrique des nombres complexes.

PROPooUMVGooIrhZZg

Proposition 9.105 ([362])**.**
Pour tout nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + ib'$, nous avons

ITEMooYBJVooGXiDSd

(1) $z\bar{z} = \bar{z}z = a^2 + b^2$;

ITEMooKIDXooYANMUz

(2) $|z|^2 = z\bar{z}$.

ITEMooCGLSooKHbzkn

(3) $\bar{\bar{z}} = z$

ITEMooYXVXooObkeTM

(4) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

ITEMooGVWGooPQBUHC

(5) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

ITEMooDKWDooUjEuZA

(6) $|z| = |\bar{z}|$;

ITEMooFXKYooUOXbwH

(7) $|zz'| = |z|\,|z'|$;

ITEMooUJHPooUFdvqB

(8) $|z + z'| = \sqrt{|z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}')}$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Calcul direct :

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2. \tag{9.117}$$

Pour être honnête, vous devriez aussi faire le calcul pour $\bar{z}z$.

(2) **Pour (2)** C'est juste une réexpression de (1)

(3) **Pour (3)** On a : $\bar{\bar{z}} = \overline{(a - bi)} = a + bi$.

(4) **Pour (4)** Calcul direct en partant et

$$\overline{(a + bi) + (a' + b'i)} = \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b'). \tag{9.118}$$

(5) **Pour (5)** Soit $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z). \tag{9.119}$$

(6) **Pour (6)** Même calcul que pour (1).

(7) **Pour (7)** Puisque les deux membres de l'égalité à prouver sont positifs, il est suffisant de prouver l'égalité des carrés (lemme 9.102). Nous avons

$$zz' = (a+bi)(a'+b'i) = aa' - bb' + i(ab' + ba'), \tag{9.120}$$

donc

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= (aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2 && (9.121a)\\ &= (aa')^2 + (bb')^2 - 2aa'bb' + (ab')^2 + (ba')^2 + 2ab'ba' && (9.121b)\\ &= a^2(a'^2 + b'^2) + b^2(b'^2 + a'^2) && (9.121c)\\ &= (a^2+b^2)(a'^2+b'^2). && (9.121d) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\big(|z||z'|\big)^2 = |z|^2|z'|^2 = (a^2+b^2)(a'^2+b'^2). \tag{9.122}$$

EQooRSGGooGfWTrS

(8) **Pour (8)** En utilisant (5) pour $z'\bar{z}$, nous avons :

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}'). \tag{9.123}$$

□

PROPooPAXZooDijojx

Proposition 9.106.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ nous avons :

$$|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z| \tag{9.124}$$

et nous avons l'égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **L'inégalité** Par croissance de la fonction racine carrée nous avons, en posant $z = a + bi$:

$$|\operatorname{Re}(z)| = |a| = \sqrt{|a|^2} \leqslant \sqrt{|a|^2 + |b|^2} = |z|. \tag{9.125}$$

EQooBFANooKcSsWi

(2) **Égalité dans un sens** Si $|\operatorname{Re}(z)| = |z|$, alors toutes les inégalités dans (9.125) sont des égalités. En particulier

$$\sqrt{|a|^2} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}. \tag{9.126}$$

Par stricte croissance de la fonction racine carré, nous déduisons que $|b|^2 = 0$ et donc que $b = 0$.

(3) **Égalité dans l'autre sens** Si $z \in \mathbb{R}$, alors $\operatorname{Re}(z) = z$, et nous avons l'égalité.

□

PROPooYLVPooCVnpFw

Proposition-Définition 9.107 ([1, 362])**.**
Soient deux nombres complexes $a, b \in \mathbb{C}$. Nous avons

$$a\bar{b} \in \mathbb{R}^+ \tag{9.127}$$

si et seulement si $a = 0$ ou $\exists \lambda \geqslant 0$ tel que $b = \lambda a$.
Dans ce cas nous disons que a et b sont ***positivement liés***

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $a\bar{b} \in \mathbb{R}^+$. En posant $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ nous avons

$$a\bar{b} = (a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2). \tag{9.128}$$

Pour avoir $a\bar{b} \in \mathbb{R}^+$, il faut :

$$\begin{cases} a_2b_1 - a_1b_2 = 0 & (9.129a)\\ a_1b_1 + a_2b_2 \geqslant 0. & (9.129b) \end{cases}$$

Supposons que $a \neq 0$. Vu que $a \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b_1 = \lambda a_1$. En substituant dans la première condition, nous trouvons $\lambda a_2 a_1 - a_1 b_2 = 0$, et en simplifiant par a_1, il reste $b_2 = \lambda a_2$. Nous avons prouvé que $b = \lambda a$.

En substituant dans la seconde condition, $\lambda a_1^2 + \lambda a_2^2 \geqslant 0$ et donc $\lambda \geqslant 0$.

(2) $\Leftarrow$ Si $a=0$, alors $a\bar{b}=0\in\mathbb{R}^+$. Si $b=\lambda a$ alors $a\bar{b}=\lambda|a|^2\in\mathbb{R}^+$.

□

PROPooEEFGooACcCll

Proposition 9.108 (Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$[362]).
Soient deux nombres complexes a et b. Nous avons :

ITEMooDVMDooFDmOur

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$

ITEMooSZOEooZuiEVg

(2) $\big||a|-|b|\big|\leqslant|a+b|$

ITEMooWGAQooTvMOaG

(3) $\big||a|-|b|\big|\leqslant|a-b|$

Dans tous les cas, il y a égalité si et seulement si a et b sont positivement liés[44] *: $a\bar{b}\in\mathbb{R}^+$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)**
Nous comparons les carrés : SUBEQSooZRPBooOXRRDm

$$\begin{aligned}
|a+b|^2&=(a+b)\overline{(a+b)} && && (9.130a)\\
&=a\bar{a}+a\bar{b}+b\bar{a}+b\bar{b} && && (9.130b)\\
&=|a|^2+|b|^2+2\operatorname{Re}(a\bar{b}) && \text{prop. 9.105(5)} && (9.130c)\\
&\leqslant|a|^2+|b|^2+2|a\bar{b}| && \text{prop. 9.106} && (9.130d)\\
&=|a|^2+|b|^2+2|a||b| && \text{prop. 9.105(6)} && (9.130e)\\
&=\big(|a|+|b|\big)^2. && && (9.130f)
\end{aligned}$$

Vu que la fonction $t\mapsto t^2$ est croissante sur les réels positifs, l'inégalité (9.130) sur les carrés implique l'inégalité sur les non-carrés : $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

(2) **Pour (2)**
Nous utilisons deux fois le point (1) :

$$\begin{cases}
|a|=|a+b-b|\leqslant|a+b|+|b| & (9.131a)\\
|b|=|a+b-a|\leqslant|a+b|+|a|. & (9.131b)
\end{cases}$$

En isolant $|a+b|$ dans chacune des deux inégalités,

$$\begin{cases}
|a|-|b|\leqslant|a+b| & (9.132a)\\
|b|-|a|\leqslant|a+b|. & (9.132b)
\end{cases}$$

C'est le moment d'utiliser la proposition 1.564 :

$$\big||a|-|b|\big|=\max\big(|a|-|b|,|b|-|a|\big)\leqslant|a+b|. \tag{9.133}$$

(3) **Pour (3)** C'est juste (2) avec $-b$ au lieu de b.

(4) **Égalité pour (1)** Vu que $|a+b|$ et $|a|+|b|$ sont positifs, ils sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
|a+b|=|a|+|b|&\Leftrightarrow|a+b|^2=\big(|a|+|b|\big)^1 && && (9.134a)\\
&\Leftrightarrow|a|^2+|b|^2+2\operatorname{Re}(a\bar{b})=|a|^2+|b|^2+2|a||b| && \text{prop. 9.105(5)} && (9.134b)\\
&\Leftrightarrow\operatorname{Re}(a\bar{b})=|a||b| && && (9.134c)\\
&\Leftrightarrow\operatorname{Re}(a\bar{b})=|a\bar{b}| && \text{prop. 9.105(7)(6)} && (9.134d)\\
&\Leftrightarrow a\bar{b}\in\mathbb{R}^+ && && (9.134e)
\end{aligned}$$

(5) **Égalité pour (3)**

En développant $\big||a|-|b|\big|^2=|a-b|^2$, nous trouvons

$$|a|^2+|b|^2-2\operatorname{Re}(a\bar{b})=|a|^2+|b|^2-2|a||b|. \tag{9.135}$$

Il s'agit de la même relation que dans (1), et donc la conclusion est la même.

[44] Voir proposition 9.107 pour des conditions équivalentes.

□
PROPooZJAXooYwSSvo

Proposition 9.109.
La paire $(\mathbb{C}, |.|)$ est un espace vectoriel normé[45].

Démonstration. Nous devons prouver les différents points de la définition 7.212.

(1) $|z| \geqslant 0$ parce que la racine carrée prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

(2) Si $|z| = 0$, alors, en notant $z = a + bi$ nous avons $a^2 + b^2 = 0$. Cela implique $a = b = 0$ (vous pouvez soit invoquer le lemme 1.548, soit ne rien dire et faire comme si c'était évident).

(3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda z)(\overline{\lambda z}) = \lambda^2 z\bar{z}$ et nous avons

$$|\lambda z| = \sqrt{\lambda^2 z\bar{z}} = |\lambda|\sqrt{z\bar{z}} = |\lambda||z|. \tag{9.136}$$

(4) L'inégalité $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ est la proposition 9.108(1).

□
LEMooNIXZooDxfpNM

Lemme 9.110.
Soient des réels strictement positifs a_{ij} et des complexes $z_i \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $j = 1, \ldots, n$ nous ayons

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}|z_i| = |\sum_i a_{ij} z_i|. \tag{9.137}$$

Alors les z_i sont colinéaires au sens où il existe des nombres réels positifs s_i et un $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $z_i = s_i z_0$.

9.5.7 Théorème de Perron-Frobenius

Définition 9.111.
*Pour une matrice carrée T, nous notons $T \geqslant 0$ si $T_{ij} \geqslant 0$ pour tout i et j. Dans ce cas nous disons que T est **positive**.*

*Une matrice carré positive est **primitive** si il existe un entier $k > 0$ tel que $T^k > 0$.*

DEFooRFQCooQrLPVw

Définition 9.112.
Si T est une matrice $n \times n$ et si $x \in \mathbb{R}^n$, nous notons

$$xT = \sum_{ij} x_i T_{ij} e_j. \tag{9.138}$$

*Et nous disons que $x \in \mathbb{R}^n$ est un **vecteur propre à gauche** pour la valeur propre à gauche $\lambda \in \mathbb{C}$ si $xT = \lambda x$.*

THOooRSPJooMCFeeP

Théorème 9.113 (Perron-Frobenius[363])**.**
Soit une matrice positive et primitive T. Il existe une valeur propre ρ telle que

(1) $\rho > 0$,

(2) La matrice T a des vecteurs propres strictement positifs à gauche et à droite pour la valeur propre ρ.

(3) Pour toute valeur propre $\lambda \neq \rho$ nous avons $\rho > |\lambda|$

(4) Les espaces propres à gauche et à droite de T pour la valeur propre ρ sont de dimension 1.

Démonstration. Nous divisons la preuve en trois parties. La première va tout démontrer pour les vecteurs propres à gauche, la seconde fera la même chose pour les vecteurs propre à droite, et la troisième fera la synthèse.

– À gauche –

Soit $D = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x \neq 0, x \geqslant 0\}$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} r\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \min_j \frac{(xT)_j}{x_j} \end{aligned} \tag{9.139}$$

où la fraction vaut ∞ si $x_j = 0$.

[45] Définition d'une norme : 7.212.

(1) r **est majorée supérieurement** Pour chaque j (y compris ceux pour qui $x_j = 0$) nous avons l'inégalité suivante dans $\mathbb{R}$:

$$x_j r(x) \leqslant (xT)_j. \tag{9.140}$$

En multipliant par e_j et en faisant la somme, $r(x)x \leqslant xT$. Nous posons $u = \sum_i e_i$ et nous prenons le produit scalaire :

$$r(x)x \cdot u \leqslant xT \cdot u = x \cdot Tu. \tag{9.141}$$

EQooBRRSooUtIPXc

En posant $K = \max_j \sum_i T_{ij}$ nous avons $Tu \leqslant Ku$ parce que

$$(Tu)_k = \sum_l T_{kl} \underbrace{u_l}_{=1} = \sum_l T_{kl} \leqslant K = (Ku)_k. \tag{9.142}$$

Pour tout $x \in D$ nous avons $r(x) \leqslant K$. Nous utilisons ça pour continuer (9.141) :

$$r(x)x \cdot u \leqslant xT \cdot u = x \cdot Tu \leqslant Kx \cdot u. \tag{9.143}$$

Vu que $x \geqslant 0$ et $u \geqslant 0$, nous avons $x \cdot u \geqslant 0$ nous nous pouvons simplifier : $r(x) \leqslant K$ pour tout $x \in D$.

(2) **Une minoration** Nous savons que T est une matrice positive et même primitive, de telle sorte que T n'ait aucune colonne nulle. Donc

$$r(u) = \min_j \frac{\sum_i u_i T_{ij}}{u_j} = \min_j \sum_i T_{ij} > 0. \tag{9.144}$$

Nous avons donc

$$r(u) > 0. \tag{9.145}$$

(3) **Définition de ρ** Nous posons

$$\rho = \sup_{x \in D} r(x). \tag{9.146}$$

Vu que que nous avons déjà prouvé nous avons $0 < \rho \leqslant K$.

Notons que si $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons $r(x) = r(\lambda x)$, de telle sorte que

$$\rho = \sup_{\substack{x \in D \\ \|x\| \leqslant 1}} r(x). \tag{9.147}$$

(4) **Un compact** En posant

$$D' = \big(D \cap \overline{B(0,1)}\big) \setminus B(0,\epsilon) \tag{9.148}$$

avec $\epsilon < 1$, nous avons $r(D') = r(D)$ parce que $r(x) = r(\lambda x)$. La partie D' est évidemment bornée.

Vu que D et $\overline{B(0,1)}$ sont fermés, l'intersection est fermée (lemme 7.6(1)). La différence entre un fermé et un ouvert est fermée (lemme 7.7). Donc D' est fermé. Le théorème de Borel-Lebesgue 9.24 nous dit alors que D' est compact.

(5) r **est continue** Sur D', chacune des applications $x \mapsto (xT)_j/x_j$ est continue. Donc le minimum est continu et $r\colon D' \to \mathbb{R}$ est une application continue sur un compact.

(6) v **et ρ** Le théorème de Weierstrass 7.196 nous indique que r est bornée et atteint ses bornes sur D'. Il existe $v \in D'$ tel que $r(v) \geqslant r(x)$ pour tout $x \in D'$. Vu que par définition

$$\rho = \sup_{\substack{x \in D \\ \|x\| \leqslant 1}} r(x) = \sup_{x \in D'} r(x), \tag{9.149}$$

nous avons en fait $r(v) = \rho$.

SPITEMooBKGPooQDQWdK

(7) **Un mini sous-résultat** Nous démontrons un sous-résultat qui sera utilisé quelques fois dans la suite. Si $x \in \mathbb{R}^n$ vérifie $x \geqslant 0$ et $(xT)_j \geqslant \rho x_j$ pour tout j, alors

(7a) $xT = \rho x$, c'est-à-dire que x est un vecteur propre à gauche de T.

(7b) $x > 0$.

Par hypothèse du théorème, il existe $k > 0$ tel que $T^k > 0$. Nous posons $y = xT^k$. Alors, si $xT - \rho x \neq 0$ nous avons

$$yT - \rho y = (xT - \rho x)T^k > 0. \tag{9.150}$$

La dernière inégalité est parce que $xT - \rho x \geqslant 0$ et $T^k > 0$. En développant, cette inégalité signifie que pour tout j,

$$\sum_i y_i T_{ij} > \rho y_j, \tag{9.151}$$

ou encore que $\rho < \frac{\sum_i y_i T_{ij}}{y_j}$ pour tout j. En particulier pour le j qui réalise le minimum, $\rho < r(y)$, ce qui contredit ma maximalité de ρ. Nous en déduisons que $xT - \rho x = 0$.

À partir de là, nous déduisons que $x > 0$. En effet, en appliquant k fois l'égalité $xT = \rho x$, nous avons $xT^k = \rho^k x$. Comme $x \geqslant 0$ et $T^k > 0$, nous avons $xT^k > 0$. Vu que $\rho \neq 0$ nous en déduisons que $x > 0$.

(8) **v et ρ, suite** Nous avons $r(v) = \rho$. En particulier pour tout j nous avons $\rho v_j \leqslant \sum_i v_i T_{ij}$. Et comme $v \in D'$ nous avons aussi $v \geqslant 0$. En vertu de notre sous-résultat, nous déduisons que v est un vecteur propre à gauche de T : $vT = \rho v$, et que $v > 0$.

Cela prouve que T a un vecteur propre à gauche strictement positif.

(9) **Le plus grand** Nous prouvons que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons $\rho > |\lambda|$. Soit une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Vu que le spectre « à gauche » et le spectre « à droite » sont identiques[46], T possède un vecteur propre à gauche : $xT = \lambda x$. Pour chaque j nous avons

$$\sum_i x_i T_{ij} = \lambda x_j, \tag{9.152}$$

et en passant au module, $|\lambda x_j| \leqslant |x_i| T_{ij}$. En posant $y = \sum_i |x_i| e_i$ nous avons $y \geqslant 0$ et

$$|\lambda| y_j \leqslant \sum_i y_i T_{ij}, \tag{9.153}$$

et donc

$$|\lambda| \leqslant \sum_i \frac{y_i T_{ij}}{y_j} \tag{9.154}$$

En passant au minimum sur j, cela donne $|\lambda| \leqslant r(y) \leqslant \rho$.

Nous avons montré que $|\lambda| \leqslant \rho$. Nous prouvons à présent que $|\lambda| \neq \rho$ en supposant que $|\lambda| = \rho$. Toujours en posant $y_i = |x_i|$, nous avons

$$\rho y_j \leqslant \sum_i y_i T_{ij} = (yT)_j. \tag{9.155}$$

Le sous-résultat (7) nous indique qu'alors y est un vecteur propre à gauche de T pour la valeur propre ρ : $yT = \rho u$. En itérant et en déballant, pour chaque j nous avons

$$\sum_i |x_i| T_{ij}^k = \rho^k |x_j|. \tag{9.156}$$

EQooNELKooQtqfZN

En faisant de même à partir de $xT^k = \lambda^k x$, nous trouvons

$$|\sum_i x_i T_{ij}^k| = |\lambda|^k |x_j|. \tag{9.157}$$

EQooHGOFooPwsHAb

Vu que $|\lambda| = \rho$, nous pouvons égaliser les membres de droite de (9.156) et (9.157) :

$$\sum_i |x_i| T_{ij}^k = |\sum_i x_i T_{ij}^k|. \tag{9.158}$$

Le lemme 9.110 nous indique que les x_i sont colinéaires (dans $\mathbb{C}$), c'est-à-dire qu'il existe des réels $s_i \geqslant 0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $x_i = s_i z_0$ pour tout i.

En utilisant ce fait dans l'équation $xT = \lambda x$, nous trouvons $\sum_i x_i T_{ij} = \lambda x_j$ et

$$\sum_i s_i T_{ij} = \lambda s_j. \tag{9.159}$$

EQooUHDZooUDoEyj

Cela prouve que λ est réel et positif parce que l'équation (9.159) est valable pour tout j et qu'il y en a bien un pour lequel $s_j \neq 0$. Le nombre réel positif λ vérifiant $|\lambda| = \rho$, nous déduisons que $\lambda = \rho$.

[46] Lemme 8.87.

(10) **Espace propre de dimension 1** Nous avons déjà la vecteur propre $v : vT = \rho v$. Considérons un second vecteur propre à gauche $y \neq 0 : yT = \rho y$. Supposons que y et v ne sont pas colinéaires et voyons les fonctions

$$\begin{aligned}\eta_i : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ c &\mapsto (v - cy)_i.\end{aligned} \tag{9.160}$$

Pour tout i nous avons $\eta_i(0) = v_i > 0$. Supposons pour fixer les idées qu'au moins un des y_i est positif. Alors pour chaque i, il existe un $c_i > 0$ tel que $v_i - cy_i = 0$. Nous prenons pour valeur de c le plus petit de ceux-là. Nous avons donc

$$\eta = v - cy \geqslant 0, \tag{9.161}$$

alors qu'au moins une des composantes de η est nulle. Et en plus $\eta T = \rho\eta$. Notre sous-résultat préféré nous dit qu'alors $\eta > 0$. Ah tiens, ça c'est une contradiction. Nous en déduisons que v et y sont colinéaires dans $\mathbb{R}^n$.

Nous avons terminé de prouver tout ce que nous devions faire « à gauche ».

À droite

En reprenant exactement les mêmes étapes[47], nous prouvons qu'il existe une valeur propre à droite ρ' telle que

(1) $\rho' > 0$

(2) ρ' a des vecteurs propres strictement positifs à droite.

(3) $\rho' > |\lambda|$ pour toute valeur propre $\lambda \neq \rho'$.

(4) L'espace propre à droite pour la valeur propre ρ' est de dimension 1.

Conclusion

Les nombres réels strictement positifs ρ et ρ' sont des valeurs propres. Si $\rho \neq \rho'$, alors les propriétés de ρ disent que $\rho > \rho'$. De même les propriétés de ρ' disent que $\rho' > \rho$. Bref $\rho = \rho'$.

Le nombre ρ vérifie toutes les propriétés du théorème. □

9.5.8 Limite à gauche et à droite

DEFooIBBQooFEwyMc

Définition 9.114 ([1]).
Soient un espace topologique X et une application $\gamma : I \to X$ où I est un voisinage ouvert de $a \in \mathbb{R}$.

*L'élément $b \in E$ est une **limite à gauche** de γ quand $t \to a$ lorsque b est une limite de la restriction de γ à $]-\infty, a[$. Dans ce cas nous parlons de limite lorsque t tend vers a^-.*

*L'élément $b \in E$ est une **limite à droite** de γ quand $t \to a$ lorsque b est une limite de la restriction de γ à $]a, \infty[$. Dans ce cas nous parlons de limite lorsque t tend vers a^+.*

Lorsqu'il y a unicité de la limite, nous notons les limites à gauche et à droite par

$$\lim_{t\to a^-} \gamma(t) \quad et \quad \lim_{t\to a^+} \gamma(t) \tag{9.162}$$

PROPooGUNLooSQrJKg

Proposition 9.115 ([1]).
Soient un espace topologique X et une application $\gamma : I \to X$ où I est un voisinage ouvert de $a \in \mathbb{R}$. L'élément $b \in E$ est une limite à gauche[48] et à droite de γ quand $t \to a$ si et seulement si il est une limite.

Dans le cas où la limite est unique[49], nous pouvons dire que

$$\begin{cases} \lim_{t\to a^+} \gamma(t) = b & \text{(9.163a)}\\ \lim_{t\to a^-} \gamma(t) = b & \text{(9.163b)}\end{cases}$$

si et seulement si[50]

$$\lim_{t\to a} \gamma(t) = b. \tag{9.164}$$

[47] Je n'ai pas vérifié ; écrivez-moi si cela pose problème.
[48] Définition 9.114.
[49] Par exemple lorsque X est séparé, voir la proposition 7.138.
[50] Cet énoncé doit être un tout petit peu modifié si vous utilisez la limite pointée au lieu de la limite épointée.

Démonstration. Nous nommons $I^+ = I \cap]a, \infty[$ et $I^- = I \cap]-\infty, a[$. Nous supposons que γ admet b comme limite à gauche et à droite. Soit un voisinage U de b dans X. La limite à gauche donne l'existence de $\delta_1 > 0$ tel que

$$\gamma\big(B(a, \delta_1) \cap I^-\big) \subset U, \tag{9.165}$$

EQooEGOHooHauKRX

et la limite à droite donne un $\delta_2 > 0$ tel que

$$\gamma\big(B(a, \delta_2) \cap I^+\big) \subset U. \tag{9.166}$$

EQooXTMBooYBGxci

Notez que nous avons choisi δ_1 et δ_2 de telle sorte à ce que $B(a, \delta_1)$ et $B(a, \delta_2)$ soient contenus dans I.

Nous considérons $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, et nous prenons $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$. Il y a deux possibilités : $x > a$ et $x < a$. Si $x > a$, alors nous avons $x \in B(a, \delta) \cap I^+ \subset B(a, \delta_1) \cap I^+$, de telle sorte que $\gamma(x) \in U$ par (9.166). Si $x < a$, alors nous avons également $\gamma(x) \in U$, en utilisant (9.165). □

9.5.9 Continuité de la racine carrée, invitation à la topologie induite

Pourquoi nous intéresser particulièrement à la fonction racine carrée ? Parce qu'elle a une sale condition d'existence : son domaine de définition n'est pas ouvert. Or dans tous les théorèmes de continuité d'approche topologique que nous avons vus, nous avons donné des conditions *pour tout ouvert*. Nous nous attendons donc à avoir des difficultés avec la continuité de $\sqrt{x}$ en zéro.

Prenons I, n'importe quel intervalle ouvert dans $\mathbb{R}^+$, et voyons que la fonction[51]

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \tag{9.167}$$

est continue sur I. Remarquons déjà que si I est un ouvert dans $\mathbb{R}^+$, il ne peut pas contenir zéro. Avant de nous lancer dans notre propos, nous prouvons un lemme qui fera tout le travail[52].

Lemme 9.116.
Soit $\mathcal{O}$, un ouvert dans $\mathbb{R}^+$. Alors $\mathcal{O}^2 = \{x^2$ tel que $x \in \mathcal{O}\}$ est également ouvert.

Démonstration. Un élément de $\mathcal{O}^2$ s'écrit sous la forme x^2 pour un certain $x \in \mathcal{O}$. Le but est de trouver un ouvert autour de x^2 qui soit contenu dans $\mathcal{O}^2$. Étant donné que $\mathcal{O}$ est ouvert, on a une boule centrée en x contenue dans $\mathcal{O}$. Nous appelons δ le rayon de cette boule :

$$B(x, \delta) \subset \mathcal{O}.$$

Étant donné que cet ensemble est connexe, nous savons par le lemme 7.273 que $B(x, \delta)^2$ est également connexe (parce que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue). Son plus grand élément est $(x+\delta)^2 = x^2 + \delta^2 + 2x\delta > x^2 + \delta^2$, et son plus petit élément est $(x-\delta)^2 = x^2 + \delta^2 - 2x\delta$.

Ce qui serait pas mal, c'est que ces deux bornes entourent x^2 ; de cette façon elles définiraient un ouvert autour de x^2 qui soit dans $\mathcal{O}^2$. Hélas, c'est pas gagné que $x^2 + \delta^2 - 2x\delta$ soit plus petit que x^2.

Heureusement, en fait c'est vrai, parce que d'une part, comme $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^+$, on a $x > 0$, et d'autre part, pour que $\mathcal{O}$ soit positif, il faut que $\delta < x$. Donc on a évidemment $\delta < 2x$, et donc

$$x^2 + \delta^2 - 2x\delta = x^2 + \delta \underbrace{(\delta - 2x)}_{<0} < x^2.$$

Et nous en avons fini : l'ensemble

$$B(x, \delta)^2 =]x^2 + \delta^2 - 2x\delta, x^2 + \delta^2 + 2x\delta[\subset \mathcal{O}^2$$

est un intervalle qui contient x^2, et donc qui contient une boule ouverte centrée en x^2. □

Maintenant nous pouvons nous attaquer à la continuité de la racine carrée sur tout ouvert positif en utilisant le théorème 9.94.

Proposition 9.117.
L'application

$$\begin{aligned} f\colon [0, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \tag{9.168}$$

est continue.

[51] La racine carrée est définie en 9.100.

[52] C'est toujours ingrat d'être un lemme : on fait tout le travail et c'est toujours le théorème qui est nommé.

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$. Il existe un $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset \mathcal{O}$. Nous allons restreindre plus fortement r plus tard. Soit $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$; nous allons prouver que $B(x, \epsilon) \cap [0, \infty[\subset f^{-1}(\mathcal{O})$ pour un ϵ assez petit. Le théorème 7.8 dira alors que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert.

Nous notons $y = f(x)$. Par croissance de la fonction racine carrée, nous avons

$$f\Big(B(x,\epsilon)\Big) =]\sqrt{x-\epsilon}, \sqrt{x+\epsilon}[. \tag{9.169}$$

Pour avoir $f\Big(B(x,\epsilon)\Big) \subset \mathcal{O}$, nous devons avoir

$$\begin{cases} \sqrt{x-\epsilon} > y - r & \text{(9.170a)} \\ \sqrt{x+\epsilon} < y + r. & \text{(9.170b)} \end{cases}$$

La première condition donne $x - \epsilon > (y - r)^2$. En développant le carré et en tenant compte de $y^2 = x$ nous demandons

$$\epsilon < 2ry - r^2. \tag{9.171}$$

Nos choix sont donc de demander $0 < r < 2y$, et ensuite $0 < \epsilon < 2ry - r^2$. Le premier est fait pour avoir $2ry - r^2 > 0$. □

9.5.10 Second degré

Nous résolvons à présent le polynôme du second degré.

PROPooEZIKooKjJroH

Proposition 9.118 ([364]).
Soit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx + c \end{aligned} \tag{9.172}$$

avec $a \neq 0$. Nous notons $\Delta = b^2 - 4ac$.

ITEMooMKUSooWwNTba

(1) Nous avons la formule

$$f(x) = a\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \tag{9.173}$$

EQooFKPOooAbIhCx

ITEMooHQTBooZuaPAs

(2) Si $a > 0$, alors f a un minimum global en $x_m = -b/2a$.

ITEMooQMXVooWsqiXz

(3) Si $a < 0$, alors f a un maximum global en $x_M = -b/2a$.

ITEMooMAMHooNWZVQI

(4) Si $\Delta < 0$ alors f ne possède pas de racine réelle.

ITEMooKUUJooTsIHhI

(5) Si $\Delta = 0$, alors f possède une unique racine $x_0 = -b/2a$.

ITEMooQZGFooEGhMkX

(6) Si $\Delta > 0$ alors f possède exactement deux racines distinctes données par

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{9.174}$$

EQooGHDPooVkqINr

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** C'est un calcul immédiat.

(2) **Pour (2)** Nous partons de la formule du point (1). Puisque $c - \frac{b^2}{4a}$ est constant, minimiser f revient à minimiser $x \mapsto \big(x + \frac{b}{2a}\big)^2$. Comme cette dernière fonction est toujours positive, elle a un minimum global là où elle est nulle, c'est-à-dire en $x_m = -b/2a$.

(3) **Pour (3)** Idem que pour (2).

Pour la suite nous effectuons quelques manipulations à partir de (9.173). Nous avons $f(x) = 0$ lorsque

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{9.175}$$

EQooRHNGooVsKRNt

(1) **Pour (4)** À gauche de (9.175) nous avons un nombre toujours positif ou nul. À droite, $4a^2 > 0$. Donc si $b^2 - 4ac < 0$, l'égalité est impossible et il n'y a pas de x vérifiant $f(x) = 0$.

(2) **Pour (5)** Si $b^2 - 4ac = 0$, alors la condition (9.175) devient

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0, \tag{9.176}$$

et donc $x = -b/2a$ est l'unique solution.

(3) **Pour (6)** Si $b^2 - 4ac > 0$, nous pouvons prendre la racine carré[53] des deux côtés de (9.175), et la condition devient

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \tag{9.177}$$

ce qui donne

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{9.178}$$

Ce sont là les deux seuls candidats pour vérifier $f(x) = 0$.

Un calcul direct montre que

$$f\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0 \tag{9.179}$$

et que

$$f\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0. \tag{9.180}$$

Donc ce sont bien des racines de f et ce sont les seules. Notez aussi qu'elles sont distinctes parce que $\Delta \neq 0$.

□

[53] Définition 9.100.

Chapitre 10

Espaces vectoriels normés

Plusieurs notions sur les espaces vectoriels normés (dont la définition 7.212) ont déjà été abordées dans la section 7.16. Voir aussi le thème 25.

10.0.1 Norme, produit scalaire et Cauchy-Schwarz (cas réel)

Dans la suite, le produit scalaire de x et y pourra être noté indifféremment par $x \cdot y$, $\langle x, y\rangle$ ou $b(x, y)$ lorsque une forme bilinéaire est donnée.

Nous rappelons au passage que les espaces vectoriels réels sont susceptibles de recevoir un produit scalaire, alors que les espaces vectoriels complexes sont susceptibles de recevoir un produit hermitien. Bien que de nombreux résultats soient identiques ou très similaires, ces deux notions sont à ne pas confondre.

Nous commençons par prouver qu'un produit scalaire étant donné, nous pouvons définir une norme par la formule $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Pour cela nous aurons besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

ThoAYfEHG

Théorème 10.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas réel)**.**
Soit un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire[1] *$(x, y) \mapsto x \cdot y$. Nous posons*[2]

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}. \tag{10.1}$$

Alors :

(1) Il y a l'inégalité

EQooZDSHooWPcryG

$$|x \cdot y| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{10.2}$$

pour tout $x, y \in E$.

(2) Il y a égalité $|x \cdot y| = \|x\|\|y\|$. si et seulement si x et y sont multiples l'un de l'autre.

(3) L'opération $\|.\|$ est une norme[3]*.*

(4) Cette norme vérifie l'identité du parallélogramme :

EqYCLtWfJ

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{10.3}$$

Démonstration. Étant donné que les deux membres de l'inéquation sont positifs, nous allons travailler en passant au carré afin d'éviter les racines carrés dans le second membre.

Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto \|x + ty\|, \end{aligned} \tag{10.4}$$

et nous calculons un peu :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|x + ty\|^2 && \text{(10.5a)}\\ &= (x + ty) \cdot (x + ty) && \text{(10.5b)}\\ &= x \cdot x + x \cdot ty + ty \cdot x + t^2 y \cdot y && \text{(10.5c)}\\ &= \|y\|^2 t^2 + 2(x \cdot y)t + \|x\|^2. && \text{(10.5d)} \end{aligned}$$

[1] Produit scalaire, définition 8.163.

[2] Attention à la notation : pour l'instant nous ne savons pas que c'est une norme ; c'est justement un des points de ce théorème. Par ailleurs, la racine carrée est définie par 9.100.

[3] Définition 7.212.

Nous avons utilisé la bilinéarité (pour sortir les t) et la symétrique du produit scalaire.

Nous voyons que P est un polynôme du second degré en t à valeurs dans $[0,\infty[$. Par la proposition 9.118 nous en déduisons que le fameux b^2-4ac doit être négatif ou nul. Nous avons donc

$$\Delta = 4(x\cdot y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0, \tag{10.6}$$

ce qui donne immédiatement

$$(x\cdot y)^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2. \tag{10.7}$$

En ce qui concerne le cas d'égalité, si nous avons $x\cdot y = \|x\|\|y\|$, alors le discriminant Δ ci-dessus est nul et le polynôme P admet une racine double t_0. Pour cette valeur nous avons

$$P(t_0) = |x+t_0y| = 0, \tag{10.8}$$

ce qui implique $x+t_0y=0$ et donc que x et y sont liés.

(1) **C'est une norme** Nous allons nous contenter de prouver l'inégalité triangulaire. Si $x,y\in E$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2x\cdot y} && \text{(10.9a)}\\
&\leqslant \sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2|x\cdot y|} && \text{(10.9b)}\\
&\leqslant \sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|} && \text{(10.9c)}\\
&= \sqrt{\big(\|x\|+\|y\|\big)^2} && \text{(10.9d)}\\
&= \|x\|+\|y\|. && \text{(10.9e)}
\end{aligned}$$

SUBEQooRISGooRUqRzj

SUBEQooPQPYooBRRRzK

Justifications.

- Pour (10.9b). La fonction racine carrée est croissante, lemme 9.102.
- Pour (10.9c). Inégalité de Cauchy-Schwarz 10.1.

(2) **Inégalité du parallélogramme** Cette assertion est seulement un calcul :

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2+\|x+y\|^2 &= (x-y)\cdot(x-y)+(x+y)\cdot(x+y)\\
&= x\cdot x - x\cdot y - y\cdot x + y\cdot y\\
&\quad + x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y\\
&= 2x\cdot x + 2y\cdot y\\
&= 2\|x\|^2+2\|y\|^2.
\end{aligned} \tag{10.10}$$

□

Toute norme dérivant d'un produit scalaire vérifie l'identité du parallélogramme. Ce résultat sert souvent à prouver que des normes ne dérivent pas d'un produit scalaire. C'est le cas de la norme $N(x,y)=|x|+|y|$ du lemme 10.25 ainsi que du théorème de Weinersmith 27.57.

PROPooVSVMooZrqxdc

Proposition 10.2.
La norme euclidienne[4] *a les propriétés suivantes :*

(1) Pour tout vecteur x et réel λ,

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|. \tag{10.11}$$

(2) Pour tout vecteurs x et y,

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\| \tag{10.12}$$

ITEMooXXDMooDMVlak

(3) Si $\|x-y\|\leqslant\lambda$, alors $\|x\|\leqslant\|y\|+\lambda$.

[4] Un espace euclidien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, définition 8.167. Ici nous considérons la norme associée par le théorème 10.1.

Démonstration. Un produit scalaire est en particulier une forme bilinéaire, et vérifie les conditions de la définition 8.120.

Pour le premier point nous avons

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x) \cdot (\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 x \cdot x} = |\lambda| \|x\|. \tag{10.13}$$

Nous avons utilisé la formule du lemme 9.101(2).

Pour le second point, nous avons les inégalités suivantes :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y \tag{10.14a}$$
$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|x \cdot y| \tag{10.14b}$$
$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 \tag{10.14c}$$

Nous avons utilisé d'abord la majoration $|x| \geqslant x$ qui est évidente pour tout nombre x ; et ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz 10.1.

Pour (3), nous avons

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\| \leqslant \lambda + \|y\|. \tag{10.15}$$

□

DEFooJAGXooMgaUsR

Définition 10.3 (Norme sur $\mathbb{R}^n$)**.**
Sauf mention du contraire, nous considérons toujours sur $\mathbb{R}^n$ la norme (et donc la topologie) associée au produit scalaire de la proposition 8.168 par le théorème 10.1, c'est-à-dire

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{10.16}$$

PropHIWjdMX

Proposition 10.4 ([365])**.**
Soit b une forme bilinéaire et symétrique. Alors

(1) $\ker(b) \subset C(b)$ *(cône d'isotropie, définition 8.139)*

(2) si b est positive alors $\ker(b) = C(b)$.

Démonstration. En deux parties.

(1) Si $z \in \ker(b)$ alors pour tout $y \in E$ nous avons $b(z,y) = 0$. En particulier pour $y = z$ nous avons $b(z,z) = 0$ et donc $z \in C(b)$.

(2) Soit b positive et $x \in C(b)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (proposition 10.1) nous avons

$$|b(x,y)| \leqslant \sqrt{b(x,x)b(y,y)} = 0. \tag{10.17}$$

Donc pour tout y nous avons $b(x,y) = 0$.

□

LEMooEZFIooXyYybe

Lemme 10.5.
Soit un espace vectoriel euclidien[5] *E. Si $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une base orthonormée de E et si $f : E \to E$ est un endomorphisme, alors*

$$\det(f) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \langle e_{\sigma(i)}, f(e_i) \rangle. \tag{10.18}$$

EQooQAZLooZutFUz

Démonstration. Nous utilisons la définition 8.14 du déterminant d'un endomorphisme $\det(f) = \det_B\big(f(B)\big)$ en prenant la liste des vecteurs $\{e_i\}$ comme B. En l'occurrence, le i^{e} vecteur de la famille $f(B)$ est $f(e_i)$.

Puisque la base est orthonormée, nous avons $e_k^*(v) = \langle e_k, v \rangle$ et donc aussi

$$e^*_{\sigma(i)}(v_i) = \langle e^*_{\sigma(i)}, f(e_i) \rangle. \tag{10.19}$$

□

Et si vous avez tout suivi, vous aurez remarqué que les produits scalaires impliqués dans la formule (10.18) sont les éléments de la matrice de f dans la base $\{e_i\}$ parce que $\langle e_i, f(e_j) \rangle$ est la composante i de l'image de e_j par f. Si la matrice est composée en mettant en colonne les images des vecteurs de base, le compte est bon.

[5] C'est-à-dire qu'il possède un produit scalaire, voir la définition 8.167.

10.0.2 Topologie

PROPooEKTIooEKmWfn

Proposition-Définition 10.6 ([1]).
Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, alors

$$\begin{aligned} d\colon E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned} \tag{10.20}$$

est une distance[6].

*La **topologie** associée à la norme $\|.\|$ est la topologie métrique de d*[7].

PROPooWIGWooXPyDjp

Proposition 10.7 ([1]).
Soit un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie. Soit un sous-espace vectoriel $F \subset E$. Nous posons

$$\begin{aligned} n\colon F &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|. \end{aligned} \tag{10.21}$$

Alors

(1) *(F, n) est un espace vectoriel normé.*

(2) *La topologie métrique*[8] *de (F, n) est la topologie induite de E.*

Démonstration. L'application n est une norme parce que toutes les propriétés de la définition 7.212 passent directement de $\|.\|$ à n. Pour le reste, remarquons d'abord que

$$B_F(x, r) = B_E(x, r) \cap F. \tag{10.22}$$

Nous notons τ_i la topologie induite de E vers F, et τ_n la topologie sur F pour la norme n. Nous allons prouver que $\tau_i = \tau_n$.

(1) $\underline{\tau_i \subset \tau_n}$ Soit $A \in \tau_i$. Pour prouver que $A \in \tau_n$, nous prenons $x \in A$ et nous prouvons qu'il existe $r > 0$ tel que $B_F(x, r) \subset A$. Par définition de la topologie induite, il existe un ouvert A' de E tel que $A = F \cap A'$. Vu que A' est ouvert pour la topologie métrique, il existe $r > 0$ tel que $B_E(x, r) \subset A'$. Pour ce r nous avons

$$B_F(x, r) = B_E(x, r) \cap F \subset A' \cap F = A. \tag{10.23}$$

(2) $\underline{\tau_n \subset \tau_i}$ Soient $A \in \tau_n$ et $x \in A$. Il existe $r > 0$ tel que $x \in B_F(x, r) \subset A$, et donc aussi

$$x \in B_E(x, r) \cap F \in \tau_i. \tag{10.24}$$

□

10.0.3 Le tore

10.0.3.1 Tore sur $\mathbb{R}$

Pour rappel, nous avons la relation d'équivalence $\sim$ définie sur $\mathbb{R}^n$ en 1.598 : $a \sim b$ lorsque $a_i - b_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i.

Pour définir la distance entre a et b sur le tore, nous allons d'abord construire une application $x \mapsto \tau_a(x)$ qui aura pour effet de « rapprocher » x au maximum de a tout en restant dans $[x]$. Ensuite, ce sera la distance entre a et x.

LEMooJRQZooLCXOWQ

Lemme 10.8 ([1]).
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons

ITEMooBDAQooSYWkMX (1) $\overline{B(a, 1/2)} \cap [b] \neq \varnothing$

ITEMooRSAKooLzvllq (2) *Si $a - 1/2 \in [b]$, alors $\overline{B(a, 1/2)} \cap [b] = \{a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\}$.*

ITEMooANPJooAdrPTK (3) *Si $a - 1/2 \notin [b]$, alors $\overline{B(a, 1/2)} \cap [b]$ contient un unique élément et il est dans $B(a, 1/2)$.*

Démonstration. Point par point.

[6] Définition 7.139.
[7] Définition 7.142.
[8] Voir la définition 7.142.

(1) **Pour (1)** Nous posons

$$b_{max} = \max\{x \in [b] \text{ tel que } x \leqslant a - 1/2\} \tag{10.25a}$$
$$b_{min} = \min\{x \in [b] \text{ tel que } x \geqslant a + 1/2\} \tag{10.25b}$$

Si $b_{max} = a - 1/2$ alors on est bon. Si au contraire $b_{max} \neq a - 1/2$ alors $b_{max} < a - 1/2$. Dans ce cas $b_{max} + 1 > a - 1/2$ (sinon ça aurait contredit la maximalité de b_{max}). Mais

$$b_{max} + 1 < a - 1/2 + 1 = a + 1/2. \tag{10.26}$$

Donc $b_{max} + 1 \in B(a, 1/2)$.

(2) **Pour (2)** Nous supposons que $a-1/2 \in [b]$. Dans ce cas nous avons aussi $a+1/2 \in [b]$. Si $x \in B(a, 1/2)$ alors

$$|x - (a - 1/2)| \leqslant |x - a| + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \tag{10.27}$$

Or il n'y a pas deux éléments dans $[b]$ ayant une distance plus petite que 1. Donc x n'est pas dans $[b]$.

(3) **Pour (3)** Si $a - 1/2 \notin [b]$. Vu que $[b] \cap \overline{B(a, 1/2)}$ est non vide, et que ni $a - 1/2$ ni $a + 1/2$ ne sont dans $[b]$, nous en déduisons que $[b] \cap \overline{B(a, 1/2)} \subset B(a, 1/2)$. Dans ce cas l'intersection contient un seul élément parce que si $x, y \in B(a, 1/2)$ nous avons $|x - y| < 1$.

□

Pour $a \in \mathbb{R}$ nous considérons les applications

$$\begin{aligned} d_a \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ b &\mapsto \min_{x \in [b]} |a - x|, \end{aligned} \tag{10.28}$$

et

$$\begin{aligned} \tau_a \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \min\Big([x] \cap B(a, 1/2)\Big). \end{aligned} \tag{10.29}$$

LEMooRMLSooNOKXkQ

Lemme 10.9 ([1])**.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons

ITEMooHRISooLsqKqd

(1) Si $a - 1/2 \in [b]$, alors $d_a(b) = \frac{1}{2}$.

ITEMooXMNYooKQYaee

(2) Si $a - 1/2 \notin [b]$, alors $d_a(b) < \frac{1}{2}$.

ITEMooMUCXooBWrRMz

(3) $d_a(b) = |a - \tau_a(b)|$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Si $a - 1/2 \in [b]$, nous savons par le lemme 10.8 que $\overline{B(a, 1/2)} \cap [b] = \{a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\}$. Donc

$$d_a(b) = \min_{x \in [b]} |a - x| \leqslant |a - (a - \frac{1}{2})| = \frac{1}{2}. \tag{10.30}$$

Mais en même temps, $[b] \cap B(0, \frac{1}{2})$ est vide, donc pour tout $x \in [b]$ nous avons $|a - x| \geqslant \frac{1}{2}$. Nous en déduisons que $d_a(b) = \frac{1}{2}$.

(2) **Pour (2)** Si $a - \frac{1}{2} \notin [b]$, alors l'ensemble $\overline{B(a, \frac{1}{2})} \cap [b]$ contient un seul élément x_0, qui sera dans $B(a, \frac{1}{2})$. Donc

$$d_a(b) = \min_{x \in [b]} |a - x| \leqslant |a - x_0| < \frac{1}{2}. \tag{10.31}$$

(3) **Pour (3)** Il y a deux possibilités : $a - \frac{1}{2}$ appartient à $[b]$ ou non.

Si $a - \frac{1}{2} \in [b]$, alors nous avons déjà vu que $\tau_a(b) = a - \frac{1}{2}$ et $d_a(b) = \frac{1}{2}$. Dans ce cas nous avons bien

$$|a - \tau_a(b)| = |a - (a - 1/2)| = 1/2 = d_a(b). \tag{10.32}$$

Si par contre $a - \frac{1}{2} \notin [b]$, alors nous notons x_0 l'unique élément de $[b] \cap B(a, \frac{1}{2})$. Notez que $x_0 = \tau_a(b)$. Nous avons $d_a(b) \leqslant |a - x_0|$. Mais nous ne pouvons pas avoir $d_a(b) < |a - x_0|$ parce que ça voudrait dire qu'il existe un élément $x_1 \in B(a, 1/2) \cap [b]$ autre que x_0, ce qui n'est pas possible. Donc $d_a(b) = |a - x_0|$.

□
LEMooAXVLooCmtsPb

Lemme 10.10 ([1]).
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ nous avons

ITEMooTELUooJoLYEF
(1) $\tau_{a+k}(b) = \tau_a(b) + k$,

ITEMooUWLDooLsDhmI
(2) $\tau_a(b) = \tau_a(b+k)$.

Démonstration. Vu que $\tau_a(b) \in [b]$, il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau_a(b) = b + l$.

(1) $a + k - \frac{1}{2} \in [b]$ Dans ce cas, $\tau_{a+k}(b) = a + k - \frac{1}{2}$. Mais dans ce cas nous avons aussi $a - \frac{1}{2} \in [b]$ et donc aussi $\tau_a(b) = a - \frac{1}{2}$. Au final,

$$\tau_{a+k}(b) = a + k - \frac{1}{2} = \tau_a(b) + k. \tag{10.33}$$

(2) **Si $a + k - 1/2$ n'est pas dans $[b]$** Nous avons alors que $\tau_{a+k}(b)$ est l'unique élément de $[b] \cap B(a + k, \frac{1}{2})$. Dans ce cas, $a - \frac{1}{2}$ n'est pas non plus dans $[b]$, et donc $\tau_a(b)$ est l'unique élément de $[b] \cap B(a, \frac{1}{2})$. Donc nous avons aussi $\tau_a(b) + k \in [b] + B(a + k, \frac{1}{2})$, et comme $[b] \cap B(a + k, 1/2)$ contient un seul élément qui est $\tau_{a+k}(b)$, nous avons $\tau_a(b) + k = \tau_{a+k}(b)$.

Pour voir que (2) est vraie, il suffit de remarquer que $[b] = [b + k]$. □
LEMooSCXBooVXlqpp

Lemme 10.11 ([1]).
Les applications τ_a et d_a sont assez bien adaptées aux classes :

ITEMooLYTMooUdTFWw
(1) $d_a(b) = d_b(a)$,

ITEMooEIGSooQXMNYq
(2) *Si $a' \in [a]$, alors* $d_a(b) = d_{a'}(b)$.

ITEMooVLHWooVGQSKU
(3) *Si $b' \in [b]$, alors* $d_a(b) = d_a(b')$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau_a(b) = b + k$. Pour ce k, nous avons $d_a(b) = |a - b - k|$. Nous avons :

$$\tau_b(a) = \min_{x \in [a]} |b - x| \leqslant |b - (a - k)| = |a - b - k| = \tau_a(b). \tag{10.34}$$

Le même type raisonnement montre que $\tau_a(b) \leqslant \tau_b(a)$.

(2) **Pour (2)** Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a' = a + k$. Un petit calcul utilisant les lemmes précédents :

$$\begin{aligned}
d_{a'}(b) &= d_{a+k}(b) && && \text{(10.35a)}\\
&= |a + k - \tau_{a+k}(b)| && \text{lem. 10.9(3)} && \text{(10.35b)}\\
&= |a + k - \tau_a(b) - k| && \text{lem. 10.10(1)} && \text{(10.35c)}\\
&= |a - \tau_a(b)| && && \text{(10.35d)}\\
&= d_a(b). && && \text{(10.35e)}
\end{aligned}$$

(3) **Pour (3)** Si $b' \in [b]$, alors en utilisant le lemme 10.10(2),

$$d_a(b') = |a - \tau_a(b')| = |a - \tau_a(b)| = d_a(b) \tag{10.36}$$

□
THOooLUOHooCBuOPX

Théorème 10.12 ([1]).
La formule

$$d\big([a], [b]\big) = d_a(b) \tag{10.37}$$

(1) est bien définie.

(2) est une distance sur $\mathbb{R}/\sim$.

Démonstration. Le fait que la formule soit correcte est l'indépendance des classes du lemme 10.11(2)(3). Il nous reste à montrer que c'est une distance en vérifiant les propriétés de la définition 7.139. Commençons par les points faciles.

(1) Nous avons $d\big([a],[b]\big)=d\big([b],[a]\big)$ par le lemme 10.11(1).

(2) Nous avons $d\big([a],[b]\big)=|\tau_a(b)-a|\geqslant 0$.

(3) Si $d\big([a],[b]\big)=0$, alors $|\tau_a(b)-a|=0$. Mais cela signifie que $\tau_a(b)=a$. Et comme $\tau_a(b)\in[b]$, nous avons $a\in[b]$ et donc $[a]=[b]$.

Et maintenant nous faisons l'inégalité triangulaire.

L'astuce est de noter que $\tau_a(x)\in[x]$, de telle sorte que $[\tau_a(x)]=[x]$ et que

$$d\big([x],[b]\big)=d\big([\tau_a(x)],[b]\big). \tag{10.38}$$

Nous avons alors ceci pour l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
d\big([a],[x]\big)+d\big([x],[b]\big)&=|\tau_a(x)-a|+|\tau_a(x)-\tau_{\tau_a(x)}(b)| && && \text{(10.39a)}\\
&\geqslant|\tau_{\tau_a(x)}-a| && \text{ineg trig dans } \mathbb{R} && \text{(10.39b)}\\
&\geqslant\min_{y\in[b]}|y-a| && && \text{(10.39c)}\\
&=d_a(b) && && \text{(10.39d)}\\
&=d\big([a],[b]\big) && && \text{(10.39e)}
\end{aligned}$$

□

10.0.4 Le tore

SUBSECooZVJPooCBqBuk

Pour $a\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$ nous posons

$$Q(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x_i-a_i|<r,\ i=1,2\}. \tag{10.40}$$

Et en nous servant de la fonction τ déjà définie dans le cas réel, nous posons

$$\begin{aligned}
\tau_a\colon\mathbb{R}^2&\to\overline{Q(a,1/2)}\\
x&\mapsto\big(\tau_{a_1}(x_1),\tau_{a_2}(x_2)\big).
\end{aligned} \tag{10.41}$$

LEMooWYCAooYVhcoD

Lemme 10.13 ([1])**.**
Pour $a,b\in\mathbb{R}^2$ nous avons

$$\|\tau_a(b)-a\|=\min_{x\in[b]}\|a-x\|. \tag{10.42}$$

Démonstration. Soit $y\in[b]$, c'est-à-dire $y_1\in[b_1]$ et $y_2\in[b_2]$. Donc nous avons $|a_i-y-2|\geqslant|a_1-\tau_{a_1}(y_1)|$ et donc

$$\|a-y\|=\sqrt{(a_1-y_1)^2+(a_2-y_2)^2}\geqslant\sqrt{\big(a_1-\tau_{a_1}(y_1)\big)^2+\big(a_2-\tau_{a_2}(y_2)\big)^2}=\|a-\tau_a(y)\|. \tag{10.43}$$

□

LEMooTDKOooXBbqzK

Lemme 10.14 ([1])**.**
Pour $a,b\in\mathbb{R}^2$ et $k\in\mathbb{Z}^2$ nous avons

$$\tau_{a+k}(b)=\tau_a(b)+k. \tag{10.44}$$

Nous avons aussi $\tau_a(b+l)=\tau_a(b)$ pour tout $a,b\in\mathbb{R}^2$ et $l\in\mathbb{Z}^2$.

Démonstration. Il s'agit d'un calcul tenant compte de la propriété correspondante dans $\mathbb{R}$ (lemme (1)(1)) :

$$\begin{aligned}
\tau_{a+k}(b)&=\big(\tau_{a_1+k_1}(b_1),\tau_{a_2+k_2}(b_2)\big) && \text{(10.45a)}\\
&=\big(\tau_{a_1}(b_1)+k_1,\tau_{a_2}(b_2)+k_2\big) && \text{(10.45b)}\\
&=\big(\tau_{a_1}(b_1),\tau_{a_2}(b_2)\big)+(k_1,k_2). && \text{(10.45c)}
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la second égalité, c'est juste le fait que $[b+l]=[b]$. □

PROPooUVTXooYxwdtb

Proposition 10.15 ([1])**.**
La formule

$$d\big([a],[b]\big)=\|\tau_a(b)-a\| \tag{10.46}$$

est bien définie et est une distance sur $\mathbb{R}^2/\sim$.

Démonstration. Pour montrer que la formule est bien définie, nous utilisons les deux points du lemme 10.14. Si $a, b \in \mathbb{R}^2$ et si $k, l \in \mathbb{Z}^2$ nous avons

$$\|\tau_{a+k}(b+l) - (a+k)\| = \|\tau_a(b+l) + k - a - k\| = \|\tau_a(b) - a\|. \tag{10.47}$$

Nous montrons maintenant l'inégalité triangulaire[9]. Comme avant, nous avons

$$d\big([x],[b]\big) = d\big([\tau_a(x)],[b]\big) = \|\tau_a(x) - \tau_{\tau_a(x)}(b)\|, \tag{10.48}$$

et donc

$$\begin{aligned} d\big([a],[x]\big) + d\big([x],[b]\big) &= \|\tau_a(x) - a\| + \|\tau_a(x) - \tau_{\tau_a(x)}(b)\| && (10.49a)\\ &\geqslant \|\tau_{\tau_a(x)}(b) - a\| && (10.49b)\\ &\geqslant \min_{y\in[b]} \|y - a\| && (10.49c)\\ &= d\big([b],[a]\big). && (10.49d) \end{aligned}$$

□

LEMooDKGCooBIPJqn

Lemme 10.16 ([1])**.**
Nous considérons la projection $p\colon \mathbb{R}^2 \to T$. Si $\alpha \in T$ nous avons

$$p^{-1}\big(B(\alpha, r)\big) = \bigcup_{s\in\alpha} B(s, r). \tag{10.50}$$

Démonstration. En deux inclusions.

(1) **Première inclusion** Soit $x \in p^{-1}\big(B(\alpha, r)\big)$. La condition $p(x) \in B(\alpha, r)$ signifie $d\big(p(x), \alpha\big) < r$. En choisissant $a \in \alpha$ nous avons

$$r > d\big(p(x), \alpha\big) = d\big([x],[a]\big) = \|\tau_x(a) - x\|. \tag{10.51}$$

Donc $x \in B\big(\tau_x(a), r\big)$. Mais $\tau_x(a) \in \alpha$, donc

$$x \in B\big(\tau_x(a), r\big) \subset \bigcup_{s\in\alpha} B(s, r). \tag{10.52}$$

(2) **L'autre inclusion** Soient $s \in \alpha$, $r > 0$ et $x \in B(s, r)$. Nous allons prouver que $p(x) \in B(\alpha, r)$. Soit $a \in \alpha$. En tenant compte du fait que $s, a \in \alpha$ nous avons $\tau_x(a) = \tau_x(s)$ et le calcul suivant :Nous avons

$$\begin{aligned} d\big(p(x), \alpha\big) &= d\big([x],[a]\big) && && (10.53a)\\ &= \|\tau_x(a) - x\| && && (10.53b)\\ &= \|\tau_x(s) - x\| && \text{pcq. } \tau_x(a) = \tau_x(s) && (10.53c)\\ &= \min_{y\in[s]} \|x - y\| && \text{lem. 10.13} && (10.53d)\\ &\leqslant \|x - s\| && && (10.53e)\\ &< r && && (10.53f) \end{aligned}$$

Cela prouve que $p(x) \in B(\alpha, r)$.

□

LEMooQQZMooMpdZTU

Lemme 10.17 ([1])**.**
La projection canonique $p\colon \mathbb{R}^2 \to (T, \tau_d)$ est continue.

Démonstration. Soient $A \in \tau_d$, et $a \in p^{-1}(A)$. Nous allons trouver $\epsilon > 0$ tel que $B(a, \epsilon) \subset p^{-1}(A)$. Soit $\alpha \in p(a)$. Il existe $r > 0$ tel que $B(\alpha, r) \subset A$. Par le lemme 10.16,

$$p^{-1}\big(B(\alpha, r)\big) = \bigcup_{s\in\alpha} B(s, r). \tag{10.54}$$

En particulier $a \in \alpha$ et donc

$$B(a, r) \subset \bigcup_{s\in\alpha} B(s, r) = p^{-1}\big(B(\alpha, r)\big) \subset p^{-1}(A). \tag{10.55}$$

Donc $\epsilon = r$ fonctionne. □

[9] Je n'ai pas vérifié les autres conditions. Faites-les.

PROPooFUQHooKZMoMm

Proposition 10.18 ([1]).
Sur le tore T, la topologie quotient[10] *τ_Q est la même que la topologie métrique τ_d.*

Démonstration. En deux parties.

(1) $\tau_Q \subset \tau_d$ Le lemme 10.17 dit que p est continue pour τ_d ; donc la proposition 7.55(3) implique que $\overline{\tau_Q} \subset \tau_d$.

(2) $\tau_d \subset \tau_Q$ Soit $A \in \tau_d$. Nous allons prouver que $S = p^{-1}(A)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$; de cette façon A sera l'image par p d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Notez que par rapport à l'énoncé de la proposition 7.55, ici p joue le rôle de φ_i^{-1}.

Soit $s \in p^{-1}(A)$. Vu que $p(s) \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B_d\big(p(s), r\big) \subset A$. En prenant p^{-1} des deux côtés,

$$p^{-1}\Big(B\big(p(s), r\big)\Big) \subset p^{-1}(A) = S. \tag{10.56}$$

Mais le lemme 10.16 dit que

$$p^{-1}\Big(B\big(p(s), r\big)\Big) = \bigcup_{x\in[s]} B(x, r), \tag{10.57}$$

donc $\bigcup_{x\in[s]} B(x,r) \subset S$ et à fortiori $B(s,r) \subset S$. Nous avons prouvé que S est ouvert.

□

10.1 Théorème spectral autoadjoint

ThoRSBahHH

Théorème 10.19 (Théorème spectral autoadjoint).
Un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien

(1) est diagonalisable dans une base orthonormée,

(2) a son spectre réel.

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur la dimension de E, et nous commençons par $n = 1$[11]. Soit donc $f : E \to E$ avec $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. Étant donné que f est également linéaire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$. Tous les vecteurs de E sont donc vecteurs propres de f.

Passons à la récurrence. Nous considérons $\dim(E) = n + 1$ et $f \in \mathrm{S}(E)$. Nous considérons la forme bilinéaire symétrique Φ_f et la forme quadratique associée ϕ_f. Pour rappel,

$$\Phi_f(x, y) = \langle x, f(y)\rangle \tag{10.58a}$$
$$\phi_f(x) = \Phi_f(x, x). \tag{10.58b}$$

Et nous allons laisser tomber les indices f pour noter simplement Φ et ϕ. Étant donné que $\overline{B(0,1)}$ est compacte et que ϕ est continue, il existe $x_0 \in \overline{B(0,1)}$ tel que

$$\lambda = \phi(x_0) = \sup_{x\in\overline{B(0,1)}} \phi(x). \tag{10.59}$$

Notons aussi que $\|x_0\| = 1$: le maximum est pris sur le bord. Nous posons

$$g = \lambda \mathrm{Id} - f \tag{10.60}$$

ainsi que

$$\Phi_1(x, y) = \langle x, g(y)\rangle. \tag{10.61}$$

C'est une forme bilinéaire et symétrique parce que

$$\Phi_1(y, x) = \langle y, g(x)\rangle = \langle g(y), x\rangle = \langle x, g(y)\rangle = \Phi_1(x, y) \tag{10.62}$$

où nous avons utilisé le fait que g était autoadjoint et la symétrie du produit scalaire. De plus Φ_1 est semi-définie positive parce que

$$\Phi_1(x, x) = \langle x, \lambda x - f(x)\rangle = \lambda\|x\|^2 - \phi(x). \tag{10.63}$$

[10] Définition 7.67.
[11] Dans [128], l'auteur commence avec $n = 0$ mais moi je n'en ai pas le courage..

Puisque λ est le maximum, nous avons tout de suite $\Phi_1(x) \geqslant 0$ tant que $\|x\| = 1$. Et si x n'est pas de norme 1, c'est le même prix parce qu'on se ramène à $\|x\| = 1$ en multipliant par un nombre positif. Attention cependant :

$$\Phi_1(x_0, x_0) = \lambda\|x_0\|^2 - \phi(x_0) = 0. \tag{10.64}$$

Donc Φ_1 a un noyau contenant x_0 par la proposition 10.4. Nous en déduisons que $\text{Image}(g) \neq E$ en effet, $x_0 \in \text{Image}(g)^\perp$, mais nous avons la proposition 4.144 sur les dimensions :

$$\dim E = \dim(\text{Image}(g)) + \dim(\text{Image}(g)^\perp). \tag{10.65}$$

Comme $\text{Image}(g)^\perp$ est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, la dimension de $\text{Image}(g)$ ne peut pas être celle de E. L'endomorphisme g n'étant pas surjectif, il ne peut pas être injectif non plus parce que nous sommes en dimension finie ; il existe donc $e_1 \in E$ tel que $g(e_1) = 0$ et tant qu'à faire nous choisissons $\|e_1\| = 1$ (ici la norme est bien celle de l'espace euclidien considéré). Par définition,

$$f(e_1) = \lambda e_1, \tag{10.66}$$

c'est-à-dire que $\lambda \in \text{Spec}(f)$. Et ϕ étant une forme quadratique réelle nous avons $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nous posons à présent $H = \text{Span}\{e_1\}^\perp$. C'est un sous-espace stable par f parce que si $x \in H$ alors

$$\langle e_1, f(x)\rangle = \langle f(e_1), x\rangle = \lambda\langle e_1, x\rangle = 0. \tag{10.67}$$

Nous pouvons donc considérer la restriction de f à H : $f_H \colon H \to H$. Cet endomorphisme est bilinéaire et symétrique sur l'espace H de dimension inférieure à celle de E, donc la récurrence nous donne une base orthonormée

$$\{e_2, \dots, e_n\} \tag{10.68}$$

de vecteurs propres de f_H. De plus les valeurs propres sont réelles, toujours par récurrence. Donc

$$\text{Spec}(f) = \{\lambda\} \cup \text{Spec}(f_H) \subset \mathbb{R}. \tag{10.69}$$

Notons pour être complet que si $i \geqslant 2$ alors

$$\langle e_1, e_i\rangle = 0 \tag{10.70}$$

parce que le vecteur e_i est par construction choisi dans l'espace $H = e_1^\perp$. Nous avons donc bien une base orthonormée de E construite sur des vecteurs propres de f. □

CorSMHpoVK

Corolaire 10.20.
Soit E un espace vectoriel ainsi que des formes bilinéaires ϕ et ψ sur E. Si ψ est définie positive, alors il existe une base ψ-orthonormale dans laquelle ϕ est diagonale.

Démonstration. Il suffit de considérer l'espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \psi(x, y)$. Ensuite nous diagonalisons la matrice (symétrique) de ϕ pour ce produit scalaire à l'aide du théorème 10.19. □

DefNormeEucleApp

Définition 10.21.
*La **norme euclidienne** d'un élément de $\mathbb{R}^m$ est définie par $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$*[12].

Cette définition est motivée par le fait que le produit scalaire $u \cdot u$ donne exactement la norme usuelle donnée par le théorème de Pythagore :

$$u \cdot u = \sum_{i=1}^{m} u_i u_i = \sum_{i=1}^{m} u_i^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2. \tag{10.71}$$

Le fait que $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ signifie que la base canonique est **orthonormée**, c'est-à-dire que les vecteurs de la base canonique sont orthogonaux deux à deux et qu'ils ont tout 1 comme norme.

LemSclNormeXi

Lemme 10.22.
Pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, il existe un $\xi \in \mathbb{R}^m$ tel que $\|u\| = \xi \cdot u$ et $\|\xi\| = 1$.

Démonstration. Vérifions que le vecteur $\xi = u/\|u\|$ ait les propriétés requises. D'abord $\|\xi\| = 1$ parce que $u \cdot u = \|u\|^2$. Ensuite

$$\xi \cdot u = \frac{u \cdot u}{\|u\|} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|} = \|u\|. \tag{10.72}$$

□

[12] La racine carrée est définie en 9.100.

10.1.1 Inégalité de Minkowski

Ce qui est couramment nommé « inégalité de Minkowski » est la proposition 27.45 dans les espaces L^p. Nous allons en donner ici un cas très particulier.

PropACHooLtsMUL

Proposition 10.23.
Si q est une forme quadratique[13] *sur $\mathbb{R}^n$ et si $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors*

$$\sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}. \tag{10.73}$$

Démonstration. La proposition 8.253 nous permet de « diagonaliser » la forme quadratique q. Quitte à ne plus avoir une base orthonormale, nous pouvons renormaliser les vecteurs de base pour avoir

$$q(x) = \sum_i x_i^2. \tag{10.74}$$

Le résultat n'est donc rien d'autre que l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne usuelle, laquelle est démontrée dans le théorème 10.1. □

10.24.
Un produit scalaire fournit donc toujours une norme et donc une topologie. Il ne faudrait cependant pas croire que toute norme dérive d'un produit scalaire, même pas en dimension finie. Et ce, malgré l'équivalence de toutes les normes du théorème 10.61 dont vous avez déjà peut-être entendu parler.

L'intérêt du lemme suivant sera apparent en 10.63.

LEMooRWJYooOIJkZc

Lemme 10.25.
Sur $\mathbb{R}^2$, l'application $N(x,y) = |x| + |y|$ est une norme[14] *qui ne dérive pas d'un produit scalaire*[15].

Démonstration. Nous commençons par montrer que N est une norme. Il faut vérifier les trois conditions de la définition 7.212.

(1) Il faut utiliser le lemme 1.114(2) dans les deux sens. Si $(x,y) = (0,0)$, alors $N(x,y) = |0| + |0| = 0 + 0 = 0$. Dans l'autre sens, si $N(x,y) = 0$ nous avons

$$0 = |x| + |y| \geqslant |x|. \tag{10.75}$$

Donc $|x| \leqslant 0$, mais comme $|x| \geqslant 0$, nous avons $|x| = 0$ et donc $x = 0$. Le même raisonnement tient pour y.

(2) En tenant compte du fait que $|\lambda x| = |\lambda||x|$, nous avons

$$N\big(\lambda(x,y)\big) = N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda||x| + |\lambda||y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda| N(x,y). \tag{10.76}$$

(3) Nous avons le calcul

$$\begin{aligned} N\big((x,y) + (a,b)\big) &= N(x+a, y+b) && \text{(10.77a)}\\ &= |x+a| + |y+b| && \text{(10.77b)}\\ &\leqslant |x| + |a| + |y| + |b| = N(x,y) + N(a,b) && \text{(10.77c)} \end{aligned}$$

SUBEQooIXKWooTNQEnu

Justification : pour (10.77c) nous avons utilisé $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, du lemme 1.114.

Pour voir qu'elle ne dérive pas d'un produit scalaire, nous montrons qu'elle ne vérifie pas l'identité du parallélogramme du théorème 10.1.

Voici un petit bout de code qui nous permet de ne pas faire de recherches à la main :

```
# Dans un cas réel, vous avez nettement intérêt à
# créer une classe 'Vecteur' qui implémente somme, différence
# et norme.
def N(v):
    return abs( v[0] )+abs(v[1])
```

[13] Définition 8.121.
[14] Définition 7.212.
[15] La norme d'un produit scalaire est le théorème 10.1.

```
6
7  def parall(v,w):
8      # La différence v-w
9      d=( v[0]-w[0],v[1]-w[1] )
10     # La somme v+w
11     s=( v[0]+w[0],v[1]+w[1] )
12
13     return N(d)**2+N(s)**2-2*N(v)**2-2*N(w)**2
```

tex/sage/sageSnip018.sage

Il est vite vu qu'avec $v = (-1, 1)$ et $w = (1, 1)$, l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée. □

LemLPOHUme

Lemme 10.26 ([128]).
Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire[16] *et de la norme associée. Si $x, y \in V$ satisfont à $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, alors il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $x = \lambda y$.*

Démonstration. Quitte à raisonner avec $x/\|x\|$ et $y/\|y\|$, nous supposons que $\|x\| = \|y\| = 1$. Dans ce cas l'hypothèse signifie que $\|x + y\|^2 = 4$. D'autre part en écrivant la norme en termes de produit scalaire,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle, \tag{10.78}$$

ce qui nous mène à affirmer que $\langle x, y\rangle = 1 = \|x\|\|y\|$. Nous sommes donc dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz[17], ce qui nous donne un λ tel que $x = \lambda y$. Étant donné que $\|x\| = \|y\| = 1$ nous avons obligatoirement $\lambda = \pm 1$, mais si $\lambda = -1$ alors $\langle x, y\rangle = -1$, ce qui est le contraire de ce qu'on a prétendu plus haut. Par souci de cohérence, nous allons donc croire que $\lambda = 1$. □

PropVectsOrthLibres

Proposition 10.27 ([366]).
si $v_1, \cdots, v_k$ sont des vecteurs non nuls, orthogonaux deux à deux, alors ces vecteurs forment une famille libre.

Démonstration. Soit une combinaison linéaire nulle des v_i : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$. Nous multiplions scalairement par v_k :

$$0 = \sum_i \lambda_i v_k \cdot v_i = \sum_i \lambda_i \delta_{ki} \|v_i\|^2 = \lambda_k \|v_k\|^2. \tag{10.79}$$

Donc $\lambda_k = 0$. □

LEMooYXJZooWKRFRu

Lemme 10.28.
Une isométrie d'un espace euclidien fixe l'origine.

Démonstration. Soit une isométrie f d'un espace euclidien : $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ pour tout $x, y \in E$. En particulier pour $x = 0$ nous avons

$$f(0) \cdot f(y) = 0 \tag{10.80}$$

pour tout y. Parce que f est une bijection, nous avons $f(0) \cdot x = 0$ pour tout x. Comme le produit scalaire est non dégénéré[18] cela implique que $f(0) = 0$. □

10.1.2 Cauchy-Schwarz etc. cas complexe

THOooSUCBooFnpkaF

Théorème 10.29 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas complexe[367]).
Soit un espace vectoriel complexe muni d'un produit hermitien $\langle ., .\rangle$. Alors pour tous vecteurs x, y nous avons

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\| \tag{10.81}$$

où nous avons posé $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Démonstration. Si $\langle x, y\rangle = 0$, le résultat est évident. Nous nous concentrons donc sur le cas où $\langle x, y\rangle \neq 0$. Nous posons

$$\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{|\langle x, y\rangle|}. \tag{10.82}$$

[16] Définition 8.163.
[17] Théorème 10.1.
[18] Lemme 8.166.

C'est un élément de $\mathbb{C}$ de norme 1. Nous avons

$$\langle \frac{1}{\theta}x, y\rangle = \frac{|\langle x,y\rangle|}{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| \geqslant 0 \tag{10.83}$$

où le symbole « $\geqslant$ » signifie « est réel et positif ». Nous posons $x' = \frac{1}{\theta}x$ et nous considérons $t \in \mathbb{R}$. Remarquons que $\|x'\|^2 = \|x\|^2$:

$$\|x'\|^2 = \langle x', x'\rangle = \frac{1}{\theta\bar{\theta}}\langle x,x\rangle = \|x\|^2 \tag{10.84}$$

parce que $|\theta| = 1$.

En utilisant le fait que $\langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle = \operatorname{Re}(\langle a,b\rangle)$ nous avons :

$$0 \leqslant \|x' + ty\|^2 = \|x'\|^2 + t\langle x', y\rangle + t\langle y, x'\rangle + t^2\|y\|^2 \tag{10.85a}$$
$$= \|y\|^2t^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x', y\rangle)t + \|x'\|^2. \tag{10.85b}$$

C'est un polynôme de degré 2 en t qui n'est jamais strictement négatif. Autrement dit, il a au maximum une seule racine, ce qui signifie que son discriminant est négatif ou nul :

$$\operatorname{Re}(\langle x', y\rangle)^2 - \|y\|^2\|x'\|^2 \leqslant 0. \tag{10.86}$$

Mais nous avons choisi x' de telle sorte que $\langle x', y\rangle = |\langle x,y\rangle| \in \mathbb{R}$ et $\|x'\|^2 = \|x\|^2$; nous avons donc

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2, \tag{10.87}$$

comme il se devait. □

10.2 Norme à partir d'un produit scalaire

PROPooSSYJooHAXAnC

Proposition 10.30 (Identité du parallélogramme[368])**.**
Soit un espace vectoriel complexe E muni d'un produit hermitien $\langle .,.\rangle$. Nous posons $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Nous avons

(1) $\|.\|$ est une norme.

(2) Elle vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{10.88}$$

pour tout $x, y \in E$.

Démonstration. En ce qui concerne le fait que $\|.\|$ soit une norme, tout est essentiellement dans la définition 8.171 d'un produit hermitien. Voyons tout de même l'inégalité triangulaire. Nous avons :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle \tag{10.89a}$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \tag{10.89b}$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\big(\langle x,y\rangle\big) \tag{10.89c}$$
$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\Re\big(\langle x,y\rangle\big)| \tag{10.89d}$$
$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| \tag{10.89e}$$
$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \tag{10.89f}$$
$$= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \tag{10.89g}$$

SUBEQooQGQBooMRJcUc

Pour (10.89f) nous avons utilisé Cauchy-Schwarz 10.29. □

DEFooGUXNooXwCsrq

Définition 10.31.
Dans le cas de $\mathbb{C}^n$, nous considérons toujours la norme associée à la forme (8.347) par la proposition 10.30, c'est-à-dire, pour rappel :

$$\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}, \tag{10.90}$$

EQooRRVCooVmcRrp

et

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \tag{10.91}$$

pour tout $x \in \mathbb{C}^n$.

10.2.1 Diagonalisation : cas complexe, ce qu'on a

LEMooVCEOooIXnTpp

Lemme 10.32 (Théorème spectral hermitien)**.**
Nous considérons un espace vectoriel complexe hermitien. Pour un opérateur hermitien[19]*,*

(1) le spectre est réel,

(2) deux vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes sont orthogonaux[20]*.*

Démonstration. Soit v un vecteur de valeur propre λ. Nous avons d'une part

$$\langle Av, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle = \lambda\|v\|^2, \tag{10.92}$$

et d'autre part, en utilisant le fait que A est hermitien,

$$\langle Av, v\rangle = \langle v, A^*v\rangle = \langle v, Av\rangle = \bar{\lambda}\|v\|^2, \tag{10.93}$$

par conséquent $\lambda = \bar{\lambda}$ parce que $v \neq 0$.

Soient λ_i et v_i $(i = 1, 2)$ deux valeurs propres de A avec leurs vecteurs propres correspondants. Alors d'une part

$$\langle Av_1, v_2\rangle = \lambda_1\langle v_1, v_2\rangle, \tag{10.94}$$

et d'autre part

$$\langle Av_1, v_2\rangle = \langle v_1, Av_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle. \tag{10.95}$$

Nous avons utilisé le fait que λ_2 était réel. Par conséquent, soit $\lambda_1 = \lambda_2$, soit $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. □

REMooMLBCooTuKFmz

Remarque 10.33.
Un opérateur de la forme A^*A est évidemment hermitien. De plus ses valeurs propres sont toutes positives parce que si $A^*Av = \lambda v$ alors

$$0 \leqslant \langle Av, Av\rangle = \langle A^*Av, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle. \tag{10.96}$$

Donc $\lambda \geqslant 0$.

10.2.2 Projection et orthogonalité

La définition du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ est 8.168 et le lien avec la matrice d'une application linéaire est la proposition 8.179.

Remarque 10.34.
Outre l'orthogonalité, le produit scalaire permet de connaître l'angle entre deux vecteurs à travers la définition 18.53. D'autres interprétations géométriques du déterminant sont listées dans le thème 45.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer, pour deux vecteurs quelconques u et v, la projection orthogonale de u sur v. Ce sera le vecteur $\bar{u}$ parallèle à v tel que $u - \bar{u}$ est orthogonal à v. Nous avons donc

$$\bar{u} = \lambda v \tag{10.97}$$

et

$$(u - \lambda v) \cdot v = 0. \tag{10.98}$$

La seconde équation donne $u \cdot v - \lambda v \cdot v = 0$, ce qui fournit λ en fonction de u et v :

$$\lambda = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}. \tag{10.99}$$

Nous avons par conséquent

$$\bar{u} = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}v. \tag{10.100}$$

Armés de cette interprétation graphique du produit scalaire, nous comprenons pourquoi nous disons que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

[19] Définition 8.174.
[20] Pour la forme (8.347).

Nous pouvons maintenant savoir quel est le coefficient directeur d'une droite orthogonale à une droite donnée. En effet, supposons que la première droite soit parallèle au vecteur X et la seconde au vecteur Y. Les droites seront perpendiculaires si $X \cdot Y = 0$, c'est-à-dire si

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{10.101}$$

Cette équation se développe en

Eqxuyukljsca

$$x_1 y_1 = -x_2 y_2. \tag{10.102}$$

Le coefficient directeur de la première droite est $\frac{x_2}{x_1}$. Isolons cette quantité dans l'équation (10.102) :

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{y_1}{y_2}. \tag{10.103}$$

Donc le coefficient directeur de la première est l'inverse et l'opposé du coefficient directeur de la seconde.

Exemple 10.35.
Soit la droite $d \equiv y = 2x + 3$. Le coefficient directeur de cette droite est 2. Donc le coefficient directeur d'une droite perpendiculaires doit être $-\frac{1}{2}$. △

PROBooLOEKooZxNpJZ

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 10.36
La « preuve alternative » qui suit … je ne sais plus du tout à quoi elle faisait référence. Si vous avez une idée de l'énoncé, faites-le moi savoir.

Sinon, vous pouvez certainement ne pas la lire.

Preuve alternative. La preuve peut également être donnée en ne faisant pas référence au produit scalaire. Il suffit d'écrire toutes les quantités en termes des coordonnées de X et Y. Si nous posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \tag{10.104}$$

l'inégalité à prouver devient

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2). \tag{10.105}$$

Nous considérons la fonction

$$\varphi(t) = (x_1 + t y_1)^2 + (x_2 + t y_2)^2 + (x_3 + t y_3)^2 \tag{10.106}$$

En tant que norme, cette fonction est évidemment positive pour tout t. En regroupant les termes de chaque puissance de t, nous avons

$$\varphi(t) = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)t^2 + 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)t + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \tag{10.107}$$

C'est un polynôme du second degré en t. Par conséquent le discriminant doit être négatif[21]. Nous avons donc

$$4(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \leqslant 0. \tag{10.108}$$

La thèse en découle aussitôt. □

10.2.3 Théorème de Pythagore

THOooHXHWooCpcDan

Théorème 10.37 (Pythagore[1])**.**
Soient un espace euclidien[22] *E ainsi que trois points $a, b, c \in E$ formant un triangle rectangle en a, c'est-à-dire tel que*

EQooRAWAooBxlBcZ

$$(b - a) \cdot (a - c) = 0 \tag{10.109}$$

Alors

$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + \|a - c\|^2. \tag{10.110}$$

[21] Proposition 9.118.
[22] Définition 8.167.

Démonstration. D'abord pour développons l'hypothèse (10.109) :

$$b \cdot a - b \cdot c - \|a\|^2 + a \cdot c = 0, \tag{10.111}$$

et nous isolons un bout qui va nous servir plus tard :

$$b \cdot a + a \cdot c = b \cdot c + \|a\|^2. \tag{10.112}$$

EQooWPWZooLjlVJk

Maintenant nous calculons un peu :

$$\begin{aligned}
\|b-a\|^2 + \|a-c\|^2 &= \|b\|^2 - 2b \cdot a + \|a\|^2 + \|a\|^2 - 2a \cdot c + \|c\|^2 && \text{(10.113a)}\\
&= 2\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 - 2(b \cdot c + \|a\|^2) && \text{(10.113b)}\\
&= \|b\|^2 + \|c\|^2 - 2b \cdot c && \text{(10.113c)}\\
&= \|b-c\|^2. && \text{(10.113d)}
\end{aligned}$$

SUBEQooHCWXooQHpGTO

Pour (10.113b), nous avons substitué (10.112). □

10.38.
Je profite de l'occasion pour montrer mon scepticisme quant aux preuves de Pythagore basées sur différents pliages et découpages des carrés construits sur les côtés du triangle.

Si, comme ici, nous considérons la géométrie dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire, alors le théorème 10.37 est le théorème de Pythagore et il n'est pas loin d'être la définition de la distance entre deux points. Ce serait exactement la définition pour le triangle $A = (0,0)$, $B = (a,0)$, $C = (a,b)$.

Pour autant que je le sache, la géométrie dans « le plan » (celle du collège) ne définit pas « longueur » et « aire ». Donc bon … Il y a peut-être un moyen de s'en sortir, mais je ne le connais pas.

Bref, soit on se met d'accord sur les définitions (et dans ce cas je serais étonné qu'il existe une démonstration de Pythagore très différente de ce qu'on a ici), soit il faudrait se calmer avec les soi-disant preuves du théorème de Pythagore.

LEMooKDGRooMmJqnn

Lemme 10.39.
Soit un carré de côté c. Alors deux points du carré sont au maximum éloignés d'une distance égale à $c\sqrt{2}$.

10.2.4 Produit vectoriel

DEFooTNTNooRjhuJZ

Définition 10.40.
*Soient u et v, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le **produit vectoriel** de u et v est le vecteur $u \times v$ défini par*

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \tag{10.114}$$

EQooCUJRooFuFPaZ

où les vecteurs e_1, e_2 et e_3 sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

LEMooYKNPooGVMuse

Lemme 10.41.
Le produit vectoriel $u \times v$ est également exprimé par

EQSooOWGZooNYruoy

$$\begin{aligned}
u \times v &= (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3 && \text{(10.115a)}\\
&= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} v_i w_j e_k && \text{(10.115b)}
\end{aligned}$$

SEBEQooVROKooRpUQIr

où ϵ_{ijk} est défini par $\epsilon_{xyz} = 1$ et ensuite ϵ_{ijk} est 1 ou -1 suivant que la permutation des x, y et z est paire ou impaire. C'est-à-dire que ϵ_{ijk} est la signature de la permutation qui amène $(1,2,3)$ sur (i,j,k).

Démonstration. Il s'agit seulement de développer explicitement le déterminant (10.114). □

NORMooARQCooCAapiy

10.42.
Admettons que $a \times b = v$. En calculant le même produit vectoriel dans la base $f_i = -e_i$, les composantes de a et b changent de signe et la formule (10.115) dit que le produit vectoriel ne change pas. On serait tenté d'écrire, dans la base $\{f_i\}$

$$(-a) \times (-b) = v, \tag{10.116}$$

tout en pleurant parce que dans la base des f_i, le vecteur v devient $-v$.

Il y a des personnes que cela tracasse tellement qu'on entend parler de « le produit vectoriel est un pseudo-vecteur sous SO(2) ». Les physiciens en théorie quantique des champs sont terribles sur ce sujet[23].

Il suffit d'être clair. Le produit vectoriel n'est défini que sur $\mathbb{R}^3$, et est défini par sa formule dans la base canonique, point barre. Si vous avez des vecteurs a et b dont vous connaissez les composantes dans une autre base, vous devez calculer les composantes dans la base canonique, utiliser la formule pour trouver les composantes de $a \times b$ dans la base canonique. Ensuite, si ça vous chante, vous pouvez calculer à nouveau les composantes de $a \times b$ dans une autre base.

Tout cela pour dire que le produit vectoriel n'est pas une opération très généralisable. Il est possible, pour sembler plus intrinsèque, de tenter cette définition : le produit vectoriel $a \times b$ est le vecteur perpendiculaire à a et b, de longueur égale à l'aire du parallélogramme construit sur a et b.

Cette « définition » a plusieurs inconvénients.

- Elle demande quand même un produit scalaire et des aires ; bref, elle demande une structure métrique,
- Elle ne donne pas le sens. En effet, dans $\mathbb{R}^3$, il y a deux vecteurs de longueur donnée perpendiculaires à a et b. Il faut donc préciser le sens. Cela revient à donner une orientation et donc, fondamentalement, à choisir une base.

Bref, on retiendra que le produit vectoriel est une opération accrochée à $\mathbb{R}^3$ et à sa base canonique.

Lemme-Définition 10.43.
Nous avons l'égalité suivante pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$(u \times v) \cdot w = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}. \tag{10.117}$$

EQooKJYUooSQgfXU

*Le résultat est nommé le **produit mixte** de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.*

10.44.
Nous avons donné un nom à la combinaison $(u \times v) \cdot w$. J'imagine que vous voyez pourquoi nous ne considérons pas la combinaison $(u \cdot v) \times w$.

Le lemme suivant donne un moyen compliqué et peu pratique de calculer la valeur absolue du produit mixte. La formule (10.118) ne sera utilisée que pour faire le lien entre un jacobien et un élément de volume en dimension trois lorsque nous verrons les intégrales sur des variétés. Voir l'équation (20.38).

LEMooSMWNooCmEZeY

Lemme 10.45 ([1])**.**
Le produit mixte peut également être exprimé par

$$|(u \times v) \cdot w|^2 = \det \begin{pmatrix} \|u\|^2 & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & \|v\|^2 & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & \|w\|^2 \end{pmatrix}. \tag{10.118}$$

EQooWZUQooYydphW

Démonstration. Si nous notons

$$a = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}, \tag{10.119}$$

il faut simplement remarquer que

$$\begin{pmatrix} \|u\|^2 & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & \|v\|^2 & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & \|w\|^2 \end{pmatrix} = aa^t. \tag{10.120}$$

Donc au niveau des déterminants, en utilisant les propositions 8.247 et le lemme 4.85 nous avons

$$\det \begin{pmatrix} \|u\|^2 & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & \|v\|^2 & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & \|w\|^2 \end{pmatrix} = \det(aa^t) = \det(a)\det(a^t) = \det(a)^2. \tag{10.121}$$

Et maintenant, par définition, $\det(a) = (u \times w) \cdot w$. Donc le résultat annoncé. □

[23] D'autant plus que, au lieu d'écrire un produit scalaire $a \cdot b$, il écrivent $a_i b^i$ en disant que b^i est un covecteur. Avec toutes les complications que ça implique sur les « lois de transformation » d'un covecteur sous tel ou tel groupe.

PropScalMixtLin

Proposition 10.46.
Les applications produit scalaire, vectoriel et mixte sont multilinéaires. Spécifiquement, nous avons les propriétés suivantes.

(1) *Les applications produit scalaire et vectoriel sont bilinéaires. C'est-à-dire que pour tout vecteurs a, b, c et pour tout nombre α et β nous avons*

$$\begin{aligned} a \times (\alpha b + \beta c) &= \alpha(a \times b) + \beta(a \times c) \\ (\alpha a + \beta b) \times c &= \alpha(a \times c) + \beta(b \times c). \end{aligned} \tag{10.122}$$

(2) *Le produit mixte est trilinéaire.*

(3) *Le produit vectoriel est antisymétrique, c'est-à-dire $u \times v = -v \times u$.*

(4) *Nous avons $u \times v = 0$ si et seulement si u et v sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si l'équation $\alpha u + \beta v = 0$ a une solution différente de la solution triviale $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.*

PROPooMXAIooJureOD

Proposition 10.47 (Identité de Lagrange[369])**.**
Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\|x\|^2\|y\|^2 - (x \cdot y)^2 = \sum_j \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2. \tag{10.123}$$

Et si $n = 3$ alors

$$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - (x \cdot y)^2. \tag{10.124}$$

Démonstration. C'est un calcul. D'abord nous avons

$$\|x\|^2\|y\|^2 - (x \cdot y)^2 = \sum_i x_i^2 \sum_j y_j^2 - \big(\sum_k x_k y_k\big)^2 = \sum_{ij} x_i^2 y_j^2 - \sum_{kl} x_k y_k x_l y_l. \tag{10.125}$$

Ensuite nous coupons les sommes de la façon suivante

$$\sum_{ij} = \sum_j \sum_{i<j} + \sum_j (i = j) + \sum_j \sum_{i>j} \tag{10.126}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \|x\|^2\|y\|^2 - (x \cdot y)^2 = &\sum_j \sum_{i<j} x_i^2 y_j^2 + \sum_j x_j^2 y_j^2 + \sum_j \sum_{i>j} x_i^2 y_j^2 \\ &- \sum_l \sum_{k<l} x_k y_k x_l y_l - \sum_k x_k^2 y_k^2 - \sum_l \sum_{k>l} x_k y_k x_l y_l. \end{aligned} \tag{10.127}$$

Il y a deux termes qui se simplifient. Notez que si A_{kl} est symétrique en kl nous avons

$$\sum_l \sum_{k<l} A_{kl} = \sum_k \sum_{l<k} A_{lk} = \sum_k \sum_{l<k} A_{kl}. \tag{10.128}$$

La première égalité était seulement un renommage des indices. Le coup des indices symétriques est justement ce qu'il se passe dans les deux termes en$x_k y_k x_l y_l$, donc nous les regroupons :

$$\|x\|^2\|y\|^2 - (x \cdot y)^2 = \sum_j \big(\sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 + \sum_{i>j} x_i^2 y_j^2 - 2\sum_{i>j} x_i y_i x_j y_j\big) \tag{10.129a}$$

$$= \sum_j \sum_{i<j} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2 x_i y_i x_j y_j) \tag{10.129b}$$

$$= \sum_j \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2. \tag{10.129c}$$

Voilà qui prouve la première formule. Pour la seconde, il faut seulement poser $n = 3$ et écrire les sommes explicitement.

- Pour $j = 1$, la somme sur i est $\sum_{i<1}$, c'est-à-dire aucun termes.
- Pour $j = 2$, il y a seulement $i = 1$, donc le terme $(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$.
- Pour $j = 3$, il y a les termes $i = 1$ et $i = 2$, donc les termes $(x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2$.

Ces trois termes collectés sont justement les composants (au carré) de $x \times y$ données dans la formule (10.115a). □

Les trois vecteurs de base e_x, e_y et e_y ont des produits vectoriels faciles à retenir :

$$\begin{aligned} e_x \times e_y &= e_z \\ e_y \times e_z &= e_x \\ e_z \times e_x &= e_y \end{aligned} \tag{10.130}$$

Les deux formules suivantes, qui mêlent le produit scalaire et le produit vectoriel, sont souvent utiles en analyse vectorielle :

$$\begin{aligned} (u \times v) \cdot w &= u \cdot (v \times w) \\ (u \times v) \times w &= -(v \cdot w)u + (u \cdot w)v \end{aligned} \tag{10.131}$$ EqFormExpluxxx

pour tout vecteurs u, v et w dans $\mathbb{R}^3$. Nous les admettons sans démonstration. La seconde formule est parfois appelée **formule d'expulsion**.

Exemple 10.48.
Calculons le produit vectoriel $v \times w$ avec

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{10.132}$$

Les vecteurs s'écrivent sous la forme $v = 3e_x - e_y + e_z$ et $w = e_x + 2e_y - e_z$. Le produit vectoriel s'écrit

$$\begin{aligned} (3e_x - e_y + e_z) \times (e_x + 2e_y - e_z) &= 6e_x \times e_y - 3e_x \times e_z \\ &\quad - e_y \times e_x + e_y \times e_z \\ &\quad + e_z \times e_x + 2e_z \times e_y \\ &= 6e_z + 3e_y + e_z + e_x + e_y - 2e_x \\ &= -e_x + 4e_y + 7e_z. \end{aligned} \tag{10.133}$$

△

10.2.5 Produit mixte

Si a, b et c sont trois vecteurs, leur **produit mixte** est le nombre $a \cdot (b \times c)$. En écrivant le produit vectoriel sous forme de somme de trois déterminants 2×2, nous avons

$$\begin{aligned} & a \cdot (b \times c) \\ &= (a_1 e_x + a_2 e_y + a_3 e_z) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} e_x - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} e_y + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{10.134}$$

Le produit mixte s'écrit donc sous forme d'un déterminant. Nous retenons cette formule :

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{10.135}$$ EqProduitMixteDet

Un grand intérêt du produit vectoriel est qu'il fournit un vecteur qui est simultanément perpendiculaire aux deux vecteurs donnés.

PROPooTUVKooOQXKKl

Proposition 10.49.
Le produit vectoriel[24] $a \times b$ *est un vecteur orthogonal à* a *et* b.

[24] Définition 10.40.

Démonstration. Vérifions que $a \perp (a \times b)$. Pour cela, nous calculons $a \cdot (a \times b)$, c'est-à-dire le produit mixte

$$a \cdot (a \times b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{10.136}$$

L'annulation de ce déterminant est due au fait que deux de ses lignes sont égales. □

Ces résultats admettent une intéressante généralisation.

LEMooFRWKooVloCSM

Lemme 10.50.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$ ainsi que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Alors

(1) Nous avons

$$\det(X, v_1, \dots, v_{n-1}) = X \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} \tag{10.137}$$

EQooMQNPooRHHBiz

(2) Le vecteur

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} \tag{10.138}$$

est orthogonal à tous les v_i.

Démonstration. Puisque les deux côtés de (10.137) vus comme fonctions de X, sont des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier l'égalité sur une base.

Nous posons $\tau_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\tau_i(v)_k = \begin{cases} v_k & \text{si } k < i \\ v_{k+1} & \text{si } k \geqslant i. \end{cases} \tag{10.139}$$

et nous avons d'une part

$$e_k \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \tau_k v_1 \\ \vdots \\ \tau_k v_{n-1} \end{pmatrix} \tag{10.140}$$

et d'autre part,

$$\det(e_k, v_1, \dots, v_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & v_1 & \cdots & v_{n-1} \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \det(\tau_k v_1, \dots, \tau_k v_{n-1}). \tag{10.141}$$

La première assertion est démontrée.

En ce qui concerne la seconde, il suffit d'appliquer la première et se souvenir qu'un déterminant est nul lorsque deux lignes sont égales[25]. En effet :

$$v_k \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} = \det(v_k, v_1, \dots, v_n) = 0. \tag{10.142}$$

□

[25] Corolaire 4.88.

10.2.6 Procédé de Gram-Schmidt

PropUMtEqkb

Proposition 10.51 (Procédé de Gram-Schmidt)**.**
Un espace euclidien possède une base orthonormée.

Démonstration. Soit E un espace euclidien et $\{v_1, \dots, v_n\}$, une base quelconque de E. Nous posons d'abord

$$f_1 = v_1, \quad e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}. \tag{10.143}$$

Ensuite

$$f_2 = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1, \quad e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}. \tag{10.144}$$

Notons que $\{e_1, e_2\}$ est une base de $\text{Span}\{v_1, v_2\}$. De plus elle est orthogonale :

$$\langle e_1, f_2\rangle = \langle e_1, v_2\rangle - \langle v_2, e_1\rangle \underbrace{\langle e_1, e_1\rangle}_{=1} = 0. \tag{10.145}$$

Le fait que $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ est par construction. Nous avons donc donné une base orthonormée de $\text{Span}\{v_1, v_2\}$.

Nous continuons par récurrence en posant

$$f_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, e_i\rangle e_i, \quad e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}. \tag{10.146}$$

Pour tout $j < k$ nous avons

$$\langle e_j, f_k\rangle = \langle e_j, v_k\rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, e_i\rangle \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = 0 \tag{10.147}$$

□

Cet algorithme de Gram-Schmidt nous donne non seulement l'existence de bases orthonormée pour tout espace euclidien, mais aussi le moyen d'en construire à partir de n'importe quelle base.

10.2.7 Pseudo-réduction simultanée

CorNHKnLVA

Corolaire 10.52 (Pseudo-réduction simultanée[370])**.**
Soient $A, B \in \text{S}(n, \mathbb{R})$ avec A définie positive[26]*. Alors il existe $Q \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ telle que Q^tBQ soit diagonale et $Q^tAQ = \mathbb{1}$.*

Démonstration. Nous allons noter $x \cdot y$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ sa base canonique.

Comme A est définie positive, l'expression $\langle x, y\rangle = x \cdot Ay$ donne un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Nous avons donc deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$, et nous allons travailler avec les deux.

La proposition 10.51 appliquée à l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \langle ., .\rangle)$ dit qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ pour ce produit scalaire. Nous considérons l'application linéaire P définie par

$$Pe_i = f_i. \tag{10.148}$$

Nous démontrons à présent que $P^tAP = \mathbb{1}$. Pour cela, nous calculons

SUBEQooGZDJooVMuWNn

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \langle f_i, f_j\rangle && \text{(10.149a)}\\
&= f_i \cdot Af_j && \text{(10.149b)}\\
&= Pe_i \cdot APe_j && \text{(10.149c)}\\
&= e_i \cdot P^tAPe_j && \text{(10.149d)}\\
&= (P^tAP)_{ij}. && \text{(10.149e)}
\end{aligned}$$

SUBEQooQNVUooNbyIzM

SUBEQooITBKooCEmqxx

Justifications :

- Pour (10.149a), la base (f_j) est orthonormée pour le produit scalaire $\langle ., .\rangle$.
- Pour (10.149d), la proposition 8.181 sur la transposée.

[26] Définition 8.228.

- Pour (10.149e), la formule du produit scalaire usuel pour avoir les éléments de matrice, proposition 8.179.

La matrice P^tBP est une matrice symétrique, donc le théorème spectral 8.225 nous donne une matrice $R \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ telle que R^tP^tBPR soit diagonale. En posant maintenant $Q = PR$ nous avons la matrice cherchée. □

REMooDDUEooJXZIfE

Remarque 10.53.
Plusieurs remarques :

(1) Nous n'avons pas prouvé l'existence d'une matrice P telle que $P^{-1}BP$ et $P^{-1}AP$ soient diagonales. Au contraire, nous avons Q^tBQ et Q^tAQ qui sont diagonales. Tant que Q n'est pas orthogonale, ce n'est pas la même chose.

Autrement dit, nous n'avons pas ici une vraie diagonalisation, parce que les matrices A et B ne sont pas semblables à des matrices diagonales. Voir les définitions 8.212 (diagonalisable) et 8.198 (semblable).

C'est pour cela que nous parlons de *pseudo*-diagonalisation.

(2) Dans le même ordre d'idée, la démonstration de la pseudo-diagonalisation simultanée parle clairement de formes bilinéaires, et non d'endomorphismes. Or en comparant les lois de transformations (4.241) et (8.307), nous voyons bien que la réduction en passant par Q^tAQ est bien une réduction de forme bilinéaire et non une réduction d'endomorphismes.

(3) Nous avons prouvé la pseudo-réduction simultanée comme corolaire du théorème de diagonalisation des matrices symétriques 8.225. Il aurait aussi pu être vu comme un corolaire du théorème spectral 10.19 sur les opérateurs autoadjoints via son corolaire 10.20.

10.3 Approximations

Le lemme suivant est surtout intéressant en dimension infinie.

Lemme 10.54.
Soit un espace vectoriel normé V et un sous-espace vectoriel dense A. Soit $v \in V$; il existe une suite (v_n) dans A telle que $v_n \xrightarrow{V} v$ et $\|v_n\| \leqslant \|v\|$ pour tout n.

Démonstration. Puisque A est dense, il existe une suite a_n dans A telle que $a_n \to v$. Ensuite il suffit de poser

$$v_n = \frac{n}{n+1}\frac{\|v\|}{\|a_n\|}a_n. \tag{10.150}$$

Par construction nous avons toujours

$$\|v_n\| = \frac{n}{n+1}\|v\| \leqslant \|v\|. \tag{10.151}$$

Et de plus, la norme étant continue[27],

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{\|v\|}{\|a_n\|}\lim_{n\to\infty}a_n = v. \tag{10.152}$$

Le fait que v_n soit dans A est dû au fait que A soit vectoriel. □

PROPooVEMGooYKhMFy

Proposition 10.55.
Soit un espace vectoriel normé V et un sous-espace vectoriel dense A. Soit $v \in V$. Nous avons

$$\sup\{|v\cdot a| \text{ tel que } a\in A \text{ et } \|a\|\leqslant\lambda\} = \lambda\|v\|. \tag{10.153}$$

Démonstration. D'abord pour tout $a \in A$ vérifiant $\|a\| \leqslant \lambda$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz 10.1 donne

$$|v\cdot a| \leqslant \|v\|\|a\| \leqslant \lambda\|v\|. \tag{10.154}$$

Donc le supremum dont on parle est majoré par $\lambda\|v\|$.

Il nous faut l'inégalité dans l'autre sens. Par densité nous pouvons choisir une suite $v_n \in A$ tel que $v_n \to v$. Ensuite nous posons

$$a_n = \frac{\lambda}{\|v_n\|}v_n. \tag{10.155}$$

[27] Où dans le calcul suivant utilisons-nous la continuité de la norme ? Posez-vous la question.

Nous avons $\|a_n\| = \lambda$ pour tout n et

$$|v \cdot a_n| = \frac{\lambda}{\|v_n\|}|v \cdot v_n|, \tag{10.156}$$

et en passant à la limite,

$$\lim_{n\to\infty} |v \cdot a_n| = \frac{\lambda}{\|v\|}\|v \cdot v\| = \lambda\|v\|. \tag{10.157}$$

Donc l'ensemble sur lequel nous prenons le supremum contient une suite convergente vers $\lambda\|v\|$. Le supremum est donc au moins aussi grand que cela. □

10.3.1 Quelques exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$

Il est possible de définir de nombreuses normes sur $\mathbb{R}^n$. Citons-en quelques-unes parmi les normes $\|.\|_p$. Le cas général $p \geqslant 1$ sera fait dans 17.105.

PROPooCLZRooIRxCnZ

Proposition-Définition 10.56 ([371, 262]).
Les formules suivantes définissent des normes[28] *sur* $\mathbb{R}^n$.

ITEMooQBLGooPQKSev

(1) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,

ITEMooXQUFooLHrITI

(2) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,

ITEMooSOVDooTuhEik

(3) $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

La norme $\|.\|_\infty$ *est nommée* ***norme supremum****.*

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Déjà fait dans le lemme 10.25.

(2) **Pour (2)** Le cas $p = 2$ provient de l'inégalité

$$\sqrt{(a+b)^2} \leqslant \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}, \tag{10.158}$$

laquelle se démontre en passant au carré :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leqslant a^2 + b^2 + 2|ab| = \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}\right)^2. \tag{10.159}$$

EQooRYNYooTzZpPz

(3) **Pour (3)** Pour l'inégalité triangulaire, nous faisons

$$\|x+y\|_\infty = \max_i |x_i + y_i| \leqslant \max_i \left(|x_i| + |y_i|\right) \leqslant \max_i |x_i| + \max_i |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \tag{10.160}$$

Les autres points de la définition 7.212 sont faciles quand on se rappelle que $x = 0$ si et seulement si $x_i = 0$ pour tout i.

□

Parmi ces normes, celles qui seront le plus souvent utilisées sont les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ qui, pour des raisons que nous verrons beaucoup plus tard[29] sont souvent notées $\|.\|_{L^p}$:

$$\begin{aligned} \|x\|_{L^1} &= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_{L^2} &= \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{10.161}$$

Soient $A = (A_x, A_y)$ et $B = (B_x, B_y)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. La distance[30] euclidienne entre A et B est donnée par $\|A - B\|_2$. En effet, sur la figure 10.1, la distance entre les points A et B est donnée par

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2 = |A_x - B_x|^2 + |A_y - B_y|^2, \tag{10.162}$$

par conséquent,

$$|AB| = \sqrt{|A_x - B_x|^2 + |A_y - B_y|^2} = \|A - B\|_2. \tag{10.163}$$

[28] Définition 7.212.
[29] La proposition 27.19, par exemple.
[30] Ne pas confondre « distance » et « norme ».

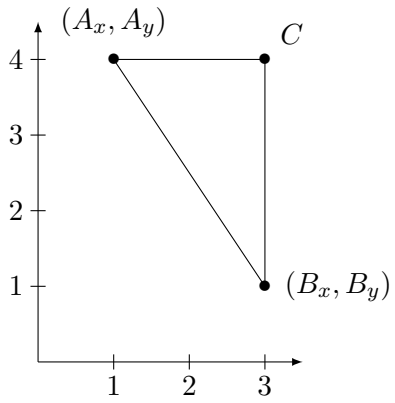


FIGURE 10.1 : La *norme* euclidienne induit la *distance* euclidienne. D'où son nom. Le point C est construit aux coordonnées (A_x, B_y). LabelFigDistanceEuclide

Remarque 10.57.
Si A, B et C sont trois points dans le plan $\mathbb{R}^2$, alors l'inégalité triangulaire $|AB| \leqslant |AC| + |CB|$ est précisément la propriété (4) de la norme (définition 7.212). En effet l'inégalité triangulaire s'exprime de la façon suivante en termes de la norme $\|.\|_2$:

$$\|A - B\|_2 \leqslant \|A - C\|_2 + \|C - B\|_2. \tag{10.164}$$ EqNDeuxAmBNNdd

En notant $u = A - C$ et $v = C - B$, l'équation (10.164) devient exactement la propriété de définition de la norme :

$$\|u + v\|_2 \leqslant \|u\|_2 + \|v\|_2. \tag{10.165}$$

Ceci explique pourquoi cette propriété des normes est appelée « inégalité triangulaire ».

10.4 Équivalence des normes

normes_equiv

Au premier coup d'œil, les notions dont nous parlons dans ce chapitre ont l'air très générales. Nous prenons en effet n'importe quel espace vectoriel V de dimension finie, et nous le munissons de n'importe quelle norme. Rien que dans $\mathbb{R}^m$ nous allons en définir une infinité par l'équation (17.429)). À partir de ces données, nous définissons les boules, la topologie, l'adhérence, etc.

10.4.1 En dimension finie

Dans $\mathbb{R}^n$, les normes $\|.\|_{L^1}$, $\|.\|_{L^2}$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas égales. Cependant elles ne sont pas complètement indépendantes au sens où l'on sent bien que si un vecteur sera grand pour une norme, il sera également grand pour les autres normes ; les normes « vont dans le même sens ». Cette notion est précisée par le concept de norme équivalente.

LEMooHADefEqvNorN

Proposition-Définition 10.58 ([372]).
Soient deux normes N_1 et N_2 sur l'espace vectoriel E de dimension finie. Nous disons que $N_1 \sim N_2$ si et seulement si il existe des réels strictement positifs k_1, k_2 tels que

$$k_1 N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant k_2 N_1(x). \tag{10.166}$$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence[31] *sur l'ensemble des normes de E.*
Si $N_1 \sim N_2$ nous disons que les normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}^m$ sont ***équivalentes****.*

Démonstration. Vu que tous les nombres sont strictement positifs, nous pouvons multiplier et diviser sans changer le sens des inégalités. Gardant cela en tête, nous faisons les trois vérifications.

(1) **réflexive** Nous avons $N_1 \sim N_1$ avec $k_1 = k_2 = 1$.

(2) **Symétrique** Supposons avoir k_1, k_2 tels que $k_1 N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant k_2 N_1(x)$. Alors nous avons aussi

$$\frac{1}{k_2} N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \frac{1}{k_1} N_2(x). \tag{10.167}$$

[31] Définition 1.50.

(3) **Transitive** Supposons $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$. Nous avons donc des nombres k_1, k_2, l_1 et l_2 tels que

$$\begin{aligned} k_1 N_1(x) &\leqslant N_2(x) \\ N_2(x) &\leqslant k_2 N_1(x) \\ l_1 N_2(x) &\leqslant N_3(x) \\ N_3(x) &\leqslant l_2 N_2(x). \end{aligned} \tag{10.168}$$

En combinant,

$$k_1 l_1 N_1(x) \leqslant l_1 N_2(x) \leqslant N_3(x) \leqslant l_2 N_2(x) \leqslant l_2 k_2 N_1(x). \tag{10.169}$$

En particulier, $k_1 l_1 N_1(x) \leqslant N_3(x) \leqslant l_2 k_2 N_1(x)$. □

PropLJEJooMOWPNi

Proposition 10.59.
Pour $\mathbb{R}^n$, nous avons les équivalences de normes $\|.\|_{L^1} \sim \|.\|_{L^2}$, $\|.\|_{L^1} \sim \|.\|_\infty$ et $\|.\|_{L^2} \sim \|.\|_\infty$. Plus précisément nous avons les inégalités[32]

ItemABSGooQODmLNi

ItemABSGooQODmLNii

ItemABSGooQODmLNiii

(1) $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$

(2) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$

(3) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$

Démonstration. En mettant au carré la première inégalité nous voyons que nous devons vérifier l'inégalité

$$|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leqslant \big(|x_1| + \cdots + |x_n|\big)^2 \tag{10.170}$$

qui est vraie parce que le membre de droite est égal au carré de chaque terme plus les doubles produits. La seconde inégalité provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 10.1) sur les vecteurs

$$v = \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}. \tag{10.171}$$

Nous trouvons

$$\frac{1}{n}\sum_i |x_i| \leqslant \sqrt{n \cdot \frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_i |x_i|^2}, \tag{10.172}$$

et par conséquent

$$\sum_i |x_i| \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2. \tag{10.173}$$

La première inégalité de (3) se démontre en remarquant que si a et b sont positifs, $a \leqslant \sqrt{a^2 + b}$. En appliquant cela à $a = \max_i |x_i|$, nous avons

$$\max_i |x_i| \leqslant \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \tag{10.174}$$

parce que $\max_i |x_i|$ est évidemment un des termes de la somme. Pour la seconde inégalité de (3), nous avons

$$\sqrt{\sum_k |x_k|^2} \leqslant \left(\sum_k \max_i |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty. \tag{10.175}$$

Pour obtenir cette inégalité, nous avons remplacé tous les termes $|x_k|$ par le maximum. □

Pour les autres normes $\|.\|_p$, il y a des inégalités dans 17.106 et 17.98 ; voir aussi le thème 25.
Une dernière avant l'équivalence de toutes les normes.

Proposition-Définition 10.60.
Les topologies suivantes sont égales sur $\mathbb{R}^n$.

ITEMooWACPooFBAWhx

ITEMooJPJHooGTuLen

(1) La topologie produit $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ des espaces topologiques $(\mathbb{R}, |.|)$,

(2) La topologie de la norme

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_i\{|x_i|\}, \tag{10.176}$$

[32] Les racines carrés sont définies en 9.100.

ITEMooEBYQooXiOOtb

(3) *La topologie de la norme*

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}. \tag{10.177}$$

Elle est la topologie que nous allons toujours considérer sur $\mathbb{R}^n$ (sauf mention très explicite du contraire).

Démonstration. Les topologies (1) et (2) sont identiques par le lemme 7.283. Les topologies (2) et (3) sont identiques par la proposition 10.59. □

En réalité, toutes les normes $\|.\|_{L^p}$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes et, plus généralement, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

ThoNormesEquiv

Théorème 10.61 ([373, 374])**.**
Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. Soit un espace vectoriel V de dimension finie. Nous allons montrer que toutes les normes sont équivalentes à la norme $\|.\|_\infty$. Soit donc une norme N sur V.

(1) **Inégalité dans un sens** Vu que V est de dimension finie, il accepte une base $\{e_1,\dots,e_n\}$. En posant $D=\sum_{i=1}^{n}N(e_i)$, nous avons

$$N(x)=N(\sum_i x_ie_i)\leqslant\sum_i|x_i|N(e_i)\leqslant n\|x\|_\infty D. \tag{10.178}$$

Nous avons donc l'inégalité[33]

$$N(x)\leqslant nD\|x\|_\infty. \tag{10.179}$$

(2) **Dans l'autre sens** La proposition 7.213 donne

$$\big|N(x)-N(y)\big|\leqslant N(x-y)\leqslant Dn\|x-y\|_\infty. \tag{10.180}$$

Donc l'application $N\colon(V,\|.\|_\infty)\to\mathbb{R}$ est continue. Vu que la sphère

$$S=\{x\in V\text{ tel que }\|x\|_\infty=1\} \tag{10.181}$$

est compacte[34], la fonction continue N y prend un minimum[35]. Il existe donc $m>0$ tel que $m\leqslant N(x)$ pour tout $x\in S$.

Soit $x\in V$. Nous avons $x/\|x\|_\infty\in S$, de telle sorte que

$$m\leqslant N(\frac{x}{\|x\|})=\frac{1}{\|x\|_\infty}N(x), \tag{10.182}$$

ou encore $N(x)\geqslant m\|x\|_\infty$.

(3) **Conclusion** Pour tout $x\in V$ nous avons les inégalités

$$m\|x\|_\infty\leqslant N(x)\leqslant nD\|x\|_\infty. \tag{10.183}$$

Donc toutes les normes sont équivalentes à la norme $\|.\|_\infty$.

Comme l'équivalence de norme est transitive, toutes les normes sont équivalentes.

□

CORooBRDYooLmGJDE

Corolaire 10.62.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ deux normes sur V. Alors l'identité $i\colon V\to V$ est un isomorphisme d'espace topologique $(V,\|.\|_1)\to(V,\|.\|_2)$.

De plus les ouverts sont les mêmes : une partie de V est ouverte dans $(V,\|.\|_1)$ si et seulement si elle est ouverte dans $(V,\|.\|_2)$.

[33] Dans 10.61, le n n'apparaît pas dans la majoration. C'est lui ou moi qui fait une erreur ? Pourquoi ?
[34] La partie S est fermée et bornée de $(V,\|.\|_\infty)$, voir le théorème 9.24.
[35] Théorème de Weierstrass 7.196.

Démonstration. Le théorème 10.61 nous dit qu'il existe des nombres $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1 \tag{10.184}$$

pour tout $x \in V$. Soit un 2-ouvert $\mathcal{O}$. Nous prouvons que $i^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ est un 1-ouvert. Pour cela, soit $a \in \mathcal{O}$. Vu que $\mathcal{O}$ est un 2-ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_2(a, r) \subset \mathcal{O}$. Prouvons que $B_1(a, r/\beta) \subset B_2(a, r)$. En effet si $y \in B_1(a, r/\beta)$, alors

$$\|y - a\|_2 \leqslant \beta\|y - a\|_1 \leqslant r. \tag{10.185}$$

Nous avons donc

$$B_1(a, r/\beta) \subset B_2(a, r) \subset \mathcal{O} = i^{-1}(\mathcal{O}). \tag{10.186}$$

Donc $i^{-1}(\mathcal{O})$ contient un 1-ouvert autour de chacun de ses points. Il est donc 1-ouvert.

Pour prouver que i^{-1} est continue, c'est la même chose. □

NORMooNKBCooKziIjx

10.63.
Le lemme 10.25 donnera une norme sur $\mathbb{R}^2$ qui ne dérive pas d'un produit scalaire. Vu que toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ produisent la même topologie (c'est le corolaire 10.62), il y a parfaitement moyen pour deux espaces vectoriels topologiques d'être isomorphes alors que l'un a une norme dérivant d'un produit scalaire et l'autre non.

10.64.
Le théorème d'équivalence de norme sera utilisé pour montrer que l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées de signature (p, q) est ouvert dans l'ensemble des formes quadratiques, proposition 17.117. Plus généralement il est utilisé à chaque fois que l'on fait de la topologie sur les espaces de matrices en identifiant $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$, pour se rassurer en se disant que ce qu'on fait ne dépend pas de la norme choisie.

Voir aussi ce qu'on en fait en 12.317 pour démontrer la différentiabilité à partir des dérivées partielles.

PROPooNTCFooEcwZwt

Proposition 10.65 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Pour une base $B = \{e_i\}$ de V nous définissons

$$\|\sum_k v_k e_k\|_B = \sqrt{\sum_k |v_k|^2}. \tag{10.187}$$

EQooEGXVooLASQIC

(1) La formule (10.187) définit une norme sur V.

(2) Si B et B' sont des bases de V, alors les topologies induites par la norme $\|.\|_B$ et $\|.\|_{B'}$ sont égales.

Démonstration. Nous commençons par fixer une base $B = \{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de V. Cette base nous permet de définir

$$\begin{aligned} \varphi\colon V &\to \mathbb{C}^n \\ \sum_k v_k e_k &\mapsto (v_1, \dots, v_n). \end{aligned} \tag{10.188}$$

Cette application linéaire permet d'écrire

$$\|v\|_V = \|\varphi(v)\|_{\mathbb{C}^n}. \tag{10.189}$$

À partir de là, la vérification des propriétés de la définition 7.212 est immédiate. Par exemple :

$$\|v + w\| = \|\varphi(v + w)\| = \|\varphi(v) + \varphi(w)\| \leqslant \|\varphi(v)\| + \|\varphi(w)\| = \|v\| + \|w\|. \tag{10.190}$$

En ce qui concerne la seconde assertion, c'est le théorème 10.61. □

10.4.2 Contre-exemple en dimension infinie

SubSecPOlynomesCE

Lorsque nous considérons des espaces vectoriels de dimension infinie, les choses ne sont plus aussi simples. Nous voyons ici sur l'exemple de l'espace des polynômes que le théorème 10.61 n'est plus valable si on enlève l'hypothèse de dimension finie.

On considère l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels sur l'intervalle $[0, 1]$.

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}}([0, 1]) = \{p : [0, 1] \to \mathbb{R} \,|\, p : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,\ a_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \mathbb{N}\}. \tag{10.191}$$

Cet ensemble, muni des opérations usuelles de somme entre polynômes et multiplications par les scalaires, est un espace vectoriel.

Sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ on définit les normes suivantes

$$\begin{aligned}\|p\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]}\{p(x)\},\\ \|p\|_1 &= \int_0^1 |p(x)|\,dx,\\ \|p\|_2 &= \left(\int_0^1 |p(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{10.192}$$

Les inégalités suivantes sont immédiates

$$\begin{aligned}\|p\|_1 &= \int_0^1 |p(x)|\,dx \leqslant \|p\|_\infty,\\ \|p\|_2 &= \left(\int_0^1 |p(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant \|p\|_\infty,\end{aligned}\tag{10.193}$$

mais la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est équivalente ni à $\|\cdot\|_1$, ni à $\|\cdot\|_2$. Soit $p_k(x) = x^k$. Alors

$$\begin{aligned}\|p_k\|_\infty &= 1,\\ \|p_k\|_1 &= \int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1},\\ \|p_k\|_2 &= \left(\int_0^1 x^{2k}\,dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2k+1}}.\end{aligned}\tag{10.194}$$

Pour $k\to\infty$ les normes $\|p_k\|_1$, $\|p_k\|_2$ tendent vers zéro, alors que la norme $\|p_k\|_\infty$ est constante, donc les normes ne sont pas équivalentes parce que il n'existe pas un nombre positif m tel que

$$\begin{aligned}m\|p_k\|_\infty &\leqslant \|p_k\|_1,\\ m\|p_k\|_\infty &\leqslant \|p_k\|_2,\end{aligned}\tag{10.195}$$

uniformément pour tout k dans $\mathbb{N}$.

PROPooILSOooPdUyFu

Proposition 10.66 ([1]).
Soit un espace vectoriel normé E de dimension n ainsi qu'un ouvert $U\subset E$. Il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ et une bijection isométrique $g\colon V\to U$.

10.5 Norme opérateur

La proposition suivante donne une norme (au sens de la définition 7.212) sur $\mathcal{L}(V,W)$ dès que V et W sont des espaces vectoriels normés.

DefNFYUooBZCPTr

Définition 10.67 (Norme opérateur[375], thème 40).
Soient des espaces vectoriels normés $(V,\|.\|_V)$ et $(W,\|.\|_W)$. Soient une application linéaire $T\colon V\to W$, et le nombre

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\substack{x\in V\\ x\neq 0}} \frac{\|T(x)\|_W}{\|x\|_V}.\tag{10.196}$$

*Le nombre $\|T\|_{\mathcal{L}}$ est la **norme opérateur** de T. Nous disons que cette norme est **subordonnée** aux normes choisies sur V et W.*

Si $\|T\|<\infty$, nous disons que T est borné[36]*. Nous notons*

$$\mathcal{L}^0(V,W) = \{T\in\mathcal{L}(V,W) \text{ tel que } \|T\|<\infty\}.\tag{10.197}$$

PROPooQMZLooOxBrmt

Proposition 10.68.
Si V est de dimension finie, alors $\|T\|_{\mathcal{L}}<\infty$ pour tout $T\in\mathcal{L}(V,W)$.

[36] Nous verrons plus tard que si V est de dimension infinie, ce n'est pas garanti.

Démonstration. Si V est de dimension finie alors l'ensemble $\{x \in V \text{ tel que } \|x\| = 1\}$ est compact par le théorème de Borel-Lebesgue 9.24. Alors la fonction

$$x \mapsto \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \tag{10.198}$$

est une fonction continue sur un compact. Le corolaire 7.348 nous dit alors qu'elle est bornée. Le supremum est donc un nombre réel fini. □

PROPooZBJXooNDsqax

Proposition 10.69.
À propos d'opérateurs bornés.

(1) *La partie $\mathcal{L}^0(V,W)$ des applications linéaires bornées est un espace vectoriel.*

(2) *Le couple $\big(\mathcal{L}^0(V,W), \|.\|\big)$ est un espace vectoriel normé*[37].

Démonstration. Nous vérifions que l'application $\|.\|$ de $\mathcal{L}(V,W)$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie est effectivement une norme.

(1) $\|T\|_{\mathcal{L}} = 0$ signifie que $\|T(x)\| = 0$ pour tout x dans V. Comme $\| \cdot \|_W$ est une norme nous concluons que $T(x) = 0$ pour tout x dans V, donc T est l'application nulle.

(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout T dans $\mathcal{L}(V,W)$ nous avons

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\substack{x\in V\\ x\neq 0}} \frac{\|(\lambda T)(x)\|_W}{\|x\|_V} = \sup \frac{|\lambda|\|T(x)\|_W}{\|x\|} = |\lambda|\|T\|_{\mathcal{L}}. \tag{10.199}$$

(3) Pour tous T_1 et T_2 dans $\mathcal{L}(V,W)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|T_1 + T_2\|_{\mathcal{L}} &= \sup_{\substack{x\in V\\ x\neq 0}} \frac{\|T_1(x) + T_2(x)\|}{\|x\|} && \text{(10.200a)}\\
&\leqslant \sup \frac{\|T_1(x) + T_2(x)\|}{\|x\|} && \text{(10.200b)}\\
&= \sup \left(\frac{\|T_1(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|T_2(x)\|}{\|x\|} \right) && \text{(10.200c)}\\
&=\leqslant \sup \frac{\|T_1(x)\|}{\|x\|} + \sup \frac{\|T_2(x)\|}{\|x\|} && \text{(10.200d)}\\
&= \|T_1\| + \|T_2\|. && \text{(10.200e)}
\end{aligned}$$

□

PROPooWHJCooXxCSWp

Proposition 10.70.
Nous avons la formule

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{x\in V} \frac{\|T(x)\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V=1} \|T(x)\|_W \tag{10.201}$$

EqFZPooIoecGH

Démonstration. Nous allons montrer que les ensembles sur lesquels ont prend le supremum sont en réalité les mêmes :

$$\underbrace{\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\}_{x\neq 0}}_{A} = \underbrace{\{\|Ax\| \text{ tel que } \|x\| = 1\}}_{B}. \tag{10.202}$$

Attention : ce sont des sous-ensembles de réels ; pas de sous-ensembles de $\mathbb{M}(\mathbb{R})$ ou des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.

Pour la première inclusion, prenons un élément de A, et prouvons qu'il est dans B. C'est-à-dire que nous prenons $x \in V$ et nous considérons le nombre $\|Ax\|/\|x\|$. Le vecteur $y = x/\|x\|$ est un vecteur de norme 1, donc la norme de Ay est un élément de B, mais

$$\|Ay\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{10.203}$$

Nous avons donc $A \subset B$.

L'inclusion $B \subset A$ est immédiate. □

[37] Espace vectoriel normé, définition 7.212.

10.5.1 Matrice bloc-diagonale

Avec un dessin, on comprend bien ce que c'est. À faire réellement, c'est beaucoup de soucis. Mais bon. Nous sommes courageux et nous nous y collons.

DEFooBPPGooFFMXny

Définition 10.71 (Matrice bloc-diagonale[1])**.**
Soient des matrices carrées $B_i \in \mathbb{M}(n_i, \mathbb{K})$. Nous posons : $n = \sum_i n_i$,

$$\sigma_k = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i, \tag{10.204}$$

et

$$s(\alpha) = \max\{l \in \mathbb{N} \text{ tel que } \sigma_l \leqslant \alpha\}. \tag{10.205}$$

En ce qui concerne vos dessins, σ_k est l'endroit dans A où la matrice B_k commence et $s(\alpha)$ est le numéro i de la matrice B_i qui se trouve à la position α.

*La matrice **bloc-diagonale** A de blocs B_i est la matrice $n \times n$ donnée par*

$$A_{\alpha,\beta} = (B_{s(\alpha)})_{\alpha-\sigma_{s(\alpha)}+1,\beta-\sigma_{s(\alpha)}+1} \tag{10.206}$$

si $1 \leqslant \alpha - \sigma_{s(\alpha)} + 1 \leqslant n_i$ et $1 \leqslant \beta - \sigma_{s(\alpha)} + 1 \leqslant n_i$ et

$$A_{\alpha,\beta} = 0 \tag{10.207}$$

sinon.

10.72.
Au vu de cette longue définition, je crois qu'il vaut en réalité mieux définie une matrice bloc-diagonale comme étant la matrice d'une application bloc-diagonale.

DEFooSIAIooFOAPvu

Définition 10.73 (Application bloc-diagonale[1])**.**
*Soient des espaces vectoriels V_i. Nous supposons que tous ces espaces sont différents. Nous posons $V = \bigoplus_i V_i$. Une application linéaire $f : V \to V$ est **bloc-diagonale** si elle peut être écrite sous la forme*

$$f = \sum_i s_i \circ f_i \circ \texttt{proj}_i \tag{10.208}$$

où

(1) $f_i : V_i \to V_i$ est une application linéaire,

(2) $\texttt{proj}_i : V \to V_i$ est la projection canonique.

(3) $s_i : V_i \to V$ est l'inclusion canonique.

LEMooHGCKooBzfAtg

Lemme 10.74.
Si f est une application bloc-diagonale[38] formée des sous-applications (f_i), alors f^k $(k \in \mathbb{Z})$ est une application bloc-diagonale formée des sous-applications f_i^k.

Démonstration. Nous avons

$$f^2 = \sum_{ij} s_i \circ f_i \circ \texttt{proj}_i \circ s_j \circ f_j \circ \texttt{proj}_j . \tag{10.209}$$

Notez que si $i \neq j$, alors $\texttt{proj}_i \circ s_j = 0$. Nous pouvons donc enlever une somme et obtenir

$$f^2 = \sum_i s_i \circ f_i^2 \circ \texttt{proj}_i, \tag{10.210}$$

qui est la forme bloc-diagonale que nous voulions. □

PROPooJUYCooHnlFef

Proposition 10.75 ([1])**.**
Si A est une matrice bloc-diagonale, alors la norme de A majore la norme de chacun de ses blocs.

[38] Définition 10.73.

Démonstration. Soient des matrices carrées $B_i \in \mathbb{M}(n_i, \mathbb{R})$. La matrice A est celle dont les blocs sont les B_i. Nous fixons i et nous considérons un vecteur $u \in \mathbb{R}^{n_i}$ tel que $\|u\| = 1$ et $\|B_i\| = \|B_i u\|$.

Nous considérons aussi l'application $f_k : \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R}^n$ qui consiste à ajouter des zéros au-dessus et en-dessous de telle façon à avoir $A \circ f_k = f_k \circ B_k$. Nous avons alors

$$\|A\| \geqslant \|(A \circ f_i)(u)\| = \|(f_i \circ B_i)(u)\| = \|B_i(u)\| = \|B_i\|. \tag{10.211}$$

□

En d'autres termes, il y a autant de normes opérateur sur $\mathcal{L}(E, F)$ qu'il y a de paires de choix de normes sur E et F. En particulier, cela donne lieu à toutes les normes $\|A\|_p$ qui correspondent aux normes $\|.\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$.

EXooXPXAooYyBwMX

Exemple 10.76.
Voyons la norme opérateur subordonnée à la norme $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ sur $\mathbb{C}^n$. Par la proposition 10.70,

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty. \tag{10.212}$$

Vu que $(Ax)_i = \sum_k A_{ik} x_k$, lorsque $\|x\|_\infty \leqslant 1$ nous avons $|(Ax)_i| \leqslant \sum_k |A_{ik}|$. Donc nous avons toujours

EQooPLCIooVghasD

$$\|A\|_\infty \leqslant \max_i \sum_k |A_{ik}|. \tag{10.213}$$

△

Définition 10.77.
*La **topologie forte** sur l'espace des opérateurs est la topologie de la norme opérateur.*

Lorsque nous considérons un espace vectoriel d'applications linéaires, nous considérons toujours[39] dessus la topologie liée à cette norme.

10.5.2 Norme d'algèbre

DefJWRWQue

Définition 10.78 (Norme d'algèbre[375])**.**
*Si A est une algèbre[40], une **norme d'algèbre** sur A est une norme telle que pour toute $x, y \in A$,*

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{10.214}$$

La norme opérateur est une norme d'algèbre, comme nous le verrons dans le lemme 10.84.

Un des intérêts d'utiliser une norme d'algèbre est que l'on a l'inégalité $\|x^k\| \leqslant \|x\|^k$. Cela sera particulièrement utile lors de l'étude des séries entières, voir par exemple 15.13.

DEFooEAUKooSsjqaL

Définition 10.79 ([376])**.**
*Le **rayon spectral** d'une matrice carrée A, noté $\rho(A)$, est défini de la manière suivante :*

EQooNVNOooNjJhSS

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| \tag{10.215}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A.

10.80.
Quelques remarques sur la définition du rayon spectral.

- Même si A est une matrice réelle, les valeurs propres sont dans $\mathbb{C}$. Donc dans (10.215), $|\lambda_i|$ est le module dans $\mathbb{C}$ de λ_i.
- Puisque les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique (théorème 8.113), il y en a un nombre fini et le maximum est bien défini.
- La définition s'applique uniquement pour les espaces de dimension finie.

LEMooIBLEooLJczmu

Lemme 10.81.
Soient des espaces vectoriels normés E et F, sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $A \in \mathcal{L}(E, F)$, et pour tout $u \in E$ nous avons la majoration

$$\|Au\| \leqslant \|A\|\|u\| \tag{10.216}$$

où la norme sur A est la norme opérateur subordonnée à la norme sur u.

[39] Sauf lorsque les événements nous forceront à trahir.
[40] Définition 1.461.

Démonstration. Si $u \in E$ alors, étant donné que le supremum d'un ensemble est plus grand ou égal à chacun des éléments qui le compose,

$$\|A\| = \sup_{x \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geqslant \frac{\|Au\|}{\|u\|}, \tag{10.217}$$

donc le résultat annoncé : $\|Au\| \leqslant \|A\|\|u\|$. □

Le lemme suivant est valable en dimension infinie. Nous en toucherons un mot dans l'exemple 10.89.

LEMooWFNXooLyTyyX

Lemme 10.82.
Soient des espaces vectoriels normés E et F. Soit $x \in E$. Alors l'application d'évaluation

$$\begin{aligned} ev_x \colon \mathcal{L}(E,F) &\to F \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{10.218}$$

est continue.

Démonstration. Si $x = 0$, alors par linéarité de f nous avons $ev_0(f) = 0$ pour tout f. Donc d'accord pour la continuité.

Soit une suite convergente $f_k \xrightarrow{\mathcal{L}(E,F)} f$. Nous voulons prouver que $ev_x(f_k) \xrightarrow{F} ev_x(f)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{k \to \infty} \|f_k(x) - f(x)\| = 0. \tag{10.219}$$

Par hypothèse si k est grand, alors $\|f_k - f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant \epsilon$, c'est-à-dire que[41]

$$\sup_{y \in E} \frac{\|f_k(y) - f(y)\|}{\|y\|} \leqslant \epsilon. \tag{10.220}$$

En particulier pour notre x nous avons

$$\frac{\|f_k(x) - f(x)\|}{\|x\|} \leqslant \epsilon, \tag{10.221}$$

c'est-à-dire $\|f_k(x) - f(x)\| \leqslant \|x\|\epsilon$. Vu que $\|x\|$ est une simple constante et que ϵ est arbitraire, cela implique $f_k(x) \to f(x)$. □

10.6 Application linéaire continue et bornée

NORMooUKURooIkcRoS

10.83.
Quelque notations. Par analogie avec C^0 qui est l'ensemble des applications continues, nous notons $\mathcal{L}^0(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F. De même, $\mathrm{End}^0(E)$ est l'ensemble des endomorphismes continus de E.

LEMooFITMooBBBWGI

Lemme 10.84 (La norme opérateur est une norme d'algèbre[1])**.**
Soient des espaces vectoriels normés E, F et G. Soient des opérateurs linéaires bornés $B \colon E \to F$, $A \colon F \to G$. Alors

$$\|A \circ B\| \leqslant \|A\|\|B\|. \tag{10.222}$$

C'est-à-dire que la norme opérateur est une norme d'algèbre[42].

[41] Définition 10.67 de la norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.
[42] Définition 10.78.

Démonstration. Nous avons les (in)égalités suivantes :

$$\|AB\| = \sup_{x\in E} \frac{\|ABx\|_G}{\|x\|_E} \tag{10.223a}$$

$$= \sup_{\substack{x\in E\\ Bx\neq 0}} \frac{\|ABx\|}{\|x\|}\frac{\|Bx\|_F}{\|Bx\|_F} \tag{10.223b}$$

$$= \sup_{\substack{x\in E\\ Bx\neq 0}} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\frac{\|Bx\|}{\|x\|} \tag{10.223c}$$

$$\leqslant \underbrace{\sup_{\substack{x\in E\\ Bx\neq 0}} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}}_{\leqslant\|A\|} \underbrace{\sup_{\substack{y\in E\\ By\neq 0}} \frac{\|Bx\|}{\|y\|}}_{=\|B\|} \tag{10.223d}$$

$$\leqslant \|A\|\|B\|. \tag{10.223e}$$

La dernière inégalité provient que dans $\sup_{\substack{x\in E\\ Bx\neq 0}} \|ABx\|/\|x\|$, le supremum est pris sur un ensemble plus petit que celui sur lequel porte la définition de la norme de A : seulement l'image de B au lieu de tout l'espace de départ de A. □

La proposition suivante dit qu'une application linéaire est continue si et seulement si elle est bornée. Un résultat similaire pour les applications multilinéaires est dans la proposition 10.103.

PROPooQZYVooYJVlBd

Proposition 10.85 (Bornée si et seulement si continue[377])**.**
Soient E et F des espaces vectoriels normés. Une application linéaire $E \to F$ est bornée si et seulement si elle est continue.

Démonstration. Nous commençons par supposer que A est bornée. Par le lemme 10.84, pour tout $x, y \in E$, nous avons

$$\|A(x) - A(y)\| = \|A(x-y)\| \leqslant \|A\|\|x-y\|. \tag{10.224}$$

En particulier si $x_n \xrightarrow{E} x$ alors

$$0 \leqslant \|A(x_n) - A(x)\| \leqslant \|A\|\|x_n - x\| \to 0 \tag{10.225}$$

et A est continue en vertu de la caractérisation séquentielle de la continuité, proposition 7.187.

Nous supposons maintenant que $\|A\|$ n'est pas borné : l'ensemble $\{\|A(x)\| \text{ tel que } \|x\| = 1\}$ contient des valeurs arbitrairement grandes. Alors pour tout $k \geqslant 1$ il existe $x_k \in B(0,1)$ tel que $\|A(x_k)\| > k$. La suite x_k/k tend vers zéro parce que $\|x_k\| = 1$, mais $\|A(x_k)\| \geqslant 1$ pour tout k. Cela montre que A n'est pas continue. □

Nous avons vu dans la proposition 10.85 que pour une application linéaire, être bornée est équivalent à être continue. Nous allons maintenant voir un certain nombre d'exemples illustrant ce fait.

ExHKsIelG

Exemple 10.86 (Une application linéaire non continue)**.**
Soit V l'espace vectoriel normé des suites *finies* de réels muni de la norme usuelle $\|c\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} |c_i|^2}$ où la somme est finie. Nous nommons $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la base usuelle de cet espace, et nous considérons l'opérateur $f : V \to V$ donnée par $f(e_k) = ke_k$. C'est évidemment linéaire, mais ce n'est pas continu en zéro. En effet la suite $u_k = e_k/k$ converge vers 0 alors que $f(u_k) = e_k$ ne converge pas. △

Cet exemple aurait pu également être donnée dans un espace de Hilbert, mais il aurait fallu parler de domaine.

EXooDMVJooAJywMU

Exemple 10.87 (Une autre application linéaire non continue[378])**.**
En dimension infinie, une application linéaire n'est pas toujours continue. Soit E l'espace des polynômes à coefficients réels sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme. L'application de dérivation $\varphi : E \to E$, $\varphi(P) = P'$ n'est pas continue.

Pour la voir nous considérons la suite $P_n = \frac{1}{n}X^n$. D'une part nous avons $P_n \to 0$ dans E parce que $P_n(x) = \frac{x^n}{n}$ avec $x \in [0,1]$. Mais en même temps nous avons $\varphi(P_n) = X^{n-1}$ et donc $\|\varphi(P_n)\| = 1$.

Nous n'avons donc pas $\lim_{n\to\infty} \varphi(P_n) = \varphi(\lim_{n\to\infty} P_n)$ et l'application φ n'est pas continue en 0. Elle n'est donc continue nulle part par linéarité.

Nous avons utilisé le critère séquentiel de la continuité, voir la définition 7.150 et la proposition 7.187. △

RemOAXNooSMTDuN

Remarque 10.88.
Cette proposition permet de retrouver l'exemple 10.86 plus simplement. Si $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une base d'un espace vectoriel normé formée de vecteurs de norme 1, alors l'opérateur linéaire donné par $u(e_k) = ke_k$ n'est pas borné et donc pas continu.

C'est également ce résultat qui montre que le produit scalaire est continu sur un espace de Hilbert par exemple.

EXooTQPEooRRdddt

Exemple 10.89.
Nous avons vu dans le lemme 10.82 que pour un $x \in E$ donné, l'application

$$\begin{aligned} ev_x\colon \mathcal{L}(E,F) &\to F \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{10.226}$$

est continue. Puisque ev_x est linéaire, la proposition 10.85 nous indique que ev_x est bornée. Vérifions-le directement. Le calcul n'est pas très compliqué :

$$\|ev_x\| = \sup_{\|f\|=1} \|ev_x(f)\| = \sup_{\|f\|=1} \|f(x)\| \leqslant \sup_{\|f\|=1} \|x\|\|f\| = \|x\| \tag{10.227}$$

où nous avons utilisé le lemme 10.81 en passant. Donc la norme de ev_x est majorée par $\|x\|$.

Elle est même égale à $\|x\|$. En effet, pour chaque $f \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $\|f\| = 1$, nous avons

$$\|ev_x\| \geqslant \|ev_x(f)\| = \|f(x)\|. \tag{10.228}$$

En prenant $f = \mathrm{Id}$ nous trouvons $\|ev_x\| \geqslant \|x\|$. △

10.6.1 Déterminant entre espaces différents

Il n'existe à priori pas de façons naturelles de définir le déterminant d'une application linéaire $f\colon E \to F$ lorsque E et F sont des espaces vectoriels différents[313].

DEFooJEOMooEXvnUU

Définition 10.90 ([1]).
Si $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{L}^n$ alors le déterminant de f est celui de la matrice dans la base canonique.

PROPooQCPJooFSzaPc

Proposition 10.91 ([313, 1]).
Soient E et F, deux espaces vectoriels de même dimension. Nous considérons une bijection linéaire $\varphi\colon E \to F$, et nous définissons

$$\begin{aligned} \det{}_\varphi\colon \mathcal{L}(E,F) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \det(\varphi^{-1}\circ f). \end{aligned} \tag{10.229}$$

ITEMooERPIooBvkAPo

(1) L'application $f\colon E \to F$ est inversible si et seulement si $\det_\varphi(f) \neq 0$.

ITEMooTLJEooKyPOVs

(2) Si E et F sont des espaces vectoriels normés, alors l'application $\det_\varphi\colon \mathcal{L}(E,F) \to \mathbb{R}$ est continue.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Vu que φ est une bijection, nous avons les équivalences

$$\begin{aligned} f \text{ est inversible} &\Leftrightarrow \varphi^{-1}\circ f \text{ est inversible} && && (10.230a)\\ &\Leftrightarrow \det(\varphi^{-1}\circ f) \neq 0 && \text{prop. 8.15(2)} && (10.230b)\\ &\Leftrightarrow \det_\varphi(f) \neq 0. && && (10.230c) \end{aligned}$$

(2) **Pour (2)** Nous posons

$$\begin{aligned} s\colon \mathcal{L}(E,F) &\to \mathcal{L}(E,E) \\ f &\mapsto \varphi^{-1}\circ f, \end{aligned} \tag{10.230d}$$

et nous commençons par prouver que s est continue. Le lemme 10.84 dit que

$$\|\varphi^{-1}\circ f\| \leqslant \|\varphi^{-1}\|\|f\|, \tag{10.231}$$

de telle sorte que

$$\|s\| = \sup_{\|f\|=1} \|s(f)\| \tag{10.232a}$$
$$\leqslant \sup_{\|f\|=1} \|\varphi^{-1}\|\|f\| \tag{10.232b}$$
$$= \|\varphi^{-1}\|. \tag{10.232c}$$

Donc s est bornée, et donc elle est continue (proposition 10.85). Finalement l'application $\det_\varphi = \det \circ s$ est continue comme composée d'applications continues.

□
PROPooPNMXooLaJDGc

Proposition 10.92 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés E et F de même dimension finie. La partie $\mathrm{GL}(E,F)$ des applications linéaires inversibles est ouverte dans $\mathcal{L}(E,F)$.

Pour la preuve, il faudra utiliser la proposition 10.91.

10.6.1.1 Mini bonus

NORMooUDZOooKxAPit

10.93 ([266]).
Vous vous souvenez de la définition 7.227 d'une somme directe topologique ? Si V est normé, il existe une façon plus directe (mais pas spécialement plus simple) de prouver l'implication (1) ⇒ (2), et en particulier la continuité de s^{-1}. Rappelons que dans le cas normé, nous avons plusieurs façons équivalentes de décrire les topologies[43].

- Sur V_1 et V_2 nous avons la topologie induite, définition 7.27, qui est la même que celle de la restriction de la norme de V (lemme 7.163).
- La topologie sur $V_1 \times V_2$ est la définition 7.63. C'est la même que celle de la norme produit par le lemme 7.283.
- La topologie sur V/V_1 est la topologie quotient 7.67. La proposition 7.410 dit que la norme induite donne la même topologie.

L'espace $V_1 \times V_2$ est muni de sa norme produit de la définition 7.283 : $\|(v_1,v_2)\| = \max\{\|v_1\|,\|v_2\|\}$. Par hypothèse $\psi^{-1}\colon V_1 \oplus V_2 \to V_1 \times V_2$ est linéaire et continue. La proposition 10.85 nous indique qu'elle est alors bornée. Il existe donc un nombre $C \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\|\psi^{-1}(v_1+v_2)\| = \max\{\|v_1\|,\|v_2\|\} \leqslant C\|v_1+v_2\|. \tag{10.233}$$

Nous allons montrer que s^{-1} est séquentiellement continue[44] en partant d'une suite $\alpha_n \xrightarrow{V/V_1} 0$. En vertu de la proposition 7.410, nous avons $d(\alpha_n, V_1) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$.

Chacun des α_n contient un unique élément x_n de V_1, qui est donné par s^{-1} : $x_n = s^{-1}(\alpha_n)$. Nous avons

$$\|\alpha_n\| = \inf_{u\in\alpha_n} \|u\| = \inf_{v\in V_1} \|x_n+v\|. \tag{10.234}$$

Vu que $\|\alpha_n\|$ est donné par un infimum, nous pouvons, pour chaque n, choisir $v \in V_1$ de telle sorte que $x_n + v_n$ ne soit pas trop loin d'être l'infimum :

$$\big|\|x_n+v_n\| - \|\alpha_n\|\big| \leqslant \frac{1}{n}. \tag{10.235}$$

Un tel choix nous donne une suite (v_n) dans V_1 telle que

$$\big|\|x_n+v_n\| - \|\alpha_n\|\big| \to 0. \tag{10.236}$$

Vu que $\|\alpha_n\| \to 0$, cela implique $\|x_n+v_n\| \to 0$.

En remettant tout ensemble,

$$\|x_n\| \leqslant \max\{\|x_n\|,\|v_n\|\} \leqslant C\|x_n+v_n\| \to 0. \tag{10.237}$$

Donc $s^{-1}(\alpha_n) = x_n \to 0$, et s^{-1} est séquentiellement continue.

[43] Voir le thème 27.
[44] Définition 7.150. La continuité séquentielle est équivalente à la continuité par la proposition 7.157.

10.6.2 Suites

Nous allons maintenant parler de suites dans $V \times W$. Nous noterons (v_n, w_n) la suite dans $V \times W$ dont l'élément numéro n est le couple (v_n, w_n) avec $v_n \in V$ et $w_n \in W$. La notion de convergence de suite découle de la définition de la norme via la proposition 9.27. Il se fait que dans le cas des produits d'espaces, la convergence d'une suite est équivalente à la convergence des composantes. Plus précisément, nous avons le lemme suivant.

LemCvVxWcvVW

Lemme 10.94.
La suite (v_n, w_n) converge vers (v, w) dans $V \times W$ si et seulement les suites (v_n) et (w_n) convergent séparément vers v et w respectivement dans V et W.

Démonstration. Pour le sens direct, nous devons étudier le comportement de la norme de $(v_n, w_n) - (v, w)$ lorsque n devient grand. En vertu de la définition de la norme dans $V \times W$ nous avons

$$\big\|(v_n, w_n) - (v, w)\big\|_{V\times W} = \max\big\{\|v_n - v\|_V, \|w_n - w\|_W\big\}. \tag{10.238}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence de la suite (v_n, w_n), il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ implique

$$\max\big\{\|v_n - v\|_V, \|w_n - w\|_W\big\} < \varepsilon, \tag{10.239}$$

et donc en particulier les deux inéquations

$$\|v_n - v\| < \varepsilon \tag{10.240a}$$
$$\|w_n - w\| < \varepsilon. \tag{10.240b}$$

De la première, il ressort que $(v_n) \to v$, et de la seconde que $(w_n) \to w$.

Pour le sens inverse, nous avons pour tout ε un N_1 tel que $\|v_n - v\|_V \leqslant \varepsilon$ pour tout $n > N_1$ et un N_2 tel que $\|w_n - w\|_W \leqslant \varepsilon$ pour tout $n > N_2$. Si nous posons $N = \max\{N_1, N_2\}$ nous avons les deux inégalités simultanément, et donc

$$\max\big\{\|v_n - v\|_V, \|w_n - w\|_W\big\} < \varepsilon, \tag{10.241}$$

ce qui signifie que la suite (v_n, w_n) converge vers (v, w) dans $V \times W$. □

PROPooPESUooGAmqCW

Proposition 10.95.
Si A est une partie d'un espace vectoriel normé V et si B est une partie d'un espace vectoriel normé W, alors $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

Démonstration. Nous commençons par prouver que $\overline{A \times B} \subset \bar{A} \times \bar{B}$. Un élément (a, b) dans $\overline{A \times B}$ peut toujours être vu comme la limite d'une suite dans $A \times B$. Soit donc (a_n, b_n) une suite telle que $\lim(a_n, b_n) = (a, b)$ avec $a_n \in A$ et $b_n \in B$. Par le lemme 10.94, nous avons une convergence « composante par composante » : $a_n \to a$ et $b_n \to b$. Mais la suite (a_n) est contenue dans A, donc sa limite, a, est dans $\bar{A}$. De la même manière, $b \in \bar{B}$. Par conséquent $(a, b) \in \bar{A} \times \bar{B}$.

Il faut maintenant prouver l'inclusion inverse. Soit $(a, b) \in \bar{A} \times \bar{B}$. Nous avons des suites (a_n) et (b_n) dans A et B respectivement qui convergent vers a et b. En utilisant à nouveau le lemme 10.94 (mais cette fois dans le sens inverse), nous avons

$$\lim \underbrace{(a_n, b_n)}_{\in A\times B} = (a, b) \in \overline{A \times B}. \tag{10.242}$$

La dernière appartenance est simplement le fait qu'une suite convergente contenue dans $A \times B$ converge dans $\overline{A \times B}$. □

PROPooKDGOooDjWQct

Proposition 10.96 ([1]).
Soit un espace V muni d'un produit scalaire à valeurs dans $\mathbb{K}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nous supposons le produit hermitien, mais ce n'est pas très important ici). Alors l'application

$$\begin{aligned} a\colon V \times V &\to \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y\rangle \end{aligned} \tag{10.243}$$

est continue.

Démonstration. Nous ne disons pas que l'espace $V \times V$ est muni d'un produit scalaire. Mais en tout cas c'est un espace métrique, et $\mathbb{K}$ l'est aussi. Donc a est une application entre deux espaces métriques et elle sera continue si et seulement si elle est séquentiellement continue (propositions 7.187 et 7.152).

Soit donc une suite convergente dans $V \times V$, c'est-à-dire $(x_k, y_k) \xrightarrow{V\times V} (x, y)$. Nous devons démontrer que $\langle x_k, y_k\rangle \xrightarrow{\mathbb{R}} \langle x, y\rangle$. Les majorations usuelles donnent

$$\begin{aligned}\big|\langle x_k, y_k\rangle - \langle x, y\rangle\big| &\leqslant \big|\langle x_k, y_k\rangle - \langle x, y_k\rangle\big| + \big|\langle x, y_k\rangle - \langle x, y\rangle\big| &\text{(10.244a)}\\ &= \big|\langle x_k - x, y_k\rangle\big| + \big|\langle x, y_k - y\rangle\big|. &\text{(10.244b)}\end{aligned}$$

Nous savons du lemme 10.94 que les suites (x_k) et (y_k) sont séparément convergentes : $x_k \xrightarrow{V} x$ et $y_k \xrightarrow{V} y$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz 10.2 nous trouvons

$$\big|\langle x_k - x, y_k\rangle\big| \leqslant \|x_k - x\|\|y_k\|. \tag{10.245}$$

Nous avons $\|x_k - x\| \to 0$ et $\|y_k\| \to \|y\|$, et par la règle du produit de limites dans $\mathbb{R}$ nous avons que $\big|\langle x_k - x, y_k\rangle\big| \to 0$. □

RemTopoProdPasRm

Remarque 10.97.
Il faut remarquer que la norme (7.265) est une norme *par défaut*. C'est la norme qu'on met quand on ne sait pas quoi mettre. Or il y a au moins un cas d'espace produit dans lequel on sait très bien quelle norme prendre : les espaces $\mathbb{R}^m$. La norme qu'on met sur $\mathbb{R}^2$ est

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{10.246}$$

et non la norme « par défaut » de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui serait

$$\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}. \tag{10.247}$$

Les théorèmes que nous avons donc démontré à propos de $V \times W$ ne sont donc pas immédiatement applicables au cas de $\mathbb{R}^2$.

Cette remarque est valable pour tous les espaces $\mathbb{R}^m$. À moins de mention contraire explicite, nous ne considérons jamais la norme par défaut (7.265) sur un espace $\mathbb{R}^m$.

Étant donné la remarque 10.97, nous ne savons pas comment calculer par exemple la fermeture du produit d'intervalle $]0, 1, [\times [4, 5[$. Il se fait que, dans $\mathbb{R}^m$, les fermetures de produits sont quand même les produits de fermetures.

PropovlAxBbarAbraB

Proposition 10.98.
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soient $A \subset V$ et $B \subset W$. Alors

$$\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B} \tag{10.248}$$

pour la norme produit[45] *sur $V \times W$.*

Démonstration. Nous commençons par prouver que $\overline{A \times B} \subset \bar{A}\times\bar{B}$. Soit donc $(x, y) \in \overline{A \times B}$. La proposition 7.154 nous assure de l'existence d'une suite dans $A \times B$ convergent vers (x, y). Nous considérons donc une suite (x_n, y_n) dans $A \times B$ telle que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{V\times W} (x, y). \tag{10.249}$$

Soit $\epsilon > 0$. Si n est assez grand nous avons

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| \leqslant \epsilon. \tag{10.250}$$

Mais

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \|(x_n - x, y_n - y)\| = \max\big(\|x_n - x\|_V, \|y_n - y\|_W\big). \tag{10.251}$$

Donc pour ce n nous avons $\|x_n - x\| \leqslant \epsilon$ et $\|y_n - y\| \leqslant \epsilon$. Nous en déduisons que $x_n \xrightarrow{V} x$ et $y_n \xrightarrow{W} y$. Donc $x \in \bar{A}$ et $y \in \bar{B}$.

Dans l'autre sens maintenant. Soit $(x, y) \in \bar{A} \times \bar{B}$. Nous considérons deux suites (x_n) dans A et (y_n) dans B telles que $x_n \xrightarrow{V} x$ et $y_n \xrightarrow{W} y$. Soit n suffisamment grand pour que $\|x_n - x\| \leqslant \epsilon$ et $\|y_n - y\| \leqslant \epsilon$. Nous avons alors

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \max\{\|x_n - x\|, \|y_n - y\|\} \leqslant \epsilon. \tag{10.252}$$

□

exoEspVectoNorme0002

Proposition 10.99.
Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$.

[45] Définition 7.283.

(1) La partie A est ouverte dans $\mathbb{R}^2$.

(2) L'adhérence de A est donnée par

$$\bar{A} = A \cup \{(x,0) \text{ tels que } x \geqslant 0\} \cup \{(0,y) \text{ tels que } y \geqslant 0\}. \tag{10.253}$$

(3) La frontière de A est donnée par

$$\partial A = \{(x,0) \text{ tels que } x \geqslant 0\} \cup \{(0,y) \text{ tels que } y \geqslant 0\}. \tag{10.254}$$

Démonstration. Point par point.

(1) Prenons $(x,y) \in A$, et tâchons de trouver une boule autour de (x,y) qui soit contenue dans A. Par définition, $x > 0$ et $y > 0$. Donc si nous prenons $r = \min\{x,y\}/2$, la boule $B\big((x,y),r\big)$ est encore contenue dans A.

Notez que l'ensemble des boules du type $\mathcal{O}_{(x,y)} = B\big((x,y), \frac{\min\{x,y\}}{2}\big)$ est un recouvrement de A par des ouverts.

(2) L'adhérence est constituée des points qui « touchent » presque l'ensemble. Intuitivement, nous devinons que l'adhérence de A va être l'ensemble des points (x,y) tels que $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. D'abord, un point (a,b) avec $a < 0$ n'est pas dans $\bar{A}$ parce qu'il existe une boule autour de (a,b) telle que $x < 0$ pour tout (x,y) dans la boule (même chose pour les points avec $y < 0$).

Ensuite, prouvons que les points de la forme $(0,y)$ et $(x,0)$ avec $x,y \geqslant 0$ sont dans $\bar{A}$. Pour cela, rien de tel qu'une suite. La suite $(\frac{1}{n}, y)$ avec $y \geqslant 0$ est contenue dans A, et sa limite est clairement le point $(0,y)$. Nous en concluons que $(0,y)$ est un point de $\bar{A}$.

De la même façon, la suite $(x, \frac{1}{n})$ montre que le point $(x,0)$ est dans $\bar{A}$. Donc

$$\bar{A} = A \cup \{(x,0) \text{ tels que } x \geqslant 0\} \cup \{(0,y) \text{ tels que } y \geqslant 0\}. \tag{10.255}$$

En particulier, le point $(0,0)$ est dans $\bar{A}$.

(3) En ce qui concerne la frontière, nous utilisons la caractérisation $\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int}(A)$. Étant donné que A est ouvert, $\text{Int}(A) = A$. Les points qui sont dans $\bar{A}$ et pas dans A sont les points avec $x = 0$ ou $y = 0$. Donc

$$\partial A = \{(x,0) \text{ tels que } x \geqslant 0\} \cup \{(0,y) \text{ tels que } y \geqslant 0\}. \tag{10.256}$$

L'adhérence peut aussi être trouvée en utilisant la proposition 10.98. Nous avons $A =]0,\infty[\times]0,\infty[$, et par conséquent, la fermeture de A est la produit des fermetures :

$$\bar{A} = [0,\infty[\times [0,\infty[. \tag{10.257}$$

Nous insistons sur le fait que la fermeture de $]0,\infty[$ n'est pas $[0,\infty]$. Ce dernier ensemble n'est pas une partie de $\mathbb{R}$. □

10.6.3 Continuité du produit de matrices

SUBSECooOAWAooFcyUfI

Nous avons introduit des normes sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, entre autres la norme opérateur de la définition 10.67. Qui dit norme dit topologie. Il advient alors la question évidente : est-ce que des opérations aussi élémentaires que le produit de matrices sont continues pour ces topologies ?

Une façon simple de répondre à cela est d'introduire sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ une nouvelle norme très simple : celle de $\mathbb{K}^n$. C'est la topologie par composante. Pour cette topologie, il est simple de voir que le produit matriciel est continu parce que les éléments de AB sont des polynômes en les éléments de A B. Ensuite il suffit d'invoquer l'équivalence de toutes les normes (théorème 10.61).

Voyons comment montrer cela de façon plus directe (bien que le raisonnement précédent soit une démonstration qui devrait déjà avoir convaincu les plus sceptiques). La preuve suivante va donc s'amuser à bien préciser les topologies et caractérisations utilisées.

LEMooRGNRooPovBQw

Lemme 10.100.
Si $\|.\|$ est une norme algébrique sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) alors l'application

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{K}) \times \mathbb{M}(n,\mathbb{K}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{K}) \\ (A,B) &\mapsto AB \end{aligned} \tag{10.258}$$

est continue.

Démonstration. L'espace $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})\times\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ est métrique (définition 7.282), donc la caractérisation séquentielle de la continuité (proposition 7.157) s'applique. Nous considérons donc une suite (A_k,B_k) dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})\times\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ convergente vers (A,B), et nous allons prouver que $p(A_k,B_k)\to p(A,B)$.

Nous savons que la topologie sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})\times\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ est la topologie produit (lemme 7.282) et que celle-ci donne la convergence composante par composante dès que nous avons convergence d'une suite ; c'est la proposition 7.85. Nous avons donc $A_k\xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{K})}A$ et $B_k\xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{K})}B$.

Voilà pour le contexte. Maintenant, la preuve de la continuité. Nous effectuons les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}\|p(A_k,B_K)-AB\|&\leqslant\|p(A_k,B_k)-p(A_k,B)\|+\|p(A_k,B)-AB\|&\text{(10.259a)}\\&=\|A_kB_k-A_kB\|+\|A_kB-AB\|&\text{(10.259b)}\\&=\|A_k(B_k-B)\|+\|(A_k-A)B\|&\text{(10.259c)}\\&\leqslant\underbrace{\|A_k\|}_{\to\|A\|}\underbrace{\|B_k-B\|}_{\to0}+\underbrace{\|A_k-A\|}_{\to0}\|B\|.&\text{(10.259d)}\end{aligned}$$

□

10.7 Applications multilinéaires

SECooBNZHooGfhPRK

10.7.1 Norme

LEMooIEXNooPOHokX

Lemme 10.101 ([1, 77])**.**
Soit un espace de Banach F. Nous considérons une application k-multilinéaire $A\colon(\mathbb{R}^n)^k\to\mathbb{R}$. Nous posons

$$\begin{aligned}a\colon\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}\\x&\mapsto A(x,\dots,x).\end{aligned}\tag{10.260}$$

Alors

ITEMooHELXooHqYioG

(1) Il existe un unique[46] *choix de $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_k}$ tel que*

$$a(x)=\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha x^\alpha.\tag{10.261}$$

Ce choix est donné par

$$a_\alpha=\frac{k!}{\alpha!}A(e_1^{\alpha_1},\dots,a_n^{\alpha_n}).\tag{10.262}$$

ITEMooHMZUooGjtmEB

(2) Nous avons l'inégalité, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{|\alpha|=k}\|a_\alpha x^\alpha\|\leqslant\|A\|\big(|x_1|+\dots+|x_n|\big)^k\leqslant n^{k/2}\|A\|\|x\|^k.\tag{10.263}$$

Démonstration. Nous commençons par le point (1). En plusieurs parties.

(1) **Plein de Définitions** Soit $x\in\mathbb{R}^n$. Nous avons

$$a(x)=A\Big(\sum_{i_1}x_{i_1}e_{i_1},\dots,\sum_{i_k}x_{i_k}e_{i_k}\Big)=\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}A(e_{i_1},\dots,e_{i_k})x_{i_1}\dots x_{i_k}.\tag{10.264}$$

EQooAJCPooQnXdyI

Pour les besoins de la preuve nous posons

$$M=\big\{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,n\}^k\big\}\tag{10.265}$$

et

$$\Lambda_k=\big\{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n\text{ tel que }\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=k\big\}.\tag{10.266}$$

Pour chaque $s\in M$ et $i\in\{1,\dots,n\}$ considérons les indices de s égaux à i, c'est-à-dire

$$P_i(s)=\big\{j\in\{1,\dots,k\}\text{ tel que }s_j=i\big\},\tag{10.267}$$

[46] L'unicité n'est pas démontrée. Écrivez une démonstration sur une feuille de papier, et envoyez-moi une photo de la feuille.

et le nombre de fois que i apparaît dans s, c'est-à-dire

$$f_i(s) = \text{Card}\big(P_i(s)\big), \tag{10.268}$$

et enfin nous posons

$$f(s) = \big(f_1(s), \dots, f_n(s)\big). \tag{10.269}$$

(2) **Les $P_i(s)$ forment une partition de $\{1, \dots, k\}$** D'abord si $l \in P_j(s) \cap P_i(s)$ alors $s_l = i$ et $s_l = j$, ce qui donne $i = j$. Donc $P_i(s) \cap P_j(s) = \varnothing$ dès que $i \neq j$. Ensuite si $l \in \{1, \dots, k\}$, en posant $j = s_l$ nous avons $l \in P_j(s) \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i(s)$.

Bref nous avons bien

$$\{1, \dots, k\} = \bigcup_{i=1}^{n} P_i(s) \tag{10.270}$$

EQooNLPRooFFwhYb

et l'union est disjointe.

(3) **$f(s) \in \Lambda_k$** Étant donné que $f_i(s) = \text{Card}\big(P_i(s)\big)$, et que l'union (10.270) est disjointe[47] nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(s) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(P_i(s)) = \text{Card}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} P_i(s)\Big) = \text{Card}\{1, \dots, k\} = k. \tag{10.271}$$

(4) **$f\colon M \to \Lambda_k$ est surjective** Pour $\alpha \in \Lambda_k$ nous posons

$$s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{\alpha_n \text{ fois}}). \tag{10.272}$$

Vu que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, ce s est bien dans $M = \{1, \dots, n\}^k$. Avec ça, l'ensemble des positions dans s où apparaît le 1 est $\{1, \dots, \alpha_1\}$, de telle sorte que $P_1(s) = \{1, \dots, \alpha_1\}$ et donc $f_1(s) = \alpha_1$. De même pour les autres $i = 1, \dots, n$. Donc $\text{Card}\big(P_i(s)\big) = \alpha_i$, et

$$f(s) = \alpha. \tag{10.273}$$

(5) **Stabilisateur** Le groupe symétrique S_k agit sur M par $\sigma(s)_i = s_{\sigma(i)}$. Soient $\alpha \in \Lambda_k$ et $s \in f^{-1}(\alpha)$. Question : quel est le stabilisateur[48] de s dans S_k ?

Étant donne que s contient α_i fois le nombre i aux positions $P_i(s)$, le groupe S_{α_i} peut agir sur $P_i(s)$ sans changer s. Le stabilisateur de s est donc

$$\text{Stab}(s) = S_{\alpha_1} \times \dots \times S_{\alpha_n}. \tag{10.274}$$

(6) **Orbite** Soit encore $s \in f^{-1}(\alpha)$. Quelle est l'orbite de s sous S_k ? Si S_k agit sur s, alors le nombre de $1, \dots, n$ dans $\sigma(s)$ sera le même que dans s ; ils auront juste changé de place. Autrement dit, les ensembles $P_i(s)$ et $P_i\big(\sigma(s)\big)$ ne sont pas identiques, mais leur cardinal sont égaux. Donc $\sigma(s)$ est encore dans $f^{-1}(\alpha)$. Autrement dit, pour l'orbite de s nous avons

$$\mathcal{O}_s = f^{-1}(\alpha). \tag{10.275}$$

EQooFIBBooVcZiOR

(7) **Quelques factorielles** C'est le moment d'utiliser le théorème orbite-stabilisateur 2.34 :

$$\text{Card}(\mathcal{O}_s) = \frac{\text{Card}(S_k)}{\text{Card}\big(\text{Stab}(s)\big)} = \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}. \tag{10.276}$$

En utilisant (10.275) et les notations 3.69,

$$\text{Card}\big(f^{-1}(\alpha)\big) = \frac{k!}{\alpha!}. \tag{10.277}$$

EQooFQONooJhLQER

(8) **$\{f^{-1}(\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda_k}$ est une partition de M** D'une part si $s \in f^{-1}(\alpha) \cap f^{-1}(\beta)$, alors $f(s) = \alpha$ et $f(s) = \beta$ de telle sorte que $\alpha = \beta$. D'autre part si $s \in M$, en posant $\alpha = f(s)$ nous avons bien $s \in f^{-1}(\alpha)$. Bref

$$M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_k} f^{-1}(\alpha) \tag{10.278}$$

et l'union est disjointe.

[47] Nous utilisons le lemme 1.215(1).
[48] Définition 2.29.

(9) **Retour à la fonction a** Nous pouvons maintenant décomposer la somme (10.264) en

$$a(x) = \sum_{s\in M} A(e_{s_1},\dots,e_{s_k})x_{s_1}\dots x_{s_k} \tag{10.279a}$$
$$= \sum_{\alpha\in\Lambda_k}\sum_{s\in f^{-1}(\alpha)} A(e_{s_1},\dots,e_{s_k})x_{s_1}\dots x_{s_k}. \tag{10.279b}$$

Notez que si $f(s) = f(t)$ alors $\text{Card}(P_i(s)) = \text{Card}\big(P_i(t)\big)$, c'est-à-dire que $A(e_{s_1},\dots,e_{s_k})$ et $A(e_{t_1},\dots,e_{t_k})$ contiennent autant de e_i l'un que l'autre. Étant donné que A est symétrique, ça donne $A(e_{s_1},\dots,e_{s_k}) = A(e_{t_1},\dots,e_{t_k})$. Idem pour $x_{s_1}\dots x_{s_k} = x_{t_1}\dots x_{t_k}$.
Donc tous les termes de

$$\sum_{s\in f^{-1}(\alpha)} A(e_{s_1},\dots s_k)x_{s_1}\dots x_{s_k} \tag{10.280}$$

sont égaux et valent

$$A(\underbrace{e_1,\dots,e_1}_{\alpha_1\text{ fois}},\dots,\underbrace{e_n,\dots,e_n}_{\alpha_n\text{ fois}})x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} = A(e_1^{\alpha_1},\dots,e_n^{\alpha_n})x^\alpha. \tag{10.281}$$

EQooCUAOooWhhhAY

La seconde égalité est juste une notation plus compacte.

(10) **Et enfin** En utilisant (10.277) et (10.281) nous trouvons bien

$$a(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha \tag{10.282}$$

avec

$$a_\alpha = \frac{k!}{\alpha!}A(e_1^{\alpha_1},\dots,e_n^{\alpha_n}). \tag{10.283}$$

Cela termine la preuve de (1).

Nous passons à la preuve de (2). Pour chaque $\alpha\in\Lambda_k$ nous avons

$$\|a_\alpha x^\alpha\| = \|\frac{k!}{\alpha!}A(e_1^{\alpha_1},\dots,e_n^{\alpha_n})x^\alpha\| \leqslant \frac{k!}{\alpha!}\|A\||x|^\alpha \tag{10.284}$$

où $|x|^\alpha = |x_1|^{\alpha_1}\dots|x_n|^{\alpha_n}$. En posant $y = \big(|x_1|,\dots,|x_n|\big)$ nous avons donc

$$\|a_\alpha x^\alpha\| \leqslant \frac{k!}{\alpha!}\|A\|y^\alpha. \tag{10.285}$$

En sommant et en utilisant le théorème multinomial 3.37, il vient

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_k}\|a_\alpha x^\alpha\| \leqslant \sum_{\alpha\in\Lambda_k}\frac{k!}{\alpha!}\|A\|y^\alpha \tag{10.286a}$$
$$= \|A\|(y_1+\dots+y_n)^k \tag{10.286b}$$
$$= \|A\|\big(|x_1|+\dots+|x_n|\big)^k. \tag{10.286c}$$

Cela est la première inégalité de (2). Pour la seconde, il suffit d'utiliser l'équivalence de norme de la proposition 10.59(1). □

10.7.2 Continuité

LEMooGQWQooUfqURv

Lemme 10.102 ([379]).
Soit une forme n-multilinéaire $\alpha\in\mathcal{L}_n(E_1,\dots,E_n;F)$. Nous avons la formule

$$\alpha(x_1,\dots,x_n) - \alpha(a_1,\dots,a_n) = \sum_{i=1}^n \alpha(a_1,\dots,a_{i-1},x_i-a_i,x_{i+1},\dots,x_n). \tag{10.287}$$

Démonstration. Nous y allons par récurrence.

(1) $n=2$ Vu que α est multilinéaire, nous avons $\alpha(x_1,x_2) = \alpha(x_1-a_1,x_2)+\alpha(a_1,x_2)$. Avec ça, nous avons

$$\alpha(x_1,x_2)-\alpha(a_1,a_2) = \alpha(x_1-a_1,x_2)+\alpha(a_1,x_2)-\alpha(a_1,a_2) \tag{10.288a}$$
$$= \alpha(x_1-a_1,x_2)+\alpha(a_1,x_2-a_2). \tag{10.288b}$$

(2) **La récurrence** Nous supposons que la formule est valable pour toute application n-multilinéaire, et nous considérons une application $n+1$-multilinéaire $\alpha \in \mathcal{L}_{n+1}(E,F)$. Nous considérons aussi des éléments $x_i, a_i \in E_i$ pour $i = 1, \dots, n+1$. Nous posons

$$\begin{aligned} \alpha' \colon E_1 \times \dots \times E_n &\to F \\ y_1, \dots, y_n &\mapsto \alpha(y_1, \dots, y_n, x_{n+1}). \end{aligned} \tag{10.289}$$

Cela est une application n-multilinéaire. Nous avons ce calcul :

$$\begin{aligned} &\alpha(x_1, \dots, x_{n+1}) - \alpha(a_1, \dots, a_{n+1}) \\ &= \alpha'(x_1, \dots, x_n) - \alpha'(a_1, \dots, a_n) + \alpha'(a_1, \dots, a_n) - \alpha(a_1, \dots, a_{n+1}) && \text{(10.290a)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha'(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \alpha'(a_1, \dots, a_n) - \alpha(a_1, \dots, a_{n+1}) && \text{(10.290b)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha'(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \alpha(a_1, \dots, a_n, x_{n+1}) - \alpha(a_1, \dots, a_{n+1}) && \text{(10.290c)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha'(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \alpha(a_1, \dots, a_n, x_{n+1} - a_{n+1}) && \text{(10.290d)} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) && \text{(10.290e)} \end{aligned}$$

□

PROPooDQBOooByBvmj

Proposition 10.103 ([380]).
Soient des espaces vectoriels normés $E_1, \dots, E_n$ et F. Une application n-multilinéaire $\alpha \colon E_1 \times \dots E_n \to F$ est continue[49] *si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que*

$$\|\alpha(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant \lambda \|x_1\| \dots \|x_n\|. \tag{10.291}$$

EQooGTVEooZsvzAM

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que α est continue. En particulier, elle est continue en $(0, \dots, 0) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Nous considérons $r > 0$ tel que

$$\alpha\big(B(0, 2r)\big) \subset B(0, 1). \tag{10.292}$$

Nous posons $\lambda = 1/r^n$, et nous allons voir que ça fait le boulot. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ avec $x_i \neq 0$ pour tout i. Nous posons $z_i = r x_i / \|x_i\|$, de telle sorte que $\|z_1\| = \dots = \|z_n\| = r$ et donc que $(z_1, \dots, z_n) \in B(0, 2r)$ et donc

$$\|\alpha(z_1, \dots, z_n)\| < 1. \tag{10.293}$$

Mais $\alpha(z_1, \dots, z_n) = r^n / \prod_i \|x_i\|$. Donc avec $\lambda = 1/r^n$ nous trouvons

$$\|\alpha(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant \lambda \prod_i \|x_i\|. \tag{10.294}$$

Si $x_i = 0$, alors c'est encore plus simple parce que la relation (10.291) se réduit à $0 \leqslant 0$.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $\lambda > 0$ vérifie $\|\alpha(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant \lambda \prod_i \|x_i\|$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. En utilisant le lemme 10.102, nous avons, pour tout x_i et a_i :

$$\begin{aligned} \|\alpha(x_1, \dots, x_n) - \alpha(a_1, \dots, a_n)\| &= \| \sum_{i=1}^{n} \alpha(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \| && \text{(10.295a)} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda \|x_i - a_i\| \cdot \prod_{j=1}^{i-1} \|a_j\| \cdot \prod_{j=i+1}^{n} \|x_j\|. && \text{(10.295b)} \end{aligned}$$

SUBEQooYDGCooJFBaxN

Et maintenant nous prenons $0 < \epsilon < 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in B\big((a_1, \dots, a_n), \epsilon\big)$, de telle sorte que $\|x_i - a_i\| < \epsilon$ pour tout i et que

$$\|x_i\| < \|a_i\| + \epsilon \leqslant \|a_i\| + 1. \tag{10.296}$$

[49] Pour la topologie sur $E_1 \times \dots \times E_n$, c'est celle de la norme produit 7.283.

Nous posons $M = \max_{j=1,\dots,n} \|a_j\| : \|x_j\| \leqslant \|a_i\| + 1 \leqslant M + 1$ et nous majorons sauvagement chacun des produits de (10.295b) par $(M+1)^n$:

$$\|\alpha(x_1,\dots,x_n) - \alpha(a_1,\dots,a_n)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda \|x_i - a_i\| (M+1)^{2n} \tag{10.297a}$$

$$\leqslant n\lambda\epsilon(M+1)^{2n}. \tag{10.297b}$$

Nous avons donc bien prouvé que $\alpha(x_1,\dots,x_n) \xrightarrow{F} \alpha(a_1,\dots,a_n)$ lorsque $(x_1,\dots,x_n) \xrightarrow{E_1\times\dots\times E_n} (a_1,\dots,a_n)$.

□

10.7.3 Continuité de la composition

PROPooIPILooZMtYSP

Proposition 10.104 ([1]).
Soit un espace vectoriel normé E. L'application

$$\begin{aligned} \alpha\colon \operatorname{End}(E)^n &\to \operatorname{End}(E) \\ (A_1,\dots,A_n) &\mapsto A_1 \circ \dots \circ A_n \end{aligned} \tag{10.298}$$

est une application multilinéaire continue.

Démonstration. Le fait que α soit multilinéaire est une simple vérification[50]. Pour la continuité, nous utilisons le lemme 10.84 qui donne

$$\|\alpha(A_1,\dots,A_n)\| \leqslant \|A_1\| \dots \|A_n\|. \tag{10.299}$$

Donc $\lambda = 1$ fait fonctionner la proposition 10.103. □

10.7.4 Norme

La proposition suivante[51] doit surement beaucoup à la proposition 10.103.

DEFooTAUWooNDJJEO

Proposition-Définition 10.105 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés $E_1,\dots,E_n$ et F. Si $\alpha\colon E_1 \times \dots \times E_n \to F$ est n-multilinéaire[52], alors

(1) Nous avons

$$\begin{aligned} &\inf\{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall (x_1,\dots,x_n) \in E_1 \times \dots E_n,\ \|\alpha(x_1,\dots,x_n)\| \leqslant \lambda \|x_1\| \dots \|x_n\|\} \\ &\quad = \sup\{\|\alpha(x_1,\dots,x_n)\| \text{ tel que } \|x_i\| \leqslant 1\} \end{aligned} \tag{10.300}$$

(2) Ce nombre est définit une norme sur l'espace des applications n-linéaires.

Voir aussi la définition 10.107 et 10.106.

LEMooORANooRLJYWw

Lemme-Définition 10.106 ([1]).
Soit une forme k-multilinéaire $A\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ ainsi que

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto A(x,\dots,x). \end{aligned} \tag{10.301}$$

Si nous notons

$$a(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda_k} a_\alpha x^\alpha, \tag{10.302}$$

alors l'opération[53]

$$\begin{aligned} N\colon \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \max_{\alpha\in\Lambda_k} |a_\alpha| \end{aligned} \tag{10.303}$$

est une norme.

[50] Que je n'ai pas faite, alors faites-la.
[51] Que je n'ai pas vérifiée. Démontrez-la par vous-même avant de me croire sur parole.
[52] Définition 8.1.
[53] Qui est bien définie par le lemme 10.101(1).

Démonstration. Il faut vérifier les conditions de la définition 7.212 parmi lesquelles nous n'allons faire que l'inégalité triangulaire. Soient les applications k-multilinéaires A et B donnant

$$\begin{aligned} a(x) &= \sum_{\alpha\in\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha \\ b(x) &= \sum_{\alpha\in\Lambda_k} b_\alpha x^\alpha. \end{aligned} \tag{10.304}$$

Étant donnée l'associativité des sommes finies, nous avons

$$(a+b)(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} (a_\alpha + b_\alpha)x^\alpha, \tag{10.305}$$

et donc le calcul suivant :

$$\begin{aligned} N(A+B) &= \max_{\alpha\in\Lambda_k} |a_\alpha + b_\alpha| && (10.306a)\\ &\leqslant \max_{\alpha\in\Lambda_k} \big(|a_\alpha| + |b_\alpha|\big) && (10.306b)\\ &\leqslant \max_{\alpha\in\Lambda_k} |a_\alpha| + \max_{\alpha\in\Lambda_k} |b_\alpha| && (10.306c)\\ &= \|A\| + \|B\|. && (10.306d) \end{aligned}$$

□

10.8 Applications multilinéaires

Voir la définition 8.6 des applications multilinéaires.

DefKPBYeyG

Lemme-Définition 10.107.
Pour $T \in \mathcal{L}_k(E_1,\dots,E_k,F)$ nous posons

$$\|T\| = \sup_{\|v_i\|=1} \|T(v_1,\dots,v_k)\|_W. \tag{10.307}$$

Cela définit une norme.

Voir aussi 10.105.

PropUADlSMg

Proposition 10.108.
Soient des espaces vectoriels normés E_i et F. Une application n-linéaire[54]

$$T\colon E_1 \times \dots \times E_n \to F \tag{10.308}$$

est est continue si et seulement si il existe un réel $L \geqslant 0$ tel que

$$\|T(x_1,\dots,x_n)\|_F \leqslant L\|x_1\|_{E_1}\cdots\|x_n\|_{E_n}, \qquad \forall x_i \in E_i. \tag{10.309}$$

limitatezza

Démonstration. Pour simplifier l'exposition nous nous limitons au cas $n=2$ et nous notons $T(x,y) = x*y$
Supposons que l'inégalité (10.309) soit satisfaite.

$$\begin{aligned} \|x*y - x_0*y_0\| &= \|(x-x_0)*y - x_0*(y-y_0)\| \\ &\leqslant \|(x-x_0)*y\| + \|x_0*(y-y_0)\| \\ &\leqslant L\|x-x_0\|\|y\| + L\|x_0\|\|y-y_0\|. \end{aligned} \tag{10.310}$$

LimImplCont

Si $x\to x_0$ et $y\to y_0$ on voit que T est continue en passant à la limite aux deux côtés de l'inégalité (10.310).

Soit T continue en $(0,0)$. Évidemment[55] $0*0=0$, donc il existe $\delta>0$ tel que si $x\in B_{E_1}(0,\delta)$ et $y\in B_{E_2}(0,\delta)$ alors $\|x*y\|\leqslant 1$. En particulier si $(x,y)\in B_{E_1\times E_2}(0,\delta)$ nous sommes dans ce cas. Soient maintenant $x\in E_1\setminus\{0\}$ et $y\in E_2\setminus\{0\}$

$$x*y = \left(\frac{\|x\|}{\delta}\frac{\delta x}{\|x\|}\right) * \left(\frac{\|y\|}{\delta}\frac{\delta y}{\|y\|}\right) = \frac{\|x\|\|y\|}{\delta^2}\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right) * \left(\frac{\delta y}{\|y\|}\right). \tag{10.311}$$

[54] Définition 8.1.
[55] Dans la formule suivante, les trois zéros sont les zéros de trois espaces différents.

On remarque que $\delta x/\|x\|_m$ est dans la boule de rayon δ centrée en 0_m et que $\delta y/\|y\|_n$ est dans la boule de rayon δ centrée en 0_n. On conclut

$$x * y \leqslant \frac{\|x\|_m\|y\|_n}{\delta^2}.$$

Il faut prendre $L = 1/\delta^2$. □

PROPooOPCVooEWeWha

Proposition 10.109.
Si T est une application 2-linéaire, nous avons

EqYLnbRbC

$$\|T(u,v)\| \leqslant \|T\|\|u\|\|v\|. \tag{10.312}$$

Et nous notons que cette norme est uniquement définie pour les applications linéaires continues. Ce n'est pas très grave parce qu'alors nous définissons $\|T\| = \infty$ si T n'est pas continue. Cela pour retrouver le principe selon lequel on est continue si et seulement si on est borné.

isom_isom

Proposition 10.110.
On définit les fonctions

$$\begin{array}{rccc} \omega_g: & \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)), \\ \omega_d: & \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)), \end{array} \tag{10.313}$$

par

$$\omega_g(T)(x) = T(x, \ \cdot\ ), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

et

$$\omega_d(T)(y) = T(\ \cdot\ , y), \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Les fonctions ω_g et ω_d sont des isomorphismes qui préservent les normes.

10.9 Séries

SECooYCQBooSZNXhd

La notion de somme sur un ensemble infini est donnée en 10.128, voir aussi le thème 53 pour plus de notions de sommes finies et infinies.

DefGFHAaOL

Définition 10.111.
*Soit (a_k) une suite dans un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$. La suite des **sommes partielles** associée est la suite (s_k) définie par*

$$s_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \tag{10.314}$$

*La **série** associée est la limite des sommes partielles*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{10.315}$$

si elle existe.

*Si une telle limite existe nous disons que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **converge** dans V. Si la limite de la suite des sommes partielles n'existe pas nous disons que la série **diverge**.*

Remarque 10.112.
Si la limite de la suite des sommes partielles n'existe pas dans V, alors elle peut parfois exister dans des extensions de V. Par exemple une série de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Autre exemple : avec une bonne topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$, une série peut ne pas converger dans $\mathbb{R}$ mais converger vers $\pm\infty$ dans $\bar{\mathbb{R}}$.

10.113.
Il y a d'autres moyens de sommer. Celle de la définition 10.111 tronque la somme de façon très violente en N et fait $N \to 0$. Des façons plus douces ici : https://youtu.be/beakj767uG4.

DEFooEYYDooQvZGEx

Définition 10.114 (Norme uniforme)**.**
Soit un ensemble X et un espace normé $(E, \|.\|)$. L'application

$$\begin{array}{rl} N: & \mathrm{Fun}(X, E) \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \sup_{x\in X} \|f(x)\| \end{array} \tag{10.316}$$

est une norme sur $\mathrm{Fun}(X, E)$.

LEMooHUZEooSyPipb

Lemme 10.115.
Soit une suite (a_k) dans un espace métrique complet[56] *dont la série converge.*

ITEMooPFSQooDhKFGL

(1) Pour tout N nous avons

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k. \tag{10.317}$$

ITEMooQNHMooUPjupB

(2) La suite des queues de série converge vers 0, c'est-à-dire que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} a_k = 0. \tag{10.318}$$

Démonstration. Voici un petit calcul :

SUBEQooZRSHooSjjsmK

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \big(\sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k \big) \tag{10.319a}$$

SUBEQooTLVKooQfYXam

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N+1}^{n} a_k \tag{10.319b}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k. \tag{10.319c}$$

Justifications :

- Pour (10.319a). Pour chaque n, la somme est finie et nous pouvons la décomposer. Si vous voulez vraiment couper les cheveux en quatre, vous devez fixer un ϵ, et un n de telle sorte à avoir $n > N$, parce que N est fixé dans l'énoncé du lemme.
- Pour (10.319b). Nous sommes dans un cas $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n)$ où (u_n) est constante et où $(u_n + v_n)$ converge. Nous pouvons donc permuter limite et somme[57].

Voilà que (1) est prouvé.

Nous écrivons $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$; l'hypothèse est que la suite (s_n) est une suite convergente dans un espace métrique. Elle est donc de Cauchy par la proposition 7.323.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q > N$, nous ayons $\|s_p - s_q\| \leqslant \epsilon$. Soit $p > N$. Pour tout $n \geqslant 0$ nous avons

$$\epsilon > \|s_{p+n} - s_{p+1}\| = \| \sum_{k=p}^{p+n} a_k \|. \tag{10.320}$$

En prenant la limite $n \to \infty$ nous avons

$$\| \sum_{k=p}^{\infty} a_k \| \leqslant \epsilon. \tag{10.321}$$

Nous avons donc démontré qu'il existe N tel que si $p > N$, alors $\| \sum_{k=p}^{\infty} a_k \| \leqslant \epsilon$. Cela signifie exactement que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$. □

10.10 Sommes de familles infinies

SECooHHDXooUgLhHR

10.10.1 Suites

Ne pas confondre la norme supremum avec la norme L^∞ (définition 27.28), bien que les deux peuvent être écrites $\|f\|_\infty$.

DEFooSFNFooBygeXX

Définition 10.116 (norme supremum[373])**.**
Soient un ensemble Ω, une partie A de Ω et un espace normé V. Lorsque g est une fonction $g\colon \Omega \to V$, nous notons

$$\|g\|_A = \sup_{x\in A} \|g(x)\| \tag{10.322}$$

*C'est la **norme supremum** limitée à la partie A.*

[56] Définition 7.313.
[57] Pour rappel, la proposition 9.29 demande la convergence des deux suites pour fonctionner.

DEFooOHRYooWUsYTi

Définition 10.117 (Convergence uniforme de suites)**.**
Nous disons qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un ensemble A ***converge uniformément sur*** *A vers la fonction f si*

EQooGPPEooNKQtlx
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_A = 0 \tag{10.323}$$

où $\|.\|_A$ est la norme supremum 10.116.

10.10.2 Séries

Trois notions de convergence à ne pas confondre :

(1) La convergence absolue,

(2) la convergence normale. C'est la même que la convergence absolue, mais dans le cas particulier d'un espace de fonctions muni de la norme uniforme.

(3) la convergence uniforme.

Voici les définitions.

DefVFUIXwU

Définition 10.118 (Convergence absolue)**.**
Nous disons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace vectoriel normé V ***absolument sommable*** *si la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Pour une suite indexée par $\mathbb{Z}$, nous disons que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est absolument sommable si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|a_n\|$ converge. Ici la somme est $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \|a_n\|$.

Attention : il n'est pas dit qu'une suite absolument sommable soit sommable dans le sens de la définition 10.128. Comme le dit régulièrement David Madore, un foobar bleuté n'est pas spécialement un foobar. Et pas toujours bleuté non plus d'ailleurs.

Pour cette raison, il n'est pas très prudent à priori de dire « la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument ». Parce qu'on ne sait pas si la limite $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$ existe. Nous allons cependant parler comme ça parce que la proposition 10.151 dira que, au moins dans le cas d'applications à valeurs dans un Banach, si une suite est absolument sommable, alors elle a une série qui converge.

DefVBrJUxo

Définition 10.119 (Convergence normale)**.**
Soit un espace topologique X et un espace vectoriel normé V. Une suite d'application $(u_n : X \to V)_{n\in\mathbb{Z}}$ est ***normalement sommable*** *si la série*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|u_n\|_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \|u_n\|_\infty \tag{10.324}$$

converge, c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est absolument sommable dans $\big(\mathrm{Fun}(X,V), \|.\|_\infty\big)$.

DEFooPABSooPMXMOV

Définition 10.120 (Convergence uniforme)**.**
Soit un espace topologique X et un espace vectoriel normé V. Une suite d'application $(f_n : X \to V)_{n\in\mathbb{Z}}$ est ***uniformément sommable*** *de somme F si la suite des sommes partielles converge uniformément, c'est-à-dire si*

EqLNCJooVCTiJw
$$\lim_{N\to\infty} \| \sum_{n=-N}^{N} f_n - F\|_\infty = 0. \tag{10.325}$$

10.10.3 Terme général

PROPooYDFUooTGnYQg

Proposition 10.121.
Si une série converge dans un espace complet, la norme de son terme général converge vers 0 : si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors

$$\|a_n\| \to 0. \tag{10.326}$$

Démonstration. Soit une suite (a_n) dont la série converge vers s. Soit $\epsilon > 0$. La suite des sommes partielles (s_n) est de Cauchy et converge vers s : $s_n \to s$. En particulier il existe un N tel que si $n > N$, nous avons $\|s_n - s_{n-1}\| < \epsilon$. Pour de telles valeurs de n nous avons :

$$\|a_n\| = \|s_n - s_{n-1}\| \leqslant \epsilon. \tag{10.327}$$

Cela prouve que $a_n \to 0$. □

Dans le même ordre d'idée nous avons la convergence des queues de suites.

LEMooFUCOooCOqLRj

Lemme 10.122 ([1]).
Soit une suite $a\colon \mathbb{N} \to V$ où V est un espace vectoriel normé. Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0. \tag{10.328}$$

Démonstration. Ne nous en voulez pas si on décale l'énoncé de 1 : nous allons prouver que $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0$. Nous nommons (s_n) la suite des sommes partielles de a : $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Soit n fixé dans $\mathbb{N}$; pour tout $N > n$ nous avons

$$\sum_{k=0}^{N} a_k = s_n + \sum_{k=n+1}^{N} a_k \tag{10.329}$$

En prenant la limite $N \to \infty$ nous trouvons

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s_n + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} a_k = s_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k. \tag{10.330}$$

Cela étant valable pour tout n, nous prenons la limite $n \to \infty$. Par définition $s_n \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k$; pour le reste

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k. \tag{10.331}$$

La dernière somme est donc nulle et nous avons prouvé le lemme. □

10.10.4 Convergence commutative

DEFooORAGooZslkyS

Définition 10.123.
*Soit x_k une suite dans un espace vectoriel normé E. Nous disons que la suite **converge commutativement** vers $x \in E$ si $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ et si pour toute bijection $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nous avons aussi*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{\tau(n)} - x\| = 0. \tag{10.332}$$

La notion de convergence commutative est surtout intéressante pour les séries.

DEFooYMOHooMKzTSJ

Définition 10.124.
La somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k \tag{10.333}$$

converge commutativement vers x si $\lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{k=0}^{N} x_k\| = 0$ et si pour toute bijection $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{k=0}^{N} x_{\tau(k)}\| = 0. \tag{10.334}$$

*Dans ce cas nous disons que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est **commutativement sommable**.*

PROPooOGOEooBkZoEJ

Proposition 10.125.
Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite absolument sommable[58] dans $\mathbb{C}$. Alors elle est commutativement sommable[59].

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous posons $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a$ et nous considérons N tel que

$$|\sum_{i=0}^{N} a_i - a| < \epsilon. \tag{10.335}$$

Étant donné que la série des $|a_i|$ converge, il existe N_1 tel que pour tout $p, q > N_1$ nous ayons $\sum_{i=p}^{q} |a_i| < \epsilon$. Nous considérons maintenant une bijection $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Prouvons que la série $\sum_{i=0}^{\infty} |a_{\tau(i)}|$ converge. Nous

[58] Définition 10.118.
[59] Définition 10.124.

choisissons M de telle sorte que pour tout $n > M$, $\tau(n) > N_1$. Si s_k est la somme partielle de la suite $(a_{\tau(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ et si $M < p < q$ nous avons

$$|s_q - s_p| = |\sum_{i=p}^{q} a_{\tau(i)}| \leqslant \sum_{i=p}^{q} |a_{\tau(i)}| < \epsilon. \tag{10.336}$$

Cela montre que (s_k) est une suite de Cauchy. Elle est alors convergente et nous en déduisons que la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{\tau(i)} \tag{10.337}$$

converge. Nous devons montrer à présent qu'elle converge vers la même limite que la somme « usuelle » $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} a_i$.

Soit $n > \max\{M, N\}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{M} a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{N} a_k + \underbrace{\sum_{M+1}^{n} a_{\tau(k)}}_{<\epsilon} - \underbrace{\sum_{k=N+1}^{n} a_k}_{<\epsilon}. \tag{10.338}$$

Par construction les deux derniers termes sont plus petits que ϵ parce que M et N sont les constantes de Cauchy pour les séries $\sum a_{\tau(i)}$ et $\sum a_i$. Afin de traiter les deux premiers termes, quitte à redéfinir M, nous supposons que $\{1, \dots, N\} \subset \tau\{1, \dots, M\}$; par conséquent tous les a_i avec $i < N$ sont atteints par les $a_{\tau(i)}$ avec $i < M$. Dans ce cas, les termes qui restent dans la différence

$$\sum_{k=0} a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{N} a_k \tag{10.339}$$

sont des a_k avec $k > N$. Cette différence est donc en valeur absolue plus petite que ϵ, et nous avons en fin de compte que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| < \epsilon. \tag{10.340}$$

□
PROPooVVHKooZjXQiP

Proposition 10.126 ([1]).
Si (a_k) est une suite réelle avec $a_k \geqslant 0$ et si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = \infty$ pour toute permutation τ de $\mathbb{N}$.

Démonstration. Soient $m > 0$. Il existe $N > 0$ tel que si $n \geqslant N$, alors $\sum_{k=0}^{n} a_k > m$. Vu que τ est une permutation, il existe N_1 tel que $\tau\{0, \dots, N_1\}$ contient $\{0, \dots, N\}$.

Alors pour tout $n \geqslant N_1$ nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)} \geqslant \sum_{k=0}^{N} a_k > m. \tag{10.341}$$

□
PropyFJXpr

Proposition 10.127 (Théorème de réarrangement de Riemann[381, 382, 383, 1]).
Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ une série réelle qui converge mais qui ne converge pas absolument. Alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum_{i=0}^{\infty} a_{\tau(i)} = b$.

Démonstration. Nous posons

$$N^+ = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n \geqslant 0\} \tag{10.342a}$$
$$N^- = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n < 0\} \tag{10.342b}$$

(1) **N^+ ou N^- est infini**

Vu que $N^+ \cup N^- = \mathbb{N}$, au moins un des deux est infini (lemme 1.2151.215), ce qui n'est pas possible.

(2) **N^- est infini**

Supposons que N^- est fini. Posons $n_0 = \max(N^-)$. Pour tout $k > n_0$ nous avons $a_k \geqslant 0$. Soit $N > n_0$. Nous avons

$$\sum_{k=0}^{N} a_k = \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{n_0+1}^{N} a_k \tag{10.343a}$$

$$= \sum_{k=0}^{n_0} a_k - \sum_{k=0}^{n_0} |a_k| + \sum_{k=0}^{n_0} |a_k| + \sum_{k=n_0+1}^{N} |a_k| \tag{10.343b}$$

$$= \sum_{k=0}^{n_0} \big(a_k - |a_k|\big) + \sum_{k=0}^{N} |a_k|. \tag{10.343c}$$

En prenant la limite $N \to \infty$, à gauche nous avons ∞ par hypothèse, alors que nous avons un nombre fini à droite (aussi par hypothèse). Contradiction, nous en concluons que N^- est infini.

(3) N^+ **est infini** Même type de raisonnement[60].

(4) **Construction de $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$** ITEMooKATRooVrnUBv

Nous allons construire par récurrence. D'abord

$$T_0 = \{l \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_l \geqslant 0\} = N^+ \tag{10.344a}$$

$$S_0 = \{l \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_l < 0\} = N^-. \tag{10.344b}$$

Si $\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)} \leqslant b$, alors nous posons

- $\tau(n+1) = \min(T_n) \in N^+$
- $T_{n+1} = T_n \setminus \tau(n+1)$
- $S_{n+1} = S_n$

Si $\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)} > b$, alors nous posons

- $\tau(n+1) = \min(S_n) \in N^-$
- $S_{n+1} = S_n \setminus \tau(n+1)$
- $T_{n+1} = T_n$.

Les parties T_n et S_n sont les parties de $\mathbb{N}$ qui restent à attribuer lorsque $\tau(n)$ est fixé.

Nous prouvons maintenant quelques propriétés qui disent que τ prends les éléments de N^+ et N^- dans l'ordre sans en oublier.

(5) $T_n = T_0 \setminus \tau\{0, \dots, n\}$ ITEMooLBLUooYypSZd

Cela se prouve par récurrence. Si $T_n = T_0 \setminus \{\tau(1), \dots, \tau(n)\}$, il y a deux possibilités pour T_{n+1}. Soit $\tau(n+1) \in N^+$, soit $\tau(n+1) \in N^-$. Dans le premier cas, T_{n+1} est défini comme étant $T_n \setminus \{\tau(n+1)\}$. Dans le second cas, $\tau(n+1) \notin T_n$, et donc $T_{n+1} = T_n = T_n \setminus \tau(n+1)$.

(6) $S_n = S_0 \setminus \tau\{0, \dots, n\}$

Même raisonnement.

(7) $k_1 < k_2 \in N^+$ **avec** $k_2 \in \tau(\mathbb{N})$ **alors** $k_1 \in \tau(\mathbb{N})$

Soient $k_1 < k_2$ dans N^+. Nous supposons que $k_2 = \tau(n+1)$ pour un certain n. Donc $k_2 = \min(T_n)$, ce qui signifie que k_1 n'est pas dans T_n. Or $T_n = T_0 \setminus \{\tau(0), \dots, \tau(n)\}$. Nous en déduisons que $k_1 \in \{\tau(0), \dots, \tau(n)\}$.

(8) $k_1 < k_2 \in N^-$ **avec** $k_2 \in \tau(\mathbb{N})$ **alors** $k_1 \in \tau(\mathbb{N})$

Même raisonnement.

(9) τ **est injective** Supposons que $\tau(k) = \tau(l)$ avec $k < l$. Vu que $S_n \subset S_0$ et $T_n \subset T_0$ et $S_0 \cap T_0 = \varnothing$, nous devons avoir tous les deux dans T_0 ou tous les deux S_0.

Supposons pour fixer les idées que $\tau(k)$ et $\tau(l)$ sont tous les deux dans T_0. Nous avons $\tau(k) \in T_{k-1}$, mais, par construction $\tau(k) \notin T_k$. Vu que $T_l \subset T_k$, il est impossible d'avoir $\tau(k) = \tau(l) \in T_l$.

La même chose tient si $\tau(k)$ et $(\tau(l))$ sont dans S_0.

[60] Je n'ai pas vérifié. Alors soyez prudent.

(10) τ **est surjective**

Nous supposons que τ n'est pas surjective. Supposons que n_0 n'est pas dans l'image de τ, et supposons que $n_0 \in T_0$. Alors aucun élément de N^+ plus grand que n_0 n'est dans $\tau(\mathbb{N})$ par le point (5).

Soit $N = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \tau(k) \in N^+\}$. Ça existe et c'est fini parce que $\tau(\mathbb{N})$ ne prend aucun élément de N^+ au-delà de n_0. Donc pour tout $k \geqslant N+1$ nous avons $a_{\tau(k)} < 0$. Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = \sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)} + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{\tau(k)} \tag{10.345a}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)} + \sum_{k=0}^{N} |a_{\tau(k)}| - \sum_{k=0}^{N} |a_{\tau(k)}| - \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{\tau(k)}| \tag{10.345b}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \Big(a_{\tau(k)} + |a_{\tau(k)}| \Big) - \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\tau(k)}|. \tag{10.345c}$$

Par la proposition 10.126, la dernière somme diverge parce que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{\tau(k)}| = \infty$. Nous venons de prouver que $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = -\infty$.

Prenons $K > N$. Nous devons avoir

$$\sum_{k=0}^{K} a_{\tau(k)} \geqslant b \tag{10.346}$$

parce que sinon on aurait $\tau(K+1) \in N^+$. Vu qu'à partir de K les sommes partielles sont décroissantes et bornées vers le bas, nous en déduisons la convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)}$. Contradiction.

(11) **La somme converge vers** b

(11a) **Trouver un** N **assez grand**

Il est temps de montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = b$. Soit $\epsilon > 0$. Vu que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant n_1$ (proposition 10.121).

Vu que τ est bijective, la partie $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \tau(n) \leqslant n_1\}$ est finie, et même de cardinal $n_1 + 1$ parce qu'elle est en bijection avec $\{0, \dots, n_1\}$. Nous posons

$$n_0 = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \tau(k) \leqslant n_1\}. \tag{10.347}$$

Si $n > n_0$, alors $\tau(n) > n_1$ et alors $|a_{\tau(n)}| < \epsilon$. En posant

$$N_0 = \min\{k > n_0 \text{ tel que } \tau(k) \in N^+\} \tag{10.348a}$$

$$N = \min\{k > N_0 \text{ tel que } \tau(k) \in N^-\} - 1, \tag{10.348b}$$

nous avons un $N > n_0$ tel que

$$\begin{cases} \tau(N) \in N^+ & (10.349a) \\ \tau(N+1) \in N^- & (10.349b) \\ |a_{\tau(n)}| < \epsilon, \forall n \geqslant N. & (10.349c) \end{cases}$$

(11b) **Travail sur les sommes partielles**

Nous posons[61] $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)}$. Vu que $\tau(N) \in N^+$, nous avons $S_{N-1} \leqslant b$. Vu que $\tau(N+1) \in N^-$, nous avons $S_N > b$. Or

$$|S_n - S_{n-1}| = |a_{\tau(N)} < \epsilon|. \tag{10.350}$$

Nous avons donc les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} |S_N - S_{N-1}| < \epsilon & (10.351a) \\ S_{N-1} \leqslant b & (10.351b) \\ S_N > b. & (10.351c) \end{cases}$$

(11c) **Si** $S_n > b + \epsilon$**, alors contradiction** Soit $n > N$, et supposons que $S_n > b + \epsilon$. Vu que $|S_n - S_{n-1}| < \epsilon$, nous avons encore $S_{n-1} > b$, et donc, par construction de τ (point (4)), nous avons $S_n < S_{n-1}$. Au final,

$$b + \epsilon < S_n < S_{n-1} < S_{N-1}. \tag{10.352}$$

Et là, il y a une contradiction parce que $S_{N-1} \leqslant b$.

Nous en déduisons que nous avons toujours $S_n \leqslant b + \epsilon$.

[61] Je sais, la notation S_n est déjà prise plus haut. Mais nous n'en avons plus besoin.

(11d) **Idem :** $S_n \geqslant b - \epsilon$
Cela se prouve de la même façon.

Au final nous avons prouvé que pour tout $n > N$, $|S_n - b| \leqslant \epsilon$, ce qui montre bien que $S_n \to b$.

□

10.10.5 Famille sommable

Pour une revue des définitions de sommes dans le cas de $\{0, \dots, n\}$, des ensembles finis quelconques, voir le thème 53. Maintenant nous donnons la définition pour une somme sur un ensemble infini.

DefIkoheE

Proposition-Définition 10.128 (Famille sommable)**.**
Si $\{v_i\}_{i\in I}$ est une famille de vecteurs dans un espace vectoriel normé indexée par un ensemble quelconque I. Nous disons que cette famille est ***sommable*** *de somme v si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un J_0 fini dans I tel que pour tout ensemble fini K tel que $J_0 \subset K$ nous avons*[62]

$$\| \sum_{j\in K} v_j - v\| < \epsilon. \tag{10.353}$$

Si tel est le cas, alors un tel v est unique[63]*.*

Nous notons

$$\sum_{i\in I} v_i = v. \tag{10.354}$$

Dans cette définition, il faut comprendre que J_0 est l'ensemble minimum de termes qu'il faut prendre pour être ϵ-proche de v. Ensuite, K est là pour dire qu'en prenant plus de termes, on ne s'éloignera pas tellement.

LEMooHFNXooFHfwzf

Lemme 10.129.
Soit une famille sommable $(v_i)_{i\in I}$ dans un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la famille $(\lambda v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} \lambda v_i = \lambda \sum_{i\in I} v_i. \tag{10.355}$$

LEMooSBYEooNXzqJU

Lemme 10.130.
Soit une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$. Si $J \subset I$, alors la famille $(a_j)_{j\in J}$ est sommable

LEMooAYFUooLMBBDn

Lemme 10.131.
Soit une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs. Si $J \subset I$, alors la famille $(a_j)_{j\in J}$ est sommable et

$$\sum_{j\in J} a_j \leqslant \sum_{i\in I} a_i. \tag{10.356}$$

Dans le cas de familles de nombres réels positifs, nous avons une caractérisation plus commode.

PROPooOYNRooQFpBly

Proposition 10.132 (Somme de réels positifs[1])**.**
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs indexés par un ensemble quelconque I.

ITEMooAYKKooVxXp

(1) La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable[64] *si et seulement si*

$$\sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j < \infty. \tag{10.357}$$

ITEMooSDCYooNsbHez

(2) Si la famille est sommable, alors

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j. \tag{10.358}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

[62] La somme sur la partie finie K est la définition 1.304.
[63] Attention : je n'ai pas vérifié. Écrivez-moi si vous avez une preuve.
[64] Définition 10.128.

(1) **Pour (1), ⇒** Soit v comme dans la définition. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons une partie finie $J_0 \subset I$ comme il faut. Vu que tous les termes sont positifs,

$$\sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j = \sup_{\substack{J \text{ fini dans } I \\ J_0 \subset J}} \sum_{j\in J} a_j. \tag{10.359}$$

Pour chaque J fini contenant J_0 dans I nous avons $\| \sum_{j\in J} a_j - v\| \leqslant \epsilon$ et donc

$$\| \sum_{j\in J} a_j \| \leqslant \|v\| + \epsilon. \tag{10.360}$$

Donc le supremum sur les J est majoré par $\|v\| + \epsilon$.

Vu que cela est valable pour tout ϵ, c'est aussi majoré par $\|v\|$ lui-même, mais ce n'est pas utile pour notre propos.

(2) **Pour (1), ⇐** Nous supposons maintenant que $\sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j < \infty$. Soit $v < \infty$ ce supremum. Il existe un J_0 fini dans I tel que

$$\| \sum_{j\in J_0} a_j - v\| \leqslant \epsilon. \tag{10.361}$$

Étant donné que tous les termes sont positifs, nous pouvons même dire que

$$\sum_{j\in J_0} a_j \in [v - \epsilon, v]. \tag{10.362}$$

Pour tout K contenant J_0 nous avons la même majoration et donc

$$v - \epsilon \leqslant \sum_{j\in J_0} a_j \leqslant \sum_{k\in K} a_k \leqslant v. \tag{10.363}$$

(3) **Pour (2)** Nous nommons $v = \sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j$. Soit $\epsilon > 0$; il existe J_0 fini dans I tel que

$$v - \epsilon \leqslant \sum_{j\in J_0} a_j \leqslant v. \tag{10.364}$$

Pour tout K fini contenant J_0 nous avons aussi $\sum_{j\in J_0} a_j \leqslant \sum_{k\in K} a_k$ et donc

$$\sum_{k\in K} a_k \in [v - \epsilon, v]. \tag{10.365}$$

Au final nous avons bien prouvé que

$$\| \sum_{k\in K} a_k - v\| \leqslant \epsilon. \tag{10.366}$$

EQooTWURooBsVfOS

Vu que pour tout ϵ, il existe un K qui réalise (10.366), la définition 10.128 nous dit que $\sum_{i\in I} a_i = v$.

□

PROPooAJRYooMuDaJI

Proposition 10.133 ([1]).
Soit une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs. Nous considérons une partition $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de I telle que chacun des $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable de somme S_k. Si $\sum_{k=0}^{\infty} S_k < \infty$ alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{\infty} S_k. \tag{10.367}$$

Démonstration. Nous posons $S = \sum_{k=0}^{\infty} S_k$. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons $N \in \mathbb{N}$ tel que

(1) Pour tout $N' > N$ nous avons $|\sum_{k=0}^{N'} S_k - S| < \epsilon$.

(2) Pour tout $p \geqslant N$ nous avons $\sum_{k=p}^{\infty} S_k < \epsilon$.

Nous posons $I_0 = \bigcup_{k=0}^{N} I_k$.

Soit K fini dans I tel que $I_0 \subset K \subset I$. Nous devons évaluer $|\sum_{k\in K} u_k - S|$. Nous posons

$$M = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } I_k \cap K \neq \varnothing\}, \tag{10.368}$$

de telle sorte à avoir l'union disjointe

$$K = I_0 \cup \bigcup_{k=N+1}^{M} (I_k \cap K). \tag{10.369}$$

Nous pouvons maintenant calculer

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{j\in K} u_j - S\Big| &= \Big|\sum_{j\in I_0} + \sum_{k=N+1}^{M}\sum_{j\in I_k\cap K} u_j - S\Big| && (10.370a)\\
&\leqslant \Big|\sum_{j\in I_0} -S\Big| + \Big|\sum_{k=N+1}^{M}\sum_{j\in I_k\cap K} u_j\Big| && (10.370b)\\
&\leqslant \epsilon + \Big|\sum_{k=N+1}^{M}\sum_{j\in I_k\cap K} u_j\Big| && (10.370c)\\
&\leqslant \epsilon + \Big|\sum_{k=N+1}^{M}\sum_{j\in I_k} u_j\Big| \qquad \text{ajoute termes positifs} && (10.370d)\\
&= \epsilon + \Big|\sum_{k=N+1}^{M} S_k\Big| && (10.370e)\\
&\leqslant \epsilon + \Big|\sum_{k=N+1}^{\infty} S_k\Big| && (10.370f)\\
&\leqslant 2\epsilon. && (10.370g)
\end{aligned}$$

□

PROPooIJHFooXYOuiZ

Proposition 10.134 ([1]).
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit un réel $0 < q < 1$. Nous notons $\Lambda = \mathbb{N}^n$. Pour $\alpha \in \Lambda$ nous notons $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Alors la famille

$$(q^{|\alpha|})_{\alpha\in\Lambda} \tag{10.371}$$

est une famille sommable.

Démonstration. Les parties

$$\Lambda_k = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k\} \tag{10.372}$$

forment une partition de Λ. Vu que chacun des Λ_k est fini nous pouvons poser

$$S_k = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} q^{|\alpha|} = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} q^k = q^k \operatorname{Card}(\Lambda_k). \tag{10.373}$$

La proposition 1.383 nous donne une valeur pour le cardinal de Λ_k, et c'est

$$\operatorname{Card}(\Lambda_k) = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}. \tag{10.374}$$

Nous avons donc

$$S_k = q^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{q^k}{(n-1)!}\prod_{j=1}^{n-1}(k+j) = q^k P(k) \tag{10.375}$$

où P est un polynôme de degré $n-1$.

La proposition 10.134 dit qu'alors $\sum_{k=0}^{\infty} S_k < \infty$. Vu que chacun de S_k est positif, la proposition 10.133 dit que $(q^{|\alpha|})_{\alpha\in\Lambda}$ est sommable et que

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} q^{|\alpha|} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k. \tag{10.376}$$

□

PROPooHCLZooLjQNDl

Proposition 10.135 ([1]).
Soit une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans un espace de Banach E. Nous supposons que

(1) La série est convergente : $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = v$,

(2) La série est absolument convergente : $\sum_{i=0}^{\infty} \|a_i\| < \infty$.

Alors $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille sommable.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$,

$$\| \sum_{i=0}^{n} a_i - v\| < \epsilon \text{ et } \quad \sum_{i=n}^{\infty} \|a_i\| < \epsilon. \tag{10.377}$$

EQooXWOAooAYxFZI

Nous posons ensuite $J_0 = \{0, \dots, N\}$. Soit une partie finie $K \subset \mathbb{N}$ telle que $J_0 \subset K$. Nous posons $K_c = K \subset J_0$ et $m = \min(K_c)$. Nous avons ce calcul :

$$\begin{aligned}
\| \sum_{i\in K} a_i - v\| &= \| \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i\in K_c} a_i - v\| && (10.378a)\\
&\leqslant \| \sum_{i=0}^{N} a_i - v\| + \| \sum_{i\in K_c} a_i\| && (10.378b)\\
&\leqslant \epsilon + \sum_{i\in K_c} \|a_i\| && (10.378c)\\
&\leqslant \epsilon + \sum_{i=m}^{\infty} \|a_i\| && (10.378d)\\
&\leqslant 2\epsilon. && (10.378e)
\end{aligned}$$

Si nous avions pris $\epsilon/2$ dans (10.377), ça aurait été juste bon. □

Attention : dans le lemme suivant, nous supposons que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable. Sans cette hypothèse, il n'est pas vrai que $\sum_{k=0}^{\infty} a_i = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_i$. Et il n'est même pas vrai que l'existence de la première implique la sommabilité de la seconde.

LEMooGXPGooZTJPoN

Lemme 10.136 ([1]).
Soient un espace vectoriel normé V ainsi qu'une suite sommable $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans V. Alors

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k. \tag{10.379}$$

EQooXQWBooLympdN

La somme à gauche est celle de la définition 10.128 et celle de droite est donnée par la définition 1.159.

Démonstration. Par hypothèse, le membre de gauche existe, et nous le nommons v. Soit $\epsilon > 0$. Il existe J_0 fini dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout K fini dans $\mathbb{N}$ tel que $J_0 \subset K$, nous avons

$$\| \sum_{k\in K} a_k - v\| < \epsilon. \tag{10.380}$$

Ici, la somme est celle de la définition 1.304. Nous nommons $m_0 = \max(J_0)$; pour tout $m > m_0$ nous avons

$$J_0 \subset \{0, \dots, m_0\} \subset \{0, \dots, m\} \tag{10.381}$$

et donc

$$\| \sum_{k\in\{0,\dots,m\}} a_k - v\| < \epsilon. \tag{10.382}$$

La bijection à prendre dans la définition (1.304) pour faire la somme sur $\{0, \dots, m\}$ peut être l'identité, de telle sorte que $\sum_{k\in\{0,\dots,m\}} a_k = \sum_{k=0}^{m} a_k$.

Nous notons s_i la somme partielle $s_i = \sum_{k=0}^{i} a_k$. Ce que nous avons prouvé jusqu'ici est que pour tout ϵ, il existe m_0 tel que si $m \geqslant m_0$, alors $\|s_i - v\| \leqslant \epsilon$. Cela signifie exactement que $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_k = v$, c'est-à-dire que le membre de droite de (10.379) vaut v, ce qu'il fallait. □

Exemple 10.137.
La suite $a_i = (-1)^i$ n'est pas sommable parce que quel que soit J_0 fini dans $\mathbb{N}$, nous pouvons trouver J fini contenant J_0 tel que $\sum_{j\in J}(-1)^j > 10$. Pour cela il suffit d'ajouter à J_0 suffisamment de termes pairs. De la même façon en ajoutant des termes impairs, on peut obtenir $\sum_{j\in J'}(-1)^i < -10$. △

Exemple 10.138.
De temps en temps, la somme peut sortir d'un espace. Si nous considérons l'espace des polynômes $[0,1] \to \mathbb{R}$ muni de la norme uniforme, la somme de l'ensemble

$$\{1, -1, \pm\frac{x^n}{n!}\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{10.383}$$

est zéro.

Par contre la somme de l'ensemble $\{1, \frac{x^n}{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est l'exponentielle qui n'est pas un polynôme. △

PROPooJLQAooAEbIvZ

Proposition 10.139 ([1]).
Soient un espace vectoriel normé V, deux ensembles disjoints A et B ainsi que $v\colon A\cup B \to V$. Si $\sum_{k\in A} v_k$ et $\sum_{k\in B} v_k$ sont sommables[65]*, alors $(v_k)_{k\in A\cup B}$ est sommable et*

$$\sum_{k\in A\cup B} v_k = \sum_{k\in A} v_k + \sum_{k\in B} v_k. \tag{10.384}$$

Démonstration. Nous nommons

$$\begin{aligned} s &= \sum_{k\in A} v_k \\ t &= \sum_{k\in B} v_k, \end{aligned} \tag{10.385}$$

et nous prouvons que $s+t$ vérifie la propriété qu'il faut (définition 10.128) pour être $\sum_{k\in A\cup B} v_k$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe I_0 fini dans A tel que $\| \sum_{k\in I} v_k - s\| < \epsilon$ dès que $I_0 \subset I \subset A$. Il existe également J_0 fini dans B tel que $\| \sum_{k\in J} v_k - t\| < \epsilon$ dès que $J_0 \subset J \subset B$.

Nous posons $S_0 = I_0 \cup J_0$. Si S est fini dans $A\cup B$ et vérifie $S_0 \subset S \subset A\cup B$, nous notons $S_a = S\cap A$ et $S_b = S\cap B$. Étant donné que $I_0 \subset S_a$ et $J_0 \subset S_b$, nous avons

SUBEQooPZSMooRNVSOt

$$\begin{aligned} \| \sum_{k\in S} v_k - (s+t)\| &= \| \sum_{k\in S_a} v_k + \sum_{k\in S_b} v_k - (s+t)\| && \text{cf. justif.} && (10.386a)\\ &\leqslant \| \sum_{k\in S_a} v_k - s\| + \| \sum_{k\in S_b} v_k - t\| && && (10.386b)\\ &\leqslant 2\epsilon. && && (10.386c) \end{aligned}$$

Justifications.

- Pour 10.386a. Vu que les sommes sont finies et que S_a et S_b sont disjoints d'union S, nous pouvons couper la somme en utilisant le lemme 1.308.

□

10.10.6 Sommation associative

10.10.7 Somme non dénombrables

Nous allons voir que les sommes non dénombrables ne sont pas intéressantes : si le nombre de valeurs non nulles parmi les $(x_i)_{i\in I}$ est non dénombrable, alors la somme est infinie. La bonne généralisation de somme infinie dans le cas non dénombrable est l'intégrale qui viendra seulement avec la définition 14.167 et la mesure de Lebesgue 14.143.

LEMooYJCVooHajEbg

Lemme 10.140.
Si A est non dénombrable dans $\mathbb{R}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $A \cap \{|x| \geqslant \delta\}$ est non dénombrable.

Démonstration. Nous y allons par l'absurde, et nous supposons que A ne contient pas zéro (sinon il faut ajouter zéro aux A_n ci-dessous, et ça alourdit les notations). Nous supposons donc que les parties

$$A_n = A \cap \{|x| \geqslant \frac{1}{n}\} \tag{10.387}$$

[65] Définition 10.128.

sont dénombrables. Mais

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{10.388}$$

Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable[66]. Vu qu'un ensemble non dénombrable ne peut être inclus dans un ensemble dénombrable[67], nous avons une contradiction. □

LEMooQIMGooOUpZjk

Lemme 10.141.
Soit un ensemble I et une « suite » $(x_i)_{i\in I}$ avec $x_i \geqslant 0$ pour tout i. Si l'ensemble

$$F = \{i \in I \text{ tel que } x_i > 0\} \tag{10.389}$$

est non dénombrable, alors

$$\sum_{i\in I} x_i = \infty. \tag{10.390}$$

Démonstration. Nous considérons l'ensemble des valeurs non nulles atteintes par x :

$$V = \{x_i \text{ tel que } i \in F\}. \tag{10.391}$$

Il y a deux possibilités : soit V est dénombrable (ou fini), soit il est non dénombrable.

(1) **V est fini ou dénombrable** Dans ce cas, l'application $x\colon F \to [0,\infty[$ est une application d'un ensemble indénombrable vers un ensemble dénombrable. Le lemme 1.237 nous indique qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x^{-1}(y)$ est indénombrable et en particulier infini. La somme $\sum_{i\in x^{-1}(y)} x_i$ est une somme indénombrable de termes tous égaux et strictement positifs. Elle est infinie.

(2) **V est indénombrable** La partie V de $\mathbb{R}$ est non dénombrable ; elle est donc sujette au lemme 10.140 : il existe $\delta > 0$ tel que $W = V \cap \{x \geqslant \delta\}$ est indénombrable. Vu que $x_i \geqslant \delta$ pour tout i dans $x^{-1}(W)$ nous avons

$$\sum_{i\in x^{-1}(W)} x_i = \infty. \tag{10.392}$$

□

10.10.8 Sommes dénombrables

La proposition suivante nous enseigne que les sommes infinies se comportent normalement au moins en ce qui concerne les majorations termes à termes.

PropMpBStL

Proposition 10.142 ([1]).
Soit I un ensemble dénombrable.

ITEMooZSDSooFUqXDO

(1) Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$, deux familles de réels positifs telles que $a_i \leqslant b_i$ et telles que (b_i) est sommable[68]*. Alors (a_i) est sommable.*

ITEMooREEYooOtklRb

(2) Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels telle que $(|a_i|)$ est sommable, alors (a_i) est sommable.

ITEMooFTGGooWADdLs

(3) Si $(z_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes telle que $(|z_i|)$ est sommable, alors (z_i) est sommable.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Nous pouvons utiliser la caractérisation 10.132 ; dans un premier temps nous avons

$$\sum_{i\in I} b_i = \sup_{J \text{ fini dans } I} b_i < \infty. \tag{10.393}$$

Pour chaque J fini dans I, le lemme 1.310 nous assure que

$$\sum_{j\in J} a_j \leqslant \sum_{j\in J} b_j \tag{10.394}$$

Donc le supremum existe et est plus petit pour (a_j) que pour (b_j). En utilisant à nouveau la caractérisation de la proposition 10.132(1) (mais dans l'autre sens), nous concluons que $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.

[66] Proposition 1.228.
[67] Proposition 1.236.
[68] Définition 10.128.

(2) **Pour (2)** Nous posons $I^+ = \{i \in I \text{ tel que } a_i \geqslant 0\}$ et $I^- = \{i \in I \text{ tel que } a_i < 0\}$.
Vu que $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable, la famille $(a_i)_{i\in I^+}$ est sommable par le lemme 10.130. La famille $(a_i)_{i\in I^-}$ est également sommable par le même lemme appliqué à $(-a_i)_{i\in I^-}$ qui est sommable par le lemme 10.129. Nous posons

$$S^+ = \sum_{i\in I^+} a_i \tag{10.395a}$$
$$S^- = \sum_{i\in I^-} a_i, \tag{10.395b}$$

et nous allons prouver que $(a_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $S^+ + S^-$. Soit $\epsilon > 0$. Nous choisissons J_0^+ et J_0^- tels que $J_0^+ \subset I^+$, $J_0^- \subset I^-$ et

$$\| \sum_{k\in K^+} a_k - S^+ \| \leqslant \epsilon \tag{10.396a}$$
$$\| \sum_{k\in K^-} a_k - S^- \| \leqslant \epsilon \tag{10.396b}$$

pour tout K^+ et K^- vérifiant $J_0^+ \subset K^+ \subset I^+$ et $J_0^- \subset K^- \subset I^-$.
Nous posons $J_0 = J_0^+ \cup J_0^-$ (qui est une union disjointe). Pour tout K fini dans I contenant J_0, nous avons

$$\| \sum_{k\in K} a_k - (S^+ + S^-) \| = \| \sum_{k\in K\cap I^+} a_k + \sum_{k\in K\cap I^-} a_k - S^+ - S^- \| \tag{10.397a}$$
$$\leqslant \| \sum_{k\in K\cap I^+} a_k - S^+ \| + \| \sum_{k\in K\cap I^-} a_k - S^- \| \tag{10.397b}$$
$$\leqslant 2\epsilon \tag{10.397c}$$

parce que $J_0^+ \subset K \cap I^+$ et $J_0^- \subset K \cap I^-$.

(3) **Pour (3)** Similaire à (2), mais en coupant en 4 morceaux au lieu de 2 : les parties réelles et imaginaires en plus des parties positives et négatives.

□
EXooULLXooTDFYqf

Exemple 10.143.
Au sens de la définition 10.128 la famille

$$\frac{(-1)^n}{n} \tag{10.398}$$

n'est pas sommable. En effet la somme des termes pairs est ∞ alors que la somme des termes impairs est $-\infty$. Quel que soit $J_0 \subset \mathbb{N}$, nous pouvons concocter, en ajoutant des termes pairs, un J avec $J_0 \subset J$ tel que $\sum_{j\in J}(-1)^j/j$ soit arbitrairement grand. En ajoutant des termes négatifs, nous pouvons également rendre $\sum_{j\in J}(-1)^j/j$ arbitrairement petit. △
PropVQCooYiWTs

Proposition 10.144.
Si (a_{ij}) est une famille de nombres positifs indexés par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ alors

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big). \tag{10.399}$$

Démonstration. Nous allons utiliser la proposition 10.132 pour traiter la somme de gauche. Nous considérons $J_{m,n} = \{0,\dots,m\}\times\{0,\dots,n\}$ et nous avons pour tout m et n :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} \geqslant \sum_{(i,j)\in J_{m,n}} a_{ij} = \sum_{i=0}^{m}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\Big). \tag{10.400}$$

Si nous fixons m et que nous prenons la limite $n \to \infty$ (qui commute avec la somme finie sur i) nous trouvons

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} \geqslant \sum_{i=0}^{m}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\Big). \tag{10.401}$$

Cette inégalité étant valable pour tout m, elle est encore valable à la limite $m \to \infty$ et donc

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} \geqslant \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \Big). \tag{10.402}$$

Pour l'inégalité inverse, il faut remarquer que si J est fini dans $\mathbb{N}^2$, il est forcément contenu dans $J_{m,n}$ pour m et n assez grands. Alors

$$\sum_{(i,j)\in J} a_{ij} \leqslant \sum_{(i,j)\in J_{m,n}} a_{ij} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \Big). \tag{10.403}$$

Cette inégalité étant valable pour tout ensemble fini $J \subset \mathbb{N}^2$, elle reste valable pour le supremum. □

La définition générale de la somme 10.128 est compatible avec la définition usuelle dans les cas où cette dernière s'applique.

PropoWHdjw

Proposition 10.145 (commutative sommabilité)**.**
Soit I un ensemble dénombrable et une bijection $\tau\colon \mathbb{N} \to I$. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille dans un espace vectoriel normé. Si $\sum_{i\in I} a_i$ existe, alors il est donné par

$$\sum_{i\in I} a_i = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)}. \tag{10.404}$$

Démonstration. Nous posons $a = \sum_{i\in I} a_i$. Soit $\epsilon > 0$ et J_0 comme dans la définition. Nous choisissons

$$N > \max_{j\in J_0} \{\tau^{-1}(j)\}. \tag{10.405}$$

En tant que sommes sur des ensembles finis, nous avons l'égalité

$$\sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)} = \sum_{j\in J} a_j \tag{10.406}$$

où J est un sous-ensemble de I contenant J_0. Soit J fini dans I tel que $J_0 \subset J$. Nous avons alors

$$\| \sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)} - a \| = \| \sum_{j\in J} a_j - a \| < \epsilon. \tag{10.407}$$

Nous avons prouvé que pour tout ϵ, il existe N tel que $n > N$ implique $\| \sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)} - a \| < \epsilon$. □

La réciproque n'est pas vraie. Même en supposant que $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$ existe, il n'est pas forcé que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ existe. Cela est une conséquence de l'exemple 10.143.

PROPooWLEDooJogXpQ

Proposition 10.146 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel normé E et une famille sommable[69] *$\{v_i\}_{i\in I}$ d'éléments de E. Soit $f\colon E \to \mathbb{C}$ une application sur laquelle nous supposons*

(1) f est linéaire et continue ;

(2) la partie $\{f(v_i)_{i\in I}\}$ est sommable.

Alors nous pouvons permuter la somme et f :

$$f\Big(\sum_{i\in I} v_i \Big) = \sum_{i\in I} f(v_i). \tag{10.408}$$

EQooONHXooKqIEbY

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$; vu que les familles $\{v_i\}_{i\in I}$ et $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ sont sommables, nous pouvons considérer les parties finies J_1 et J_2 de I telles que

$$\Big\| \sum_{j\in J_1} v_j - \sum_{i\in I} v_i \Big\| \leqslant \epsilon \tag{10.409}$$

[69] Définition 10.128.

et

$$\Big\| \sum_{j\in J_2} f(v_j) - \sum_{i\in I} f(v_i) \Big\| \leqslant \epsilon \tag{10.410}$$

Ensuite nous posons $J = J_1 \cup J_2$. Avec cela nous calculons un peu avec les majorations usuelles :

$$\|f(\sum_{i\in I} v_i) - \sum_{i\in I} f(v_i)\| \leqslant \|f(\sum_{i\in I} v_i) - f(\sum_{j\in J} v_j)\| + \|f(\sum_{j\in J} v_j) - \sum_{i\in I} f(v_i)\|. \tag{10.411}$$

Le second terme est majoré par ϵ, tandis que le premier, en utilisant la linéarité de f possède la majoration

$$\|f(\sum_{i\in I} v_i) - f(\sum_{j\in J} v_j)\| = \|f(\sum_{i\in I} v_i - \sum_{j\in J} v_j)\| \leqslant \|f\| \|\sum_{i\in I} v_i - \sum_{j\in J} v_j\| \leqslant \epsilon\|f\|. \tag{10.412}$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$ nous avons

$$\|f(\sum_{i\in I} v_i) - \sum_{i\in I} f(v_i)\| \leqslant \epsilon(1 + \|f\|). \tag{10.413}$$

D'où l'égalité (10.408). □

10.11 Liens entre différents types de sommabilité

Une grande partie du jeu est maintenant de trouver des liens entre $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ (définition 10.128), $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k$ dans les cas où la suite (a_n) est sommable absolument sommable, normalement sommable ou uniformément sommable.

PROPooYLCRooOXsOkb

Proposition 10.147 ([1]).
Soit un espace topologique X et un espace vectoriel normé V. Soit une suite de fonctions $(f_n : X \to V)_{n\in\mathbb{Z}}$.

ITEMooKBVSooPeUnSa

(1) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément sommable si et seulement si la suite des sommes partielles est uniformément convergente (définition 10.117).

ITEMooAASMooIRSIgr

(2) Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément sommable vers F, alors pour tout $x \in X$, nous avons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x) = F(x), \tag{10.414}$$

c'est-à-dire que nous avons convergence ponctuelle de la suite des sommes partielles.

Démonstration. Pour (1), nous considérons la suite des sommes partielles $s_n = \sum_{k=-n}^{n} f_n$. La condition d'uniforme sommabilité de la suite est (10.325) : $\lim_{N\to\infty} \|s_n - F\|_\infty = 0$. La condition d'uniforme convergence des sommes partielles vers F est (10.323) ; c'est la même.

Pour (2), nous supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément sommable vers F. En ce qui concerne la convergence ponctuelle, soit $x \in X$. Nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \|s_n(x) - F(x)\| \leqslant \lim_{N\to\infty} \|s_n - F\|_\infty = 0. \tag{10.415}$$

□

10.11.0.1 Critère de Cauchy uniforme

Grosso modo, cela dit que si qu'une suite de Cauchy pour la norme uniforme est une suite uniformément convergente. Le fait que la suite converge fait partie du résultat et n'est pas une hypothèse. Ce critère sera utilisé pour montrer que $\big(C(K), \|.\|_\infty\big)$ est complet, proposition 12.383.

PropNTEynwq

Proposition 10.148 (Critère de Cauchy uniforme[384]).
Soit X un espace topologique et (Y, d) un espace topologique complet. La suite de fonctions $f_n : X \to Y$ converge uniformément sur A si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ alors

$$d\big(f_k(x), f_l(x)\big) \leqslant \epsilon \tag{10.416}$$

pour tout $x \in A$.

Démonstration. Si $f_n \xrightarrow{unif} f$ alors le critère est satisfait ; c'est dans l'autre sens que la preuve est intéressante.

Soit donc une suite de fonctions satisfaisant au critère et montrons qu'elle converge uniformément. Pour tout $x \in X$ la suite $n \mapsto f_n(x)$ est de Cauchy dans l'espace complet Y ; nous avons donc convergence ponctuelle $f_n \to f$. Nous devons prouver que cette convergence est uniforme. Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ alors

$$d\big(f_k(x), f_l(x)\big) \leqslant \epsilon \tag{10.417}$$

pour tout $x \in X$. Si nous nous fixons un tel k et un $x \in A$ nous considérons l'inégalité

$$d\big(f_k(x), f_l(x)\big) \leqslant \epsilon \tag{10.418}$$

qui est vraie pour tout l. En passant à la limite $l \to \infty$ (limite qui commute avec la fonction distance par définition de la topologie) nous avons

$$d\big(f_k(x), f(x)\big) \leqslant \epsilon. \tag{10.419}$$

Cette inégalité étant valable pour tout $x \in X$, cela signifie que $f_n \xrightarrow{unif} f$. □

PROPooEBYWooOXUwry

Proposition 10.149 (Critère de Cauchy uniforme pour les séries[385])**.**
Soit un ensemble X et un espace vectoriel normé V. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications $f_n \colon X \to V$ est uniformément sommable sur X si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q \geqslant N$, alors pour tout $x \in X$ nous avon

$$\Big| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x) \Big| < \epsilon. \tag{10.420}$$

Démonstration. Nous considérons les sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Nous avons équivalence entre :

(1) La sa suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément sommable

(2) la suite des sommes partielles converge uniformément sur X

(3) la suite des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy uniforme pour les suites (proposition 10.148)

(4) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q \geqslant N$, nous avons $d\big(s_p(x), s_q(x)\big) < \epsilon$.

Dans le cas d'un espace normé, la dernière condition signifie

$$d\big(s_p(x) - s_q(x)\big) = \|s_p(x) - s_q(x)\| = \| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x)\|. \tag{10.421}$$

□

LEMooJZTBooIopLok

Lemme 10.150.
Soient un espace topologique X, un espace vectoriel normé, et une suite de fonctions $f_n \colon X \to V$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normalement sommable[70]*, alors elle est uniformément sommable.*

Démonstration. Nous allons montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de la proposition 10.149. Soit $\epsilon > 0$. La normale sommabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dit que la suite des sommes partielles $t_n = \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty$ converge dans $\mathbb{R}$. Étant donné le théorème 7.340, nous savons que $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N$, alors $|t_p - t_q| < \epsilon$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=q+1}^{p} \|f_k\|_\infty < \epsilon. \tag{10.422}$$

Avec ces mêmes N, p, q nous avons

$$\Big| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x)\Big| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \|f_k\|_\infty < \epsilon. \tag{10.423}$$

□

PropAKCusNM

Proposition 10.151.
Une série absolument convergente dans un espace de Banach[71] *y converge au sens usuel.*

[70] Définition 10.119

[71] Un espace vectoriel normé complet. Typiquement $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit (a_k) une suite dans un espace vectoriel normé complet dont la série converge absolument. Nous allons montrer que la suite des sommes partielles est de Cauchy. Cela suffira à montrer sa convergence par hypothèse de complétude.

Nous avons

$$\|s_p - s_l\| = \| \sum_{k=l+1}^{p} a_k\| \leqslant \sum_{k=l+1}^{p} \|a_k\| = \bar{s}_p - \bar{s}_l \tag{10.424}$$

où $\bar{s}_n = \sum_{k=0}^{n} \|a_k\|$ est la suite des sommes partielles de la série des normes (qui converge). Vu que la suite $(\bar{s}_n)$ converge dans $\mathbb{R}$, elle y est de Cauchy par la proposition 1.520. Donc il existe un N tel que $p, l > N$ implique

$$\|s_p - s_l\| = \bar{s}_p - \bar{s}_l \leqslant \epsilon. \tag{10.425}$$

Cela signifie que (s_n) est une suite de Cauchy et donc convergente. □

Exemple 10.152 (Si l'espace n'est pas complet[1])**.**
Dans un espace qui n'est pas complet, il est possible de construire un série qui converge absolument sans converger au sens usuel.

Nous allons trouver dans $\mathbb{Q}$ une série qui converge simplement vers $\sqrt{2}$ (et donc ne converge pas dans $\mathbb{Q}$) mais absolument vers 4.

La base est que si $A, B \in \mathbb{Q}$ avec $A < B$ il est possible de résoudre

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = A & \text{(10.426a)} \\ |r_1| + |r_2| = B & \text{(10.426b)} \end{cases}$$

pour $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Ce n'est pas très compliqué : la solution est $r_1 = (A + B)/2$ et $r_2 = (A - B)/2$.

Nous considérons l'espace $\mathbb{Q}$ qui n'est pas complet dans $\mathbb{R}$. Soit une série (a_k) dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers $\sqrt{2}$ (convergence dans $\mathbb{R}$) nous nommons (s_k) la suite des ses sommes partielles. Soit aussi la suite (b_k) qui converge vers 4 (zéro serait encore plus facile mais bon, juste pour faire un peu de généralité).

Nous supposons que $a_k < b_k$ pour tout k et que les deux suites sont constituées de rationnels positifs. Nous nommons (s_k) et (s'_k) les sommes partielles. En particulier $s_n < s'_n$ et ce sont des suites croissantes.

Nous savons comment trouver $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tels que $r_1 + r_2 = s_1$ et $|r_1| + |r_2| = s'_1$. Par récurrence, si nous savons $r_1, \dots, r_k$ tels que

$$\begin{cases} r_1 + \dots + r_k = s_n & \text{(10.427a)} \\ |r_1| + \dots + |r_k| = s'_n & \text{(10.427b)} \end{cases}$$

(avec, soit dit en passant $k = 2n$), alors nous pouvons trouver des rationnels r_{k+1}, r_{k+2} tels que

$$\begin{cases} r_1 + \dots + r_k + r_{k+1} + r_{k+2} = s_{n+1} & \text{(10.428a)} \\ |r_1| + \dots + |r_k| + |r_{k+1}| + |r_{k+2}| = s'_{n+1}, & \text{(10.428b)} \end{cases}$$

en effet il s'agit de résoudre

$$\begin{cases} r_{k+1} + r_{k+2} = s_{n+1} - r_1 - \dots - r_k = s_{n+1} - s_n > 0 & \text{(10.429a)} \\ |r_{k+1}| + |r_{k+2}| = s'_{n+1} - |r_1| - \dots - |r_k| = s'_{n+1} - s'_n > 0. & \text{(10.429b)} \end{cases}$$

Cela se résout comme ci-dessus. Au final nous pouvons construire une suite (r_k) dans $\mathbb{Q}$ telle que

$$\sum_{k=0}^{2n} r_k = s_n \tag{10.430}$$

et

$$\sum_{k=0}^{2n} |r_k| = s'_n. \tag{10.431}$$

△

Remarque 10.153.
Nous savons que sur les espaces vectoriels de dimension finie toutes les normes sont équivalentes (théorème 10.58). La notion de convergence de série ne dépend alors pas du choix de la norme. Il n'en est pas de même sur les espaces de dimension infinie. Une série peut converger pour une norme mais pas pour une autre.

LEMooTXMGooQyPwGi

Lemme 10.154 (Critère de Cauchy[1]).
Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $a_n \geqslant 0$ pour tout n. Si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ converge, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que si $p > q > N$, alors

$$\sum_{p\leqslant|k|<q} a_k < \epsilon. \tag{10.432}$$

Démonstration. Nous posons $S_n = \sum_{k=-n}^{n} a_k$. L'hypothèse est que suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Donc elle est de Cauchy par le théorème 7.340(2). Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N$ alors $|S_p - S_q| < \epsilon$. Donc notre cas, ça donne

$$|\sum_{p\leqslant|k|<q} a_k| < \epsilon, \tag{10.433}$$

et comme les a_k sont positifs, nous pouvons supprimer la valeur absolue. □

PROPooAMKFooFnjOwI

Proposition 10.155 (Test M de Weierstrass[1, 386]).
Soit un ensemble X et un espace vectoriel normé V. Nous considérons une suite de fonctions $f_n\colon X \to V$ indexée par $n \in \mathbb{Z}$. Nous supposons qu'il existe des $M_n \in \mathbb{R}$ tels que

ITEMooTKDBooXiCqaH

(1) $\|f_n(x)\| \leqslant M_n$ pour tout $x \in X$,

ITEMooVQGCooIuznHD

(2) La série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n$ converge.

(3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k(x)$ converge vers un nombre que nous notons $F(x)$.

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément sommable vers F et absolument sommable.

Démonstration. Nous considérons les fonctions $S_n = \sum_{k=-n}^{n} f_k$. Par hypothèse $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = F(x)$ pour tout $x \in X$.

(1) **Uniformément sommable** Nous vérifions la définition 10.120 :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|S_n - F\|_\infty &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \|S_n(x) - F(x)\| && \text{(10.434a)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \|S_n(x) - \lim_{m\to\infty} S_m(x)\| && \text{(10.434b)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \lim_{m\to\infty} \|S_n(x) - S_m(x)\| \qquad \|.\| \text{ est continue} && \text{(10.434c)}\\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \lim_{m\to\infty} \epsilon && \text{(10.434d)}\\
&= \epsilon. && \text{(10.434e)}
\end{aligned}$$

(2) **Absolument sommable** Nous posons $g_n(x) = \|f_n(x)\|$ qui est une suite d'applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette suite vérifie manifestement les conditions pour que le point (1) soit valide. Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément sommable et nous notons $G\colon X \to \mathbb{R}$ sa somme. En particulier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(x) = G(x). \tag{10.435}$$

□

PROPooGFBBooNpczQo

Proposition 10.156 (Test M de Weierstrass[1, 386]).
Soit un ensemble X et un espace de Banach V. Nous considérons une suite de fonctions $f_n\colon X \to V$ indexée par $n \in \mathbb{Z}$. Nous supposons qu'il existe des $M_n \in \mathbb{R}$ tels que

(1) $\|f_n(x)\| \leqslant M_n$ pour tout $x \in X$,

(2) La série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n$ converge.

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément et absolument sommable.

Démonstration. Nous posons $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} f_k(x)$. Soit $\epsilon > 0$. La série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n$ converge. Le critère de Cauchy 10.154 nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que si $p > q > N$ alors $\sum_{p\leqslant|k|<q} M_k < \epsilon$. Pour de tels N, p, q nous avons

$$|S_p(x) - S_q(x)| = |\sum_{p\leqslant|k|<q} f_k(x)| \leqslant \sum_{p\leqslant|k|<q} |f_k(x)| \leqslant \sum_{p\leqslant|k|<q} M_k < \epsilon. \tag{10.436}$$

Donc (pour chaque x séparément) la suite $\big(S_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans V. Étant donné que V est complet, nous avons une limite que nous nommons $F(x)$.

Nous sommes maintenant dans les hypothèses de la proposition 10.155. □

PROPooZMLAooCUEqQK

Proposition 10.157 (Sommabilité absolue et sommabilité[1])**.**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite dans un espace vectoriel normé V. Nous supposons que

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument sommable,

(2) nous avons la convergence simple[72] $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}a_k=a$.

Alors

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k=a \tag{10.437}$$

où $\sum_{k\in\mathbb{Z}}$ est la somme de la définition 10.128.

Démonstration. Nous prouvons que $\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k=a$ en suivant la définition 10.128. Soit $\epsilon>0$.

Soit $N_1>0$ tel que si $p<q<N_1$ nous avons $\sum_{p\leqslant|k|<q}\|a_k\|<\epsilon$. Soit $N_2>0$ tel que $\|\sum_{k=-n}^{n}a_k-a\|<\epsilon$ pour tout $n\geqslant N_2$. Nous considérons $N>\max\{N_1,N_2\}$, et $J_0=\{-N,\dots,N\}$.

Soit une partie finie K de $\mathbb{Z}$ telle que $J_0\subset K$. Nous allons montrer que $\|\sum_{j\in K}a_j-a\|<\epsilon$.

Pour cela, nous considérons la partie $K_0=\{-\max(|K|),\max(|K|)\}$, c'est-à-dire que K_0 est symétrique et « rebouche les trous » laissés par K et nous calculons

$$\|\sum_{j\in K}a_j-a\|\leqslant\|\sum_{j\in K}a_j-\sum_{j\in K_0}a_j\|+\|\sum_{j\in K_0}a_j-a\|. \tag{10.438}$$

Pour le second terme, vu que $M>N>N_2$ nous avons

$$\|\sum_{j\in K_0}a_j-a\|=\|\sum_{j=-M}^{M}a_j-a\|<\epsilon. \tag{10.439}$$

En ce qui concerne le premier terme

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j\in K}a_j-\sum_{j\in K_0}a_j\|&=\|\sum_{j\in K_0\setminus K}a_j\| && \text{(10.440a)}\\
&\leqslant\sum_{j\in K_0\setminus K}\|a_j\| && \text{(10.440b)}\\
&\leqslant\sum_{j=-M}^{-N}N\|a_j\|+\sum_{j=N}^{M}\|a_j\| && \text{(10.440c)}\\
&=\sum_{N\leqslant|k|\leqslant M}\|a_j\| && \text{(10.440d)}\\
&<\epsilon. && \text{(10.440e)}
\end{aligned}$$

Au final nous avons prouvé que si N est suffisamment grand, en posant $J_0=\{-N,\dots,N\}$, et en prenant n'importe que K fini dans $\mathbb{Z}$ tel que $J_0\subset K$, nous avons $\|\sum_{j\in K}a_j-a\|<2\epsilon$. □

10.11.1 Séries entières

LEMooKMCIooItDMRo

Lemme 10.158 ([1])**.**
Soit un groupe additif $(G,+)$. Si $a\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to G$ alors

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}a(n,k)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N}a(n,k) \tag{10.441}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a(n,k)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}a(n,k) \tag{10.442}$$

[72] Si V est de Banach, cette condition est vérifiée par la proposition 10.151.

PROPooUEBWooUQBQvP

Proposition 10.159 (Somme de séries entières)**.**
À propos de sommes de séries.

ITEMooDHVSooBkVWOP

(1) Si les séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergent, alors $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)$ converge et

$$\sum_k (a_k+b_k) = \sum_k a_k + \sum_k b_k. \tag{10.443}$$

ITEMooJUZTooUzSKxe

(2) Si $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ converge et $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ diverge, alors $\sum_k (a_k+b_k)z^k$ diverge.

Démonstration. Supposons que $\sum_k a_k$ et $\sum_k b_k$ convergent tous deux. Alors nous avons pour tout N :

$$\sum_{k=0}^{N}(a_k+b_k) = \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=0}^{N} b_k. \tag{10.444}$$

Mais si deux limites existent alors la somme commute avec la limite. C'est le cas pour la limite $N\to\infty$, donc

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} a_k + \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k. \tag{10.445}$$

Cela prouve le point (1). En ce qui concerne le point (2), si la série entière $\sum_k (a_k+b_k)z^k$ convergeait, la somme $\sum_k a_k z^k - \sum_k (a_k+b_k)z^k$ convergerait, et elle vaudrait $-\sum_k b_k z^k$. □

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 10.160
Je n'ai pas vérifié la proposition 10.161. Écrivez-moi pour m'envoyer une preuve, ou pour me dire qu'elle n'est pas correcte. En tout cas ne la prenez pas comme vraie trop facilement.

PROPooQCOBooAMnljj

Proposition 10.161.
Si $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n). \tag{10.446}$$

Ici les sommes vallent éventuellement ∞.

10.11.2 Somme téléscopique

PROPooQLOUooTDWfFF

Proposition 10.162 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel normé E. Soit une série convergente $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_0. \tag{10.447}$$

Démonstration. Pour chaque N nous avons $\sum_{k=0}^{N}(a_k-a_{k+1}) = a_0 - a_{N+1}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k-a_{k+1}) = \lim_{N\to\infty}(a_0-a_{N+1}). \tag{10.448}$$

Vu que le terme général tend vers zéro (proposition 10.121), nous avons le résultat annoncé. □

10.11.3 Distributivité

Nous allons parler d'exponentielle de matrice. Avant cela, quelques propriétés qui sont valables sur des algèbres normées. Le principal exemple que nous avons en tête est $\mathbb{A} = \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$.

PROPooMZZQooEhQsgQ

Proposition 10.163 (Distributivité de la somme infinie[1])**.**
Soit une algèbre normée $\mathbb{A}$. Soient une suite d'éléments $A_k \in \mathbb{A}$ et un élément B.

ITEMooVWMQooLqerEc

(1) Si la somme $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ converge, alors

EQooPOFWooGNWIUF

$$B\sum_k A_k = \sum_k (BA_k). \tag{10.449}$$

ITEMooRLRYooQodIkq

(2) Si la somme $\sum_k A_k$ ne converge pas, alors la somme $\sum_k (BA_k)$ ne converge pas non plus.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. Nous avons :

$$\| \sum_{k=0}^{N} BA_k - B \sum_{k=0}^{\infty} A_k \| = \| B \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \| \tag{10.450a}$$

$$\leqslant \|B\| \| \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \| \tag{10.450b}$$

Justifications :

- Pour (10.450a). Linéarité du produit matriciel.
- Pour (10.450b). La norme est une norme d'algèbre[73].

À droite, la limite $N \to \infty$ donne zéro car $\|B\|$ est un simple nombre, et $\| \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \|$ est une queue de suite convergente par hypothèse.

Nous avons donc bien convergence

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} BA_k = B \sum_{k=0}^{\infty} A_k. \tag{10.451}$$

En ce qui concerne le point (2), si la somme $\sum_k (BA_k)$ convergeait, nous pourrions utiliser la partie (1) avec $1/B$ au lieu de B et nous aurions la convergence de $\sum_k A_k$. □

10.11.4 Produit de Cauchy

Proposition 10.164 (Produit de Cauchy dans une algèbre normée[1])**.**
Soient une algèbre normée $\mathbb{A}$, un élément $A \in \mathbb{A}$, ainsi que des séries convergentes $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ et $\sum_{l=0}^{\infty} b_l A^l$. Alors

$$\left(\sum_k a_k A^k \right) \left(\sum_l b_l A^l \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \right) A^n. \tag{10.452}$$

Démonstration. Un calcul :

$$\left(\sum_k a_k A^k \right) \left(\sum_l b_l A^l \right) = \sum_k \left(\sum_l b_l A^l \right) a_k A^k \tag{10.453a}$$

$$= \sum_k \left(\sum_l b_l a_k A^{l+k} \right) \tag{10.453b}$$

$$= \lim_{K \to \infty} \sum_{k=0}^{K} \left(\lim_{L \to \infty} \sum_{l=0}^{L} b_l a_k A^{k+l} \right) \tag{10.453c}$$

$$= \lim_{K \to \infty} \lim_{L \to \infty} \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{L} b_l a_k A^{k+l} \tag{10.453d}$$

$$= \lim_{K \to \infty} \lim_{L \to \infty} \sum_{n=0}^{K+L} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} A^n \tag{10.453e}$$

$$= \lim_{K \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} A^m \tag{10.453f}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} A^m \tag{10.453g}$$

Justifications :

- Pour (10.453a), la proposition 10.163 nous permet d'entrer l'élément $\sum_l b_l A^l \in \mathbb{A}$ dans la somme sur k.
- Pour (10.453b), c'est la même chose.
- Pour (10.453d), la somme sur k étant finie (pour chaque K), elle commute avec la limite sur L.

[73] Définition 10.78. Pour rappel, la norme opérateur en est une par le lemme 10.84.

- Pour (10.453e), c'est une manipulation de sommes finies. On regroupe les termes selon les puissances de A.
- Pour (10.453f), c'est effectuer la limite sur L pour K fixé.
- Pour (10.453g), l'expression dans la limite sur K ne dépend pas de K. Donc nous pouvons simplement supprimer la limite.

□

10.12 Série réelle

secseries

La notion de série formalise le concept de somme infinie[74]. L'absence de certaines propriétés de ces objets (problèmes de commutativité et même d'associativité) incite à la prudence et montre à quel point une définition précise est importante.

10.12.1 Critères de convergence absolue

Étant donné le terme général d'une série, il est souvent –dans les cas qui nous intéressent– difficile de déterminer la somme de la série. L'exemple de la série géométrique est particulier[75], puisqu'on connaît une formule pour chaque somme partielle, mais pour l'exemple des séries de Riemann il n'y a aucune formule simple pour un α général. D'où l'intérêt d'avoir des critères de convergence ne nécessitant aucune connaissance de l'éventuelle limite de la série.

LemgHWyfG

Lemme 10.165 (Critère de comparaison)**.**
Soient $\sum_i a_i$ et $\sum_j b_j$ deux séries à termes positifs vérifiant

$$0 \leqslant a_i \leqslant b_i$$

alors

ITEMooBBWTooYDHnuH

(1) *si $\sum_i a_i$ diverge, alors $\sum_j b_j$ diverge,*

(2) *si $\sum_j b_j$ converge, alors $\sum_i a_i$ converge (absolument).*

PROPooEEACooOYmtxd

Proposition 10.166 (Critère d'équivalence[373])**.**
Soient $\sum_i a_i$ et $\sum_j b_j$ deux séries à termes positifs. Supposons l'existence de la limite (éventuellement infinie) suivante

$$\lim_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i} = \alpha \tag{10.454}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors

(1) *si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \infty$, alors*

$$\sum_i a_i \text{ converge} \iff \sum_j b_j \text{ converge}, \tag{10.455}$$

(2) *si $\alpha = 0$ et $\sum_j b_j$ converge, alors $\sum_i a_i$ converge (absolument),*

(3) *si $\alpha = +\infty$ et $\sum_j b_j$ diverge, alors $\sum_i a_i$ diverge.*

Démonstration. (1) Le fait que la suite a_n/b_n converge vers α signifie que tant sa limite supérieure que sa limite inférieure convergent vers α. En particulier la suite $\frac{a_n}{b_n}$ est bornée vers le haut et vers le bas. À partir d'un certain rang N, il existe M tel que

$$\frac{a_n}{b_n} < M \tag{10.456}$$

et il existe m tel que

$$\frac{a_n}{b_n} > m. \tag{10.457}$$

Nous avons donc $a_n < Mb_n$ et $a_n > mb_n$. La série de (a_n) converge donc si et seulement si la série de (b_n) converge.

[74] La caractérisation qui nous intéresse est celle de la proposition 10.132.
[75] Voir la proposition 10.172.

(2) Si $\alpha = 0$, cela signifie que pour tout ϵ, il existe un rang tel que $\frac{a_n}{b_n} < \epsilon$, et donc tel que $a_n < \epsilon b_k$. La série de (a_i) converge donc dès que la série de (b_i) converge.

(3) Pour tout M, il existe un rang dans la suite à partir duquel on a $\frac{a_i}{b_i} > M$, et donc $a_k > Mb_k$. Si la série de (b_k) diverge, la série de (a_k) doit également diverger.

□

PropOXKUooQmAaJX

Proposition 10.167 (Critère du quotient[387])**.**
Soit $\sum_i a_i$ une série. Supposons l'existence de la limite (éventuellement infinie) suivante

$$\lim_{i\to\infty} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = L \tag{10.458}$$

avec $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors

(1) si $L < 1$, la série converge absolument,

(2) si $L > 1$, la série diverge,

(3) si $L = 1$ le critère échoue : il existe des exemples de convergence et des exemples de divergence.

Démonstration. (1) Soit b tel que $L < b < 1$. À partir d'un certain rang K, on a $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| < b$. En particulier,

$$|a_{K+1}| < b|a_K|, \tag{10.459}$$

et pour a_{K+2} nous avons

$$|a_{K+2}| < b|a_{K+1}| < b^2|a_K|. \tag{10.460}$$

Au final,

$$|a_{K+n}| < b^n|a_K|. \tag{10.461}$$

Étant donné que la série $\sum_{n\geqslant K} b^n$ converge (parce que $b < 1$), la queue de suite $\sum_{i\geqslant K} a_i$ converge, et par conséquent la suite au complet converge.

(2) Si $L > 1$, on a

$$|a_K| < |a_{K+1}| < |a_{K+2}| < \dots \tag{10.462}$$

Il est donc impossible que la suite (a_i) converge vers zéro. La série ne peut donc pas converger.

(3) Par exemple la suite harmonique $a_n = \frac{1}{n}$ vérifie $L = 1$, mais la série ne converge pas. Par contre, la suite $a_n = \frac{1}{n^2}$ vérifie aussi le critère avec $L = 1$ tandis que la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge.

□

Proposition 10.168 (Critère de la racine[373])**.**
Soit $\sum_i a_i$ une série, et considérons

$$\limsup_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i|} = L$$

avec $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors

(1) si $L < 1$, la série converge absolument,

(2) si $L > 1$, la série diverge,

(3) si $L = 1$ le critère échoue.

Démonstration. (1) Si $L < 1$, il existe un $r \in]0, 1[$ tel que $|a_n|^{1/n} < r$ pour les grands n. Dans ce cas, $|a_n| < r^n$, et la série converge absolument parce que la série $\sum_n r^n$ converge du fait que $r < 1$.

(2) Si $L > 1$, il existe un $r > 1$ tel que $|a_n|^{1/n} > r > 1$. Cela fait que $|a_n|$ prend des valeurs plus grandes que n pour une infinité de termes. Le terme général a_n ne peut donc pas être une suite convergente. Par conséquent la suite diverge au sens où elle ne converge pas.

□

10.12.2 Critères de convergence simple

Les critères de comparaison, d'équivalence, du quotient et de la racine sont des critères de convergence absolue. Pour conclure à une convergence simple qui n'est pas une convergence absolue, le critère d'Abel sera notre outil principal.

10.12.2.1 Critère d'Abel

Proposition 10.169 (Critère d'Abel)**.**
Soit la série $\sum_i c_i z_i$ avec

(1) (c_i) est une suite réelle décroissante qui tend vers zéro,

(2) (z_i) est une suite dans $\mathbb{C}$ dont la suite des sommes partielles est bornée dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe un $M > 0$ tel que pour tout n,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant M. \tag{10.463}$$

Alors la série $\sum_i c_i z_i$ est convergente.

Remarquons que ce critère ne donne pas de convergence absolue.

10.12.3 Quelques séries usuelles

SUPROOOBATWbokZXXdf

Proposition 10.170 (Série harmonique)**.**
*La **série harmonique** converge vers l'infini*[76] *:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty. \tag{10.464}$$

Démonstration. Considérons la sommes partielles $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Considérons la différence

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \tag{10.465}$$

Cette somme contient $n+1$ termes, tous plus grands que $\frac{1}{2n}$, donc

$$H_{2n} - H_n > n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{10.466}$$

Nous prouvons donc par récurrence que $H_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$. D'abord pour $n = 1$ nous avons

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2}. \tag{10.467}$$

Ensuite la récurrence :

$$H_{2^n} > H_{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}. \tag{10.468}$$

□

10.171.
À quel point la série harmonique diverge-t-elle lentement ? Allez regarder
https://www.youtube.com/watch?v=_AtkIpi6KP0.

PROPooWOWQooWbzukS

Proposition-Définition 10.172 (Série géométrique)**.**
*La **série géométrique** de raison $q \in \mathbb{C}$ est*

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i. \tag{10.469}$$

EqZQTGooIWEFxL

ITEMooAFAMooGuXqBm

(1) Elle converge si et seulement si $|q| < 1$.

ITEMooBJHBooBMEmiG

(2) Si $|q| < 1$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \tag{10.470}$$

EqRGkBhrX

ITEMooVZHKooNGpDkx

(3) Si la somme commence en $n = 1$ au lieu de $n = 0$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}. \tag{10.471}$$

EqPZOWooMdSRyY

[76] Vous pouvez aussi dire qu'elle diverge, mais si on met la bonne topologie sur $\mathbb{R}$, la convergence vers $+\infty$ est plus précise que la non-convergence.

Démonstration. Plusieurs points.

(1) **Pour (1) et (2)** La somme partielle est déjà donnée dans le lemme 1.611 :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}. \tag{10.472}$$

En vertu de (9.115), la limite $\lim_{N\to\infty} S_N$ existe si et seulement si $|q| \leqslant 1$ et dans ce cas nous avons le résultat parce que $q^{N+1} \to 0$.

(2) **Pour (3)** Il s'agit seulement du calcul

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}. \tag{10.473}$$

□

Un cas particulier de la formule (1.888) est le calcul de $\sum_{j=1}^{N} q^{-j}$ bien utile lorsque l'on joue avec des nombres binaires (voir l'exemple 34.12). Nous avons

$$\sum_{j=1}^{N} q^{-j} = \sum_{j=0}^{N} q^{-j} - 1 = \frac{1 - q^{-N}}{q - 1}. \tag{10.474}$$

EQooFMBAooEJkHWT

ExIJMHooOEUKfj

Lemme 10.173 (Série exponentielle)**.**
La série

$$\exp(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}. \tag{10.475}$$

converge pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Elle est nommée . Pour tout savoir de l'exponentielle et de ses variations, voir le thème 50.

Démonstration. Si $a_k = t^k/k!$ alors $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{t}{k}$ dont la limite $k \to \infty$ est zéro (quel que soit t). En vertu du critère du quotient 10.167 la série exponentielle converge (absolument) pour tout $t \in \mathbb{R}$. □

LEMooCVIQooUtuzgE

Lemme 10.174 (Série arithmético-géométrique[388])**.**
*Une **suite arithmético-géométrique** est une suite vérifiant pour tout n la relation*

$$u_{n+1} = au_n + b \tag{10.476}$$

avec a et b non nuls. Nous nommons u_0 le premier terme.

(1) Si la suite possède une limite, alors elle est donnée par

$$l = \frac{b}{1-a}. \tag{10.477}$$

EQooMZSSooQWpZUp

(2) Pour tout n nous avons la formule

$$u_n = a^n(u_0 - l) + l. \tag{10.478}$$

Démonstration. Si la suite possède une limite, cette dernière doit résoudre $l = al + b$, et donc être égale à (10.477).

Il n'est pas très compliqué de trouver le terme général de la suite en fonction de a et de b. Il suffit de considérer la suite $v_n = u_n - l$, et de remarquer que cette suite est géométrique :

$$v_{n+1} = av_n. \tag{10.479}$$

Par conséquent $v_n = a^n v_0$, ce qui donne pour la suite (u_n) la formule

$$u_n = a^n(u_0 - l) + l. \tag{10.480}$$

□

LEMooKDHPooPlFTIT

Lemme 10.175 ([389]).
Nous avons :

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{N}{N+1}. \tag{10.481}$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1. \tag{10.482}$$

Démonstration. Nous posons

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \tag{10.483a}$$

$$g(n)=\frac{n}{n+1} \tag{10.483b}$$

et nous montrons par récurrence que $f(n)=g(n)$. Pour $n=1$ nous avons $f(1)=g(1)=\frac{1}{2}$.

Nous supposons que $f(n)=g(n)$ et nous prouvons que $f(n+1)=g(n+1)$. Facile :

$$f(n+1)=f(n)+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{10.484a}$$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{10.484b}$$

$$=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \tag{10.484c}$$

$$=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \tag{10.484d}$$

$$=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \tag{10.484e}$$

$$=\frac{n+1}{n+2} \tag{10.484f}$$

$$=g(n+1). \tag{10.484g}$$

En ce qui concerne la seconde formule, par définition[77]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1. \tag{10.485}$$

□

10.12.4 Séries alternées

THOooOHANooHYfkII

Théorème 10.176 (Critère des séries alternées[357]).
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive décroissante à limite nulle. Nous notons S_n la somme partielle de la série alternée : $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Alors

(1) les sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes[78].

ITEMooWNCXooWAYRdm

(2) La série $\sum_n(-1)^n a_n$ converge.

ITEMooWEPWooXhLMYL

(3) Si nous considérons le reste

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k, \tag{10.486}$$

nous avons

$$\operatorname{sgn}(R_n)=(-1)^{n+1} \tag{10.487a}$$

$$|R_n|\leqslant a_{n+1}. \tag{10.487b}$$

[77] Définition d'une série, 10.111.
[78] Définition 9.40.

Démonstration. En termes de notations, nous allons écrire (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$. Nous notons (S_{2n}) la suite des termes pairs de cette suite. C'est donc la suite $n \mapsto S_{2n}$. Nous divisons en plusieurs morceaux.

(1) S_{2n} **est croissante** Nous avons simplement

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0. \tag{10.488}$$

(2) (S_{2n+1}) **est décroissante** Même calcul.

(3) **Les suites** (S_{2n}) **et** S_{2n+1} **sont adjacentes** Nous avons simplement

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0. \tag{10.489}$$

Nous concluons par le théorème des suites adjacentes 9.41 que les sous-suites des termes pairs et impairs sont convergentes et convergent vers la même limite.

C'est le moment d'utiliser la proposition 9.42 qui convaincra la lectrice que (S_n) converge vers la même limite, que nous notons S. Le théorème des suites adjacentes nous dit encore que

$$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \tag{10.490}$$

et donc que $R_{2n} = S - S_{2n} \leqslant 0$. Cela donne la majoration

$$|R_{2n}| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}. \tag{10.491}$$

Nous faisons le même genre de majorations pour R_{2n+1}. □

10.12.5 Moyenne de Cesàro

La moyenne de Cesàro est le premier pas dans la direction des supersommes[2] qui permettent de sommer des choses de moins en moins convergentes, jusqu'à sommer la fameuse série $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -1/12$.

DEFooLVRLooTeowkn

Définition 10.177.
Si $a\colon \mathbb{N} \to V$ est une suite dans l'espace vectoriel V, alors sa ***moyenne de Cesàro*** *est la limite (si elle existe) de la suite*

$$\sigma_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{10.492}$$

En un mot, c'est la limite des moyennes partielles.

LemyGjMqM

Lemme 10.178.
Si la suite (a_n) converge vers la limite ℓ alors la suite admet une moyenne de Cesàro qui vaudra ℓ.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - \ell| < \epsilon$ pour tout $n > N$. En remarquant que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \ell), \tag{10.493}$$

nous avons

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \ell\Big| \leqslant \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|a_k - \ell|\Big| + \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\underbrace{|a_k - \ell|}_{\leqslant\epsilon}\Big| \tag{10.494a}$$

$$\leqslant \epsilon + \frac{n - N - 1}{n}\epsilon \tag{10.494b}$$

$$\leqslant 2\epsilon. \tag{10.494c}$$

Dans ce calcul nous avons redéfini N de telle sorte que le premier terme soit inférieur à ϵ. □

10.12.6 Écriture décimale d'un réel

Nous avons déjà vu la fonction (1.205) qui permet d'écrire des naturels dans une base $b \geqslant 2$ donnée. Nous allons maintenant construire une fonction du même type, pour la partie décimale d'un réel.

NORMALooTZWYooPMgOIm

10.179.
Soit $b \geqslant 2$ un entier qui sera la base dans laquelle nous allons écrire les nombres. Nous considérons l'ensemble $\mathbb{D}_b$ des suites dans $\{0, 1, \dots, b-1\}$ qui n'ont pas une queue de suite uniquement formée de $b-1$. Autrement dit une suite (c_n) est dans $\mathbb{D}_b$ lorsque pour tout N, il existe $k > N$ tel que $c_k \neq b-1$. Associé à cet ensemble nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_b \colon \mathbb{D}_b &\to [0,1[\\ c &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n}. \end{aligned} \tag{10.495}$$

EqXXXooOTsCK

Lemme 10.180.
La fonction φ_b est bien définie au sens où elle converge et prend ses valeurs dans $[0,1[$.

Démonstration. Tout se base sur la somme de la série géométrique (10.470) sous la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^k} = \frac{b}{b-1}. \tag{10.496}$$

EqWZGooXJgwl

La somme (10.495) est donc majorée par $\sum_n \frac{b-1}{b^n}$ qui converge.

Pour prouver que l'image de φ_b est bien $[0,1[$, nous savons qu'au moins un des c_n (en fait une infinité) est plus petit que $b-1$, donc nous avons la majoration stricte[79]

$$\varphi_b(c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = (b-1)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} - 1 \right) = 1 \tag{10.497}$$

□

Le fait d'introduire l'ensemble $\mathbb{D}$ au lieu de l'ensemble de toutes les suites est justifié par la proposition suivante. Elle explique pourquoi un nombre possède au maximum deux écritures décimales distinctes et que ces deux sont obligatoirement de la forme, par exemple en base 10 :

$$0.34599999999\ldots = 0.34600000\ldots \tag{10.498}$$

mais qu'un nombre commençant par 0.347 ne peut pas être égal. C'est pour cela que dans la définition de $\mathbb{D}_b$ nous avons exclu les suites qui terminent par tout des $b-1$.

La proposition suivante complète ce qui est déjà dit dans le lemme 7.328.

PropSAOoofRlQR

Proposition 10.181.
Soit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi \colon \{0, \dots, b-1\}^{\mathbb{N}} &\to [0,1[\\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}. \end{aligned} \tag{10.499}$$

Si $\varphi(x) = \varphi(y)$ et si n_0 est le plus petit entier tel que $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ alors soit

$$x_{n_0} - y_{n_0} = 1 \tag{10.500}$$

et $x_n = 0$, $y_n = b-1$ pour tout $n > n_0$, soit le contraire : $y_{n_0} - x_{n_0} = 1$ avec $y_n = 0$ et $x_n = b-1$ pour tout $n > n_0$.

Démonstration. Nous nous basons sur la formule (facilement dérivable depuis (10.496)) suivante :

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{b^k} = \frac{1}{b^{n_0+1}} \frac{b}{b-1}. \tag{10.501}$$

Nous avons

$$0 = \varphi(x) - \varphi(y) = \frac{x_{n_0} - y_{n_0}}{b^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{b^n} \geqslant \frac{x_{n_0} - y_{n_0}}{b^{n_0}} - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = \frac{x_{n_0} - y_{n_0} - 1}{b^{n_0}}. \tag{10.502}$$

[79] Notez que la somme (10.495) commence à un tandis que la série géométrique (10.496) commence à zéro.

Le dernier terme étant manifestement positif[80], il est nul et nous avons $x_{n_0} - y_{n_0} = 1$.

Nous avons donc maintenant

$$0 = \varphi(x) - \varphi(y) = \frac{1}{b^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{b^n}. \tag{10.503}$$ EqHWQoottPnb

Nous majorons la dernière somme de la façon suivante, en supposant que $|x_n - y_n| \neq b-1$ pour un certain $n > n_0$:

$$\left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{b^n} \right| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{b^n} < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = \frac{1}{b^{n_0}}. \tag{10.504}$$

Étant donné cette inégalité stricte, l'équation (10.503) ne peut pas être correcte (valoir zéro). Nous avons donc $|x_n - b_n| = b-1$ pour tout $n > n_0$. Donc pour chaque $n > n_0$ nous avons soit $x_n = 0$ et $y_n = b-1$, soit $a_n = b-1$ et $b_n = 0$. Pour conclure il faut encore prouver que le choix doit être le même pour tout n.

Nous nous mettons dans le cas $x_{n_0} - y_{n_0} = 1$; dans ce cas nous avons bien l'égalité (10.503) sans petites nuances de signes. Nous écrivons

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{b^n} = (b-1) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{(-1)^{s_n}}{b^n} \tag{10.505}$$

où s_n est pair ou impair suivant que $x_n = 0$, $y_n = b-1$ ou le contraire. Si un des $(-1)^{s_n}$ est pas -1 alors nous avons l'inégalité stricte

$$(b-1) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{(-1)^{s_n}}{b^n} > (b-1) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{-1}{b^n} = -\frac{1}{b^{n_0}}. \tag{10.506}$$

Dans ce cas il est impossible d'avoir $\varphi(x) - \varphi(y) = 0$. Nous en concluons que $(-1)^{s_n}$ est toujours -1, c'est-à-dire $x_n - y_n = 1 - b$, ce qui laisse comme seule possibilité $x_n = 0$ et $y_n = b-1$. □ ThoRXBootpUpd

Théorème 10.182.
L'application $\varphi_b \colon \mathbb{D}_b \to [0,1[$ est bijective.

Démonstration. En ce qui concerne l'injection, nous savons de la proposition 10.181 que si $\varphi_b(x) = \varphi_b(y)$ pour $x, y \in \{0, \dots, b-1\}^{\mathbb{N}}$, alors soit x soit y a une queue de suite composée uniquement de $b-1$, ce qui est exclu dans $\mathbb{D}_b$. Nous en déduisons que φ_b est bien injective en prenant $\mathbb{D}_b$ comme ensemble départ.

La partie lourde est la surjectivité. Nous prenons $x \in [0,1[$ et nous allons construire par récurrence une suite $a \in \mathbb{D}_b$ telle que $\varphi_b(a) = x$. Si il existe $a_1 \in \{0, \dots, b-1\}$ tel que $x = a_1/b$ alors nous prenons la suite $(a_1, 0, \dots,)$ et nous avons évidemment $\varphi(a) = x$. Sinon il existe $a_1 \in \{0, \dots, b-1\}$ tel que

$$\frac{a_1}{b} < x < \frac{a_1 + 1}{b} \tag{10.507}$$

parce que les autres possibilités pour x sont dans l'ensemble $[0,1[\setminus \{\frac{k}{b}\}_{k=0,\dots,b-1}$ que nous subdivisons en

$$]0, \frac{1}{b}[\cup]\frac{1}{b}, \frac{2}{b}[\cup \dots \cup]\frac{b-1}{b}, 1[. \tag{10.508}$$

Pour la récurrence nous supposons avoir trouvé $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b^k} < x < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{b^k} + \frac{a_n + 1}{b^n}. \tag{10.509}$$

Encore une fois si il existe $a_{n+1} \in \{0, \dots, b-1\}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{b^k} = x$ alors nous prenons ce a_{n+1} et nous complétons la suite avec des zéros pour avoir $\varphi(a) = x$. Sinon , pour simplifier les notations nous notons $x' = x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b^k}$ et nous avons

$$0 < x' < \frac{a_n + 1}{b^n}. \tag{10.510}$$

Le nombre x' est forcément dans un des intervalles

$$]\frac{s}{b^{n+1}}, \frac{s+1}{b^{n+1}}[\tag{10.511}$$

[80] C'est ici qu'intervient la subdivision entre le cas $x_{n_0} - y_{n_0} = 1$ ou le contraire. En effet si « ce dernier terme était manifestement *négatif* », il aurait fallu majorer avec de $1 - b$ au lieu de $1 - b$.

avec $s \in \{0, \dots, b-1\}$. Nous prenons le s correspondant à x' comme a_{n+1}. Dans ce cas nous avons

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{b^k} < x < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{b^k} + \frac{1}{b^{n+1}}. \tag{10.512}$$

Note : les deux inégalités sont strictes. La première parce que si il y avait égalité, nous nous serions déjà arrêté en complétant avec des zéros. La seconde parce que

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{a_k}{b^k} \leqslant \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{b-1}{b^k} = \frac{1}{b^{n+1}} \tag{10.513}$$

où l'égalité n'est possible que si $a_k = b-1$ pour tout $k \geqslant n+2$. Dans ce cas nous aurions eu

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b^k} + \frac{a_{n+1}+1}{b^{n+1}} \tag{10.514}$$

et nous aurions choisi le nombre a_{n+1} autrement et complété la suite par des zéros à partir de là. Notons que cela prouve au passage que la suite que nous sommes en train de construire est bien dans $\mathbb{D}_b$ parce qu'elle ne contiendra pas de queue de suite composée de $b-1$.

Ceci termine la construction par récurrence de la suite $a \in \mathbb{D}_b$. Par construction nous avons pour tout $N \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \leqslant x \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b^k} + \frac{1}{b^{N+1}}, \tag{10.515}$$

autrement dit : $\varphi_b(a_1, \dots, a_N) \in B(x, \frac{1}{b^{N+1}})$. Nous avons donc bien convergence

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_b(a_1, \dots, a_N) = x \tag{10.516}$$

et l'application φ_b est surjective. □

L'application $\varphi_b^{-1} : [0,1[\to \mathbb{D}_b$ est la **décomposition décimale** en base b des nombres de $[0,1[$.

Tout cela nous permet de montrer entre autres que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Vu qu'il y a une bijection entre $[0,1[$ et $\mathbb{D}_b$, il suffit de prouver que $\mathbb{D}_b$ est non dénombrable. De plus il suffit de démontrer que $\mathbb{D}_b$ est non dénombrable pour un entier $b \geqslant 2$ donné.

PropNNHooYTVFw

Proposition 10.183 ([390]).
Il n'existe pas de surjection $\mathbb{N} \to \mathbb{D}_b$. Autrement dit $\mathbb{D}_b$ est non dénombrable.

Démonstration. Nous prenons $b \neq 2$ pour des raisons qui seront claires plus tard. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{D}_b$. Pour $i \in \mathbb{N}$ nous notons

$$f(n) = (c_i^{(n)})_{i \geqslant 1}, \tag{10.517}$$

et nous définissons la suite

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{si } c_k^{(k)} \neq 0 \\ 1 & \text{si } c_k^{(k)} = 0. \end{cases} \tag{10.518}$$

C'est une suite dans $\mathbb{D}_b$ parce que $b \neq 2$ et que la suite ne contient que des 0 et des 1. Mais nous n'avons $f(n) = c$ pour aucun $n \in \mathbb{N}$ parce que nous avons $c_n \neq f(n)_n$.

Si $b = 2$ alors nous savons que $\mathbb{D}_2 \sim [0,1[\sim \mathbb{D}_3$. Donc $\mathbb{D}_2 \sim \mathbb{D}_3$ et $\mathbb{D}_2$ ne peut pas plus être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ que $\mathbb{D}_3$. □

Remarque 10.184.
Le cas de la base $b = 2$ doit être fait à part parce que rien n'empêche d'avoir une queue de 1. Il y a alors toutefois moyen de se débrouiller en construisant la suite c de façon plus subtile. Si $b = 2$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $f(n)$ est une suite de 0 et 1 contenant une infinité de 0 (parce qu'il n'y a pas de queue de suite ne contenant que des 1). Nous construisons alors c de la façon suivante : d'abord nous recopions $f(0)$ jusqu'à son *deuxième* zéro que nous changeons en 1 ; nommons n_0 le rang de ce deuxième zéro. Ensuite nous recopions les éléments de $f(1)$ à partir du rang $n_0 + 1$ jusqu'au second zéro que nous changeons en 1, etc.

Le fait de prendre le deuxième zéro nous garantit que la suite c n'aura pas de queue de suite ne contenant que des 1.

Notons que cette construction s'adapte à tout b ; il suffit de prendre le second terme qui n'est pas $b-1$ et le remplacer par $b-1$.

Corolaire 10.185.
L'ensemble $[0,1[$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration. L'ensemble $[0,1[$ est en bijection avec $\mathbb{D}_b$ que nous venons de prouver n'être pas dénombrable. □

10.12.7 Théorème de Banach-Steinhaus

LEMooPIPLooMppGSO

Lemme 10.186 ([391])**.**
Soient des espaces vectoriels normés X *et* Y *ainsi qu'une application linéaire bornée* $T\colon X\to Y$*. Pour tout* $a\in X$ *et pour tout* $r>0$ *nous avons*

$$\sup_{x\in B(a,r)}\|Tx\|\geqslant r\|T\| \tag{10.519}$$

Démonstration. Nous commençons avec $a=0$. En utilisant la définition 10.67 de la norme opérateur,

$$\|T\|=\sup_{x\in X}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{x\in B(0,r)}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant\frac{1}{r}\sup_{x\in B(0,r)}\|Tx\|. \tag{10.520}$$

Donc

$$\sup_{x\in B(0,r)}\|Tx\|\geqslant r\|T\|. \tag{10.521}$$

Il y a maintenant une astuce. Nous considérons un maximum :

SUBEQooPJPMooDkqRHs

SUBEQooEZUUooVJKtfn

$$\begin{aligned}\max\{\|T(a+x),\|T(a-x)\|\}&\geqslant\frac{1}{2}\big(\|T(a+x)\|+\|T(a-x)\|\big) &(10.522a)\\ &\geqslant\frac{1}{2}\big(\|T(a+x)-T(a+x)\|\big) &(10.522b)\\ &=\frac{1}{2}\|T(2x)\| &(10.522c)\\ &=\|Tx\|. &(10.522d)\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (10.522a), la moyenne est plus petite que le maximum.
- Pour (10.522b), inégalité triangulaire : $\|\alpha-\beta\|\leqslant\|\alpha\|+\|\beta\|$.

Si maintenant $y\in B(a,r)$, nous avons $y=a+x$ pour un certain $x\in B(0,r)$, donc

SUBEQooACJSooTHCAWs

$$\begin{aligned}\sup_{y\in B(a,r)}\|Ty\|&=\sup_{x\in B(0,r)}\|T(a+x)\| &(10.523a)\\ &=\sup_{x\in B(0,r)}\max\{\|T(a+x)\|,\|T(a-x)\|\} &(10.523b)\\ &\geqslant\sup_{x\in B(0,r)}\|Tx\| &(10.523c)\\ &\geqslant r\|T\|. &(10.523d)\end{aligned}$$

Pour (10.523b), l'ensemble sur lequel nous prenons le supremum n'est pas modifié fondamentalement si nous regroupons les éléments deux à deux en prenant le maximum : les éléments exclus sont majorés. □

Une version avec des seminormes sera le théorème 27.8.

THOooJHVNooIDDxyT

Théorème 10.187 (Théorème de Banach-Steinhaus[391])**.**
Soient un espace de Banach[81] X *et un espace vectoriel normé* Y*. Soit une famille* $\mathcal{F}$ *d'opérateurs linéaire bornés. Si pour tout* $x\in X$*,*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\|<\infty, \tag{10.524}$$

alors

$$\sup_{T\in\mathcal{F}}\|T\|<\infty. \tag{10.525}$$

[81] Définition 7.316.

Démonstration. Nous supposons que $\sup_{T\in\mathcal{F}}\|T\|=\infty$, de telle sorte que nous pouvons choisir une suite (T_n) dans $\mathcal{F}$ telle que $\|T_n\|\to\infty$. Cette suite peut diverger arbitrairement vite, et nous fixerons exactement cela plus tard.

Soit par ailleurs une suite $\alpha_n>0$ d'éléments petits et tels que $\alpha_n\to 0$. Nous supposons que $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n<\infty$.

Si $a\in X$, le lemme 10.186 dit que

$$\sup_{x\in B(a,\alpha_n)}\|T_nx\|\geqslant\|T_n\|\alpha_n. \tag{10.526}$$

En posant $x_0=0$, nous construisons une suite (x_n) par récurrence en imposant

(1) $x_n\in B(x_{n-1},\alpha_n)$

(2) $\|T_nx_n\|\geqslant\|T_n\|\alpha_n$.

En utilisant une série télescopique et l'inégalité triangulaire $\|x_k-x_{k+1}\|\leqslant\alpha_n$ à chaque étage,

$$\|x_p-x_q\|\leqslant\sum_{k=p}^{q}\alpha_k\leqslant\sum_{k=p}^{\infty}\alpha_k. \tag{10.527}$$

Mais puisque la somme des α_n converge, la suite des queues de somme converge vers zéro[82] : $\lim_{p\to\infty}\sum_{k=p}^{\infty}\alpha_n=0$. Cela implique que (x_n) est une suite de Cauchy[83]. Vu que X est de Banach, la suite (x_n) a une limite dans X. Soit x cette limite.

Nous avons $\beta_n=\|x_n-x\|\to 0$. Il y aurait moyen de calculer β_n en fonction de α_n (surtout si nous avions donné une forme explicite à α_n), mais c'est sans importance ici. L'important est que c'est une suite qui tend vers zéro.

Nous avons

$$x\in B(x_n,\beta_n), \tag{10.528}$$

et donc il existe $a_n\in B(0,\beta_n)$ tel que $x=x_n+a_n$. Avec cela, pour chaque n nous avons :

$$\begin{aligned}\|T_nx\|&=\|T_n(x_n+a_n)\| &\text{(10.529a)}\\ &\geqslant\|T_nx_n\|-\|T_na_n\| &\text{(10.529b)}\\ &\geqslant\|T_nx_n\|-\|T_n\|\beta_n &\text{(10.529c)}\\ &\geqslant\|T_n\|\alpha_n-\|T_n\|\beta_n=\|T_n\|(\alpha_n-\beta_n). &\text{(10.529d)}\end{aligned}$$

SUBEQooPLVQooChVCLU

Pour 10.529c, nous avons utilisé $\|T_na_n\|\leqslant\|T_n\|\beta_n$. En résumé,

$$\|T_nx\|\geqslant\|T_n\|(\alpha_n-\beta_n). \tag{10.530}$$

Il suffit de choisir $\|T_n\|$ suffisamment rapidement croissant pour que[84]

$$\|T_n\|(\alpha_n-\beta_n)\to\infty, \tag{10.531}$$

et nous avons $\|T_nx\|\to\infty$, qui est contraire aux hypothèses. □

ThoPFBMHBN

Théorème 10.188 (Théorème de Banach-Steinhaus[128, 392])**.**
Soit E un espace de Banach[85] et F un espace vectoriel normé. Nous considérons une partie $H\subset\mathcal{L}^0(E,F)$ (espace des applications linéaires continues). Alors H est uniformément borné si et seulement si il est simplement borné.

Démonstration. Si H est uniformément borné, il est borné ; pas besoin de rester longtemps sur ce sens de l'équivalence. Supposons donc que H soit borné. Pour chaque $k\in\mathbb{N}^*$ nous considérons l'ensemble

$$\Omega_k=\{x\in E\text{ tel que }\sup_{f\in H}\|f(x)\|>k\}. \tag{10.532}$$

(1) **Les Ω_k sont ouverts** Soit $x_0\in\Omega_k$; nous avons alors une fonction $f\in H$ telle que $\|f(x_0)\|>k$, et par continuité de f il existe $\rho>0$ tel que $\|f(x)\|>k$ pour tout $x\in B(x_0,\rho)$. Par conséquent $B(x_0,\rho)\subset\Omega_k$ et Ω_k est ouvert par le théorème 7.8.

[82] Lemme 10.115(2).
[83] Proposition 7.323.
[84] Le point important ici est que α_n (et donc β_n) est choisi sans référence à $\|T_n\|$.
[85] Définition 7.316.

(2) **Les Ω_k ne sont pas tous denses dans E** Nous supposons que les ensembles Ω_k soient tous dense dans E. Le théorème de Baire 7.420 nous indique que E est un espace de Baire (parce que de Banach) et donc que

$$\overline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k} = E. \tag{10.533}$$

En particulier l'intersection des Ω_k n'est pas vide. Soit $x_0 \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$. Nous avons alors

$$\sup_{f\in H} \|f(x)\| = \infty, \tag{10.534}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc les ouverts Ω_k ne sont pas tous denses dans E.

(3) **La majoration** Il existe $k \geqslant 0$ tel que Ω_k ne soit pas dense dans E, et nous voulons prouver que $\{\|f\| \text{ tel que } f \in H\}$ est un ensemble borné. Soit donc $k \geqslant 0$ tel que Ω_k ne soit pas dense dans E ; il existe un $x_0 \in E$ et $\rho > 0$ tels que

$$B(x_0, \rho) \cap \Omega_k = \varnothing. \tag{10.535}$$

Si $x \in B(x_0, \rho)$ alors x n'est pas dans Ω_k et donc

$$\sup_{f\in H} \|f(x)\| \leqslant k. \tag{10.536}$$

Afin d'évaluer $\|f\|$ nous devons savoir ce qu'il se passe avec les vecteurs sur une boule autour de 0. Pour tout $x \in B(0, \rho)$ et pour tout $f \in H$, la linéarité de f donne

$$\|f(x)\| = \|f(x + x_0) - f(x_0)\| \leqslant \|f(x + x_0) + f(x_0)\| \leqslant 2k. \tag{10.537}$$

Par continuité nous avons alors $\|f(x)\| \leqslant 2k$ pour tout $x \in \overline{B(0, \rho)}$. Si maintenant $x \in F$ vérifie $\|x\| = 1$ nous avons

$$\|f(x)\| = \frac{1}{\rho}\|f(\rho x)\| \leqslant \frac{2k}{\rho}, \tag{10.538}$$

et donc $\|f\| \leqslant \frac{2k}{\rho}$, ce qui montre que $2k/\rho$ est un majorant de l'ensemble $\{\|f\| \text{ tel que } f \in H\}$.

□

Une application du théorème de Banach-Steinhaus est l'existence de fonctions continues et périodiques dont la série de Fourier ne converge pas. Ce sera l'objet de la proposition 29.56.

10.12.8 Convergence forte

Lorsque nous avons une suite d'opérateurs linéaires, nous pouvons considérer la convergence d'une suite pour la norme opérateur : $A_k \to A$ lorsque $\|A_k - A\| \to 0$.

DEFooNREQooElLvec

Définition 10.189 ([393]).
*Soient un espace vectoriel E et un espace vectoriel normé V. Nous disons que la suite d'opérateur $T_k : E \to V$ **converge fortement** vers l'opérateur T si pour tout $x \in E$ nous avons*

$$\|T_k x - Tx\| \to 0. \tag{10.539}$$

Cette notion s'appelle *forte* par opposition à la convergence *faible* dont nous ne parlerons pas. Elle est cependant moins forte que la convergence en norme dont nous avons déjà parlé.

PROPooRFBLooUjSirP

Proposition 10.190.
Soient des espaces vectoriels normés E et F et une suite d'opérateurs $T_k : E \to F$ convergeant vers T[86]*. Alors cette suite converge également fortement.*

Démonstration. Soit $x \in E$ que nous supposons non nul. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda y$ avec $\|y\| = 1$. Nous avons

$$\|T_k x - Tx\| = |\lambda|\|T_k y - Ty\| \leqslant |\lambda| \sup_{\|z\|=1} \|T_k z - Tz\| = |\lambda|\|T_k - T\| \to 0. \tag{10.540}$$

La dernière étape est la convergence en norme $T_k \to T$. □

[86] Sans précisions, ce sera toujours la convergence en norme.

PROPooESZVooJNCidk

Proposition 10.191.
Soient E et F, des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit une suite (A_n) d'applications linéaires $E \to F$. Si elle converge fortement vers A, alors elle converge en norme vers A.

Démonstration. En plusieurs coups.

(1) **Si une sous-suite converge** Commençons par montrer que si (B_n) est une sous-suite de (A_n) qui converge vers B, alors $B = A$. Autrement dit, A est le seul candidat limite pour A_n.

Soit $\|x\| = 1$. Nous avons

$$\|B_n x - Bx\| \leqslant \|B_n - B\|\|x\| = \|B_n - B\|, \tag{10.541}$$

mais pour la sous-suite (B_n) nous avons supposé $\|B_n - B\| \to 0$. Donc $\|B_n x - Bx\| \to 0$, ce qui signifie que $B_n x \to Bx$. Mais par hypothèse, $B_n x \to Ax$. Par unicité de la limite, $Bx = Ax$ pour tout x de norme 1. Pour les autres x, c'est la linéarité qui conclut.

(2) **Utilisation de deux gros résultats** Par l'hypothèse de convergence, pour chaque x nous avons $\sup_n \|A_n x\| < \infty$. Le théorème de Banach-Steinhaus 10.187 nous indique alors que l'ensemble $\mathcal{F} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est borné. Il existe donc $M > 0$ tel que $\|A_n\| < M$ pour tout n.

Nous utilisons à présent l'hypothèse de dimension finie en disant que l'espace des applications linéaires $E \to F$ est de dimension finie, de telle sorte que ses boules fermées soient compactes.

Donc la suite (A_n) est contenue dans un compact.

(3) **Les sous-suite convergentes** La suite (A_n) est contenue dans un compact. Toutes ses sous-suites sont dans ce compact et possèdent donc une sous-suite convergente (théorème 7.194). Toutes ces sous-sous-suites convergent nécessairement vers A par ce que nous avons dit dans la première étape de la preuve. Le lemme 7.86 nous dit alors que $A_n \to A$.

□

10.13 Application ouverte

Définition 10.192 (application ouverte)**.**
Soient deux espaces topologiques X et Y. Une application $f : X \to Y$ est ***ouverte*** *si l'image de tout ouvert de X par f est un ouvert de Y.*

Nous disons que f est ouverte en $a \in X$ si l'image de tout ouvert contenant a est ouverte.

PROPooXGEGooHoMsne

Proposition 10.193.
Une application bijective est ouverte si et seulement si son inverse est continue.

Démonstration. Ce n'est seulement que la définition, mais pour le sport nous démontrons le sens direct.

Soit donc une application $f : X \to Y$ bijective et ouverte entre les espaces topologiques X et Y. Prouvons que $f^{-1} : Y \to X$ est continue. Pour cela nous considérons un ouvert $\mathcal{O}$ dans X, et nous prouvons que $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert dans Y. Par définition de l'inverse, $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{O}) = f(\mathcal{O})$ et vu que f est ouverte, $f(\mathcal{O})$ est ouvert. □

LEMooHHIPooEpGfCg

Lemme 10.194.
Une application $f : X \to Y$ est ouverte si et seulement si pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage U de x, la partie $f(U)$ est un voisinage de $f(x)$.

Démonstration. La preuve suit celle de la proposition 7.262. Le sens direct est un à fortiori.

Dans l'autre sens. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de X. Pour prouver que $f(\mathcal{O})$ est ouvert, nous considérons $y \in f(\mathcal{O})$, ainsi que $x \in \mathcal{O}$ tel que $f(x) = y$. Vu que $\mathcal{O}$ est un voisinage de x, la partie $f(\mathcal{O})$ est un voisinage de $y = f(x)$.

Il existe donc un ouvert V de Y tel que $y = f(x) \in V \subset f(\mathcal{O})$. Donc la partie $f(\mathcal{O})$ contient un ouvert autour de chacun de ses points, et elle est ouverte par le théorème 7.8. □

Lemme 10.195 ([394])**.**
Une application linéaire entre espaces vectoriels topologiques est ouverte si et seulement si elle est ouverte en 0.

Démonstration. Le sens direct est un à fortiori.

Soit un ouvert $\mathcal{O}$ et $a \in \mathcal{O}$. La partie $\mathcal{O} - a$ est ouverte et contient 0. Donc $f(\mathcal{O} - a)$ est un ouvert parce que f est ouverte en 0. Nous en déduisons, par linéarité, que $f(\mathcal{O}) - f(a)$ est ouvert et donc que $f(\mathcal{O})$ est ouverte. □

Lemme 10.196 ([394]).
Soient des espaces vectoriels normés E et F. Une application linéaire ouverte $f : E \to F$ est surjective.

Démonstration. Soit un ouvert $B(0,r)$ dans E. Puisque f est ouverte, la partie $f\big(B(0,r)\big)$ est ouverte dans F, et contient donc une boule $B_F(0,r')$ pour un certain $r' > 0$.

Soit $v \in F$. Nous considérons

$$v' = r' \frac{v}{2\|v\|}. \tag{10.542}$$

Nous avons $\|v'\| = r'/2$, et donc $v' \in B_F(0,r')$. Il existe donc $x \in E$ (et même dans $B_E(0,r)$) tel que $f(x) = v'$. Nous avons alors

$$f\big(\frac{2\|v\|}{r'}x\big) = v, \tag{10.543}$$

ce qui prouve que v est dans l'image de f, et donc que f est surjective. □

THOooATZKooXHWCRD

Théorème 10.197 (théorème de l'application ouverte[394, 395, 396]).
Soient des espaces de Banach[87] E et F. Si l'application $f : E \to F$ est linéaire, surjective et continue, alors elle est ouverte.

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **Une union de fermés** Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B(0,n)$. Nous avons alors

$$y \in f\big(B(0,n)\big) \subset \overline{f\big(B(0,n)\big)} \tag{10.544}$$

En notant

$$F_n = \overline{f\big(B_E(0,n)\big)}, \tag{10.545}$$

nous avons

$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n. \tag{10.546}$$

(2) **Théorème de Baire** Le théorème 7.420 nous indique que F est un espace de Baire. La définition 7.418 nous dit alors qu'il existe un n tel que F_n soit d'intérieur non vide. Mettons F_N d'intérieur non vide.

(3) **Boule unité** Puisque F_N est d'intérieur non vide, il existe $y \in F_N$ et $\eta > 0$ tels que $B_F(y,\eta) \subset F_N$. Nous avons aussi

$$B_F(0,\eta) = B_F(y,\eta) - y, \tag{10.547}$$

et comme $y \in F_N$ nous avons $B_F(0,\eta) \subset F_N - F_N$, et vu qu'en plus $-F_N = F_N$, nous avons

$$B_F(0,\eta) \subset 2F_N = \overline{f\big(B_E(0,2N)\big)}. \tag{10.548}$$

Nous avons ensuite

$$B_F(0,1) = \frac{1}{\eta}B_F(0,\eta) \subset \frac{1}{\eta}\overline{f\big(B_E(0,2N)\big)} = \overline{f\big(B_E(0,2N/\eta)\big)}. \tag{10.549}$$

Ceci pour dire qu'il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$B_F(0,1) \subset \overline{f\big(B_E(0,M)\big)}. \tag{10.550}$$

Nous avons de même que

$$B_F\big(0,\frac{1}{2^n}\big) \subset \overline{f\big(B_E(0,M/2^n)\big)}. \tag{10.551}$$

EQooCMSPooYtzAuC

Nous voudrions maintenant avoir la même inclusion sans la fermeture.

[87] Espace de Banach : vectoriel, normé, complet. Définition 7.316.

(4) **Une suite par récurrence** Soit $z \in B_F(0,1)$. Nous allons définir par récurrence une suite (x_n) dans E telle que SUBEQSooLJEMooOaFncH

$$\begin{cases} x_n \in B_E\big(0, \frac{M}{2^{n-1}}\big) & \text{(10.552a)} \\ \|z - f(x_1 + \ldots + x_n)\| < \frac{1}{2^n}. & \text{(10.552b)} \end{cases}$$

(4a) **Le premier élément** Puisque $z \in B_F(0,1) \subset \overline{f\big(B_E(0,M)\big)}$, nous avons

$$B(z, \frac{1}{2}) \cap f\big(B_E(0,M)\big) \neq \varnothing. \tag{10.553}$$

Nous pouvons donc considérer $x_1 \in B_E(0,M)$ tel que $f(x_1) \in B(z, \frac{1}{2})$.
Ce x_1 vérifie les conditions (10.552).

(4b) **La récurrence** En utilisant l'hypothèse de récurrence et (10.551),

$$z - f(x_1 + \ldots + x_n) \in B_F\big(0, \frac{1}{2^n}\big) \subset \overline{f\big(B_E(0, M/2^n)\big)}, \tag{10.554}$$

de telle sorte que

$$B_F\big(z - f(x_1, \ldots, x_n), \frac{1}{2^{n+1}}\big) \cap f\big(B_E(0, M/2^n)\big) \neq \varnothing. \tag{10.555}$$

Nous pouvons donc considérer $x_{n+1} \in B_E(0, M/2^n)$ tel que

$$f(x_{n+1}) \in B_F\big(z - f(x_1 + \ldots + x_n), \frac{1}{2^{n+1}}\big). \tag{10.556}$$

Donc

$$z - f(x_1 + \ldots + x_n) - f(x_{n+1}) \in B_F\big(0, \frac{1}{2^{n+1}}\big). \tag{10.557}$$

Nous avons donc bien

$$\|z - f(x_1 + \ldots + x_{n+1})\| < \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{10.558}$$

(5) **Convergence** Nous avons, pour tout n, $\|x_n\| < \frac{M}{2^{n-1}}$. Donc la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{2^{n-1}} \tag{10.559}$$

converge. Autrement dit, la série des x_n converge absolument[88]. Puisque E est un espace de Banach, la proposition 10.151 nous dit que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge dans E. Nous posons

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n. \tag{10.560}$$

En utilisant la série géométrique de la proposition 10.172(2), nous trouvons

$$\|x\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2M. \tag{10.561}$$

(6) **Passage à la limite** Nous avons $x \in B_E(0, 2M)$, et

$$\lim_{n\to\infty} \|z - f(x_1 + \ldots + x_n)\| = 0. \tag{10.562}$$

Puisque les applications $\|.\|$, $t \mapsto z - t$ et f sont continues[89], nous pouvons rentrer la limite de partout et écrire

$$\|z - f(x)\| = 0, \tag{10.563}$$

ce qui signifie que $z = f(x)$. Comme z est un élément arbitraire de $B_F(0,1)$ nous avons prouvé que

$$B_F(0,1) \subset f\big(B_E(0,2M)\big). \tag{10.564}$$

Nous avons donc aussi que pour tout $r > 0$, il existe r' tel que

$$B_F\big(0,r\big) \subset f\big(B_E(0,r')\big). \tag{10.565}$$

En l'occurrence, $r' = r/2M$.

[88] Définition 10.118.
[89] Oui, la continuité de f est une hypothèse en plus de sa linéarité parce que nous n'avons pas d'hypothèses sur la dimension de E et F.

(7) **Passage aux voisinages** Nous montrons que l'image de tout voisinage de $x \in E$ contient un voisinage de $f(x)$ dans F. Soit $x \in E$ ainsi qu'un voisinage V de x. Il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$. Vu que f est linéaire,

$$f\big(B(x,r)\big) = f(x) + f\big(B(0,r)\big), \tag{10.566}$$

et il existe un r' tel que $B_F(0,r') \subset f\big(B_E(0,r)\big)$. Cela pour dire que

$$f(x) + B_F(0,r') \subset f\big(B(x,r)\big) \subset f(V). \tag{10.567}$$

Vu que $f(x) + B_F(0,r')$ est un ouvert autour de $f(x)$, nous avons prouvé que $f(V)$ contient un ouvert autour de $f(x)$, c'est-à-dire que $f(V)$ est un voisinage de $f(x)$.

(8) **Conclusion** Le lemme 10.194 conclut que f est ouverte.

□

10.14 Produit tensoriel d'espaces vectoriels

Si vous êtes pressés, vous pouvez aller lire la définition 10.206 de produit tensoriel d'espaces vectoriels. Mais si vous étiez vraiment pressés, vous ne seriez pas en train de lire des choses sur le produit tensoriel (il vous suffit de croire que $x \otimes y$ n'est finalement que la concaténation de x et y).

PROPooYONEooWvwPZT

Proposition-Définition 10.198.
*Soient un espace vectoriel V et un sous-espace N. Le **quotient** de V par N, noté V/N est l'ensemble des classes d'équivalence*[90] *pour la relation $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in N$.*

Les définitions

(1) $[v] + [w] = [v + w]$

(2) $\lambda[v] = [\lambda v]$

ont un sens et définissent une structure d'espace vectoriel sur V/N.

En ce qui concerne la topologie, ce sera la définition 7.67.

Démonstration. Un élément général de la classe $[v]$ est de la forme $v + n$ avec $n \in N$. Le calcul suivant montre que la somme fonctionne :

$$[v + n_1] + [w + n_2] = [v + w + n_1 + n_2] = [v + w] \tag{10.568}$$

parce que $n_1 + n_2 \in N$. De même,

$$\lambda[v + n] = [\lambda v + \lambda n] = [\lambda v] \tag{10.569}$$

toujours parce que $\lambda n \in N$.

Notons que nous avons utilisé de façon on ne peut plus cruciale le fait que N soit un sous-espace vectoriel. □

Proposition 10.199.
Si $\{e_i\}$ est une base de V et si N est un sous-espace de V, alors $\{[e_i]\}$ est une partie génératrice de V/N.

Démonstration. Si $x = \sum_k x_k e_k$, alors $[x] = \sum_k x_k [e_k]$, donc oui. □

10.15 Produit tensoriel

Nous allons faire les choses suivantes :

- Définir ce qu'est *un* produit tensoriel de V et W, définition 10.201.
- Prouver que tous les produits tensoriels sont isomorphes, définition 10.202 et proposition 10.203.
- Construire un produit tensoriel relativement abstrait à base d'espace librement engendré par $V \times W$, définition 10.206 et proposition 10.208.
- Construire un produit tensoriel assez concret en tant qu'espace de formes bilinéaires sur $V \times W$, proposition 10.228.

[90] Définition 1.51.

10.200.
Dans le Frido, la notation $V \otimes W$ pourra désigner (au moins) trois choses différentes.

- Un produit tensoriel quelconque, c'est-à-dire un espace quelconque vérifiant les conditions de la définition 10.201.
- L'espace $F_{\mathbb{K}}(V \times W)/N$ défini en 10.206.
- L'espace $\mathcal{L}_2(V \times W, \mathbb{K})$ des formes bilinéaires.

Dans tous les cas l'espace T qui veut prétendre être le produit tensoriel $V \otimes W$ doit venir avec une application h. Lorsque (T, h) est un produit tensoriel de V et W, nous notons $v \otimes w$ l'élément $h(v, z) \in T$.

10.15.1 Définition générale

DEFooXKKQooAvWRNp

Définition 10.201 ([397]).
*Soient deux espaces vectoriels V et W. Un **produit tensoriel** de V et W est un couple (T, h) où T est un espace vectoriel et $h : V \times W \to T$ est une application*

(1) bilinéaire[91]

ITEMooJCNYooGvjjtL

(2) telle que pour tout espace vectoriel Z et toute application bilinéaire $f : V \times W \to Z$, il existe une unique application linéaire $\tilde{f} : T \to Z$ telle que $f = \tilde{f} \circ h$.

*La propriété (2) est appelée **propriété universelle** du produit tensoriel.*
L'élément $h(v, w)$ est souvent noté $v \otimes w$.

DEFooPLHTooRiHjlE

Définition 10.202.
*Un **morphisme** entre (T, h) et (T', h') est une application linéaire $\psi : T \to T'$ telle que $h' = \psi \circ h$.*
*Nous parlons d'**isomorphisme** si ψ a un inverse qui est également un morphisme.*

PROPooROPHooQXqNzZ

Proposition 10.203 ([397]).
Si V et W sont des espaces vectoriels, tous les produits tensoriels entre V et W sont isomorphes entre eux au sens de la définition 10.202.
Plus précisément, si (T, h) et (T', h') sont deux produits tensoriels de V et W, alors

(1) il existe une unique application linéaire $g : T \to T'$ telle que $h' = g \circ h$,

(2) cette application g est inversible.

En particulier, l'application g est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. Soient deux produits tensoriels (T, h) et (T', h').

(1) **Existence**

L'application $h' : V \oplus W \to T'$ est bilinéaire, et (T, h) est un produit tensoriel. Donc il existe $g : T \to T'$ tel que $h' = g \circ h$. De même, il existe une application $g' : T' \to T$ telle que $h = g' \circ h$.

(2) **Unicité**

En ce qui concerne l'unicité, vu que $h : V \oplus W \to T$ est surjective, la relation $h' = g \circ h$ prescrit les valeurs de g sur tous les éléments de T.

(3) **Inversible**

Ces deux applications g et g' vérifient $h' = gg'h$ et $h = g'gh$, et de plus $h : V \oplus W \to T$ est surjective. Soient $t \in T$ et $x \in V \oplus W$ tel que $t = h(x)$. Nous avons $h(x) = g'gh(x)$. C'est-à-dire $t = (g' \circ g)(t)$. De même dans l'autre sens, il existe $x' \in V \oplus W$ tel que $t = h'(x')$. En appliquant l'égalité $h' = gg'h'$ à x', nous trouvons $t = (g \circ g')(t)$.

Tout cela pour dire que $g' = g^{-1}$. Cette application g est donc un isomorphisme de produits tensoriels entre (T, h) et (T', h').

Au final, l'application $g : T \to T'$ étant linéaire et inversible, elle est un isomorphisme d'espaces vectoriels. □

[91] Définition 8.120.

Proposition 10.204 ([398]).
Soient deux espaces vectoriels V et W sur le corps $\mathbb{K}$ ainsi que $u, a \in V$ et $v, b \in W$ tous non nuls. Si

$$u \otimes v = a \otimes b, \tag{10.570}$$

alors il existe λ et μ tels que $a = \lambda u$ et $b = \mu v$.

Démonstration. Pour toute applications linéaires $f\colon V \to \mathbb{K}$ et $g\colon W \to \mathbb{K}$ nous posons

$$\begin{aligned} f * g\colon V \times W &\to \mathbb{K} \\ (v, w) &\mapsto f(v)g(w). \end{aligned} \tag{10.571}$$

Cette application $f * g$ étant bilinéaire, il existe une application $s_{fg}\colon V \otimes W \to \mathbb{K}$ telle que $s_{fg} \circ h = f * g$.

Nous considérons maintenant des bases $\{e_i\}$ de V et $\{e'_j\}$ de W, et nous considérons l'application linéaire $f_i\colon V \to \mathbb{K}$ donnant la i^{e} composante dans la base $\{e_i\}$; autrement dit

$$f_i(e_k) = \delta ik. \tag{10.572}$$

De même nous considérons l'application $g_j\colon W \to \mathbb{K}$. Comme dit plus haut, l'application $f_i * g_j\colon V \times W \to \mathbb{K}$ se relève en une application $s_{ij}\colon V \otimes W \to \mathbb{K}$ vérifiant

$$s_{ij}(u \otimes v) = (f_i * g_j)(u, v) = f_i(u)g_j(v). \tag{10.573}$$

Par hypothèse, $s_{ij}(u \otimes v) = s_{ij}(a \otimes b)$, donc

$$f_i(u)g_j(v) = f_i(a)g_j(b). \tag{10.574}$$ EQooBEXAooDMSFnG

Étant donné que $u \neq 0$, il existe i_0 tel que $f_{i_0}(u) \neq 0$. De même nous considérons j_0 tel que $g_{j_0}(v) \neq 0$. Dans l'égalité

$$f_{i_0}(u)g_{j_0}(v) = f_{i_0}(a)g_{j_0}(b), \tag{10.575}$$

le membre de gauche est non nul. Donc les deux facteurs du membre de droite sont non nuls. Donc en posant

$$\mu = \frac{f_{i_0}(a)}{f_{i_0}(u)}, \tag{10.576}$$

nous définissons bien un élément non nul $\mu \in \mathbb{K}$.

En repartant de (10.574) avec $i = i_0$ nous trouvons

$$g_i(v) = \mu g_j(b) \tag{10.577}$$

pour tout i. Donc $v = \mu b$, ce qu'il fallait démontrer. Un raisonnement similaire montre que $u = \lambda a$ pour un certain λ non nul dans $\mathbb{K}$. □ PROPooMMOPooEkqkpk

Proposition 10.205.
Tous les espaces vectoriels sont sur le corps $\mathbb{K}$. Si $h\colon V \times W \to T$ est un produit tensoriel et si $f\colon T \to Z$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors

$$f \circ h\colon V \times W \to Z \tag{10.578}$$

est un produit tensoriel.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **$f \circ h$ est bilinéaire** Soient $v_1, v_2 \in V$ et $w \in W$ ainsi que $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous avons

$$\begin{aligned} (f \circ h)(\lambda v_1 + v_2, w) &= f(\lambda v_1 \otimes w + v_2 \otimes w) && h \text{ est bilin.} && (10.579a) \\ &= \lambda f(v_1 \otimes w) + f(v_2 \otimes w) && f \text{ est lin.} && (10.579b) \\ &= \lambda(f \circ h)(v_1, w) + (f \circ h)(v_2, w), && && (10.579c) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f \circ h$ est linéaire en sa première variable. La vérification de la linéarité en la seconde variable est le même type de vérification.

(2) **Propriété universelle** Soient un espace vectoriel Y et une application bilinéaire $b\colon V \times W \to Y$. Nous devons trouver une application linéaire $b'\colon Z \to Y$ telle que $b' \circ (f \circ h) = b$.

Vu que (T, h) est un produit tensoriel, il existe une application bilinéaire $\tilde{b}\colon T \to Y$ telle que $\tilde{b} \circ h = b$. Vu que f est linéaire et inversible, l'application $b' = \tilde{b} \circ f^{-1}$ est linéaire et fait l'affaire :

$$b' \circ f \circ h = \tilde{b} \circ f^{-1} \circ f \circ h = \tilde{b} \circ h = b. \tag{10.580}$$

□

10.15.2 Constructions du produit tensoriel

Tout cela est fort bien : nous avons unicité à isomorphisme près du produit tensoriel d'espaces vectoriels. Mais nous n'avons pas encore de certitudes à propos de l'existence d'un couple (T, h) vérifiant les propriétés demandées pour être un produit tensoriel.

Nous allons maintenant construire un produit tensoriel.

10.15.3 Construction abstraite

C'est le moment pour vous de relire la définition 4.29 d'espace vectoriel librement engendré, et surtout le lemme 4.30 qui en donne une base.

DEFooKTVDooSPzAhH

Définition 10.206 ([397]).
Soient deux espaces vectoriels V et W sur le corps commutatif[92] $\mathbb{K}$. *Dans $F_{\mathbb{K}}(V \times W)$*[93] *nous considérons les sous-espaces suivants :*

$$A_1 = \{\delta_{(v_1,w)} + \delta_{(v_2,w)} - \delta_{(v_1+v_2,w)} \text{ tel que } v_1, v_2 \in V, w \in W\} \tag{10.581a}$$
$$A_2 = \{\delta_{(v,w_1)} + \delta_{(v,w_2)} - \delta_{(v,w_1+w_2)} \text{ tel que } v \in V, w_1, w_2 \in W\} \tag{10.581b}$$
$$A_3 = \{\lambda\delta_{v,w} - \delta_{(\lambda v,w)} \text{ tel que } v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{K}\} \tag{10.581c}$$
$$A_4 = \{\lambda\delta_{v,w} - \delta_{(v,\lambda w)} \text{ tel que } v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{K}\}. \tag{10.581d}$$

SUBEQooSHBJooJLPVhK

Nous considérons alors $N = \text{Span}(A_1, A_2, A_3, A_4)$ et le quotient

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W = F_{\mathbb{K}}(V \times W)/N. \tag{10.582}$$

Ce dernier espace vectoriel est le ***produit tensoriel*** *de V par W.*

REMooSLEGooWEiutz

Remarque 10.207.
Quelques remarques.

(1) Les éléments de $V \otimes W$ ne s'écrivent pas tous sous la forme $v \otimes w$. Certains ont vraiment besoin d'être écrits avec des sommes. En cela, la situation de $V \otimes W$ est réellement différente de celle de $V \times W$. Dans ce dernier, tous les éléments sont des couples.

(2) La classe de l'élément $\delta_{(v,w)} \in F(V \times W)$ sera d'habitude noté $v \otimes w$.

(3) Pour insister sur la notion de classe, nous allons aussi noter $[x]$ la classe de $x \in F(V \times W)$.

ITEMooPVWHooMkgQoT

(4) L'arithmétique dans $V \otimes W$ est relativement simple. En ajoutant et soustrayant le même élément de A_3 nous avons par exemple

$$(\lambda v) \otimes w = (\lambda v) \otimes w + \lambda(v \otimes w) - (\lambda v) \otimes w. \tag{10.583}$$

Nous obtenons de cette façon

$$\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w), \tag{10.584}$$

que nous noterons $\lambda v \otimes w$ sans plus de précision.

PROPooIWZDooRRZNCf

Proposition 10.208 ([397]).
L'espace vectoriel $V \times W$ muni de

$$\begin{aligned} h\colon V \oplus W &\to V \otimes W \\ (v, w) &\mapsto v \otimes w \end{aligned} \tag{10.585}$$

est un produit tensoriel entre V et W.

Démonstration. Nous devons prouver les conditions de la définition 10.201.

(1) h **est bilinéaire**

Ce sont des calculs tels que faits dans la remarque 10.207(4) qui font le travail.

[92] À part mention du contraire, tous les corps du Frido sont commutatifs.
[93] Espace vectoriel librement engendré, voir la définition 4.30 et le lemme 4.30.

(2) *h est surjective*

Un élément de $V \otimes W$ est la classe d'un élément de $F(V \times W)$, c'est-à-dire de la forme

$$\big[\sum_{i\alpha} \delta_{(v_i,w_\alpha)}\big] = \sum_{i\alpha} v_i \otimes w_\alpha. \tag{10.586}$$

Cet élément est dans l'image de h comme le montre le calcul suivant[94] :

$$h\big(\sum_{i\alpha}(v_i, w_\alpha)\big) = \sum_{i\alpha} h(v_i, w_\alpha) = \sum_{i\alpha} v_i \otimes w_\alpha. \tag{10.587}$$

(3) **Propriété universelle**

Soient un espace vectoriel U et une application linéaire $f\colon V \oplus W \to U$. Nous devons trouver une application linéaire $g\colon V \otimes W \to U$ telle que $f = g \circ h$. Pour cela nous commençons par considérer l'application

$$\begin{aligned} g\colon F(V \times W) &\to U \\ \delta_{(v,w)} &\mapsto f(v, w) \end{aligned} \tag{10.588}$$

définie sur tout $F(V \times W)$ par linéarité sans encombres parce que les $\delta_{v,w}$ forment une base par le lemme 4.30.

Nous démontrons que $g(N) = 0$ pour avoir le droit de passer g aux classes et le considérer comme application partant de $V \otimes W$ au lieu de $F(V \times W)$. Prenons par exemple

$$\begin{aligned} g\big(\delta_{(v_1,w)} + \delta_{(v_2,w)} - \delta_{(v_1+v_2,w)}\big) &= g(\delta_{(v_1,w)}) + g(\delta_{(v_2,w)}) - g(\delta_{v_1+v_2,w}) && \text{(10.589a)} \\ &= f(v_1, w) + f(v_2, w) - f(v_1 + v_2, w) && \text{(10.589b)} \\ &= 0 && \text{(10.589c)} \end{aligned}$$

par la bilinéarité de f. Cela montre que $g(A_1) = 0$. Nous montrons de même que $g(A_2) = g(A_3) = g(A_4) = 0$, et enfin toujours par linéarité que $g(N) = 0$. Pour rappel, les éléments de N sont les combinaisons linéaires finies d'éléments de A_1, A_2, A_3 et A_4.

Par passage aux classes, nous avons une application (que nous notons également g)

$$g\colon F(V \times W)/N \to U \tag{10.590}$$

vérifiant $g(v \otimes w) = f(v, w)$. Mais comme $h(v, w) = v \otimes w$, nous avons $g \circ h\colon V \oplus W \to U$ vérifiant $g \circ h = f$.

L'espace vectoriel $V \otimes W$ est donc un produit tensoriel. □

10.209.
Vu que $V \otimes W$ est un produit tensoriel de V et W, et vu qu'il y a unicité par la proposition 10.203, nous avons bien le droit de dire que $V \otimes W$ est *le* produit tensoriel. Cela justifie le titre.

10.210.
Les prochains lemmes et propositions vont nous dire que l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon V^* \otimes W &\to \mathcal{L}(V, W) \\ \alpha \otimes w &\mapsto \big(v \mapsto \alpha(v)w\big) \end{aligned} \tag{10.591}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels lorsque V est de dimension finie. Vu que nous aimons les énoncés très explicites, ça va être découpé en plusieurs morceaux, l'énoncé va devenir un peu long ; mais c'est pour la bonne cause.

LEMooOJEBooQruWEp

Lemme 10.211.
Soient deux espaces vectoriels V et W dont W est de dimension finie. Alors l'application définie par

$$\begin{aligned} \varphi\colon F(V^* \times W) &\to \mathcal{L}(V, W) \\ \delta_{(\alpha,w)} &\mapsto \big(v \mapsto \alpha(v)w\big) \end{aligned} \tag{10.592}$$

sur la base « canonique » de $F(V^* \times W)$ passe aux classes.

[94] Faites bien la distinction entre $\delta_{v,w}$, (v, w) et $v \otimes w$. Sachez dans quel ensemble se trouvent chacun de ces trois objets.

Démonstration. Avec les notations de la définition 10.206 nous devons prouver que $\varphi(N)=0$. Nous montrons que $\varphi(A_4)=0$, et nous vous laissons faire les autres. Pour $\lambda\in\mathbb{K}$, $\alpha\in V^*$ et $w\in W$ en utilisant la linéarité de φ nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi\big(\lambda\delta_{(\alpha,w)}-\delta_{(\alpha,\lambda w)}\big)v&=\lambda\varphi(\delta_{(\alpha,w)})(v)-\varphi(\delta_{(\alpha,\lambda w)})(v)&(10.593a)\\&=\lambda\alpha(v)w-\alpha(v)(\lambda w)&(10.593b)\\&=0&(10.593c)\end{aligned}$$

parce que $\alpha(v)(\lambda w)=\lambda\alpha(v)w$ du fait que $\mathbb{K}$ est commutatif. La commutativité de $\mathbb{K}$ est ce qui permet de permuter le produit $\lambda\alpha(v)$.

Nous laissons à la lectrice le soin de prouver que $\varphi(A_1)=\varphi(A_2)=\varphi(A_3)=0$. □

LEMooUQZHooWjIGsy

Lemme 10.212.
Si W est de dimension finie, alors $\mathcal{L}(V,W)$ muni de

$$\begin{aligned}h\colon V^*\oplus W&\to\mathcal{L}(V,W)\\(\alpha,w)&\mapsto\big(v\mapsto\alpha(v)w\big)\end{aligned}\tag{10.594}$$

est un produit tensoriel[95] *de V^* par W.*

Démonstration. Nous devons prouver que

- h est bilinéaire,
- h est surjective
- pour tout espace vectoriel U, et pour toute application bilinéaire $f\colon V^*\oplus W\to U$, il existe une application linéaire $g\colon\mathcal{L}(V,W)\to U$ tel que $f=g\circ h$.

(1) **Bilinéaire** Le fait que h soit bilinéaire est une simple vérification.

(2) **Surjective** L'espace W étant de dimension finie, nous pouvons en considérer une base $\{z_i\}_{i\in I}$. Soit $\alpha\in\mathcal{L}(V,W)$. Si $v\in V$, l'élément $\alpha(v)$ peut être décomposé dans la base $\{z_i\}$, ce qui définit des applications linéaires $\alpha_i\colon V\to\mathbb{K}$ par

$$\alpha(v)=\sum_{i\in I}\alpha_i(v)z_i.\tag{10.595}$$

Notons que $\alpha_i\in V^*$. En comparant avec la définition de h, nous voyons que

$$\alpha(v)=\sum_i h(\alpha_i,z_i)(v),\tag{10.596}$$

c'est-à-dire $\alpha=\sum_i h(\alpha_i,w_i)=h\big(\sum_i(\alpha_i,z_i)\big)$. Nous avons donc bien $\alpha\in h(V^*\oplus W)$.

(3) **Propriété universelle**
Soient un espace vectoriel U et une application bilinéaire $f\colon V^*\oplus W\to U$. Pour $\alpha\in\mathcal{L}(V,W)$ nous définissons $g(\alpha)$ comme suit. D'abord nous écrivons α sous la forme

$$\alpha(v)=\sum_i\alpha_i(v)z_i,\tag{10.597}$$

et nous posons

$$g(\alpha)=\sum_i f(\alpha_i,z_i).\tag{10.598}$$

Avec cette définition, en posant $w=\sum_i w_iz_i$, nous avons

$$\begin{aligned}(g\circ h)(\alpha,w)&=g\big(v\mapsto\alpha(v)w\big)&(10.599a)\\&=g\big(v\mapsto\sum_i\alpha(v)w_iz_i\big)&(10.599b)\\&=\sum_i f(w_i\alpha,z_i)&(10.599c)\\&=\sum_i f(\alpha,w_iz_i)&(10.599d)\\&=f(\alpha,\sum_i w_iz_i)&(10.599e)\\&=f(\alpha,w).&(10.599f)\end{aligned}$$

[95] Définition 10.201.

Cela prouve que $g \circ h = f$.

□

PROPooKJTCooVTXWAQ

Proposition 10.213 ([399]).
Soient deux espaces vectoriels V et W dont V est de dimension finie. Alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon V^* \otimes W &\to \mathcal{L}(V,W) \\ \alpha \otimes w &\mapsto \big(v \mapsto \alpha(v)w\big) \end{aligned} \tag{10.600}$$

est bien définie[96] *et est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Démonstration. Le lemme 10.212 donne une structure de produit tensoriel de V^* par W sur $\mathcal{L}(V,W)$. Rappelons les structures :

$$\begin{aligned} h\colon V^* \oplus W &\to V^* \otimes W \\ (\alpha, w) &\mapsto \alpha \otimes w \end{aligned} \tag{10.601}$$

et

$$\begin{aligned} h'\colon V^* \oplus W &\to \mathcal{L}(V,W) \\ (\alpha, w) &\mapsto \big[v \mapsto \alpha(v)w\big]. \end{aligned} \tag{10.602}$$

La proposition 10.203 a déjà fait tout le boulot. La seule chose à faire est de vérifier qu'il existe une application $\varphi\colon V^* \otimes W \to \mathcal{L}(V,W)$ vérifiant simultanément les deux conditions suivantes :

ITEMooVNNSooNIXRoG

(1) $\varphi(\alpha \otimes w) = \big[v \mapsto \alpha(v)w\big]$

(2) $h' = \varphi \circ h$.

La seconde condition assure que φ sera un isomorphisme d'espaces vectoriels.

L'existence de φ vérifiant la condition (1) est un effet du lemme 10.211 qui donne une fonction sur $F(V^* \times W)$ dont le φ qui nous concerne est un quotient. Il reste à voir que cette application vérifie $h' = \varphi \circ h$.

En nous rappelant que $\alpha \otimes w = [\delta_{(\alpha,w)}]$ et en écrivant φ à la fois l'application et son passage au quotient,

$$(\varphi \circ h)(\alpha, w) = \varphi(\alpha \otimes w) = \varphi\big([\delta_{(\alpha,w)}]\big) = \varphi(\delta_{(\alpha,w)}). \tag{10.603}$$

En appliquant à $v \in V$ nous avons :

$$(\varphi \circ h)(\alpha, w)v = \varphi(\delta_{(\alpha,w)})v = \alpha(v)w = h'(\alpha, w)v. \tag{10.604}$$

Et voilà. Nous avons $\varphi \circ h = h'$. □

Une conséquence de la proposition 10.213 est que

$$\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W) \tag{10.605}$$

via le lemme 4.44(2).

10.15.4 Bases

LEMooXFIMooDkTSrq

Lemme 10.214 ([1]).
Si $\tau\colon V_1 \to V_2$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi\colon V_1 \otimes W \to V_2 \otimes W$ tel que $\varphi(v \otimes w) = \tau(v) \otimes w$[97].

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} \varphi_0\colon F(V_1 \times W) &\to F(V_2 \times W) \\ \delta_{(v,w)} &\mapsto \delta_{\big(\tau(v),w\big)} \end{aligned} \tag{10.606}$$

est un isomorphisme.

Cette application passe aux classes, mais pas au sens où $x \in [y]$ impliquerait $\varphi_0(x) = \varphi_0(y)$; au sens où si $x \in [y]$, alors $\varphi_0(x) \in [\varphi_0(y)]$. Par exemple

$$\varphi_0\big(\lambda\delta_{(v,w)} - \delta_{(v,\lambda w)}\big) = \lambda\delta_{\big(\tau(v),w\big)} - \delta_{\big(\tau(v),\lambda w\big)} \in [0]. \tag{10.607}$$

[96] Au sens où il existe une fonction φ définie sur tout $V^* \otimes W$ qui se réduit à cela pour les éléments de la forme $\alpha \otimes w$.

[97] La proposition 10.215 dira que cette condition fixe complètement φ, mais c'est une autre histoire qui vous sera contée une autre fois.

Nous vous laissons le soin de vérifier les égalités correspondantes pour les autres parties de N.

Le passage au classes de φ_0 signifie que l'on considère l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon V_1\otimes W&\to V_2\otimes W\\ [x]&\mapsto[\varphi_0(x)]\end{aligned}\tag{10.608}$$

où vous aurez noté que la prise de classe à gauche n'est pas la même que celle à droite.

Il faut prouver que ce φ est un isomorphisme. En ce qui concerne la linéarité,

$$\begin{aligned}\varphi\big([x]+[y]\big)&=\varphi\big([x+y]\big)&(10.609a)\\ &=[\varphi_0(x+y)]&(10.609b)\\ &=[\varphi_0(x)+\varphi_0(y)]&(10.609c)\\ &=[\varphi_0(x)]+[\varphi_0(y)]&(10.609d)\\ &=\varphi([x])+\varphi([y]).&(10.609e)\end{aligned}$$

Je vous laisse le reste de la linéarité. Et en ce qui concerne le fait que ce soit une bijection, allez-y. □

PROPooTHDPooWgjUwk

Proposition 10.215 ([399]).
Soient des espaces vectoriels de dimension finie V et W. Soient une base $\{e_i\}$ de V et une base $\{f_\alpha\}$ de W.

Alors :

ITEMooQCILooUncdGl

(1) La partie $\{e_i\otimes f_\alpha\}$ est une base de $V\otimes W$.

ITEMooGCRHooJjAYPr

(2) Au niveau des dimensions, $\dim(V\otimes W)=\dim(V)\dim(W)$.

Démonstration. Vu que V est de dimension finie, nous avons un isomorphisme d'espaces vectoriels $V^*=V$, et même un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned}\tau\colon V&\to(V^*)^*\\ \tau(v)\mu&=\mu(v).\end{aligned}\tag{10.610}$$

Recopions l'isomorphisme de la proposition 10.213 en utilisant V^* au lieu de V :

$$\begin{aligned}\psi_0\colon(V^*)^*\otimes W&\to\mathcal{L}(V^*,W)\\ \tau(v)\otimes w&\mapsto\big(\mu\mapsto\tau(v)(\mu)w=\mu(v)w\big).\end{aligned}\tag{10.611}$$

En écrivant cela, nous avons tenu compte du fait que tout élément de $(V^*)^*$ peut être écrit de façon univoque sous la forme $\tau(v)$ pour un certain $v\in V$.

Vu que τ est un isomorphisme, l'application suivante est encore un isomorphisme[98] :

$$\begin{aligned}\psi\colon V\otimes W&\to\mathcal{L}(V^*,W)\\ v\otimes w&\mapsto\big(\mu\mapsto\mu(v)w\big).\end{aligned}\tag{10.612}$$

EQooAEFRooPfmAnj

Nous avançons. Vu que nous avons un isomorphisme, nous pouvons faire passer des bases. Le lemme 4.44 nous donne une base de $\mathcal{L}(V^*,W)$ en les éléments $\beta_{i\alpha}\colon V^*\to W$ définies par

$$\beta_{ij}(\mu)=\mu(e_i)f_\alpha.\tag{10.613}$$

Donc $\{\psi^{-1}(\beta_{i\alpha})\}$ est une base de $V\otimes W$.

Pour $a=\sum_i a_ie_i^*$ (base duale, définition 4.136) nous avons :

$$\psi(e_i\otimes f_\alpha)a=a(e_i)f_\alpha=\beta_{i\alpha}(a).\tag{10.614}$$

Cela prouve que $\psi^{-1}(\beta_{i\alpha})=e_i\otimes f_\alpha$, et donc que ces $e_i\otimes f_\alpha$ est une base de $V\otimes W$.

La formule concernant les dimensions est simplement la définition 4.16 de la dimension : le nombre d'éléments dans une base. □

LEMooYJIQooRCkHMq

Lemme 10.216.
Dans le produit tensoriel $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$, nous avons

(1) $x\otimes 1=1\otimes x=x(1\otimes 1)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

(2) Si $x\geqslant 0$ nous avons aussi $x\otimes 1=\sqrt{x}\otimes\sqrt{x}$.

[98] Lemme 10.214.

LEMooKPWNooNjkAru

Lemme 10.217.
Le produit tensoriel est associatif.

Plus précisément, si U, V, W sont des espaces vectoriels, nous avons des isomorphismes d'espaces vectoriels

$$U \otimes (V \otimes W) = (U \otimes V) \otimes W. \tag{10.615}$$

Dans la suite, nous écrirons $U \otimes V \otimes W$ sans plus de précisions et même $\otimes^k V$ pour le produit de k copies de V.

Définition 10.218.
*Un k-**tenseur** sur V est un élément de $\otimes^k V^*$.*

PROPooIODGooYajpiy

Proposition 10.219.
Il y a un isomorphisme d'espaces vectoriels $\otimes^k V^* \to \mathcal{L}_k(V, \mathbb{R})$.

Exemple 10.220.
Pour $k = 2$, l'isomorphisme de la proposition 10.219 est

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathcal{L}(V, V^*) &\to \mathcal{L}_2(V, \mathbb{R}) \\ \psi(\alpha)(u, v) &= \alpha(u)v. \end{aligned} \tag{10.616}$$

Il faut se rappeler que le proposition 10.213 donne déjà un isomorphisme entre $V^* \otimes V^*$ et $\mathcal{L}(V, V^*)$. △

10.15.5 Construction par les formes multilinéaires

LEMooCXPRooGfJMMV

Lemme 10.221.
Soient des espaces vectoriels de dimension finie V, W et Z. Soient une application bilinéaire $f \colon V \times W \to Z$ ainsi que des bases $\{e_i\}$ de V et $\{d_j\}$ de W.

Il existe des éléments f_{ij} dans Z tels que

$$f(v, w) = \sum_{ij} v_i w_j f_{ij} \tag{10.617}$$

pour tout $v \in V$ et $w \in W$.

10.222.
Ce que nous allons noter $h(T, S)$ est souvent noté $T \otimes S$, parce que la proposition 10.228 montrera qu'il s'agit bien d'un produit tensoriel. Cependant nous avons besoin de pas mal de propriétés de h avant de pouvoir l'affirmer.

DEFooUUMYooOUCzWk

Proposition-Définition 10.223.
Si $T \in \mathcal{L}_k(V, \mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{L}_l(V, \mathbb{R})$, nous définissons

$$\begin{aligned} h(T, S) \colon V^{k+l} &\to \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{k+l}) &\mapsto T(v_1, \dots, v_k)S(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}). \end{aligned} \tag{10.618}$$

(1) L'application $h(T, S)$ est multilinéaire[99] *: $h(T, S) \in \mathcal{L}_{k+l}(V, \mathbb{R})$.*

(2) L'application h est associative : $h\big(h(T, S), R\big) = h\big(T, h(S, R)\big)$.

(3) L'application $h \colon \mathcal{L}_k(V, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}_l(V, \mathbb{R}) \to \mathcal{L}_{k+l}(V, \mathbb{R})$ est bilinéaire.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **multilinéaire** Nous fixons des $v_i \in V$, nous considérons $h(T, S)_i$ et nous calculons (en supposant $i \leqslant k$, sinon on adapte)

$$\begin{aligned} h(T, S)_i(v)a &= h(T, S)(v_1, \dots, v, \dots, v_{k+l}) && \text{(10.619a)} \\ &= T(v_1, \dots, v, \dots, v_k)S(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) && \text{(10.619b)} \\ &= T_i(v)S(\dots). && \text{(10.619c)} \end{aligned}$$

Vu que T_i est linéaire, nous en déduisons que $h(T, S)_i$ est linéaire et donc que $h(T, S)$ est multilinéaire.

[99] Application multilinéaire, définition 8.1.

Associativité Facile de vérifier que

$$h\big(h(T,S),R\big)(v_1,\dots,v_{k+l+m}) = T(v_1,\dots,v_k)S(v_{k+1},\dots,v_{k+l})R(v_{k+l+1},\dots,v_{k+l+m}). \tag{10.620}$$

Bilinéaire En utilisant directement la définition, on vérifie que $h(T,\lambda S) = \lambda h(T,S)$ et $h(T,S_1+S_2) = h(T,S_1)+h(T,S_2)$.

□

10.224 (Quelques notations)**.**
Si V_i sont des espaces vectoriels, si $v_i \in V_i$, et si $\xi_i \in V_i^*$, nous notons

$$h(\xi_1,\dots,\xi_n)(v_1,\dots,v_n) = \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i). \tag{10.621}$$

Si I est un multiindice ($I = (i_1,\dots,i_n)$), et si v est quelque chose qui peut avoir des indices, alors nous écrivons $v_I = (v_{i_1},\dots,v_{i_n})$.

Nous écrivons en particulier $\delta_{IJ} = \prod_{k=1}^{n} \delta_{i_k j_k}$.

LEMooPUNAooUnQTpJ

Lemme 10.225 (égalité sur une base[1])**.**
Soient des espaces vectoriels $(V_i)_{i=1,\dots,N}$ de dimensions n_i. Soient deux formes N-linéaires $S,T\colon V_1\times\dots\times V_N \to \mathbb{R}$. Si pour tout multiindice I nous avons $S(e_I) = T(e_I)$, alors $S = T$.

Si les ξ_i sont des formes linéaires, nous notons ξ_I la forme multilinéaire $h(\xi_1,\dots,\xi_n)$.

Démonstration. Nous considérons les bases $\{e_i^{(k)}\}_{i=1,\dots,n_i}$ de V_k. Un élément générique de $V_1\times\dots\times V_N$ est de la forme

$$\Big(\sum_{j_1}^{n_1} x_{j_1}^{(1)} e_{j_1}^{(1)},\dots,\sum_{j_N=1}^{n_N} x_{j_N}^{(N)} e_{j_N}^{(N)}\Big). \tag{10.622}$$

Nous appliquons S à cela en tenant compte de la multilinéarité :

$$S\Big(\sum_{j_1}^{n_1} x_{j_1}^{(1)} e_{j_1}^{(1)},\dots,\sum_{j_N=1}^{n_N} x_{j_N}^{(N)} e_{j_N}^{(N)}\Big) = \sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_N=1}^{n_N}\prod_{i=1}^{N} x_{j_i}^{(i)} S(e_{j_1}^{(1)},\dots,e_{j_N}^{(N)}) \tag{10.623a}$$

$$= \sum_{J}\prod_{i=1}^{N} x_{j_i}^{(i)} S(e_J). \tag{10.623b}$$

Le même calcul avec T donne la même chose, compte tenu de l'hypothèse $S(e_J) = T(e_J)$. □

THOooTAGKooDscwFG

Théorème 10.226 ([310])**.**
Soient des espaces vectoriels $(V_i)_{i=1,\dots,N}$ de dimensions n_i. Nous notons, pour chaque i une base $\{e_j^{(i)}\}_{j=1,\dots,n_i}$ de V_i. Nous notons $\{\alpha_j^{(i)}\}$ les bases duales.

Alors $\{\alpha_I\}_I$ est une base de $\mathcal{L}_N(V_1\times\dots\times V_N,\mathbb{R})$.

Démonstration. Nous commençons par prouver que $\{\alpha_I\}$ est libre. Supposons que $\sum_I a_I\alpha_I = 0$. En l'appliquant à e_J, nous avons

$$0 = \sum_I a_I\alpha_I(e_J) = \sum_I a_I\delta_{IJ} = a_J. \tag{10.624}$$

Cela prouve que tous les a_I sont nuls, et donc que la partie est libre.

Pour prouver que la partie est génératrice nous considérons $T \in \mathcal{L}_N(V_1\times\dots\times V_N,\mathbb{R})$ et nous posons $T_I = T(e_I)$ pour tout multiindice I. En posant $S = \sum_I T_I\alpha_I$, nous

$$S(e_J) = \sum_I T_I\alpha_I(e_J) = \sum_I T_I\delta_{IJ} = T_J. \tag{10.625}$$

Donc $S(e_J) = T(e_J)$. Le lemme 10.225 conclu. □

LEMooPBLRooJePqlk

Lemme 10.227.
Soient deux espaces vectoriels de dimension finie V et W. Nous notons $\{\alpha_i\}$ une base de V^* et $\{\beta_j\}$ une base de W^*. Pour chaque $\xi\in V^*$ et $\sigma\in W^*$ nous considérons l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} h(\xi,\sigma)\colon V\times W &\to \mathbb{R}\\ (v,w) &\mapsto \xi(v)\sigma(w). \end{aligned} \tag{10.626}$$

La partie $\{h(\alpha_i,\beta_j)\}$ forment une base de l'espace des applications bilinéaires sur $V\times W$.

PROPooIFVBooGiMskq

Proposition 10.228 ([1, 400]).
Nous considérons l'application $h\colon V^* \times W^* \to \mathcal{L}_2(V \times W, \mathbb{R})$ donnée par

$$h(\xi, \sigma)(v, w) = \xi(v)\sigma(w). \tag{10.627}$$

Le couple $\big(\mathcal{L}_2(V \times W, \mathbb{R}), h\big)$ est un produit tensoriel de V^* et W^*.

Démonstration. Nous devons prouver que l'application h satisfait à la propriété universelle 10.201(2). Nous considérons une base $\{\alpha_i\}$ de V^* et $\{\beta_j\}$ de W^*. Si $f\colon V^* \times W^* \to Z$ est bilinéaire, le lemme 10.221 nous dit que f est déterminée par les éléments $f_{ij} = f(\alpha_i, \beta_j)$.

(1) **Existence** Nous posons

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon \mathcal{L}_2(V \times W, \mathbb{R}) &\to Z \\ \sum_{ij} a_{ij} h(\alpha_i, \beta_j) &\mapsto \sum_{ij} a_{ij} f_{ij}. \end{aligned} \tag{10.628}$$

Notez deux choses.

(1a) C'est une bonne définition parce que les $h(\alpha_i, \beta_j)$ forment une base de $\mathcal{L}_2(V \times W, \mathbb{R})$ (lemme 10.227).

(1b) L'application $\tilde{f}$ est linéaire.

Nous devons prouver que $\tilde{f} \circ h = f$. Soient $\xi = \sum_i \xi_i \alpha_i$ et $\sigma = \sum_j \sigma_j \beta_j$. Par bilinéarité nous avons

$$h(\xi, \sigma) = \sum_{ij} \xi_i \sigma_j h(\alpha_i, \beta_j). \tag{10.629}$$

Nous avons donc

$$(\tilde{f} \circ h)(\xi, \sigma) = \sum_{ij} \xi_i \sigma_j f_{ij} = \sum_{ij} \xi_i \sigma_j (\alpha_i, \beta_j) = f(\xi, \sigma), \tag{10.630}$$

et donc bien $\tilde{f} \circ h = f$.

(2) **Unicité** Nous savons que les éléments $h(\alpha_i, \beta_j)$ forment une base de $\mathcal{L}_2(V \times W, \mathbb{R})$. Si $\tilde{f}\colon \mathcal{L}_2(V \times W, \mathbb{R}) \to Z$ est une application linéaire vérifiant $\tilde{f} \circ h = f$, alors nous avons

$$\tilde{f}\big(h(\alpha_i, \beta_j)\big) = (\tilde{f} \circ h)(\alpha_i, \beta_j) = f(\alpha_i, \beta_j) = f_{ij}. \tag{10.631}$$

Donc l'application $\tilde{f}$ est entièrement déterminée sur une base par les éléments $f_{ij} \in Z$.

□

10.229.
Lorsque V et W sont des espaces vectoriels, si rien n'est précisé, le produit tensoriel

$$V \otimes W \tag{10.632}$$

sera celui de la proposition 10.228, et lorsque $\xi_1 \in V^*$ et $\xi_2 \in W^*$ nous notons

$$\xi_1 \otimes \xi_2 \tag{10.633}$$

l'élément $h(\xi_1, \xi_2)$.

Ce serait mieux de garder la notation $V \otimes W$ pour un produit tensoriel abstrait (définition 10.201), mais bon … Nous n'allons pas non plus nous tuer sur les notations.

10.15.6 Décomposabilité

DEFooTSSVooUGybzL

Définition 10.230 ([310]).
*Une application $T \in \mathcal{L}_k(V, \mathbb{R})$ est **décomposable** si il existe des formes $\xi_1, \dots, \xi_k \in V^*$ telles que*

$$T(v_1, \dots, v_k) = \prod_{i=1}^{k} \xi_i(v_i) \tag{10.634}$$

autrement dit $T = h(\xi_1, \dots, \xi_k)$, ou encore $T = \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k$.

LEMooLEIBooROVcim

Lemme 10.231 ([310, 1]).
Une forme 2-multilinéaire $T = \sum_{ij} a_{ij} h(\alpha_i, \alpha_j)$ est décomposable[100] *si et seulement si la matrice a est de rang 1.*

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Soient $f_1, f_2 \in V^*$ tels que $T(v_1, v_2) = f_1(v_1) f_2(v_2)$ pour tout $v_1, v_2 \in V$. Nous appliquons T à $(e_1), e_2$:

$$T(e_k, e_l) = \sum_{ij} a_{ij} (\alpha_i \otimes \alpha_j)(e_k, e_l) = \sum_{ij} a_{ij} \alpha_i(e_i) \alpha_j(e_l) = a_{kl}, \tag{10.635}$$

mais aussi

$$T(e_k, e_l) = f_1(e_k) f_2(e_l). \tag{10.636}$$

Donc $a_{kl} = f_1(e_k) f_2(e_l)$. Notons A la matrice (et l'application linéaire) formée par ces nombres. Nous avons :

$$A(e_i) = \sum_k a_{ki} e_k = \sum_k f_1(e_k) f_2(e_i) e_k = f_2(e_i) \sum_k f_1(e_k) e_k. \tag{10.637}$$

En notons v le vecteur $\sum_k f_1(e_k) e_k$, nous avons

$$A(\mathbb{R}^n) = \text{Span}(v). \tag{10.638}$$

Cela montre que la dimension de l'image de A est 1, et donc que A est de rang 1.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que a est de rang 1, et nous posons

$$\begin{aligned} T\colon V^2 &\to \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \sum_{kl} a_{kl} v_k w_l. \end{aligned} \tag{10.639}$$

Vu que $\text{rk}(a) = 1$, il existe $u \in V$ tel que $a(\mathbb{R}^n) = \text{Span}(u)$. En particulier pour chaque i, il existe λ_i tel que $a(e_i) = \lambda_i u$. Donc

$$a(v) = \sum_i v_i a(e_i) = \sum_i v_i \lambda_i u = (v \cdot \lambda) u, \tag{10.640}$$

et

$$a_{kl} = a(e_k)_l = \lambda_k u_l. \tag{10.641}$$

Avec tout ça,

$$T(v, w) = \sum_{kl} a_{kl} v_k w_l = (\lambda \cdot v)(u \cdot w). \tag{10.642}$$

Donc nous avons $T = f_1 \otimes f_2$ avec

$$\begin{aligned} f_1\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda \cdot x \end{aligned} \tag{10.643}$$

et $f_2(x) = u \cdot x$.

□

10.232.
Il est dit dans [310] que l'étude de la décomposabilité devient très compliquée à partir des 3-tenseurs, et que c'est lié à l'intrication quantique. Personnellement je ne suis pas sûr de ce que ça veut dire, mais si ça vous parle, c'est sans doute intéressant.

10.15.7 Produit tensoriel d'applications linéaires

PROPooKNNJooLSqzlD

Proposition 10.233 ([401, 402]).
Soit une application bilinéaire $f\colon V \times W \to Z$ avec $\dim(Z) = \dim(V)\dim(W) < \infty$. Nous supposons que Z est engendré par l'image de f :

$$Z = \text{Span}\big(\text{Image}(f)\big). \tag{10.644}$$

Alors f est un produit tensoriel de V et W.

[100] Définition 10.230.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Un autre produit tensoriel** Nous considérons un produit tensoriel $h: V \times W \to T$ (existence : proposition 10.208). Étant donné que f est bilinéaire, il existe une application linéaire $\tilde{f}: T \to Z$ telle que $f = \tilde{f} \circ h$.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{h} & T \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow_{\tilde{f}} & \\ Z & & \end{array} \tag{10.645}$$

(2) **$\tilde{f}$ est surjective** Nous prouvons que $\tilde{f}$ est surjective. Soit $z \in Z$. Étant donné que Z est engendré par $f(V \times W)$, il existe $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $v_i \in V$ et $w_j \in W$ tels que $z = \sum_{ij} a_{ij} f(v_i, w_j)$. En utilisant la linéarité de $\tilde{f}$ et le fait que $f = \tilde{f} \circ h$ nous avons :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{ij} a_{ij} f(v_i, w_j) && (10.646a)\\ &= \sum_{ij} a_{ij} (\tilde{f} \circ h)(v_i, w_j) && (10.646b)\\ &= \sum_{ij} a_{ij} \tilde{f}(v_i \otimes w_j) && (10.646c)\\ &= \tilde{f}\Big(\sum_{ij} a_{ij} v_i \otimes w_j\Big). && (10.646d) \end{aligned}$$

Nous voyons donc que z est dans l'image de $\tilde{f}$, et donc que $\tilde{f}$ est surjective.

(3) **Questions de dimensions** L'espace vectoriel T est de dimension $\dim(V)\dim(W)$ (proposition 10.215(2)). Vu que Z est également, par hypothèse, de dimension $\dim(V)\dim(W)$, nous avons une application linéaire surjective entre espaces de même dimensions. Elle est donc une bijection par le corolaire 4.51.

(4) **Conclusion** La proposition 10.205 dit que $\tilde{f} \circ h = f$ est un produit tensoriel.

□

PROPooLFHFooRmTAjY

Proposition 10.234 ([401, 1])**.**
Soient des espaces vectoriels de dimension finie V_1, V_2, W_1 et W_2. L'application

$$\begin{aligned} s: \mathcal{L}(V_1, W_1) \times \mathcal{L}(V_2, W_2) &\to \mathcal{L}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)\\ s(A, B)(e_i \otimes e_j) &= Ae_i \otimes Be_j \end{aligned} \tag{10.647}$$

est un produit tensoriel.

C'est toujours cette structure que nous considérons lorsque nous parlerons du produit tensoriel d'applications linéaires.

Démonstration. Notre objectif est d'utiliser la proposition 10.233, c'est-à-dire de montrer que l'image de s engendre $\mathcal{L}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$. Nous considérons des bases pour tous les espaces vectoriels en présence : $\{e_i\}$ pour V_1, $\{e'_j\}$ pour V_2, $\{\epsilon_k\}$ pour W_1 et $\{\epsilon'_l\}$ pour W_2.

La proposition 10.215(1) dit que $\{e_i \otimes e'_j\}$ est une base de $V_1 \otimes V_2$ et que $\{\epsilon_k \otimes \epsilon'_l\}$ est une base de $W_1 \otimes W_2$, de sorte qu'une base de $\mathcal{L}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ est donnée par les applications[101]

$$\begin{aligned} f_{ij,kl}: V_1 \otimes V_2 &\to W_1 \otimes W_2\\ \sum_{st} a_{st} e_s \otimes e'_t &\mapsto a_{ij} \epsilon_k \otimes \epsilon'_l. \end{aligned} \tag{10.648}$$

Notre objectif est de montrer que ces applications sont dans l'image de s. Pour cela nous considérons les applications $A: V_1 \to W_1$ donnée par $A(e_s) = \delta_{si}\epsilon_k$ et $B: V_2 \to W_2$ donnée par $B(e'_t) = \delta_{tj}\epsilon'_l$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} s(A, B)\Big(\sum_{st} a_{st} e_s \otimes e'_t\Big) &= \sum_{st} a_{st} A(e_s) \otimes B(e'_t) && (10.649a)\\ &= \sum_{st} \delta_{si}\epsilon_k \otimes \delta_{tj}\epsilon'_l && (10.649b)\\ &= a_{ij}\epsilon_k \otimes \epsilon'_l. && (10.649c) \end{aligned}$$

[101] Proposition 4.81(2).

Cela prouve que $s(A,B)=f_{ij,kl}$.

Donc l'image de s engendre $\mathcal{L}(V_1\otimes V_2,W_2\otimes W_2)$ et la proposition 10.233 conclut que s est un produit tensoriel pour $\mathcal{L}(V_1,W_1)$ et $\mathcal{L}(V_2,W_2)$. □

10.15.8 Contraction

DEFooMQDHooBsyVpr

Définition 10.235.
Un (l,k)-tenseur sur V est une application $k+l$-multilinéaire sur $(V^*)^l\times V^k$.

DEFooIOJMooFtSTtK

Proposition-Définition 10.236 ([1]).
Soit un (l,k)-tenseur[102] *T sur V. Soient une base $\{e_i\}$, et sa base duale $\{\alpha_i\}$. Nous considérons une bijection linéaire $A\colon V\to V$, la base $\{Ae_i\}$ et la duale $\{\beta_i\}$.*

Nous considérons l'application d'insertion $\iota\colon V^n\to V^{n+1}$ donnée par

$$\iota_k(v)(v_1,\dots,v_n)=(v_1,\dots,v_{k-1},v,v_k,\dots,v_n). \tag{10.650}$$

Alors :

ITEMooSROIooGtTXCL

(1) Pour tout $r\leqslant l$, pour tout $s\leqslant k$, pour tout $\xi_i\in V^*$ et $v_j\in V$ nous avons

$$\sum_i T(\iota_r(\alpha_i)(\xi_1,\dots,\xi_{l-1}),\iota_s(e_i)(v_1,\dots,v_{k-1}))=\sum_i T(\iota_r(\beta_i)(\xi_1,\dots,\xi_{l-1}),\iota_s(Ae_i)(v_1,\dots,v_{k-1})). \tag{10.651}$$

ITEMooPWLBooOYrluK

(2) En posant

$$\begin{aligned}C_s^r\colon (V^*)^{l-1}\times V^{k-1}&\to\mathbb{R}\\ (\xi_1,\dots,\xi_{l-1},v_1,\dots,v_{k-1})&\mapsto\sum_i T(\iota_r(\alpha_i)(\xi_1,\dots,\xi_{l-1}),\iota_s(e_i)(v_1,\dots,v_{k-1})),\end{aligned} \tag{10.652}$$

l'application $C_s^r(T)$ est un $(l-1,k-1)$-tenseur.

*Ce $C_s^r(T)$ est la (r,s)-**contraction** de T.*

Démonstration. Le point (2) est facile parce que c'est juste la multilinéarité. Nous faisons le point (2). Nous partons du lemme 4.137 qui dit que $\beta_i=\sum_j A_{ij}^{-1}\alpha_j$. Remarquez que

$$T\big(\iota_r(\sigma)(\xi_1,\dots,\xi_{l-1}),\dots\big) \tag{10.653}$$

est linéaire en σ. Cela nous permet de sortir plein de sommes de T dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned}&\sum_i T\Big(\iota_r(\beta_i)(\xi_1,\dots,\xi_{l-1}),\iota_s(Ae_i)(v_1,\dots,v_{k-1})\Big) &\text{(10.654a)}\\ &=\sum_i T\Big(\iota_r(\sum_j A_{ij}^{-1}\alpha_j)(\xi_1,\dots,\xi_{l-1}),\iota_s(\sum_l A_{li}e_l)(v_1,\dots,v_{k-1})\Big) &\text{(10.654b)}\\ &=\sum_{ijl}A_{ij}^{-1}A_{li}T\big(\iota_r(\alpha_j)(\dots),\iota_s(e_l)(\dots)\big) &\text{(10.654c)}\\ &=\sum_i T\big(\iota_r(\alpha_i)(\dots),\iota_s(e_l)(\dots)\big) &\text{(10.654d)}\end{aligned}$$

□

Proposition 10.237 ([310]).
Soient $v,w\in V$ ainsi que $\beta,\gamma,\sigma\in V^*$. Nous avons

$$C_2^1(v\otimes w\otimes w\otimes\beta\otimes\gamma\otimes\sigma)=\gamma(v)w\otimes\beta\otimes\sigma. \tag{10.655}$$

Démonstration. Nous choisissons une base $\{e_i\}$ de V et sa base duale $\{\alpha_i\}$. Ensuite allons appliquer $C_2^1(v\otimes w\otimes\beta\otimes\gamma\otimes\sigma)$ à (ξ,v_1,v_2) avec $\xi\in V^*$, $v_1,v_2\in V$. Remarquons d'abord que si nous adoptons la décomposition

[102] Définition 10.235.

$v = \sum_k v_k e_k$ et $\gamma = \sum_l \gamma_l \alpha_l$, nous avons $\alpha_i(v) = v_i$ et $\gamma(e_i) = \gamma_i$. Voici le calcul :

$$C_1^1(v \otimes w \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \sigma)(\xi, v_1, v_2) = \sum_i (v \otimes w \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \sigma)(\alpha_i, \xi, v_1, e_i, v_2) \tag{10.656a}$$
$$= \sum_i \alpha_i(v)\xi(w)\beta(v_1)\gamma(e_i)\sigma(v_2) \tag{10.656b}$$
$$= \sum_i v_i\gamma_i\xi(w)\beta(v_1)\sigma(v_2) \tag{10.656c}$$
$$= \gamma(v)(w \times \beta \otimes \sigma)(\xi, v_1, v_2). \tag{10.656d}$$

Pour la dernière ligne, $\sum_i v_i\gamma_i = \gamma(v)$ parce que

$$\gamma(v) = \sum_{kl} \gamma_l \alpha_l(v_k e_k) = \sum_{kl} \gamma_l v_k \delta_{lk} = \sum_k \gamma_k v_k. \tag{10.657}$$

□

10.15.9 Tenseurs symétriques et alternés

Si T est une application k-multilinéaire sur V, et si $\sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$ est une permutation, nous notons T^σ l'application k-multilinéaire donnée par

$$\begin{aligned} T^\sigma : V^k &\to \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_k) &\mapsto T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}). \end{aligned} \tag{10.658}$$

Définition 10.238 ([310]).
*Un k-tenseur[103] T sur V est **symétrique** si pour toute permutation $\sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$, nous avons*

$$T(v_1, \dots, v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}), \tag{10.659}$$

c'est-à-dire $T^\sigma = T$.

Définition 10.239 ([310]).
*Un k-tenseur T est **alterné** si $T^\sigma = (-1)^\sigma T$. L'espace vectoriel des k-tenseurs alternés est noté $\Lambda^k V^*$. Nous notons aussi $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$.*

LEMooJEZYooMmrtgu

Lemme 10.240.
Si T est un k-tenseur, et si σ et π sont des permutations, alors

(1) L'application $T \mapsto T^\sigma$ est linéaire en T.

(2) $(T^\pi)^\sigma = T^{\pi\circ\sigma}$.

(3) $(-1)^\pi(-1)^\sigma = (-1)^{\pi\circ\sigma}$.

LEMooZMTPooKnqSuz

Lemme 10.241.
Si V est un espace vectoriel réel de dimension n, et si B est une base de V, alors le déterminant[104] $\det_B : V^n \to \mathbb{R}$ est un n-tenseur alterné.

DEFooHAKAooIfbsEy

Définition 10.242.
Si T est un k-tenseur, nous définissons

$$\mathrm{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi T^\pi \tag{10.660}$$

où la somme porte sur le groupe symétrique[105].

LEMooWYCAooKoFpRu

Lemme 10.243 ([310]).
L'application $\mathrm{Alt} : \mathcal{L}_k(V) \to \Lambda^k V^*$ est une projection linéaire, c'est-à-dire

ITEMooLADTooNfbVlO

(1) $\mathrm{Alt}\big(\mathcal{L}_k(V)\big) \subset \Lambda^k V^*$

[103] C'est-à-dire une application k-multilinéaire $T : V^k \to \mathbb{R}$.
[104] Définition 8.9.
[105] Groupe symétrique, définition 1.269.

ITEMooQPJKooTvriBv

(2) $\mathrm{Alt}|_{\Lambda^k V^*} = \mathrm{Id}$.

ITEMooYOXTooTmzziO

(3) *L'application* Alt *est linéaire*

Démonstration. Pour (1), nous prouvons que $\big(\mathrm{Alt}(T)\big)^\sigma = (-1)^\sigma \mathrm{Alt}(T)$. Pour cela nous utilisons les formules du lemme 10.240. Nous avons

$$\mathrm{Alt}(T)^\sigma = \left(\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi T^\pi\right)^\sigma \tag{10.661a}$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi T^{\pi\circ\sigma} \tag{10.661b}$$
$$= (-1)^\sigma\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\sigma(-1)^\pi T^{\pi\circ\sigma} \tag{10.661c}$$
$$= (-1)^\sigma\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^{\pi\circ\sigma} T^{\pi\circ\sigma} \tag{10.661d}$$
$$= (-1)^\sigma\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi T^\pi \tag{10.661e}$$
SUBEQooTWZPooNpAjjd
$$= (-1)^\sigma \mathrm{Alt}(T). \tag{10.661f}$$

Pour (10.661e), nous avons utilisé le fait que $\pi\mapsto\pi\circ\sigma$ est une bijection de S_k et la proposition 1.305.

Pour le point (2), nous considérons un tenseur alterné T. Il vérifie donc $T^\pi = (-1)^\pi T$. Nous avons alors le calcul suivant :

$$\mathrm{Alt}(T) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi T^\pi \tag{10.662a}$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi(-1)^\pi T \tag{10.662b}$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k} T \tag{10.662c}$$
$$= T \tag{10.662d}$$

parce que S_k contient exactement $k!$ éléments par le lemme 1.272.

Pour le point (3), il s'agit de la linéarité de $T\mapsto T^\pi$ donnée par le lemme 10.240. □

LEMooIMYIooZIxYRp

Lemme 10.244 ([1]).
Si $T\in\mathcal{L}_k(V)$ et $S\in\mathcal{L}_l(V)$, nous avons

$$\mathrm{Alt}(T\otimes S) = (-1)^{kl}\mathrm{Alt}(S\otimes T). \tag{10.663}$$

Démonstration. Nous introduisons la permutation $\sigma\in S_{k+l}$ qui permute $\{1,\dots,k\}$ avec $\{k+1,\dots,k+l\}$; par exemple pour $k=3$ et $l=1$, ce serait $12345\to 45123$.

Nous avons

$$(T\otimes S)(v_1,\dots,v_k,u_1,\dots,u_l) = T(v_1,\dots,v_k)S(u_1,\dots,u_l) \tag{10.664a}$$
$$= (S\otimes T)\big(\sigma(v_1,\dots,v_k,u_1,\dots,u_l)\big). \tag{10.664b}$$

Donc $T\otimes S = (S\otimes T)\circ\sigma$.

Passons au calcul de $\mathrm{Alt}(T\otimes S)$. Nous avons

$$\mathrm{Alt}(T\otimes S) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}(-1)^\pi(T\otimes S)\circ\pi \tag{10.665a}$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}(-1)^\pi(S\otimes T)\circ\sigma\circ\pi \tag{10.665b}$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{s\in S_{k+l}}(-1)^{\sigma^{-1}\circ s}(S\otimes T)\circ s \tag{10.665c}$$
SUBEQooLJCJooLboUjv
$$= \frac{1}{k!}(-1)^{kl}\sum_{s}(-1)^s(S\otimes T)\circ s \tag{10.665d}$$
SUBEQooJLNGooEEnzci
$$= (-1)^{kl}\mathrm{Alt}(S\otimes T). \tag{10.665e}$$

Justifications :

- Pour (10.665c), nous avons changé de variables dans la somme : $s = \sigma \circ \pi$.
- Pour (10.665d), nous avons utilisé le fait que $(-1)^\sigma = (-1)^{kl}$ parce que qu'il faut kl transpositions pour réaliser σ.

□
LEMooERYDooAifUdG

Lemme 10.245 ([1]).
Soient $T \in \Lambda^k V^*$ et $S \in \Lambda^l V^*$. Nous avons

$$\sum_{\pi \in S_{k+l}} (-1)^\pi (T^\sigma \otimes S)^\pi = (-1)^\sigma \sum_{\pi \in S_{k+k}} (-1)^\pi (T \otimes S)^\pi. \tag{10.666}$$

Démonstration. Dans un premier temps, nous fixons un π, nous oublions le $(-1)^\pi$, et nous ne faisons pas la somme. Nous appliquons à $(v_1, \dots, v_{k+l}) \in V^{k+l}$:

$$\begin{aligned}(T^\sigma \otimes S)^\pi(v_1, \dots, v_{k+l}) &= (T^\sigma \otimes S)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) && (10.667a)\\ &= T^\sigma(v_{\pi(1),\dots,v_{\pi(k)}}) S(v_{\pi(k+1),\dots,v_{\pi(k+l)}}) && (10.667b)\\ &= T\big(v_{\pi(\sigma(1))}, \dots, v_{\pi(\sigma(k))}\big) S\big(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}\big). && (10.667c)\end{aligned}$$

Arrêtez-vous un moment pour vous assurer d'avoir bien compris pourquoi ce qui arrive dans T sont bien des $v_{\pi(\sigma(i))}$ et non des $v_{\sigma(\pi(i))}$. Une fois que c'est fait, nous définissons $\sigma' \in S_{k+l}$ par

$$\sigma'(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant k \\ x & \text{si } k+1 \leqslant x \leqslant k+l. \end{cases} \tag{10.668}$$
EQooGWUUooNiLjfY

Avec ça nous pouvons continuer le calcul :

$$\begin{aligned}(T^\sigma \otimes S)^\pi(v_1, \dots, v_{k+l}) T\big(v_{(\pi\circ\sigma')(1)}, \dots, v_{(\pi\circ\sigma')(k))}\big) S\big(v_{(\pi\circ\sigma')(k+1)}, \dots, v_{(\pi\circ\sigma')(k+l))}\big) && (10.669a)\\ = (T \otimes S)^{\pi\circ\sigma'}(v_1, \dots, v_{k+l}). && (10.669b)\\ && (10.669c)\end{aligned}$$

En résumé, jusqu'ici nous avons prouvé que

$$(T^\sigma \otimes S)^\pi = (T \otimes S)^{\pi\circ\sigma'} \tag{10.670}$$

où σ' est donné en fonction de σ par la formule (10.668).

Nous faisons maintenant le calcul avec la somme et tout (en notant ϵ la signature) :

$$\begin{aligned}\sum_\pi \epsilon(\pi)(T^\sigma \otimes S)^\pi &= \sum_\pi \epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi\circ\sigma'} && (10.671a)\\ &= \epsilon(\sigma') \sum_\pi \epsilon(\sigma')\epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi\circ\sigma'} && (10.671b)\\ &= \epsilon(\sigma') \sum_\pi \epsilon(\pi \circ \sigma')(T \otimes S)^{\pi\circ\sigma'} && (10.671c)\\ &= \epsilon(\sigma') \sum_\pi \epsilon(\pi)(T \otimes S)^\pi. && (10.671d)\end{aligned}$$

La dernière ligne est la proposition 1.305 et le fait que $\pi \mapsto \pi \circ \sigma'$ est une bijection de S_{k+l}. □
LEMooKINCooHUEtaT

Lemme 10.246 ([1]).
Soient $T \in \Lambda^k V^*$, $S \in \Lambda^l V^*$ et $R \in \Lambda^m V^*$. Nous avons[106]

$$\operatorname{Alt}\big(\operatorname{Alt}(T \otimes S) \otimes R\big) = \operatorname{Alt}(T \otimes S \otimes R) = \operatorname{Alt}\big(T \otimes \operatorname{Alt}(S \otimes R)\big). \tag{10.672}$$

Démonstration. Nous prouvons la première égalité[107]. Nous avons :

$$\begin{aligned}\operatorname{Alt}\big(\operatorname{Alt}(T \otimes S) \otimes R\big) &= \frac{1}{(k+l+m)!} \sum_{\pi \in S_{k+l+m}} (-1)^\pi \big(\operatorname{Alt}(T \otimes S) \otimes R\big)^\pi && (10.673a)\\ &= \frac{1}{(k+l+l)!} \sum_{\pi \in S_{k+l+m}} (-1)^\pi \Big(\frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+m}} (-1)^\sigma (T \otimes S)^\sigma \otimes R\Big)^\pi && (10.673b)\\ &= \frac{1}{(k+l+m)!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (-1)^\sigma \sum_{\pi \in S_{k+l+m}} (-1)^\pi \big((T \otimes S)^\sigma \otimes R\big)^\pi. && (10.673c)\end{aligned}$$

[106] Nous avons le droit d'écrire $T \otimes S \otimes R$ parce que le produit tensoriel est associatif, lemme 10.217.
[107] Je vous conseille d'essayer de prouver la seconde ; je ne l'ai pas vérifiée.

C'est le moment d'utiliser le lemme 10.245. Nous continuons :

$$\operatorname{Alt}\big(\operatorname{Alt}(T\otimes S)\otimes R\big)=\frac{1}{(k+l+l)!}\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(-1)^{\sigma}(-1)^{\pi}\big((T\otimes S)\otimes R\big)^{\pi} \tag{10.674a}$$

$$=\frac{1}{(k+l+m)!}\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\sum_{\pi}\big((T\otimes S)\otimes R\big)^{\pi}. \tag{10.674b}$$

Notez que ce qui est dans la somme sur σ ne dépend pas de σ. Nous avons donc $|S_{k+l}|=(k+k)!$ termes identiques, et nous continuons

$$\operatorname{Alt}\big(\operatorname{Alt}(T\otimes S)\otimes R\big)=\frac{1}{(k+l+m)!}\sum_{\pi\in S_{k+l+m}}(T\otimes S\otimes R)^{\pi} \tag{10.675a}$$

$$=\operatorname{Alt}(T\otimes S\otimes R). \tag{10.675b}$$

Et voilà. □

DEFooCTSPooZRIufr

Définition 10.247 (Produit extérieur)**.**
Pour $T\in\Lambda^kV^*$ et $S\in\Lambda^lV^*$ nous définissons

$$T\wedge S=\frac{(k+l)!}{k!l!}\operatorname{Alt}(T\otimes S). \tag{10.676}$$

Cette opération est le ***produit extérieur****.*

LEMooKEOWooNDXqgr

Lemme 10.248 ([310])**.**
Propriétés du produit extérieur.

ITEMooELVSooHlORJy

(1) *L'opération $\wedge$ est une application $\wedge\colon\Lambda^kV^*\times\Lambda^lV^*\to\Lambda^{k+l}V^*$.*

ITEMooRUBEooKVHFSz

(2) *L'application $\wedge\colon\Lambda^kV^*\times\Lambda^lV^*\to\Lambda^{k+l}V^*$ est linéaire en ses deux arguments.*

ITEMooTCWPooIJYaRE

(3) *Nous avons $T\wedge S=(-1)^{kl}S\wedge T$.*

ITEMooKFPZooFenmCT

(4) *Le produit extérieur est associatif : $(T\wedge S)\wedge R=T\wedge(S\wedge R)$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Nous savons que $T\otimes S\in\mathcal{L}_{k+l}(V)$. Le lemme 10.243 conclut.

(2) **Pour (2)** C'est la bilinéarité du produit tensoriel $\otimes$ et celle de l'antisymétrisation Alt donnée dans le lemme 10.243(3).

Notez que la bilinéarité du produit tensoriel $\otimes$ remonte à la définition d'un produit tensoriel (T,h) 10.201 qui demande à h d'être bilinéaire. La proposition 10.223 prouve que le produit $T\otimes S$ entre applications multilinéaires donne bien un produit tensoriel. Bref. Tout cela pour nous rappeler que ce que nous notons $T\otimes S$ pourrait tout aussi bien se noter $h(T,S)$.

(3) **Pour (3)** Conséquence du lemme 10.244.

(4) **Pour (4)** Soient $T\in\Lambda^kV^*$, $S\in\Lambda^lV^*$ et $R\in\Lambda^mV^*$. En déballant les définitions,

$$(T\wedge S)\wedge R=\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\operatorname{Alt}\big((T\wedge S)\otimes R\big) \tag{10.677a}$$

$$=\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\operatorname{Alt}\left(\frac{(k+l)!}{k!l!}\operatorname{Alt}(T\times S)\otimes R\right) \tag{10.677b}$$

$$=\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}\operatorname{Alt}\big(\operatorname{Alt}(T\otimes S)\otimes R\big) \tag{10.677c}$$

$$=\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}\operatorname{Alt}\big(T\otimes(S\otimes R)\big) \qquad \text{lem. 10.246} \tag{10.677d}$$

$$=T\wedge(S\wedge R). \tag{10.677e}$$

□

LEMooZJJLooFGuguy

Lemme 10.249 ([1]).
Si $\xi_i \in \bigwedge^{n_i} V^*$, alors nous avons[108]

$$\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k = \frac{(\sum_{i=1}^k n_i)!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes \ldots \xi_k). \tag{10.678}$$

Démonstration. Nous y allons par récurrence. Pour $k = 1$, l'égalité à prouver se réduit à

$$\xi_1 = \operatorname{Alt}(\xi_1), \tag{10.679}$$

qui est vraie par le lemme 10.243(2).

Pour la récurrence nous faisons ceci :

$$(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k) \wedge \xi_{k+1} = \frac{(\sum_{i=1}^k n_i)!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes \ldots \xi_k) \wedge \xi_{k+1} \tag{10.680a}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^k n_i)!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \frac{(\sum_{i=1}^{k+1} n_i)!}{(\sum_{i=1}^k n_i)! n_{k+1}!} \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_{k+1}) \tag{10.680b}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^k n_i)!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes \ldots \xi_k). \tag{10.680c}$$

□

PROPooRRSZooJXOApq

Proposition 10.250 ([310]).
Soient $\xi_1, \ldots, \xi_k \in V^*$ et $v_1, \ldots, v_k \in V$. Nous avons

$$(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det\big(\xi_i(v_j)\big). \tag{10.681}$$

Démonstration. Nous pouvons utiliser le lemme 10.249 dans lequel $n_i = 1$ pour tout i : $(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k) = k! \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_k)$. Cela donne le calcul suivant :

$$(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k)(v_1, \ldots, v_k) = k! \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_k)(v_1, \ldots, v_k) \tag{10.682a}$$

$$= k! \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi (\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_k)^\pi (v_1, \ldots, v_k) \tag{10.682b}$$

$$= \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi \prod_{i=1}^n \xi_i(v_{\pi(i)}) \tag{10.682c}$$

$$= \det\big(\xi_i(v_j)\big) \qquad \text{def. 4.83.} \tag{10.682d}$$

Et voilà. □

CORooDQSNooZtMuOJ

Corolaire 10.251.
Soient une 1-forme α, une k-forme ω ainsi que des vecteurs $\{v_i\}_{i=1,\ldots,k+1}$. Alors nous avons

$$(\alpha \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_{k+1}} (-1)^\pi (\alpha \otimes \omega)(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k+1)}) \tag{10.683a}$$

SUBEQooTNYNooAeuhHJ

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_{k+1}} (-1)^\pi \alpha(v_{\pi(1)}) \omega(v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(k+1)}). \tag{10.683b}$$

SUBEQooSNOTooZzxesM

Démonstration. Il s'agit simplement de déballer les définitions 10.247 et 10.242 :

$$(\alpha \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \frac{(k+1)!}{k!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \omega)(v_1, \ldots, v_{k+1}) \tag{10.684a}$$

$$= \frac{(k+1)!}{k!} \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\pi \in S_{k+1}} (-1)^\pi (\alpha \otimes \omega)^\pi (v_1, \ldots, v_{k+1}) \tag{10.684b}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_{k+1}} (-1)^\pi (\alpha \otimes \omega)(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k+1)}) \tag{10.684c}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_{k+1}} (-1)^\pi \alpha(v_{\pi(1)}) \omega(v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(k+1)}). \tag{10.684d}$$

□

[108] L'alterné est donné dans la définition 10.242.

10.15.10 Décomposition

PROPooUGLOooTULnDK

Proposition 10.252 ([310]).
Si $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une base de V^*, alors

$$\{\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} \text{ tel que } 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n\} \tag{10.685}$$

est une base de $\bigwedge^k V^*$.

Nous avons

$$\dim(\bigwedge^k V^*) = \binom{n}{k}. \tag{10.686}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Partie libre** Nous notons $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ la base (pré-)duale de V. Pour $I = (i_1, \dots, i_k)$ avec $i_1 < \dots < i_k$, nous notons $\Omega_I = \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}$. Soit $J = (j_1, \dots, j_k)$ avec $j_1 < \dots < j_k$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\Omega_I(e_I) &= (\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) && (10.687a)\\
&= \operatorname{Alt}(\alpha_{i_1} \otimes \dots \otimes \alpha_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) && \text{lem. 10.249} \quad (10.687b)\\
&= k! \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi \alpha_{i_1}(e_{\pi(j_1)}) \dots \alpha_{i_k}(e_{\pi(j_k)}) && (10.687c)\\
&= \sum_\pi (-1)^\pi \delta_{I\pi(J)}. && (10.687d)
\end{aligned}$$

Vu que les indices I et J sont ordonnées, si $\pi \neq \mathrm{Id}$, nous aurons forcément un des $\pi(j_l) \neq i_l$. Donc la somme sur π se réduit au terme $\pi = \mathrm{Id}$:

EQooFTUIooDDgxLK

$$\Omega_I(e_J) = \delta_{IJ}. \tag{10.688}$$

Cela prouve que les Ω_I sont linéairement indépendants.

(2) **Partie génératrice**

Nous devons encore prouver qu'ils sont générateurs de $\bigwedge^k V^*$.

Soit $T \in \bigwedge^k V^*$; en particulier nous avons $T \in \mathcal{L}_k(V, \mathbb{R})$, et le théorème 10.226 nous permet d'écrire $T = \sum_I T_I h(e_I)$ où la somme porte sur les $I = (i_1, \dots, i_k)$ avec $1 \leqslant i_j \leqslant n$ pour tout j, et $h(e_I) = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$.

En utilisant encore le lemme 10.249, nous avons

$$\Omega_I = k! \operatorname{Alt}\big(h(e_I)\big), \tag{10.689}$$

et donc

$$T = \operatorname{Alt}(T) = \sum_I T_I \operatorname{Alt}\big(h(e_I)\big) = \sum_I T_I \frac{1}{k!} \Omega_I. \tag{10.690}$$

Il est temps de noter que si I et I' sont les mêmes indices, mais ordonnés différemment, $\Omega_I = \pm\Omega_{I'}$. Si I est un multiindice, nous notons $r(I)$ le multiindice contenant les mêmes indices que I, mais ordonné. Ensuite nous notons

$$s(I) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Omega_{r(I)} = \Omega_I \\ -1 & \text{si } \Omega_{r(I)} = -\Omega_I. \end{cases} \tag{10.691}$$

Avec ça nous avons toujours $\Omega_I = s(I)\Omega_{r(I)}$, et donc

$$T = \frac{1}{k!} \sum_I T_I s(I) \Omega_{r(I)}. \tag{10.692}$$

Donc T est bien une combinaison linéaire des $\Omega_{r(I)}$.

(3) **Cardinal** Nous posons

$$\begin{aligned}
A &= \{I \text{ tel que } 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n\} && (10.693a)\\
B &= \{\Omega_I \text{ tel que } I \in A\} && (10.693b)\\
C &= \big\{\text{parties de cardinal } k \text{ dans } \{1, \dots, n\}\big\}. && (10.693c)
\end{aligned}$$

Nous devons prouver que $\text{Card}(B) = \binom{n}{k}$. Le lemme 1.382 donne déjà $\text{Card}(C) = \text{Card}(A) = \binom{n}{k}$. Nous prouvons à présent que

$$\begin{aligned} \psi\colon A &\to B \\ I &\mapsto \Omega_I \end{aligned} \tag{10.694}$$

est une bijection. Cette application est surjective par définition de B. En ce qui concerne l'injectivité, si $\Omega_I = \Omega_J$, alors pour tout multiindice L nous avons $\Omega_I(e_L) = \Omega_J(e_L)$. En vertu de (10.688), cela donne $\delta_{IL} = \delta_{JL}$ pour tout multiindice L. En prenant en particulier $L = I$, nous trouvons $1 = \delta_{IJ}$ et donc $I = J$.

□

10.253.
Si $I = (i_1, \dots, i_k)$ est un multiindice et si $a = (a_1, \dots, a_n)$, alors nous notons

$$a_{\wedge I} = a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k} \tag{10.695}$$

dans tous les cas où la formule a un sens.

PROPooSDVXooLvwPbg

Proposition 10.254.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Nous notons

$$C_k = \{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k \text{ tel que } 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n\}. \tag{10.696}$$

Si $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une base de V, alors tout élément de $\bigwedge^k V$ peut être écrit sous la forme

$$\omega = \sum_{i \in C_k} \omega_I e_{\wedge I} \tag{10.697}$$

avec $\omega_I \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

PROPooDXTOooKYDOiI

Proposition 10.255.
Soit un ouvert U dans $\mathbb{R}^n$. Si l'application

$$\omega\colon U \to \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^* \tag{10.698}$$

est de classe C^k, alors il existe des applications $\omega_I \in C^k(U)$ telles que

$$\omega(s) = \sum_{I \in C_k} \omega_I(s) e^*_{\wedge I}. \tag{10.699}$$

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

10.15.11 Règle de Leibniz pour le produit extérieur

Dans la suite nous allons intensément étudier la partie

$$S_{(k,l)} = \{\pi \in S_{k+l} \text{ tel que } \pi(1) < \dots < \pi(k),\ \pi(k+1) < \dots < \pi(k+l)\}. \tag{10.700}$$

Nous commençons avec $k = 1$. Dans ce cas, le lemme 10.256 donnera la forme générale d'un élément de $S_{(1,l)}$. En ce qui concerne l'intuition, si $\tau(1) = m$, toutes les autres valeurs de τ sont fixées à cause de la croissance de $j \mapsto \tau(j)$. Nous avons forcément que, lorsque j va de 2 à $l+1$, le nombre $\tau(j)$ prend dans l'ordre toutes les valeurs entre 1 et $l+1$, en sautant m.

Autrement dit, un élément de $S_{(1,l)}$ doit prendre cette forme :

$$\begin{array}{c|cccc} j & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \tau(j) & 1 & 2 & 4 & 5. \end{array} \tag{10.701}$$

La première colonne est séparée parce qu'elle joue un rôle spécial : les nombres sont ordonnés de chacun des deux côtés. À droite, nous avons simplement l'énumération $1, 2, 3, 4, 5$ en sautant 3.

En ce qui concerne la signature, pour tout remettre en ordre, il suffit de bouger le 3 vers sa place. Pour cela il faut 2 transpositions.

LEMooDBIEooYcjlDP

Lemme 10.256 ([1, 403]).
À propos de $S_{(1,l)}$.

(1) *L'application $\phi\colon \{1,\dots,l+1\} \to S_{(1,l)}$ donnée par*

$$\phi(m)j = \begin{cases} m & si\ j = 1 \\ j-1 & si\ j \leqslant m \\ j & si\ j > m \end{cases} \tag{10.702}$$

EQooRALSooPWvZPd

est une bijection.

ITEMooRIHAooItlkCh

(2) *En ce qui concerne la signature, nous avons $\epsilon\big(\phi(m)\big) = (-1)^{m-1}$.*

ITEMooCOPZooLiUPWE

(3) *Pour l'inverse de ϕ nous avons $\tau = \phi\big(\tau(1)\big)$ pour tout $\tau \in S_{(1,l)}$.*

ITEMooHMNFooENphGK

(4) *Pour tout $\tau \in S_{(1,l)}$ nous avons*

$$\epsilon(\tau) = -(-1)^{\tau(1)} \tag{10.703}$$

Démonstration. Le fait que ϕ prenne effectivement ses valeurs dans $S_{(1,l)}$ est une simple vérification de la croissance.

(1) **Injective** Si $\phi(m) = \phi(n)$, alors en particulier $m = \phi(m)1 = \phi(n)1 = n$ et donc $m = n$.

(2) **Surjective** Soit $\tau \in S_{(1,l)}$. Nous posons $m = \tau(1)$ et nous prouvons que $\tau = \phi(m)$.

Par croissance, si $k \geqslant 2$, nous avons $\tau(k) \leqslant k$. En effet nous avons $\tau(l+1) \geqslant \tau(k) + (l+1-k)$. Au cas où nous aurions $\tau(k) > k$, nous aurions $\tau(l+1) \geqslant \tau(k) + l - 1 - k > l+1$, ce qui est impossible.

D'autre part, pour tout $k \geqslant 2$ nous avons

$$\tau(k) = \min\Big(\{1,\dots,l+1\} \setminus \tau\{1,\dots,k-1\}\Big). \tag{10.704}$$

EQooZLUJooGgoFqx

Cela étant dit, commençons doucement en supposant $m1 = 1$. Dans ce cas l'équation (10.704) donne tout de suite $\tau(2) = 2$. Une récurrence montre qu'alors $\tau(k) = k$ pour tout k. Autrement dit, si $\tau(1) = 1$, nous avons $\tau = \mathrm{Id}$. Simple vérification que $ph(1) = \mathrm{Id}$ aussi.

Passons au cas général $\tau(1) = m > 1$. Nous avons

$$\tau(2) = \min\Big(\{1,\dots,l+1\} \setminus \{m\}\Big) = 1 \tag{10.705}$$

parce que $m \neq 1$. Nous faisons une récurrence en supposant $\tau(j) = j-1$ pour un certain $j < m$. Nous prouvons que $\tau(j+1) = j$. Pour cela,

$$\tau(j+1) = \min\Big(\{1,\dots,l+1\} \setminus \{1,\dots,j-1,m\}\Big). \tag{10.706}$$

Étant donné que $j < m$, nous avons $j - 1 < m$ et donc le nombre j est encore dans la différence dont nous prenons le minimum. Donc $\tau(j+1) = j$. Cela prouve que $\tau(j) = \phi(m)j$ pour tout $j < m$.

En ce qui concerne $\tau(m)$, nous avons

$$\tau(m) = \min\Big(\{1,\dots,l+1\} \setminus \{1,\dots,m-2,m\}\Big) = m - 1. \tag{10.707}$$

De même nous voyons que $\tau(m+1) = m+1$. De là, la croissance en tenant compte de $\tau(k) \leqslant k$ fait le reste.

(3) **Pour (2)** Nous montrons que

$$\prod_{i=1}^{m-1} (m,i) \circ \phi(m) = \mathrm{Id}\,. \tag{10.708}$$

(3a) **Pour $j = 1$** Nous avons

$$\prod_{i=1}^{m-1}(m,i)\phi(m)1 = \prod_{i=1}^{m-1}(m,i)m \tag{10.709a}$$
$$= \prod_{i=2}^{m-1}(m,i)\circ(m,1)m \tag{10.709b}$$
$$= \prod_{i=2}^{m-1}(m,i)1 \tag{10.709c}$$
$$= 1 \tag{10.709d}$$

(3b) **Si $j \leqslant m-1$** Dans ce cas nous avonns $\phi(m)j = j-1$. Nous avons alors le calcul

$$\prod_{i=1}^{m-1}(m,i)\phi(m)j = \prod_{i=1}^{m-1}(m,i)(j-1) = \prod_{i=j}^{m-1}(m,i)\circ(m,j-1)(j-1) \tag{10.710a}$$
$$= \prod_{i=j}^{m-1}(m,i)m = \prod_{i=j+1}^{m-1}(m,i)(m,j)m = \prod_{i=j+1}^{m-1}(m,i)j = j. \tag{10.710b}$$

(3c) **Pour $j = m$** Même type de calculs :

$$\prod_{i=1}^{m-1}(m,i)\phi(m)m = (m,m-1)(m-1) = m. \tag{10.711}$$

(3d) **Pour $j > m$** Nous avons

$$\prod_{i=1}^{m-1}(m,i)\phi(m)j = \prod_{i=1}^{m-1}(m,i)j = j \tag{10.712}$$

parce que $j > m$, de telle sorte qu'il n'est atteint par aucune des transpositions.

Nous avons donc prouvé que $\prod_{i=1}^{m-1}(m,i)\circ\phi(m) = \mathrm{Id}$. Vu que ϵ est un morphisme[109] et que $\epsilon(\mathrm{Id}) = 1$, nous déduisons que

$$\epsilon\big(\phi(m)\big) = \epsilon\Big(\prod_{i=1}^{m-1}(m,i)\Big) = (-1)^{m-1}. \tag{10.713}$$

(4) **Pour (3)** Soit $\tau \in S_{(1,l)}$. Vu que ϕ est une bijection, il existe un unique $m \in \{1,\dots,l+1\}$ tel que $\tau = \phi(m)$. En appliquant cette égalité à 1 nous avons $\tau(1) = \phi(m)1$. Mais la définition (10.702) de ϕ donne $\phi(m)1 = m$. Nous avons donc prouvé que

$$\tau(1) = \phi(m)1 = m, \tag{10.714}$$

c'est-à-dire $m = \tau(1)$ et donc $\tau = \phi\big(\tau(1)\big)$.

(5) **Pour (4)** Soit $\tau \in S_{(1,l)}$. En utilisant les points (3) et (2), nous avons

$$\epsilon(\tau) = \epsilon\Big(\phi\big(\tau(1)\big)\Big) = (-1)^{\tau(1)-1} = -(-1)^{\tau(1)}. \tag{10.715}$$

□
LEMooFHCHooQgrwHD

Lemme 10.257 ([1]).
L'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon B_{(1,l)} &\to S_{(1,l-1)}\\ \pi &\mapsto \phi\big(\pi(1)-1\big)\end{aligned} \tag{10.716}$$

est une bijection et vérifie

$$\epsilon\big(\varphi(\pi)\big) = -\epsilon(\pi). \tag{10.717}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

[109] Proposition 1.299.

(1) **Surjectif** Lorsque π parcours $B_{(1,l)}$, la valeur de $\pi(1)$ parcours les valeurs de 2 à $l+1$, et donc $\pi(1)-1$ va de 1 à l. Le lemme 10.256 dit que $\phi\big(\{1,\dots,l\}\big)=S_{1,l-1}$.

(2) **Injectif** Si $\varphi(\pi)=\varphi(\sigma)$, alors par injectivité de ϕ (le ϕ de $S_{(1,l-1)}$) nous avons $\pi(1)=\sigma(1)$. Or nous avons $B_{(1,l)}\subset S_{(1,l)}$. L'injectivié du ϕ de $S_{(1,l)}$ dir que si $\pi(1)=\sigma(1)$, alors $\pi=\sigma$.

(3) **Signature** Il s'agit d'abord le lemme 10.256(2). Soit $\pi\in B_{(1,l)}$. En posant $m=\pi(1)-1$ nous avons

$$\epsilon\big(\varphi(\pi)\big)=\epsilon\Big(\phi\big(\pi(1)-1\big)\Big)=(-1)^{m-1}=(-1)^{\pi(1)}. \tag{10.718}$$

Ensuite le lemme 10.256(4) nous donne $\epsilon(\pi)=-(-1)^{\pi(1)}$.

□

10.258.
Si I est une partie de $\{1,\dots,n\}$, nous notons $\mathcal{O}(I)$ l'élément de $\mathbb{N}^k$ donné par l'ordonnement des éléments de I. Si E est un ensemble, nous notons $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de cardinal k de E.

LEMooKGETooKhomPn

Lemme 10.259 ([1]).
Nous notons $E=\{1,\dots,k+l\}$.

(1) L'application $\phi\colon\mathcal{P}_k(E)\to S_{(k,l)}$ donnée par

$$\phi(I)(1,\dots,l+k)=\big(\mathcal{O}(I),\mathcal{O}(E\setminus I)\big) \tag{10.719}$$

est une bijection.

(2) Pour $\tau\in S_{(k,l)}$ nous avons

$$\epsilon(\tau)=(-1)^{\sum_{n=1}^{k}\left(\tau(n)-n\right)}. \tag{10.720}$$

EQooPWREooEeHcBv

Démonstration. Le fait que $\phi(I)$ soit dans $S_{(k,l)}$ est visible dans la définition : les k premiers éléments de $\big(\phi(I)1,\dots,\phi(I)(k+l)\big)$ et les l suivants sont ordonnés.

(1) **Injective** Soient $I,J\in\mathcal{P}_k(E)$ tels que $\phi(I)=\phi(J)$. En particulier pour $j=1,\dots,k$ nous avons$\phi(I)j=\phi(J)j$, et donc $\mathcal{O}(I)_j=\mathcal{O}(J)_j$. Cela prouve que $\mathcal{O}(I)=\mathcal{O}(J)$ et donc que $I=J$.

(2) **Surjective** Soit $\tau\in S_{(k,l)}$. Nous notons $I=\tau\{1,\dots,k\}$, et nous prouvons que $\tau=\phi(I)$. Vu que $\tau\in S_{(k,l)}$, le vecteur $\big(\tau(1),\dots,\tau(k)\big)$. Étant donné que τ est une bijection de E, nous avons aussi

$$\tau\{k+1,\dots,k+l\}=E\setminus I, \tag{10.721}$$

et comme $\big(\tau(k+1),\dots,\tau(k+l)\big)$ est ordonné, il est égal à $\mathcal{O}(E\setminus I)$.

Nous devons déterminer combien de transpositions sont nécessaires pour transformer $\big(\tau(1),\dots,\tau(k+l)\big)$ en $(1,\dots,k+l)$. Étant donné que $\tau\in S_{(k,l)}$, le plus grand parmi $\big(\tau(1),\dots,\tau(k)\big)$ est $\tau(k)$, il il faut $\tau(k)-k$) permutations pour l'amener en k. Ce sont les transpositions

$$\prod_{j=k+1}^{\tau(k)}\big(\tau(k),\tau(j)\big). \tag{10.722}$$

Il faut ensuite $\tau(k-1)-(k-1)$ transpositions pour ramener $\tau(k-1)$ en position $k-1$, etc.

Il faut donc bien composer τ avec $\sum_{n=1}^{k}\big(\tau(n)-n\big)$ transpositions pour obtenir l'identité. □

LEMooEHTLooUSBBKL

Lemme 10.260 ([1]).
Bijection entre $B_{(k,l)}$ et $S_{(k,l-1)}$.

(1) L'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon B_{(k,l)}&\to S_{(k,l-1)}\\ \pi&\mapsto\phi\big(\pi\{1,\dots,k\}-1\big)\end{aligned} \tag{10.723}$$

est une bijection.

(2) Pour tout $\pi\in B_{(k,l)}$, nous avons

$$\epsilon\big(\varphi(\pi)\big)=(-1)^k\epsilon(\pi). \tag{10.724}$$

Démonstration. D'abord notons que φ est bien définie. En vu que $\pi(k+1)=1$, aucun élément de $\pi\{1,\dots,k\}$ n'est égal à 1. Et comme $\pi(j)\leqslant k+l$, les éléments de $\pi\{1,\dots,k\}-1$ sont entre 1 et $k+l-1$. L'ensemble $\pi\{1,\dots,k\}-1$ est donc un argument valable pour l'application $\phi\colon \mathcal{P}_k\{1,\dots,k+l-1\}\to S_{(k,l-1)}$.

(1) **φ est injective** Soient $\pi,\sigma\in B_{(k,l)}$ tels que $\varphi(\pi)=\varphi(\sigma)$. Nous notons $I_\pi=\pi\{1,\dots,k\}$ et $I_\sigma=\sigma\{1,\dots,k\}$. Pour tout $j=1,\dots,k$ nous avons

$$\varphi(\pi)j=\mathcal{O}(I_\pi-1)_j=\mathcal{O}(I_\pi)_j-1, \tag{10.725}$$

et similairement pour σ. Nous en déduisons que $\mathcal{O}(I_\pi)=\mathcal{O}(I_\sigma)$, et donc que $I_\pi=I_\sigma$.

Vu que $\pi=\phi(I_\pi)$, nous en déduisons que $\pi=\sigma$.

(2) **Surjectif** Soit $\tau\in S_{(k,l-1)}$. Nous posons $I_\tau=\tau\{1,\dots,k\}$, et nous considérons l'élément $\pi\in B_{(k,l)}$ donné par

$$\pi(j)=\begin{cases}\tau(j)+1 & \text{si } j\leqslant k\\ 1 & \text{si } j=k+1\\ \mathcal{O}\big(E\setminus(I_\tau\cup\{1\})\big)_j & \text{si } j>k+1.\end{cases} \tag{10.726}$$

La dernière ligne signifie « pour les autres, vous prenez ce qui reste, dans l'ordre ». Nous montrons à présent que $\tau=\varphi(\pi)$. Nous avons

$$\varphi(\pi)=\phi\big(\pi\{1,\dots,k\}-1\big)=\phi\big(\tau\{1,\dots,k\}\big). \tag{10.727}$$

Cela prouve que $\varphi(\pi)=\phi(I_\tau)=\tau$.

En ce qui concerne la signature, il s'agit de manipuler la formule (10.720). Vu que $B_{(k,l)}\subset S_{(k,l)}$, elle peut être utilisée tant pour π que pour $\tau(\pi)$. Pour π nous avons[110]

$$|\pi|=\sum_{n=1}^{k}\big(\tau(n)-n\big). \tag{10.728}$$

En ce qui concerne $\varphi(\pi)$ nous avons

$$|\varphi(\pi)|=\sum_{n=1}^{k}\big(\varphi(\pi)n-n\big)=\sum_{n=1}^{k}\big(\pi(n)-1-n\big)=\sum_{n=1}^{k}\big(\pi(n)-n\big)-\sum_{n=1}^{k}1=|\pi|-k. \tag{10.729}$$

□

LEMooRKWHooBNxZBL

Lemme 10.261 ([1]).
Soient des vecteurs $v_1,\dots,v_{k+l}$. Si $\pi\in S_{k+l}$, si $T\in\mathcal{L}_k(V)$ et si $\sigma\in S_k$, alors nous avons

$$T^\sigma(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})=T\big(v_{\pi\sigma(1)},\dots,v_{\pi\sigma(k)}\big). \tag{10.730}$$

EQooQJXHooTfvclD

Démonstration. Poser $w_j=v_{\pi(j)}$. Nous avons

$$T^\sigma(v_{\pi(1)},v_{\pi(k)})=T^\sigma(w_1,\dots,w_k)=T(w_{\sigma(1)},\dots,w_{\sigma(k)})=T(v_{\pi\sigma(1)},\dots,v_{\pi\sigma(k)}). \tag{10.731}$$

□

LEMooTGNUooZnxkrc

Lemme 10.262 ([59, 1]).
Soient des tenseurs alternés $T\in\Lambda^kV^*$ et $S\in\Lambda^lV^*$. Alors nous avons

$$(T\wedge S)(v_1,\dots,v_{k+l})=\sum_{\pi\in S_{(k,l)}}\epsilon(\pi)T\big(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}\big)S\big(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)}\big) \tag{10.732a}$$

$$=\sum_{\pi\in S_{(k,l)}}(T\otimes S)^\pi(v_1,\dots,v_{k+l}). \tag{10.732b}$$

SUBEQooUDLIooWwGFoe

où

$$S_{(k,l)}=\{\pi\in S_{k+l}\text{ tel que }\pi(1)<\dots<\pi(k),\ \pi(k+1)<\dots<\pi(k+l)\}, \tag{10.733}$$

et $\epsilon(\pi)$ est la signature[111] *de π, c'est-à-dire ce que nous notons souvent $(-1)^\pi$.*

[110] Nous notons $|\pi|$ le nombre de transpositions avec lequel il faut composer π pour obtenir l'identité. C'est-à-dire $\epsilon(\pi)=(-1)^{|\pi|}$. Sinon l'expression est trop lourde.
[111] Signature, définition 1.292.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Une relation d'équivalence** Nous considérons la relation d'équivalence suivante sur S_{k+l}. Nous posons $\pi_1 \sim \pi_2$ si $\{\pi_1(1),\dots,\pi_1(k)\} = \{\pi_2(1),\dots,\pi_2(k)\}$. Pour $\pi_0 \in S_{k+l}$ nous notons

$$A(\pi_0) = \{\pi \in S_{k+l} \text{ tel que } \{\pi(1),\dots,\pi(k)\} = \{\pi_0(1),\dots,\pi_0(k)\}\} \tag{10.734}$$

la classe d'équivalence de π_0.

(2) **Permutations partielles**

Lorsque $\pi \sim \pi_0$ nous notons $\sigma^{(\pi,\pi_0)}$ la permutation qui permet de « remettre dans l'ordre π_0 les éléments mélangés par π ». Plus précisément :

$$\begin{aligned}\sigma^{(\pi,\pi_0)}\colon \{1,\dots,k+l\} &\to \{1,\dots,k+l\}\\ i &\mapsto \begin{cases}(\pi_0\circ\pi^{-1})(i) & \text{si } i\in\pi\big(\{1,\dots,k\}\big)\\ i & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{10.735}$$

Notez que $\sigma^{(\pi,\pi_0)}$ est une bijection de $\{1,\dots,k+l\}$, c'est-à-dire que $\sigma^{(\pi,\pi_0)} \in S_{k+l}$. De même nous considérons $\tau^{(\pi,\pi_0)}$ donné par

$$\begin{aligned}\tau^{(\pi,\pi_0)}\colon \{1,\dots,k+l\} &\to \{1,\dots,k+l\}\\ i &\mapsto \begin{cases}(\pi_0\circ\pi^{-1})(i) & \text{si } i\in\pi\big(\{k+1,\dots,k+l\}\big)\\ i & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{10.736}$$

Ces deux permutations vérifient

$$\pi_0 = \tau^{(\pi,\pi_0)}\circ\sigma^{(\pi,\pi_0)}\circ\pi. \tag{10.737}$$

En effet, si $i = 1,\dots,k$, nous avons $\sigma^{(\pi,\pi_0)}\pi(i) = \pi_0(i)$ et donc

$$\tau^{(\pi,\pi_0)}\sigma^{(\pi,\pi_0)}\pi(i) = \pi_0(i) \tag{10.738}$$

parce que $\pi_0(i) \notin \pi\big(\{k+1,\dots,k+l\}\big)$. Même raisonnement pour prouver (10.737) pour les $i = k+1,\dots,k+l$.

(3) $A(\pi_0) \simeq S_k \times S_l$ Soit $\pi_0 \in S_{k+l}$. Nous notons $P = \pi_0\big(\{1,\dots,k\}\big)$ et $Q = \pi_0\big(\{k+1,\dots,k+l\}\big)$. Nous montrons que

$$\begin{aligned}\psi\colon A(\pi_0) &\to S_P \times S_Q\\ \pi &\mapsto \big(\sigma^{(\pi,\pi_0)}|_P, \tau^{(\pi,\pi_0)}|_Q\big)\end{aligned} \tag{10.739}$$

est une bijection.

(3a) **Injective** Soient $\pi_1,\pi_2 \in A(\pi_0)$. Nous supposons que $\sigma^{(\pi_1,\pi_0)}|_P = \sigma^{(\pi_2,\pi_0)}|_P$. Vu que $\sigma^{(\pi_1,\pi_0)}|_Q$ et $\sigma^{(\pi_2,\pi_0)}|_Q$ sont l'identité, nous avons en réalité $\sigma^{(\pi_1,\pi_0)} = \sigma^{(\pi_2,\pi_0)}$. Le même raisonnement est valable pour $\tau^{(\pi_1,\pi_0)} = \tau^{(\pi_2,\pi_0)}$.

En utilisant (10.737) pour π_1 et pour π_2, nous écrivons

$$\tau^{(\pi_1,\pi_0)}\circ\sigma^{(\pi_1,\pi_0)}\circ\pi_1 = \pi_0, \tag{10.740}$$

et

$$\tau^{(\pi_2,\pi_0)}\circ\sigma^{(\pi_2,\pi_0)}\circ\pi_2 = \pi_0, \tag{10.741}$$

et donc $\pi_1 = \pi_2$. L'injectivité est prouvée.

(3b) **Surjective** Soient $\sigma' \in S_P$ et $\tau' \in S_Q$. Nous les prolongeons par l'identité pour créer $\sigma,\tau \in S_{k+l}$. Nous posons

$$\pi_1 = \sigma^{-1}\circ\tau^{-1}\circ\pi_0. \tag{10.742}$$

Nous voulons prouver que $\psi(\pi_1) = (\sigma,\tau)$, mais d'abord nous devons rapidement vérifier que $\pi_1 \sim \pi_0$. Pour $i = 1,\dots,k$ nous avons

$$(\sigma^{-1}\circ\tau^{-1}\circ\pi_0)(i) = \sigma^{-1}\big(\pi_0(i)\big) \in \pi_0\{1,\dots,k\}. \tag{10.743}$$

Même raisonnement pour $i = k+1,\dots,k+l$, et nous déduisons que $\pi_1 \sim \pi_0$.

En utilisant la définition 10.735, pour $i \in \pi_0\{1,\dots,k\}$ nous avons

$$\begin{aligned}\sigma^{(\pi_1,\pi_0)}(i) &= (\pi_0\pi_1^{-1})(i) && (10.744a)\\ &= (\pi_0\pi_0^{-1}\tau\sigma)(i) && (10.744b)\\ &= (\tau\sigma)(i) && (10.744c)\\ &= \sigma(i). && (10.744d)\end{aligned}$$

Pour la dernière ligne, nous savons que $\sigma \in S_P$ et donc que $\sigma(i) \in P$, ce qui permet de dire que $\tau\big(\sigma(i)\big) = \sigma(i)$.

Nous avons donc une bijection $A(\pi_0) \to S_P \times S_Q$. Vu que P contient k élément et que Q en contient l, nous avons aussi une bijection $A(\pi_0) \to S_k \times S_l$.

(4) **Cardinal de $A(\pi_0)$** Par ce que nous venons de dire, nous pouvons écrire

$$\text{Card}(\pi_0) = k!l!, \tag{10.745}$$

et je vous prie de remarquer que cela ne dépend pas de π_0. Toutes les classes d'équivalence ont même cardinal.

(5) **Développer le produit extérieur** Développons le produit extérieur. Nous avons

$$(T \wedge S) = \frac{1}{k!l!}\sum_{\pi\in S_{l+k}} \epsilon(\pi)(T\otimes S)^\pi = \frac{1}{k!l!}\sum_{A\in S_{k+l}/\sim}\sum_{\pi\in A}\epsilon(\pi)(T\otimes S)^\pi. \tag{10.746}$$

Nous sélectionnons $\pi_0 \in S_{k+l}$ et nous regardons plus en détail la somme sur $A(\pi_0)$. Nous allons montrer que tous les éléments de la somme

$$\sum_{\pi\in A(\pi_0)} \epsilon(\pi)(T\otimes S)^\pi \tag{10.747}$$

sont égaux, et qu'il y a $k!l!$ tels éléments.

(6) **Un élément de la somme** Soient $\pi_0 \in S_{k+l}$ et $\pi \in A(\pi_0)$. Nous utilisons encore (10.737) : $\pi_0 = \tau^{(\pi,\pi_0)} \circ \sigma^{(\pi,\pi_0)} \circ \pi$. Nous allons provisoirement arrêter d'écrire les exposant ; nous écrivons σ pour $\sigma^{(\pi,\pi_0)}$. Donc

$$\begin{aligned}(T\otimes S)^{\pi_0}(v_1,\dots,v_{k+l}) &= T\big(v_{\tau\sigma\pi(1)},\dots,v_{\tau\sigma\pi(k)}\big)S\big(v_{\tau\sigma\pi(k+1)},\dots,v_{\tau\sigma\pi(k+l)}\big) && (10.748a)\\ &= T\big(v_{\sigma\pi(1)},\dots,v_{\sigma\pi(k)}\big)S\big(v_{\tau\pi(k+1)},\dots,v_{\tau\pi(k+l)}\big). && (10.748b)\end{aligned}$$

Pour le premier facteur $i = 1,\dots,k$, nous avons $(\tau\sigma\pi)(i) = (\sigma\pi)(i)$. Nous introduisons $\sigma' = \pi^{-1}\circ\sigma\circ\pi|_{\{1,\dots,k\}}$. Avec tout ce que nous avons fait, $\sigma' \in S_k$, et il est donc légitime de regarder ce que fait $T^{\sigma'}$. Notez qu'il n'est pas légitime de regarder T^σ ; bref. Nous avons, par la formule (10.730) :

$$T^{\sigma'}(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}) = T\big(v_{\pi\sigma'(1)},\dots,v_{\pi\sigma'(k)}\big) = T\big(v_{\sigma\pi(1)},v_{\sigma\pi(k)}\big). \tag{10.749}$$

Cela nous permet de réexprimer le premier facteur de (10.748b). Pour le second nous faisons le même genre de choses en introduisant $\tau' :$

$$\begin{aligned}(T\otimes S)^{\pi_0}(v_1,\dots,v_{k+l}) &= T^{\sigma'}(v_{\pi(1),\dots,v_{\pi(k)}})S^{\tau'}\big(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)}\big) && (10.750a)\\ &= \epsilon(\sigma')\epsilon(\tau')T\big(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}\big)S\big(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)}\big) && (10.750b)\\ &= \epsilon(\sigma')\epsilon(\tau')(T\otimes S)^\pi(v_1,\dots,v_{k+l}). && (10.750c)\end{aligned}$$

(7) **Signature** Vu que σ est l'identité sur $\pi\{k+1,\dots,k+l\}$, et vu que $\sigma' = \pi^{-1}\circ\sigma\circ\pi$, nous avons

$$\epsilon(\sigma') = \epsilon(\pi^{-1}\sigma\pi) = \epsilon(\sigma) \tag{10.751}$$

parce que ϵ est un morphisme.

Comme toujours, nous avons $\epsilon(\tau') = \epsilon(\tau)$ pour la même raison.

Nous avons $\pi_0 = \tau\circ\sigma\circ\pi$, et donc

$$\epsilon(\pi_0) = \epsilon(\tau)\epsilon(\sigma)\epsilon(\pi), \tag{10.752}$$

et en repartant de (10.750),

$$\epsilon(\pi_0)(T\otimes S)^{\pi_0} = \epsilon(\pi_0)\epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)(T\otimes S)^\pi = \epsilon(\pi)(T\otimes S)^\pi. \tag{10.753a}$$

(8) **Résumé** Jusqu'à présent nous avons prouvé que pour tout $\pi \in A(\pi_0)$,

$$\epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi} = \epsilon(\pi_0)(T \otimes S)^{\pi_0}. \tag{10.754}$$

(9) **Utilisation des classes** Nous repartons de (10.746). Pour chaque classe $A \in S_{k+l}/\sim$, nous choisissons un représentant $\pi_A \in A$. Pour tout $\pi \in A$ nous avons $\epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi} = \epsilon(\pi_A)(T \otimes S)^{\pi_A}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}(T \wedge S) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{A \in S_{k+l}/\sim} \sum_{\pi \in A} \epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi} && (10.755a)\\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{A \in S_{k+l}/\sim} \sum_{\pi \in A} \epsilon(\pi_A)(T \otimes S)^{\pi_A} && (10.755b)\\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{A \in S_{k+l}/\sim} k!l!\epsilon(\pi_A)(T \otimes S)^{\pi_A} && (10.755c)\\ &= \sum_{A \in S_{k+l}/\sim} \epsilon(\pi_A)(T \otimes S)^{\pi_A}. && (10.755d)\end{aligned}$$

(10) **Conclusion** Chaque classe $A \in S_{k+l}/\sim$ contient un unique élément de $S_{(k,l)}$. Il suffit de prendre celui-là comme choix de π_A. Et nous avons finalement

$$T \wedge S = \sum_{\pi \in S_{(k,l)}} \epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi}, \tag{10.756}$$

comme annoncé.

□

10.15.12 Produit intérieur

DEFooFWIHooJiTnwM

Définition 10.263.
*Si $v \in V$ et si $T \in \bigwedge^k V^*$, nous définissons le **produit intérieur** $i_v \colon \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k-1} V^*$ par*

$$(i_v T)(X_1, \dots, X_{k-1}) = T(v, X_1, \dots, X_{k-1}). \tag{10.757}$$

PROPooETGJooMjxAFp

Proposition 10.264 ([1]).
Soit $\omega \in \bigwedge^k V^*$. L'application

$$\begin{aligned} f \colon V &\to \bigwedge^{k-1} V^* \\ v &\mapsto i_v(\omega) \end{aligned} \tag{10.758}$$

est linéaire.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\begin{aligned} i_{\lambda v}(\omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) &= \omega(\lambda v, v_1, \dots, v_{k-1}) && (10.759a)\\ &= \lambda\omega(v, v_1, \dots, v_{k-1}) && (10.759b)\\ &= \lambda i_v(\omega)(v_1, \dots, v_{k-1}). && (10.759c)\end{aligned}$$

Le même genre de vérifications montre que

$$i_{v+w}(\omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) = i_v(\omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) + i_w(\omega)(v_1, \dots, v_{k-1}). \tag{10.760}$$

□

Le lemme suivant donne les coordonnées de $i_v(\omega)$ en fonction de celles de ω.

LEMooOBUVooBHpDZX

Lemme 10.265 ([1]).
Soient $v \in \mathbb{R}^n$ et $\omega \in \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*$. Nous supposons que

$$\omega = \sum_{I=(i_1,\dots,i_k)} \omega_I e^*_{\otimes I} \tag{10.761}$$

et

$$i_v(\omega) = \sum_{J=(j_1,\dots,j_{k_1})} \omega'_J e^*_{\otimes J}. \tag{10.762}$$

Alors

$$\omega'_J = \sum_{i=1}^{n} \omega_{iJ} v_i. \tag{10.763}$$

Démonstration. Soient des vecteurs $v_2, \dots, v_k$. En ce qui concerne la somme sur J, nous notons le multiindice $J = (j_2, \dots, j_k)$ au lieu de $J = (j_1, \dots, j_{k-1})$ pour que ce soit plus simple plus bas :

$$\omega'(v_2, \dots, v_k) = \sum_{J=(j_2,\dots,j_k)} \omega'_J e^*_{\otimes J}(v_2, \dots, v_k) = \sum_{J=(j_2,\dots,j_k)} \omega'_J (v_2)_{j_1} \dots (v_k)_{j_{k-1}}. \tag{10.764}$$

et

$$\begin{aligned}
i_v(\omega)(v_2, \dots, v_k) &= \omega(v, v_2, \dots, v_k) && (10.765a)\\
&= \sum_I \omega_I e^*_{\otimes I}(v, v_2, \dots, v_k) && (10.765b)\\
&= \sum_I v_{i_1} (v_2)_{i_2} \dots (v_k)_{i_k} && (10.765c)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{J=(j_2,\dots,j_k)} \omega_{iJ} v_i (v_2)_{j_2} \dots (v_k)_{j_k} && \text{cf. justif.} \quad (10.765d)\\
&= \sum_J \big(\sum_i \omega_{iJ} v_i \big) (v_2)_{j_2} \dots (v_k)_{j_{k-1}} && \text{cf. justif} \quad (10.765e)
\end{aligned}$$

Justifications.

- Pour (10.765d). Nous décomposons la somme sur $I = (i_1, \dots, i_k)$ en une somme sur le premier élément (que nous nommons i) et une somme sur les autres (que nous nommons $J = (j_2, \dots, j_k)$). Dans la notation ω_{iJ}, le iJ signifie le multiindice $(i, j_2, \dots, j_k)$.
- Pour (10.765e). Permuter les sommes.

Vu que $i_v(\omega) = \omega'$, en comparant (10.764) avec (10.765), nous trouvons

$$\omega'_J = \sum_i \omega_{iJ} v_i \tag{10.766}$$

comme il le fallait. □

Proposition 10.266 (Règle de Leibniz pour le produit extérieur[59, 1])**.**
Soient $T \in \Lambda^k V^*$ et $S \in \Lambda^l V^*$. Pour tout $v \in V$ nous avons

$$i_v(T \wedge S) = (i_v T) \wedge S + (-1)^k T \wedge (i_v S). \tag{10.767}$$

Démonstration. Pour des soucis de lisibilité nous notons v_1 pour v et nous calculons en utilisant l'expression du lemme 10.262 pour le produit extérieur :

$$i_{v_1}(T \wedge S)(v_2, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\pi \in S_{(k,l)}} \epsilon(\pi) T\big(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}\big) S\big(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}\big). \tag{10.768}$$

Vu que les éléments de $\pi \in S_{(k,l)}$ ordonnent séparément $\{\pi(1), \dots, \pi(k)\}$ et $\{\pi(k+1), \dots, \pi(k+l)\}$, la valeur de $\pi^{-1}(1)$ est soit 1 soit $k+1$. Nous définissons donc deux parties :

$$\begin{aligned}
A_{(k,l)} &= \{\pi \in S_{(k,l)} \text{ tel que } \pi(1) = 1\} && (10.769a)\\
B_{(k,l)} &= \{\pi \in S_{(k,l)} \text{ tel que } \pi(k+1) = 1\}. && (10.769b)
\end{aligned}$$

Ces parties ont déjà été introduites et étudiées dans la définition 1.302 et le lemme 1.303. Nous poursuivons (10.768) :

$$\begin{aligned}
i_{v_1}(T \wedge S)(v_2, \dots, v_{k+l}) = &\sum_{\pi \in A} \epsilon(\pi) T\big(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}\big) S\big(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}\big)\\
&+ \sum_{\pi \in B} \epsilon(\pi) T\big(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}\big) S\big(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}\big)
\end{aligned} \tag{10.770}$$

(1) **Première somme, sur $A_{k,l}$** Nous nous concentrons maintenant sur la première somme, c'est-à-dire les termes avec $\pi(1)=1$.

$$\begin{aligned}\sum_{\pi\in A}&\epsilon(\pi)T(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})S(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)})\\&=\sum_{\pi\in A}\epsilon(\pi)(i_{v_1}T)(v_{\pi(2)},\dots,v_{\pi(k)})S\big(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)}\big).\end{aligned}\tag{10.771}$$

C'est le moment de profiter des lemmes 1.302 et 1.306 pour changer la somme. Nous notons

$$f(\pi)=\epsilon(\pi)(i_{v_1}T)(v_{\pi(2),\dots,v_{\pi(k)}})S\big(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)}\big),\tag{10.772}$$

et nous considérons la bijection $\varphi\colon A_{(k,l)}\to S_{(k-1,l)}$. Nous avons aussi $\varphi^{-1}(\tau)i=\tau(i-1)+1$. Et donc, en posant $w_j=v_{j+1}$ pour y voir plus clair :

$$\begin{aligned}f\big(\varphi^{-1}(\tau)\big)&=\epsilon\big(\varphi^{-1}(\tau)\big)(i_{v_1}T)\big(v_{\tau(1)+1},\dots,v_{\tau(k-1)+1}\big)S\big(v_{\tau(k)+1},\dots,v_{\tau(k+l-1)+1}\big)&\text{(10.773a)}\\&=\epsilon(\tau)(i_{v_1}T)\big(w_{\tau(1)},\dots,w_{\tau(k-1)}\big)S\big(w_{\tau(k)},\dots,w_{\tau(k+l-1)}\big)&\text{(10.773b)}\\&=\big(i_{v_1}T\otimes S\big)\big(w_{\tau(1)},\dots,w_{\tau(k+l-1)}\big)&\text{(10.773c)}\\&=\big(i_{v_1}T\otimes S\big)^{\tau}(w_1,\dots,w_{k+l-1})&\text{(10.773d)}\\&=\big(i_{v_1}T\otimes S\big)^{\tau}(v_2,\dots,v_{k+l})&\text{(10.773e)}\end{aligned}$$

En remettant dans la somme et en utilisant le lemme 1.306, SUBEQSooSDMCooHmPCZr

$$\begin{aligned}\sum_{\pi\in A}f(\pi)&=\sum_{\tau\in S_{(k-1,l)}}f\big(\varphi^{-1}(\tau)\big)&\text{(10.774a)}\\&=\sum_{\tau\in S_{(k-1,l)}}\big(i_{v_1}T\otimes S\big)^{\tau}(v_2,\dots,v_{l+l})&\text{(10.774b)}\\&=(i_{v_1}T\wedge S)(v_2,\dots,v_{k+l})&\text{(10.774c)}\end{aligned}$$

Cela est déjà le premier terme de (10.767).

(2) **Seconde somme, sur $B_{(k,l)}$** Nous étudions maintenant la somme sur $B_{(k,l)}$ dans (10.770). Nous posons encore

$$f(\pi)=\epsilon(\pi)T\big(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}\big)S\big(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)}\big).\tag{10.775}$$

Nous utilisons la bijection $\varphi\colon B_{(k,l)}\to S_{(k,l-1)}$ du lemme 10.260

$$\sum_{\pi\in B_{(k,l)}}f(\pi)=\sum_{\tau\in S_{(k,l-1)}}f\big(\varphi^{-1}(\tau)\big).\tag{10.776}$$

Nous avons d'abord $\epsilon\big(\varphi^{-1}(\tau)\big)=(-1)^k\epsilon(\tau)$. Ensuite, pour $j=1,\dots,k$ nous avons $\varphi^{-1}(\tau)j=\tau(j)+1$. Donc

$$T\big(v_{\varphi^{-1}(\tau)1},\dots,v_{\varphi^{-1}(\tau)k}\big)=T\big(v_{\tau(1)+1},\dots,v_{\tau(k)+1}\big).\tag{10.777}$$ EQooRVUBooGsYfNE

Ça, c'était la partie pas très subtile. Nous devons maintenant voir la partie avec S, c'est-à-dire déterminer en termes de τ les valeurs de $\big(\varphi^{-1}(\tau)(k+1),\dots,\varphi^{-1}(\tau)(k+l)\big)$.

Pour la suite, soyez attentifs à la distinction entre des égalités d'ensembles du type $\{a,b\}=\{c,d\}$ qui signifie que a est c ou d et que b est l'autre et les égalités de vecteurs du type $(a,b)=(c,d)$ qui signifie $a=c$ et $b=d$.

Vu que $\varphi^{-1}(\tau)$ est une bijection, nous avons $\varphi^{-1}(\tau)\{1,\dots,k+l\}=\{1,\dots,k+l\}$. Et nous avons déjà vu que

$$\varphi^{-1}(\tau)(1,\dots,k)=\big(\tau(1)+1,\dots,\tau(k)+1\big).\tag{10.778}$$

Mais par ailleurs, vu que τ prend ses valeurs dans $\{1,\dots,k+l-1\}$, nous avons

$$\{1,\dots,k+1\}=\{1,\tau(1)+1,\dots,\tau(k+l-1)+1\}.\tag{10.779}$$

Nous avons donc

$$\varphi^{-1}(\tau)\{k+1,\dots,k+l\}=\{1,\tau(k+1)+1,\dots,\tau(k+l-1)+1\},\tag{10.780}$$

et comme les valeurs de τ sont ordonnées, nous avons même l'égalité de vecteurs

$$\varphi^{-1}(\tau)(k+1,\dots,k+l)=\big(1,\tau(k+1)+1,\dots,\tau(k+l-1)+1\big).\tag{10.781}$$

En utilisant cela,

$$\begin{aligned}S\big(v_{\varphi^{-1}(\tau)(k+1)},\dots,v_{\varphi^{-1}(\tau)(k+l)}\big)&=S\big(v_1,v_{\tau(k+1)+1},\dots,v_{\tau(k+l-1)+1}\big)&(10.782a)\\&=(i_{v_1}S)\big(w_{\tau(k+1)},\dots,w_{\tau(k+l-1)}\big)&(10.782b)\end{aligned}$$

où nous avons posé $w_j=v_{j+1}$.
En écrivant aussi (10.777) en termes de w, nous avons

$$\begin{aligned}f\big(\varphi^{-1}(\tau)\big)&=(-1)^k\epsilon(\tau)T\big(w_{\tau(1)},\dots,w_{\tau(k)}\big)(i_{v_1}S)\big(w_{\tau(k+1)},\dots,w_{\tau(k+l-1)}\big)&(10.783a)\\&=(-1)^k\epsilon(\tau)(T\otimes i_{v_1}S)\big(w_{\tau(1)},\dots,w_{\tau(k+l-1)}\big)&(10.783b)\\&=(-1)^k\epsilon(\tau)(T\otimes i_{v_1}S)^\tau(w_1,\dots,w_{k+l-1})&(10.783c)\\&=(-1)^k\epsilon(\tau)(T\otimes i_{v_1}S)^\tau(v_2,\dots,v_{k+l}).&(10.783d)\end{aligned}$$

Et au final, en utilisant l'expression (10.732b) du produit extérieur, EQooOCIZooXZrqiQ

$$\begin{aligned}\sum_{\pi\in B_{(k,l)}}f(\pi)&=(-1)^k\sum_{\tau\in S_{(k,l-1)}}\epsilon(\tau)(T\otimes i_{v_1}S)^\tau(v_2,\dots,v_{k+l})&(10.784a)\\&=(-1)^k(T\wedge i_{v_1}S)(v_2,\dots,v_{k+l}).&(10.784b)\end{aligned}$$

(3) **Conclusion** Les deux termes de (10.770) sont (10.774) et (10.784). Nous avons donc finalement

$$i_{v_1}(T\wedge S)(v_2,\dots,v_{k+l})=(i_{v_1}T\wedge S)(v_2,\dots,v_{k+l})+(-1)^k(T\wedge i_{v_1}S)(v_2,\dots,v_{k+l}),\tag{10.785}$$

comme demandé.

□

10.15.13 Pull back

Définition 10.267.
Si $f\colon W\to V$ est linéaire, nous définissons le ***pull back*** $f^*\colon \bigwedge^k V^*\to\bigwedge^k W^*$ *par*

$$(f^**T)(w_1,\dots,w_k)=T\big(f(w_1),\dots,f(w_k)\big).\tag{10.786}$$

Proposition 10.268 ([59]).
Pour toute application linéaire $f\colon W\to V$ nous avons

$$f^*(T\wedge S)=(f^*T)\wedge(f^*S).\tag{10.787}$$

Démonstration. Soient $T\in\bigwedge^k V^*$ et $S\in\bigwedge^l V^*$. En déballant les définitions, nous avons

$$\begin{aligned}f^*(T\wedge S)(v_1,\dots,v_k)&=(T\wedge S)\big(f(v_1),\dots,f(v_{k+k})\big)&(10.788a)\\&=\frac{(k+k)!}{k!l!}\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_{k+k}}(-1)^\pi(T\otimes S)^\pi\big(f(v_1),\dots,f(v_k+l)\big)&(10.788b)\\&=\frac{(k+k)!}{k!l!}\frac{1}{k!}&(10.788c)\\&\quad\sum_{\pi\in S_{k+k}}(-1)^\pi T\big(f(v_{\pi(1)}),\dots,f(v_{\pi(k)})\big)S\big(f(v_{\pi(k+1)}),\dots,f(v_{\pi(k+l)})\big)\\&=\frac{(k+k)!}{k!l!}\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_{k+k}}(f^*T)(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})(f^*S)(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)})&(10.788d)\\&=\frac{(k+k)!}{k!l!}\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_{k+k}}(f^*T)\otimes(f^*S)(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k+l)})&(10.788e)\\&=(f^*T)\wedge(f^*S)(v_1,\dots,v_{k+l}).&(10.788f)\\&&(10.788g)\end{aligned}$$

□

10.15.14 Norme

Nous considérons des espaces vectoriels V et W de dimension finie. L'application (10.612) donne un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned}\psi\colon V\otimes W&\to\mathcal{L}(V^*,W)\\ v\otimes w&\mapsto\big(\alpha\mapsto\alpha(v)w\big).\end{aligned}\tag{10.789}$$

Et ça, c'est très bien, parce que nous connaissons une norme sur $\mathcal{L}(V^*,W)$: la norme opérateur 10.67.

DEFooEXXNooMgIpSV

Définition 10.269 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés de dimension finie V et W. Sur $V\otimes W$ nous définissons, pour $t\in V\otimes W$

$$\|t\|=\|\psi(t)\|_{\mathcal{L}(V^*,W)}.\tag{10.790}$$

LEMooQPXHooJWfpmk

Lemme 10.270 ([1]).
La norme sur $V\otimes W$ vérifie

$$\|v\otimes w\|=\|v\|\|w\|\tag{10.791}$$

pour tout $v\in V$ et $w\in W$.

Démonstration. C'est un simple(?) calcul :

$$\|v\otimes w\|=\|\psi(v\otimes w)\|=\|\alpha\mapsto\alpha(v)w\|=\sup_{\|\alpha\|=1}\|\alpha(v)w\|=\sup_{\|\alpha\|=1}|\alpha(v)|\|w\|.\tag{10.792}$$

Étant donné que V est de dimension finie, $\sup_{\|\alpha\|=1}|\alpha(v)|=\|v\|$[112]. Nous avons donc

$$\|v\otimes w\|=\|v\|\|w\|.\tag{10.793}$$

□

Le lemme suivant montre que $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$ n'est pas du tout $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$. Au contraire, $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

LEMooVONEooQpPgcn

Lemme 10.271 ([1]).
L'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ 1\otimes1&\mapsto1\end{aligned}\tag{10.794}$$

prolongée par linéarité est un isomorphisme isométrique.

Démonstration. D'abord une base de $\mathbb{R}$ est $\{1\}$; donc une base de $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$ est $\{1\otimes1\}$ par la proposition 10.215. Donc l'application proposée se prolonge par linéarité à tout $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$.

Le fait que φ soit une bijection provient du fait que φ transforme une base en une base ; si vous n'y croyez pas, la vérification de l'injectivité et de la surjectivité est facile.

Pour que φ soit isométrique, nous faisons le calcul

$$\|\varphi(x\otimes y)\|=\|xy(1\otimes1)\|=|xy|\|1\otimes1\|=|xy|=\|x\otimes y\|.\tag{10.795}$$

Nous avons utilisé la propriété 7.212(3) d'une norme ainsi que le lemme 10.270 pour la norme sur $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$. □

10.15.15 Applications bilinéaires, matrices et produit tensoriel

SECooUKRYooZjagcX

Soit E, un espace vectoriel de dimension finie. Si α et β sont deux formes linéaires sur un espace vectoriel E, nous définissons $\alpha\otimes\beta$ comme étant la 2-forme donnée par

EQooUNRYooKBrXyK

$$(\alpha\otimes\beta)(u,v)=\alpha(u)\beta(v).\tag{10.796}$$

Si a et b sont des vecteurs de E, ils sont vus comme des formes sur E via le produit scalaire et nous avons

$$(a\otimes b)(u,v)=(a\cdot u)(b\cdot v).\tag{10.797}$$

Cette dernière équation nous incite à pousser un peu plus loin la définition de $a\otimes b$ et de simplement voir cela comme la matrice de composantes

$$(a\otimes b)_{ij}=a_ib_j.\tag{10.798}$$

Cette façon d'écrire a l'avantage de ne pas demander de se souvenir qui est un vecteur ligne, qui est un vecteur colonne et où il faut mettre la transposée. Évidemment $(a\otimes b)$ est soit ab^t soit a^tb suivant que a et b soient ligne ou colonne.

[112] Cela est une des raisons pour lesquelles nous sommes en dimension finie : je ne sais pas si cette égalité est vraie en dimension inifinie.

10.15.16 Application d'opérateurs

LemMyKPzY

Lemme 10.272.
Soient $x, y \in E$ et A, B deux opérateurs linéaires sur E vus comme matrices. Alors

$$(Ax \otimes By) = A(x \otimes y)B^t. \tag{10.799}$$

EqXdxySu

Démonstration. Calculons la composante ij de la matrice $(Ax \otimes By)$. Nous avons

$$\begin{aligned}(Ax \otimes By)_{ij} &= (Ax)_i(By)_j && (10.800a)\\ &= \sum_{kl} A_{ik}x_kB_{jl}y_l && (10.800b)\\ &= A_{ik}(x \otimes y)_{kl}B_{jl} && (10.800c)\\ &= \big(A(x \otimes y)B^t\big)_{ij}. && (10.800d)\end{aligned}$$

□

Le fait que les applications linéaires soient continues[113] est valable dans une assez large gamme d'espaces vectoriels[404]. Nous voyons ici dans le cas des espaces vectoriels normés de dimension finies.

PROPooADPDooOtukQP

Proposition 10.273.
Soient des espaces vectoriels normés E et F. Si $f : E \to F$ est une application linéaire et si E est de dimension finie, alors f est continue.

Démonstration. La proposition 10.68 nous dit que $\|f\| < \infty$, c'est-à-dire que f est borné. Donc la proposition 10.85 conclut. □

LemWWXVSae

Lemme 10.274.
Soit F un espace de Banach et deux suites $A_k \to A$ et $B_k \to B$ dans $\mathcal{L}(F, F)$. Alors $A_k \circ B_k \to A \circ B$ dans $\mathcal{L}(F, F)$, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to\infty}(A_kB_k) = \left(\lim_{k\to\infty} A_k\right)\left(\lim_{k\to\infty} B_k\right). \tag{10.801}$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\|A_kB_k - AB\| \leqslant \|A_kB_k - A_kB\| + \|A_kB - AB\|. \tag{10.802}$$

Le premier terme tend vers zéro pour $k \to \infty$ parce que

$$\begin{aligned}\|A_kB_k - A_kB\| &= \|A_k(B_k - B)\| && (10.803a)\\ &\leqslant \|A_k\|\|B_k - B\| \to \|A\| \cdot 0 && (10.803b)\\ &= 0 && (10.803c)\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété fondamentale de la norme opérateur : la proposition 10.85. Le second terme tend également vers zéro pour la même raison. □

10.15.17 Convergence en norme et par composante

En dimension infinie, la convergence en norme et la convergence composante par composante ne s'impliquent ni dans un sens ni dans l'autre.

L'exemple suivant devrait être formalisé dans l'espace ℓ^2 des suites de carré sommable, mais vous voyez l'idée.

Exemple 10.275.
Nous considérons l'ensemble des suites réelle munie de la norme $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^2}$. Dedans nous considérons les vecteurs de base e_i donnés par

$$(e_i)_n = \delta_{in}. \tag{10.804}$$

Ensuite nous considérons la base

$$f_i = e_1 + \frac{1}{2^i}e_i. \tag{10.805}$$

La suite $x_n = f_n - f_1$, dans cette base a toujours -1 comme première composante[114]. Et pourtant elle converge en norme vers 0. △

[113] Proposition 10.85.
[114] N'essayez pas de faire un dessin : ça ne fonctionne qu'en dimension infinie.

10.16 Calcul différentiel dans un espace vectoriel normé

10.16.1 Limite de fonctions

La limite de fonctions est la définition 7.135.

LEMooTFLVooMMNmQr

Lemme 10.276.
Soient deux espaces vectoriels normés V et E sur le corps $\mathbb{K}$. Si $f\colon V\to E$ est constante, $f(x)=u$ pour tout $x\in V$, alors pour tout $a\in V$, nous avons la limite $\lim_{x\to a} f(x)=u$.

PROPooBHHCooPbRggh

Proposition 10.277.
Soient deux espaces vectoriels normés V et E. Soient deux fonctions $f,g\colon V\to E$. Nous supposons que $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ et $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$. Alors

ITEMooDPBHooKRccPZ

(1) Si $\lambda\in\mathbb{K}$, alors $\lim_{x\to a}\big(f(x)+\lambda\big)=\alpha+\mu$.

ITEMooDKJPooMynOcG

(2) La fonction $f+g$ a une limite $x\to a$ qui vaut $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\alpha+\beta$,

(3) La fonction fg a une limite en a, qui vaut $\lim_{x\to a}(fg)(x)=\alpha\beta$,

LEMooYJGLooVBaglB

Lemme 10.278.
Soient un espace vectoriel normé E ainsi qu'une fonction $f\colon\mathbb{R}\to E$ telle que $\lim_{t\to 0} f(t)=v$. Alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ nous avons

$$\lim_{t\to 0} f(\lambda t)=v. \tag{10.806}$$

Démonstration. Petite clarification pour commencer : E est normé et donc séparé. La proposition 7.138 nous dit que la limite est unique ; nous voilà rassurés sur ce point. Ensuite nous utilisons la définition 7.135 de la limite.

Nous posons $g(t)=f(\lambda t)$. Soit un ouvert V autour de v dans E. Par l'hypothèse de limite pour f, il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que $f\big(U\setminus\{0\}\big)\subset V$.

En posant $U'=U/\lambda$, nous avons bien $g\big(U'\setminus\{0\}\big)\subset V$. En effet si $t\in U'\setminus\{0\}$, il existe $x\in U\setminus\{0\}$ tel que $t=x/\lambda$ et donc $g(t)=g(x/\lambda)=f(x)\in V$. □

10.16.2 Définition de la différentielle

Quelques motivations pour la notion de différentielle sont données dans 12.25.1.

DefDifferentiellePta

Proposition-Définition 10.279 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés[115] de dimension finie E et F ainsi qu'une fonction $f\colon\mathcal{U}\to F$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de E. Si il existe une application linéaire $T\in\mathcal{L}(E,F)$ satisfaisant

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in E}}\frac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{\|h\|_E}=0, \tag{10.807}$$

EqCritereDefDiff

alors il en existe une seule.

*Dans ce cas nous disons que f est **différentiable au point** a et l'application T ainsi définie est appelée **différentielle** de f au point a, et nous la notons df_a.*

Démonstration. Soient deux applications linéaires T_1, T_2 satisfaisant la condition (10.807). Nous avons

$$\frac{\|T_1(h)-T_2(h)\|_F}{\|h\|_E}\leqslant\frac{\|T_1(h)-f(a+h)+f(a)\|}{\|h\|}+\frac{\|f(a+h)-f(a)-T_2(h)\|}{\|h\|}\to 0. \tag{10.808}$$

Nous avons donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|(T_1-T_2)(h)\|_F}{\|h\|_E}=0. \tag{10.809}$$

Soit $\epsilon>0$. Ce que signifie la limite est qu'il existe un $r>0$ tel que pour tout $u\in B_E(0,r)$, nous ayons

$$\frac{\|(T_1-T_2)(u)\|_F}{\|u\|_E}<\epsilon. \tag{10.810}$$

Soit $v\in E$. Nous considérons $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\lambda v\in B(0,r)$, par exemple $\lambda<r/\|v\|$. Nous avons

$$\epsilon>\frac{\|(T_1-T_2)(\lambda v)\|_F}{\|\lambda v\|_E}=\frac{\|(T_1-T_2)(v)\|}{\|v\|}. \tag{10.811}$$

[115] Définition 7.212.

Cela donne

$$\|(T_1 - T_2)(v)\| < \|v\|\epsilon. \tag{10.812}$$

Nous avons donc $\|(T_1 - T_2)(v)\| = 0$, soit $T_1(v) = T_2(v)$. □

L'application différentielle

$$\begin{aligned} df\colon E &\to \mathcal{L}(E,F) \\ a &\mapsto df_a \end{aligned} \tag{10.813}$$

est également très importante.

10.16.3 Pas en dimension infinie

Pourquoi ne pas définir la différentielle en dimension infinie[1] ? Dans le cas d'une application linéaire, en posant $T = f$, nous avons toujours la limite (10.807). Autrement dit, une application linéaire est toujours différentiable. Mais si f n'est pas bornée (et donc pas continue en dimension infinie), la limite (10.807) n'implique pas la continuité, parce qu'il n'y a pas de garanties sur la valeur de

$$\lim_{h\to 0} \|T(h)\|. \tag{10.814}$$

Autrement dit, nous pourrions avoir des fonctions différentiables non continues. Pour cela, nous nous abstenons de définir la différentielle d'une application dans le cas de dimension infinie.

10.16.4 Dérivée directionnelle

DEFooCATTooTPLtpR

Définition 10.280 (Dérivée directionnelle)**.**
*Soient des espaces vectoriels normés V et E. Soient une application $f\colon V \to E$ et $u \in V$. La **dérivée directionnelle** de f en $a \in V$ dans la direction u est l'élément de E défini par*

$$(\partial_u f)(a) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(a+\epsilon u) - f(a)}{\epsilon} \tag{10.815}$$

pourvu que la limite existe.

*Soient f une application de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^m$. La fonction f est **dérivable sur U suivant le vecteur** u, si f est dérivable suivant le vecteur u en tout point de U.*

DEFooOYFZooFWmcAB

Définition 10.281 (Dérivée)**.**
*Soit une application $f\colon \mathbb{R} \to V$ où V est un espace vectoriel normé. La **dérivée** de f en $a \in \mathbb{R}$ est le nombre*

$$f'(a) = (\partial_1 f)(a) \tag{10.816}$$

où ∂_1 est la dérivée directionnelle définie en 10.280.

*Dans le cas où la limite définissant $f'(a)$ existe, nous disons que la fonction f est dérivable en a. La **fonction dérivée** de f est*

$$\begin{aligned} f'\colon A' &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto f'(a) \end{aligned} \tag{10.817}$$

définie sur l'ensemble noté A' des points a où f est dérivable.

10.282.
En ce qui concerne les notations, si une base $\{e_i\}$ de V est donnée, nous notons $\partial_i f$ la dérivée de f dans la direction de e_i. La fonction $\partial_i f$ est la **dérivée partielle** de f. Dans le cas de $V = \mathbb{R}^n$, cela est souvent noté

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{d}{dt}\Big[f(a + te_i)\Big]_{t=0}. \tag{10.818}$$

10.283.
Même si une fonction est dérivable en un point dans toutes les directions, on n'est pas sûr qu'elle soit continue en ce point. La dérivabilité directionnelle n'est donc pas une notion suffisante pour assurer la continuité. C'est pourquoi on introduit le concept de *différentiabilité*.

Remarque 10.284.
De nombreuses sources parlent de dérivée **dans la direction** du vecteur v en définissant (avec une certaine raison) une **direction** dans $\mathbb{R}^m$ comme étant un vecteur de norme 1.

Ces personnes ne définissent alors $\partial_u f$ que pour $\|u\| = 1$. Pourquoi ? Le but de la dérivée directionnelle dans la direction u est de savoir à quelle vitesse la fonction monte lorsque l'on se déplace en suivant la

direction u. Cette information n'aura un caractère « objectif » que si l'on avance à une vitesse donnée. En effet, si on se déplace deux fois plus vite, la fonction montera deux fois plus vite. Par convention, on demande alors d'avancer à vitesse 1.

Ici, pour être plus souple en termes de notations et de manipulations, nous définissons $\partial_u f$ pour tout u (non nul). Nous devons cependant garder en tête que le nombre $(\partial_v f)(a)$ ne peut pas être interprété comme étant une « vitesse de croissance de f en a » de façon trop sérieuse.

Cas particulier où $n = 2$:

$a = (a_1, a_2)$, $u = (u_1, u_2)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a_1, a_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2) - f(a_1, a_2)}{t} \tag{10.819}$$

Un cas particulier des dérivées directionnelles est la dérivée partielle. Si nous considérons la base canonique e_i de $\mathbb{R}^n$, nous notons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i}. \tag{10.820}$$

Dans le cas d'une fonction à deux variables, nous avons donc les deux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) \tag{10.821}$$

qui correspondent aux dérivées directionnelles dans les directions des axes. Ces deux nombres représentent de combien la fonction f monte lorsqu'on part de a en se déplaçant dans le sens des axes X et Y.

LEMooVOTHooPJcrWH

Lemme 10.285.
Nous notons $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$. Soient une application $f\colon E \to F$ ainsi que $a, u \in E$ tels que $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ existe.

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\partial_{\lambda u} f)(a)$ existe et

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda u)}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial u}(a). \tag{10.822}$$

Démonstration. Nous allons utiliser le lemme 10.278. D'abord nous avons, pour tout t, λ et a :

$$\frac{f(a + t\lambda u) - f(a)}{t} = \lambda \frac{f(a + t\lambda u) - f(a)}{\lambda t}. \tag{10.823}$$

EQooRDUEooScpIZa

En posant $g(t) = \frac{f(a+tu)-f(a)}{t}$ (t est une variable dans $\mathbb{R}$), l'hypothèse est que $\lim_{t\to 0} g(t)$ existe et vaut $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$. Le lemme 10.278 indique que $\lim_{t\to 0} g(\lambda t)$ existe aussi et vaut la même chose. Donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + \lambda tu) - f(a)}{\lambda t} = \frac{\partial f}{\partial u}(a). \tag{10.824}$$

En prenant la limite dans (10.823), nous avons le résultat. □

Exemple 10.286.
Considérons la fonction $f(x, y) = 2xy^2$. Lorsque nous calculons $\partial_x f(x, y)$, nous faisons comme si y était constant. Nous avons donc $\partial_x f(x, y) = 2y^2$. Par contre lors du calcul de $\partial_y f(x, y)$, nous prenons x comme une constante. La dérivée de y^2 par rapport à y est évidemment $2y$, et par conséquent, $\partial_y f(x, y) = 4xy$. △

Pour les fonctions d'une seule variable, la dérivabilité en un point a implique la continuité en a. Cela n'est pas vrai pour les fonctions de plusieurs variables : il existe des fonctions f qui sont dérivables suivant tout vecteur au point a sans pour autant être continue en a.

Exemple 10.287.
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10.825}$$

Pour voir que f n'est pas continue en $(0, 0)$ il suffit de calculer la limite de f restreinte à la parabole $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Pourtant la fonction f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions. En effet, soit $v=(v_1,v_2)$. Si $v_2\neq 0$, alors

$$\partial_v f(a)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{t^3v_1^2v_2}{t^5v_1^4+t^3v_2^2}=\frac{v_1^2}{v_2}, \tag{10.826}$$

EQooXOCWooVbCjRd

tandis que si $v_2=0$, alors la valeur de $f(tv_1,0)$ est 0 pour tout t et v_1, donc la dérivée partielle de f par rapport à x en l'origine existe et est nulle. △

Exemple 10.288.
Pour une fonction réelle à variable réelle, la dérivabilité entraine la continuité. Il n'en va pas de même pour les fonctions à plusieurs variables, comme le montre l'exemple suivant :

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2} & \text{sinon.}\end{cases} \tag{10.827}$$

Nous avons tout de suite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0. \tag{10.828}$$

De plus si $u_x\neq 0$ nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\frac{u_y}{u_x}\|u\|. \tag{10.829}$$

Donc toutes les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$ existent alors que la fonction n'y est manifestement pas continue. En effet sous forme polaire,

$$f(r,\theta)=\frac{r\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \tag{10.830}$$

et quelle que soit la valeur de r, en prenant θ suffisamment proche de $\pi/2$, la fraction peut être arbitrairement grande.

Nous verrons par la proposition 12.277 que la différentiabilité d'une fonction implique sa continuité. △

DEFooWZGTooKCWBJn

Définition 10.289 (gradient)**.**
*Soit une application $f\colon V\to E$ entre deux espaces vectoriels normés. Soient $a\in V$ et une base finie $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de V. Nous définissons le **gradient** de f en a comme étant le vecteur*

$$(\nabla f)(a)=\begin{pmatrix}(\partial_i f)(a)\\ \vdots\\ (\partial_n f)(a).\end{pmatrix} \tag{10.831}$$

PROPooYCLBooOLoDnM

Proposition 10.290.
Soit une application $f\colon V\to E$ entre deux espaces vectoriels normés. Soient $u\in V$, $a\in V$ ainsi qu'une base finie $\{e_i\}_I$ de V. Nous supposons que $(\partial_u f(a))$ et $(\partial_i f)(a)$ existent pour tout $i\in I$. Alors

$$(\partial_u f)(a)=\sum_{i\in I}u_i(\partial_i f)(a)=u\cdot(\nabla f)(a). \tag{10.832}$$

PROPooZOFLooBmcZqN

Proposition 10.291.
Soit une application $f\colon V\to E$ différentiable en $a\in V$. Alors toutes les dérivées directionnelles $(\partial_u f)(a)$ existent et

$$(df_a)(u)=\sum_i(\partial_u f)(a). \tag{10.833}$$

Démonstration. L'hypothèse de différentiabilité de f en a dit que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-df_a(h)}{h}=0. \tag{10.834}$$

Soit $u\in V$. Nous utilisons la proposition 9.99 avec le chemin

$$\begin{aligned}\gamma\colon\ ]-1,1[&\to V\\ t&\mapsto tu.\end{aligned} \tag{10.835}$$

Cela donne :

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)-df_a(tu)}{|t|}=0. \tag{10.836}$$

nous pouvons dire que la limite $t \to 0$ existant, les limites à gauche et à droite existent et sont toutes deux égales à zéro[116]. À partir de

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tu)-f(a)-df_a(tu)}{|t|} = 0, \tag{10.837}$$

en utilisant la linéarité $df_a(tu) = tdf_a(u)$, nous déduisons que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = df_a(u). \tag{10.838}$$

De même à partir de la limite à gauche nous déduisons

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = df_a(u). \tag{10.839}$$

Et maintenant on utilise la proposition 9.115 pour dire que les limites à gauche et à droite existant et étant égales, la limite existe et est égale :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = df_a(u). \tag{10.840}$$

Cela signifie bien que $(\partial_u f)(a) = df_a(u)$. □

PROPooEOXLooNKHGHj

Proposition 10.292 ([1]).
Si $f\colon V \to E$ est une application différentiable et injective, alors pour tout $x \in v$, l'application linéaire $df_x\colon V \to E$ est injective.

10.16.5 Théorème des accroissements finis

Si une fonction est dérivable en a alors elle peut être approximée « au premier ordre » par une formule simple qui sera généralisée pour des dérivées d'ordre supérieurs avec les séries de Taylor, théorème 12.471. Pour trouver des versions avec des dérivations partielles, voir le thème 55.

PropUTenzfQ

Proposition 10.293 (Développement limité au premier ordre).
Soit un espace vectoriel normé E sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si $f\colon \mathbb{R} \to E$ est une fonction dérivable[117]*, alors il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to E$ telle que*

EQooHBDHooPrVjJD

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \alpha(h) & \text{(10.841a)} \\ \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{h} = 0. & \text{(10.841b)} \end{cases}$$

Il existe aussi une fonction $\beta\colon \mathbb{R} \to E$ telle que

EQooPWIZooVuhjmt

SUBEQooMJTJooOpBfqv

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\beta(h) & \text{(10.842a)} \\ \lim_{h\to 0} \beta(h) = 0. & \text{(10.842b)} \end{cases}$$

Démonstration. La fonction f étant dérivable en a nous avons l'existence de la limite suivante :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{10.843}$$

Nous définissons $\beta\colon \mathbb{R} \to E$ par

$$\beta(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a). \tag{10.844}$$

La proposition 10.277(1) donne directement $\lim_{h\to 0} \beta(h) = 0$. En multipliant par h (qui est différent de 0), et en isolant $f(a+h)$, nous avons la formule (10.842a). En nommant $\alpha(h) = h\beta(h)$ nous trouvons la fonction α de la formule (10.841) :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \alpha(h) \tag{10.845}$$

avec

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \beta(h) = 0. \tag{10.846}$$

□

[116] Cela n'est même pas un résultat en plus. C'est la proposition 9.99, avec le chemin γ pris sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1]$ séparément. Sinon, vous pouvez invoquer la proposition 9.115

[117] Définition 10.281.

PROPooPLWZooCGmjfi

Proposition 10.294.
Soient deux espaces vectoriels normés V et E. Soit une application $f\colon V\to E$ dérivable dans le sens de h en $a\in V$. Alors nous avons une application $\beta\colon\mathbb{R}\to E$ telle que

$$\begin{cases} f(a+th)=f(a)+t(\partial_h f)(a)+\beta(t) & (10.847a)\\ \lim_{t\to 0}\beta(t)=0. & (10.847b)\end{cases}$$

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned}\varphi\colon\mathbb{R}&\to E\\ t&\mapsto f(a+th).\end{aligned}\tag{10.848}$$

et nous lui appliquons les accroissements finis de la proposition 10.293 : $\varphi(t)=\varphi(0)+t\varphi'(0)+t\beta(t)$. En ce qui concerne $\varphi'(0)$ nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi'(0)&=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\varphi(\epsilon)-\varphi(0)}{\epsilon} & (10.849a)\\ &=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(a+\epsilon h)-f(a)}{\epsilon} & (10.849b)\\ &=(\partial_h f)(a) & (10.849c)\end{aligned}$$

par la définition 10.280. □

val_medio_1

Théorème 10.295 (Accroissements finis pour les dérivées suivant un vecteur)**.**
Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et soit $f:U\to\mathbb{R}^n$ une fonction. Soient a et b deux points distincts dans U, tels que le segment[118] *$[a,b]$ soit contenu dans U. Soit u le vecteur*

$$u=\frac{b-a}{\|b-a\|_m}.$$

Si $\partial_u f(x)$ existe pour tout x dans $[a,b]$ on a

$$\|f(b)-f(a)\|_n\leqslant\sup_{x\in[a,b]}\|\partial_u f(x)\|_n\|b-a\|_m.$$

Démonstration. Nous considérons la fonction $g(t)=f\big((1-t)a+tb\big)$. Elle décrit la droite entre a et b parce que $g(0)=a$ et $g(1)=b$. En ce qui concerne la dérivée,

$$\begin{aligned}g'(t)&=\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f\big((1-t-h)a+(t+h)b\big)-f\big((1-t)a+tb\big)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f\big(a+(t+h)(b-a)\big)-f\big(a+t(b-a)\big)}{h}\\ &=\frac{\partial f}{\partial u}\big(a+t(b-a)\big)\|b-a\|.\end{aligned}\tag{10.850}$$

Le dernier facteur $\|b-a\|$ apparaît pour la normalisation du vecteur u. En effet dans la limite, il apparaît $h(b-a)$, ce qui donnerait la dérivée le long de $b-a$, tandis que u vaut $(b-a)/\|b-a\|$.

Par le théorème des accroissements finis pour g, il existe $t_0\in\,]0,1[$ tel que

$$g(1)=g(0)+g'(t_0)(1-0).\tag{10.851}$$

Donc

$$\|g(1)-g(0)\|\leqslant\sup_{t_0}\|g'(t_0)\|=\sup_{t_0\in]0,1[}\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(a+t_0(b-a))\right\|\|b-a\|.\tag{10.852}$$

Mais lorsque t_0 parcourt $]0,1[$, le point $a+t_0(b-a)$ parcourt le segment $]a,b[$, d'où le résultat. □

[118] Définition 9.53.

10.16.6 Différentielle d'ordre 2

PROPooBODMooJHyzup

Proposition 10.296 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés V et E. Soit une application $f\colon V \to E$ deux fois différentiable et dont les différentielles partielles secondes existent[119]*. Alors nous avons la formule*

$$(d^2f)_a(v)w = \sum_{ij} (\partial^2_{ij} f)(a) v_i w_j. \tag{10.853}$$

Démonstration. Rappel à propos des espaces concernés :

$$f\colon V \to E \tag{10.854a}$$
$$df\colon V \to \mathcal{L}(V,E) \tag{10.854b}$$
$$d^2f\colon V \to \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,E)\big). \tag{10.854c}$$

En ce qui concerne la différentielle première nous avons

$$\begin{aligned} df\colon V &\to \mathcal{L}(V,E) \\ a &\mapsto \sum_i (\partial_i f)(a) e_i^*.. \end{aligned} \tag{10.855}$$

□

10.16.7 Quelques mots à propos des différentielles d'ordre supérieur

10.16.7.1 Classe C^k

Nous introduisons quelques notations pour traiter ces espaces.

DefPNjMGqy

Définition 10.297 ([405, 1]).
Soient deux espaces vectoriels normés V et W ainsi qu'une application $f\colon V \to W$. Nous disons que f est

- *de classe C^0 si elle est continue,*
- *de classe C^1 si l'application différentielle $df\colon V \to \mathcal{L}(V,W)$ est continue,*
- *de classe C^k si sa différentielle est de classe C^{k-1}.*
- *de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout k.*

Lorsque nous demandons que la différentielle de f soit continue, nous entendons bien la continuité de $df\colon V \to \mathcal{L}(V,W)$, c'est-à-dire la continuité de df_x par rapport à x. Sur $\mathcal{L}(V,E)$, nous considérons la topologie de la norme opérateur 10.67.

Le lien entre classe C^k et dérivées partielles d'ordre k sera le théorème 12.356.

10.16.7.2 Espaces emboîtés

Soient deux espaces vectoriels normés V et W ainsi qu'une application $f\colon V \to W$. La différentielle est une application $df\colon V \to \mathcal{L}(V,W)$. Pour être clair, la différentielle seconde consiste à différentier df_x par rapport à x. C'est-à-dire que la différentielle seconde est une application $d(df)\colon V \to \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,W)\big)$.

Et c'est là que commencent les problèmes. Les différentielles successives font intervenir des emboîtements de plus en plus profonds d'espaces comme $d^3f\colon V \to \mathcal{L}\Big(V, \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,W)\big)\Big)$.

DEFooJYOPooBzditG

Définition 10.298.
Soient des espaces vectoriels normés V et E. Nous définissons les espaces emboîtés par récurrence :

$$\begin{cases} E_0 = E & \text{(10.856a)} \\ E_{k+1} = \mathcal{L}(V, E_k). & \text{(10.856b)} \end{cases}$$

Définition 10.299.
Si $\{e_i\}$ est une base d'un espace vectoriel V, nous allons noter

$$\begin{aligned} \omega_i\colon V &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_i. \end{aligned} \tag{10.857}$$

[119] Ces deux hypothèses sont redondantes, mais nous n'avons pas envie de nous prendre la tête avec ça ici.

Ce ω_i est ce qu'on appelle souvent e_i^*. Plus généralement, si I est le multiindice $(i_1, \dots, i_l)$ nous notons $\omega_I \in \mathcal{L}^l(V, \mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \omega_I \colon V^l &\to \mathbb{R} \\ (x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) &\mapsto x^{(1)}_{i_1} \dots x^{(l)}_{i_l}. \end{aligned} \tag{10.858}$$

Ce seront nos formes multilinéaires de base.

Afin de garder des notations très explicites, nous ne pouvons pas écrire des formules comme

$$df_a = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\omega_i$$

parce que si f prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, lorsqu'on écrit $df_a(v)$, il n'y a aucune raison à priori de vouloir que v soit pris par ω_i au lieu de $\partial_i f(a)$.

Nous introduisons donc un produit fait exprès pour dire que « c'est celui de droite qui prend ».

DEFooLULCooYjBEaZ

Définition 10.300 ([1])**.**
Si W est un espace vectoriel, nous définissons le produit $\times_n$ par

$$\begin{aligned} \times_1 \colon W \times \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) &\to \mathcal{L}(V, W) \\ (w \times_1 \alpha)(v) &= \alpha(v)w \end{aligned} \tag{10.859}$$

et par[120]

$$\begin{aligned} \times_n \colon W \times \mathbb{R}_n &\to W_n \\ (w \times_n \alpha)(v) &= w \times_{n-1} \alpha(v) \end{aligned} \tag{10.860}$$

Cette notation sera utilisée dans la proposition 12.318 pour écrire correctement df_a. Pour l'instant nous n'en avons pas besoin.

PROPooMGFBooHWGXyC

Proposition 10.301.
Tout polynôme $P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est de classe[121] *C^∞.*

10.16.7.3 Difféomorphisme

DefAQIQooYqZdya

Définition 10.302 (difféomorphisme)**.**
*Soient U et V, deux ouverts d'un espace vectoriel normé. Une application f de U dans V est un **difféomorphisme** si elle est bijective, différentiable*[122] *et dont l'inverse $f^{-1} : V \to U$ est aussi différentiable.*

Un C^k-difféomorphisme est un difféomorphisme qui est C^k et dont l'inverse est C^k.

10.303.
Truc marrant : un C^1-difféomorphisme n'est pas seulement un difféomorphisme qui est C^1. L'inverse doit également être C^1. Comment nommer un difféomorphisme qui est par ailleurs un application de classe C^1 ? Je ne sais pas.

10.304.
Sur le wikipédia anglophone[123], on demande que la différentielle de l'inverse soit continue. Ce que wikipédia anglophone nomme *diffeomorphism* est ici un C^1-difféomorphisme.

RemATQVooDnZBbs

Remarque 10.305.
L'application norme étant continue, le critère du théorème 7.196 est en réalité assez général. Par exemple à partir d'une application différentiable[124] $f \colon X \to Y$ nous pouvons considérer la fonction réelle

$$a \mapsto \|df_a\| \tag{10.861}$$

où la norme est la norme opérateur[125]. Si f est de classe C^1 alors cette application est continue et donc bornée sur un compact K de X.

[120] Définition 10.298 pour les espaces E_n et $\mathbb{R}_n$.
[121] Classe, définition 10.297.
[122] Différentiables, définition 10.279.
[123] https://en.wikipedia.org/wiki/Diffeomorphism
[124] Définition 10.279.
[125] Définition 10.67.

10.16.8 Topologie et norme induite

Nous savons par le lemme 7.163 que la topologie induite est celle de la norme induite.

PROPooORVKooIfIqVL

Proposition 10.306 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés E et F. Soit une application $f\colon E\to F$ de classe C^k. Nous considérons A fermé dans E. Nous considérons les normes induites sur A et $f(A)$.

Alors $f\colon A\to f(A)$ est de classe C^k.

10.16.9 Différentielle d'applications linéaires

LEMooZSNMooCfjzOB

Lemme 10.307 (Différentielle d'une application linéaire).
Soient deux espaces vectoriels normés E et F. Soit une application linéaire $f\colon E\to F$.

(1) Si $f\colon E\to F$ est linéaire, alors sa différentielle est

$$\begin{aligned} df\colon E&\to \mathcal{L}(E,F)\\ a&\mapsto f. \end{aligned} \tag{10.862}$$

(2) Si $f\colon E\to F$ est linéaire, toutes les différentielles d'ordre supérieures sont nulles.

(3) Toute application linéaire est de classe C^∞.

(4) Toute application affine est de classe C^∞.

Démonstration. Pour rappel, toujours bon à avoir en tête : $df\colon E\to\mathcal{L}(E,F)$. Soit $a\in E$; nous avons

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-f(h)\|_F}{\|h\|_E}=0 \tag{10.863}$$

parce que le numérateur est nul pour tout h. Donc $h\mapsto f(h)$ est la différentielle de f au point a parce que elle vérifie la condition (10.279).

Nous avons prouvé que la différentielle de f est l'application constante

$$\begin{aligned} df\colon E&\to \mathcal{L}(E,F)\\ a&\mapsto f \end{aligned} \tag{10.864}$$

En ce qui concerne la différentielle seconde, nous prouvons que $d(df)_a=0$ pour tout $a\in E$. En effet,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|df_{a+h}-df_a\|_{\mathcal{L}(E,F)}}{\|h\|_E}=0 \tag{10.865}$$

parce que le numérateur vaut $f-f=0$.

Maintenant il n'est pas compliqué de faire une récurrence : si f est de classe C^k et si $d^k(f)=0$, alors $d^k(f)$ est de classe C^1 et $d^kf=0$. □

LEMooAJDLooIPcmIV

Lemme 10.308.
Soient $a<b$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$\begin{aligned} f\colon [a,b]&\to[0,1]\\ x&\mapsto\frac{x-a}{b-a} \end{aligned} \tag{10.866}$$

EQooIINJooAlSqKF

est un C^∞-difféomorphisme[126].

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Valeurs dans $[0,1]$** ITEMooLRECooOSEqJL Nous devons prouver que pour tout $x\in[a,b]$, nous avons $f(x)\in[0,1]$. D'une part si $x\in[a,b]$, alors $x-a\geqslant 0$ et donc $(x-a)/(b-a)\geqslant 0$.

Dans l'autre sens, si $(x-a)/(b-a)>1$, alors $x-a>b-a$ et donc $x>b$. Donc $f(x)>1$ n'arrive jamais pour $x\in[a,b]$.

(2) **Injectif** Si $f(x)=f(t)$, alors en simplifiant par $b-a\neq 0$, nous trouvons $x-a=t-a$ et donc $x=t$ (ne citez le lemme 1.565 que si vous êtes capables de le prouver, sinon faites comme si c'était évident et il ne vous arrivera rien).

[126] Définition 10.297.

(3) **Surjectif** Il est vite vérifié que

$$f^{-1}(t) = t(b-a) + a, \tag{10.867}$$

EQooPSAWooNEJFih

et en procédant de même qu'au point (1), nous voyons que pour tout $t \in [0,1]$, $f^{-1}(t) \in [a,b]$.

(4) **De classe C^∞** C'est le lemme 10.307 qui fait le travail parce que (10.866) est affine.

(5) **Inverse de classe C^∞** Encore le lemme 10.307 parce que (10.867) est affine.

□

10.16.10 Différentielle d'applications multilinéaires

Notre objectif est de calculer $df_a(h)$ lorsque $f\colon E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ est une application multilinéaire. Nous mettons dans ce lemme l'essentiel de la combinatoire du problème.

LEMooOHRGooBKevzM

Lemme 10.309 ([77]).
Soient des espaces de Banach[127] $E_1, \ldots, E_n$ *et* F. *Soit une application multilinéaire* $f\colon E_1 \times \ldots \times E_n \to F$. *Soient* $a_i, h_i \in E_i$. *Pour chaque partie* $I \subset \{1, \ldots, n\}$ *nous posons*

$$x_{I,i} = \begin{cases} h_i & \text{si } i \in I \\ a_i & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10.868}$$

Alors

$$f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} f(x_{I,1}, \ldots, x_{I,n}). \tag{10.869}$$

EQooTNALooHjpmWv

Démonstration. Nous faisons une récurrence sur n en commençant par $n = 1$. Nous avons, par linéarité de f,

$$f(a_1 + h_1) = f(a_1) + f(h_1) = f(x_{\varnothing,1}) + f(x_{\{1\},1}) = \sum_{I \subset \{1\}} f(x_{I,1}). \tag{10.870}$$

Nous supposons que la formule (10.869) est vraie pour n et nous étudions le cas $n+1$. Pour rappel, les éléments a_i et h_i sont fixés. Nous posons $s = a_{n+1} + h_{n+1}$ et nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon E_1 \times \ldots \times E_n &\to F \\ (y_1, \ldots, y_n) &\mapsto f(y_1, \ldots, y_n, s). \end{aligned} \tag{10.871}$$

C'est une application n-multilinéaire sur laquelle l'hypothèse de récurrence fonctionne :

$$f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n, a_{n+1} + h_{n+1}) = g(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) \tag{10.872a}$$

$$= \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}} f(x_{J,1}, \ldots, x_{J,n}, s) \tag{10.872b}$$

$$= \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}} f(x_{J,1}, \ldots, x_{J,n}, a_{n+1} + h_{n+1}) \tag{10.872c}$$

$$= \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}} \Big(f(x_{J,1}, \ldots, x_{J,n}, a_{n+1}) + f(x_{J,1}, \ldots, x_{J,n} + h_{n+1}) \Big). \tag{10.872d}$$

SUBEQooRCIFooUQdiXS

En ce qui concerne l'ensemble des parties nous avons

$$\mathcal{P}(1, \ldots, n+1) = \mathcal{P}(1, \ldots, n) \bigcup_{J \in \mathcal{P}(1,\ldots,n)} J \cup \{n+1\}. \tag{10.873}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathcal{P}(1,\ldots,n+1)} f(x_{I,1}, \ldots, x_{I,n+1}) = &\sum_{I \in \mathcal{P}(1,\ldots,n)} f(x_{I,1}, \ldots, x_{I,n}, x_{I,n+1}) \\ &+ \sum_{J \in \mathcal{P}(1,\ldots,n)} f(x_{J\cup\{n+\},1}, \ldots, x_{J\cup\{n+1\},n}, x_{J\cup\{n+1\}}, n+1) \end{aligned}$$

Notez que nous sommons sur $J \subset \{1, \ldots, n\}$. Donc à tous les coups, $x_{I,n+1} = a_i$ et $x_{J\cup\{n+1\},n+1} = h_i$, et ce que nous avons dans (10.874) est la même chose que (10.872d). □

[127] Définition 7.316.

PROPooNDCPooWRdSQV

Proposition 10.310 ([1]).
Soient des espaces de Banach $E_1, \dots, E_n$ ainsi que F. Soit une application n-multilinéaire $f\colon E_1 \times \dots \times E_n \to F$ que nous supposons être continue. Nous considérons $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ et $h = (h_1, \dots, h_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Alors f est différentiable et

$$df_a(h) = f(h_1, a_2, \dots, a_n) + \dots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, h_n). \tag{10.874}$$

Démonstration. Notre candidat différentielle est l'application

$$T(h_1, \dots, h_n) = f(h_1, a_2, \dots, a_n) + \dots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, h_n), \tag{10.875}$$

et pour faire tourner la définition (10.807) de la différentielle, nous devons étudier

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) - T(h_1, \dots, h_n). \tag{10.876}$$

Nous reprenons les notations du lemme 10.309. En notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des singletons de $\{1, \dots, n\}$ nous avons

$$\begin{aligned} & f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) - T(h_1, \dots, h_n) && \text{(10.877a)} \\ &= \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} f(x_1^{(I)}, \dots, x_n^{(I)}) - f(x_1^{(\varnothing)}, \dots, x_n^{(\varnothing)}) - \sum_{I \in \mathcal{S}} f(x_1^{(I)}, \dots, x_n^{(I)}) && \text{(10.877b)} \\ &= \sum_{I \in \mathcal{F}} f(x_1^{(I)}, \dots, x_n^{(I)}) && \text{(10.877c)} \end{aligned}$$

où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$ contenant au moins deux éléments. Notre tâche est est maintenant d'évaluer la norme de ça. Nous avons supposé que f était continue ; donc la proposition 10.103 donne

$$\|f(x_1^{(I)}, \dots, x_n^{(I)})\| \leqslant \lambda \|x_1^{(I)}\| \dots \|x_n^{(I)}\| \tag{10.878}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Par ailleurs, étant donnée la norme produit 7.281, nous avons $\|h_i\| \leqslant \|h\|$ pour tout i. Étant donné que nous nous apprêtons à faire $h \to 0$, nous pouvons supposer que $\|h_i\| \leqslant \|a_j\|$ pour tout i et j. Et enfin nous posons $M = \max\{\|a_j\|\}$. Avec tout ça si $I \in \mathcal{F}$,

$$\|x_1^{(I)}\| \dots \|x_n^{(I)}\| \leqslant \|h\|^2 M^{n-2}. \tag{10.879}$$

Nous avons donc la majoration

$$\begin{aligned} \|f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) - T(h_1, \dots, h_n)\| &\leqslant \sum_{I \in \mathcal{F}} \|f(x_1^{(I)}, \dots, x_n^{(I)})\| && \text{(10.880a)} \\ &\leqslant \sum_{I \in \mathcal{F}} \lambda \|h\|^2 M^{n-2} && \text{(10.880b)} \\ &= \lambda \|h\|^2 (2M)^{n-2}. && \text{(10.880c)} \end{aligned}$$

parce que l'ensemble $\mathcal{F}$ est fini et contient 2^{n-2} éléments. Et enfin

$$\begin{aligned} \frac{\|f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) - T(h_1, \dots, h_n)\|}{\|h\|} &\leqslant \frac{\lambda (2M)^{n-2} \|h\|^2}{\|h\|} && \text{(10.881a)} \\ &= \lambda \|h\| (2M)^{n-2} && \text{(10.881b)} \\ &\xrightarrow{h \to 0} 0. && \text{(10.881c)} \end{aligned}$$

□

10.16.11 Accroissements finis

LEMooYQZZooVybqjK

Lemme 10.311.
Soit une fonction $f\colon E \to V$ (espaces vectoriels normés) différentiable en $a \in E$. Alors il existe une fonction $\alpha\colon E \to V$ telle que

$$\begin{cases} \lim_{h \to 0} \dfrac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0 & \text{(10.882a)} \\ f(a + h) = f(a) + df_a(h) + \alpha(h). & \text{(10.882b)} \end{cases}$$

Démonstration. Il s'agit seulement de poser

$$\alpha(h) = f(a + h) - f(a) - df_a(h). \tag{10.883}$$

Le fait que $\alpha(h)/\|h\| \to 0$ est alors la définition de la différentiabilité de f. □

10.16.12 Notations pour les applications linéaires

DEFooTLQUooJvknvi

Définition 10.312 ([406]).
Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

(1) *Si E et F sont deux espaces vectoriels (pas spécialement normés) nous notons $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.*

(2) *Un **morphisme d'espaces vectoriels normés** est une application linéaire $E \to F$ continue pour la topologie de la norme opérateur.*

L'ensemble des applications linéaires bornées[128] *entre E et F est noté $\mathcal{L}^0(E,F)$.*

(3) *Un **isomorphisme** est un morphisme continu inversible dont l'inverse est continu. Nous notons $\mathrm{GL}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes entre E et F.*

Le groupe $\mathrm{GL}(E,F)$ a la topologie des espaces normés grâce à la norme opérateur définie en 10.67.

10.16.13 (non ?) Différentiabilité des applications linéaires

LemooXXUGooUqCjmp

Lemme 10.313.
Soit une application linéaire f.

(1) *Si f est continue, alors elle est différentiable et $df_a(u) = f(u)$ pour tout a et u.*

(2) *Si f n'est pas continue, alors elle n'est pas différentiable.*

Démonstration. La linéarité de f donne :

$$f(a+h) - f(a) - f(h) = 0, \tag{10.884}$$

et donc prendre $T = f$ dans la définition 10.279 fait fonctionner la limite. De plus T est alors continue par hypothèse ; elle est donc bien la différentielle de f.

Supposons que f ne soit pas continue, prenons une application linéaire continue T, et calculons

$$\frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|} = \frac{(f-T)(h)}{\|h\|} = (f-T)(e_h) \tag{10.885}$$

EQooFLYMooEKTeQC

où e_h est le vecteur unitaire dans la direction de h. Vu que f n'est pas continue et que T l'est, l'application $f - T$ n'est pas continue. Elle n'est pas pas bornée par la proposition 10.85. Il existe alors un vecteur h tel que $\|(f-T)(e_h)\| > 1$ (et même plus grand que ce qu'on veut).

Donc la limite de (10.885) pour $h \to 0$ ne peut pas être nulle. □

LemLLvgPQW

Lemme 10.314.
Une application linéaire continue est de classe C^∞.

Démonstration. Soit $a \in E$. Étant donné que f est linéaire et continue, elle est différentiable et

$$\begin{aligned} df : E &\to \mathcal{L}^0(E,F) \\ a &\mapsto f \end{aligned} \tag{10.886}$$

est une fonction constante et en particulier continue ; nous avons donc $f \in C^1$. Pour la différentielle seconde nous avons $d(df)_a = 0$ parce que $df(a+h) - df(a) = f - f = 0$. Toutes les différentielles suivantes sont nulles. □

10.16.14 Dérivation en chaine et formule de Leibniz

PropOYtgIua

Proposition 10.315.
Soient $f_i : U \to F_i$, des fonctions de classe C^r où U est ouvert dans l'espace vectoriel normé E et les F_i sont des espaces vectoriels normés. Alors l'application

$$\begin{aligned} f = f_1 \times \ldots \times f_n : U &\to F_1 \times \ldots \times F_n \\ x &\mapsto \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \end{aligned} \tag{10.887}$$

est de classe C^r et

$$d^r f = d^r f_1 \times \ldots \times d^r f_n. \tag{10.888}$$

[128] Nous avons vu dans la proposition 10.85 que la continuité était équivalente à être bornée pour la norme opérateur de la définition 10.67.

Démonstration. Soit $x \in U$ et $h \in E$. La différentiabilité des fonctions f_i donne

$$f_i(x+h) = f_i(x) + (df_i)_x(h) + \alpha_i(h) \tag{10.889}$$

avec $\lim_{h\to 0} \alpha_i(h)/\|h\| = 0$. Par conséquent

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \big(\dots, f_i(x) + (df_i)_x(h) + \alpha_i(h), \dots\big) && \text{(10.890a)}\\ &= \big(\dots, f_i(x), \dots\big) + \big(\dots, (df_i)_x(h), \dots\big) + \big(\dots, \alpha_i(h), \dots\big). && \text{(10.890b)} \end{aligned}$$

Mais la définition 7.282 de la norme dans un espace produit donne

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\big(\alpha_1(h), \dots, \alpha_n(h)\big)\|}{\|h\|} = 0, \tag{10.891}$$

ce qui nous permet de noter $\alpha(h) = \big(\alpha_1(h), \dots, \alpha_n(h)\big)$ et avoir $\lim_{h\to 0} \alpha(h)/\|h\| = 0$. Avec tout ça nous avons bien

$$f(x+h) = f(x) + \big((df_1)_x(h), \dots, (df_n)_x(h)\big) + \alpha(h), \tag{10.892}$$

ce qui signifie que f est différentiable et

$$df_x = \big(df_1, \dots, df_n\big). \tag{10.893}$$

□

THOooIHPIooIUyPaf

Théorème 10.316.
Soient des espaces vectoriels normés E, V et W. Nous considérons deux fonctions $f\colon E \to V$ et $g\colon V \to W$. Nous supposons que :

(1) f est différentiable en $a \in E$

(2) g est différentiable en $f(a) \in V$

(3) df_a est de norme finie[129].

Alors $g \circ f\colon E \to W$ est différentiable en a et

$$d(g\circ f)_a(u) = dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big), \tag{10.894}$$

ou encore

$$d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a. \tag{10.895}$$

Démonstration. En utilisant le lemme 10.311 pour les fonctions f et g, nous avons

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \alpha(h) \tag{10.896}$$

EQooXNWZooJSPjRS

et

$$g\big(f(a)+k\big) = g\big(f(a)\big) + dg_{f(a)}(k) + \beta(k). \tag{10.897}$$

EQooIQZZooWPyMbE

L'application $dg_{f(a)} \circ df_a$ est une application linéaire, et est notre candidat différentielle. En suivant la définition 10.279, nous allons calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) - (dg_{f(a)} \circ df_a)(h)}{\|h\|}. \tag{10.898}$$

Si cette limite existe et vaut zéro, alors nous aurons prouvé que le candidat différentielle est correct.

Pour cela, nous emboîtons les formules (10.896) et (10.897) l'une dans l'autre pour avoir :

$$\begin{aligned} (g\circ f)(a+h) &= g\big(f(a) + df_a(h) + \alpha(h)\big) && \text{(10.899a)}\\ &= g\big(f(a)\big) + dg_{f(a)}\big(df_a(h) + \alpha(h)\big) + \beta\big(df_a(h) + \alpha(h)\big). && \text{(10.899b)} \end{aligned}$$

Vu que $dg_{f(a)}$ est linéaire, le deuxième terme peut être coupé en deux et après recombinaisons,

$$(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) - (dg_{f(a)} \circ df_a)(h) = dg_{f(a)}\big(\alpha(h)\big) + \beta\big(df_a(h) + \alpha(h)\big). \tag{10.900}$$

[129] Je ne suis pas totalement certain que cette hypothèse soit nécessaire, mais en tout cas, elle est utilisée.

Étant donné que $dg_{f(a)}$ est linéaire,

$$\frac{dg_{f(a)}\big(\alpha(h)\big)}{\|h\|} = dg_{f(a)}\left(\frac{\alpha(h)}{\|h\|}\right) \to 0. \tag{10.901}$$

Il nous reste à voir que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\beta\big(df_a(h)+\alpha(h)\big)}{\|h\|} \tag{10.902}$$

existe au vaut zéro. Vu que df_a est linéaire, il existe $M>0$ tel que[130] $\|df_a(h)\| \leqslant M\|h\|$. D'autre part, vu que $\alpha(h)/\|h\| \to 0$, nous avons $\|\alpha(h)\| \leqslant \|h\|$ pour tout h suffisamment petit.

Donc si h est assez petit, nous avons

$$\|df_a(h)+\alpha(h)\| \leqslant (M+1)\|h\|. \tag{10.903}$$

Soit $\epsilon>0$. Soit $\delta>0$ tel que $\|h\|\leqslant\delta$ implique $\beta(h)/\|h\|\leqslant\epsilon$ et (10.903) en même temps. Soit r tel que $(M+1)r<\delta$; et notons que $r<\delta$. Nous considérons alors $h\in B(0,r)$ et nous calculons :

$$\frac{\beta\big(df_a(h)+\alpha(h)\big)}{\|h\|} = \frac{\beta\big(df_a(h)+\alpha(h)\big)}{\|df_a(h)+\alpha(h)\|}\frac{\|df_a(h)+\alpha(h)\|}{\|h\|} \leqslant (M+1)\epsilon. \tag{10.904}$$

La limite (10.902) existe donc et vaut zéro. □

10.16.15 Composition

Théorème 10.317 (Différentielle de fonctions composées[407]).
Soient E, F et G des espaces vectoriels normés, U ouvert dans E et V ouvert dans F. Soient des applications de classe C^r $(r\geqslant 1)$

$$f\colon U\to V \tag{10.905a}$$
$$g\colon V\to G. \tag{10.905b}$$

Nous supposons que df_x et $dg_{f(x)}$ sont de norme finie.

Alors l'application $g\circ f\colon U\to G$ est de classe C^r et

$$d(g\circ f)_x = dg_{f(x)}\circ df_x. \tag{10.906}$$

Démonstration. Nous nous fixons $x\in U$. La fonction f est différentiable en $x\in U$ et g en $f(x)$, donc nous pouvons écrire

$$f(x+h) = f(x)+df_x(h)+\alpha(h) \tag{10.907}$$

et

$$g\big(f(x)+u\big) = g\big(f(x)\big)+dg_{f(x)}(u)+\beta(u) \tag{10.908}$$

où la fonction α a la propriété que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|}=0; \tag{10.909}$$

et la même chose pour β. La fonction composée en $x+h$ s'écrit donc

$$(g\circ f)(x+h) = g\big(f(x)+df_x(h)+\alpha(h)\big) = g\big(f(x)\big)+dg_{f(x)}\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)+\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big). \tag{10.910}$$

Nous montrons que tous les « petits » termes de cette formule peuvent être groupés. D'abord si h est proche de 0, nous avons[131]

$$\frac{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}{\|h\|} \leqslant \frac{\|df_x\|\|h\|}{\|h\|}+\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|}. \tag{10.911}$$

Si h est petit, le second terme est arbitrairement petit, donc en prenant n'importe que $M>\|df_x\|$ nous avons

$$\frac{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}{\|h\|}\leqslant M. \tag{10.912}$$

[130] Ce M est par exemple la norme opérateur de df_a, comme nous l'assure le lemme 10.81. C'est pour ce passage-ci que nous avons supposé que df_a était de norme finie.

[131] Ici nous utilisons l'hypothèse de norme finie pour la différentielle.

Par ailleurs, nous avons

$$\frac{\|\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)\|}{\|h\|}=\frac{\|\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)\|}{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}\frac{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}{\|h\|}\leqslant M\frac{\|\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)\|}{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}.\tag{10.913}$$

Vu que la fraction est du type $\frac{\beta(f(h))}{f(h)}$ avec $\lim_{h\to 0}f(h)=0$, la fraction tend vers zéro lorsque $h\to 0$. En posant

$$\gamma_1(h)=\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)\tag{10.914}$$

nous avons $\lim_{h\to 0}\gamma_1(h)/\|h\|=0$.

L'autre candidat à être un petit terme dans (10.910) est traité en utilisant le lemme 10.84 :

$$\|dg_{f(x)}\big(\alpha(h)\big)\|\leqslant\|dg_{f(x)}\|\|\alpha(h)\|.\tag{10.915}$$

Donc

$$\frac{\|dg_{f(x)}\big(\alpha(h)\big)\|}{\|h\|}\leqslant\|dg_{f(x)}\|\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|},\tag{10.916}$$

ce qui nous permet de poser

$$\gamma_2(h)=dg_{f(x)}\big(\alpha(h)\big)\tag{10.917}$$

avec γ_2 qui a la même propriété que γ_1. Avec tout cela, en posant $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ nous récrivons

$$(g\circ f)(x+h)=g\big(f(x)\big)+dg_{f(x)}\big(df_x(h)\big)+\gamma(h)\tag{10.918}$$

avec $\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(h)}{\|h\|}=0$. Tout cela pour dire que

$$\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)-\big(dg_{f(x)}\circ df_x\big)(h)}{\|h\|}=0,\tag{10.919}$$

ce qui signifie que

$$d(g\circ f)_x=dg_{f(x)}\circ df_x.\tag{10.920}$$

Nous avons donc montré que si f et g sont différentiables, alors $g\circ f$ est différentiable avec différentielle donnée par (10.906).

Nous passons à la régularité. Nous supposons maintenant que f et g sont de classe C^r et nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon L(F,G)\times L(E,F)&\to L(E,G)\\(A,B)&\mapsto A\circ B.\end{aligned}\tag{10.921}$$

Montrons que l'application φ est continue en montrant qu'elle est bornée[132]. Pour cela nous écrivons la norme opérateur

$$\|\varphi\|=\sup_{\|(A,B)\|=1}\|\varphi(A,B)\|=\sup_{\|(A,B)\|=1}\|A\circ B\|\leqslant\sup_{\|(A,B)\|=1}\|A\|\|B\|\leqslant 1.\tag{10.922}$$

Justifications : d'une part la norme opérateur est une norme algébrique[133], et d'autre part la définition 7.282 de la norme sur un espace produit pour la dernière majoration. L'application φ est donc continue et donc C^∞ par le lemme 10.314. Nous considérons également l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon U&\to L(F,G)\times L(E,F)\\x&\mapsto\big(dg_{f(x)},df_x\big).\end{aligned}\tag{10.923}$$

Vu que f et g sont C^1, l'application ψ est continue. Ces deux applications φ et ψ sont choisies pour avoir

$$(\varphi\circ\psi)(x)=\varphi\big(dg_{f(x)},df_x\big)=dg_{f(x)}\circ df_x,\tag{10.924}$$

c'est-à-dire $\varphi\circ\psi=d(g\circ f)$. Les applications φ et ψ étant continues, l'application $d(g\circ f)$ est continue, ce qui prouve que $g\circ f$ est C^1.

Si f et g sont C^r alors $dg\in C^{r-1}$ et $dg\circ f\in C^{r-1}$ où il ne faut pas se tromper : $dg\colon F\to L(F,G)$ et $f\colon U\to F$; la composée est $dg\circ f\colon x\mapsto dg_{f(x)}\in L(F,G)$.

Pour la récurrence nous supposons que $f,g\in C^{r-1}$ implique $g\circ f\in C^{r-1}$ pour un certain $r\geqslant 2$ (parce que nous venons de prouver cela avec $r=1$ et $r=2$). Soient $f,g\in C^r$ et montrons que $g\circ f\in C^r$. Par la proposition 10.315 nous avons

$$\psi=dg\circ f\times df\in C^{r-1},\tag{10.925}$$

et donc $d(g\circ f)=\varphi\circ\psi\in C^{r-1}$, ce qui signifie que $g\circ f\in C^r$. □

[132] Proposition 10.85.
[133] Lemme 10.84.

PROPooRCZOooSgvpSE

Proposition 10.318 ([1]).
Soit une application $f\colon E \to V$ de classe C^p. Soit une application linéaire $\varphi\colon V \to W$. Alors $\varphi \circ f$ est de classe C^p.

Démonstration. Toute la preuve est un grand jeu de cohérence des espaces en présence, alors soyez attentifs et capable de dire précisément à quel espace appartient chacun de objets entrant en jeu.

Nous posons $V_0 = V$ et $V_{k+1} = \mathcal{L}(E, V_k)$. Idem pour les espaces W_k. Ensuite nous posons

$$\begin{aligned}\varphi_1\colon \mathcal{L}(E,V) &\to \mathcal{L}(E,W)\\ \alpha &\mapsto \varphi \circ \alpha.\end{aligned} \tag{10.926}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_k\colon \mathcal{L}(E,V_{k-1}) &\to \mathcal{L}(E,W_{k-1})\\ \alpha &\mapsto \varphi_{k-1} \circ \alpha.\end{aligned} \tag{10.927}$$

Notez la cohérence : si $a \in E$, $\alpha(a) \in V_{k-1} = \mathcal{L}(E, V_{k-2})$, et donc

$$(\varphi_{k-1} \circ \alpha)(a) = \varphi_{k-1}\big(\alpha(a)\big). \tag{10.928}$$

À droite nous avons $\varphi_{k-1}\big(\alpha(a)\big) \in \mathcal{L}(E, W_{k-2}) = V_{k-1}$.

De plus, φ est linéaire ; ça se prouve par récurrence en partant de φ_1 et en se basant sur le fait que φ est linéaire.

C'est parti pour une récurrence.

(1) **Énoncé** Nous allons prouver par récurrence que

$$d^k(\varphi \circ f) = \varphi_k \circ d^k f. \tag{10.929}$$

pour tout $k \leqslant p$.

(2) **Initialisation**

D'abord, f est de classe C^p, donc différentiable et φ est linéaire donc différentiable. Donc la composée est différentiable et le théorème 10.316 nous donne la différentiabilité de $\varphi \circ f$ ainsi que la formule

$$d(\varphi \circ f)_a(u) = d\varphi_{f(a)}\big(df_a(u)\big) = (\varphi \circ df_a)(u) = \varphi_1(df_a)(u). \tag{10.930}$$

Donc $d(\varphi \circ f)_a = \varphi_1(df_a)$, ce qui signifie

$$d(\varphi \circ f) = \varphi_1 \circ df. \tag{10.931}$$

C'est bon pour $k = 1$.

(3) **Le pas de récurrence**

Vu que f est de classe C^p, $d^k f$ est encore différentiable. Vu que φ_k est encore linéaire, nous pouvons encore utiliser la règle de différentiation de fonctions composées sur l'application $\varphi_k \circ d^k f$. Nous avons :

$$d^{k+1}(\varphi \circ f)_a(u) = d\big(d^k(\varphi \circ f)\big)_a(u) = d(\varphi_k \circ d^k f)_a(u). \tag{10.932}$$

C'est le moment d'utiliser la formule de différentiation en chaine :

$$d^{k+1}(\varphi \circ f)_a(u) = \big((d\varphi_k)_{d^k f_a} \circ d^{k+1} f_a\big)(u). \tag{10.933}$$

Mais φ_k étant linéaire, $(d\varphi_k)_{d^k f_a} = \varphi_k$, donc

$$d^{k+1}(\varphi \circ f)_a(u) = (\varphi_k \circ d^{k+1} f_a)(u). \tag{10.934}$$

Donc, en oubliant l'application au vecteur u,

$$d^{k+1}(\varphi \circ f)_a = \varphi_k \circ d^{k+1} f_a = \varphi_{k+1}\big(d^{k+1} f_a\big) = (\varphi_{k+1} \circ d^{k+1} f)(a). \tag{10.935}$$

Nous avons donc bien

$$d^{k+1}(\varphi \circ f) = \varphi_{k+1} \circ d^{k+1} f. \tag{10.936}$$

□

PROPooGJGVooWnbeAe

Proposition 10.319 ([1]).
Soient des espaces vectoriels E, V et W de dimension finie, et une fonction $f\colon E \to V$ de classe C^p. Si $\varphi\colon V \to W$ est linéaire, alors

$$\varphi \circ f\colon E \to W \tag{10.937}$$

est de classe C^p.

Démonstration. En utilisant le théorème de différentiation de fonctions composées 10.316,

$$d(\varphi \circ f)_a(u) = d\varphi_{f(a)} df_a(u), \tag{10.938}$$

et donc, parce que φ est linéaire,

$$d(\varphi \circ f)_a = \varphi \circ df_a. \tag{10.939}$$

Nous pouvons exprimer cela de façon un peu différente en posant $\varphi_1\colon \mathcal{L}(E,V) \to \mathcal{L}(E,W)$,

$$\varphi_1(\alpha)(a) = (\varphi \circ \alpha)(a). \tag{10.940}$$

Cela nous permet d'écrire $\varphi \circ df_a = (\varphi_1 \circ df)(a)$ et donc

EQooUJPWooTzgSJx

$$d(\varphi \circ f) = \varphi_1 \circ df \tag{10.941}$$

où φ_1 est encore une application linéaire. Une récurrence semble possible. Nous posons $V_0 = V$ et $W_0 = W$ puis

$$V_{k+1} = \mathcal{L}(E, V_k) \tag{10.942a}$$
$$W_{k+1} = \mathcal{L}(E, W_k) \tag{10.942b}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_k\colon \mathcal{L}(E, V_{k-1}) &\to \mathcal{L}(E, W_{k-1}) \\ g &\mapsto \varphi_{k-1} \circ g. \end{aligned} \tag{10.943}$$

Avec tout cela, nous prétendons que $d^k(\varphi \circ f) = \varphi_k \circ d^k f$ avec φ_k linéaire.

(1) **φ_k est linéaire** Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{L}(E, V_{k-1})$, ainsi que $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Nous avons, en utilisant la linéarité de φ_{k-1} :

$$\varphi_k(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)(a) = \varphi_{k-1}\big((\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)(a)\big) \tag{10.944a}$$
$$= \varphi_{k-1}\big(\lambda\alpha_1(a)\big) + \mu\varphi_{k-1}\big(\alpha_2(a)\big) \tag{10.944b}$$
$$= \lambda\varphi_k(\alpha_1)a + \mu\varphi_k(\alpha_2)a. \tag{10.944c}$$

Donc φ_k est linéaire pour tout k.

(2) **La relation** La relation

$$d^k(\varphi \circ f) = \varphi_k \circ d^k f \tag{10.945}$$

se démontre par récurrence, chaque pas étant justifié de la même manière que (10.941).

□

PROPooLRRMooRzrTNE

Proposition 10.320 (Composition).
Soient trois espaces vectoriels normés E, V, W de dimension finie. Si les applications $f\colon E \to V$ et $g\colon V \to W$ sont de classe C^p, alors la composée $g \circ f\colon E \to W$ est de classe C^p.

10.16.16 Règle de Leibniz

PROPooNUAJooMtJBySPROPooNUAJooMtJBySPROPooNUAJooMtJBySP

PROPooOIMLooUhkkmy

Proposition 10.323 ([1]).
Soient deux fonctions différentiables $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. En posant $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, nous avons

$$dh_x = df_x(v) \cdot g(x) + f(x) \cdot (dg_x)(v). \tag{10.948}$$

Démonstration. Nous avons $h(x) = \sum_i f_i(x)g_i(x)$. À cela nous pouvons appliquer la règle de Leibniz usuelles 10.322, en tenant compte de 10.321 :

$$dh_x(v) = \sum_i (df_i)_x(v)g_i(x) + \sum_i f_i(x)(dg_i)_x(v) \tag{10.949a}$$
$$= (df)_x(v) \cdot g(x) + f(x) \cdot (dg_x)(v). \tag{10.949b}$$

□

10.16.17 Inverse

LemooTJSZooWkuSzv

Lemme 10.324.
Si $f\colon U \to V$ est un difféomorphisme[134] *alors pour tout $a \in U$, l'application df_a est inversible et*

$$(df_a)^{-1} = (df^{-1})_{f(a)}. \tag{10.950}$$

Démonstration. Il suffit d'apercevoir qu'en vertu de la règle de différentiation en chaine (10.906),

$$(df_a)(df^{-1})_{f(a)} = d(f \circ f^{-1})_{f(a)} = \mathrm{Id}\,. \tag{10.951}$$

□

PROPooNONAooCyAtce

Proposition 10.325.
Soient des ouverts A de $\mathbb{R}^p$ et B de $\mathbb{R}^m$. Si il existe un difféomorphisme $f\colon A \to B$, alors $p = m$.

Démonstration. Vu que f est un difféomorphisme, le lemme 10.324 fait son travail : l'application linéaire $df_a\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ est inversible d'inverse $df^{-1}_{f(a)}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.

Or une application linéaire ne peut pas être bijective entre espaces de dimensions différentes (finies). Donc $p = m$. □

10.16.18 Différentiation de produit tensoriel

Si nous avons deux applications $f\colon E \to V$ et $g\colon E \to W$, alors nous voudrions considérer la fonction

$$\begin{aligned} f \otimes g\colon E &\to V \otimes W \\ a &\mapsto f(a) \otimes g(a). \end{aligned} \tag{10.952}$$

Le problème avec cette notation est que très souvent, les applications f et g sont des éléments d'espaces vectoriels. Si par exemple $f \in \mathcal{L}(E, V)$ et $g \in \mathcal{L}(E, W)$, nous avons $f \otimes g \in \mathcal{L}(E, V) \otimes \mathcal{L}(E, W)$. Dans le Frido nous ne nous permettons pas de dire calmement que $\mathcal{L}(E, V) \otimes \mathcal{L}(E, W) = \mathcal{L}(E, V \otimes W)$. Et je ne vous dit même pas à quel point il n'est pas évident, si $f \in C^\infty(E, V)$ et $g \in C^\infty(E, W)$ que nous aurions $f \otimes g \in C^\infty(E, V) \otimes C^\infty(E, W) = C^\infty(E, V \otimes W)$.

Tout cela pour dire que nous n'allons pas nous lancer dans des abus de notations. Non. Au lieu de cela, nous introduisons une notation. Pour rappel, dans tout le Frido, $\mathrm{Fun}(A, B)$ désigne l'ensemble de toutes les application de A vers B sans suppositions de régularité. Pour les puristes, nous précisions que si $f \in \mathrm{Fun}(A, B)$, nous supposons que f est définie sur tout A. Hum … sauf mention du contraire.

DEFooMVNDooFWFtRn

Définition 10.326.
Si $f \in \mathrm{Fun}(E, V)$ et $g \in \mathrm{Fun}(E, W)$, alors nous définissons

$$\begin{aligned} f\tilde{\otimes}g\colon E &\to V \otimes W \\ a &\mapsto f(a) \otimes g(a). \end{aligned} \tag{10.953}$$

PROPooCRVXooEGxdZl

Proposition 10.327.
Soient des applications continues $f\colon E \to V$ et $g\colon E \to W$ entre espaces vectoriels de dimension finies. Alors la fonction $f\tilde{\otimes}g\colon E \to V \otimes W$ est continue.

[134] Définition 10.302

Démonstration. Soient $a \in E$ ainsi qu'une suite $x_k \to a$ dans E. Nous voulons prouver que $f\tilde{\otimes}g(x_k) \xrightarrow{V\otimes W} f(a)\otimes g(a)$. Nous avons :

$$\|f(x_k)\otimes g(x_k) - f(a)\otimes g(a)\| \leqslant \|f(x_k)\otimes g(x_k) - f(x_k)\otimes g(a)\| + \|f(x_k)\otimes g(a) - f(a)\otimes g(a)\|. \tag{10.954}$$

Ensuite en utilisant la classe d'équivalence (10.581b),

$$f(x_k)\otimes g(x_k) - f(x_k)\otimes g(a) = f(x_k)\otimes \big(g(x_k) - g(a)\big), \tag{10.955}$$

et en ce qui concerne les normes,

$$\|f(x_k)\otimes g(x_k) - f(x_k)\otimes g(a)\| = \|f(x_k)\|\|\big(g(x_k) - g(a)\big)\|. \tag{10.956}$$

Mais par hypothèse, $f(x_k) \to f(a)$ et $g(x_k) \to g(a)$. Donc le tout tend vers zéro lorsque $k \to \infty$.

Le même raisonnement fonctionne avec le second terme de (10.954). □

Lorsque nous parlons de différentielle de produit de fonctions, nous voulons étudier la différentiabilité de $f\tilde{\otimes}g$ sous l'hypothèse de différentiabilité de f et g. Et aussi, si f et g sont de classe C^p, est-ce que $f\tilde{\otimes}g$ est également de classe C^p ?

Nous voudrions avoir une formule du type

$$d(f\tilde{\otimes}g) = df\tilde{\otimes}g + f\tilde{\otimes}dg, \tag{10.957}$$

mais ça ne colle pas au niveau des espaces. En effet, en évaluant cela en $a \in E$, nous avons à gauche $d(f\tilde{\otimes}g)_a \in \mathcal{L}(E, V\otimes W)$, tandis qu'à droite nous avons $df_a\otimes g(a) \in \mathcal{L}(E,V)\otimes W$ et $f(a)\otimes dg_a \in V\otimes\mathcal{L}(E,W)$.

Nous pourrions bien entendu dire que $V\otimes\mathcal{L}(E,W)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E, V\otimes W)$ et hop voilà, on n'en parle plus. Ce serait passer sur deux points importants. D'abord est-ce que $V\otimes\mathcal{L}(E,W)$ est vraiment isomorphe à $\mathcal{L}(E, V\otimes W)$? Et ensuite, l'isomorphisme implique une utilisation du théorème 10.316 qui est tout sauf une trivialité.

Bref, fidèle au principe fridesque de ne pas cacher des difficultés techniques sous des abus de notations, nous allons écrire les choses explicitement.

Lemme 10.328.
Si E, V et W sont de dimension finie, les applications

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathcal{L}(E,V)\otimes W &\to \mathcal{L}(E, V\otimes W)\\ f\otimes w &\mapsto \Big(u \mapsto f(u)\otimes w\Big)\end{aligned} \tag{10.958}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi\colon V\otimes\mathcal{L}(E,W) &\to \mathcal{L}(E, V\otimes W)\\ v\otimes g &\mapsto \big(a \mapsto v\otimes g(a)\big).\end{aligned} \tag{10.959}$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

Dans le meilleur des mondes, ces applications devraient être affublés d'indices V et W.

Démonstration. Nous donnons des détails à propos de ψ. Pour φ c'est la même chose.

(1) **Linéaire** La formule (10.958) définit ψ en particulier sur une base de $\mathcal{L}(E,V)\otimes W$ par la proposition 10.215(1). Ce que signifie réellement la formule (10.958) est que ψ est ainsi définie sur la base et est prolongée par continuité.

(2) **Injective** Si pour un f et un w fixé nous avons $\psi(f\otimes w) = 0$, alors il y a deux cas : soit $w = 0$ soit $w \neq 0$. Dans le premier cas, $f\otimes w = 0$, et dans le second cas, nous remarquons que

$$0 = \psi(f\otimes w)(a) = f(a)\otimes w \tag{10.960}$$

pour tout $a \in E$. Cela implique $f(a) = 0$ pour tout a et donc $f = 0$, ce qui signifie que $f\otimes w = 0$.

(3) **Bijective** En utilisant la proposition 10.215 et le lemme 4.44(2), nous avons égalité des dimensions entre $\mathcal{L}(E,V)\otimes W$ et $\mathcal{L}(E, V\otimes W)$.

Une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension (finie) est une bijection.

□

PROPooZOAFooRMeBgI

Proposition 10.329.
Soient des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soient $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$ des fonctions de classe C^1. Alors $f\tilde{\otimes}g\colon E\to V\otimes W$ est de classe C^1 nous avons les formules

$$d(f\tilde{\otimes}g)_a(u)=df_a(u)\otimes g(a)+f(a)\otimes dg_a(u) \tag{10.961}$$

EQooSUSCooBhZXFC

ainsi que

$$d(f\tilde{\otimes}g)=\psi\circ(df\tilde{\otimes}g)+\varphi\circ(f\tilde{\otimes}dg). \tag{10.962}$$

EQooOCEEooUrsIDd

Démonstration. Nous commençons par prouver que $f\tilde{\otimes}g$ est différentiable en injectant le candidat (10.961) dans la définition. Au numérateur nous avons :

$$(f\tilde{\otimes}g)(a+h)-(f\tilde{\otimes}g)(a)-df_a(h)\otimes g(a)-f(a)\otimes dg_a(h). \tag{10.963}$$

EQooOMXSooYsAiKh

Le lemme 10.311 assure qu'il existe une fonction $\alpha\colon E\to V$ telle que $\lim_{h\to 0}\alpha(h)/\|h\|=0$ et $f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\alpha(h)$. Même chose pour g. Nous avons donc

$$(f\tilde{\otimes}g)(a+h)=f(a+h)\otimes g(a+h)=\big(f(a)+df_a(h)+\alpha(h)\big)\otimes\big(g(a)+dg_a(h)+\beta(h)\big) \tag{10.964}$$

qui se développe en 9 termes. En effectuant les différences dans (10.963), nous nous retrouvons avec un numérateur qui vaut

$$f(a)\otimes\beta(h)+df_a(h)\otimes dg_a(h)+df_a(h)\otimes\beta(h)+\alpha(h)\otimes g(a)+\alpha(h)\otimes dg_a(h)+\alpha(h)\otimes\beta(h). \tag{10.965}$$

Nous pouvons prouver terme à terme qu'en divisant par $\|h\|$ nous avons une limite qui vaut zéro. Par exemple,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)\otimes\beta(h)}{\|h\|} \tag{10.966}$$

se calcule en prenant la norme du numérateur et en utilisant le lemme 10.270 :

$$\frac{\|f(a)\otimes\beta(h)\|}{\|h\|}=\frac{\|f(a)\|\|\beta(h)\|}{\|h\|}\to 0. \tag{10.967}$$

Tous les termes contenant $\alpha(h)$ ou $\beta(h)$ se traitent de la même manière. Le dernier terme à traiter est

$$\lim_{h\to 0}\frac{df_a(h)\otimes dg_a(h)}{\|h\|}. \tag{10.968}$$

En prenant la norme du numérateur, en utilisant encore le lemme 10.270 et en utilisant le lemme 10.81, nous avons

$$\|df_a(h)\otimes dg_a(h)\|=\|df_a(h)\|\|dg_a(h)\|\leqslant\|df_a\|\|dg_a\|\|h\|^2, \tag{10.969}$$

donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{df_a(h)\otimes dg_a(h)}{\|h\|}=0. \tag{10.970}$$

Notons que l'utilisation du lemme 10.81 requière que df_a soit continue, ce qui n'est pas évident en dimension infinie : une application linéaire n'est pas spécialement continue. C'est donc ici que nous utilisons le fait que E, V et W sont de dimension finie[135].

Ceci prouve que $f\tilde{\otimes}g$ est différentiable et nous donne la formule (10.961) pour appliquer sa différentielle à un élément de E. La formule (10.962) est un corolaire : elle se vérifie en l'appliquant à a puis à u.

Pour terminer nous devons prouver que $d(f\tilde{\otimes}g)$ est continue. Vu que f et g sont de classe C^1, les applications f, g, df et dg sont continues. Les applications ψ et φ sont également continues parce que linéaires sur des espaces de dimension finie. La proposition 10.327 appliquée à df et g montre que $df\tilde{\otimes}g$ est continue. La composition avec ψ qui est linéaire conserve la continuité.

Donc le membre de droite de (10.962) est continu et $f\tilde{\otimes}g$ a une différentielle continue. Elle est donc de classe C^1. □

Il est temps de démontrer le truc difficile, à savoir que si f et g sont de classe C^p, alors $f\tilde{\otimes}g$ est également de classe C^p.

PROPooAWZFooMlhoCN

Proposition 10.330.
Nous appelons P_k la propriété suivante :

[135] Il y a surement moyen de paufiner, et d'affaiblir cette hypothèse, mais je ne me lance pas là-dedans.

Pour tout espaces vectoriels normés E, V, W de dimension finies et pour toutes applications $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$ de classe C^k, la fonction $f\tilde{\otimes}g$ est de classe C^k.
ITEMooDQRYooAEdxrW

(1) La propriété P_k est vraie pour tout k.
ITEMooUUIFooGDyTMM

(2) Si $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$ sont de classe C^p, alors $f\tilde{\otimes}g\colon E\to V\otimes W$ est de classe C^p.

Démonstration. Il est compliqué de prouver le point (2) directement par récurrence pour des f, g, E, V et W fixés. La raison de cette difficulté est que les espaces en jeu dans les différentielles de f et g aux différents ordres sont tous différents. Il faut donc, pour chaque ordre de différentielle, repartir sur de tout nouveaux espaces vectoriels. C'est pour cela que nous incluons « pour tout espaces vectoriels » dans la propriété de récurrence.

Bref, une fois que (1) sera démontrée, le point (2) sera immédiat.

(1) **Pour $k=0$** Pour $k=0$. Nous supposons que f et g sont de classe C^0, c'est-à-dire continues. La proposition 10.327 montre alors que $f\tilde{\otimes}g$ est continue, c'est-à-dire de classe C^0.

(2) **Pour $k=1$** Bien que ce ne soit pas tout à fait nécessaire, nous prouvons que P_1 est également vraie avant de passer à la récurrence. Si f et g sont de classe C^1, alors la proposition 10.329 s'applique : $f\tilde{\otimes}g$ est de classe C^1.

(3) **Pour $k+1$** Nous faisons la récurrence en supposant que P_k est vraie, et en prouvant que P_{k+1} est vraie. Nous considérons des applications $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$ de classe C^{k+1}. La proposition 10.329 dit que $f\tilde{\otimes}g$ est de classe C^1 et que

$$d(f\tilde{\otimes}g)=\psi\circ(df\tilde{\otimes}g)+\varphi\circ(f\tilde{\otimes}dg). \tag{10.971}$$

À droite, df et g sont de classe C^k parce que f et g sont de classe C^{k+1}. Donc $df\tilde{\otimes}g$ est de classe C^k par l'hypothèse de récurrence appliquée aux espaces $\mathcal{L}(E,V)$ et W. La proposition 10.318 nous assure alors que $\psi\circ(df\tilde{\otimes}g)$ est de classe C^k également.

Nous avons prouvé que $d(f\tilde{\otimes}g)$ est de classe C^k, donc $f\tilde{\otimes}g$ est de classe C^{k+1}. Cela nous fait la récurrence.

□

10.16.19 Produit cartésien

Lorsque nous parlons de produit cartésien d'espaces vectoriels normés, nous utilisons la norme produit 7.283.
LEMooVFXXooAHjCzc

Lemme 10.331 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés X_1,X_2,Y_1,Y_2 ainsi que des applications différentiables $f\colon X_1\to Y_1$ et $g\colon X_2\to Y_2$. Nous supposons avoir

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\|x\|}=0 \tag{10.972}$$

et

$$\lim_{y\to 0}\frac{g(y)}{\|y\|}. \tag{10.973}$$

Alors nous avons

$$\frac{\big(f(x),g(x)\big)}{\|(x,y)\|}\xrightarrow{X\times Y}0. \tag{10.974}$$

Démonstration. Soit $\epsilon>0$. Il existe $r>0$ tel que si $x\in B_{X_1}(0,r)$ et $y\in B_{X_2}(0,r)$ alors $\|f(x)\|/\|x\|<\epsilon$ et $\|g(y)\|/\|y\|<\epsilon$. Il y a 4 possibilités suivant l'ordre de $\|f(x)\|$ et $\|g(y)\|$ ainsi que de $\|x\|$ et $\|y\|$.

(1) **Si $\|f(x)\|\geqslant\|g(y)\|$**

(1a) **Si $\|x\|\geqslant\|y\|$** Dans ce cas

$$\frac{\|(f(x),g(x))\|}{\|(x,y)\|}=\frac{\max\{\|f(x)\|,\|g(x)\|\}}{\max\{\|x\|,\|y\|\}}=\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\leqslant\epsilon. \tag{10.975}$$

Celle-là était facile.

(1b) **Si $\|y\| \geqslant \|x\|$** Ici nous majorons la fraction en minorant le dénominateur :

$$\frac{\|(f(x),g(x))\|}{\|(x,y)\|} = \frac{\max\{\|f(x)\|,\|g(x)\|\}}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leqslant \epsilon. \tag{10.976}$$

(2) **Si $\|f(y)\| \geqslant \|g(y)\|$**

(2a) **Si $\|x\| \geqslant \|y\|$**

$$\frac{\|(f(x),g(x))\|}{\|(x,y)\|} = \frac{\max\{\|f(x)\|,\|g(x)\|\}}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} = \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} \leqslant \epsilon. \tag{10.977}$$

(2b) **Si $\|y\| \geqslant \|x\|$**

$$\frac{\|(f(x),g(x))\|}{\|(x,y)\|} = \frac{\max\{\|f(x)\|,\|g(x)\|\}}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} \leqslant \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} \leqslant \epsilon. \tag{10.978}$$

Dans nous les cas nous avons bien

$$\frac{\|\big(f(x),g(y)\big)\|}{\|(x,y)\|} \leqslant \epsilon. \tag{10.979}$$

□

LEMooAAYVooJZyRTq

Lemme 10.332 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés X_1, X_2, Y_1, Y_2 ainsi que des applications différentiables $f\colon X_1 \to Y_1$ et $g\colon X_2 \to Y_2$. Soient $a \in X_1$ et $b \in X_2$. Alors l'application

$$\begin{aligned} f \times g\colon X_1 \times X_2 &\to Y_1 \times Y_2 \\ (x,y) &\mapsto \big(f(x),g(y)\big) \end{aligned} \tag{10.980}$$

est différentiable en (a,b) et

$$f(f\times g)_{a,b}(x,y) = \big(df_a(x), dg_b(y)\big). \tag{10.981}$$

Démonstration. Nous vérifions que l'application $T(x,y) = \big(df_a(x), dg_b(y)\big)$ satisfait la définition de la différentielle. Nous avons

$$\begin{aligned} &\frac{(f\times g)\big((a,b)+(h_1,h_2)\big) - (f\times g)(a,b) - T(h_1,h_2)}{\|h\|} \\ &= \frac{\Big(f(a+h_1) - f(a) - df_a(h_2), g(b+h_2) - g(b) - dg_b(h_2)\Big)}{\|h\|}. \end{aligned} \tag{10.982}$$

Le lemme 10.331 montre alors que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f\times g)\big((a,b)+(h_1,h_2)\big) - (f\times g)(a,b) - T(h)}{\|h\|} = 0, \tag{10.983}$$

et donc que $f \times g$ est différentiable en (a,b) et que sa différentielle est T. □

Nous verrons dans la proposition 15.225 que $f \times g$ est analytique si f et g le sont.

PROPooCOBHooICFDMU

Proposition 10.333 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés X_1, X_2, Y_1, Y_2 ainsi que des applications $f\colon X_1 \to Y_1$ et $g\colon X_2 \to Y_2$ de classe $\mathcal{A}$ (différentiable, C^k). Alors l'application

$$f \times g\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2 \tag{10.984}$$

est dans la classe $\mathcal{A}$.

Démonstration. En plusieurs parties.

Différentiable

C'est le lemme 10.332.

Classe C^k

Nous y allons par récurrence. Si f et g sont de classe C^k, alors $a \mapsto df_a$ et $b \mapsto df_b$ sont de classe C^{k-1}. Vu que $d(f \times g)_{a(,b)} = df_a \times df_b$, l'application $(a,b) \mapsto d(f \times g)_{(a,b)}$ est produit cartésien d'applications C^{k-1}. Par hypothèse de récurrence, ce produit est de classe C^{k-1}. Vu que $d(f \times g)$ est de classe C^{k-1}, l'application $f \times g$ elle-même est de classe C^k. □

PROPooCILMooHCcOYU

Proposition 10.334 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés X et Y. La projection

$$\begin{aligned} \texttt{proj}\colon X \times Y &\to X \\ (x,y) &\mapsto x \end{aligned} \tag{10.985}$$

est de classe C^∞.

Démonstration. Soit $(a,b) \in X \times Y$. Le candidat différentielle de $\texttt{proj}$ en (a,b) est l'application

$$\begin{aligned} T\colon X \times Y &\to X \\ (x,y) &\mapsto x. \end{aligned} \tag{10.986}$$

Nous avons

$$\frac{\texttt{proj}\big((x,y)+h\big) - \texttt{proj}(x,y) - T(h_1,h_2)}{\|h\|} = \frac{x + h_1 - x - h_1}{\|h\|} = 0. \tag{10.987}$$

Même pas besoin de prendre de limite. Donc pour tout $(a,b) \in X \times Y$ nous avons

$$d\,\texttt{proj}_{(a,b)} = T. \tag{10.988}$$

Vu que l'application différentielle

$$\begin{aligned} d\,\texttt{proj}\colon X \times Y &\to \mathcal{L}(X \times Y, X) \\ (a,b) &\mapsto T \end{aligned} \tag{10.989}$$

est constante, elle est de classe C^∞. □

PROPooHYASooHxYIBc

Proposition 10.335 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés X, Y_1 et Y_2. Nous considérons une application $\varphi\colon X \to Y_1 \times Y_2$, et les applications $f\colon X \to Y_1$ et $g\colon X \to Y_2$ définies par

$$\varphi(x) = \big(f(x), g(x)\big). \tag{10.990}$$

Alors f et g sont de classe C^k.

Démonstration. En utilisant la projection $\texttt{proj}\colon X \times Y \to X$ de la proposition 10.334, nous avons $f = \texttt{proj} \circ \varphi$. Cette application est de classe C^k en tant que composition d'application de classe C^k. □

10.16.20 Formule des accroissements finis

PropDQLhSoy

Proposition 10.336.
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et deux fonctions

$$f\colon [a,b] \to E \tag{10.991a}$$
$$g\colon [a,b] \to \mathbb{R} \tag{10.991b}$$

continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Si pour tout $t \in]a,b[$ nous avons $\|f'(t)\| \leqslant g'(t)$ alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a). \tag{10.992}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|f(t) - f(a)\| - g(t) - \epsilon t. \end{aligned} \tag{10.993}$$

Cela est une fonction continue réelle à variable réelle. En particulier pour tout $u \in]a,b[$ la fonction φ_ϵ est continue sur le compact $[u,b]$ et donc y atteint son minimum en un certain point $c \in [u,b]$; c'est le bon vieux théorème de Weierstrass 7.196. Nous commençons par montrer que pour tout u, ledit minimum ne

peut être que b. Pour cela nous allons montrer que si $t \in [u,b[$, alors $\varphi_\epsilon(s) < \varphi_\epsilon(t)$ pour un certain $s > t$. Par continuité si s est proche de t nous avons

$$\left\| \frac{f(s)-f(t)}{s-t} \right\| - \frac{\epsilon}{2} < \|f'(t)\| < g'(t) + \frac{\epsilon}{2} = \frac{g(s)-g(t)}{s-t} + \frac{\epsilon}{2}. \tag{10.994}$$

Ces inégalités proviennent de la limite

$$\lim_{s\to t} \frac{f(s)-f(t)}{s-t} = f'(t), \tag{10.995}$$

donc si s et t sont proches,

$$\left\| \frac{f(s)-f(t)}{s-t} - f'(t) \right\| \tag{10.996}$$

est petit. Si $s > t$ nous pouvons oublier des valeurs absolues et transformer l'inégalité en

$$\|f(s)-f(t)\| < g(s)-g(t)+\epsilon(s-t). \tag{10.997}$$

Utilisant cela et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon(s) &\leqslant \|f(s)-f(t)\| + \|f(t)-f(a)\| - g(s) - \epsilon s & (10.998a)\\ &\leqslant g(s)-g(t)+\epsilon s - \epsilon t + \|f(t)-f(a)\| - g(s) - \epsilon s & (10.998b)\\ &= \varphi_\epsilon(t). & (10.998c) \end{aligned}$$

Donc nous avons bien $\varphi_\epsilon(s) < \varphi_\epsilon(t)$ avec l'inégalité stricte. Par conséquent pour tout $u \in]a,b[$ nous avons $\varphi_\epsilon(b) < \varphi_\epsilon(u)$ et en prenant la limite $u \to a$ nous avons

$$\varphi_\epsilon(b) \leqslant \varphi_\epsilon(a). \tag{10.999}$$

Cette inégalité donne immédiatement

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant g(b)-g(a)+\epsilon(b-a) \tag{10.1000}$$

pour tout $\epsilon > 0$ et donc

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant g(b)-g(a). \tag{10.1001}$$

□

ThoNAKKght

Théorème 10.337 (Théorème des accroissements finis)**.**
Soient E et F des espaces vectoriels normés, U ouvert dans E et une application différentiable $f\colon U \to F$. Pour tout segment $[a,b] \subset U$ nous avons

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \left(\sup_{x\in[a,b]} \|df_x\| \right) \|b-a\|. \tag{10.1002}$$

Démonstration. Nous prenons les applications

$$\begin{aligned} k\colon [0,1] &\to E \\ t &\mapsto f\big((1-t)a+tb\big) \end{aligned} \tag{10.1003}$$

et

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto t \sup_{x\in[a,b]} \|df_x\| \|b-a\|. \end{aligned} \tag{10.1004}$$

Pour tout t nous avons $g'(t) = M\|b-a\|$ où il n'est besoin de dire ce qu'est M. D'un autre côté nous avons aussi

$$\begin{aligned} k'(t) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f\big((1-t-\epsilon)a+(t+\epsilon)b\big) - f\big((1-t)a+tb\big)}{\epsilon} \\ &= \frac{d}{d\epsilon}\Big[f\big((1-t)a+tb+\epsilon(b-a)\big) \Big]_{\epsilon=0} \\ &= df_{(1-t)a+tb}(b-a) \end{aligned} \tag{10.1005}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse de différentiabilité de f sur $[a,b]$ et donc en $(1-t)a+tb$. Nous avons donc

$$\|k'(t)\| \leqslant \|b-a\| \|df_{(1-t)a+tb}\| \leqslant M\|b-a\| = g'(t) \tag{10.1006}$$

La proposition 10.336 est donc utilisable et

$$\|k(1)-k(0)\| \leqslant g(1)-g(0), \tag{10.1007}$$

c'est-à-dire

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant M\|b-a\| \tag{10.1008}$$

comme il se doit. □
ProFSjmBAt

Proposition 10.338.
Soient E et F des espaces vectoriels normés, U ouvert dans E et une application $f\colon U \to F$. Soient $a, b \in U$ tels que $[a,b] \subset U$. Nous posons $u = (b-a)/\|b-a\|$ et nous supposons que pour tout $x \in [a,b]$, la dérivée directionnelle

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x) = \frac{d}{dt}\Big[f(x+tu)\Big]_{t=0} \tag{10.1009}$$

existe. Nous supposons de plus que $\frac{\partial f}{\partial u}(x)$ est continue en $x=a$. Alors

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \left(\sup_{x\in[a,b]} \|\frac{\partial f}{\partial u}(x)\|\right)\|b-a\|. \tag{10.1010}$$

Démonstration. Nous posons évidemment

$$M = \sup_{x\in[a,b]} \|\frac{\partial f}{\partial u}(x)\| \tag{10.1011}$$

et nous considérons les fonctions

$$k(t) = f\big((1-t)a+tb\big) \tag{10.1012}$$

et

$$g(t) = tM\|b-a\|. \tag{10.1013}$$

Pour alléger les notations nous posons $x = (1-t)a+tb$ et nous calculons avec un petit changement de variables dans la limite :

$$k'(t) = \frac{d}{d\epsilon}\Big[f\big(x+\epsilon(b-a)\big)\Big]_{\epsilon=0} = \|b-a\|\frac{d}{d\epsilon}\Big[f\big(x+\frac{\epsilon}{\|b-a\|}(b-a)\big)\Big]_{\epsilon=0} = \|b-a\|\frac{\partial f}{\partial u}(x), \tag{10.1014}$$

et donc encore une fois nous avons

$$\|k'(t)\| \leqslant g'(t), \tag{10.1015}$$

ce qui donne

$$\|k(1)-k(0)\| = g(1)-g(0), \tag{10.1016}$$

c'est-à-dire

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|\frac{\partial f}{\partial u}(x)\|\|b-a\|. \tag{10.1017}$$

□
ThoOYwdeVt

Théorème 10.339.
Soient E, V deux espaces vectoriels normés, une application $f\colon E \to V$, un point $a \in E$ tel que pour tout $u \in E$, la dérivée

$$\frac{d}{dt}\Big[f(x+tu)\Big]_{t=0} \tag{10.1018}$$

existe pour tout $x \in B(a,r)$ et est continue (par rapport à x) en $x=a$. Nous supposons de plus que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0 \tag{10.1019}$$

pour tout $u \in E$. Alors f est différentiable en a et

$$df_a = 0 \tag{10.1020}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Pourvu que $\|h\|$ soit assez petit pour que $a+h \in B(a,r)$, la proposition 10.338 nous donne

$$\|f(a+h)-f(a)\| \leqslant \sup_{x\in[a,a+h]} \|\frac{\partial f}{\partial u}(x)\||h| \tag{10.1021}$$

où $u = h/\|h\|$. Par continuité de $\partial_u f(x)$ en $x=a$ et par le fait que cela vaut 0 en $x=a$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $\|h\| < \delta$ alors

$$\|\frac{\partial f}{\partial u}(a+h)\| \leqslant \epsilon. \tag{10.1022}$$

Pour de tels h nous avons

$$\|f(a+h)-f(a)\| \leqslant \epsilon\|h\|, \tag{10.1023}$$

ce qui prouve que l'application linéaire $T(u)=0$ convient parfaitement pour faire fonctionner la définition 10.279. □

10.16.21 Applications multilinéaires

Nous avons déjà parlé d'applications multilinéaires dans la définition 8.1.

LemFRdNDCd

Lemme 10.340 (Leibniz pour les formes bilinéaires[407]).
Si $B\colon E\times F \to G$ est bilinéaire et continue, elle est C^∞ et

EqXYJgDBt
$$dB_{(x,y)}(u,v) = B(x,v)+B(u,y). \tag{10.1024}$$

Démonstration. D'abord le membre de droite de (10.1024) est une application linéaire et continue, donc c'est un bon candidat à être différentielle. Nous allons prouver que ça l'est, ce qui prouvera la différentiabilité de B. Avec ce candidat, le numérateur de la définition (10.279) s'écrit dans notre cas

$$B\big((x,y)+(u,v)\big) - B(x,y) - B(x,v) - B(u,y) = B(u,v). \tag{10.1025}$$

Il reste à voir que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{B(u,v)}{\|(u,v)\|} = 0 \tag{10.1026}$$

Par l'équation (10.312) nous avons

$$\frac{\|B(u,v)\|}{\|(u,v)\|} \leqslant \frac{\|B\|\|u\|\|v\|}{\|u\|} = \|B\|\|v\| \tag{10.1027}$$

parce que $\|(u,v)\| \geqslant \|u\|$. À partir de là il est maintenant clair que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\|B(u,v)\|}{\|(u,v)\|} = 0, \tag{10.1028}$$

ce qu'il fallait. □

Proposition 10.341 (Règle de Leibniz[407]).
Soient E, F_1, F_2 des espaces vectoriels normés, U ouvert dans E et des applications de classe C^r $(r \geqslant 1)$

$$f_1\colon U \to F_1 \tag{10.1029a}$$
$$f_2\colon U \to F_2 \tag{10.1029b}$$
$$\tag{10.1029c}$$

et $B \in \mathcal{L}^0(F_1\times F_2, G)$. Alors l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon U &\to G\\ x &\mapsto B\big(f_1(x), f_2(x)\big)\end{aligned} \tag{10.1030}$$

est de classe C^r et

EqMNGBXWc
$$d\varphi_x(u) = \varphi\big((df_1)_x(u), f_2(x)\big) + \varphi\big(f_1(x), (df_2)_x(u)\big). \tag{10.1031}$$

Démonstration. Par hypothèse B est continue (c'est la définition de l'espace $\mathcal{L}^0$), et donc C^∞ par le lemme 10.340. Par ailleurs la fonction $f_1 \times f_2$ est de classe C^r parce que f_1 et f_2 le sont et parce que la proposition 10.315 le dit. L'application composée $B \circ (f_1 \times f_2)$ est donc également de classe C^r par le théorème 10.317.

Il ne nous reste donc qu'à prouver la formule 10.1031. En utilisant la différentielle du produit cartésien[136] nous avons

$$f\big(B \circ (f_1 \times f_2)\big)_x(h) = dB_{(f_1\times f_2)(x)}\big((df_1)_x(h), (df_2)_x(h)\big). \tag{10.1032}$$

Nous développons cela en utilisant le lemme 10.340 :

$$\begin{aligned} d\big(B \circ (f_1 \times f_2)\big)_x(h) &= dB_{\big(f_1(x),f_2(x)\big)}\big((df_1)_x(h), (df_2)_x(h)\big) && \text{(10.1033a)}\\ &= B\big(f_1(x), (df_2)_x(h)\big) + B\big((df_1)_x(h), f_2(x)\big), && \text{(10.1033b)} \end{aligned}$$

comme souhaité. □

10.16.22 Différentielle partielle

VJM_CtSKT

Définition 10.342 (Différentielle partielle)**.**
*Soient E, F et G des espaces vectoriels normés et une fonction $f\colon E \times F \to G$. Nous définissons sa **différentielle partielle** sur l'espace E par*

$$\begin{aligned} d_1 f_{(x_0,y_0)}\colon E &\to G\\ u &\mapsto \frac{d}{dt}\Big[f(x_0+tu, y_0)\Big]_{t=0}. \end{aligned} \tag{10.1034}$$

La différentielle d_2 se définit de la même façon.

PropLDN_nHWDF

Proposition 10.343 ([407])**.**
Soient E_1, E_2 et F des espaces vectoriels normés, soit un ouvert $U \subset E_1 \times E_2$ et une fonction $f\colon U \to F$.

ItemRDD_oPmXVi

(1) Si f est différentiable alors les différentielles partielles existent et

$$d_1 f_{(x_0,y_0)}(u) = df_{(x_0,y_0)}(u,0) \tag{10.1035a}$$
$$d_2 f_{(x_0,y_0)}(v) = df_{(x_0,y_0)}(0,v) \tag{10.1035b}$$

où $u \in E_1$ et $v \in E_2$.

(2) Si f est différentiable alors

$$df_{(x_0,y_0)}(u,v) = d_1 f_{(x_0,y_0)}(u) + d_2 f_{(x_0,y_0)}(v). \tag{10.1036}$$

Démonstration. Nous posons $\alpha = (x_0, y_0) \in U$ et

$$\begin{aligned} j_\alpha^{(1)}\colon E_1 &\to E_1 \times E_2\\ x &\mapsto (x, y_0). \end{aligned} \tag{10.1037}$$

C'est une fonction de classe C^∞ et

$$(dj_\alpha^{(1)})_{x_0}(u) = \frac{d}{dt}\Big[j_\alpha^{(1)}(x_0+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[(x_0+tu, y_0)\Big]_{t=0} = (u,0). \tag{10.1038}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (d_1 f)_\alpha(u) &= \frac{d}{dt}\Big[f(x_0+tu, y_0)\Big]_{t=0} && \text{(10.1039a)}\\ &= \frac{d}{dt}\Big[(f\circ j_\alpha^{(1)})(x_0+tu)\Big]_{t=0} && \text{(10.1039b)}\\ &= \big(d(f\circ j_\alpha^{(1)})\big)_{x_0}(u). && \text{(10.1039c)} \end{aligned}$$

À ce moment nous utilisons la règle des différentielles composées 10.317 pour dire que

$$(d_1 f)_\alpha(u) = df_{j_\alpha^{(1)}(x_0)} \circ (dj_\alpha^{(1)})_{x_0}(u) = df_\alpha(u,0). \tag{10.1040}$$

[136] Proposition 10.315.

Voilà qui prouve déjà le point (1).

Pour la suite nous considérons les fonctions

$$\begin{aligned} P_1(x,y)&=x, & J_1(u)&=(u,0),\\ P_2(x,y)&=y, & J_2(v)&=(0,v) \end{aligned} \tag{10.1041}$$

et nous avons l'égalité évidente

$$J_1\circ P_1+J_2\circ P_2=\mathbb{1} \tag{10.1042}$$

sur $E_1\times E_2$. En appliquant df_α à cette dernière égalité, en appliquant à (u,v) et en utilisant la linéarité de df_α nous trouvons

$$\begin{aligned} df_\alpha(u,v)&=df_\alpha\big((J_1\circ P_1)(u,v)\big)+df_\alpha\big((J_2\circ P_2)(u,v)\big) && (10.1043a)\\ &=df_\alpha(u,0)+df_\alpha(0,v) && (10.1043b)\\ &=(d_1f)_\alpha(u)+(d_2f)_\alpha(v) && (10.1043c) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le point (1) pour la dernière égalité. □

10.16.23 L'inverse, sa différentielle

Si E est un espace de Banach, nous sommes intéressés à l'espace $\mathrm{GL}(E)$ des endomorphismes inversibles de E sur E. Cet ensemble est métrique par la formule usuelle

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|T(x)\|_E. \tag{10.1044}$$

PropQAjqUNp

Proposition 10.344 (Thème 41)**.**
Soit E un espace de Banach (espace vectoriel normé complet). Si A est un endomorphisme de E satisfaisant $\|A\|<1$ pour la norme opérateur, alors $(\mathbb{1}-A)$ est inversible et son inverse est donné par

$$(\mathbb{1}-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k. \tag{10.1045}$$

Démonstration. Étant donné que la norme opérateur est une norme algébrique (lemme 10.84), nous avons $\|A^k\|\leqslant\|A\|^k$. Par conséquent la série $\|A^k\|$ est majorée par la série géométrique qui converge[137]. Par conséquent $\sum_k A^k$ est une série absolument convergente et donc convergente par la proposition 10.151 et le fait que $\mathcal{L}(E)$ est complet (proposition 7.318).

Montrons à présent que la somme est l'inverse de $\mathbb{1}-A$ en utilisant le produit terme à terme autorisé par la proposition 10.163 :

$$\sum_{k=0}^{n}A^k(\mathbb{1}-A)=\sum_{k=0}^{n}(A^k-A^{k+1})=\mathbb{1}-A^{n+1}. \tag{10.1046}$$

Par conséquent

$$\|\mathbb{1}-\sum_{k=0}^{n}A^k(\mathbb{1}-A)\|=\|A^{n+1}\|\leqslant\|A\|^{n+1}\to 0. \tag{10.1047}$$

□

ThoCINVBTJ

Théorème 10.345 (Inverse dans $\mathrm{GL}(E)$[408, 407])**.**
Soient E et F des espaces vectoriels normés.

(1) L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert dans $\mathrm{End}(E)$.

(2) L'application inverse

$$\begin{aligned} i\colon \mathrm{GL}(E,F)&\to\mathrm{GL}(F,E)\\ u&\mapsto u^{-1} \end{aligned} \tag{10.1048}$$

est de classe C^∞ et

$$di_{u_0}(h)=-u_0^{-1}\circ h\circ u_0^{-1} \tag{10.1049}$$

pour tout $h\in\mathrm{End}(E)$

[137] Proposition 10.172.

Démonstration. Nous supposons que $\mathrm{GL}(E,F)$ n'est pas vide, sinon ce n'est pas du jeu.

(1) **Cas de dimension finie**

Si la dimension de E et F est finie, elles doivent être égales, sinon il n'y a pas de fonctions inversibles $E \to F$. L'ensemble $\mathrm{GL}(E,F)$ est donc naturellement $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Un élément de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ est dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ si et seulement si son déterminant est non nul. Le déterminant étant une fonction continue (polynomiale) en les entrées de la matrice, l'ensemble $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Même idée pour la régularité de la fonction $i\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $X \mapsto X^{-1}$. Les entrées de X^{-1} sont les cofacteurs de X divisé par $\det(X)$, et donc des polynômes en les entrées de X divisés par un polynôme qui ne s'annule pas sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, et donc sur un ouvert autour de X et de X^{-1}. Bref, tout est C^∞.

Le reste de la preuve parle de la dimension infinie.

(2) **Ouvert autour de l'identité**

Nous commençons par prouver que $B(\mathbb{1},1) \subset \mathrm{GL}(E)$. Pour cela il suffit de remarquer que si $\|u\| < 1$ alors le lemme 10.344 nous donne un inverse de $(1+u)$ en la personne de $\sum_{k=0}^{\infty}(-u)^k$.

(3) **Ouvert en général**

Soit maintenant $u_0 \in \mathrm{GL}(E)$. Si $\|u\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$ alors $\|u_0^{-1}u\| < 1$, ce qui signifie que

$$\mathbb{1} + u_0^{-1}u \tag{10.1050}$$

est inversible. Mais $u_0 + u = u_0(\mathbb{1} + u_0^{-1}u)$, donc $u_0 + u \in \mathrm{GL}(E)$ ce qui signifie que

$$B\left(u_0, \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}\right) \subset \mathrm{GL}(E). \tag{10.1051}$$

(4) **Différentielle en l'identité**

Nous commençons par prouver que $di_{\mathbb{1}}(u) = -u$. Pour cela nous posons

$$\alpha(h) = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k h^k \tag{10.1052}$$

et nous calculons

$$di_{\mathbb{1}}(u) = \frac{d}{dt}\Big[i(\mathbb{1}+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[\mathbb{1} - tu + \alpha(tu)\Big]_{t=0}. \tag{10.1053}$$

Il suffit de prouver que $\frac{d}{dt}\Big[\alpha(tu)\Big]_{t=0} = 0$ pour conclure que $di_{\mathbb{1}}(u) = -u$. Pour cela, nous remarquons que $\alpha(0) = 0$ et donc que

$$\frac{d}{dt}\Big[\alpha(tu)\Big]_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\alpha(tu)-\alpha(0)}{t} \tag{10.1054a}$$

$$= \lim_{t\to 0}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{(tu)^k}{t} \tag{10.1054b}$$

$$= -\lim_{t\to 0} u\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k t^k u^k. \tag{10.1054c}$$

La norme de ce qui est dans la limite est majorée par

$$\|u\|\sum_{k=1}^{\infty}\|tu\|^k = \|u\|\left(\frac{1}{1-\|tu\|} - 1\right), \tag{10.1055}$$

et cela tend vers zéro lorsque $t \to \infty$. Nous avons utilisé la somme 10.470 de la série géométrique. Nous avons bien prouvé que $di_{\mathbb{1}}(u) = -u$.

(5) **Différentielle en général** Soit maintenant $u_0 \in \mathrm{GL}(E)$ et $h \in \mathrm{End}(E)$ tel que $u_0 + h \in \mathrm{GL}(E)$; par le premier point, il suffit de prendre $\|h\|$ suffisamment petit. Vu que $u_0 + h = u_0(\mathbb{1} + u_0^{-1}h)$ nous avons

$$(u_0+h)^{-1} = (\mathbb{1} + u_0^{-1}h)^{-1}u_0^{-1}. \tag{10.1056}$$

Nous pouvons donc calculer

$$(u_0+h)^{-1}=\big(\mathbb{1}-u_0^{-1}h+\alpha(u_0^{-1}h)\big)u_0^{-1}=u_0^{-1}-u_0^{-1}hu_0^{-1}+\alpha(u_0^{-1}h)u_0^{-1},\tag{10.1057}$$

et ensuite

$$di_{u_0}(h)=\frac{d}{dt}\Big[i(u_0+th)\Big]_{t=0}=\frac{d}{dt}\Big[u_0^{-1}-tu_0^{-1}hu_0^{-1}+\alpha(tu_0^{-1}h)u_0^{-1}\Big]_{t=0},\tag{10.1058}$$

mais nous avons déjà vu que

$$\frac{d}{dt}\Big[\alpha(th)\Big]_{t=0}=0,\tag{10.1059}$$

donc

$$di_{u_0}(h)=-u_0^{-1}hu_0^{-1}\tag{10.1060}$$

Cela donne la différentielle de l'application inverse.

(6) **Continuité de l'inverse**

L'application i est continue parce que différentiable.

(7) **L'inverse est C^∞**

Nous allons écrire la fonction inverse comme une composée. Soient les applications

$$\begin{aligned}B\colon \mathcal{L}^0(F,E)\times\mathcal{L}^0(F,E)&\to\mathcal{L}^0\big(\mathcal{L}^0(E,F),\mathcal{L}^0(F,E)\big)\\ B(\psi_1,\psi_2)(A)&=-\psi_1\circ A\circ\psi_2\end{aligned}\tag{10.1061}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta\colon \mathcal{L}^0(F,E)&\to\mathcal{L}^0(F,E)\times\mathcal{L}^0(F,E)\\ \varphi&\mapsto(\varphi,\varphi)\end{aligned}\tag{10.1062}$$

Nous avons alors

$$di=B\circ\Delta\circ i.\tag{10.1063}$$

L'application Δ est de classe C^∞. Nous devons voir que B l'est aussi. Pour le voir nous commençons par prouver qu'elle est bornée :

$$\begin{aligned}\|B\|&=\sup_{\|\psi_1\|,\|\psi_2\|=1}\|B(\psi_1,\psi_2)\|_{\mathcal{L}\left(L(E,F),L(F,E)\right)}\\ &=\sup_{\|\psi_1\|,\|\psi_2\|=1}\sup_{\|A\|=1}\|\psi_1\circ A\circ\psi_2\|_{L(F,E)}\\ &\leqslant\sup_{\|\psi_1\|,\|\psi_2\|=1}\sup_{\|A\|=1}\|\psi_1\|\|A\|\|\psi_2\|\\ &\leqslant 1.\end{aligned}\tag{10.1064}$$

Donc B est bien bornée et par conséquent continue. Une application bilinéaire continue est C^∞ par le lemme 10.340. La décomposition $di=B\circ\Delta\circ i$ nous donne donc que $i\in C^\infty$ dès que i est continue, ce que nous avions déjà montré.

□

10.17 Exponentielle de matrice

PropPEDSoAOmSXQM

Proposition 10.346.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A\in\mathrm{End}(V)$. La série

$$\exp(A)=\mathbb{1}+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}.\tag{10.1065}$$

converge normalement[138] *dans $\big(\mathrm{End}(V),\|.\|_{op}\big)$. L'**exponentielle** de la matrice A est cette matrice.*

[138] Convergence normale, définition 10.119.

Démonstration. Vu que la norme opérateur est une norme d'algèbre par le lemme 10.84, nous avons pour tout k la majoration $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$. Nous avons donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leqslant \sum_{k} \frac{\|A\|^k}{k!}. \tag{10.1066}$$

La dernière somme converge en vertu de la convergence de la série exponentielle donnée en le lemme 10.173. □

Étant donné que c'est une limite, il y a une question de convergence et donc de topologie. C'est pour cela que nous ne pouvions pas introduire l'exponentielle de matrice avant d'avoir introduit la norme des matrices. La convergence de la série pour toute matrice sera prouvée au passage dans la proposition 10.347.

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ n'est pas un polynôme en x, mais nous avons le résultat marrant suivant.

PropFMqsIE

Proposition 10.347.
Si u est un endomorphisme, alors $\exp(u)$ *est un polynôme en u*[139].

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_u \colon \mathbb{K}[X] &\to \mathrm{End}(E) \\ P &\mapsto P(u) \end{aligned} \tag{10.1067}$$

Étant donné que l'image de φ_u est un fermé dans $\mathrm{End}(E)$, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_u(X)^k}{k!} \tag{10.1068}$$

converge dans $\mathrm{End}(E)$ pour qu'elle converge dans $\mathrm{Image}(\varphi_u)$. Pour ce faire nous nous rappelons de la norme opérateur[140] et de la propriété fondamentale $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$. En notant $A = \varphi_u(X)$,

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \frac{A^k}{k!} \right\| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \frac{\|A^k\|}{k!} \leqslant \sum_{k=n}^{m} \frac{\|A\|^k}{k!}, \tag{10.1069}$$

ce qui est une morceau du développement de $e^{\|A\|}$. La limite $n \to \infty$ est donc zéro par la convergence de l'exponentielle réelle. La suite des sommes partielles de e^A est donc de Cauchy. La série converge donc parce que nous sommes dans un espace vectoriel réel de dimension finie ($\mathrm{End}(E)$). □

10.348.
Pourquoi $\exp(u)$ est-il un polynôme d'endomorphisme alors que exp n'est pas un polynôme ? Lorsque nous disons que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ n'est pas un polynôme, nous sommes en train de localiser la fonction exp à l'intérieur de l'espace de toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire à l'intérieur d'un espace de dimension infinie. Au contraire lorsqu'on parle de $\exp(u)$ et qu'on le compare aux endomorphismes $P(u)$, nous sommes en train de repérer $\exp(u)$ à l'intérieur de l'espace des matrices qui est de dimension finie. Il n'est donc pas étonnant que l'on parvienne moins à faire la distinction.

Si par contre nous considérons exp en tant qu'application $\exp\colon \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$, ce n'est pas un polynôme.

Si u et v sont des endomorphismes, nous aurons des polynômes P et Q tels que $e^u = P(u)$ et $e^v = Q(v)$; mais nous n'aurons en général évidemment pas $P = Q$. En cela, exp n'est pas un polynôme.

10.18 Espace dual

SECooKOJNooQVawFY

Définition 10.349.
Soit un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ sur le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (que nous nommons $\mathbb{K}$). Son ***dual topologique****, noté V' est l'ensemble des applications linéaires continues $V \to \mathbb{K}$.*

[139] Nan, mais j'te jure : exp n'est pas un polynôme, mais $\exp(u)$ est un polynôme de u.
[140] Définition 10.67.

10.18.1 Topologies

Il est possible de mettre sur V' (au moins) deux topologies distinctes. La première est la topologie de la norme opérateur ; rien de nouveau pour elle. La seconde est la topologie $*$-faible dont nous avons déjà un peu parlé dans la définition 7.411.

En termes de notations, nous allons noter les seminormes de la topologie faible par

$$p_x(\varphi) = |\varphi(x)| \tag{10.1070}$$

pour $x \in V$ et $\varphi \in V'$. À droite, les barres dénotent soit la valeur absolue (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), soit le module (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

LEMooFMAUooQBIeTh

Lemme 10.350.
Soit $\varphi \in V'$ et $x \in V$. Alors

$$p_x(\varphi) \leqslant \|x\|\|\varphi\|. \tag{10.1071}$$

Si $\varphi_0 \in V'$, si $r > 0$ et si $x \in V$ nous avons aussi :

$$B(\varphi_0, r) \subset B_x(\varphi_0, \|x\|r). \tag{10.1072}$$

Démonstration. En posant $x' = x/\|x\|$, le vecteur x' est de norme 1 et nous avons

$$p_x(\varphi) = |\varphi(x)| = \|x\||\varphi(x')| \leqslant \|x\|\|\varphi\|. \tag{10.1073}$$

En ce qui concerne la seconde affirmation, si $\varphi \in B(\varphi_0, r)$ alors en notant $x' = x/\|x\|$ nous avons :

$$p_x(\varphi_0 - \varphi) = |\varphi_0(x) - \varphi(x)| = |(\varphi_0 - \varphi)(x)| \leqslant \|x\|\|\varphi_0 - \varphi\| \leqslant r\|x\|. \tag{10.1074}$$

Donc $\varphi \in B_x\big(\varphi_0, r\|x\|\big)$. □

PROPooMINIooGCWsPR

Proposition 10.351.
Si une suite(φ_k) dans V' vérifie

$$\varphi_k \xrightarrow{\|.\|} \varphi \tag{10.1075}$$

alors elle vérifie aussi

$$\varphi_k \xrightarrow{*} \varphi. \tag{10.1076}$$

Démonstration. Soit une suite (φ_k) dans V', convergente vers φ pour la topologie de la norme. Soit $x \in V$, et $x' = x/\|x\|$. Nous avons

$$p_x(\varphi_k - \varphi) = \|x\||\varphi_k(x') - \varphi(x)| \leqslant \|x\|\|\varphi_k - \varphi\| \to 0. \tag{10.1077}$$

□

LEMooEAVEooAFveHn

Lemme 10.352.
La translation dans V' est une opération continue pour la topologie de la norme opérateur et pour celle de la topologie $*$.

Démonstration. Soit une suite φ_k tendant vers 0 ; nous devons prouver que $\tau_\sigma(\varphi_k) \to \tau_\sigma(0) = \sigma$. Et ce, pour chacune des deux topologies.

(1) **Norme opérateur**

L'hypothèse $\varphi_k \xrightarrow{\|.\|} 0$ signifie que $\|\varphi_k\| \to 0$, c'est-à-dire que

$$\sup_{\|v\|=1} |\varphi_k(v)| \to 0. \tag{10.1078}$$

Nous avons alors

$$\|\tau_\sigma(\varphi_k) - \sigma\| = \sup_{\|v\|=1} |\tau_\sigma(\varphi_k)v - \sigma(v)| = \sup_{\|v\|=1} |\varphi_k(v)| \to 0. \tag{10.1079}$$

Donc d'accord pour $\tau_\sigma(\varphi) \to \sigma$.

(2) **Topologie $*$**

Nous supposons maintenant que $\varphi_k \xrightarrow{*} 0$. Pour tout $v \in V$ nous avons

$$p_v\big(\tau_\sigma(\varphi_k) - \sigma\big) = \big|\tau_\sigma(\varphi_k)v - \sigma(v)\big| = |\varphi_k(v)| = p_v(\varphi_k). \tag{10.1080}$$

Mais par hypothèse, $p_v(\varphi_k) \to 0$.

□

Pour la suite, nous allons préfixer par N les concepts liés à la topologie de V' associée à la norme opérateur et par $*$, les concepts de la topologie $*$.

PROPooFGXAooFRWweD

Proposition 10.353.
Soit un espace vectoriel normé V. Un $*$-ouvert est toujours un N-ouvert.

Démonstration. Soit un $*$-ouvert $\mathcal{O}$ de V'. Il existe donc $x \in V$ et $r > 0$ tels que $B_x(\varphi, r) \subset \mathcal{O}$. Nous avons alors, en utilisant le lemme 10.350,

$$B(\varphi, r\|x\|) \subset B_x(\varphi, r) \subset \mathcal{O}. \tag{10.1081}$$

Donc $\mathcal{O}$ est un N-ouvert. □

Corolaire 10.354.
Soit un espace topologique X. Si $f\colon (V', *) \to X$ est continue, alors $f\colon (V', \|.\|) \to X$ est continue.

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de X. Vu que f est $*$-continue, la partie $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un $*$-ouvert de V'. Il est onc un N-ouvert de V' par la proposition 10.353. □

10.18.2 Module de continuité

DEFooYARJooYyzMMP

Définition 10.355.
*Soient deux espaces topologiques normés X et Y, ainsi qu'une application $f\colon X \to Y$. Le **module de continuité** de f est la fonction*

$$\begin{aligned} \omega_f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \\ h &\mapsto \sup_{\substack{x,y\in X \\ d_X(x,y)<h}} d_Y\big(f(x), f(y)\big). \end{aligned} \tag{10.1082}$$

Écrite de façon plus compacte,

EQooKWUVooSQRHXN

$$\omega_f(h) = \sup_{|x-y|<h} \|f(x) - f(y)\|. \tag{10.1083}$$

Nous définissons aussi $\omega_f(h) = 0$ pour $h \leqslant 0$ parce que le lemme 10.357 fera grand cas de la continuité en zéro du module de continuité.

Notons que le module de continuité est une fonction croissante.

LemLUbgYeo

Lemme 10.356.
Soit $f \in C^0\big([0,1], \mathbb{C}\big)$ et ω son module de continuité. Si λ et h sont strictement positifs avec $\lambda h \in [0,1]$ alors

$$\omega(\lambda h) \leqslant (\lambda + 1)\omega(h). \tag{10.1084}$$

Démonstration. La fonction ω est croissante, et pour $h, k > 0$ nous avons $\omega(h + k) \leqslant \omega(h) + \omega(k)$. Par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\omega(kh) \leqslant k\omega(h). \tag{10.1085}$$

En écrivant cela pour $k = \lceil \lambda \rceil$, nous avons

$$\omega(\lambda h) \leqslant \omega(kh) \leqslant k\omega(h) \leqslant (\lambda + 1)\omega(h). \tag{10.1086}$$

□

LemeERapq

Lemme 10.357.
Une fonction $f\colon X \to Y$ est uniformément continue[141] si et seulement si son module de continuité vérifie

$$\lim_{h\to 0} \omega_f(h) = 0. \tag{10.1087}$$

Autrement dit, si et seulement si sont module de continuité est continu en zéro.[142].

[141] Définition 7.377.
[142] Dans ce lemme, nous avons deux espaces métriques, mais nous allons noter d la distance des deux côtés.

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est uniformément continue. Soit $\epsilon > 0$. Par uniforme continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \epsilon$ dès que $d(x, y) \leqslant \delta$. Si $h \in B(0, \delta)$, alors

$$\omega_f(h) \leqslant \omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x,y\in X\\ d(x,y)\leqslant\delta}} d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \epsilon. \tag{10.1088}$$

Cela prouve que $\lim_{h\to 0} \omega_f(h) = 0$.

Dans l'autre sens, si $\epsilon > 0$ est fixé, il suffit de prendre δ tel que $\omega_f(h) \leqslant \epsilon$ pour tout $h \leqslant \delta$ pour faire fonctionner la définition de l'uniforme continuité. □

LEMooKPPSooPIncvn

Lemme 10.358 ([409]).
Soient des espaces métriques E et E' et une suite de fonctions $(f_i)_{i\geqslant 0}$ qui converge uniformément vers f. Alors pour chaque $\delta > 0$ nous avons

$$\limsup_{i\to\infty} \omega_{f_i}(\delta) \leqslant \omega_f(\delta). \tag{10.1089}$$

Démonstration. Soient $\delta > 0$ ainsi que $x, y \in E$ tels que $d(x, y) \leqslant \delta$. Pour chaque i nous avons

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leqslant |f_i(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_i(y)| \tag{10.1090a}$$
$$\leqslant |f(x) - f(y)| + 2\|f_i - f\|_\infty \tag{10.1090b}$$
$$\leqslant \omega_f(\delta) + 2\|f_i - f\|_\infty. \tag{10.1090c}$$

Nous prenons le supremum de cela sur $\{x, y \in E \text{ tel que } \|x - y\| \leqslant \delta\}$ pour obtenir :

$$\omega_{f_i}(\delta) \leqslant \omega_f(\delta) + 2\|f_i - f\|_\infty. \tag{10.1091}$$

La tentation est grande à ce point de prendre la limite des deux côtés pour $i \to \infty$. Cependant, rien ne nous permet de dire que la suite $i \mapsto \omega_{f_i}(\delta)$ ait une limite. Nous pouvons cependant prendre la limite supérieure[143] et obtenir

$$\limsup_{i\to\infty} \omega_{f_i}(\delta) \leqslant \omega_f(\delta). \tag{10.1092}$$

□

10.19 Mini introduction aux nombres p-adiques

10.19.1 La flèche d'Achille

s:un

C'est un grand classique que je donne ici juste comme introduction pour montrer que des séries infinies peuvent donner des nombres finis de manière tout à fait intuitive.

Achille tire une flèche vers un arbre situé à 10 m de lui. Disons que la flèche avance à une vitesse constante de 1 m/s. Il est clair que la flèche mettra 10 s pour toucher l'arbre. En 5 s, elle aura parcouru la moitié de son chemin. On le note :

$$\text{temps} = 5s + \dots$$

Reste 5 m à faire. En 2.5 s, elle aura fait la moitié de ce chemin, soit $2.5m = \frac{10}{4}m$. On le note :

$$\text{temps} = \frac{10}{2}s + \frac{10}{4}s +$$

Reste $2.5m$ à faire. La moitié de ce trajet, soit $\frac{10}{8}m$, est parcouru en $\frac{10}{8}s$; on le note encore, mais c'est la dernière fois !

$$\text{temps} = \frac{10}{2}s + \frac{10}{4}s + \frac{10}{8}s +$$

En continuant ainsi à regarder la flèche qui parcourt des demi-trajets puis des moitiés de demi-trajets et encore des moitiés de moitiés de demi-trajets, et en sachant que le temps total est $10s$, on trouve :

$$10\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\right) = 10.$$

On doit donc croire que la somme jusqu'à l'infini des inverses des puissances de deux vaut 1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Cela peut être démontré à la loyale.

[143] Définition 9.43.

10.19.2 La tortue et Achille

Maintenant qu'on est convaincu que des sommes infinies peuvent représenter des nombres tout à fait normaux, passons à un truc plus marrant.

Achille, qui marche peinard à 10 m/h, part avec $1m$ d'avance sur une tortue qui avance à 1 m/h. Le temps que la tortue arrive au point de départ d'Achille, Achille aura parcouru $10m$, et le temps que la tortue mettra pour arriver à ce point, eh bien, Achille ne sera déjà plus là : il sera à $100m$. Si la tortue tient bon pendant un temps infini, et si l'on est confiant en le genre de raisonnements faits à la section 10.19.1, elle rattrapera Achille dans

$$1m + 10m + 100m + 1000m + \dots$$

Autant dire que ça ne risque pas d'arriver. Et pourtant, mettons en équations :

$$\begin{cases} x_{\text{Achile}}(t) = 1 + 10t & \text{(10.1093a)} \\ x_{\text{tortue}}(t) = t. & \text{(10.1093b)} \end{cases}$$

La tortue rejoint Achille au temps t tel que $x_{\text{Achille}(t)} = x_{\text{tortue}}(t)$. Un mini calcul donne $t = -1/9$. Physiquement, c'est une situation logique. Peut-on en déduire une égalité mathématique du style de

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \dots = -\frac{1}{9} \text{ ???}$$

Là où les choses deviennent jolies, c'est quand on cherche à voir ce que peut bien être la valeur d'un hypothétique $x = 1 + 10 + 100 + 1000 + \dots$. En effet, logiquement on devrait avoir

$$\begin{aligned} \frac{x}{10} &= \frac{1}{10} + 1 + 10 + 100 + \dots \\ &= \frac{1}{10} + x. \end{aligned}$$

Reste à résoudre l'équation du premier degré : $\frac{x}{10} = x + \frac{1}{10}$. Ai-je besoin de donner la solution ?

10.19.3 Dans les nombres p-adiques, c'est vrai

Nous nous proposons d'apprendre sur les nombres p-adiques juste ce qu'il faut pour montrer que l'égalité

$$\sum_{k=0}^{\infty} 10^k = -\frac{1}{9} \tag{10.1094}$$

est vraie dans les nombres 5-adiques. Tout ce qu'il faut est sur Wikipédia.

Soit $a \in \mathbb{N}$ et p, un nombre premier. La **valuation** p-adique de a est l'exposant de p dans la décomposition de a en nombres premiers. On la note $v_p(a)$. Pour un rationnel on définit

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b) \tag{10.1095}$$

La **valeur absolue** p-adique de $r \in \mathbb{Q}$ est

$$|r|_p = p^{-v_p(r)}. \tag{10.1096}$$

Nous posons $|0|_p = 0$. De là nous considérons la distance

$$d_p(x, y) = |x - y|_p. \tag{10.1097}$$

LEMooQNHZooXlHdUc

Lemme 10.359.
L'espace $(\mathbb{Q}, d_p)$ est un espace métrique[144].

Nous considérons maintenant $p = 5$. Étant donné que $a = 5 \cdot 2$ nous avons $v_5(10) = 1$ et

$$v_5\left(\frac{1}{9}\right) = v_5(1) - v_5(9) = 0. \tag{10.1098}$$

Nous avons

$$\sum_{k=0}^{N} 10^k + \frac{1}{9} = \frac{10^{N+1}}{9} \tag{10.1099}$$

[144] Définition 7.139

mais

$$v_p\left(\frac{10^{N+1}}{9}\right) = v_5(10^{N+1}) - v_5(9) = N+1. \tag{10.1100}$$

Par conséquent

$$d_5\big(\sum_{k=0}^{N} 10^k, -\frac{1}{9}\big) = |\frac{10^{N+1}}{9}|_p = p^{-(N+1)}. \tag{10.1101}$$

En passant à la limite,

$$\lim_{N\to\infty} d_5\big(\sum_{k=0}^{N} 10^k, -\frac{1}{9}\big) = 0, \tag{10.1102}$$

ce qui signifie que[145]

$$\sum_{k=0}^{\infty} 10^k = -\frac{1}{9}. \tag{10.1103}$$

[145] Voir la définition 10.111 de la convergence d'une série dans un espace métrique.

Chapitre 11

Espaces affines

11.1 Vecteurs agissant sur un espace

Définition 11.1.
Soit E, un espace vectoriel. Un ***espace affine modelé sur*** *E est un ensemble $\mathcal{E}$ sur lequel le groupe $(E,+)$ agit à droite transitivement et librement*[1].

Étant donné que E est un groupe commutatif, l'action peut être vue indifféremment à gauche ou à droite. Si $M \in \mathcal{E}$ et si $x \in E$ nous notons $M+x$ au lieu de $x \cdot M$ le résultat de l'action de x sur M.
NORMooZANAooQdXqlh

11.2.
Lorsque nous écrivons « $M+x$ », le symbole plus n'est pas une loi de composition interne de $\mathcal{E}$, mais une action.
DEFooWAYTooMLbqEE

Proposition-Définition 11.3.
Soient $N, M \in \mathcal{E}$. Il existe un unique $x \in E$ tel que $M+x=N$.
Nous noterons $\overrightarrow{MN}$ ce vecteur.

Démonstration. La transitivité de l'action assure l'existence et la liberté assure l'unicité. □
LEMooFZCRooQxzObv

Lemme 11.4.
Pour tout élément A nous avons $A+0=A$.

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{E}$. Nous avons :

$$B+0=B+(0+0)=(B+0)+0 \tag{11.1}$$

parce que le $+$ dénote une action.
En appliquant cette égalité à l'élément $B=A-0$ nous trouvons l'égalité demandée. □
PROPooCOZCooCghwaR

Proposition 11.5.
Soit un espace affine $\mathcal{E}$ modelé sur l'espace vectoriel E. Soient $A,B,C \in \mathcal{E}$. Nous avons les égalités suivantes dans E :
ITEMooSDMIooUQiKeW

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ *(relations de Chasles),*
ITEMooWZAVooGfGBwd

(2) $\overrightarrow{AA}=0$,
ITEMooLDVXooFZMbsQ

(3) $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Nous avons, par définition 11.3 les égalités

$$\begin{cases} C=A+\overrightarrow{AC} & \text{(11.2a)} \\ B=A+\overrightarrow{AB} & \text{(11.2b)} \\ C=B+\overrightarrow{BC} & \text{(11.2c)} \end{cases}$$

[1] Définition 2.46.

En substituant les deux premières dans la troisième, nous trouvons $A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=A+\overrightarrow{AC}$. Par liberté de l'action, nous pouvons « simplifier » par A et trouver la relation de Chasles.

(2) **Pour (2)** Nous avons $A+\overrightarrow{AA}=A$, mais aussi $A+0=A$. Par unicité nous avons $\overrightarrow{AA}=0$.

(3) **Pour (3)** Nous avons $B+\overrightarrow{BA}=A$ et $A+\overrightarrow{AB}=B$. En mettant bout à bout,

$$B+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=B. \tag{11.3}$$

Donc $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=0$.

□

NORMooXAJLooIupekj

11.6.
Si E est un espace vectoriel, le groupe $(E,+)$ agit sur E par l'action $t_y(x)=y+x$. Utilisant cette action nous construisons l'**espace affine canonique** de E. En particulier nous notons $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$ l'espace affine canonique de $\mathbb{K}^n$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- En tant qu'ensembles, $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})=\mathbb{K}^n$.
- Sur cet espace en particulier, si $M,N\in\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$, nous avons $\overrightarrow{MN}=N-M$ où à droite, la différence est la différence vectorielle dans $\mathbb{K}^n$.

Ces deux points se généralisent immédiatement à un espace vectoriel E au lieu de $\mathbb{K}^n$.

11.2 Repères cartésiens affines

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{E}$ un espace affine construit sur E.

DEFooQELZooEXvxgw

Définition 11.7.
*Un multiplet $(A,e_1,\dots,e_n)$ où A est un point de $\mathcal{E}$ et $\{e_i\}$ est une base de E est un **repère cartésien** de $\mathcal{E}$.*

*Nous disons que $\{e_i\}$ est la **base associée** au repère.*

Proposition 11.8.
Si $\mathcal{E}$ est un espace affine modelé sur l'espace vectoriel E de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$, et si $\big(A,\{e_i\}_{i=1,\dots,n}\big)$ est un repère cartésien, alors

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{K}^n&\to\mathcal{E}\\ (x_1,\dots,x_n)&\mapsto A+\sum_i x_ie_i.\end{aligned} \tag{11.4}$$

est une bijection.

*Ces nombres x_i sont les **coordonnées** du point $A+\sum_i x_ie_i$ dans le repère (A,e_i).*

Démonstration. L'application ϕ est surjective parce que l'action de E sur $\mathcal{E}$ est transitive et injective parce que l'action est libre. □

11.3 Classification affine des coniques

Soit une conique $f(x,y)=0$ avec

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f \tag{11.5}$$

dans le repère $R=(A,e_i)$.

LEMooXZURooSVySRT

Lemme 11.9 ([410]).
Nous considérons la forme quadratique

$$\begin{aligned}q\colon\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}\\ (x,y)&\mapsto ax^2+bxy+cy^2.\end{aligned} \tag{11.6}$$

(1) Si la signature de q est $(1,1)$, alors il existe une bijection linéaire $A\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que

$$(q\circ A)(x,y)=x^2-y^2. \tag{11.7}$$

(2) Si la signature de q est $(2,0)$, alors il existe une bijection linéaire $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$(q \circ A)(x,y) = x^2 + y^2. \tag{11.8}$$

(3) Si la signature de q est $(1,0)$, alors il existe une bijection linéaire $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$(q \circ A)(x,y) = x^2. \tag{11.9}$$

Démonstration. Nous séparons selon la valeur de a.

(1) **Si $a \neq 0$** Alors nous avons

$$q(x,y) = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{4ax - b^2}{4a}\right)y^2. \tag{11.10}$$

Donc en posant $\alpha = a$ et $\beta = (4ac - b^2)/4a$, nous avons

$$q(x,y) = (f_{\alpha\beta} \circ A)(x,y) \tag{11.11}$$

où

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \alpha x^2 + \beta y^2. \end{aligned} \tag{11.12}$$

Vu que A est une bijection linéaire, si q est positive sur E, alors $f_{\alpha\beta} = q \circ A^{-1}$ sera positive sur $A(E)$. Donc $f_{\alpha\beta}$ a la même signature que q. La signature de $f_{\alpha\beta}$ est facile : elle est donnée par les signes de α et β.

Supposons que la signature de q soit $(2,0)$ alors la signature de $f_{\alpha\beta}$ est également $(2,0)$, c'est-à-dire que $\alpha, \beta > 0$. Alors en posant

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta}\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x, \frac{1}{\sqrt{\beta}}y\right), \end{aligned} \tag{11.13}$$

nous avons $(f_{\alpha\beta} \circ B_{\alpha\beta})(x,y) = x^2 + y^2$ et donc

$$(q \circ A^{-1} \circ B_{\alpha\beta})(x,y) = x^2 + y^2, \tag{11.14}$$

ce qu'il fallait.

Les cas de signature $(1,1)$ ou $(0,1)$ se traitent de façon similaire. Voyons le cas de signature $(0,1)$ pour le sport. Si la signature de $f_{\alpha\beta}$ est $(0,1)$ alors nous avons soit $\alpha = 0$ et $\beta < 0$ soit $\alpha < 0$ et $\beta = 0$. Dans le premier cas nous avons $f_{\alpha\beta}(x,y) = -\beta' y^2$ avec $\beta' = -\beta > 0$. En posant

$$B_{\alpha\beta}(x,y) = \left(x, \frac{1}{\sqrt{\beta'}}y\right) \tag{11.15}$$

nous avons $(f_{\alpha\beta} \circ B_{\alpha\beta})(x,y) = y^2$.

(2) **Si $a = 0$** Si $b \neq 0$ nous avons tous les mêmes cas qu'avant, en inversant x et y. Si $b = 0$ alors nous avons $q(x,y) = xy^2$ qui est déjà sous la bonne forme.

□

Nous cherchons maintenant à savoir si un point $I = (x_0, y_0)$ est un centre de symétrie de $f(x,y) = 0$. Pour cela nous choisissons le repère centré en I, c'est-à-dire que nous posons

$$\begin{cases} x = x_0 + \tilde{x} & \text{(11.16a)} \\ y = y_0 + \tilde{y}. & \text{(11.16b)} \end{cases}$$

Un peu de calcul montre qu'alors la conique s'écrit

$$f(x_0,y_0) + q(\tilde{x},\tilde{y}) + (2ax_0 + 2by_0 + 2d)\tilde{x} + (2bx_0 + 2cy_0 + 2e)\tilde{y} = 0. \tag{11.17}$$

LEMooMVIDooVEUJsp

Lemme 11.10.
Soit la forme quadratique

EQooMOPBooBkePFH

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f. \tag{11.18}$$

Le point (x_0, y_0) est un centre de symétrie de q si et seulement si SyskhiOvW

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2bx_0 + d = 0 & (11.19a)\\ 2bx_0 + 2cy_0 + e = 0, & (11.19b) \end{cases}$$

qui a lieu si et seulement si

$$\begin{cases} (\partial_x q)(x_0, y_0) = 0 & (11.20a)\\ (\partial_y q)(x_0, y_0) = 0. & (11.20b) \end{cases}$$

Démonstration. Nous décomposons q en parties quadratiques, linéaires et constant :

$$q(x,y) = Q(x,y) + L(x,y) + f \tag{11.21}$$

avec $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ et $L(x,y) = dx + ey$.

Nous posons $r(x,y) = q(x + x_0, y + y_0)$. Le point (x_0, y_0) sera centre de symétrie si et seulement si $r(-x,-y) = r(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nous calculons donc un bon coup :

$$\begin{aligned} q(x + x_0, y + y_0) &= Q(x,y) && (11.22a)\\ &\quad + 2ax_0x + ax_0^2\\ &\quad + 2by_0x + 2bx_0y\\ &\quad + 2bx_0y_0\\ &\quad + 2cy_0y + cy_0^2\\ &\quad + L(x + x_0, y + y_0) + f. && (11.22b) \end{aligned}$$

En développant encore un peu et en regroupant, nous trouvons

$$r(x,y) = Q(x,y) + S(x,y) + f' \tag{11.23}$$

où

$$\begin{aligned} S(x,y) &= (2ax_0 + 2by_0 + d)x + (2bx_0 + 2cy_0 + e)y && (11.24a)\\ f' &= f + ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0. && (11.24b) \end{aligned}$$

La condition $r(-x,-y) = r(x,y)$ est équivalente à $S(x,y) = 0$ et donc à EQooJRYCooADgxxL

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2bx_0 + d = 0 & (11.25a)\\ 2bx_0 + 2cy_0 + e = 0. & (11.25b) \end{cases}$$

Il suffit de calculer $\partial_x q$ et $\partial_y q$ directement sur l'expression (11.18) pour remarquer que les conditions (11.25) sont équivalentes à

$$\begin{cases} (\partial_x q)(x_0, y_0) = 0 & (11.26a)\\ (\partial_y q)(x_0, y_0) = 0 & (11.26b) \end{cases}$$

□

11.11.
Le fait que le centre de symétrie de q coïncide avec le point où le gradient de q s'annule semble être une simple coïncidence numérique. On a fait les deux calculs et on a trouvé le même résultat.

Je suis certain qu'il y a une raison plus profonde. Si vous la connaissez, écrivez-moi.

Nous supposons que $(d,e) \neq (0,0)$, sinon la conique de départ serait déjà centrée. Le déterminant du système (11.19) est

$$\delta = ac - b^2. \tag{11.27}$$

Si ce dernier est différent de zéro, le système possède une unique solution et la conique aura alors un unique centre de symétrie.

Si le déterminant du système est nul, il y a soit aucun centre de symétrie, soit une infinité. Dans le premier cas nous sommes en présence d'une parabole, et dans le second cas de deux droites parallèles.

Exemple 11.12.
Soit
$$f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 2y - 1 = 0 \tag{11.28}$$
EqQgsEcz
donnée dans le repère affine $R = (A, \{e_i\})$. Nous commençons par étudier la signature de $q(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ dont la matrice symétrique est
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{11.29}$$
Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 2$ dont les racines sont $\pm\sqrt{2}$. La signature est donc $(1,1)$ et nous sommes en présence d'une conique de genre hyperbole. Nous cherchons le centre en suivant le lemme 11.10. Nous posons $x = \tilde{x} + x_0$, $y = \tilde{y} + y_0$, et nous cherchons à résoudre le système
$$\begin{cases} x_0 + y_0 - 3 = 0 & \text{(11.30a)} \\ x_0 - y_0 + 1 = 0. & \text{(11.30b)} \end{cases}$$
L'unique solution est $(x_0, y_0) = (1,2)$. Nous considérons le repère centré en (x_0, y_0), c'est-à-dire le repère
$$R' = (I, \{e_i\}) \tag{11.31}$$
avec $I = A + x_0 e_1 + y_0 e_2$ où A est l'origine du repère dans lequel l'équation (11.28) était donnée.

Par construction dans ce repère nous avons la conique
$$f(x_0, y_0) + q(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0, \tag{11.32}$$
c'est-à-dire
$$\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}^2 - 2 = 0. \tag{11.33}$$
Maintenant, nous avons une quadrique centrée que nous voulons mettre sous une forme plus canonique :
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} + \tilde{y})\right)^2 - \tilde{y}^2 - 1 = 0. \tag{11.34}$$
Nous posons donc
$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} + \tilde{y}) & \text{(11.35a)} \\ Y = \tilde{y}, & \text{(11.35b)} \end{cases}$$
pour trouver l'hyperbole
$$X^2 - Y^2 - 1 = 0. \tag{11.36}$$

Cherchons le changement de base correspondant. Pour trouver les coordonnées de e_1' dans la base (e_1, e_2) nous cherchons pour quelles valeurs de x, y nous avons $e_1' = xe_1 + ye_2$. Le point e_1' étant caractérisé par $X = 1$, $Y = 0$ nous avons à résoudre
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) = 1 & \text{(11.37a)} \\ y = 0, & \text{(11.37b)} \end{cases}$$
ce qui donne $x = \sqrt{2}$ et $y = 0$. Donc
$$e_1' = \sqrt{2}e_1. \tag{11.38}$$
Pour trouver e_2', c'est le même raisonnement en posant $X = 0$ et $Y = 1$. Le résultat est :
$$e_2' = -e_1 + e_2. \tag{11.39}$$
Résumons : EqfiVwym
$$\begin{cases} e_1' = \sqrt{2}e_1 & \text{(11.40a)} \\ e_2' = -e_1 + e_2. & \text{(11.40b)} \end{cases}$$

Il y a un dicton qui dit que les vecteurs de base se transforment avec la matrice inverse des coefficients. Prenons la matrice M donnée par
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \tag{11.41}$$
Calculons la matrice inverse.

```
sage: M=matrix([  [1/sqrt(2), 1/sqrt(2)],[0,1]  ])
sage: M
[1/2*sqrt(2) 1/2*sqrt(2)]
[          0           1]
sage: M.inverse()
[sqrt(2)      -1]
[      0       1]
```

tex/sage/sageSnip023.sage

Nous voyons que les colonnes de la matrice M^{-1} donnent les coordonnées des vecteurs e'_1 et e'_2.

△

11.4 Applications affines

Voici la définition d'une application affine entre deux espaces affines. La définition 8.155 donnera le définition d'une application affine entre espaces vectoriels.

DEFooUAWZooXcMKve

Définition 11.13.
*Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines sur les espaces vectoriels E et E' (sur le même corps $\mathbb{K}$). Une application $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est dite **affine** si pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe une application linéaire[2] $u_M\colon E \to E'$ telle que*

$$f(M+x) = f(M) + u_M(x) \tag{11.42}$$

EqMqIoWX

pour tout $x \in E$.

La définition suivante permet de décomposer une application affine en une partie linéaire et une translation. À partir de là, la proposition 11.62 nous donnera une structure de groupe sur $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$.

LEMooYJCDooOGAHkF

Lemme-Définition 11.14 (partie linéaire d'une application affine[1])**.**
Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines sur les espaces vectoriels E et E' (sur le même corps $\mathbb{K}$). Nous considérons une application affine $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$.

Il existe une unique application linéaire $u\colon E \to E'$ telle que

$$f(M+x) = f(M) + u(x) \tag{11.43}$$

pour tout $x \in E$ et pour tout $M \in \mathcal{E}$.

*Cette application linéaire est appelée **partie linéaire** de f. Pour varier les notations, nous noterons souvent $f = \alpha \circ \tau_v$ pour une application linéaire α et la translation τ_v de vecteur v.*

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **Unicité** Supposons que u_1 et u_2 vérifient la propriété, alors pour tout $x \in E$ et tout $M \in \mathcal{E}$ nous avons $f(M+x) = f(M) + u_1(x)$ et $f(M+x) = f(M) + u_2(x)$. Cela suffit à nous convaincre que $u_1 = u_2$.

(2) $u_M = u_N$ Avant de prouver l'existence, nous considérons $M, N \in \mathcal{E}$ et les applications linéaires u_M et u_N vérifiant l'équation (11.42) pour M et N respectivement. Prouvons que $u_M = u_N$.

Posons

$$f(M+x) = f(M) + u_M(x) \tag{11.44a}$$
$$f(N+y) = f(N) + u_N(y). \tag{11.44b}$$

Définissons $a \in E$ par $N = M + a$; nous avons d'une part

$$f(N+y) = f(M+y+a) = f(M) + u_M(y+a), \tag{11.45}$$

et d'autre part

$$f(N+y) = f(M+a) + u_N(y) = f(M) + u_M(a) + u_N(y). \tag{11.46}$$

Par conséquent $u_M(y+a) = u_M(a) + u_N(y)$. Par linéarité $u_N = u_M$.

[2] Définition 4.31.

(3) **Existence** Soit $M \in \mathcal{E}$. Nous affirmons que u_M fait l'affaire. En effet, soient $N \in \mathcal{E}$ et $x \in E$. Puisque $u_M = u_N$ nous avons

$$f(N + x) = f(N) + u_N(x) = f(N) + u_M(x). \tag{11.47}$$

Donc effectivement u_M peut être utilisé en tout point de $\mathcal{E}$.

□

Ce lemme est important car il permet de démontrer qu'une application est affine en prouvant la linéarité des u_M séparément sans devoir prouver qu'elles sont égales.

11.4.1 Autres propriétés

LEMooXXTPooKYFGGM

Lemme 11.15 ([1]).
Soient $M \in \mathcal{E}$ et $A, B \in \mathcal{E}$ deux points donnés par $A = M + x_a$, $B = M + x_b$. Soit encore une application affine f sur $\mathcal{E}$. Alors

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = u_f(x_b - x_a). \tag{11.48}$$

Démonstration. En appliquant f à $A = M + x_a$ et $B = M + x_b$,

$$f(A) = f(M) + u_f(x_a) \tag{11.49a}$$
$$f(B) = f(M) + u_f(x_b). \tag{11.49b}$$

Donc $f(B) = f(A) - u_f(x_a) + u_f(x_b)$ ou encore

$$f(B) = f(A) + u_f(x_b - x_a). \tag{11.50}$$

□

Remarque 11.16.
La condition (11.42) pour tout $M \in \mathcal{E}$ est équivalente à demander

$$f \circ t_x = t_{u(x)} \circ f \tag{11.51}$$

pour tout $x \in E$.

PROPooALXYooHoMdqQ

Proposition 11.17 ([1]).
Soit une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$.

ITEMooSKCYooHyRZYN

(1) Il existe une unique application linéaire u_f telle que $f(M + x) = f(M) + u_f(x)$ pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $x \in E$.

(2) L'application u_f est injective si et seulement si f est injective.

(3) L'application u_f est surjective si et seulement si f est surjective.

Démonstration. En plein de parties.

(1) **Pour (1)**
La partie (1) est le lemme 11.14.

(2) **Si u_f est injective** Soient $M, N \in \mathcal{E}$ tels que $f(M) = f(N)$. Nous avons

$$f(M) = f(N) = f\big(M + (N - M)\big) = f(M) + u_f(N - M), \tag{11.52}$$

donc $u_f(N - M) = 0$. Vu que u_f est injective, nous déduisons que $N - M = 0$.

(3) **Si f est injective** Soient $x, y \in E$ tels que $u_f(x) = u_f(y)$. Soit M quelconque dans $\mathcal{E}$; nous avons

$$f(M + x) = f(M) + u_f(x) = f(M) + u_f(y) = f(M + y). \tag{11.53}$$

L'injectivité de f nous indique alors que $M + x = M + y$ et donc que $x = y$ parce que l'action de E sur $\mathcal{E}$ est libre.

(4) **Si u_f est surjective** Soit $M \in \mathcal{E}$. Nous allons trouver un élément de $\mathcal{E}$ dont l'image par f est M.
Soient $N \in \mathcal{E}$ et $x \in E$ tels que $u_f(x) = M - f(N)$.
Alors nous avons $f(N + x) = f(N) + u_f(x) = M$.

(5) **Si f est surjective** Soit $a \in E$. Nous voulons $x \in E$ tel que $u_f(x) = a$. Soit $M \in E$. Vu que f est surjective, il existe $N \in \mathcal{E}$ tel que $f(N) = f(M) + a$.

Posons $x = N - M$. Nous avons d'une part

$$f(M + x) = f(M) + u_f(x) \tag{11.54}$$

et d'autre part

$$f(M + x) = f\big(M + (N - M)\big) = f(N) = f(M) + a. \tag{11.55}$$

En égalisant nous trouvons $u_f(x) = a$.

□

Proposition 11.18.
Soient des espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de même dimension. Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est injective si et seulement si elle est surjective.

Démonstration. Nous allons utiliser les équivalences de la proposition 11.17, ainsi que le corolaire 4.51 pour la partie linéaire. Nous avons les équivalences :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow u_f \text{ est injective} \Leftrightarrow u_f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective}. \tag{11.56}$$

□

EXooAGINooYmvPML

Exemple 11.19.
L'espace $\mathbb{R}^n$ est très particulier parce qu'il agit sur lui-même ; il est donc un espace affine à lui tout seul : $\mathcal{E} = E = \mathbb{R}^n$.

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, en posant $M = 0$ dans la condition (11.42), si f est une application affine il existe une application linéaire α et un vecteur v tel que $f = \tau_v \circ \alpha$.

Notons que ça n'a pas de sens de poser $M = 0$, et la décomposition $f = \tau_v \circ \alpha$ n'a aucun sens en général. En particulier, nous ne pouvons pas appliquer une application linéaire à un élément d'un espace affine général. △

PROPooOUNEooQUZetW

Proposition 11.20.
Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ et $g : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ sont des applications affines, alors $g \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}''$ est affine et $u_{g\circ f} = u_g \circ u_f$.

Démonstration. Si $M \in \mathcal{E}$ et $x \in E$ nous avons

$$\begin{aligned}(g \circ f)(M + x) &= g\big(f(M) + u_f(x)\big)\\ &= g\big(f(M)\big) + u_g\big(u_f(x)\big)\\ &= (g \circ f)(M) + (u_g \circ u_f)(x).\end{aligned} \tag{11.57}$$

□

THOooBAPDooEUtBgF

Théorème 11.21.
Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines de dimensions finies p et q sur $\mathbb{K}$. Soient les repères cartésiens $R = (O, \{e_i\})$ et $R' = (O', \{e'_i\})$. Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est affine si et seulement si il existe une matrice $a \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^q$ tels que[3]

$$f(x) = b + ax. \tag{11.58}$$

EqCmNHjs

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ C'est la définition 11.13.

(2) $\Leftarrow$ Nous savons par la proposition 11.17 qu'il existe une application linéaire $u_f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ telle que

$$f(M + x) = f(M) + u_f(x). \tag{11.59}$$

En prenant $M = O$ et en écrivant x au lieu de $O + x$, nous avons

$$f(x) = f(O) + u_f(x). \tag{11.60}$$

La partie $f(O)$ est le b que nous cherchions[4]. Par ailleurs, vu que u_f est linéaire, elle est donnée par le produit avec une matrice. La matrice a qu'on cherche est la matrice de u_f.

□

[3] L'équation (11.58) est écrite en utilisant un abus de notation entre le vecteur $x \in \mathbb{K}^p$ et le point de $\mathcal{E}$ qui est représenté par x dans le repère $(O, \{e_i\})$.

[4] En réalité le b qu'on cherche est le $b \in \mathbb{K}^n$ tel que $f(O) = O' + b$.

11.5 Isomorphismes

Définition 11.22.
*Un **isomorphisme** entre les espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ est une application affine $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ inversible dont l'inverse est affine.*

PropxtFeDE

Proposition 11.23.
Une application affine bijective est un isomorphisme. Si f est un isomorphisme d'espaces affines, alors $u_{f^{-1}} = (u_f)^{-1}$.

Proposition 11.24.
Un espace affine de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$ est isomorphe à l'espace affine canonique $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Si nous considérons le repère $R = (A, \{e_i\})$ de l'espace affine $\mathcal{E}$ alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{K}^n &\to \mathcal{E} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto A + \sum_i x_i e_i \end{aligned} \tag{11.61}$$

est un isomorphisme. □

11.6 Sous-espaces affines

DEFooJSUHooJjtpwz

Définition 11.25.
*Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur l'espace vectoriel E. Un **sous-espace affine** de $\mathcal{E}$ est une orbite de l'action d'un sous-espace vectoriel de E.*

Si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, il sera un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si l'ensemble

$$F = \{AB \text{ tel que } A, B \in \mathcal{F}\} \tag{11.62}$$

est un sous-espace vectoriel de E. Dans ce cas nous disons que F est la **direction** de $\mathcal{F}$. Si $A \in \mathcal{F}$, alors l'orbite de A sous F est $\mathcal{F}$. La **dimension** de $\mathcal{F}$ est la dimension de sa direction.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ de directions F et G, nous disons que $\mathcal{F}$ est **parallèle** à $\mathcal{G}$ si $F \subset G$.

PROPooAAPZooDWCuTL

Proposition 11.26.
Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de dimension k dans l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n. Alors il existe une application affine $f\colon \mathcal{E} \to \mathbb{K}^{n-k}$ telle que $\mathcal{F} = f^{-1}(0)$.

Démonstration. Soient F la direction de $\mathcal{F}$ et $A \in \mathcal{F}$. Nous considérons une base $\{e_i\}$ adaptée à F au sens $\{e_1, \ldots, e_k\}$ est une base de F. Nous considérons maintenant le repère cartésien $(A, \{e_i\})$ et nous construisons l'application affine

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{E} &\to \mathbb{K}^{n-k} \\ A + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i &\mapsto \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11.63}$$

Par construction nous avons $f(M) = 0$ si et seulement si $M \in \mathcal{F}$. □

PropomhBwi

Proposition 11.27 (Sous-espace engendré[54])**.**
Soit σ une partie de l'espace affine $\mathcal{E}$.

(1) L'intersection de tous les sous-espaces affines contenant σ est un sous-espace affine, noté $\mathrm{Aff}(\sigma)$.

ITEMooNXXQooCxRUcz

(2) Si $A \in \sigma$, alors la direction de $\mathrm{Aff}(\sigma)$ *est le sous-espace vectoriel*

$$F = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{AM} \text{ tel que } M \in \sigma\}. \tag{11.64}$$

EqnRAUfg

Le sous-espace affine donné par la proposition 11.27 est le sous-espace affine **engendré** par la partie σ, et il est noté $\mathrm{eae}(\sigma)$.

PROPooAKJBooMkmsiV

Proposition 11.28.
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n sur $\mathbb{K}$, soit $f\colon \mathcal{E} \to \mathbb{K}^r$ une fonction affine. Pour tout $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^r$, l'ensemble $f^{-1}(a)$ est un sous-espace affine[5] *de dimension* $\dim \ker(u_f)$.

Démonstration. Nous considérons le repère $(A, \{e_i\})$ de $\mathcal{E}$. Étant donné que f est affine nous avons

$$f\big(A + \sum_i x_i e_i\big) = f(A) + u_f\big(\sum_i x_i e_i\big). \tag{11.65}$$

Nous avons donc $f\big(A + \sum_i x_i e_i\big) = a$ lorsque

$$u_f(\sum_i x_i e_i) = a - f(A). \tag{11.66}$$

En utilisant le lemme 4.42, nous avons donc

$$f^{-1}(a) = A + (u_f)^{-1}\big(a - f(A)\big) = A + m + \ker(u_f) \tag{11.67}$$

où m est n'importe que élément de $u_f^{-1}\big(a - f(A)\big)$. □

PropPoNpPz

Proposition 11.29.
Soit A un ensemble convexe[6] *dans un espace vectoriel et $v_1, \dots, v_n$ des éléments de A. Alors toute combinaison*

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \tag{11.68}$$

telle que $a_1 + \cdots + a_n = 1$ et $a_i \in [0, 1]$ appartient à A.

Démonstration. Nous prouvons la proposition pour $n = 3$. Nous devons trouver des nombres $t_1, t_2 \in [0, 1]$ tels que

$$t_2\big(t_1 v_1 + (1 - t_1)v_2\big) + (1 - t_2)v_3 = a v_1 + b v_2 + c v_3. \tag{11.69}$$

La réponse est immédiatement donnée par

$$t_2 a = 1 - c \tag{11.70a}$$
$$t_1 = a/t_2. \tag{11.70b}$$

Étant donné que $c \in [0, 1]$ nous avons $t_2 \in [0, 1]$. En ce qui concerne t_1 nous avons

$$t_1 = \frac{a}{t_2} \leqslant \frac{1 - c}{1 - c} = 1. \tag{11.71}$$

□

11.7 Barycentre

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Un couple (A, λ) avec $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ est un **point pondéré**.

LemtEwnSH

Lemme-Définition 11.30 ([411])**.**
Soit une famille de points pondérés $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i=1\dots r}$. Si $\sum_i \lambda_i \neq 0$, alors il existe un unique $G \in \mathcal{E}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0. \tag{11.72}$$

*Le point G donné par le lemme 11.30 est le **barycentre** des points pondérés (A_i, λ_i).*

Notons que l'on peut toujours supposer que $\sum_i \lambda_i = 1$ parce que le barycentre ne change pas lorsque tous les λ_i sont multipliés par un même nombre.

DefIMZooLFdIUB

Définition 11.31 (Combinaison convexe)**.**
*Des nombres positifs ou nuls λ_1,..., λ_n vérifiant $\sum_i \lambda_i = 1$ forment une **combinaison convexe**.*

[5] Définition 11.25.
[6] Définition 7.208.

Le théorème suivant donne quelques caractérisations équivalentes du barycentre.

ThoIJVzxr

Théorème 11.32 ([411]).
Soient $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i=1,\dots,r}$ une famille de points pondérés. Les conditions suivantes sur le point $G \in \mathcal{E}$ sont équivalentes.

(1) Le point G est le barycentre de la famille.

(2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\sum_i (\alpha\lambda_i)\overrightarrow{GA_i} = 0$.

(3) Il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $\big(\sum_i \lambda_i\big)\overrightarrow{AG} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$.

(4) Pour tout $B \in \mathcal{E}$, nous avons $\big(\sum_i \lambda_i\big)\overrightarrow{BG} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{BA_i}$.

ItemEgOQBX

Définition 11.33.
*Si $A, B \in \mathcal{E}$, le **segment** $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B pondérés par des poids positifs (ouvert ou fermé suivant que l'on accepte que l'un ou l'autre des poids soit nul).*

Lorsque tous les λ_i sont égaux, nous parlons d'**isobarycentre**. Autrement dit, l'isobarycentre des points A_i est le barycentre des points pondérés $(A_i, 1)$.

11.7.1 Sous-espaces affines

Proposition 11.34.
Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine si et seulement si elle est stable par barycentrisation.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de direction F et $A_1, \dots, A_n$ des points de $\mathcal{F}$. Nous devons voir que le barycentre des points A_i pondérés de n'importe quelles masses appartient à $\mathcal{F}$. Pour ce faire nous faisons appel à la caractérisation (4) du théorème 11.32 : pour tout $B \in \mathcal{F}$,

$$\overrightarrow{BG} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{BA_i}. \tag{11.73}$$

Puisque B et A_i sont dans $\mathcal{F}$, nous avons $\overrightarrow{BA_i} \in F$ et donc $\overrightarrow{BG} \in F$. Mais comme $B \in \mathcal{F}$, le point G est à son tour dans $\mathcal{F}$.

Réciproquement, nous supposons que $\mathcal{F}$ est stable par barycentrisme. Nous voudrions montrer que l'ensemble

EqCmyWGi

$$F = \{\overrightarrow{AB} \text{ tel que } A, B \in \mathcal{F}\} \tag{11.74}$$

est un sous-espace vectoriel. Soit $A \in \mathcal{F}$. Nous commençons par prouver que les vecteurs de la forme $\overrightarrow{AX}$ ($X \in \mathcal{F}$) forment un espace vectoriel. Considérons $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}$ qui est un élément de E ; il existe donc $V \in \mathcal{E}$ tel que

$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}. \tag{11.75}$$

Par les relations de Chasles,

$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{AV} + \overrightarrow{VX} + \overrightarrow{AV} + \overrightarrow{VY}, \tag{11.76}$$

donc

$$0 = \overrightarrow{VX} - \overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VY}, \tag{11.77}$$

ce qui prouve que V est un barycentre de X, A, Y, et donc que $V \in \mathcal{F}$. De la même manière si $W \in \mathcal{E}$ est défini par $\overrightarrow{AW} = \mu\overrightarrow{AX}$, alors

$$\overrightarrow{AW} = \mu\overrightarrow{AX} = \mu(\overrightarrow{AW} + \overrightarrow{WX}), \tag{11.78}$$

ce qui signifie que

$$(1 - \mu)\overrightarrow{AW} + \mu\overrightarrow{XW} = 0 \tag{11.79}$$

et que W est un barycentre.

Afin de montrer que (11.74) est bien un espace vectoriel, nous devons considérer $A, B, X, Y \in \mathcal{F}$ et prouver que $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} \in F$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} &= \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AY} && && \text{(11.80a)}\\
&= \overrightarrow{AV} + \overrightarrow{BA} && V \text{ est celui donné plus haut} && \text{(11.80b)}\\
&= \overrightarrow{AV} - \overrightarrow{AB} && && \text{(11.80c)}\\
&= \overrightarrow{AV} + \overrightarrow{AW} && W \text{ est donné par } \mu = -1. && \text{(11.80d)}\\
&= \overrightarrow{AV'}. && && \text{(11.80e)}
\end{aligned}$$

□

PropBVbCOS

Proposition 11.35 ([411]).
Soient $A_0, \dots, A_r$ des points de $\mathcal{E}$. L'ensemble des barycentres de ces points (avec des masses de somme 1) est le sous-espace affine engendré par les A_i que nous nommons $\mathcal{F}$.

Démonstration. Soit G le barycentre associé aux poids λ_i. Nous avons

$$G = A_0 + \overrightarrow{A_0G} = A_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}. \tag{11.81}$$

Notons que les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_i}$ sont dans la direction du sous-espace affine engendré par les A_i par (11.64). Donc G est bien dans $\mathcal{F}$.

Inversement si X est dans $\mathcal{F}$, on a

$$X = A_0 + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \tag{11.82}$$

parce que $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$ est un élément général de la direction de $\mathcal{F}$. Donc

$$\overrightarrow{A_0X} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}, \tag{11.83}$$

et en utilisant la relation de Chasles sur chacun des $\overrightarrow{A_0A_i}$,

$$\overrightarrow{A_0X} = \sum_i \lambda_i \big(\overrightarrow{A_0X} + \overrightarrow{XA_i}\big). \tag{11.84}$$

De là nous concluons que

$$\big(1 - \sum_i \lambda_i\big)\overrightarrow{A_0X} + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{A_iX} = 0, \tag{11.85}$$

ce qui signifie précisément que X est un barycentre des A_i. □

Proposition 11.36.
Soient $r+1$ point $A_0, \dots, A_r$ dans $\mathcal{E}$. Le sous-espace affine engendré par les A_i est au plus de dimension r.

Démonstration. La direction de l'espace engendré $\mathrm{Aff}\{A_i\}$ est l'espace

$$\mathrm{Span}\{\overrightarrow{A_0A_i}_{i=1,\dots,r}\} \tag{11.86}$$

qui est engendré par r vecteurs et donc est au plus de dimension r. □

En deux mots, la proposition suivante signifie que le barycentre des barycentres est le barycentre.

PropSFvjFZb

Proposition 11.37 (Associativité des barycentres[412]).
Soit une partition $J_0, \dots, J_r$ de $I = \{0, 1, \dots, n\}$. Soient des points $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{E}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des nombres tels que $\sum_i \lambda_i \neq 0$. Nous supposons que $\mu_k = \sum_{i \in J_k} \lambda_i \neq 0$ pour tout k, et enfin nous nommons b_k le barycentre de la famille $\{(a_i, \lambda_i), i \in J_k\}$.

Alors le barycentre de la famille $\{(b_k, \mu_k)\}_{k=1,\dots,r}$ est le barycentre de la famille $\{(a_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$.

Démonstration. Nous nommons b le barycentre des b_k pondérés par les μ_k, donc par définition

$$0 = \sum_{k=0}^{r} \mu_k \overrightarrow{bb_k} \tag{11.87a}$$

$$= \sum_k \sum_{i \in J_k} \lambda_i \overrightarrow{bb_k} \tag{11.87b}$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \sum_{i \in J_k} \lambda_i (\overrightarrow{ba_i} + \overrightarrow{a_ib_k}) \tag{11.87c}$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \sum_{i \in J_k} \lambda_i \overrightarrow{ba_i} + \sum_{k=0}^{r} \underbrace{\sum_{i \in J_k} \lambda_i \overrightarrow{a_ib_k}}_{=0} \tag{11.87d}$$

$$= \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{ba_i}. \tag{11.87e}$$

Donc b est bien barycentre des a_i avec les poids λ_i. □

11.7.2 Enveloppe convexe

DefNLYYooXUHFUY

Définition 11.38.
*Soit A une partie d'un espace vectoriel E. L'**enveloppe convexe** de A, notée $\mathcal{C}\mathrm{onv}(A)$ est l'intersection de tous les convexes contenant A.*

L'enveloppe convexe est un convexe. En effet soit C un convexe contenant A et $x, y \in \mathcal{C}\mathrm{onv}(A)$; alors x et y sont dans C et par conséquent le segment $[x, y]$ est inclus dans C. Ce segment étant inclus dans tout convexe contenant A, il est inclus dans $\mathcal{C}\mathrm{onv}(A)$.

PropSVvAQzi

Proposition 11.39 ([413]).
Soit C un convexe dans l'espace affine $\mathcal{E}$ et une famille de points pondérés $\{(a_i, \lambda_i)\}_{i=1,\dots,r}$ dont tous les poids sont positifs (et non tous nuls). Alors le barycentre est aussi dans C.

En d'autre termes, un convexe est stable par barycentrage à poids positifs[7].

Démonstration. Nous prouvons par récurrence. D'abord pour $r = 2$. Le barycentre des points pondérés (a_1, λ_1), (a_2, λ_2) est le point b tel que

EqFWEErRX
$$\lambda_1 \overrightarrow{ba_1} + \lambda_2 \overrightarrow{ba_2} = 0. \tag{11.88}$$

Par définition, ce qui est noté $\overrightarrow{ab}$ n'est rien d'autre que $b - a$; en déballant (11.88), nous trouvons

$$\lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) = 0 \tag{11.89}$$

et donc

$$b = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a_2, \tag{11.90}$$

qui est bien un point du segment $[a_1, a_2]$ parce que c'est une combinaison à coefficients positifs de somme 1.

Nous passons maintenant à la vraie récurrence avec un ensemble de points pondérés

$$A_r = \{(a_1, \lambda_1), \dots, (a_r, \lambda_r)\} \tag{11.91}$$

de masse totale non nulle ; et en vous laissant deviner ce que va désigner A_{r-1}. Si une des masses est nulle (disons λ_r), alors le barycentre de A_r est le même que celui de A_{r-1} et l'hypothèse de récurrence nous enseigne que ledit barycentre est dans C. Nous supposons donc que $\lambda_i \neq 0$ pour tout i. Dans ce cas le théorème d'associativité des barycentres 11.37 dit que le barycentre de A_r est le barycentre entre le barycentre de A_{r-1} et (a_r, λ_r), qui sont deux points de C par hypothèse de récurrence. □

Si E est un espace vectoriel et si $x_i \in E$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$, alors le barycentre des couples (x_i, λ_i) est le point g tel que $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{gx_i}$, c'est-à-dire $\sum_i \lambda_i(x_i - g) = 0$ ou encore

$$\sum_i \lambda_i x_i = \sum_i \lambda_i g. \tag{11.92}$$

Donc, quitte à diviser tous les λ_i par la somme, nous pouvons supposer que la somme des poids est 1. C'est pourquoi lorsque nous parlerons de barycentre dans un espace vectoriel sans contexte affine, nous allons toujours supposer $\sum_i \lambda_i = 1$ et avoir le barycentre

$$g = \sum_i \lambda_i x_i. \tag{11.93}$$

PropYHMTmZX

Proposition 11.40.
Soit E, un espace vectoriel et $A \subset E$. L'enveloppe convexe $\mathcal{C}\mathrm{onv}(A)$ est l'ensemble des barycentres de familles finies de points affublés de masses positives.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des dits barycentres. Par la proposition 11.39, ces barycentres sont dans l'enveloppe convexe et donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}\mathrm{onv}(A)$. A contrario, si nous prouvons que $\mathcal{B}$ était convexe, alors nous aurions $\mathcal{C}\mathrm{onv}(A) \subset \mathcal{B}$ parce que l'enveloppe convexe est l'intersection des convexes contenant A.

Soient $a, b \in \mathcal{B}$, c'est-à-dire que l'on a $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_m$ dans A ainsi que les nombres strictement positifs $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ et $\mu_0, \dots, \mu_m$ tels que

$$a = \sum_i \lambda_i a_i \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \tag{11.94a}$$

$$b = \sum_j \mu_j b_j \qquad \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1 \tag{11.94b}$$

[7] Sauf si on prend tous les poids nuls ; mais contre ce genre d'idées, on ne peut rien faire.

Un point du segment $[a,b]$ est de la forme $p=ta+(1-t)b$ avec $t\in[0,1]$. En développant,

$$p=\sum_{i=0}^{n}(t\lambda_i)a_i+\sum_{j=0}^{m}(1-t)\mu_j b_j. \tag{11.95}$$

C'est le barycentre de la famille $\{(a_i,\lambda_i),(b_j,\mu_j)\}$, parce que la somme des coefficients vaut bien 1 :

$$\sum_i(t\lambda_i)+\sum_j(1-t)\mu_j=t+(1-t)=1. \tag{11.96}$$

□

ThoJLDjXLe

Théorème 11.41 (Carathéodory[128]).
Dans un espace affine de dimension n, l'enveloppe convexe[8] *de A est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de familles de $n+1$ points.*

Démonstration. Soit $x\in\mathcal{C}\text{onv}(A)$; on sait par la proposition 11.40 que x est barycentre de points de A avec des coefficients positifs :

$$x=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_k \tag{11.97}$$

EqWJDwOTH

avec $\sum_k\lambda_k=1$. Nous supposons que $p>n+1$ (sinon le théorème est réglé), et nous allons faire une récurrence à l'envers en montrant qu'on peut aussi écrire x sous forme d'un barycentre de strictement moins de p points.

Étant donné que $p-1>n$, la famille $\{x+i-x_1\}_{i=2,\dots,p}$ est liée et il existe donc $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=2}^{p}\alpha_i(x_i-x_1)=0$, c'est-à-dire telle que

$$\sum_{i=2}^{p}\alpha_i x_i=\sum_{i=2}^{p}\alpha_i x_1. \tag{11.98}$$

Nous posons $\alpha_1=-\sum_{i=2}^{p}\alpha_1$. Remarquons qu'alors $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i=0$ parce que

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i=\alpha_1x_1+\sum_{i=2}^{p}\alpha_i x_i=\alpha_1x_1+\sum_{i=2}^{p}\alpha_i x_1=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_1=0. \tag{11.99}$$

Par conséquent ça ne coûte rien de récrire (11.97) sous la forme

$$x=\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i+t\alpha_i)x_i. \tag{11.100}$$

Les α_i ne sont pas tous nuls, mais leur somme est nulle, donc il y en a au moins un négatif. Nous notons

$$\tau=\min\{-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\text{ tel que }\alpha_i<0\}, \tag{11.101}$$

et J l'ensemble de i pour lesquels ce minimum est atteint. Nous considérons aussi les nombres $\mu_i=\lambda_i+\tau\alpha_i$. Plusieurs remarques.

(1) Si $j\in J$, alors $\mu_j=0$

(2) Si $\alpha_i>0$ alors $\mu_i\geqslant 0$, mais si $\alpha_i<0$ alors

$$\lambda_i+\tau\alpha_i\geqslant\lambda_i+(-\frac{\lambda_i}{\alpha_i})\alpha_i=0 \tag{11.102}$$

donc $\mu_i\geqslant 0$ quand même.

(3) $\sum_{i=1}^{p}\mu_i=1$, toujours parce que $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=0$.

Avec tout ça, nous avons

$$\sum_{i\notin J}\mu_i x_i=\sum_{i=1}^{p}\mu_i x_i=x. \tag{11.103}$$

Et voilà, nous avons écrit x comme un barycentre à coefficients positifs de moins de p éléments parce que J n'est pas vide. □

[8] Définition 11.38.

CorOFrXzIf

Corolaire 11.42.
Dans un espace affine de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

Démonstration. Soit A une partie compacte de l'espace vectoriel E, et $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ son enveloppe convexe. Nous allons montrer que toute suite dans $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ admet une sous-suite convergente en écrivant un point de $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ comme le théorème de Carathéodory 11.41 nous le suggère. Pour cela nous considérons le simplexe

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1 \text{ et } \lambda_k \geqslant 0 \forall k \right\}. \tag{11.104}$$

Montrons en passant que Λ est compact. Si $\lambda_k \in \Lambda$ est une suite, alors chacun des λ_k est un $(n+1)$-uple de nombres dans $[0,1]$:

$$k \mapsto (\lambda_k)_i \tag{11.105}$$

est une suite qui possède une sous-suite convergente. En passant $n+1$ fois à une sous-suite, nous tombons sur une suite convergente vers $\lambda \in \Lambda$, grâce à la convergence composante par composante. De plus pour chaque k nous avons $\sum_{i=1}^{n+1}(\lambda_k)_i = 1$, et en passant à la limite, la somme étant une application continue, $\sum_i \lambda_i = 1$.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon \Lambda \times A^{n+1} &\to \mathcal{C}\text{onv}(A) \\ (\lambda, x) &\mapsto \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k. \end{aligned} \tag{11.106}$$

C'est une application continue parce qu'elle est bilinéaire en dimension finie ; son image est contenue dans $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ par la proposition 11.39, et elle est surjective par le théorème de Carathéodory 11.41. Bref, $\mathcal{C}\text{onv}(A) = f(\Lambda \times A^{n+1})$ est donc l'image d'un compact par une application continue ; elle est donc compacte par le théorème 7.275. □

Notons que sans le théorème de Carathéodory, peut être que le nombre de points utiles pour décomposer les différents a_k n'était pas borné ; dans ce cas nous aurions du prendre une infinité de sous-suites et rien n'aurait été sûr.

11.7.3 Applications affines et barycentre

PROPooGSPZooRnVgiU

Proposition 11.43 ([414]).
Une application $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ entre deux espaces affines est affine si et seulement si pour tout système $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i=1,\dots,k}$ de barycentre G et de poids total non nul, le point $f(G)$ est barycentre du système $\{\big(f(A_i), \lambda_i\big)\}$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Si f est affine**

Par définition d'un barycentre,

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0. \tag{11.107}$$

Nous considérons un point arbitraire $O \in \mathcal{E}$ et nous écrivons $A_i = O + x_i$, $G = O + x_g$. Ensuite nous utilisons le lemme 11.15 pour le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} &= \sum_i \lambda_i u_f(x_i - x_g) && \text{(11.108a)} \\ &= u_f\big(\sum_i \lambda_i (x_i - x_g)\big) && \text{(11.108b)} \\ &= u_f\big(\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GA_i}\big) && \text{(11.108c)} \\ &= u_f(0) = 0. && \text{(11.108d)} \end{aligned}$$

Donc $f(G)$ est bien le barycentre du nouveau système.

(2) **Si f conserve les barycentres**

Nous définissons u par $f(O+x) = f(O) + u(x)$. À priori, ce u dépend de O et n'est pas linéaire.

(2a) u **est linéaire**

Soient $M, N \in \mathcal{E}$ et les éléments $x_m, x_n \in E$ tels que $\overrightarrow{OM} = x_m$ et $\overrightarrow{ON} = x_n$. Nous définissons enfin P par

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON}, \tag{11.109}$$

et $P = O + x_p$. En décomposant $\overrightarrow{MO}$ et $\overrightarrow{NO}$ par les relations de Chasles de la proposition 11.5(1) nous avons

$$(\alpha + \beta - 1)\overrightarrow{PO} - \alpha\overrightarrow{PM} - \beta\overrightarrow{PN} = 0 \tag{11.110}$$

et donc P est barycentre du système

$$\big\{(O, \alpha + \beta - 1), (M, \alpha), (N, \beta)\big\}. \tag{11.111}$$

Le point $f(P)$ sera barycentre du système

$$\Big\{\big(f(O), \alpha + \beta - 1\big), \big(f(M), \alpha\big), \big(f(N), \beta\big)\Big\}. \tag{11.112}$$

Cela signifie que

$$(\alpha + \beta - 1)\overrightarrow{f(P)f(O)} - \alpha\overrightarrow{f(P)f(M)} - \beta\overrightarrow{f(P)f(N)} = 0. \tag{11.113}$$

En y substituant $\overrightarrow{f(P)f(O)} = u(-x_p)$, $\overrightarrow{f(P)f(M)} = u(x_m - x_p)$ et $\overrightarrow{f(P)f(N)} = u(x_n - x_p)$ ainsi que $x_p = \alpha x_m + \beta x_b$ nous trouvons

$$u(\alpha x_m + \beta x_n) = \alpha u(x_m) + \beta u(x_n). \tag{11.114}$$

Donc u est linéaire.

(2b) u **ne dépend pas du point** O

Il n'est pas besoin de démontrer cela parce que la définition 11.13 ne le demande pas. Note : c'est le lemme 11.14 qui dit que c'est par ailleurs vrai.

□

11.8 Repères, coordonnées cartésiennes et barycentriques

Définition 11.44.
*On dit que les points $A_0, \dots, A_r \in \mathcal{E}$ sont **affinement indépendants** si le sous-espace affine engendré est de dimension r.*

PropGAneHg

Proposition 11.45 ([411]).
Pour $r+1$ points $A_0, \dots, A_r$ dans $\mathcal{E}$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

ITEMooONZHooWIzXdw

(1) Les A_i sont affinement indépendants.

ITEMooOMCRooNiRtSW

(2) Pour tout $i = 0, \dots, r$, le point A_i n'est pas dans $\mathrm{Aff}\{A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_r\}$.

ItemrAzkIl

(3) Les points $A_0, \dots, A_{r-1}$ sont affinement indépendants et $A_r \notin \mathrm{Aff}\{A_0, \dots, A_{r-1}\}$.

ITEMooSLMDooFOHLEG

(4) Il existe $i_0 \in \{0, \dots, r\}$ tel que la partie $\{\overrightarrow{A_k A_{i_0}}\}_{k \neq i_0}$ est libre.

ItemFBfcuq

(5) Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, les vecteurs $\overrightarrow{A_k A_i}$ $(k \neq i)$ sont linéairement indépendants.

Démonstration. Nous allons montrer que tout est équivalent à (1). Ce point (1) signifie que tous les vecteurs $v_i = \overrightarrow{A_0 A_i}$ sont linéairement indépendants.

(1) **(1) implique (2)** Si A_j était dans $\mathrm{Aff}\{A_k\}_{k\neq j}$, cela signifierait que $A_j = A_0 + \sum_{k\neq j} \lambda_k v_k$, et donc $v_j = \sum_{k\neq j} v_k$ et donc que ces vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.

(2) **(1) implique (3)** Vu que $\{v_i\}_{i=1,\dots,r}$ sont linéairement indépendants, les $\{v_i\}_{i=1,\dots,r-1}$ le sont aussi. De plus $A_r \notin \mathrm{Aff}\{A_0, \dots, A_{r-1}\}$ par (2).

(3) **(1) implique (4)** Par exemple $i = 0$ fait l'affaire.

(4) **(1) implique (5)** Le sous-espace vectoriel F de (11.64) est de dimension r et peut être écrit $\mathrm{Span}\{\overrightarrow{MA_k}\}_{k=0,\dots,r}$ pour n'importe que $M \in \{A_0, \dots, A_r\}$.

(5) **(2) implique (1)** Si les A_i n'étaient pas affinement indépendants, on aurait in A_j et un A_k tels que

$$A_j = A_k + \sum_{i\neq k}^{i\neq j} \lambda_i \overrightarrow{A_k A_i}. \tag{11.115}$$

Cela donnerait

$$\overrightarrow{A_k A_j} - \sum_{i\neq k}^{i\neq j} \lambda_i \overrightarrow{A_k A_i}, \tag{11.116}$$

ce qui contredirait le fait que les $\{v_i\}_{i=1,\dots,r}$ sont linéairement indépendants parce que chacun des $\overrightarrow{A_k A_i}$ peut être écrit comme une combinaison des v_i.

(6) **(3) implique (1)** Nous avons par hypothèse que $\{v_i\}_{i=1,\dots,r-1}$ est libre. Si $\{v_i\}_{i=1,\dots,r}$ n'était pas libre, nous aurions $v_r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i v_i$, et donc

$$A_r = A_0 + v_r = A_0 + \sum_{i=1}^{r-1} \overrightarrow{A_0 A_i}, \tag{11.117}$$

c'est-à-dire que $A_r \in \text{Aff}\{1_0, \dots, A_{r-1}\}$.

(7) **(4) implique (1)** D'après la proposition 11.27(2), l'espace $\text{Aff}\{A_0, \dots, A_r\}$ est modelé sur

$$F = \text{Span}\{\overrightarrow{A_{i_0} A_k}\}_{k\neq i_0}. \tag{11.118}$$

Par hypothèse la partie $\{\overrightarrow{A_{i_0} A_k}\}_{k\neq i_0}$ est libre. Donc $\dim(F) = r$.

(8) **(5) implique (1)** L'hypothèse de (4) est validée à fortiori.

□

Notons à propos de la condition (3) que l'existence d'un i pour lequel A_i n'est pas dans $\text{Aff}\{A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_r\}$ n'implique pas l'indépendance des $r+1$ points. En effet dans $\mathbb{R}^2$ nous considérons les 4 points $A_0 = (0,0)$, $A_1 = (1,0)$, $A_2 = (2,0)$ et $A_3 = (0,1)$. Évidemment le point A_3 n'est pas dans l'espace engendré par les trois autres ; il n'empêche que ces points ne sont pas affinement indépendants parce que la direction est de dimension 2 au lieu de 3.

DefguuwEO

Définition 11.46.
*Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de dimension k. Un **repère affine** de $\mathcal{F}$ est la donnée de $k+1$ points affinement indépendants de $\mathcal{F}$.*

Si $\{A_0, \dots, A_n\}$ est un repère affine, le point A_0 est l'**origine**. C'est un choix complètement arbitraire ; et c'est bien cet arbitraire qui nous amènera à considérer les coordonnées barycentriques au lieu des coordonnées cartésiennes.

Soit $M \in \mathcal{E}$; par définition nous avons

$$M = A_0 + \overrightarrow{A_0 M}. \tag{11.119}$$

Mais nous savons que les vecteurs $\overrightarrow{A_0 A_i}$ forment une base de E, nous avons donc des nombres λ_i tels que

$$\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i}. \tag{11.120}$$

Les nombres λ_i ainsi construits sont les **coordonnées cartésiennes** du point M dans le repère $\{A_0, \dots, A_n\}$ d'origine A_0.

À partir de ces coordonnées, le point $M \in \mathcal{E}$ se retrouve par la formule

$$M = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i}. \tag{11.121}$$

PROPooIXVBooPpKsDE

Proposition 11.47 ([1]).
La paire $\big(O, \{e_1, \dots, e_n\}\big)$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\{O, O+e_1, \dots, O+e_n\}$ est un repère affine.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct** Vue la proposition 11.45, il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{O(O+e_i)}$ sont linéairement indépendants. Mais $\overrightarrow{O(O+e_i)} = e_i$, donc oui, ils sont linéairement indépendants.

(2) **Sens inverse** Il s'agit d'utiliser la même proposition 11.45 qui est encore applicable parce que c'est une équivalence.

□

11.48.
Soient (A, e_i) et (A', e'_i) deux repères cartésiens pour l'espace affine $\mathcal{E}$. Soit (s_{ij}) la matrice de changement de base entre $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$ dans E. Nous voudrions trouver les x_i en termes des x'_i.

Pour cela nous considérons un point M dans $\mathcal{E}$ et nous l'écrivons dans les deux bases. Cela fournit l'égalité

$$A + \sum_i x_i e_i = A' + \sum_i x'_i e'_i. \tag{11.122}$$

EqcYfuMg

Nous considérons les coordonnées (a_i) de A' dans le repère (A, e_i), c'est-à-dire

$$A' = A + \sum_i a_i e_i. \tag{11.123}$$

EqZNwPHE

En substituant $e'_i = \sum_k s_{jk} e_k$ et (11.123) dans (11.122) nous trouvons

$$\sum_k x_k e_k = \sum_k a_k e_k + \sum_{jk} s_{jk} x'_j e_k, \tag{11.124}$$

et par conséquent

$$x_k = a_k + \sum_j s_{jk} x'_j. \tag{11.125}$$

Les coordonnées barycentriques sont données par la proposition suivante.

PROPooTIRXooLAipRa

Proposition 11.49 ([411])**.**
Soient $A_0, \dots, A_r$ des points affinement indépendants dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F} = \text{Aff}\{A_0, \dots, A_r\}$. Tout point $M \in \mathcal{F}$ s'écrit de façon unique comme barycentre[9] *des A_i affectés de poids λ_i tels que $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$.*

Démonstration. Nous avons vu plus haut (définition 11.46) que l'affine indépendance des points A_i assurait que $(A_0, \dots, A_r)$ était un repère de $\mathcal{F}$.

En ce qui concerne l'existence de l'écriture de M comme barycentre, nous savons que les sous-espace affines sont exactement les ensembles de barycentres (proposition 11.35), c'est-à-dire que si on a des points dans un sous-espace affine, alors les barycentres de ces points est encore dans le sous-espace affine.

L'unicité est comme suit. Si M est barycentre des A_i avec poids λ_i, nous écrivons la caractérisation (4) du théorème 11.32 avec $B = A_0$:

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \tag{11.126}$$

où la somme à droite s'étend à priori de 0 à r, mais comme $\overrightarrow{A_0A_0} = 0$, nous l'avons limitée à 1. Si M s'écrit comme barycentre de deux façons différentes, nous aurions

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{i=1}^r \mu_i \overrightarrow{A_0A_i} \tag{11.127}$$

avec $\sum_i \lambda_i = \sum_i \mu_i = 1$. Étant donné que les points $A_0, \dots, A_r$ forment un repère, les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_i}$ sont linéairement indépendants (point (5) de la proposition 11.45) et donc $\lambda_i = \mu_i$ pour $i = 1, \dots, r$. La condition de somme des poids égale à 1 impose alors immédiatement $\lambda_0 = \mu_0$. □

DEFooTXPPooQdacbO

Définition 11.50.
Soit un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n. Soient des points affinement indépendants $A_1, \dots, A_n$. Pour $M \in \mathcal{E}$, la proposition 11.49 indique qu'il existe un unique choix de λ_i tel que

$$\begin{cases} \sum_i \lambda_i = 1 & \text{(11.128a)} \\ \sum_i \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = 0. & \text{(11.128b)} \end{cases}$$

[9] Définition 11.30.

Ces λ_i sont les ***coordonnées barycentriques*** *de M dans le repère $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$.*

NORMooOGHBooMjmouu

11.51.
Soit $\mathbb{R}^2$ et les points non alignés A, B, C. Les coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans ce système correspondent à l'unique $X \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\alpha\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{XB} + \gamma\overrightarrow{XC} = 0. \tag{11.129}$$

Exemple 11.52.
Soient les points $A = (3, 1)$, $B = (-1, 2)$ et $C = (0, -1)$ dans $\mathbb{R}^2$. Nous allons montrer qu'il forment un repère affine de $\mathbb{R}^2$. L'espace engendré par ces trois points est l'espace des

$$A + \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}, \tag{11.130}$$

et la direction correspondante est l'espace vectoriel donné par $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ qui est de dimension deux. Donc l'espace affine engendré par A, B et C est de dimension 2. △

Exemple 11.53.
Dans le repère (A, B, C), quel est le point de coordonnées barycentriques $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$? D'abord nous vérifions que

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1. \tag{11.131}$$

Ensuite nous cherchons $X \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{1}{6}\overrightarrow{AX} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CX} = 0, \tag{11.132}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} = 0. \tag{11.133}$$

Nous trouvons immédiatement $x = 1/6$ et $y = 1/3$. Le point cherché est donc le point $\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. △

LEMooDUMVooFtfFOe

Lemme 11.54 ([1])**.**
Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui préserve les points d'une base affine de $\mathcal{E}$ est l'identité.

Démonstration. Une base affine de $\mathcal{E}$ consiste en $n+1$ points $\{A_0, \dots, A_n\}$ affinement indépendants. Nous utilisons la proposition 11.47 pour dire que $\big(A_0, \{\overrightarrow{A_0A_i}\}_{i=1,\dots,n}\big)$ est un repère cartésien.

En utilisant la formule du lemme 11.14,

$$f(A_i) = f(A_0 + \overrightarrow{A_0A_i}) = f(A_0) + u(\overrightarrow{A_0A_i}). \tag{11.134}$$

Donc $A_i = A_0 + u(\overrightarrow{A_0A_i})$, ce qui signifie que

$$u(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{A_0A_i} \tag{11.135}$$

EQooAJYWooBTucpp

Par ailleurs, tout point M[10] de $\mathcal{E}$ peut être écrit sous la forme

$$M = A_0 + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}. \tag{11.136}$$

En appliquant f, et en utilisant (11.135),

$$f(M) = f(A_0) + \sum_i \lambda_i u(\overrightarrow{A_0A_i}) = A_0 + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = M. \tag{11.137}$$

Donc tout point de $\mathcal{E}$ est fixé par f, ce qui signifie que f est l'identité. □

[10] Même les points qui ne s'appellent pas « M » en fait.

11.8.1 Équation de droite

DEFooCYDPooEdRbyl

Proposition-Définition 11.55.
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension trois muni d'un repère barycentrique[11] *(A_1, A_2, A_3). Nous notons $D(a,b,c)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées barycentriques (normalisées) (x,y,z) vérifient $ax+by+cz=0$, c'est-à-dire l'ensemble des $M \in \mathcal{E}$ tels que*

$$\begin{cases} x+y+z=1 & \text{(11.138a)} \\ x\overrightarrow{MA_1}+y\overrightarrow{MA_2}+z\overrightarrow{MA_3}=0. & \text{(11.138b)} \end{cases}$$

Alors l'ensemble $D(a,b,c)$ est un sous-espace de dimension 1 de $\mathcal{E}$.
*Nous nommons **droite affine** une telle partie de $\mathcal{E}$.*

Idée de preuve : ne pas oublier la condition $x+y+z=1$ parce que la somme des coordonnées barycentriques doit valoir 1.

Exemple 11.56.
La droite $D(1,1,1)$ n'existe pas parce que ce serait $x+y+z=0$, qui est incompatible avec $x+y+z=1$. △

Les droites $D(a,b,c)$ et $D(a',b',c')$ s'intersectent selon les solutions du système

$$\begin{cases} x+y+z=1 & \text{(11.139a)} \\ ax+by+cz=0 & \text{(11.139b)} \\ a'x+b'y+c'z=0 & \text{(11.139c)} \end{cases}$$

Donc deux droites affines ont un unique point d'intersection si et seulement si

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \neq 0. \tag{11.140}$$

Elles seront parallèles ou confondues si et seulement si $d=0$.

11.8.2 Associativité, coordonnées barycentriques dans un triangle

Lemme 11.57 ([415]).
Soient trois points non alignés A, B, C ainsi que des nombres α, β, γ tels que $\alpha+\beta\neq 0$ et $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
Soit H le barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ et G le barycentre de $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.
Alors G est barycentre de $\{(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$.

Démonstration. Vues les définitions de H et G nous avons

$$\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}=0 \tag{11.141a}$$
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=0. \tag{11.141b}$$

En utilisant les relations de Chasles nous introduisons H dans la seconde relation :

$$\alpha(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA})+\beta(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HB})+\gamma\overrightarrow{GC}=0 \tag{11.142a}$$
$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}+\underbrace{\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}}_{=0}+\gamma\overrightarrow{GC}=0 \tag{11.142b}$$
$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC}=0. \tag{11.142c}$$

□

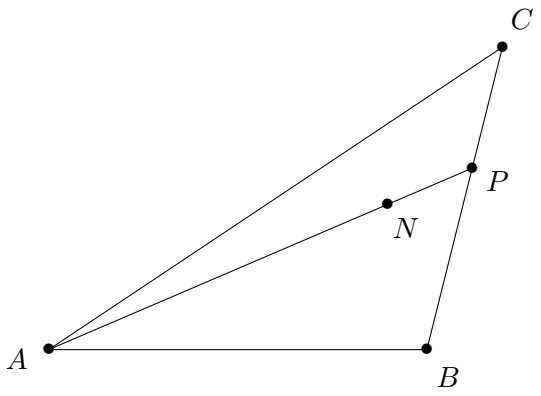
Les coordonnées barycentriques dans un triangle (et plus généralement en fait) permettent de faire des projections.

PROPooBCUVooWKttiH

Proposition 11.58.
Soient trois points non alignés A, B, C ainsi qu'un point N de coordonnées barycentriques (α,β,γ) dans le système (A,B,C). Si P est l'intersection $(AN)\cap(BC)$ alors les coordonnées de P sont $(0,\beta,\gamma)$.

Démonstration. Un dessin de la situation :

[11] Définition 11.50.



Dire que les coordonnées de N sont (α,β,γ) signifie que

$$\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NC}=0. \tag{11.143}$$

Nous voudrions montrer que le point P est bien le point de coordonnées $(0,\beta,\gamma)$. Soit donc le point P tel que

$$\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}=0 \tag{11.144}$$

EQooYLGDooWqKKQM

et montrons que ce point est l'intersection $(BC)\cap(NA)$.

D'abord la relation (11.144) nous dit immédiatement que P est sur la droite (BC). Ensuite, en utilisant les relations de Chasles pour introduire N :

$$\beta(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NB})+\gamma(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NC})=0. \tag{11.145}$$

Nous remplaçons $\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NC}$ par $-\alpha\overrightarrow{NA}$ pour obtenir :

$$(\beta+\gamma)\overrightarrow{PN}-\alpha\overrightarrow{NA}=0. \tag{11.146}$$

Cela montre que les vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{NA}$ sont colinéaires, et donc que P, N et A sont alignés. □

11.9 Applications affines sur $\mathbb{R}^n$

Soit $v\in\mathbb{R}^n$; nous notons $\tau_v\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ la translation donnée par $\tau_v(x)=x+v$. Le groupe de toutes les translations de $\mathbb{R}^n$ est noté $T(n)$ et est isomorphe au groupe abélien $(\mathbb{R}^n,+)$.

Nous avons déjà discuté de la structure d'un espace vectoriel (en particulier $\mathbb{R}^n$) comme espace affine en 11.6.

LEMooZZAIooOMiayy

Lemme 11.59.
Décomposition d'une application affine.

ITEMooSJBFooYHURto

(1) Une application $f\colon E\to E$ est affine si et seulement si il existe $v\in E$ et une application linéaire α sur E telle que $f=\tau_v\circ\alpha$.

ITEMooPYEOooKIesYm

(2) Dans ce cas, le choix de (v,α) est unique.

ITEMooHIAUooRxfTqx

(3) Si f est bijective, alors α est bijective.

Démonstration. Nous supposons d'abord que f est affine. Alors il existe une application linéaire u_f sur E telle que

$$f(M+x)=f(M)+u_f(x)=(\tau_{f(M)}\circ u_f)(x) \tag{11.147}$$

pour tout x et M. De plus l'application u_f ne dépend ni de M ni de x (c'est la proposition 11.17(1)). En posant $M=0$ nous avons :

$$f(x)=(\tau_{f(0)}\circ u_f)(x). \tag{11.148}$$

Dans l'autre sens nous supposons avoir $v\in E$ et α linéaire sur E telles que

$$f(M)=(\tau_v\circ\alpha)(M). \tag{11.149}$$

Notons qu'il y a un abus de notation entre α qui est linéaire sur l'espace *vectoriel* E et l'application α qui est une application sur l'espace *affine* E. Cet abus est légitime parce que les deux espaces sont identiques en tant qu'ensembles. Ce qui est vraiment abuser par contre, c'est de se poser ce genre de questions.

Nous avons :

$$\begin{aligned} f(M+x) = \tau_v\big(\alpha(M+x)\big) = \alpha(M+x) + v = \alpha(M) + v + \alpha(x) \\ = (\tau_v \circ \alpha)(M) + \alpha(x) = f(M) + \alpha(x). \end{aligned} \tag{11.150}$$

Donc la fonction f vérifie la définition 11.13. La partie (1) est prouvée.

Pour prouver l'unicité de la partie (2), nous supposons que $\tau_v \circ \alpha = \tau_w \circ \alpha$. En appliquant cela à 0 nous trouvons $v = w$. Nous avons donc $\tau_v \circ \alpha = \tau_v \circ \beta$. Comme τ_v est inversible, nous en déduisons $\alpha = \beta$.

Enfin le point (3) est relativement évident du fait que τ_v, elle, est surement bijective. □

CORooATCNooUwEPNI

Corolaire 11.60.
Une application affine qui conserve l'origine est linéaire.

Démonstration. Conserver l'origine demande de poser $v = 0$ dans l'expression du lemme 11.59. □

PROPooYRCJooIcmUVI

Proposition 11.61.
Soit une application affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. L'ensemble des points fixes

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) = x\} \tag{11.151}$$

est soit vide soit un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soit $f = \tau_v \circ \alpha$; nous avons $x \in \mathrm{Fix}(f)$ si et seulement si

$$x = \tau_v\big(\alpha(x)\big) = \alpha(x) + v, \tag{11.152}$$

autrement dit, en considérant l'application linéaire $\beta = \mathrm{Id} - \alpha$, si et seulement si $\beta(x) = v$. Nous écrivons $\mathrm{Fix}(f) = \beta^{-1}(v)$. Supposons que cet ensemble soit non vide et considérons $x_0 \in \beta^{-1}(v)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(v) &= \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \beta(x) = \beta(x_0)\} && \text{(11.153a)} \\ &= \{x \text{ tel que } \beta(x - x_0) = 0\} && \text{(11.153b)} \\ &= \{x \text{ tel que } x - x_0 \in \ker(\beta)\} && \text{(11.153c)} \\ &= \ker(\beta) + x_0 && \text{(11.153d)} \\ &= \tau_{x_0}\big(\ker(\beta)\big). && \text{(11.153e)} \end{aligned}$$

Mais comme $\ker(\beta)$ est un sous-espace vectoriel, $\beta^{-1}(v)$ est le translaté d'un sous-espace vectoriel, c'est-à-dire un sous-espace affine. □

11.9.1 Structure de groupe pour les applications affines

PROPooBPKKooJRAMeT

Proposition-Définition 11.62 ([1])**.**
L'ensemble des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^n$ forment un groupe pour la composition. Les lois de groupe sont données par les formules suivantes :

(1) Le neutre est l'identité.

ITEMooGUFRooMuhXds

(2) Le produit est donné par

$$(\tau_v \circ \alpha)(\tau_w \circ \beta) = \tau_{\alpha(w)+v} \circ \alpha\beta. \tag{11.154}$$

EQooMIFSooKIyPuW
ITEMooYOMSooRUDSdm

(3) L'inverse est donné par

$$(\tau_v \circ \alpha)^{-1} = \tau_{-\alpha^{-1}(v)} \circ \alpha^{-1}. \tag{11.155}$$

Ce groupe est noté $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Pour l'identité, oui, composer par l'identité est neutre.

Le fait que la formule (11.154) soit vraie est un simple calcul :

$$(\tau_v \circ \alpha) \circ (\tau_w \circ \beta)(x) = (\alpha\beta)(x) + \alpha(w) + v = \big(\tau_{\alpha(w)+v} \circ \alpha\beta\big)x. \tag{11.156}$$

Le fait que la formule (11.154) donne bien un produit pour tous les éléments de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ est le lemme 11.59.

En ce qui concerne l'inverse, c'est un calcul :

$$\begin{aligned} (\tau_{-\alpha^{-1}(v)}\alpha^{-1})(\tau_v\alpha)(x) &= (\tau_{-\alpha^{-1}(v)}\alpha^{-1})\big(\alpha(x) + v\big) && \text{(11.157a)} \\ &= \tau_{-\alpha^{-1}(v)}\big(x + \alpha^{-1}(v)\big) && \text{(11.157b)} \\ &= x. && \text{(11.157c)} \end{aligned}$$

□

Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application affine, la proposition 11.59 affirme qu'il existe une application linéaire u telle que

$$f(x+y) = f(x) + u(y). \tag{11.158}$$

En écrivant cela pour $x = 0$,

$$f(y) = f(0) + u(y), \tag{11.159}$$

ou encore $f = \tau_{f(0)} \circ u$.

PROPooTPFZooKtFxhg

Proposition 11.63.
L'ensemble $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ *est isomorphe au produit semi-direct*[12]

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \simeq T(n) \times_{\boldsymbol{Ad}} \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \tag{11.160}$$

où $\boldsymbol{Ad}$ *est l'action adjointe, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Ad}\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) &\to \mathrm{Aut}\big(T(n)\big) \\ \alpha &\mapsto \big(\tau_v \mapsto \alpha \circ \tau_v \circ \alpha^{-1}\big). \end{aligned} \tag{11.161}$$

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Égalité d'ensembles** Il faut que $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ soit en bijection avec $T(n) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. En effet si $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$, la décomposition $f = \tau_v \circ \alpha$ est unique. D'abord en appliquant à 0, $f(0) = \tau_v\big(\alpha(v)\big) = v$. Donc v est fixé par la valeur de $f(0)$. Ensuite $\alpha = f \circ \tau_v^{-1}$, donc α fixé.

(2) **L'action adjointe fonctionne** Il faut vérifier que $\alpha \circ \tau_v \circ \alpha^{-1}$ est bien dans $T(n)$. Pour cela, en agissant sur $x \in \mathbb{R}^n$ nous trouvons

$$\alpha\tau_v\alpha^{-1}(x) = \alpha\big(\alpha^{-1}(x) + v\big) = x + \alpha(v) = \tau_{\alpha(v)}(x). \tag{11.162}$$

Le fait que $\mathbf{Ad}(\alpha)$ soit un automorphisme est toujours correct.

(3) **Morphisme** Nous montrons que

$$\begin{aligned} \psi\colon T(n) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) &\to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \\ (\tau_v, \alpha) &\mapsto \tau_v \circ \alpha \end{aligned} \tag{11.163}$$

est un isomorphisme de groupes. D'abord la loi de groupe sur $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ est donnée par

$$(\tau_v \circ \alpha) \circ (\tau_w \circ \beta) = \tau_{v+\alpha(w)} \circ (\alpha \circ \beta). \tag{11.164}$$

Ensuite la loi de groupe du produit semi-direct est donnée par

$$(\tau_v, \alpha) \cdot (\tau_w, \beta) = \big(\tau_v\, \mathbf{Ad}(\alpha)\tau_w, \alpha\beta\big) = \big(\tau_v\tau_{\alpha(w)}, \alpha\beta\big) = \big(\tau_{\alpha(w)+v}, \alpha\beta\big). \tag{11.165}$$

Nous avons donc bien

$$\psi\big((\tau_v,\beta)\cdot(\tau_w,\beta)\big) = \psi(\tau_v,\beta) \circ \psi(\tau_w,\beta). \tag{11.166}$$

□

11.10 Isométries

DEFooZGKBooGgjkgs

Définition 11.64 (Isométrie d'espace affine)**.**
Si $\mathcal{E}$ *est un espace affine muni d'une distance* d*, une isométrie de* $\mathcal{E}$ *est une application* $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *préservant* d*, c'est-à-dire telle que*

$$d(x,y) = d\big(f(x), f(y)\big). \tag{11.167}$$

Notons que toutes les applications affines ne sont pas des isométries : par exemple les homothéties.

PROPooHSOGooBbFTYt

Proposition 11.65.
Si $\mathcal{E}$ *est modelé sur un espace euclidien* $(E, \|.\|)$ *alors la formule*

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| \tag{11.168}$$

définit une distance[13] *sur* $\mathcal{E}$*.*

[12] Définition 2.48.
[13] Définition 7.139.

Démonstration. Étant donné la proposition 11.3, la formule a un sens parce qu'à A et B donnés dans $\mathcal{E}$, il est associé un unique vecteur $\overrightarrow{AB} \in E$.

Pour vérifier que d est une distance, nous vérifions les points de la définition 7.139 et nous utilisons les propriétés correspondantes dans la définition 7.212 d'une norme.

(1) $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| \geqslant 0$.

(2) Si $d(A,B) = 0$, alors $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$, ce qui implique que $\overrightarrow{AB} = 0$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} B &= A + \overrightarrow{AB} && \text{proposition 11.3} && (11.169a)\\ &= A + 0 && && (11.169b)\\ &= A && \text{lemme 11.4.} && (11.169c) \end{aligned}$$

(3) En utilisant la proposition 11.5(3),

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \| - \overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = d(B,A) \tag{11.170}$$

(4) En utilisant les relation de Chasles 11.5(1) ainsi que l'inégalité triangulaire 7.212(4)

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\| \leqslant \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\| = d(A,C) + d(C,B). \tag{11.171}$$

□

Nous parlons d'isométries affines ou linéaires dans le thème 78.

Chapitre 12

Analyse réelle : limites et dérivation

12.1 Limite de fonctions

12.1.1 Définition

La définition générale de la limite est 7.135. Dans le cas de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, elle peut s'écrire de façon plus efficace. La proposition suivante montre comment fonctionne la limite pour une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$.

PropAJQQooQQClfp

Proposition 12.1 (Caractérisation de la limite)**.**
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. La fonction f admet la limite ℓ pour $x \to a$ si et seulement si il existe un réel ℓ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

EqDefLimiteFonction

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon. \tag{12.1}$$

Démonstration. Il s'agit de montrer l'équivalence avec la définition 7.135. Nous allons faire un usage intensif de la proposition 7.143.

(1) **Sens direct** Soient $\epsilon > 0$ et $V = B(\ell, \epsilon)$. Alors il existe un voisinage W de a dans $\mathbb{R}$ tel que

$$f\big(W \setminus \{a\}\big) \subset V. \tag{12.2}$$

Soit δ tel que $B(a, \delta) \subset W$. Nous avons encore

$$f\big(B(a, \delta) \setminus \{a\}\big) \subset V. \tag{12.3}$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x - a| < \delta$. Cela signifie $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$. Pour un tel x nous avons donc $f(x) \in B(\ell, \epsilon)$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

(2) **Dans l'autre sens** Soient un voisinage V de ℓ et $\epsilon > 0$ tel que $B(\ell, \epsilon) \subset V$. Nous considérons δ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ pour tout x satisfaisant $0 < |x - a| < \delta$.

Avec tout cela nous posons $W = B(x, \delta)$, et nous avons

$$f\big(W \setminus \{a\}\big) \subset B(\ell, \epsilon) \subset V. \tag{12.4}$$

□

Si aucun nombre ℓ ne vérifie la condition de la définition, alors on dit que la fonction n'admet pas de limite en a. Lorsque f possède la limite ℓ en a, nous notons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell. \tag{12.5}$$

La proposition suivante a déjà été démontrée dans la proposition 7.138. Nous en donnons ici une démonstration adaptée au cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 12.2.
Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$. Si a est un point d'accumulation de D et si il existe une limite de f en a, alors il en existe une seule.

Démonstration. Nous prouvons qu'il ne peut pas exister deux nombres $\ell \neq \ell'$ vérifiant tous les deux la condition (12.1).

Soient ℓ et ℓ' deux limites de f au point a. Par définition, pour tout ϵ nous avons des nombres δ et δ' tels que

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta &\Rightarrow \big|f(x)-\ell\big| < \epsilon \\ |x-a| < \delta' &\Rightarrow \big|f(x)-\ell'\big| < \epsilon \end{aligned} \tag{12.6}$$

Pour fixer les idées, supposons que $\delta < \delta'$ (le cas $\delta \geqslant \delta'$ se traite de la même manière).

Étant donné que a est un point d'accumulation du domaine D de f, il existe un $x \in D$ tel que $|x-a| < \delta$. Évidemment, nous avons aussi $|x-a| < \delta'$. Les conditions (12.6) signifient alors que ce x vérifie en même temps

$$|f(x)-\ell| < \epsilon, \tag{12.7}$$

et

$$|f(x)-\ell'| < \epsilon. \tag{12.8}$$

Afin de prouver que $\ell = \ell'$, nous allons maintenant calculer $|\ell-\ell'|$ et montrer que cette distance est plus petite que tout nombre. Nous avons (voir remarque 12.3)

$$|\ell-\ell'| = |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \leqslant |\ell - f(x)| + |f(x)-\ell'| < \epsilon + \epsilon. \tag{12.9}$$

En résumé, pour tout $\epsilon > 0$ nous avons

$$|\ell-\ell'| < 2\epsilon, \tag{12.10}$$

et donc $|\ell-\ell'| = 0$, ce qui signifie que $\ell = \ell'$. □

Remarque 12.3.
Les inégalités (12.9) utilisent deux techniques très classiques en analyse qu'il convient d'avoir bien compris. La première est de faire

$$|A-B| = |A-C+C-B|. \tag{12.11}$$

Il s'agit d'ajouter $-C+C$ dans la norme. Évidemment, cela ne change rien.

La seconde technique est l'inégalité

$$|A+B| \leqslant |A| + |B|. \tag{12.12}$$

12.4.
Prouvons que $\lim_{x\to 0} x = 0$. C'est donc $a = b = 0$ dans la définition. Prenons $\epsilon > 0$, et trouvons un intervalle autour de zéro tel que partout dans l'intervalle, $x \leqslant \epsilon$. Bon ben c'est clair que $\delta = \epsilon$ fonctionne.

Plus compliqué maintenant, mais toujours sans surprises.

Proposition 12.5.

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On veut un intervalle de largeur δ autour de zéro tel que x^2 soit plus petit que ϵ sur cet intervalle. Cette fois-ci, le δ qui fonctionne est $\delta = \sqrt{\epsilon}$. En effet un élément de l'intervalle $[-\delta, \delta]$ est un r de valeur absolue plus petite ou égale à δ :

$$|r| \leqslant \delta = \sqrt{\epsilon}.$$

En prenant le carré de cette inégalité on a :

$$r^2 \leqslant \epsilon,$$

ce qu'il fallait prouver. □

Exemple 12.6.
Considérons la fonction $f(x) = 2x$, et calculons la limite $\lim_{x\to 3} f(x)$. Vu que $f(3) = 6$, nous nous attendons à avoir $\ell = 6$. C'est ce que nous allons prouver maintenant. Pour chaque $\epsilon > 0$ nous devons trouver un $\delta > 0$ tel que $|x-3| < \delta$ implique $|f(x)-6| < \epsilon$. En remplaçant $f(x)$ par sa valeur en fonction de x et avec quelques manipulations nous trouvons :

$$\begin{aligned} |f(x)-6| &< \epsilon \\ |2x-6| &< \epsilon \\ 2|x-3| &< \epsilon \\ |x-3| &< \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{12.13}$$

Donc dès que $|x-3|<\frac{\epsilon}{2}$, nous avons $|f(x)-6|<\epsilon$. Nous posons donc $\delta=\frac{\epsilon}{2}$.

Plus généralement, nous avons $\lim_{x\to a} f(x)=2a$, et cela se prouve en étudiant $|f(x)-2a|$ exactement de la même manière. △

12.1.2 Quelques règles de calcul

LEMooSPXNooPSufAn

Lemme 12.7 ([1]).
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon)=0$. Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que $|a|\leqslant f(\epsilon)$ pour tout ϵ. Alors $a=0$.

Démonstration. Soit $\epsilon'>0$. Il existe $\delta>0$ tel que $|f(\epsilon)|<\epsilon'$ pour tout $|\epsilon|<\delta$. Dès que $\epsilon<\delta$, nous avons

$$0\leqslant|a|\leqslant f(\epsilon)\leqslant|f(\epsilon)|<\epsilon'. \tag{12.14}$$

Donc $a=0$ par le lemme 1.556(3). □

Les opérations simples passent à la limite, sauf la division pour laquelle il faut faire attention au dénominateur. La proposition suivante est en grande partie un cas particulier de la proposition 10.277.

PropOpsSimplesLimites

Proposition 12.8.
Soient deux fonctions $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Nous supposons que $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ et $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$. Alors

ITEMooOJUWooQpqqnQ

(1) La fonction $f+g$ a une limite $x\to a$ qui vaut $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\alpha+\beta$,

ITEMooNGWTooSDlEkp

(2) Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, la fonction λf a une limite en a qui vaut $\lim_{x\to a}(\lambda f)(x)=\lambda\alpha$.

(3) La fonction fg a une limite en a, qui vaut $\lim_{x\to a}(fg)(x)=\alpha\beta$,

(4) si il existe un voisinage de a sur lequel g ne s'annule pas, et si $\beta\neq 0$, alors la fonction f/g a une limite en a qui vaut $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **La somme** Soit $\epsilon>0$. Soient $\delta_1>0$ et $\delta_2>0$ tels que

$$0<|x-a|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-\alpha|<\epsilon \tag{12.15a}$$
$$0<|x-a|<\delta_2\Rightarrow|g(x)-\beta|<\epsilon. \tag{12.15b}$$

En prenant $\delta\leqslant\min\{\delta_1,\delta_2\}$, si $0<|x-a|\leqslant\delta$ alors

$$|f(x)+g(x)-\alpha-\beta|\leqslant|f(x)-\alpha|+|g(x)-\beta|\leqslant 2\epsilon. \tag{12.16}$$

Cela étant valable pour tout ϵ, nous avons $|f(x)+g(x)-\alpha-\beta|=0$ par le lemme 1.556(3).

(2) **Produit par un scalaire**
Soit $\epsilon>0$. Nous devons trouver un δ tel que pour tout x dans $[a-\delta,a+\delta]$, on ait $|(\lambda f)(x)-\lambda\alpha|\leqslant\epsilon$. Cette dernière inégalité est équivalente à $|\lambda||f(x)-\alpha|\leqslant\epsilon$. Nous devons donc trouver un δ tel que

$$|f(x)-\alpha|\leqslant\frac{\epsilon}{|\lambda|}. \tag{12.17}$$

soit vraie pour tout x dans $[a-\delta,a+\delta]$. Mais l'hypothèse $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ (prise avec $\epsilon/|\lambda|$ en guise de ϵ) dit précisément qu'il existe un δ tel que pour tout x dans $[a-\delta,a+\delta]$ on ait cette inégalité.

(3) **Le produit** Nous prenons ϵ, δ_1 et δ_2 dans les mêmes conditions que pour la somme. Nous majorons comme ceci :

$$|f(x)g(x)-\alpha\beta|\leqslant|f(x)g(x)-\alpha g(x)|+|\alpha g(x)-\alpha\beta| \tag{12.18a}$$
$$=|g(x)||f(x)-\alpha|+|\alpha||g(x)-\beta| \tag{12.18b}$$
$$\leqslant\epsilon\big(|g(x)|+|\alpha|\big) \tag{12.18c}$$
$$\leqslant\epsilon\big(|\beta|+\epsilon+|\alpha|\big). \tag{12.18d}$$

La dernière ligne majore $|g(x)|\leqslant|\beta|+\epsilon$.

Vu que $\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\big(|\beta|+\epsilon+|\alpha|\big)=0$, le lemme 12.7 dit que $f(x)g(x)-\alpha\beta=0$, ce que nous voulions.

(4) **Le quotient** Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons $\delta > 0$ tel que nous ayons simultanément $|f(x) - \alpha| < \epsilon$, $|g(x) - \beta| < \epsilon$ et $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in B(a, \delta)$. Nous avons alors le calcul

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\alpha}{\beta}| \leqslant |\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\alpha}{g(x)}| + |\frac{\alpha}{g(x)} - \frac{\alpha}{\beta}| \tag{12.19a}$$

$$\leqslant |\frac{1}{g(x)}||f(x) - \alpha| + |\alpha||\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta}| \tag{12.19b}$$

SUBEQooOHFHooWZrwcA

Nous avons la majoration

$$\frac{1}{|g(x)|} \leqslant \frac{1}{|\beta| - \epsilon}, \tag{12.20}$$

et comme $\beta \neq 0$, nous pouvons supposer que ϵ est assez petit pour que le dénominateur ne s'annule pas. En ce qui concerne le second terme de (12.19b),

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - g(x)}{g(x)\beta}. \tag{12.21}$$

Ici aussi nous pouvons majorer $1/g(x)$. Le numérateur se majore par ϵ. En remettant tout ça dans (12.19b), nous avons une majoration qui tend vers zéro lorsque $\epsilon \to 0$.

□

PROPooVLBWooVttvFK

Proposition 12.9.
La limite est linéaire : pour toutes fonctions f et g admettant une limite en a et pour tout réels λ et μ.

$$\lim_{x \to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \lim_{x \to a} f(x) + \mu \lim_{x \to a} g(x). \tag{12.22}$$

Démonstration. Tout est dans la proposition 12.8. □

Le résultat suivant est pratique pour le calcul des limites.

PropChmVarLim

Proposition 12.10.
Quand la limite existe, nous avons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} f(a + \epsilon),$$

ce qui correspond à un « changement de variables » dans la limite.

Démonstration. Si $A = \lim_{x \to a} f(x)$, par définition,

$$\forall \epsilon' > 0, \exists \delta \text{ tel que } |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \epsilon'. \tag{12.23}$$

EqCondFaplusespLim

La seule subtilité de la démonstration est de remarquer que si $|x - a| \leqslant \delta$, alors x peut être écrit sous la forme $x = a + \epsilon$ pour un certain $|\epsilon| \leqslant \delta$. En remplaçant x par $a + \epsilon$ dans la condition 12.23, nous trouvons

$$\forall \epsilon' > 0, \exists \delta \text{ tel que } |\epsilon| \leqslant \delta \Rightarrow |f(a + \epsilon) - A| \leqslant \epsilon', \tag{12.24}$$

ce qui signifie exactement que $\lim_{\epsilon \to 0} f(a + \epsilon) = A$. □

Il y a une petite différence de point de vue entre $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{\epsilon \to 0} f(a + \epsilon)$. Dans le premier cas, on considère $f(x)$, et on regarde ce qu'il se passe quand x se rapproche de a, tandis que dans le second, on considère $f(a)$, et on regarde ce qu'il se passe quand on s'éloigne un tout petit peu de a. Dans un cas, on s'approche très près de a, et dans l'autre on s'en éloigne un tout petit peu. Le contenu de la proposition 12.10 est de dire que ces deux points de vue sont équivalents.

PROPooOUPNooTrClHw

Proposition 12.11 ([373]).
Soient des fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to a} g(x) = \ell' \neq 0$. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}. \tag{12.25}$$

Démonstration. Nous avons :

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'} \right| = \frac{|\ell' f(x) - g(x)\ell|}{|g(x)\ell'|}. \tag{12.26}$$

Soit s, un minorant de $|g(x)|$ sur un voisinage de a ; puisque la limite en a est $\ell' \neq 0$, nous pouvons prendre par exemple $s = |\ell'|/2 : |g(x)| > |\ell'|/2$ sur $B(a,\delta)$ dès que δ est assez petit. Nous considérons $x \in B(a,\delta)$. Avec cela nous avons :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| = \frac{|\ell' f(x) - g(x)\ell|}{|g(x)\ell'|} \tag{12.27a}$$
$$\leqslant \frac{2}{|\ell'|}\left(\frac{|\ell' f(x) - g(x)\ell|}{|\ell'|}\right) \tag{12.27b}$$
$$\leqslant \frac{2}{|\ell'|^2}\big(|\ell' f(x) - \ell\ell'| + |\ell\ell' - g(x)\ell|\big) \tag{12.27c}$$
$$= \frac{2}{|\ell'|^2}\big(|\ell'||f(x) - \ell| + |\ell||\ell' - g(x)|\big). \tag{12.27d}$$

Nous avons utilisé la règle du produit de valeurs absolues du lemme 1.114(6).

Soient $\epsilon > 0$ et δ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ et $|g(x) - \ell'| < \epsilon$ pour tout $x \in B(a,\delta)$. Avec cela nous avons

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| \leqslant \frac{2}{|\ell'|^2\big(|\ell'| + |\ell|\big)}\epsilon. \tag{12.28}$$

D'où la limite attendue. □

LemLimMajorableVois

Lemme 12.12.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ avec a, $b \in \mathbb{R}$, alors il existe un $\delta > 0$ et un $M > 0$ tels que

$$(|x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x)| \leqslant M.$$

Ce que signifie ce lemme, c'est que quand la fonction f admet une limite finie en un point, alors il est possible de majorer la fonction sur un intervalle autour du point.

Démonstration. Cela va être démontré par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de δ ni de M qui vérifient la condition. Dans ce cas, pour tout δ et pour tout M, il existe un x tel que $|x - a| \leqslant \delta$ et $|f(x)| > M$. Ceci est valable pour tout M, donc, prenons par exemple, $b + 1000$. Ainsi

$$\forall \delta > 0, \exists x \text{ tel que } |x - a| \leqslant \delta \text{ et } |f(x)| > b + 1000. \tag{12.29}$$

Cela signifie qu'aucun δ ne peut convenir dans la définition de $\lim_{x\to a} f(x) = b$, ce qui contredit les hypothèses. □

Dans le même ordre d'idée, on peut prouver que si la limite de la fonction en un point est positive, alors elle est positive autour de ce point. Plus précisément, nous avons la proposition suivante.

PropoLimPosFPos

Proposition 12.13.
Si f est une fonction telle que $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f est positive.

Démonstration. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = y_0$. Par la définition de la limite, nous avons pour tout x dans un voisinage autour de a, $|f(x) - a| < \epsilon$. Ceci est valable pour tout ϵ, pourvu que le voisinage soit assez petit. Si nous choisissons un voisinage pour lequel $|f(x) - a| < \frac{y_0}{2}$, alors, sur ce voisinage, f est positive. □

Tholimfgabab

Théorème 12.14.
Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = b_2, \tag{12.30}$$

alors

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = b_1 b_2. \tag{12.31}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, et tentons de trouver un δ tel que $|f(x)g(x) - b_1 b_2| \leqslant \epsilon$ dès que $|x - a| \leqslant \delta$. Nous avons

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - b_1 b_2| &= |f(x)g(x) - b_1 b_2 + f(x)b_2 - f(x)b_2| \\ &= \big|f(x)\big(g(x) - b_2\big) + b_2\big(f(x) - b_1\big)\big| \\ &\leqslant \big|f(x)\big(g(x) - b_2\big)\big| + \big|b_2\big(f(x) - b_1\big)\big| \\ &= |f(x)||g(x) - b_2| + |b_2||f(x) - b_1|.\end{aligned} \tag{12.32}$$

EqfgbunbdeuxMin

Maintenant, nous savons par le lemme 12.12 que pour un certain δ_1, la quantité $|f(x)|$ peut être majorée par un certain M dès que $|x-a|\leqslant\delta_1$. Prenons donc un tel δ_1, et supposons que $|x-a|\leqslant\delta_1$. Nous savons aussi que pour n'importe quel choix de ϵ_2 et ϵ_3, il existe des nombres δ_2 et δ_3 tels que $|f(x)-b_1|\leqslant\epsilon_2$ et $|g(x)-b_1|\leqslant\epsilon_3$ dès que $|x-a|\leqslant\delta_2$ et $|x-a|\leqslant\delta_3$. Dans ces conditions, la dernière expression (12.32) se réduit à

$$|f(x)g(x)-b_1b_2|\leqslant M\epsilon_2+|b_2|\epsilon_3. \tag{12.33}$$

Pour terminer la preuve, il suffit de choisir ϵ_2 et ϵ_3 tels que $M\epsilon_2+|b_2|\epsilon_3\leqslant\epsilon$, et puis prendre $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$.

Remettons les choses dans l'ordre. On se donne un ϵ au départ. La première chose est de trouver un δ_1 qui permette de majorer $|f(x)|$ par M selon le lemme 12.12, et puis, choisissons ϵ_2 et ϵ_3 tels que $M\epsilon_2+|b_2|\epsilon_3\leqslant\epsilon$. Ensuite, nous prenons, en vertu des hypothèses de limites pour f et g, les nombres δ_2 et δ_3 tels que $|f(x)-b_1|\leqslant\epsilon_2$ et $|g(x)-b_2|\leqslant\epsilon_3$ dès que $|x-a|\leqslant\delta_2$ et $|x-a|\leqslant\delta_3$.

Si avec tout ça on prend $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, alors la majoration et les deux inégalités sont valables en même temps, et au final

$$|f(x)g(x)-b_1b_2|\leqslant M\epsilon_2+|b_2|\epsilon_3\leqslant\epsilon,$$

ce qu'il fallait prouver. □

À l'aide de ces petits résultats, nous pouvons déjà calculer pas mal de limites. Nous pouvons déjà par exemple, calculer les limites de tous les polynômes en tous les nombres réels. En effet, nous connaissons la limite de la fonction $f(x)=x$. La fonction $x\mapsto x^2$ n'est rien d'autre que le produit de f par elle-même. Donc

$$\lim_{x\to a}x^2=\big(\lim_{x\to a}x\big)\cdot\big(\lim_{x\to a}x\big)=a^2.$$

De la même façon, nous trouvons facilement que

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n. \tag{12.34}$$

LEMooLSJZooDauTkc

Lemme 12.15.
Soit $t\in\mathbb{R}$. Nous avons

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\operatorname{int}(xt)=t \tag{12.35}$$

où int *est la fonction partie entière définie en 1.594.*

Démonstration. En vertu du lemme 1.594, nous avons $y=\operatorname{int}(y)+\operatorname{frac}(y)$ avec $\operatorname{frac}(y)\in[0,1[$. Nous avons donc

$$\frac{1}{x}\operatorname{int}(xt)=\frac{1}{x}\big(xt-\operatorname{frac}(xt)\big) \tag{12.36a}$$
$$=\frac{xt}{x}+\frac{\operatorname{frac}(xt)}{x} \tag{12.36b}$$
$$=t+\frac{\operatorname{frac}(xt)}{x}. \tag{12.36c}$$

Puisque $\operatorname{frac}(xt)\in[0,1[$, nous avons

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{frac}(xt)}{x}=0. \tag{12.37}$$

D'où la limite demandée. □

12.2 Limites pointées et épointées

SECooNJSGooGSAtdV

La limite d'une fonction en un point a déjà été définie en 7.135. Nous introduisons maintenant une notion très ressemblante.

DEFooBAPHooUtIaRS

Définition 12.16 (limite pointée[416])**.**
*Soient X et Y deux espaces topologiques, A une partie de X, f une application de A dans Y, a un point de X adhérent à A et ℓ un point de Y. On dit que ℓ est une **limite pointée** de f au point a si pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage W de a tel que pour tout point x de $W\cap A$, l'image $f(x)$ appartient à V.*

Quelques notations et vocabulaire.

(1) Nous allons limiter notre discussion au cas des fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(2) La limite de la définition 7.135 sera provisoirement nommée **limite épointée**, pour ne pas causer de confusion.

(3) Pour bien distinguer la limite pointée de la limite épointée, nous allons noter $LP_{x\to a}f(x)$ pour la limite pointée et $LE_{x\to a}f(x)$ pour la limite épointée.

(4) Nous allons utiliser la caractérisation 9.84 de la continuité de f en un point.

(5) Nous allons utiliser la caractérisation 12.1 de la limite épointée.

LEMooWAZLooDPvemu

Lemme 12.17.
Si une fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifie $LP_{x\to a}f(x)=\ell$, alors elle vérifie $LE_{x\to a}f(x)=\ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon>0$. L'existence de la limite pointée dit qu'il existe $\delta>0$ tel que $|x-a|<\delta$ implique $|f(x)-\ell|<\epsilon$. À fortiori, si $0<|x-a|<\delta$ nous avons aussi $|f(x)-\ell|<\epsilon$. Donc la limite épointée, par la caractérisation 12.1. □

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre le lemme suivant.

LEMooOSNGooJpiXbK

Lemme 12.18 ([417])**.**
Soit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\begin{cases}0 & si\ x\neq 0\\ 1 & si\ x=0.\end{cases}\end{aligned} \tag{12.38}$$

Nous avons

ITEMooNRNCooFhbZwB

(1) $LE_{x\to 0}f(x)=0$.

ITEMooUSWMooMNPMCT

(2) La limite pointée de f en 0 n'existe pas.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Pour tout $x\in B(0,\delta)\setminus\{0\}$ nous avons $f(x)=0$. Donc la limite épointée suit.

(2) **Pour (2)** Soit $\delta>0$. Le lemme 1.556 nous assure qu'il existe $x\in\,]-\delta,0[$. Ce x est dans $B(0,\delta)$ et vérifie $f(x)=0$. Nous avons aussi $x=0$ dans la même boule. Donc $f\big(B(0,\delta)\big)$ contient au moins les nombres 1 et 0.

Il n'existe donc pas de ℓ tel que tout $f\big(B(0,\delta)\big)$ soit dans $B(\ell,\epsilon)$.

□

LEMooTPNEooRurTJJ

Lemme 12.19.
Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$. Alors la limite pointée de f en a existe si et seulement si la limite épointée existe. Dans ce cas, elles sont égales.

Démonstration. En trois parties. Nous notons $\Omega=\mathbb{R}\setminus\{a\}$ le domaine de f.

(1) **Si la limite pointée existe, alors l'épointée existe** Soit $\epsilon>0$. L'existence de la limite pointée dit qu'il existe $\delta>0$ tel que $f\big(B(a,\delta)\cap\Omega\big)\subset B(\ell,\epsilon)$. Comme $B(a,\delta)\cap\Omega=B(a,\delta)\setminus\{a\}$, nous avons la condition épointée.

(2) **Si la limite épointée existe, alors la pointée existe** Du même tonneau.

(3) **Égalité** Le jeu des boules du premier point prouve l'égalité au passage.

□

Que faut-il donc ajouter à la limite épointé pour obtenir une limite pointée ? Réponse dans le lemme suivant.

Lemme 12.20.
Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Nous avons

$$LP_{x\to a}f(x)=\ell \tag{12.39}$$

si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :

(1) $LE_{x\to a}f(x)=\ell$

(2) *Soit f n'existe pas en a, soit f est continue en a.*

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ L'existence d'une limite pointée implique celle de la limite épointée, et l'égalité entre les deux. Donc $LE_{x\to a}f(x)=\ell$. Supposons que f existe en a. Soit $\epsilon>0$. L'existence d'une limite pointée signifie qu'il existe $\delta>0$ tel que $|x-a|<\delta$ implique $|f(x)-\ell|<\epsilon$.

En particulier avec $x=a$ nous avons $|f(a)-\ell|<\epsilon$ pour tout ϵ. Donc $f(a)=\ell$.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $LE_{x\to a}f(x)=\ell$. Si f n'existe pas en a, alors les limites pointée et épointée coïncident[1]. Si par contre f existe en a et $f(a)=\ell$, alors nous travaillons.

Soit $\epsilon>0$. Il existe $\delta>0$ tel que $x\in B(a,\delta)\setminus\{a\}$ implique $|f(x)-\ell|<\epsilon$. Mais si $x=a$ nous avons $|f(x)-\ell|=0<\epsilon$. Au final nous avons $|f(x)-\ell|<\epsilon$ pour tout $x\in B(a,\delta)$. Donc $LP_{x\to a}f(x)=\ell$.

□

LEMooNEGOooCllIMN

Lemme 12.21 (limite et continuité)**.**
Supposons que $LE_{x\to a}f(x)=\ell$ et que f est continue en a. Alors $f(a)=\ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon>0$. L'hypothèse sur la limite dit qu'il existe $\delta_1>0$ tel que $0<|x-a|<\delta_1$ implique $|f(x)-\ell|<\epsilon$.

L'hypothèse de continuité, avec la caractérisation 9.84, dit qu'il existe $\delta_2>0$ tel que $|x-a|<\delta_2$ implique $|f(x)-f(a)|<\epsilon$.

Nous considérons un $\delta>0$ plus petit que δ_1 et que δ_2. Soit aussi un x satisfaisant $0<|x-a|<\delta$. Nous avons

$$|f(a)-\ell|\leqslant|f(a)-f(x)|+|f(x)-\ell|\leqslant 2\epsilon. \tag{12.40}$$

Puisque cela est valide pour tout x, nous déduisons que $f(a)=\ell$. □

12.2.1 Théorèmes de composition de limites

La proposition suivante formalise le fait que la limite pointée soit stable par composition.

THOooOYXDooKDPkuW

Théorème 12.22.
Soient des fonctions $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ avec $\Omega\subset\mathbb{R}$ telles que

(1) $LP_{x\to a}g(x)=\ell$

(2) $LP_{y\to\ell}f(y)=b$.

(3) $g(\mathbb{R})\subset\Omega$

Alors

$$LP_{x\to a}(f\circ g)(x)=b. \tag{12.41}$$

Démonstration. Soit $\epsilon>0$. L'hypothèse de limite pour f donne $\eta>0$ tel que

EQooLWGIooLqKThv

$$|y-\ell|<\eta\Rightarrow|f(y)-b|<\epsilon. \tag{12.42}$$

Soit $\delta>0$ tel que $|x-a|<\delta$ implique $|g(x)-\ell|<\eta$.

Avec tout ça, si $|x-a|<\delta$ nous avons $|g(x)-\ell|<\eta$ et en appliquant l'implication (12.42) à $y=g(x)$ nous trouvons $|f\big(g(x)\big)-b|<\epsilon$. □

Le théorème suivant, qui traite de la composition de limites pointées, montre que la limite épointée ne passe pas gratuitement à la composition.

THOooNPBQooEMOYpd

Théorème 12.23.
Soient des fonctions $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ avec $\Omega\subset\mathbb{R}$ telles que

(1) $LE_{x\to a}g(x)=\ell$

(2) $LE_{y\to\ell}f(y)=b$.

(3) $g(\mathbb{R})\subset\Omega$

[1] Lemme 12.19.

ITEMooUNJAooCDOKcO

(4) *Soit $\ell \notin \Omega$, soit f est continue en ℓ.*

Alors

EQooTHTVooCyrFdN
$$LE_{x\to a}(f\circ g)(x)=b. \tag{12.43}$$

Démonstration. Nous notons Ω le domaine de f. Ce sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}\setminus\{\ell\}$ selon le cas traité dans (4).

Soit $\epsilon>0$. L'hypothèse de limite épointée pour f nous dit qu'il existe $\eta>0$ tel que

$$y\in\Omega\cap B(\ell,\eta)\setminus\{\ell\} \tag{12.44}$$

implique $|f(y)-b|<\epsilon$.

L'hypothèse de limite épointée pour g, appliquée à ce η dit qu'il existe $\delta>0$ tel que $0<|x-a|<\delta$ implique $|g(x)-\ell|<\eta$.

(1) **Si f n'existe pas en ℓ** Supposons avoir $0<|x-a|<\eta$. Alors nous avons $|g(x)-\ell|<\delta$. Notons qu'il est impossible d'avoir $g(x)=\ell$ parce que nous avons supposé $g(\mathbb{R})\subset\Omega$ et que ℓ n'est pas dans Ω.

Nous avons quand même $0<|g(x)-\ell|<\delta$. La condition de limite pour f appliquée à $y=g(x)$ donne alors $|f\big(g(x)\big)-b|<\epsilon$, ce qui signifie la limite épointée (12.43).

(2) **Si f est continue en ℓ** Le lemme 12.21 dit qu'alors $f(\ell)=b$. L'hypothèse de limite épointée sur f dit que

$$0<|y-\ell|<\eta\Rightarrow|f(y)-b|<\epsilon. \tag{12.45}$$

Mais puisque $f(\ell)=b$, nous avons en réalité

EQooHAHHooRiAABt
$$|y-\ell|<\eta\Rightarrow|f(y)-b|<\epsilon. \tag{12.46}$$

Supposons donc que $0<|x-a|<\delta$. Alors $|g(x)-\ell|<\eta$. En appliquant (12.46) à $y=g(x)$ nous trouvons

$$|f(y)-b|<\epsilon. \tag{12.47}$$

□

NORMooSLAJooLfDreV

12.24.
Les deux théorèmes sont incomplets. En effet, le théorème « pointé » 12.22 ne traite pas le cas où seules des limites épointées existent. Il est donc moins général que le théorème « épointé » 12.23. En contrepartie, le théorème « épointé » ne parvient pas à conclure à l'existence d'une limite pointée dans le cas où elle existe. Sa conclusion est donc moins forte.

Nous devons donc nous atteler à écrire un théorème qui traite tous les cas en obtenant la conclusion la plus forte possible dans chaque cas. Nous allons supposer que

$$\begin{cases} LE_{x\to a}g(x)=\ell & \text{(12.48a)}\\ LE_{y\to\ell}f(y)=b. & \text{(12.48b)}\end{cases}$$

Ensuite, les différents cas seront divisés selon quatre critères :

(1) g existe en a ou pas.

(2) f existe en ℓ ou pas.

(3) g est continue ou pas en a.

(4) f est continue ou pas en ℓ.

Cela fait $2^4=16$ combinaisons. Heureusement certaines sont impossibles : si une fonction n'existe pas en un point, elle ne peut pas y être continue.

Nous avons donc 9 cas résumés dans le théorème suivant.

$g(a)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0
$f(\ell)$	1	1	1	1	0	0	1	1	0
$g\in C^0$	1	1	0	0	1	0	0	0	0
$f\in C^0$	1	0	1	0	0	0	1	0	0

(12.49)

THOooHXGIooBclAHA

Théorème 12.25 ([1]).
Soient des fonctions f et g telles que

$$\begin{cases} LE_{x\to a} g(x) = \ell & (12.50a) \\ LE_{y\to \ell} f(y) = b. & (12.50b) \end{cases}$$

ITEMooDXBLooVfhSWg

(1) Si f est continue en ℓ et si g est continue en a, alors $f\circ g$ est continue en a.

ITEMooIXBQooMDknwN

(2) Nous supposons :

(2a) g définie en a
(2b) f définie en ℓ
(2c) g continue en a
(2d) f non continue en ℓ.

Alors nous ne disons rien.

ITEMooHTIEooMKDrqx

(3) Nous supposons :

(3a) g définie en a
(3b) f définie en ℓ
(3c) g non continue en a
(3d) f continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

ITEMooVQMDooEtHfwC

(4) Nous supposons :

(4a) g définie en a
(4b) f définie en ℓ
(4c) g non continue en a
(4d) f non continue en ℓ.

Alors nous ne disons rien.

ITEMooANFQooWVrfTd

(5) Nous supposons :

(5a) g définie en a
(5b) f non définie en ℓ
(5c) g continue en a
(5d) f non continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

ITEMooDJBHooSlqpOO

(6) Nous supposons :

(6a) g définie en a
(6b) f non définie en ℓ
(6c) g non continue en a
(6d) f non continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

ITEMooUFJHooRzLglZ

(7) Nous supposons :

(7a) g non définie en a
(7b) f définie en ℓ
(7c) g non continue en a
(7d) f continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

ITEMooOAAVooSjoYOv

(8) Nous supposons :

(8a) g non définie en a
(8b) f définie en ℓ
(8c) g non continue en a
(8d) f non continue en ℓ.

Alors nous ne disons rien.

ITEMooPVZKooBXJARI

(9) Nous supposons :

(9a) g *non définie en* a
(9b) f *non définie en* ℓ
(9c) g *non continue en* a
(9d) f *non continue en* ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x)=b$.

Démonstration. Cas par cas.

(1) **Cas (1)** C'est le théorème 9.90 de composition de la continuité.

(2) **Cas (2)** l'exemple du lemme 12.18.

(3) **Cas (3)** Théorème 12.23.

(4) **Cas (4)** Le contre-exemple dans ce cas est $g=\mathbb{1}_0$ et $f=\mathbb{1}_0$.

(5) **Cas (5)** Théorème 12.23.

(6) **Cas (6)** Théorème 12.23.

(7) **Cas (7)** Théorème 12.23.

(8) **Cas (8)** Contre-exemple, un peu artificiel, avec $g(x)=\frac{\mathbb{1}_0(x)}{x}$. C'est une fonction qui vaut 0 partout sauf en 0 où elle n'existe pas. Ensuite pour f, nous prenons l'indicatrice de $\{0\}$: $f=\mathbb{1}_0$. Pour tout $x\neq 0$ nous avons

$$(f\circ g)(x)=\mathbb{1}_0\left(\frac{\mathbb{1}_0(x)}{x}\right)=\mathbb{1}_0(0)=1. \tag{12.51}$$

Donc $LE_{x\to 0}(f\circ g)(x)=1$.

Mais nous avons pourtant

$$\begin{cases} LE_{x\to 0}g(x)=0 & \text{(12.52a)}\\ LE_{y\to 0}f(x)=0. & \text{(12.52b)}\end{cases}$$

(9) **Cas (9)** Théorème 12.23.

□

12.2.2 Discussion pointée Vs épointée

Résumé :

(1) Dans l'éducation nationale et dans les programmes en France, c'est la limite pointée qui est donnée.

(2) Dans le Frido ce sera la limite épointée. Autrement dit, nous réserverons la notation lim et le mot « limite » pour la limite épointée.

(3) De toutes façons, ça ne change pratiquement rien nulle part. Vous pourriez terminer l'agrégation sans vous en rendre compte. Vous pouvez sauter toute la discussion et reprendre une vie normale.

Le débat pour savoir quelle est la « meilleure » notion a déjà fait couler de nombreux octets[418, 419, 417, 420, 421].

12.2.2.1 La limite pointée est plus simple au départ

Il est vrai que la limite pointée est plus simple de premier abord.

12.2.2.2 Le théorème de composition

Le théorème de composition des limites pointées 12.22 est plus propre que le théorème de composition épointé 12.23. Intuitivement, on voudrait que la limite d'une fonction composée soit la composée des limites. Et ça c'est vrai pour la limite pointée, pas pour l'épointée.

12.2.2.3 Limite d'une fonction discontinue mais qui existe

Que pensez-vous que la limite en l'infini de la fonction suivante « devrait » être ?

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq \infty \\ 0 & \text{si } x = \infty \end{cases} \end{aligned} \tag{12.53}$$

Là, tant que x s'approche de ∞ sans l'atteindre, il n'y a vraiment que de la croissance à perte de vue ; jusqu'à l'horizon et au-delà.

On pourrait faire la même remarque avec la fonction indicatrice de $\{0\}$. Qu'est-ce que la limite en zéro « devrait » être ?

12.2.2.4 Point d'étape

Aucune des deux limites ne donne le résultat « attendu » dans les deux cas. Toutes deux font une chose bien, et une chose pas bien.

12.2.2.5 Limite d'une fonction discontinue mais qui existe

Prenons la fonction indicatrice de $\{0\}$:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{12.54}$$

En utilisant la limite pointée, on peut exprimer deux choses :

- la limite pointée en zéro n'existe pas
- la fonction n'est pas continue en zéro.

En utilisant la limite épointée, on peut exprimer deux choses :

- la limite épointée en zéro existe et vaut zéro.
- la fonction n'est pas continue en zéro.

La première paire d'informations est compatible avec la fonction $1/x$. Autrement dit, la valeur « inattendue » que prend f en zéro casse tout ce qu'on aurait pu dire sur un voisinage de zéro.

La seconde paire d'informations donne au moins une idée de ce qu'il se passe autour de zéro. On peut en déduire, par exemple, que f est intégrable sur un voisinage de zéro parce qu'elle y est bornée et que la valeur en un point ne fait rien à l'intégrabilité[2].

12.2.2.6 L'enseignement du cas précédent

La limite épointée donne une information sur ce qu'il se passe « autour » du point sans rien dire de ce qu'il se passe « sur » le point. Si nécessaire, la continuité complète l'information en précisant ce qu'il se passe « sur » le point.

Certaines questions n'ont pas besoin de savoir ce qu'il se passe en un seul point.

La limite épointée « refuse » de dire ce qu'il se passe autour du point parce qu'il y a un problème juste sur ledit point. Un seul point se comporte mal et tout le voisinage passe sous le radar.

12.2.2.7 La limite épointée est plus riche

La classe des fonctions admettant une limite pointée est plus grande que celle admettant une limite épointée (lemme 12.17). L'utilisation de la limite épointée permet de décrire quelques cas supplémentaires par rapport à ce que l'on peut faire seulement avec la limite pointée.

Pour être plus précis, comme je le disait précédemment, en 12.24, aucune des deux notions n'est satisfaisante seule :

- mettez de la limite pointée dans les hypothèses, vous aurez un théorème moins général ;

[2] Peut-être qu'il faut ajouter que f est mesurable ? Mais peut-être que l'existence de la limite implique la mesurabilité ? Dites-moi ce que vous en pensez.

- mettez de la limite pointée dans la thèse, vous aurez un résultat plus fort.

Le vrai intérêt de la limite épointée est que *en combinaison avec la notion de continuité* permet d'être plus général et plus précis que ce qu'on peut obtenir avec la limite pointée. Dit autrement, le couple (limite épointée, continuité) est plus fort que le couple (limite pointée, continuité).

D'un certain point de vue, oui, la limite pointée est plus simple, mais elle est plus simple parce qu'elle donne moins d'informations.

12.2.2.8 Retour sur le théorème de composition

Le *vrai* théorème de composition est le théorème 12.25. Lui, il passe en revue tous les cas possibles et donne le plus de conclusions possibles dans chaque cas.

Ce théorème s'exprime de façon à peu près convenable à l'aide de limite épointée et de continuité. J'attends de voir le même avec une limite pointée et la continuité.

Je suis très ouvert à la discussion si c'est pour avoir quelque chose de plus simple produisant les mêmes résultats. Je ne suis par contre pas très ouvert pour avoir quelque chose de plus simple, mais donnant moins de résultats. C'est toujours facile d'avoir des résultats plus courts, plus simples et plus intuitifs quand on se contente de moins.

12.2.2.9 En français

La limite épointée rend l'idée de « s'approcher sans atteindre ». En français l'expression « être à la limite de tel résultat » signifie le plus souvent être très proche du résultat, mais ne pas y être.

12.2.2.10 La question est pédagogique

Tant qu'on ne m'a pas montré comment on exprime le théorème de composition 12.25 avec des limites pointées, je resterai sur cette idée : la limite pointée est plus simple, mais elle dit moins.

Cela n'est cependant pas spécialement bloquant. Après tout, ça dépend de ce qu'on veut. D'un point de vue pédagogique, la limite pointée introduit autant de ϵ et de δ qu'on le veut, et permet d'introduire tous les concepts utiles en analyse.

La question est de savoir à quel point on est prêt à se compliquer la vie pour avoir des théorèmes un micro-cheveu plus complets. Le choix du Frido est de recevoir la difficulté avec résignation et de l'endurer avec courage, pour le plaisir d'avoir des théorèmes qui donnent un peu plus d'information[3].

12.2.2.11 En fait ça ne change presque rien

Certains craignent qu'utiliser la limite pointée demande d'ajuster beaucoup de résultats un peu partout[422]. Voici la liste des résultats du Frido qui doivent être modifiés pour être exprimés à l'aide de limite pointée.

- Le fameux théorème de composition 12.23,
- La limite à gauche et à droite implique la limite, proposition 9.115.
- Le lemme 12.240.

Le fait est que l'on ne calcule presque jamais de limites en une valeur où la fonction existe. Si on calcule une limite, c'est précisément parce qu'on regarde un point où la fonction n'existe pas.

Exemples :

- Quand on calcule une dérivée, on calcule

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon}. \tag{12.55}$$

  Cette fonction de ϵ n'existe pas lorsque $\epsilon = 0$. Donc les limites pointées et épointées sont identiques.

- De même, l'étude du sinus cardinal $f(x) = \sin(x)/x$ (lemme 20.211) est une fonction dont ça ne viendrait à l'idée de personne de calculer la limite pour $x \to 4$. Et ça tombe bien : la seule limite que ça donne envie de calculer est

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}. \tag{12.56}$$

  Et encore une fois, la fonction dans le limite n'existe pas au point limite.

[3] C'est une de mes citations préférées. Comme nous sommes entre adultes, je vous donne la référence : [422]. Si vous n'avez pas 18 ans, on peut vraiment se demander si le Frido est vraiment une lecture de votre âge.

- Beaucoup de conditions d'intégrabilité demandent des limites à l'infini. Là encore, ce sont des limites vers des points où la fonction n'existe pas. Franchement, qui va vouloir définir

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq \infty \\ 0 & \text{si } x = \infty \end{cases} \end{aligned} \tag{12.57}$$

sans rigoler ? OK. Pour cette fonction, il y a une différence entre la limite pointée et épointée. Mais franchement, c'est bien la limite épointée qui donne le résultat « intuitif ».

12.2.2.12 Si vous avez quand même envie de discuter

Essayez de garder votre salive pour des sujets importants.

- L'intégrale de Kurzweil-Henstock[423] contre Lebesgue. Là au moins, il y a des choses non triviales à dire, et des vrais résultats mathématiques à la clef.
- L'utilisation de τ au lieu de π.

12.2.2.13 En très résumé

Si vous ne voulez pas lire toute ma prose, voici ce dont vous devez être conscient :

(1) La limite épointée est celle utilisée partout sauf en France.

(2) La limite épointée est un peu plus compliquée que la limite pointée, mais elle permet de prouver plus de choses. En témoigne le théorème « complet » de composition 12.25 que je doute être facile à exprimer à l'aide des limites pointées et de la continuité[4].

(3) La limite pointée « cache » l'information sur tout le voisinage de a si la fonction se comporte mal juste en a.

Une fois que vous êtes conscients de ces quelque points, vous faites comme vous voulez ; ça n'a pratiquement aucune importance. La seule position indéfendable est celle de prendre la limite pointée et de ne pas prévenir le lecteur que les sources autres que françaises donnent une définition différente.

12.3 Limites en l'infini

Non, sur $\mathbb{R}$ nous n'allons pas ajouter ∞ avec la topologie d'Alexandrov de la définition 7.185. Nous n'allons pas considérer $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

12.3.1 Droite réelle achevée

DEFooRUyiBSUooALDDOa

Définition 12.26 (Droite réelle achevée[425])**.**
Nous considérons l'ensemble

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \tag{12.58}$$

où $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des éléments de $\mathbb{R}$.

PROPooWQBGooAoXKMi

Proposition-Définition 12.27 (L'ordre [1])**.**
Nous mettons sur $\bar{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre en prenant celle de $\mathbb{R}$ à laquelle nous ajoutons les règles

(1) $-\infty < x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(2) $+\infty > x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Avec cela, $\bar{\mathbb{R}}$ est un ensemble totalement ordonné.

Démonstration. Si $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, soit $a, b \in \mathbb{R}$ et l'un est plus grand que l'autre parce que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné (proposition 1.545), soit l'un des deux est $\pm\infty$ et les deux règles font que soit a soit b est plus grand. □

Définition 12.28 (Topologie)**.**
Nous mettons une topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$ en donnant la base[5] suivante :

[4] Il y a bien entendu moyen. Voir par exemple [424]. Sans ironie, je trouve ce théorème fascinant.
[5] Base de topologie, définition 7.2.

- $]a,b[$,
- $]a,+\infty]$,
- $[-\infty,b[$

pour tous réels a et b.

12.29.
La notation « ∞ » peut désigner l'unique élément ajouté dans du compactifié d'Alexandrov[6] aussi bien que l'élément infini positif dans la droite réelle achevée. Si vous faites attention au contexte[7], ça ne devrait pas poser de problèmes.

Certaines autrices réservent « ∞ » pour Alexandrov et écrivent toujours « $+\infty$ » et « $-\infty$ » pour la droite réelle achevée.

Lemme 12.30 ([1]).
La topologie sur $\mathbb{R}$ induite de celle sur $\bar{\mathbb{R}}$ est la topologie usuelle.

Démonstration. Nous notons $\tau_{\mathbb{R}}$ la topologie de $\mathbb{R}$, $\tau_{\bar{\mathbb{R}}}$ celle de $\bar{\mathbb{R}}$ et τ_i celle induite de $\bar{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$. Nous devons prouver que $\tau_i = \tau_{\mathbb{R}}$.

(1) $\tau_i \subset \tau_{\mathbb{R}}$ Un élément de τ_i est de la forme $\mathcal{O} = \mathbb{R} \cap A$ où A est un élément de $\tau_{\bar{\mathbb{R}}}$. Vu que A est un ouvert de $\bar{\mathbb{R}}$, il est une réunion d'éléments de la base de topologie[8] ; donc $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ où les A_i sont des trois types listés dans la définition 12.26.

(1a) Si $A_i =]a,b[$ alors $\mathbb{R} \cap A =]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
(1b) Si $A_i =]a,+\infty]$, alors $\mathbb{R} \cap A_i =]a,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
(1c) Si $A_i = [-\infty,b[$, même chose.

Donc $\mathbb{R} \cap A = \bigcup_{i\in I}(\mathbb{R} \cap A_i)$ est une union d'ouverts de $\mathbb{R}$.

(2) $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau_i$ Comme les $]a,b[$ forment une base de topologie de $\mathbb{R}$, l'ensemble τ_i contient une base de topologie de $\mathbb{R}$ et donc contient tout $\tau_{\mathbb{R}}$.

□

12.3.2 Limites en l'infini

Proposition 12.31 ([1]).
Soit une suite (x_k) dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Nous avons $x_k \xrightarrow{\bar{\mathbb{R}}} +\infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe un $N > 0$ tel que $n \geqslant N$ implique $x_n > M$.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Pour tout voisinage A de $+\infty$, il existe un N tel que $n \geqslant N$ implique $x_n \in A$. Soit donc le voisinage $]M,+\infty]$, et le N correspondant. Nous avons alors, pour tout $n \geqslant N$, $x_n \in]M,+\infty]$ et donc $x_n \geqslant M$.

(2) $\Leftarrow$ Soit un ouvert A contenant $+\infty$. Nous avons $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ où les A_i sont des trois types listés dans la définition 12.26. Comme $+\infty \in A$, pour au moins un des i, nous avons $A_i =]a,+\infty[$.

Prenons N tel que $n \geqslant N$ implique $x_n > a$. Alors pour $n \geqslant N$ nous avons $x_n \in A$.

□
LEMooUBFAooEmquQQ

Lemme 12.32 ([1]).
Soient $x > 1$ dans $\mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$ dans $\mathbb{N}$. Alors $x^n \geqslant x$.

Démonstration. Pour $n = 1$, nous avons $x^n = x$ donc d'accord. Supposons que $x^n \geqslant x$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et prouvons que $x^{n+1} \geqslant x$.

Calcul avec justifications en-dessous :

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= xx^n && \text{(12.59a)} \\ &\geqslant xx && \text{(12.59b)} \\ &\geqslant x. && \text{(12.59c)} \end{aligned}$$
SUBEQooBBJYooIYaErs
SUBEQooCEJWooMUMchE

Justifications :

[6] Le compactifié d'Alexandrov $\hat{\mathbb{R}}$, définition 7.185.
[7] Vous devez toujours avoir parfaitement clairement en tête la topologie que vous manipulez.
[8] C'est la proposition 7.2 qui dit ça.

- Pour (12.59b) hypothèse de récurrence.
- Pour (12.59c), lemme 1.549.

□
LEMooFCIXooJuHFqk

Lemme 12.33.
Nous considérons l'espace topologique de la droite réelle achevée[9] $\bar{\mathbb{R}}$. *Si* $n \geqslant 1$ *nous avons*

EQooRRFEooLYcuRP
$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \tag{12.60}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0. \tag{12.61}$$

Démonstration. Si V est un voisinage de $+\infty$, alors nous devons montrer qu'il existe un voisinage W de $+\infty$ tel que $x^n \in V$ pour tout $x \in W$.

Un ouvert est une union d'éléments de la base de topologie[10]. Nous voyons que V contient au moins une partie de la forme $]R, +\infty]$. Nous supposons que $R > 1$.

Si $x > R > 1$, alors nous avons $x^n \geqslant x$ (lemme 12.32) et donc

$$x^n \geqslant x > R, \tag{12.62}$$

ce qui signifie $x \in V$.

En prenant $W =]R, +\infty]$, nous avons bien $W^n \subset V$. Cela prouve (12.60).

En ce qui concerne la seconde limite, la démonstration est du même type. Remarquez seulement que vous n'avez pas formellement le droit d'utiliser la proposition 12.11 en invoquant $\frac{1}{+\infty} = 0$. □

12.3.3 Limite en des nombres

Nous posons la définition suivante.

DefInfNombre

Définition 12.34.
Lorsque $a \in \mathbb{R}$, *on dit que la fonction* f ***tend vers l'infini quand*** x ***tend vers*** a *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta \text{ tel que } (|x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow f(x) \geqslant M \text{ quand } x \in \operatorname{dom} f.$$

Cela signifie que l'on demande que dès que x est assez proche de a (c'est-à-dire dès que $|x-a| \leqslant \delta$), alors $f(x)$ est plus grand que M, et que l'on peut trouver un δ qui fait ça pour n'importe quel M. Une autre façon de le dire est que pour toute hauteur M, on peut trouver un intervalle de largeur δ autour de a[11] tel que sur cet intervalle, la fonction f est toujours plus grande que M.

Montrons sur un dessin pourquoi je disais que la fonction $x \to 1/x$ n'est pas de ce type.

Le problème est qu'il n'existe par exemple aucun intervalle autour de 0 sur lequel f serait toujours plus grande que 10. En effet n'importe quel intervalle autour de 0 contient au moins un nombre négatif. Or quand x est négatif, f n'est certainement pas plus grande que 10. Nous y reviendrons.

Pour l'instant, montrons que la fonction $f(x) = 1/x^2$ est une fonction qui vérifie la définition 12.34. Avant de prendre n'importe quel M, prenons par exemple 100. Nous avons besoin d'un intervalle autour de zéro sur lequel f est toujours plus grande que 100. C'est vite vu que $f(0.1) = f(-0.1) = 100$, donc l'intervalle $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ convient. Partout dans cet intervalle, f est plus grande que 100. Partout ? Ben non : en $x = 0$, la fonction n'est même pas définie, donc c'est un peu dur de dire qu'elle est plus grande que 100. C'est pour cela que nous avons ajouté la condition « quand $x \in \operatorname{dom} f$ » dans la définition de la limite.

Prenons maintenant un $M \in \mathbb{R}$ arbitraire, et trouvons un intervalle autour de 0 sur lequel f est toujours plus grande que M. La réponse est évidemment l'intervalle de largeur $1/\sqrt{M}$, c'est-à-dire

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right].$$

[9] Définition 12.26.
[10] C'est la définition 7.2.
[11] C'est-à-dire un intervalle de la forme $[a-\delta, a+\delta]$.

12.3.4 Limites quand tout va bien

Calculer et prouver des valeurs de limites, mêmes très simples, devient vite de l'arrachage de cheveux à essayer de trouver le bon δ en fonction de ϵ si on n'a pas quelques théorèmes généraux. Heureusement nous en avons déjà quelques uns : 12.9, 12.8, et 12.11.

PROPooWXBAooAEweSF

Proposition 12.35 ([1]).
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue dont la variable y varie dans un compact I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup_{y\in I} f(x,y) \end{aligned} \tag{12.63}$$

est continue.

Démonstration. Soit x_0 fixé. Prouvons que d est continue en x_0. Nous notons y_0 la valeur de y qui réalise le maximum (par le théorème 9.56 et le fait que les fonctions projection soient continues, lemme 7.270). Soit aussi $\epsilon > 0$ tellement fixé que même avec un tournevis hydraulique, il ne bougerait pas. Nous considérons δ tel que si $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| \leqslant \delta$ alors $\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\| < \epsilon$.

Si $|x-x_0| < \delta$ alors pour y assez proche de y_0 nous avons $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| \leqslant \delta$, et donc $\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\| \leqslant \epsilon$. Cela montre qu'il existe δ tel que $|x-x_0| \leqslant \delta$ implique $d(x) \geqslant d(x_0)-\epsilon$.

Nous devons encore trouver un δ tel que si $|x-x_0| \leqslant \delta$ alors $d(x) \leqslant d(x_0)+\epsilon$. Supposons que non. Alors pour tout δ il existe un x tel que $|x-x_0| \leqslant \delta$ et $d(x) > d(x_0)+\epsilon$. Cela nous donne une suite $x_i \to x_0$.

Pour chaque x_i nous notons y_i la valeur de y qui réalise le supremum correspondant. La suite (y_i) étant contenue dans un compact nous supposons prendre une sous-suite de (x_i) telle que la suite (y_i) converge. Nous nommons a la limite (et non y_0 parce que nous ne savons pas si $y_i \to y_0$). Pour chaque i nous avons

$$f(x_i,y_i) > \sup_{y\in I} f(x_0,y) + \epsilon. \tag{12.64}$$

En prenant la limite et en utilisant la continuité de f,

$$f(x_0,a) > \sup_{y\in I} f(x_0,y) + \epsilon, \tag{12.65}$$

ce qui est impossible. □

12.3.5 Limites de fonctions

Tentons de comprendre ce que signifie qu'un nombre ℓ *ne soit pas* la limite de f lorsque $x \to a$. Il s'agit d'inverser la condition de la proposition 8.255(2). Le nombre ℓ n'est pas une limite de f pour $x \to a$ lorsque

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0,\ \exists x \text{ tel que } 0 < \|x-a\| < \delta \text{ et } \|f(x)-\ell\| > \varepsilon, \tag{12.66}$$

EqCaractNonLim

c'est-à-dire qu'il existe un certain seuil ε tel qu'on a beau s'approcher aussi proche qu'on veut de a (distance δ), on trouvera toujours un x tel que $f(x)$ n'est pas ε-proche de ℓ.

Lemme 12.36 (Unicité de la limite).
Si ℓ et ℓ' sont deux limites de $f(x)$ lorsque x tend vers a, alors $\ell = \ell'$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous considérons δ tel que $\|f(x)-\ell\| < \varepsilon$ pour tout x tel que $\|x-a\| < \delta$. De la même manière, nous prenons δ' tel que $\|x-a\| < \delta'$ implique $\|f(x)-\ell'\| < \varepsilon$. Pour les x tels que $\|x-a\|$ est plus petit que δ et δ' en même temps, nous avons

$$\|\ell-\ell'\| = \|\ell - f(x) + f(x) - \ell'\| \leqslant \|\ell - f(x)\| + \|f(x)-\ell'\| < 2\varepsilon, \tag{12.67}$$

et donc $\|\ell-\ell'\| = 0$ parce que c'est plus petit que 2ε pour tout ε. □

PROPooKPOXooEHIXJs

Proposition 12.37 ([1]).
Soient un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ et $a \in V$. Soient encore un voisinage A de a et deux fonctions $f, g\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ qui admettent une limite en a.

Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in A \setminus \{a\}$ alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x). \tag{12.68}$$

Démonstration. Nous notons $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ et $\ell' = \lim_{x\to a} g(x)$. Si $\ell = \ell'$, le résultat est fait. Sinon nous supposons que $\ell > \ell'$ et nous trouvons une contradiction. Nous prenons $\epsilon < |\ell - \ell'|/2$ et $\delta > 0$ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ et $|g(x) - \ell'| < \epsilon$. Pour tout $x \in B(a, \delta)$ nous avons

$$\begin{cases} f(x) \in B(\ell, \epsilon) & \text{(12.69a)} \\ g(x) \in B(\ell', \epsilon), & \text{(12.69b)} \end{cases}$$

et donc

$$f(x) > l - \epsilon > \ell' + \epsilon > g(x). \tag{12.70}$$

Contradiction. □

PROPooGQHKooWgykjW

Proposition 12.38.
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est continue et croissante, alors il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell. \tag{12.71}$$

12.3.6 Limite à gauche et à droite

Si a est à l'intérieur du domaine de f, nous savons ce que signifie $\lim_{x\to a} f(x)$. Nous donnons également une définition des limites à gauche et à droite.

Définition 12.39.
*Soient $D \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$. Si $a \in \mathrm{Adh}(D)$ nous définissons la **limite à droite** de f en a par*

EQooQKHLooMoSXVe

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} \tilde{f}(x) \tag{12.72}$$

où $\tilde{f}$ est la fonction f restreinte à $D \cap \{x \text{ tel que } x > a\}$. La limite (12.72) est souvent écrite sous la forme condensée

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x). \tag{12.73}$$

Pour la limite à gauche c'est un peu la même chose :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x). \tag{12.74}$$

LEMooXJMFooCkzoVi

Lemme 12.40.
Soient $D \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$. Si $a \in \mathrm{Adh}(D)$ nous avons $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $x \in]a, a + \delta[\cap D$ implique $f(x) \in B(\ell, \epsilon)$.

Démonstration. Nous avons les équivalences entre les propriétés suivantes, en utilisant la définition 7.135 de la limite :

(1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$

(2) $\lim_{x\to a} \tilde{f}(x) = \ell$

(3) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in B(a, \delta) \cap D \cap \{x > a\}$ alors $f(x) \in B(\ell, \epsilon)$

(4) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in]a, a + \delta[\cap D$ alors $f(x) \in B(\ell, \epsilon)$

□

La proposition suivante est un cas particulier de la proposition 9.115

PROPooGDDJooDCmydE

Proposition 12.41 ([426])**.**
Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$. Si $a \in \mathrm{Adh}(D)$ alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si et seulement si les limites à gauche et à droite existent et sont égales. Dans ce cas nous avons égalité :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x). \tag{12.75}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous disons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Si V est un voisinage de ℓ, il existe un voisinage U de a tel que $f\big(U \cap D \setminus \{a\}\big) \subset V$. En particulier il existe un $\delta > 0$ tel que si $x \in]a, a + \delta[\cap D$, alors $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Cela est la limite à droite (lemme 12.40).

(2) $\Leftarrow$ Soit $\epsilon > 0$. Par la limite à droite, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $f\big(]a, a+\delta_1[\cap D\big) \subset B(\ell, \epsilon)$. Par la limite à gauche, il existe δ_2 tel que $f\big(]a-\delta_2, a[\cap D\big) \subset B(\ell, \epsilon)$

En prenant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ nous avons bien $f\big(B(a,\delta) \cap D \setminus \{a\}\big) \subset B(\ell, \epsilon)$ comme le demande la définition de la limite.

□

12.42.
Quelques remarques à propos de la proposition 12.41.

(1) Cette proposition ne se généralise pas aux dimensions supérieures. Dans $\mathbb{R}^2$ par exemple, il ne faudrait pas croire que si les limites suivant toutes les directions existent alors la limite existe.

(2) Cette proposition est souvent utilisée pour calculer des limites dans lesquelles interviennent des valeurs absolues. Par exemple, durant la démonstration de la proposition 12.376.

12.4 Limite en compactifié d'Alexandrov

Nous considérons l'espace topologique localement compact $\mathbb{R}$, et son compactifié d'Alexandrov défini en 7.185. Nous avons donc un point supplémentaire noté ∞. Ce point n'est ni du côté des grands nombres positifs, ni du côté des grands nombres négatifs. Il n'est ni $+\infty$ ni $-\infty$.

Proposition 12.43.
Dans cet espace topologique $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty. \tag{12.76}$$

Démonstration. Soit un voisinage V de ∞ dans $\hat{\mathbb{R}}$. Il s'écrit $V = K^c \cup \{\infty\}$ pour un certain compact de $\mathbb{R}$. Le théorème 9.24 nous assure que K est borné. Donc il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0,R)$. Pour $x \in B(0, 1/R)$ nous avons

$$\left|\frac{1}{x}\right| > R, \tag{12.77}$$

et donc $1/x \in K^c$. Donc aussi $\frac{1}{x} \in V$. □

De la même façon, dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nous avons

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty. \tag{12.78}$$

12.44.
Je vous laisse deviner la topologie à considérer sur $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Dans cet espace topologique la limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas.

12.4.1 Prolongement par continuité

12.4.1.1 Discussion avec mon ordinateur

Voici un extrait de ce que peut donner Sage. Nous lui donnons la fonction

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8}. \tag{12.79}$$ EqyEHTBZ

Cette fonction est inventée exprès pour que le dénominateur s'annule en -4. En fait $3x^2 + 10x - 8 = (x+4)(3x-2)$, et la fraction peut se simplifier en

$$f(x) = \frac{1}{3x-2}. \tag{12.80}$$

Et avec cela nous écririons $f(-4) = -\frac{1}{14}$. Voyons comment cela passe dans Sage.

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 5.2, Release Date: 2012-07-25                         |
| Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.        |
| Type "help()" for help.                                            |
```

```
---------------------------------------------------------------------------
sage: f(x)=(x+4)/(3*x**2+10*x-8)
sage: f(-4)
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
ValueError: power::eval(): division by zero
```

Il produit donc une erreur de division par zéro. Cela n'est pas étonnant. Pourtant si on lui demande, il est capable de simplifier. En effet :

```
sage: f.simplify_full()
x |--> 1/(3*x - 2)
sage: f.simplify_full()(-4)
-1/14
```

Nous considérons la question suivante : étant donné une fonction f définie sur $I \setminus \{x_0\}$, est-il possible de définir f en x_0 de telle façon à ce qu'elle soit continue ?

Exemple 12.45.
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{12.81}$$

n'est pas définie pour $x = 0$ et il n'y a pas moyen de définir $f(0)$ de telle sorte que f soit continue parce que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas. △

12.4.1.2 Limite et prolongement

Reprenons l'exemple de la fonction (12.79) que mon ordinateur refusait de calculer en zéro :

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8} = \frac{x+4}{(x+4)(3x-2)}. \tag{12.82}$$

Cette fonction a une condition d'existence en $x = -4$. Et pourtant, tant que $x \neq -4$, cela a un sens de simplifier les $(x+4)$ et d'écrire

$$f(x) = \frac{1}{3x-2}.$$

Étant donné que pour toute valeur de x différente de -4, la fonction f s'exprime de cette façon, nous avons

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \left(\frac{1}{3x-2} \right).$$

Oui, mais la fonction[12] $g(x) = 1/(3x-2)$ est continue en -4 et donc sa limite vaut sa valeur. Nous en déduisons que

$$\lim_{x\to -4} f(x) = -\frac{1}{14}.$$

Que dire maintenant de la fonction ainsi définie ?

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -4 \\ -1/14 & \text{si } x = -4. \end{cases} \tag{12.83}$$

Cette fonction est continue en -4 parce qu'elle y est égale à sa limite. Les étapes suivies pour obtenir ce résultat sont :

- Repérer un point où la fonction n'existe pas,
- calculer la limite de la fonction en ce point, et en particulier vérifier que cette limite existe, ce qui n'est pas toujours le cas,
- définir une nouvelle fonction qui vaut partout la même chose que la fonction originale, sauf au point considéré où l'on met la valeur de la limite.

[12] Cette fonction g n'est pas f parce que g a en plus l'avantage d'être définie en -4.

C'est ce qu'on appelle **prolonger la fonction par continuité** parce que la fonction résultante est continue. La prolongation de f par continuité est donc en général définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq y \\ \lim_{y\to x} f(y) & \text{si } x = y \end{cases} \tag{12.84}$$

Dans le cas que nous regardions,

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8},$$

le prolongement par continuité est donné par

$$\tilde{f} = \frac{1}{3x-2}. \tag{12.85}$$

Remarquons que cette fonction n'est toujours pas définie en $x = 2/3$.

12.4.2 Prolongement par continuité

Proposition-Définition 12.46 (Prolongement par continuité)**.**
Soit $f\colon I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned} &\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R} \\ &\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{12.86}$$

*est une fonction continue sur I et est appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0.*

Vous noterez que dans cet énoncé nous demandons $\ell \in \mathbb{R}$. Les cas $\ell = \pm\infty$ sont donc exclus.

12.47.
Le lemme 12.63 donnera un autre gros morceau de prolongement par continuité. Là, ce ne sera pas juste une valeur qui manquera, mais carrément la majorité des valeurs ; mais par contre, ce ne sera pas vraiment de la prolongation par continuité, mais de la prolongation par Cauchy-continuité.

Exemple 12.48.
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2+2x-3}{(x+3)(x-2)} \end{aligned} \tag{12.87}$$

admet pour limite $\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{4}{5}$. Son prolongement par continuité en $x = -3$ est donné par

$$\tilde{f}(x) = \frac{x-1}{x-2}. \tag{12.88}$$

Notons que les fonctions f et $\tilde{f}$ ne sont pas identiques : l'une est définie pour $x = -3$ et l'autre pas. Lorsqu'on fait le calcul

$$\frac{x^2+2x-3}{(x+3)(x-2)} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}, \tag{12.89}$$

la simplification n'est pas du tout un acte anodin. Le dernier signe « = » est discutable parce que les deux dernières expressions ne sont pas égales pour tout x ; elles ne sont égales « que » pour les x pour lesquels les deux expressions existent. △

Les fonctions trigonométriques donneront quelques exemples intéressants de prolongements par continuité. Voir l'exemple 18.239. Et une avec la fonction logarithme dans l'exemple 15.128.

12.4.3 Théorème de la bijection

À propos de la continuité de l'application réciproque dans divers cas, voir le thème 35.

LEMooYUOOooByoQdr

Lemme 12.49 ([1])**.**
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et si $x \in \mathrm{Adh}(I)$, alors x est dans une des trois situations suivantes[13] *:*

[13] Définitions de supremum et d'infimum 1.579.

(1) $x \in \mathrm{Int}(I)$

(2) $x = \inf(I)$

(3) $x = \sup(I)$

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{Adh}(I)$. Nous supposons que a n'est pas dans l'intérieur de I, et nous prouvons que nous sommes dans un des deux autres cas. Soit $\epsilon > 0$.

(1) $a + \epsilon$ **n'est pas un minorant** Vu que a est dans l'adhérence de I, pour tout n, il existe x_n dans $B(a, 1/n) \cap I$. En choisissant n assez grand, nous avons

$$x_n < a + \frac{1}{n} < a + \epsilon, \tag{12.90}$$

de telle sorte que $a + \epsilon$ ne soit pas un minorant de I.

(2) $a - \epsilon$ **n'est pas un majorant** De même nous avons $x_n > a - \frac{1}{n} > a - \epsilon$.

(3) $a \geqslant x$ **ou** $a \leqslant x$ **pour tout** $x \in I$ Nous devons encore prouver que soit $a \geqslant x$ pour tout $x \in I$, soit que $a \leqslant x$ pour tout $x \in I$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe $x_-, x_+ \in I$ tels que

$$x_- < a < x_+. \tag{12.91}$$

Vu que I est un intervalle nous avons $[x_-, x_+] \subset I$. Alors en prenant $r < (x_+ - x_-)/2$ nous avons

$$B(a, r) \subset]x_-, x_+[\subset I, \tag{12.92}$$

ce qui signifierait que a est dans l'intérieur de I.

□

LEMooBDGGooSOdOXb

Lemme 12.50 ([427]).
Soient un intervalle I et une application continue $f\colon I \to \mathbb{R}$. Elle est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Si f est injective** Nous prouvons que f est strictement monotone par l'absurde en supposant qu'elle ne l'est pas. Si f n'est pas strictement monotone sur I, il existe x_1, x_2, x_3 et x_4 dans I tels que

$$\begin{aligned} x_1 < x_1 \qquad & x_3 < x_4 \\ f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad & f(x_3) \geqslant f(x_4). \end{aligned} \tag{12.93}$$

Vu que I est un intervalle, tous les points entrex_1, x_2, x_3 et x_4 sont dans I. Nous pouvons donc définir

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) - f\big(tx_2 + (1-t)x_4\big). \end{aligned} \tag{12.94}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} g(0) &= f(x_3) - f(x_4) \geqslant 0 \\ g(1) &= f(x_1) - f(x_2) \leqslant 0. \end{aligned} \tag{12.95}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 nous indique qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) = 0$. Nous posons alors $u = t_0x_1 + (1-t_0)x_3$ et $v = t_0x_2 + (1-t_0)x_4$, de telle sorte que

$$0 = g(t_0) = f(u) - f(v). \tag{12.96}$$

Mais $u \neq v$ parce que $x_1 < x_2$ et $x_3 < x_4$. Nous avons contredit l'injectivité de f.

(2) **Si f est strictement monotone** Supposons que f soit strictement croissante. Nous devons prouver que f est injective. Pour cela supposons que $f(u) = f(v)$ avec $u, v \in I$. Nous avons alors

$$\begin{cases} f(u) \leqslant f(v) & \text{(12.97a)} \\ f(u) \geqslant f(v). & \text{(12.97b)} \end{cases}$$

Par stricte monotonie nous en déduisons que $u \leqslant v$ et que $u \geqslant v$, autrement dit, que $u = v$.

□
PropOARooUuCaYT

Proposition 12.51 ([428, 1]).
Une surjection monotone d'une partie X de $\mathbb{R}$ vers un intervalle est continue[14]*. Nous sommes dans une des trois situations du lemme 12.49.*

Démonstration. Soit une application monotone $g\colon X \to I$ où I est un intervalle. Nous supposons dans un premier temps que g est croissante. Soit un ouvert V dans I. Nous allons montrer que $g^{-1}(V)$ est ouvert dans X.

Pour cela nous considérons $x \in g^{-1}(V)$ et nous posons $y = g(x)$. Nous allons prouver qu'il existe un voisinage U de x vérifiant $g(U) \subset V$.

Le nombre y est dans un des trois cas du lemme 12.49.

(1) **y est à l'intérieur de I** Il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset V$. Nous posons alors $0 < \alpha < r$, et choisissons $x_- \in g^{-1}(y - \alpha)$ et $x_+ \in g^{-1}(y + \alpha)$. Vu que g est surjective sur I, ces nombres existent dans X. Par croissance de g, nous avons

$$x_- < x < x_+. \tag{12.98}$$

Enfin nous considérons la partie $U =]x_-, x_+[\cap X$. Ce U est un ouvert contenant x.

Avec tout ça nous avons $g(U) \subset V$.

(2) **Si $y = \sup(I)$** Il existe r tel que $]y - r, y] \subset V$. Nous considérons $x_- \in g^{-1}(y - r)$, et nous posons $U =]x_-, \infty[\cap X$. Avec cela nous avons

$$g(U) \subset]y - \epsilon, y] \subset V. \tag{12.99}$$

(3) **Si $y = \inf(I)$** Dans ce cas nous avons un r tel que $[y, y + r[\subset V$. Nous considérons $x_+ \in g^{-1}(y + r)$ et l'ouvert $]-\infty, x_+[\cap X$. Nous avons encore $g(U) \subset V$.

Nous devons encore prouver le cas où g est décroissante. Dans ce cas la fonction $h(x) = -g(x)$ est croissante et surjective sur l'intervalle $-I$. Elle est donc continue. Si h est continue, alors g est continue. □

Proposition 12.52.
Soient $f\colon I \to J$ une bijection et $f^{-1}\colon J \to I$ sa réciproque. Alors pour tout $x_0 \in I$ nous avons

$$f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0 \tag{12.100}$$

EqHQRooNmLYbF

et pour tout $y_0 \in J$ nous avons

$$f\big(f^{-1}(y_0)\big) = y_0. \tag{12.101}$$

EqIYTooQPvZDr

Démonstration. Nous prouvons la relation (12.100) et nous laissons (12.101) comme exercice au lecteur.

Soit $x_0 \in I$. Posons $y_0 = f(x_0)$. La définition de l'application réciproque est que pour $y \in J$, $f^{-1}(y)$ est l'unique élément x de I tel que $f(x) = y$. Donc $f^{-1}(y_0)$ est l'unique élément de I dont l'image est y_0. C'est donc x_0 et nous avons $f^{-1}(y_0) = x_0$, c'est-à-dire

$$f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0. \tag{12.102}$$

□
ThoKBRooQKXThd

Théorème 12.53 (Théorème de la bijection).
Soit I un intervalle et f une fonction continue et strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$. Nous avons alors :

(1) $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$;

ITEMooMAWXooZXmVwA

(2) La fonction $f\colon I \to f(I)$ est bijective

(3) La fonction $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est strictement monotone de même sens que f ;

ItemEJZooKuFoeFiv

(4) La fonction $f\colon I \to f(I)$ est un homéomorphisme, c'est-à-dire que $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est continue.

Démonstration. Prouvons les choses point par point.

[14] Pour les topologies induites de X et de I. Dans le cas de I, si il est ouvert, c'est la topologie usuelle.

(1) Supposons pour fixer les idées que f est monotone croissante[15].

Soient $a < b$ dans $f(I)$. Par définition il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $a = f(x_1)$ et $b = f(x_2)$. La fonction f est continue sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ et vérifie $f(x_1) < f(x_2)$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 nous dit que pour tout t dans $[f(x_2), f(x_2)]$, il existe un $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_0) = t$. Cela montre que toutes les valeurs intermédiaires entre a et b sont atteintes par f et donc que $f(I)$ est un intervalle.

(2) Nous prouvons maintenant que f est bijective en prouvant séparément qu'elle est surjective et injective.

(2a) **f est surjective** Une fonction est toujours surjective depuis un intervalle I vers l'ensemble Image f.

(2b) **f est injective** Soit $x \neq y$ dans I ; pour fixer les idées nous supposons que $x < y$. La stricte monotonie de f implique que $f(x) < f(y)$ ou que $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$.

La fonction f est donc bijective.

(3) Comme d'accoutumée nous supposons que f est croissante. Soient $y_1 < y_2$ dans $f(I)$; nous devons prouver que $f^{-1}(y_1) \leqslant f^{-1}(y_2)$. Pour cela nous considérons les nombres $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Nous allons en prouver la contraposée en supposant que $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. En appliquant f (qui est croissante) à cette dernière inégalité il vient

$$f\big(f^{-1}(y_1)\big) \geqslant f\big(f^{-1}(y_2)\big), \tag{12.103}$$

ce qui signifie

$$y_1 \geqslant y_2 \tag{12.104}$$

par l'équation (12.101).

(4) La fonction $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est une fonction monotone et surjective, donc continue par la proposition 12.51.

□

Exemple 12.54.
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon [2,3] &\to [4,9] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{12.105}$$

est une bijection. Sa réciproque est la fonction

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon [4,9] &\to [2,3] \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned} \tag{12.106}$$

△

12.5 Limite et continuité

SecLimiteFontion

Voir les remarques dans l'index thématique 29 pour comprendre la place et la portée de ce qui va venir à propos de limite et de continuité.

ThoLimCont

Théorème 12.55 (Limite et continuité)**.**
La fonction f est continue au point a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est continue en a, et nous prouvons que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Soit $\epsilon > 0$; ce qu'il nous faut c'est un δ tel que $|x-a| \leqslant \delta$ implique $|f(x)-f(a)| \leqslant \epsilon$. La caractérisation 9.84 de la continuité donne l'existence d'un δ comme il nous faut.

Dans l'autre sens, c'est-à-dire prouver que f est continue au point a sous l'hypothèse que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, la preuve se fait de la même façon. □

[15] Traitez en tant qu'exercice le cas où f est décroissante.

Nous en déduisons que si nous voulons gagner quelque chose à parler de limites, il faut prendre des fonctions non continues. En effet, si une fonction est continue en un point, la limite ne donne aucune nouvelle information que la valeur de la fonction elle-même en ce point.

Prenons une fonction qui fait un saut. Pour se fixer les idées, prenons celle-ci :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]-\infty, 2[\\ x/2 & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases} \tag{12.107}$$

Essayons de trouver la limite de cette fonction lorsque x tend vers 2. Étant donné que f n'est pas continue en 2, nous savons déjà que $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$. Donc ce n'est pas 1. Cette limite ne peut pas valoir 4 non plus parce qu'en prenant n'importe quel ϵ, la valeur de $f(2+\epsilon)$ est très proche de 2, et donc, ne peut pas s'approcher de 4. En fait, on peut facilement vérifier que *aucun nombre ne vérifie la condition de limite pour f en 2*. Nous disons que la limite n'existe pas.

Il ne faudrait pas en déduire trop vite que si une fonction n'est pas continue en a, alors la limite $x \to a$ n'existe pas. Ce que dit le théorème 12.55 est que si une fonction n'est pas continue en a, alors sa limite (si elle existe) ne vaut pas $f(a)$.

Exemple 12.56 (Un exemple de continuité ; Thème 29)**.**
Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{12.108}$$

Cette fonction n'est pas continue en $x = 0$, et pourtant la limite existe : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Etudions cela en détail, pour nous assurer de ce qu'il se passe.

Considérons l'ouvert $]3, 5[$. L'image réciproque de cet ouvert par f est la partie $]3, 5[\cup \{0\}$ qui n'est pas ouvert. Donc la fonction f n'est pas continue comme fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Considérons pour comprendre la restriction $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$. L'image inverse de $]3, 5[$ par cette fonction est $\{0\}$ qui n'est pas un ouvert.

Plus généralement tant qu'on considère des restrictions de f sur des parties contenant un voisinage de 0, la fonction ne peut pas être continue[16].

Voyons ce qu'il en est de la continuité ponctuelle de f en $x = 0$. La définition 7.45 est celle de la continuité en un point ; elle dit que f sera continue en 0 si $f(0) = 4$ est une limite de f. Nous voilà parti vers la définition 7.135.

Soit le voisinage $V =]3, 5[$ de $f(0)$. Quel que soit le voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $W \subset B(0, \epsilon)$. Nous avons alors

$$f\big(W \setminus \{0\}\big) \subset f\big(B(0, \epsilon) \setminus \{0\}\big). \tag{12.109}$$

Mais le nombre $\epsilon/2$ fait partie de $f\big(B(0, \epsilon) \setminus \{0\}\big)$ et n'est pas dans V. Donc $f(0)$ n'est pas une limite de f en zéro. Cette fonction n'est donc pas continue en zéro. △

Exemple 12.57 (Même exemple, limite)**.**
Nous avons vu que, pour la fonction (12.108), le nombre 4 n'est pas une limite de f en zéro. Nous montrons à présent que 0 est une limite (et même la seule par la proposition 7.138 que nous ne rappellerons plus à chaque fois) de f.

Montrons que 0 est une limite de f en zéro, c'est-à-dire que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Nous suivons la définition 7.135. Soit un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}$. Il existe δ tel que $B(0, \delta) \subset V$. En posant $\epsilon = \delta$ et en définissant $W = B(0, \epsilon)$ nous avons

$$f\big(B(0, \epsilon) \setminus \{0\}\big) = B(0, \epsilon) \setminus \{0\} \subset B(0, \delta) \subset V. \tag{12.110}$$

Donc 0 est une limite de f en zéro. △

Nous avons déjà vu par le corolaire 9.60 qu'une suite croissante et bornée était convergente. Il en va de même pour les fonctions.

Proposition 12.58 ([1])**.**
Si la fonction réelle $f\colon I = [a, b[\to \mathbb{R}$ est croissante et bornée, alors la limite

$$\lim_{x\to b} f(x) \tag{12.111}$$

existe et est finie.

[16] Les plus acharnés se demanderont ce qu'il se passe pour la restriction de f à la partie $\{0\}$ munie de la topologie induite de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Commençons par prouver que si (x_n) est une suite dans I convergeant vers b, alors $f(x_n)$ est une suite convergente. Dans un second temps, nous allons prouver que si (x_n) et (x'_n) sont deux suites qui convergent vers b, alors les suites convergentes $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ convergent vers la même limite. Alors le critère séquentiel de la limite d'une fonction conclura (proposition 7.151).

Nous pouvons extraire de x_n une sous-suite croissante $(x_{\alpha(n)})$. Alors la suite $f\big(x_{\alpha(n)}\big)$ est une suite croissante et majorée, donc convergente par le corolaire 9.60[17]. Nommons ℓ la limite et montrons qu'elle est aussi limite de f sur la suite originale.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe K tel que si $n > K$ alors $\big|f\big(x_{\alpha(n)}\big) - \ell\big| < \epsilon$. Soit K' tel que pour tout $n > K'$ nous ayons $x_n > x_{\alpha(K)}$. Cela est possible parce que la suite est bornée par b et converge vers b : il suffit de prendre K' de telle sorte que $|x_n - b| \leqslant |x_{\alpha(n)} - b|$. Si $n > K'$ alors $x_n > x_{\alpha(K)}$ et

$$f(x_n) \geqslant f(x_{\alpha(n)}) \geqslant \ell - \epsilon; \tag{12.112}$$

en résumé si $n > K$ alors $|f(x_n) - \ell| < \epsilon$. Cela prouve que $f(x_n) \to \ell$.

Soit maintenant une autre suite (x'_n) qui converge également vers b. Comme nous venons de le voir la suite $f(x'_n)$ est convergente et nous nommons ℓ' la limite. Si nous considérons (x''_n) la suite « alternée » $(x_1, x'_1, x_2, x'_2, \cdots)$ alors nous avons encore une suite qui converge vers b et donc $f(x''_n) \to \ell'$.

Mais étant donné que $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ sont des sous-suites, elles doivent converger vers la même valeur. Donc $\ell = \ell' = \ell''$. □

PROPooLOQVooULDhZz

Proposition 12.59 ([1])**.**
L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ muni de la topologie de la compactification en un point[18] *est connexe par arcs.*

Démonstration. Nous allons montrer que le chemin

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1] &\to [0,\infty] \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{12.113}$$

est continu au sens de la définition 7.45(2) (qui est le seul sens possible au mot « continu »).

Soit un ouvert $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si cet ouvert ne contient pas ∞, alors $\gamma^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ parce que la fonction $x \mapsto 1/x$ est continue[19].

Si $\infty \in \mathcal{O}$, alors $\mathcal{O} = \{\infty\} \cup \mathcal{O}'$ où $\mathcal{O}'$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ ayant la propriété que $\mathbb{R} \setminus \mathcal{O}'$ est compact.

Nous avons $\gamma^{-1}(\mathcal{O}) = \{0\} \cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}')$. Et aussi que $\gamma^{-1}(\mathcal{O}')$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans $[0,1]$.

Puisque le complémentaire de $\mathcal{O}'$ est compact, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a,\infty[\subset \mathcal{O}'$. Donc $\mathcal{O}' =]a,\infty[\cup \mathcal{O}''$ où $\mathcal{O}''$ est un ouvert.

Nous avons :

$$\gamma^{-1}(\mathcal{O}) = \{\gamma^{-1}(\infty)\} \cup \gamma^{-1}\big(]a,\infty[\big) \cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}'') \tag{12.114a}$$

$$= \{0\} \cup]0, \frac{1}{a}[\cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}'') \tag{12.114b}$$

$$= [0, \frac{1}{a}[\cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}''). \tag{12.114c}$$

Vous noterez le point essentiel où la topologie de la compactification agit : comme $\{0\}$ n'est pas un ouvert de $[0,1]$, nous devons nous assurer que la partie $\gamma^{-1}(\mathcal{O}')$ vienne se coller à $\{0\}$ pour compléter en un ouvert.

L'ensemble $\gamma^{-1}(\mathcal{O}'')$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans $[0,1]$. Nous avons donc

$$\gamma^{-1}(\mathcal{O}) = \Big(]-1, \frac{1}{a}[\cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}'')\Big) \cap [0,1]. \tag{12.115}$$

Cela est un ouvert de $[0,1]$ par définition de la topologie induite[20]. □

12.5.1 Prolongement des rationnels vers les réels

Si $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue pour la topologie induite, est-ce qu'on peut la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$? La réponse est hélas non.

[17] En gros nous sommes en train de dire que toute la théorie des fonctions convexes est un vulgaire corolaire de Bolzano-Weierstrass.
[18] Définition 7.185.
[19] Voir par exemple la proposition 12.8.
[20] Définition 7.27.

EXooWZNCooQkKdtJ

Exemple 12.60 ([429]).
Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel[21], ceci définit bien une fonction sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } q < \sqrt{2} \\ 1 & \text{si } q > \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned} \tag{12.116}$$

C'est une fonction continue sur $\mathbb{Q}$. En effet, soient $q \in \mathbb{Q}$ et $\epsilon > 0$. Nous prenons $\delta > 0$ tel que $\sqrt{2}$ ne soit pas dans $B(q, \delta)$. Alors si $p \in B_{\mathbb{Q}}(q, \delta)$ nous avons $f(q) = f(p)$ et donc

$$|f(p) - f(q)| < \epsilon. \tag{12.117}$$

Il n'est cependant pas possible de la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. △

Pour qu'une fonction sur $\mathbb{Q}$ puisse être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, il faut un peu plus que la continuité. Il faut la Cauchy-continuité, que nous définissons pas plus tard qu'immédiatement.

DEFooXXOGooXblyKP

Définition 12.61 ([429]).
*Soient X et Y deux espaces métriques. Une application $f\colon X \to Y$ est dite **Cauchy-continue** si pour toute suite de Cauchy (x_n) dans X, la suite $\big(f(x_n)\big)$ est de Cauchy dans Y.*

PROPooPUNFooFMytOY

Proposition 12.62 ([430]).
Soient X et Y des espaces métriques[22]. Nous supposons que Y est complet[23]. Nous considérons $A \subset X$ et une application Cauchy-continue $f\colon A \to Y$.

Alors :

ITEMooDEZGooUAvwvF

(1) Il existe un unique prolongement continu $g\colon \bar{A} \to Y$ de f.

(2) Ce prolongement est lui-même Cauchy-continu.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Une suite**

Soit $x \in \bar{A}$. Nous considérons une suite (a_n) dans A telle que $a_n \xrightarrow{X} x$. Alors (a_n) est de Cauchy[24] et donc $\big(f(a_n)\big)$ est de Cauchy dans Y. Vu que Y est complet, $\big(f(a_n)\big)$ est une suite convergente.

(2) **Indépendance**

Montrons que si (b_n) est une autre suite dans A convergeant vers x, alors $\lim_n f(a_n) = \lim_n f(b_n)$. Pour cela nous considérons la suite$(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots,)$. Cela est une suite qui converge vers x. Elle est donc de Cauchy et son image par f est encore de Cauchy. Toutes les sous-suites de la suite image sont dont convergentes vers la même limite. En prenant les sous-suites paires et impaires, nous avons $\lim_n f(a_n) = \lim_n f(b_n)$.

(3) **Définition de g** Nous pouvons donc définir

$$\begin{aligned} g\colon \bar{A} &\to Y \\ x &\mapsto \lim_n f(a_n) \end{aligned} \tag{12.118}$$

où (a_n) est une quelconque suite dans A convergeant vers x.

(4) **g est séquentiellement continue** Soit une suite (x_n) dans $\bar{A}$. Nous devons prouver que $g(x_n) \xrightarrow{Y} g(x)$.

Nous pouvons choisir $a_n \in A$ tel que $d(a_n, x_n) < 1/n$. Si nous considérons une suite de Cauchy dans A convergeant vers x_n, et que nous prenons a_n assez loin dans cette suite, alors nous pouvons même choisir a_n tel que $d\big(f(a_n), g(x_n)\big) < 1/n$. Nous choisissons (a_n) de telle sorte à vérifier les deux en même temps.

Nous avons

$$d(a_n, x) \leqslant d(a_n, x_n) + d(x_n, x) \to 0. \tag{12.119}$$

[21] Proposition 1.523. Le fait que $\sqrt{2}$ existe dans $\mathbb{R}$ est la proposition 1.593.
[22] Il a une distance, définition 7.139.
[23] Définition 7.313.
[24] Proposition 7.323.

Donc (a_n) est de Cauchy et par définition de g, nous avons

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n). \tag{12.120}$$

EQooWQYNooKIQAjc

À partir de là nous avons la majoration

$$d\big(g(x_n), g(x)\big) \leqslant d\big(g(x_n), f(a_n)\big) + d\big(f(a_n), g(x)\big). \tag{12.121}$$

Le premier terme tend vers zéro par choix de la suite (a_n) et le second tend vers zéro par (12.120).

(5) g **est continue** La proposition 7.157 donne l'équivalence entre la continuité et la continuité séquentielle.

(6) **Unicité** Soient g_1 et g_2, deux prolongations continues de f sur $\bar{A}$. Si $a_n \to x$ dans A, alors nous avons, par continuité de g_1 et g_2 : $g_1(a_n) \to g_1(x)$ et $g_2(a_n) \to g_2(x)$.

Mais $g_1(a_n) = g_2(a_n) = f(a_n)$; donc les limites sont égales.

(7) g **est Cauchy continue**

□

En terme de prolongement continu, nous avons ce lemme qui demande à une fonction d'être Cauchy-continue. Vous pouvez comparer avec le principe de prolongement analytique 17.138 qui donne un énoncé similaire pour un prolongement analytique.

LEMooUAFBooAwiXxj

Lemme 12.63 ([1, 431, 430])**.**
Soit une fonction Cauchy-continue [25] $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

(1) La limite $\lim_{q\to x} f(q)$ *existe pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

(2) Il existe un unique prolongement continu $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(3) Ce prolongement est donné par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \lim_{q\to x} f(q) & \text{sinon} \end{cases} \tag{12.122}$$

Démonstration. C'est tout dans la proposition 12.62 en sachant que

- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, proposition 9.16.
- $\mathbb{R}$ est complet, théorème 7.340.

□

PROPooXWHYooFiVYfi

Proposition 12.64.
Soient des fonctions continues $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Si* f *et* g *sont égales sur* $\mathbb{Q}$, *alors elles sont égales sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Nous pouvons utiliser les propriétés fondamentales des réels et de la continuité. Soit $x \in \mathbb{R}$; nous voulons montrer que $f(x) = g(x)$. En prenant par exemple le lemme 1.568, il existe une suite q_i de rationnels telle que $q_i \xrightarrow{\mathbb{R}} x$.

Par ailleurs, f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc en chaque point de $\mathbb{R}$ (théorème 7.263). Par la caractérisation séquentielle 7.187 de la continuité, nous avons

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f(q_i) = \lim_{i\to\infty} g(q_i) = g(x). \tag{12.123}$$

□

PROPooTNIAooNAJDzL

Proposition 12.65 ([1])**.**
Soit une fonction strictement croissante $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. *Alors la prolongation continue* $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est également strictement croissante.*

[25] Définition 12.61 ; nous en avons discuté dans l'exemple 12.60.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. Notons $d = y - x$. Nous considérons des suites de rationnels $x_k \to x$ et $y_l \to y$ telles que pour tout k, $x_k \in B(x, d/3)$ et $y_k \in B(y, d/3)$. En particulier, $x_k < y_l$ pour tout k et l.

Soient des rationnels q et q' tels que pour tout k,

$$x_k < q < q' < y_k. \tag{12.124}$$

Pour trouver de tels rationnels, il suffit de les chercher dans $]x + \frac{d}{3}, y - \frac{d}{3}[$. Cet intervalle étant de longueur $d/3$, il contient des rationnels.

Vue la croissance de f sur $\mathbb{Q}$, nous avons, pour tout k :

$$f(x_k) < f(q) < f(q') < f(y_k), \tag{12.125}$$

et à la limite :

$$\tilde{f}(x) \leqslant f(q) < f(q') \leqslant \tilde{f}(y). \tag{12.126}$$

Notez que les inégalités strictes se changent en inégalités larges au passage à la limite. D'où l'utilité de prendre *deux* rationnels entre x_k et y_k pour maintenir une inégalité stricte entre $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{f}(y)$. □

12.6 Espace des fonctions continues

Définition 12.66.
*Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$. L'**oscillation** sur I est le nombre*

$$\omega_f(I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x). \tag{12.127}$$

Pour chaque x fixé, la fonction

$$x \mapsto \omega_f\big(B(x, \delta)\big) \tag{12.128}$$

est une fonction positive, croissante et a donc une limite (pour $\delta \to 0$). Nous notons $\omega_f(x)$ cette limite qui est l'**oscillation** de f en ce point. Une propriété immédiate est que f est continue en x_0 si et seulement si $\omega_f(x_0) = 0$.

LemuaPbtQ

Lemme 12.67.
L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une réunion dénombrable de fermés.

Démonstration. Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f. Nous avons

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}. \tag{12.129}$$

Il nous suffit donc de montrer que pour tout ϵ, l'ensemble

$$\{x \text{ tel que } \omega_f(x) < \epsilon\} \tag{12.130}$$

est ouvert. Soit en effet x_0 dans cet ensemble. Il existe δ tel que $\omega_f\big(B(x_0, \delta)\big) < \epsilon$. Si $x \in B(x_0, \delta)$, alors si on choisit δ' tel que $B(x, \delta') \subset B(x_0, \delta)$, nous avons $\omega_f\big(B(x, \delta')\big) < \epsilon$, ce qui justifie que $\omega_f(x) < \epsilon$ et donc que x est également dans l'ensemble considéré. □

Théorème 12.68.
L'ensemble des points de discontinuité d'une limite simple de fonctions continues est de première catégorie.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f. Nous devons écrire l'ensemble des points de discontinuité de f comme une union dénombrable d'ensembles tels que sur tout intervalle I, aucun de ces ensembles n'est dense. Nous savons déjà par le lemme 12.67 que l'ensemble des points de discontinuité de f est donné par

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}. \tag{12.131}$$

Nous essayons donc de prouver que pour tout ϵ, l'ensemble

$$F = \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geqslant \epsilon\} \tag{12.132}$$

est nulle part dense. Soit

$$E_n = \bigcap_{i,j>n} \{x \text{ tel que } |f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon\}. \tag{12.133}$$

Nous montrons que cet ensemble est fermé en étudiant le complémentaire. Soit $x \notin E_n$; alors il existe un couple (i, j) tel que

$$|f_i(x) - f_j(x)| > \epsilon. \tag{12.134}$$

Par continuité, cette inégalité reste valide dans un voisinage de x. Donc il existe un voisinage de x contenu dans $\complement E_n$ et E_n est donc fermé.

De plus nous avons $E_n \subset E_{n+1}$ et $\bigcup_n E_n = \mathbb{R}$. Ce dernier point est dû au fait que pour tout x, il existe N tel que $i, j > N$ implique $|f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \epsilon$. Cela est l'expression du fait que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit I, un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Nous voulons trouver un intervalle $J \subset I$ sur lequel f est continue. Nous écrivons I sous la forme

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap I). \tag{12.135}$$

Tous les ensembles $J_n = E_n \cap I$ ne peuvent être nulle part dense en même temps (à cause du théorème de Baire 7.380). Il existe donc un n tel que J_n contienne un ouvert J. Le but est de montrer que f est continue sur J. Pour ce faire, nous n'allons pas simplement majorer $|f(x) - f(x_0)|$ par ϵ lorsque $|x - x_0|$ est petit. Nous allons majorer l'oscillation de f sur $B(x_0, \delta)$ lorsque δ est petit. Pour cela nous prenons x_0 et x dans J et nous écrivons

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \tag{12.136}$$

À ce niveau nous rappelons que n est fixé par le choix de J, dans lequel ϵ est déjà inclus. Nous choisissons évidemment $|x - x_0| \leqslant \delta$ de telle sorte que le second terme soit plus petit que ϵ en vertu de la continuité de f_n. Pour le premier terme, pour tout $i, j \geqslant n$ nous avons

$$|f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon. \tag{12.137}$$

Si nous posons $j = n$ et $i \to \infty$, en tenant compte du fait que $f_i \to f$ simplement,

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \epsilon. \tag{12.138}$$

Nous avons donc obtenu $|f(x) - f_n(x_0)| \leqslant 2\epsilon$. Cela signifie que dans un voisinage de rayon δ autour de x_0, les valeurs extrêmes prises par $f(x)$ sont $f_n(x_0) \pm 4\epsilon$. Nous avons donc prouvé que pour tout ϵ, il existe δ tel que

$$\omega_f\big([x_0 - \delta, x_0 + \delta]\big) \leqslant 4\epsilon. \tag{12.139}$$

De là nous concluons que

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_f\big([x_0 - \delta, x_0 + \delta]\big) = 0, \tag{12.140}$$

ce qui signifie que f est continue en x_0. □

Exemple 12.69.
Une fonction discontinue sur $\mathbb{Q}$ et continue ailleurs. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = p/q \end{cases} \tag{12.141}$$

où par « $x = p/q$ » nous entendons que p/q est la fraction irréductible[26].

Cette fonction est discontinue sur $\mathbb{Q}$ parce que si $q \in \mathbb{Q}$ alors $f(q) \neq 0$ alors que dans tous voisinage de q il existe un irrationnel sur qui la fonction vaudra zéro.

Montrons que f est continue sur les irrationnels. Si $x_0 \notin \mathbb{Q}$ alors $f(x_0) = 0$. Mais si on prend un voisinage suffisamment petit de x_0, nous pouvons nous arranger pour que tous les rationnels aient un dénominateur arbitrairement grand. En effet si nous nous fixons un premier rayon $r_0 > 0$ alors il existe un nombre fini de fractions de la forme 1, $\frac{k}{2}$, $\frac{k}{3}$,..., $\frac{k}{N}$ dans $B(x_0, r_0)$. Il suffit maintenant de choisir $0 < r \leqslant r_0$ tel que ces fractions soient toutes hors de $B(x_0, r)$. Dans cette boule nous avons $f < \frac{1}{N}$. Du coup f est continue en x_0. △

Définition 12.70 (Point périodique[432])**.**
Soit $f : I \to I$ une application d'un ensemble I dans lui-même. Si $x \in I$ vérifie $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour $k = 1, \dots, n-1$ alors on dit que x est un point n-périodique.

[26] Proposition 3.29.

LemAONBooGZBuYt

Lemme 12.71.
Soit I un segment[27] *de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $f\colon I \to I$. Si K est un segment fermé avec $K \subset f(I)$ alors il existe un segment fermé $L \subset I$ tel que $K = f(L)$.*

Démonstration. Mentionnons immédiatement que f est continue sur I qui est compact[28]. Par conséquent tous les nombres dont nous allons parler sont finis parce que f est bornée par le théorème 9.56.

Soit $K = [\alpha, \beta]$. Si $\alpha = \beta$ alors le segment $L = \{a\}$ convient. Nous supposons donc que $\alpha \neq \beta$ et nous considérons $a, b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Puisque $a \neq b$ nous supposons $a < b$ (le cas $a > b$ se traite de façon similaire).

Nous posons

$$A = \{x \in [a, b] \text{ tel que } f(x) = \alpha\}. \tag{12.142}$$

C'est un ensemble borné par a et b. De plus il est fermé ; ce dernier point n'est pas tout à fait évident parce que f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, mais sur I, qui est fermé. Le corolaire 9.91 n'est donc pas immédiatement utilisable. Prouvons donc que $Z = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha\}$ est fermé. Si x_0 est hors de Z alors, soit x_0 est dans I, soit il est hors de I. Dans ce second cas, le complémentaire de I étant ouvert, on a un voisinage de x_0 hors de I, et par conséquent hors de Z. Si au contraire $x_0 \in I$ alors il y a (encore) deux cas : soit $x_0 \in \text{Int}(I)$, soit x_0 est sur le bord de I. Dans le premier cas, le théorème des valeurs intermédiaires[29] fonctionne. Pour le second cas, nous supposons $x_0 = \max(I)$ (le cas $x_0 = \min(I)$ est similaire). Le théorème des valeurs intermédiaires dit que sur $[x_0 - \epsilon, x_0]$, $f \neq \alpha$ et en même temps, sur $]x_0, x_0 + \epsilon]$, nous sommes en dehors du domaine. Au final $\{f(x) = \alpha\}$ est fermé et A est alors fermé en tant que intersection de deux fermés.

L'ensemble A étant non vide ($a \in A$), il possède donc un maximum que nous nommons u :

$$u = \max(A). \tag{12.143}$$

Nous posons aussi

$$B = \{x \in [u, b] \text{ tel que } f(x) = \beta\} \tag{12.144}$$

qui est encore fermé, borné et non vide. Nous pouvons donc définir

$$v = \min(B). \tag{12.145}$$

Nous prouvons maintenant que $f\big([u, v]\big) = [\alpha, \beta]$. D'abord $f\big([u, v]\big)$ est un intervalle compact[30] contenant $f(u) = \alpha$ et $f(v) = \beta$. Par conséquent $[\alpha, \beta] \subset f\big([u, v]\big)$. Pour l'inclusion inverse supposons $t \in [u, v]$ tel que $f(t) > \beta$. Vu que $f(a) = \alpha$ et $\alpha < \beta$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [a, t]$ tel que $f(t_0) = \beta$. Cela donne $t_0 < v$ et donc contredit la minimalité de v dans B. Nous en déduisons que $f\big([u, v]\big)$ ne contient aucun élément plus grand que β. Même jeu pour montrer que l'intervalle ne contient aucun élément plus petit que α.

En définitive, le segment $L = [u, v]$ satisfait toutes les exigences. □

Lorsque $I_2 \subset f(I_1)$ nous notons $I_1 \to I_2$ ou, si une ambiguïté est à craindre, $I_1 \xrightarrow{f} I_2$. Cette flèche se lit « recouvre ».

LemSSPXooMkwzjb

Lemme 12.72 ([433, 432])**.**
Soient les segments $I_0, \dots, I_{n-1}$ tels que nous ayons le cycle

$$I_0 \to I_1 \to \dots \to I_{n-1} \to I_0. \tag{12.146}$$

Alors f^n admet un point fixe $x_0 \in I_0$ tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$.

Démonstration. Nous prouvons les cas $n = 1$ et $n = 2$ séparément.

(1) $\underline{n = 1}$ Nous avons $I_0 \to I_0$, c'est-à-dire que $I_0 \subset f(I_0)$. Si $I_0 = [a, b]$ alors nous posons $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$ pour certains $\alpha, \beta \in I_0$. Nous posons ensuite $g(x) = f(x) - x$.

Dans un premier temps, $g(\alpha) = a - \alpha \leqslant 0$ parce que $a = \min(I_0)$ et $\alpha \in I_0$. Pour la même raison, $g(\beta) = b - \beta \geqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors $t_0 \in [\alpha, \beta] \subset I_0$ tel que $g(t_0) = 0$. Nous avons donc $f(t_0) = t_0$.

[27] définition 9.53. Un segment est un intervalle fermé borné.
[28] Par le lemme 9.20.
[29] Théorème 9.95.
[30] Corolaire 9.97 et théorème 7.275.

(2) $\underline{n=2}$ Nous avons $I_0 \to I_1 \to I_0$. Puisque $I_1 \subset f(I_0)$, le lemme 12.71 donne un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. Mézalors

$$J_1 \subset I_0 \subset f(I_1) = f^2(J_1). \tag{12.147}$$

Nous avons donc $J_1 \xrightarrow{f^2} J_1$ et par le cas $n = 1$ traité plus haut, la fonction f^2 a un point fixe x_0 dans J_1. De plus

$$f(x_0) \in f(J_1) = I_1, \tag{12.148}$$

le point x_0 est donc bien celui que nous cherchions.

(3) **Cas général** Nous avons

$$I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_{n-1} \to I_0. \tag{12.149}$$

Puisque $I_1 \subset f(I_0)$, il existe $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. Mais

$$I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1), \tag{12.150}$$

donc il existe $J_2 \subset J_1$ tel que $I_2 = f^2(J_2)$. En procédant ainsi aussi longtemps qu'il le faut, nous construisons les ensembles $J_1, \ldots, J_{n-1}$ tels que

$$J_{n-1} \subset J_{n-2} \subset \ldots \subset J_1 \subset J_0 \tag{12.151}$$

tels que $I_k = f^k(J_k)$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$. La dernière de ces inclusions est $I_{n-1} = f^{n-1}(J_{n-1})$, mais $I_{n-1} \to I_0$, c'est-à-dire que

$$I_0 \subset f(I_{n-1}) = f^n(J_{n-1}), \tag{12.152}$$

et il existe $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $I_0 \subset f^n(J_n)$. Mais comme $J_n \subset J_0$ nous avons en particulier $J_n \subset f^n(J_n)$. Cela donne un point fixe $x_0 \in J_n$ pour f^n. Par construction, nous avons $J_n \subset J_{n-1} \subset \ldots \subset J_1 \subset J_0$ et donc $x_0 \in J_k$ pour tout k. En particulier

$$f^k(x_0) \in f^k(J_k) = I_k \tag{12.153}$$

pour tout k.

□

Théorème 12.73 (Théorème de Sarkowski[433, 432])**.**
Soit I, un segment de $\mathbb{R}$ et une application continue $f\colon I \to I$. Si f admet un point 3-périodique, alors f admet des points n-périodiques pour tout $n \geqslant 1$.

Démonstration. Soit $a \in I$ un point 3-périodique pour f et notons $b = f(a)$, $c = f(b)$. Les points b et c sont également des points 3-périodiques. Quitte à renommer, nous pouvons supposer que a est le plus petit des trois. Il reste deux possibilités : $a < b < c$ et $a < c < b$. Nous traitons d'abord le premier cas.

Supposons $a < b < c$. Nous posons $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$. Nous avons immédiatement $I_1 \subset f(I_0)$ et comme $f(b) = c$ et $f(c) = a$, $f(I_1)$ recouvre $[a, c]$ et donc recouvre en même temps I_1 et I_2. Nous avons donc $I_0 \to I_1$, $I_1 \to I_0$ et $I_1 \to I_1$.

(1) **Un point 1-périodique** Nous avons $I_1 \to I_1$ qui prouve que f a un point fixe dans I_1. C'est le cas $n = 1$ du lemme 12.72. Voilà un point 1-périodique.

(2) **Un point 2-périodique** Nous avons $I_0 \to I_1 \to I_0$. Par conséquent, le lemme 12.72 dit que f^2 a un point fixe $x_0 \in I_0$ tel que $f(x_0) \in I_1$. Montrons que $f(x_0) \neq x_0$. Pour avoir $x_0 = f(x_0)$, il faudrait $x_0 \in I_0 \cap I_1 = \{b\}$. Mais b est un point 3-périodique, donc ne vérifiant certainement pas $f^2(b) = b$. Nous en déduisons que $f(x_0) \neq x_0$ et donc que x_0 est 2-périodique.

(3) **Un point 3-périodique** On en a par hypothèse.

(4) **Un point n-périodique pour $n \geqslant 4$** Nous avons le cyle

$$I_0 \to \underbrace{I_1 \to I_1 \to \ldots \to I_1}_{\text{n-1}\,fois} \to I_0. \tag{12.154}$$

Le lemme donne alors un point fixe $x \in I_0$ pour f^n tel que $f^k(x) \in I_1$ pour $k = 1, \ldots, n-1$. Est-ce possible que $x = b$? Non parce que $f^2(b) = a \in I_0$ alors que $f^2(x) \in I_1$. Mais $I_0 \cap I_1 = \{b\}$.

Par conséquent la relation $f^k(x) \in I_1$ exclut d'avoir $f^k(x) = x$, et le point x est bien n-périodique.

Passons au cas $a < c < b$. Alors nous posons $I_0 = [a, c]$ et $I_1 = [c, b]$. Encore une fois $f(I_0)$ contient a et b, donc $I_0 \to I_0$ et $I_0 \to I_1$. Mais en même temps $f(I_1)$ contient a et c, donc $I_1 \to I_0$.

Nous pouvons donc refaire comme dans le premier cas, en inversant les rôles de I_0 et I_1. En particulier nous pouvons considérer le cycle

$$I_1 \to I_0 \to I_0 \to \ldots \to I_0 \to I_1. \tag{12.155}$$

□

12.7 Uniforme continuité

SECooZSZNooIBYSDF0

L'uniforme continuité est la définition 7.377.

Définition 12.74.
*Une partie $A \subset \mathbb{R}^m$ est dite **bornée** si il existe un $M > 0$ tel que $A \subset B(0, M)$. Le **diamètre** de la partie A est le nombre*

$$\mathrm{Diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \|x - y\| \in [0, \infty]. \tag{12.156}$$

Lorsque A est bornée, il existe un M tel que $\|x\| \leqslant M$ pour tout $x \in A$.

LEMooFABOooZYFjhv

Lemme 12.75.
Si A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}^m$, alors $\mathrm{Diam}(A) = \mathrm{Diam}(\bar{A})$.

Démonstration. Vu que $A \subset \bar{A}$, nous avons l'inégalité $\mathrm{Diam}(A) \leqslant \mathrm{Diam}(\bar{A})$. Nous nommons $d = \mathrm{Diam}(\bar{A})$. Soit $\epsilon > 0$. Soient $x, y \in \bar{A}$ tels que $\|x - y\| > d - \epsilon$. Nous prenons $a \in B(x, \epsilon) \cap A$ et $b \in B(y, \epsilon) \cap A$.

Nous avons

$$\mathrm{Diam}(A) \geqslant \|a - b\| \geqslant \|x - y\| - 2\epsilon \geqslant d - 3\epsilon. \tag{12.157}$$

Nous avons donc $\mathrm{Diam}(A) \geqslant \mathrm{Diam}(\bar{A}) - 3\epsilon$ pour tout ϵ. Donc $\mathrm{Diam}(A) \geqslant \mathrm{Diam}(\bar{A})$. □

Exemple 12.76.
Prenons la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, et demandons nous pour quel δ nous sommes sûr d'avoir

$$|f(a + \delta) - f(a)| = \left| \frac{1}{a + \delta} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon. \tag{12.158}$$

Pour simplifier, nous supposons que $a > 0$. Nous calculons

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{a + \delta} &< \varepsilon \\ \frac{\delta}{a(a + \delta)} &< \varepsilon \\ \delta &< \varepsilon a^2 + \varepsilon a \delta \\ \delta(1 - \varepsilon a) &< \varepsilon a^2 \\ \delta &< \frac{\varepsilon a^2}{1 - \varepsilon a}. \end{aligned} \tag{12.159}$$

Notons que, à ε fixé, plus a est petit, plus il faut choisir δ petit. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est donc pas uniformément continue. Cela correspond au fait que, proche de zéro, la fonction monte très vite. Une fonction uniformément continue sera une fonction qui ne montera jamais très vite. △

PROPooVOUTooOtiGLG

Proposition 12.77.
Quelques propriétés des fonctions uniformément continues.

(1) Toute application uniformément continue est continue ;

(2) la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue ;

Nous verrons qu'une application lipschitzienne est uniformément continue (proposition 12.347).

Une fonction peut être uniformément continue sur un domaine et pas sur un autre. Le théorème suivant donne une importante indication à ce sujet.

ThoHeineContinueCompact

Théorème 12.78 (Heine)**.**
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est uniformément continue sur K.

Démonstration. Nous allons prouver ce théorème par l'absurde. Nous commençons par écrire la condition qui exprime que f n'est pas uniformément continue sur le compact K :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in K \text{ tels que } \|x - y\| < \delta \text{ et } \big|f(x) - f(y)\big| > \varepsilon. \tag{12.160}$$

En particulier (en prenant $\delta = \frac{1}{n}$ pour tout n), pour chaque n nous pouvons trouver x_n et y_n dans K qui vérifient simultanément les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \|x_n - y_n\| < \dfrac{1}{n} & \text{(12.161a)} \\ \big|f(x_n) - f(y_n)\big| > \varepsilon. & \text{(12.161b)} \end{cases}$$

EqCond3107fxfyepsppt

Nous insistons que c'est le même ε pour chaque n. L'ensemble K étant compact, l'ensemble $K \times K$ est compact (théorème 7.368) et nous pouvons trouver une sous-suite convergente *du couple* (x_n, y_n) dans $K \times K$. Quitte à passer à ces sous-suites, nous supposons que (x_n, y_n) converge dans $K \times K$ et en particulier, que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes. Étant donné que pour chaque n elles vérifient $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$, les limites sont égales :

$$\lim x_n = \lim y_n = x. \tag{12.162}$$

L'ensemble K étant fermé, la limite x est dans K. Par continuité de f, nous avons finalement

$$\lim f(x_n) = \lim f(y_n) = f(x), \tag{12.163}$$

mais alors

$$\lim_{n\to\infty} \big|f(x_n) - f(y_n)\big| = 0, \tag{12.164}$$

ce qui est en contradiction avec le choix (12.161b).

Tout ceci prouve que $f(K)$ est bornée supérieurement et que f atteint son supremum (qui est donc un maximum). Le fait que $f(K)$ soit bornée inférieurement se prouve en considérant la fonction $-f$ au lieu de f. □

Remarque 12.79.
Nous pouvons ne pas utiliser le fait que le produit de compacts est compact.

Pour choisir les sous-suites (x_n) et (y_n), il suffit de prendre une sous-suite convergente de (x_n) et d'invoquer le fait que $\|x_n - y_n\| \leqslant \frac{1}{n}$. Les suites (x_n) et (y_n) étant adjacentes[31], la convergence de (x_n) implique la convergence de (y_n) vers la même limite.

Il est donc un peu superflu de parler de la convergence du couple (x_n, y_n).

PROPooBWUFooYhMlDp

Proposition 12.80 (Heine[434])**.**
Toute application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique quelconque est uniformément continue[32].

Démonstration. Soient un espace métrique compact X et un espace métrique quelconque E. Nous considérons une application continue $f\colon X \to E$.

(1) **Un ensemble** Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons l'ensemble

$$K = \{(x, y) \in X \times X \text{ tel que } d\big(f(x), f(y)\big) \geqslant \epsilon\}. \tag{12.165}$$

(2) **Il est compact** L'espace X étant compact, $X \times X$ est également compact par le théorème 7.368. Les fonctions f et d étant continues, l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon X \times X &\to \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto d\big(f(x), f(y)\big) \end{aligned} \tag{12.166}$$

est continue, de telle sorte que la partie $\varphi \geqslant \epsilon$ est fermée. Un fermé dans un compact est compact par le lemme 7.121.

(3) **Une borne atteinte** Nous considérons l'application distance $d\colon K \to \mathbb{R}^+$. C'est une application continue sur le compact K ; donc elle atteint ses bornes (théorème des bornes atteintes, 9.56). Elle a un minimum que nous notons δ.

Comme $(x, x) \notin K$, nous avons $d(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in K$. Et donc $\delta > 0$.

[31] Définition 9.40.
[32] Uniforme continuité, définition 7.377.

(4) **Conclusion** Si $x, y \in X$ sont tels que $d(x,y) < \delta$, alors $(x,y) \notin K$. De ce fait nous avons

$$d\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon. \tag{12.167}$$

D'où l'uniforme continuité de f sur X.

□

LEMooIVAKooUiEENr

Lemme 12.81 ([1]).
Soit une fonction continue $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Pour chaque $x \in [a,b]$ nous définissons

$$\begin{aligned} f_x\colon [c,d] &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto f(x,y). \end{aligned} \tag{12.168}$$

Alors l'application

$$\begin{aligned} g\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|f_x\|_\infty \end{aligned} \tag{12.169}$$

est continue.

Démonstration. Soit $\alpha \in [a,b]$, et prouvons la continuité de g en α.

(1) **Le décor** Nous considérons l'espace vectoriel normé $\big(C^0([a,b]), \|.\|_\infty\big)$ des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme uniforme. Prouvons que si $x_k \xrightarrow{[a,b]} \alpha$, alors $f_{x_k} \xrightarrow{unif} f_\alpha$.

(2) **Module de continuité** Pour cela nous avons le calcul suivant, avec justifications juste en-dessous :

$$\begin{aligned} \|f_{x_k} - f_\alpha\|_\infty &= \sup_{y\in[c,d]} \|f(x_k,y) - f(\alpha,y)\| && \text{(12.170a)} \\ &\leqslant \sup_{y\in[c,d]} \big|\omega_f\big(\|(x_k,y) - (\alpha,y)\|\big)\big| && \text{(12.170b)} \\ &= \sup_{y\in[c,d]} |\omega_f(|x_k - \alpha|)| && \text{(12.170c)} \\ &= \omega_f(|x_k - \alpha|). && \text{(12.170d)} \end{aligned}$$

SUBEQooCOJQooWlyHUa

SUBEQooGLYMooEZKRKm

Justifications.

- Pour (12.170b). Utilisation du module de continuité, définition 10.355.
- Pour (12.170c). La norme dans $\mathbb{R}^2$ de $(x_k, y) - (\alpha, y)$.

(3) **Uniforme continuité** La fonction f est continue sur le compact $[a,b]\times[c,d]$. Elle est donc uniformément continue par le théorème de Heine 12.80, et donc son module de continuité vérifie $\lim_{h\to 0} \omega_f(h) = 0$ par 10.357.

Nous avons donc

$$\|f_{x_k} - f_\alpha\|_\infty \leqslant \omega_f(|x_k - \alpha|) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{12.171}$$

Nous avons donc prouvé que si $x_k \xrightarrow{\mathbb{R}} \alpha$, alors $f_{x_k} \xrightarrow{\|.\|_\infty} f_\alpha$.

(4) **Conclusion** La norme étant une application continue, nous en déduisons que si $x_k \to \alpha$, alors $\|f_{x_k}\|_\infty \to \|f_\alpha\|_\infty$.

Ceci est la continuité séquentielle de la fonction g, et donc la continuité tout court.

□

12.8 Fonctions sur un compact

Par le théorème des valeurs intermédiaires 9.95, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, et nous avons l'importante propriété suivante des fonctions continues sur un compact.

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème 9.56.

Théorème 12.82.
Si f est une fonction continue sur l'intervalle compact $[a,b]$. Alors f est bornée sur $[a,b]$ et elle atteint ses bornes.

Démonstration. Étant donné que $[a,b]$ est un intervalle compact, son image est également un intervalle compact, et donc est de la forme $[m,M]$. Ceci découle du théorème 7.275 et le corolaire 9.97. Le maximum de f sur $[a,b]$ est la borne M qui est bien dans l'image (parce que $[m,M]$ est fermé). Idem pour le minimum m. □

12.9 Polynômes, théorème de d'Alembert

L'algèbre des polynômes sur un anneau est définie en 1.473. Si $P \in A[X]$ et si $\alpha \in A$ nous avons également défini l'évaluation de P en α ; c'est la définition 1.476. Dans le cadre de l'analyse, lorsque nous considérons des polynômes, nous allons complètement confondre le polynôme avec la fonction qu'il définit.

12.9.1 Polynômes sur les réels

PROPooJKYJooFqbQMr

Proposition 12.83.
Tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

Démonstration. Nous mettons le plus haut degré en facteur :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{n-k}}. \tag{12.172}$$

Le terme en $k=n$ vaut $a_n x^n$ tandis que les autres sont de la forme (à un coefficient près) $\frac{1}{x^l}$ pour un $l \geqslant 1$. Lorsque $x \to \infty$, chacun de ces termes s'annule (lemme 12.33). Nous avons donc

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty, \tag{12.173}$$

et de même, n étant impair, $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 nous donne alors l'existence d'un réel sur lequel P s'annule. □

PROPooARLAooMNnNsz

Proposition 12.84 ([1]).
À propos de réductibilité

(1) *Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine d'un polynôme à coefficients réels, alors le conjugué complexe $\bar{z}$ est également une racine.*

(2) *Tout polynôme à coefficients réels de degré au moins 3 est réductible*[33] *sur $\mathbb{R}$.*

La proposition suivante donne une utilisation amusante de la notion de polynôme caractéristique[34].

PROPooKJWOooOjSFaA

Proposition 12.85 ([435]).
Soit un espace vectoriel E de dimension finie pour lequel il existe un endomorphisme $f\colon E \to E$ tel que $(f\circ f)(x) = -x$ pour tout $x \in E$. Alors la dimension de E est paire.

Démonstration. Cherchons les valeurs propres de f en résolvant l'équation $f(x) = \lambda x$. Nous appliquons f à cette égalité :

$$-x = \lambda f(x) = \lambda^2 x. \tag{12.174}$$

Donc λ ne peut pas être réel. Nous avons montré que f n'a pas de valeur propre réelle. Or le polynôme caractéristique de f est de degré égal à la dimension de l'espace E par le lemme 8.111(1).

Si la dimension de E est impaire, le polynôme caractéristique est de degré impair, et possède donc une racine réelle[35]. Autrement dit, l'absence de racines réelles au polynôme caractéristique indique une dimension paire. □

12.86.
Une autre preuve possible pour 12.85 est d'utiliser le déterminant : si la dimension de E est n nous avons :

$$\det(f^2) = \det(-\mathrm{Id}) = (-1)^n. \tag{12.175}$$

Donc $(-1)^n$ est positif, ce qui montre que n est pair.

[33] Définition 1.327.
[34] Définition 8.109.
[35] Proposition 12.83.

12.9.2 Polynômes sur les complexes

Nous allons parler de comportement asymptotique de polynômes définis sur $\mathbb{C}$. La topologie que nous considérons est celle de la compactification en un point, décrite en 7.185.

Le lemme suivant donne une caractérisation de la limite en l'infini dans le compactifié $\hat{\mathbb{C}}$. Dans beaucoup de cas, cette caractérisation est prise comme la définition de la limite. Hélas, dans le Frido nous sommes des extrémistes et nous ne parvenons pas à dire le mot « limite » si il n'y a pas une topologie.

LEMooERABooQjLBzW

Lemme 12.87 ([1]).
Nous considérons la compactification en un point d'Alexandrov[36]*. Soit une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Nous avons $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$, il existe $R > 0$ tel que $|z| > R$ implique $|f(z)| > M$.*

Démonstration. Souvenons-nous que, en général[37], nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \tag{12.176}$$

si pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage W de a tel que $z \in W \setminus \{a\}$ implique $f(z) \in V$.

Précisons encore un point de notation. Si K est une partie de $\mathbb{C}$, nous notons K^c son complémentaire dans $\mathbb{C}$, pas dans $\hat{\mathbb{C}}$.

Ceci étant dit, nous passons à la preuve.

(1) **Sens direct** Nous supposons que $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Soit $M > 0$; nous considérons le voisinage $V = \overline{B(0,M)}^c \cup \{\infty\}$. Par définition de la limite, il existe un voisinage W de ∞ tel que $z \in W \Rightarrow f(z) \in V \setminus \{\infty\} = \overline{B(0,M)}^c$. Ce voisinage est de la forme $K^c \cup \{\infty\}$. Puisque K est compact, il est borné, et il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0,R)$.

Avec tout cela nous avons la chaine suivante d'implications :

$$|z| > R \Rightarrow z \in K^c \Rightarrow z \in W \Rightarrow f(z) \in V \setminus \{\infty\} = \overline{B(0,M)}^c \Rightarrow |f(z)| > M. \tag{12.177}$$

C'est bien la propriété que nous voulions.

(2) **Sens réciproque** Soit un voisinage V de ∞. Nous avons $V = K^c \cup \{\infty\}$ où K est compact dans $\mathbb{C}$. Il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0,M)$.

Par hypothèse, il existe R tel que $|z| > R \Rightarrow |f(z)| > M$. Soit $W = \overline{B(0,R)}^c \cup \{\infty\}$. Nous avons la chaine

$$z \in W \Rightarrow |z| > R \Rightarrow |f(z)| > M \Rightarrow f(z) \in K^c \Rightarrow f(z) \in V. \tag{12.178}$$

□

PROPooPWVWooGuftxZ

Proposition 12.88 ([1]).
Soit le polynôme

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \end{aligned} \tag{12.179}$$

où nous sous-entendons que $a_n \neq 0$. La fonction $z \mapsto |P(z)|$ est équivalente[38] *en l'infini à la fonction*

$$\begin{aligned} w\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^+ \\ z &\mapsto |a_n z^n|. \end{aligned} \tag{12.180}$$

Démonstration. Nous voudrions prouver qu'il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telle que [EQooGXWZooDJZNzE]

$$\begin{cases} |\sum_{i=0}^{n} a_i z^i| = \big(1 + \alpha(z)\big)|a_n z^n|. & \text{(12.181a)} \\ \lim_{z\to\infty} \alpha(z) = 0. & \text{(12.181b)} \end{cases}$$

Nous trouvons un candidat pour être une telle fonction en isolant simplement $\alpha(z)$ de cette égalité. Nous trouvons

$$\alpha(z) = \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{a_n} z^{i-n} \right| - 1. \tag{12.182}$$

[36] Définition 7.185.
[37] Définition 7.135.
[38] Définition 7.88.

Elle vérifie immédiatement (12.181). Le point qui fait intervenir la topologie de $\hat{\mathbb{C}}$ est de vérifier que $\lim_{z\to\infty}\alpha(z)=0$. Le terme $i=n$ de la somme vaut 1. Il suffit donc de montrer que pour $i\neq n$ nous avons

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^{n-i}}=0. \tag{12.183}$$

Soit $\epsilon>0$. Nous devons prouver qu'il existe un voisinage V de ∞ dans $\hat{\mathbb{C}}$ tel que

$$\left|\frac{1}{z^{n-i}}-0\right|\leqslant\epsilon \tag{12.184}$$

pour tout $z\in V$.

En utilisant la proposition 9.104 nous avons déjà

$$\left|\frac{1}{z^{n-i}}\right|=\frac{1}{|z^{n-i}|}=\frac{1}{|z|^{n-i}}. \tag{12.185}$$

Soit $R>0$ tel que $\frac{1}{R}<\epsilon$. Nous considérons le voisinage $\{|z|>R\}\cup\{\infty\}$ de ∞. Dans ce voisinage, nous avons

$$\frac{1}{|z|^{n-i}}\leqslant\frac{1}{|z|}\leqslant\frac{1}{R}<\epsilon. \tag{12.186}$$

Et voilà. □

Le lemme suivant parle de polynôme sur $\mathbb{C}$. Vous pouvez l'adapter à $\hat{\mathbb{R}}$ et $\bar{\mathbb{R}}$.

LEMooYZVGooXZvBAc

Lemme 12.89.
Si $P\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est un polynôme, alors $|P|$ atteint une borne inférieure globale.

Démonstration. Nous savons, par l'équivalence de fonctions prouvée dans la proposition 12.88 que $\lim_{z\to\infty}P(z)=\infty$. Soit $a>0$ dans $\mathbb{R}$. Par le lemme 12.87 il existe un $R>a$ tel que $|z|>R\Rightarrow|f(z)|>|f(a)|$.

La fonction $|P|$ est continue sur le compact $\overline{B(0,R)}$. Soit z_0 le point de minimum[39] de $|P|$ sur $\overline{B(0,R)}$.

Nous devons prouver que z_0 donne même un minimum global. Comme $a\in\overline{B(0,R)}$ nous avons

$$|P(z_0)|\leqslant|P(a)|. \tag{12.187}$$

Si $z\in\overline{B(0,R)}^c$, nous avons

$$|P(z)|>|P(a)|\geqslant|P(z_0)|. \tag{12.188}$$

Donc ce z_0 est un minimum sur $B(0,R)$ et sur $\overline{B(0,R)}^c$. Bref, un minimum global. □

LEMooTTOYooXaukuH

Lemme 12.90.
Soit le polynôme

$$\begin{aligned}P\colon\mathbb{C}&\to\mathbb{C}\\ z&\mapsto\sum_{i=0}^{n}a_iz^i.\end{aligned} \tag{12.189}$$

À part si $a_0=a_1=0$, la fonction P est équivalente à a_0+a_1z en $z=0$.

Note : si $a_0=a_1=0$, alors évidemment P devrait être équivalente à 0, ce qui est évidemment faux : la fonction identiquement nulle tend vers zéro plus vite que n'importe quoi.

Démonstration. En posant $g(z)=a_0+a_1z$, nous devons trouver une fonction α telle que

$$P(z)=\big(1+\alpha(z)\big)g(z). \tag{12.190}$$

EQooZFJBooVAYVBv

Si $a_0\neq0$, il existe un voisinage épointé de $z=0$ sur lequel la fonction

$$\alpha(z)=\frac{z^2\sum_{i=2}^{n}a_iz^{i-2}}{a_0+a_1z} \tag{12.191}$$

EQooVCOVooAKWJxF

existe. Il n'y a aucun problème à ce que $\alpha(z)\to0$ pour $z\to0$[40], et un simple calcul[41] donne (12.191).

[39] Théorème de Weierstrass 7.196.
[40] En remarquant toutefois que c'est une limite à deux dimensions. Sachez la définir.
[41] En fait, la formule (12.191) est obtenue en isolant $\alpha(z)$ dans (12.190).

Si par contre $a_0 = 0$, nous faisons le calcul intermédiaire suivant :

$$\alpha(z)g(z) = P(z) - g(z) = z^2 \sum_{i=2}^{n} a_i z^{i-2}, \tag{12.192}$$

et donc, en isolant $\alpha(z)$ et en simplifiant par z, nous voyons que la fonction α définie par

$$\alpha(z) = \frac{z}{a_1} \sum_{i=2}^{n} a_i z^{i-2} \tag{12.193}$$

convient. □

PROPooLBBLooQwEiHr

Proposition 12.91 ([436, 1]).
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

ITEMooSPSWooKLtqzZ

(1) L'équation $z^2 = a + bi$ a une solution dans $\mathbb{C}$.

ITEMooQOJDooWjfGXv

(2) Pour tout l, l'équation $z^{2^l} = a + bi$ a une solution dans $\mathbb{C}$.

Nous ne disons pas que ces solutions sont uniques[42].

Démonstration. Pour prouver (1), l'équation $z^2 = a + bi$ a pour solution $\pm\xi$ où[43]

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}} + i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{12.194}$$

Nous n'avons en fait pas besoin de montrer que $\pm\xi$ sont toutes deux des solutions, ni que ce sont les seules. Un calcul direct montre que $\xi^2 = a + bi$ et nous sommes contents.

Pour (2), nous faisons une récurrence sur l. Nous savons que

$$z^{2^{k+1}} = (z^{2^k})^2. \tag{12.195}$$

Soit $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\xi^{2^k} = a + bi$; un tel ξ existe par hypothèse de récurrence. Alors si z est tel que $z^2 = \xi$, nous avons

$$z^{2^{k+1}} = a + bi. \tag{12.196}$$

□

Le théorème de d'Alembert possède de nombreuses démonstrations. En voici une qui à ma connaissance est celle demandant le moins d'analyse ; une démonstration à base de théorie de Galois peut être trouvée dans [124, 437]. Si vous lisez ces lignes pour savoir qu'un polynôme de degré n possède au *maximum* n racines, ce n'est pas ici qu'il faut regarder, mais le corolaire 3.119.

Une très jolie démonstration sur numberphile :
https://www.youtube.com/watch?v=shEk8sz1oOw.

THOooIRJYooBiHRyW

Théorème 12.92 (d'Alembert[436]).
Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos[44] *: tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe*[45].

Démonstration. Nous effectuons une preuve tout à la fois par l'absurde et par récurrence en supposant que le polynôme

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \end{aligned} \tag{12.197}$$

n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$, et que n soit le plus petit entier pour lequel un tel polynôme existe. Nous notons

$$n = 2^k m \tag{12.198}$$

où m est impair.

[42] Comme vous en conviendrez en pensant à $z^2 = 1$ qui a déjà les solutions 1 et -1.
[43] Si vous vous demandez où sont définies les racines carrés, c'est 9.100.
[44] Définition 6.74.
[45] C'est la définition 6.74 d'être algébriquement clos.

Le lemme 12.89 donne un point z_0 qui réalise le minimum global de $|f|$ sur $\mathbb{C}$. Nous posons $g(z) = f(z_0+z)$ et nous définissons ses coefficients A_i par

$$g(z) = \sum_{i=0}^{n} A_i z^i. \tag{12.199}$$

Nous avons $A_n = 1$ et $|A_0| = |f(z_0)|$. Soit A_r le premier à être non nul parmi les A_1, A_2, ….

(1) **Si $r < n$** Par hypothèse de récurrence, il existe $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\xi^r = -A_1/A_r$. Nous avons

$$g(t\xi) = A_0 + \frac{-A_r t^r A_0}{A_r} + t^{r+1} \sum_{i=r+1}^{n} A_i \xi^i t^{i-r-1}. \tag{12.200}$$

En notant $P(t)$ le dernier polynôme, nous pouvons écrire cela sous forme compacte :

$$g(t\xi) = A_0 - t^r A_0 + t^{r+1} P(t). \tag{12.201}$$

Puisque

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{r+1}P(t)}{t^r|A_0|} = \lim_{t\to 0} tP(t) = 0, \tag{12.202}$$

il existe $t_0 > 0$ tel que

$$|t_0^{r+1}P(t_0)| < |A_0 t_0^r|. \tag{12.203}$$

Nous choisissons de plus $t_0 < 1$, de telle sorte que $1 - t^r > 0$. Avec cela nous avons

$$|g(t\xi)| \leqslant |A_0|(1-t^r) + |t^{r+1}P(t)| = |A_0| \underbrace{-t^r|A_0| + |t^{r+1}P(t)|}_{<0} < |A_0|. \tag{12.204}$$

Or $|A_0|$ était un minimum global de $|g|$. Contradiction.

(2) **Si $r = n$**

Dans ce cas,

$$g(z) = f(z_0 + z) = A_0 + z^n, \tag{12.205}$$

et nous rappelons que $n = 2^k m$ où m est impair. Nous allons trouver une contradiction dans les quatre cas $\mathrm{Re}(A_0) > 0$, $\mathrm{Re}(A_0) < 0$, $\mathrm{Im}(A_0) > 0$ et $\mathrm{Im}(A_0) < 0$. Bien entendu ces cas se recouvrent largement, mais en toute généralité, nous avons besoin des quatre.

(2a) **Si $\mathrm{Re}(A_0) > 0$** La proposition 12.91 nous permet de considérer $v \in \mathbb{C}$ tel que $v^{2^k} = -1$. Nous avons alors

$$g(tv) = A_0 + (tv)^n = A_0 + t^n (v^{2^k})^m = A_0 + t^n(-1)^m = A_0 - t^n \tag{12.206}$$

parce que m est impair. Nous avons $\mathrm{Im}\big(g(tv)\big) = \mathrm{Im}(A_0)$. Si t est assez petit pour que $t^n < |\mathrm{Re}(A_0)|$ nous avons aussi $|\mathrm{Re}\big(g(tv)\big)| < |\mathrm{Re}(A_0)|$. Donc

$$|g(tv)|^2 = |\mathrm{Re}\big(g(tv)\big)|^2 + |\mathrm{Im}\big(g(tv)\big)|^2 < |\mathrm{Re}(A_0)|^2 + |\mathrm{Im}(A_0)|^2 = |A_0|^2. \tag{12.207}$$

Donc $|g(tv)| < |A_0|$. Contradiction.

(2b) **Si $\mathrm{Re}(A_0) < 0$** Nous prenons $v = 1$, et même histoire.

(2c) **Si $\mathrm{Im}(A_0) < 0$** Nous prenons $w \in \mathbb{C}$ tel que

$$w^{2^k} = i(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}. \tag{12.208}$$

Là, il y a un peu d'arrachage de cheveux pour bien voir les cas. La difficulté est que les puissances de i alternent entre 1, -1, i et $-i$. Puisque m est impair, nous avons un l tel que $m = 2l + 1$. Nous subdivisons les cas l pair et l impair.

(2c.i) **Si l est pair** Alors d'une part $\frac{1}{2}(m-1) = l$ est pair et donc

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = 1. \tag{12.209}$$

Et d'autre part, $i^{2l+1} = (-1)^l i = i$. En tout,

$$i^m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = i. \tag{12.210}$$

(2c.ii) **Si l est impair** Alors $\frac{1}{2}(m-1) = l$ et $(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = -1$. Mais en même temps, $i^{2l+1} = -i$, ce qui donne encore une fois

$$i^m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = i. \tag{12.211}$$

Bref, que l soit pair ou impair, nous avons $i^m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = i$.

Nous avons donc $\text{Re}\big(g(tw)\big) = \text{Re}(A_0)$ et $\text{Im}\big(g(tw)\big) < \text{Im}(A_0)$. Encore contradiction.

(3) **Si $\text{Im}(A_0) > 0$** Même chose que ce que nous venons de faire, mais avec

$$w^{2^k} = -i(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}. \tag{12.212}$$

□

CORooKKNWooWEQukb

Corolaire 12.93 ([1]).
Tout polynôme de degré 3 à coefficients réels possède au moins une racine réelle.

Démonstration. Soient les racines λ_1, λ_2 et λ_3 du polynôme en question. Toutes trois sont dans $\mathbb{C}$. Supposons que λ_1 ne soit pas réelle. Alors λ_2 ou λ_3 doit être égale à $\bar{\lambda}_1$. Disons λ_2. Nous avons donc les racines λ_1, $\bar{\lambda}_1$ et λ_3. Le polynôme se factorise alors en

$$a(X-\lambda_1)(X-\bar{\lambda}_1)(X-\lambda_3). \tag{12.213}$$

EQooELMMooNbnBgg

Le coefficient a doit être réel parce qu'il est le coefficient du terme en X^3 (réel par hypothèse). Si λ_3 n'est pas réel, alors ce polynôme ne peut pas avoir des coefficients réels. Entre autres parce que le terme indépendant est $a|\lambda_1|^2\lambda_3$, qui est réel si et seulement si λ_3 est réel[46]. □

Tant que vous y êtes, vous pouvez voir que le polynôme (12.213) est à coefficients réels si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.

EXooIPLOooSNfiWg

Exemple 12.94.
Toute application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a un vecteur propre. En effet si $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire, son polynôme caractéristique χ_R est de degré 3. Le corolaire 12.93 indique qu'un tel polynôme possède au moins une racine réelle. Une telle racine est une valeur propre de R par le théorème 8.113. △

DEFooVFTYooJyDePn

Définition 12.95.
*Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine de χ_u, l'ordre de l'annulation est la **multiplicité algébrique** de la valeur propre λ de u. À ne pas confondre avec la **multiplicité géométrique** qui sera la dimension de l'espace propre.*

LEMooPJKEooQwuWMb

Lemme 12.96.
Si $\alpha \in \mathbb{C}$ n'est pas réel, alors les polynômes $X-\alpha$ et $X-\bar{\alpha}$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$.

Démonstration. Un polynôme diviseur commun de $X-\alpha$ et $X-\bar{\alpha}$ doit être de la forme $aX+b$ parce qu'un diviseur ne peut pas être de degré plus haut. Si nous voulons que le diviseur commun soit non inversible, il faut $a \neq 0$.

Dire que $aX+b$ divise $X-\alpha$ signifie qu'il existe $s \in \mathbb{C}$ tel que $(aX+b)s = X-\alpha$. Cela donne $s = 1/a$ et $b = -\alpha/s$. En substituant la première dans la seconde, nous trouvons $b = -\alpha a$.

En recommençant avec $X-\bar{\alpha}$, nous trouvons également la relation $b = -\bar{\alpha}a$. En égalisant,

$$-\alpha a = -\bar{\alpha}a. \tag{12.214}$$

En simplifiant, $\alpha = \bar{\alpha}$. Cela contredit l'hypothèse que α n'est pas réel. □

PROPooUMDQooVmfDYU

Proposition 12.97.
Un polynôme irréductible à coefficients réels est, soit de degré un, soit de degré 2 avec un discriminant négatif.

Démonstration. Soit un polynôme P à coefficients réels de degré plus grand que 1. Alors le théorème de d'Alembert-Gauss (théorème 12.92) implique l'existence d'une racine $\alpha \in \mathbb{C}$. Si α est un réel, P est réductible. Si α n'est pas réel, alors son conjugué complexe $\bar{\alpha}$ est également une racine. Par conséquent les polynômes $(X-\alpha)$ et $(X-\bar{\alpha})$ divisent P dans $\mathbb{C}[X]$..

Ces deux polynômes sont premiers entre eux par le lemme 12.96. Par conséquent le produit

$$X^2 - (\alpha+\bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha} \tag{12.215}$$

divise également P. Ce dernier est un polynôme à coefficients réels de degré 2. Donc tout polynôme de degré 3 ou plus est réductible. □

[46] Notez l'utilisation de la proposition 9.105(1).

PROPooLXGSooXmVcVG

Proposition 12.98.
Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme possède au moins une valeur propre.

Démonstration. Soit un endomorphisme u sur E. Le théorème 8.113 dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique χ_u. Or ce polynôme possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert 12.92. □

12.10 Trigonalisation

12.10.1 Trigonalisation : généralités

SUBSECooMCOGooEoQCsz

Définition 12.99 ([438]).
*Une matrice dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable*[47] *à une matrice triangulaire supérieure.*

PropKNVFooQflQsJ

Proposition 12.100 (Trigonalisation et polynôme caractéristique scindé)**.**
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Les points suivants sont équivalents.

ItemZKDMooOrTHkwi

(1) L'endomorphisme u est trigonalisable (auquel cas les valeurs propres sont sur la diagonale).

ItemZKDMooOrTHkwii

(2) Le polynôme caractéristique de u est scindé[48]*.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **(2)⇒(1)** Nous avons par hypothèse

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \tag{12.216}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de u. Le théorème de Cayley-Hamilton 8.116 dit que $\chi_u(u) = 0$, ce qui permet d'utiliser le théorème de décomposition des noyaux 8.90 :

$$E = \ker(X - \lambda_1)^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus \ker(X - \lambda_r)^{\alpha_r}. \tag{12.217}$$

Les espaces $F_{\lambda_i}(u) = \ker(u - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont les espaces caractéristiques de u, ce qui fait que $u - \lambda_i \mathbb{1}$ est nilpotent sur $F_{\lambda_i}(u)$. L'endomorphisme $u - \lambda_i \mathbb{1}$ est donc strictement trigonalisable supérieur sur son bloc[49]. Cela signifie que u est triangulaire supérieure avec les valeurs propres sur la diagonale.

(2) **(1)⇒(2)**
C'est immédiat parce que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de sa diagonale.

□

Remarque 12.101.
La méthode des pivots de Gauss[50] certes permet de trigonaliser n'importe quelle matrice, mais elle ne correspond pas à un changement de base. Autrement dit, les pivots de Gauss ne sont pas des similitudes.

C'est là qu'il faut bien avoir en tête la différence entre *équivalence* et *similarité*[51]. Lorsqu'on parle de changement de base, de matrice trigonalisable ou diagonalisable, nous parlons de similarité et non d'équivalence.

12.10.2 Trigonalisation : cas complexe

La proposition 12.100 dit déjà que tous les endomorphismes sont trigonalisables sur $\mathbb{C}$. Nous allons aller plus loin et montrer que la trigonalisation peut être effectuée à l'aide d'une matrice unitaire.

Une démonstration alternative passant par le polynôme caractéristique sera présentée dans la remarque 12.110 utilisant la proposition 12.100.

[47] Définition 8.198.
[48] Définition 6.39.
[49] Proposition 8.210.
[50] Le lemme 4.118.
[51] Définition 4.117.

LemSchurComplHAftTq

Lemme 12.102 (Lemme de Schur complexe, trigonalisation[439])**.**
Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$, il existe une matrice unitaire[52] *U telle que UAU^{-1} soit triangulaire supérieure*[53]*. La diagonale de la matrice triangulaire contient alors les valeurs propres de A.*

Démonstration. Étant donné que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos[54], nous pouvons toujours considérer un vecteur propre v_1 de A, de valeur propre λ_1. Nous pouvons utiliser un procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée $\{v_1, u_2, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, et la matrice (unitaire)

$$Q = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}. \tag{12.218}$$

Nous avons $Q^{-1}AQe_1 = Q^{-1}Av_1 = \lambda Q^{-1}v = \lambda_1 e_1$, par conséquent la matrice $Q^{-1}AQ$ est de la forme

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \tag{12.219}$$

où $*$ représente une ligne quelconque et A_1 est une matrice de $\mathbb{M}(n-1,\mathbb{C})$. Nous pouvons donc répéter le processus sur A_1 et obtenir une matrice triangulaire supérieure (nous utilisons le fait qu'un produit de matrices orthogonales est une matrice orthogonale[55]). □

DefWQNooKEeJzv

Définition 12.103.
*Un endomorphisme est **normal** si il commute avec son conjugué hermitien*[56]*.*

Les opérateurs normaux comprennent évidemment les opérateurs hermitiens, mais également les anti-hermitiens, et ça c'est bien parce que c'est le cas de l'algèbre associée à SU(2).

ThogammwA

Théorème 12.104 (Théorème spectral pour les matrices normales[346, 440, 441])**.**
Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ une matrice de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non spécialement distinctes). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

ItemJZhFPSi
(1) A est normale[57]*,*

ItemJZhFPSii
(2) A se diagonalise par une matrice unitaire,

ITEMooIIQTooQORrXP
(3) $\sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2$,

ITEMooJRKSooNfsQJb
(4) il existe une base orthonormale de vecteurs propres de A.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) ⇒ (2)** Soit Q la matrice unitaire donnée par la décomposition de Schur (lemme 12.102) : $A = QTQ^{-1}$. Étant donné que A est normale nous avons

$$QTT^*Q^{-1} = QT^*TQ^{-1}, \tag{12.220}$$

ce qui montre que T est également normale. Or une matrice triangulaire supérieure normale est diagonale. En effet nous avons $T_{ij} = 0$ lorsque $i > j$ et

$$(TT^*)_{ii} = (T^*T)_{ii} = \sum_{k=1}^n |T_{ki}|^2 = \sum_{k=1}^n |T_{ik}|^2. \tag{12.221}$$

Écrivons cela pour $i = 1$ en tenant compte de $|T_{k1}|^2 = 0$ pour $k = 2, \dots, n$,

$$|T_{11}|^2 = |T_{11}|^2 + |T_{12}|^2 + \cdots + |T_{1n}|^2, \tag{12.222}$$

ce qui implique que T_{11} est le seul non nul parmi les T_{1k}. En continuant de la sorte avec $i = 2, \dots, n$ nous trouvons que T est diagonale.

[52] Définition 8.174.
[53] « triangulaire supérieure » ne signifie pas « strictement triangulaire supérieure ». Ici, il est possible que la diagonale soit non nulle ; non seulement possible, mais même très probable en pratique.
[54] Algébriquement clos, définition 6.74. Le fait que $\mathbb{C}$ le soit est le théorème de d'Alembert 12.92.
[55] Proposition 8.44(1).
[56] Définition 8.172.
[57] Définition 12.103.

(2) **(2) ⇒ (1)** Si A se diagonalise par une matrice unitaire, $UAU^* = D$, nous avons

$$DD^* = UAA^*U^* \tag{12.223}$$

et

$$D^*D = UA^*AU^*, \tag{12.224}$$

qui ce prouve que A est normale.

(3) **(2) ⇒ (3)** Il existe une matrice unitaire U et une diagonale D telles que $D = U^\dagger AU$. La proposition 8.214 nous dit que la diagonale de D contient les valeurs propres de A, c'est-à-dire $D_{kl} = \delta_{kl}\lambda_k$.

Nous avons $D^\dagger = U^\dagger A^\dagger U$, et donc

$$D^\dagger D = U^\dagger A^\dagger UU^\dagger AU = U^\dagger A^\dagger AU, \tag{12.225}$$

c'est-à-dire que $D^\dagger D$ est semblable à $A^\dagger A$. La proposition 8.202 implique que leurs traces sont donc égales. Petit calcul en utilisant le lemme 8.173 ($A^\dagger_{ij} = A^*_{ji}$) :

$$\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \sum_k (A^\dagger A)_{kk} = \sum_{kl} A^*_{lk}A_{lk} = \sum_{kl} |A_{lk}|^2. \tag{12.226}$$ EQooAGPLooYXVqGy

Deuxième calcul :

$$\mathrm{Tr}(D^\dagger D) = \sum_{kl} D^\dagger_{kl}D_{lk} = \sum_{kl} \delta_{lk}\lambda^*_k\delta_{lk}\lambda_k = \sum_k |\lambda_k|^2. \tag{12.227}$$ EQooTUWNooIigwmx

Nous avons le résultat en égalisant (12.227) avec (12.226).

(4) **(3) ⇒ (2)** Le lemme de Schur complexe 12.102 nous indique qu'il existe une matrice unitaire U et une matrice triangulaire supérieure T telles que $T = UAU^\dagger$ et telle que $T_{ii} = \lambda_i$. Le lemme 8.204 nous indique que $\sum_{ij}|T_{ij}|^2 = \sum_{ij}|A_{ij}|^2$. Donc

$$\sum_{ij}|A_{ij}|^2 = \sum_{ij}|T_{ij}|^2 = \sum_j |\lambda_j|^2 + \sum_{j>i}|T_{ij}|^2. \tag{12.228}$$

Mais l'hypothèse nous dit que $\sum_{ij}|A_{ij}|^2 = \sum_j|\lambda_j|^2$. Nous en déduisons que $\sum_{j>i}|T_{ij}|^2 = 0$, et donc que T est diagonale.

(5) **(2)⇒ (4)** Soit une base $\{e_i\}$ de $\mathbb{C}^n$. Soit $A = UDU^\dagger$. Il suffit de poser $f_i = Ue_i$ pour avoir

$$Af_i = UDU^\dagger Ue_i = UDe_i = \lambda_i Ue_i = \lambda_i f_i. \tag{12.229}$$

Donc f_i est un vecteur propre de A. Le fait que $\{f_i\}$ soit une base de $\mathbb{C}^n$ est dû au fait que U est inversible.

(6) **(4) ⇒ (2)** Soit la base canonique $\{e_i\}$ de $\mathbb{C}^n$. Si $\{f_i\}$ est une base de vecteurs propres normalisés de A, alors il existe une matrice unitaire U telle que $f_i = Ue_i$. Alors la matrice $UAU^\dagger$ est diagonale.

□

Tant que nous en sommes à parler de spectre de matrices hermitiennes…Soit une matrice inversible $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. La matrice A^*A est hermitienne[58] et le théorème 10.32 nous assure que ses valeurs propres sont réelles. Par la remarque 10.33, ses valeurs propres sont même positives. LEMooHUGEooVYhZdZ

Lemme 12.105 ([442]).
Si A est une matrice carrée et inversible,

$$\mathrm{Spec}(A^*A) = \mathrm{Spec}(AA^*) \tag{12.230}$$

Démonstration. Nous allons montrer l'égalité des polynômes caractéristiques. D'abord une simple multiplication montre que

$$(A^*A - \lambda\mathbb{1})A^{-1} = A^{-1}(AA^* - \lambda\mathbb{1}). \tag{12.231}$$

Nous prenons le déterminant de cette égalité en utilisant les propriétés 8.15(1) et (3) :

$$\det(A^*A - \lambda\mathbb{1})\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})\det(AA^* - \lambda\mathbb{1}). \tag{12.232}$$

En simplifiant par $\det(A^{-1})$ (qui est non nul parce que A est inversible) nous obtenons l'égalité des polynômes caractéristiques et donc l'égalité des spectres. □

[58] Définition 8.174.

En particulier les matrices hermitiennes, anti-hermitiennes et unitaires sont trigonalisables par une matrice unitaire, qui peut être choisie de déterminant 1.

LEMooRCFGooPPXiKi

Lemme 12.106.
Soient $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ et une matrice unitaire U telle que $A = UTU^{-1}$ où T est triangulaire.

(1) En ce qui concerne les polynômes caractéristiques, $\chi_A = \chi_T$.

(2) Pour les spectres, $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(T)$.

(3) Les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de T.

Démonstration. Puisque U commute évidemment avec $\mathbb{1}$, nous avons

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \det(UTU^{-1} - \lambda\mathbb{1}) = \det\big(U(T - \lambda\mathbb{1})U^{-1}\big). \tag{12.233}$$

À ce niveau nous utilisons le fait que le déterminant soit multiplicatif 8.15 pour conclure :

$$\chi_A(\lambda) = \det\big(U(T - \lambda\mathbb{1})U^{-1}\big) = \det(U)\det(T - \lambda\mathbb{1})\det(U^{-1}) = \det(T - \lambda\mathbb{1}) = \chi_T(\lambda). \tag{12.234}$$

Pour les spectres, l'égalité des polynômes caractéristiques implique l'égalité des spectres parce que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique par le théorème 8.113.

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les valeurs sur la diagonale. □

LemSLGPooIghEPI

Lemme 12.107 (Trigonalisation simultanée)**.**
Une famille de matrices de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ commutant deux à deux est simultanément trigonalisable.

Démonstration. Commençons par enfoncer une porte ouverte par la proposition 12.100 : toutes les matrices de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ sont trigonalisables parce que tous les polynômes sont scindés.

Nous effectuons la démonstration par récurrence sur la dimension. Si $n = 1$ alors toutes les matrices sont triangulaires et nous ne nous posons pas de questions. Nous supposons donc $n > 1$.

Soit la famille $(A_i)_{i\in I}$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et A_0 un de ses éléments. Nous nommons $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A_0. Le théorème de décomposition primaire 8.261 nous donne la somme directe d'espaces caractéristiques[59]

$$E = F_{\lambda_1}(A_0) \oplus \dots \oplus F_{\lambda_r}(A_0). \tag{12.235}$$

Nous pouvons supposer que cette somme n'est pas réduite à un seul terme. En effet si tel était le cas, A_0 serait un multiple de l'identité parce que A_0 n'aurait qu'une seule valeur propre et les sommes dans la décomposition de Dunford 8.262(3) se réduisent à un seul terme (et $p_i = \mathrm{Id}$). En particulier les dimensions des espaces $F_\lambda(A_0)$ sont strictement plus petites que n.

Puisque tous les A_i commutent avec A_0, les espaces $F_\lambda(A_0)$ sont stables par les A_i et nous pouvons trigonaliser les A_i simultanément sur chacun des $F_\lambda(A_0)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence. □

ThoUWQBooCvutTO

Théorème 12.108 (Lie-Kolchin[433, 443])**.**
Tout sous-groupe connexe et résoluble[60] de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ est conjugué à un groupe de matrices triangulaires.

Démonstration. Soit G un sous-groupe connexe et résoluble de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Nous faisons une récurrence sur n.

(1) **Si sous-espace non trivial stable par G** Nous commençons par voir ce qu'il se passe si il existe un sous-espace vectoriel non trivial V de $\mathbb{C}^n$ stabilisé par G. Pour cela nous considérons une base de $\mathbb{C}^n$ dont les premiers éléments forment une base de V (base incomplète, théorème 4.14). Les éléments de G s'écrivent, dans cette base,

$$\begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}. \tag{12.236}$$

EqGOKTooEaGACG

Les matrices g_1 et g_2 sont carrées. Nous considérons alors l'application ψ définie par

$$\begin{aligned} \psi\colon G &\to \mathrm{GL}(V) \\ g &\mapsto g_1. \end{aligned} \tag{12.237}$$

[59] Définition 8.257.
[60] Définition 2.23.

Cela est un morphisme de groupes parce que

$$\begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & * \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1h_1 & * \\ 0 & g_2h_2 \end{pmatrix}, \tag{12.238}$$

de telle sorte que $\psi(gh) = \psi(g)\psi(h)$.

Le groupe $\psi(G)$ est connexe et résoluble. En effet $\psi(G)$ est connexe en tant qu'image d'un connexe par une application continue (lemme 7.273). Et il est résoluble en tant qu'image d'un groupe résoluble par un morphisme par la proposition 2.26.

Nous avons prouvé que $\psi(G)$ est un sous-groupe résoluble et connexe de $\mathrm{GL}(V)$. Vu que V est de dimension strictement plus petite que $\mathbb{C}^n$, nous utilisons l'hypothèse de récurrence et nous déduisons que $\psi(G)$ est conjugué à un groupe de matrices triangulaire, c'est-à-dire qu'il existe une base de V dans laquelle toutes les matrices g_1 (avec $g \in G$) sont triangulaires supérieures.

On fait de même avec l'application $g \mapsto g_2$, ce qui donne une base du supplémentaire de V dans laquelle les matrices g_2 sont triangulaires supérieures.

En couplant ces deux bases, nous obtenons une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle toutes les matrices (12.236) (c'est-à-dire toutes les matrices de G) sont triangulaires supérieures.

(2) **Sinon** Nous supposons à présent que $\mathbb{C}^n$ n'a pas de sous-espaces non triviaux stables sous G. Nous posons $m = \min\{k \text{ tel que } D^k(G) = \{e\}\}$, qui existe parce que G et résoluble et que sa suite dérivée termine sur e (proposition 2.25).

(3) **Si $m = 1$** Si $m = 1$ alors G est abélien et il existe une base de G dans laquelle toutes les matrices de G sont triangulaires (lemme 12.107). Le premier vecteur d'une telle base serait stable par G, mais comme nous avons supposé qu'il n'y avait pas de sous-espaces non triviaux stabilisés par G, ce vecteur tout seul forme un sous-espace trivial, c'est-à-dire que $n = 1$. Dans ce cas, le théorème est démontré.

(4) **Si $m > 1$** Nous devons maintenant traiter le cas où $m > 1$. Nous posons $H = D^{m-1}(G)$; cela est un sous-groupe normal et abélien de G. Encore une fois le résultat de trigonalisation simultanée 12.107 donne une base dans laquelle tous les éléments de H sont triangulaires. En particulier le premier élément de cette base est un vecteur propre commun à toutes les matrices de H.

Soit V le sous-espace engendré par tous les vecteurs propres communs de H. Nous venons de voir que V n'est pas vide. Nous allons montrer que V est stable par G. Soient $h \in H$, $v \in V$ et $g \in G$:

$$h\big(g(v)\big) = g\underbrace{g^{-1}hg}_{\in H}(v) = g(\lambda v) = \lambda g(v) \tag{12.239}$$

parce que v est vecteur propre de $g^{-1}hg$. Ce que le calcul (12.239) montre est que $g(v)$ est vecteur propre de h pour la valeur propre λ. Donc $g(v) \in V$ et V est stabilisé par G. Mais comme il n'existe pas d'espaces non triviaux stabilisés par G, nous en déduisons que $V = \mathbb{C}^n$. Donc tous les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ sont vecteurs propres communs de H. Autrement dit on a une base de diagonalisation simultanée de H.

(5) **H est dans le centre de G**

Montrons à présent que H est dans le centre de G, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$ et $h \in H$ il faut $ghg^{-1} = h$. D'abord ghg^{-1} est une matrice diagonale (parce qu'elle est dans H) ayant les mêmes valeurs propres que h. En effet si λ est valeur propre de ghg^{-1} pour le vecteur propre v, alors

$$(ghg^{-1})(v) = \lambda v \tag{12.240a}$$
$$h\big(g^{-1}v\big) = \lambda\big(g^{-1}v\big), \tag{12.240b}$$

c'est-à-dire que λ est également valeur propre de h, pour le vecteur propre $g^{-1}v$. Mais comme h a un nombre fini de valeurs propres, il n'y a qu'un nombre fini de matrices diagonales ayant les mêmes valeurs propres que h. L'ensemble $\mathbf{Ad}(G)h$ est donc un ensemble fini. D'autre part, l'application $g \mapsto g^{-1}hg$ est continue, et G est connexe, donc l'ensemble $\mathbf{Ad}(G)h$ est connexe. Un ensemble fini et connexe dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est nécessairement réduit à un seul point. Cela prouve que $ghg^{-1} = h$ pour tout $g \in G$ et $h \in H$.

(6) **Espaces propres stables pour tout G**

Soit $h \in H$ et W un espace propre de h (ça existe non vide, parce que H est triangularisé, voir plus haut). Alors nous allons prouver que W est stable pour tous les éléments de G. En effet si $w \in W$ avec $h(w) = \lambda w$ alors en permutant g et h,

$$hg(w) = g(hw) = \lambda g(w), \tag{12.241}$$

donc $g(w)$ est aussi vecteur propre de h pour la valeurs propre λ, c'est-à-dire que $g(w) \in W$. Comme nous supposons que $\mathbb{C}^n$ n'a pas d'espaces invariants non triviaux, nous devons conclure que $W = \mathbb{C}^n$, c'est-à-dire que H est composé d'homothéties. C'est-à-dire que pour tout $h \in H$ nous avons $h = \lambda_h \mathbb{1}$.

(7) **Contradiction sur la minimalité de m**

Les éléments d'un groupe dérivé sont de déterminant 1 parce que $\det(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}) = 1$. Par conséquent pour tout h, le nombre λ_h est une racine n^{e} de l'unité. Vu qu'il n'y a qu'une quantité finie de racines n^{e} de l'unité, le groupe H est fini et connexe et donc une fois de plus, réduit à un élément, c'est-à-dire $H = \{e\}$. Cela contredit la minimalité de m et donc produit une contradiction. Nous devons donc avoir $m = 1$.

(8) **Conclusion** Nous avons vu que si $\mathbb{C}^n$ avait un sous-espace non trivial fixé par G alors le théorème était démontré. Par ailleurs si $\mathbb{C}^n$ n'a pas un tel sous-espace, soit $m = 1$ (et alors le théorème est également prouvé), soit $m > 1$ et alors on a une contradiction.

Bref, le théorème est prouvé sous peine de contradiction.

□

Remarque 12.109.
Le lemme mentionne le fait que les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de T. Mais attention : ceci ne dit rien au niveau des multiplicités géométriques. Un nombre peut être cinq fois sur la diagonale de T alors que l'espace propre correspondant pour A n'est que de dimension 1. Exemple : la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12.242}$$

a deux 1 sur la diagonale. Le nombre 1 est bien une valeur propre de A, mais le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{12.243}$$

donne $y = 0$ et donc un espace propre de dimension seulement 1.

RemXFZTooXkGzQg

Remarque 12.110.
Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos (comme $\mathbb{C}$ par exemple), alors tous les polynômes sont scindés et toutes les matrices sont trigonalisables[61]. Un exemple un peu simple de cela est la matrice

$$u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.244}$$

Le polynôme caractéristique est $\chi_u(X) = X^2 + 1$ et les valeurs propres sont $\pm i$. Il est vite vu que dans la base

$$\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\} \tag{12.245}$$

de $\mathbb{C}^2$, la matrice u se note $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

RemREOSooGEDJWX

Remarque 12.111.
Cela nous donne une autre façon de prouver qu'une matrice nilpotente de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ ou $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ est trigonalisable[444]. D'abord dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$, toutes les matrices sont trigonalisables[62], et les valeurs propres arrivent sur la diagonale. Mais comme les valeurs propres d'une matrice nilpotente valent zéro, elle est triangulaire stricte. Par ailleurs, son polynôme caractéristique est alors X^n.

Ensuite si $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ nous pouvons voir u comme une matrice dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ et y calculer son polynôme caractéristique qui sera tout de même X^n. Ce polynôme étant scindé, la proposition 12.100 nous assure que u est trigonalisable. Une fois de plus, les valeurs propres étant sur la diagonale, elle est triangulaire supérieure stricte.

[61] La proposition 12.100 montre cela, et le lemme de Schur complexe 12.102 va un peu plus loin, et précise que la trigonalisation peut être obtenue par une matrice unitaire.
[62] Parce que le polynôme caractéristique est scindé, voir la proposition 12.100.

CorUNZooAZULXT

Corolaire 12.112.
Le polynôme caractéristique[63] *sur* $\mathbb{C}$ *d'une matrice s'écrit sous la forme*

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i} \tag{12.246}$$

où les λ_i *sont les valeurs propres distinctes de* A *et* m_i *sont les multiplicités correspondantes.*

Démonstration. Le lemme 12.102 nous donne l'existence d'une base de trigonalisation ; dans cette base les valeurs propres de A sont sur la diagonale et nous avons

$$\chi_A(X) = \det(A - X\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} X-\lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & X-\lambda_r \end{pmatrix}, \tag{12.247}$$

qui vaut bien le produit annoncé. □

CORooTPDHooXazTuZ

Corolaire 12.113.
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *alors*

$$\mathrm{Spec}(A^k) = \{\lambda^k \text{ tel que } \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}. \tag{12.248}$$

Démonstration. Par le lemme 12.102 nous avons une matrice unitaire U et une triangulaire T telles que $A = UTU^{-1}$. En passant à la puissance k nous avons aussi

$$A^k = UT^kU^{-1}. \tag{12.249}$$

Donc le spectre de A^k est celui de T^k (lemme 12.106 et le fait qu'une puissance d'une matrice triangulaire est encore triangulaire). Or les éléments diagonaux de T^k sont les puissances k^{e} des éléments diagonaux de T, qui sont les valeurs propres de A. □

Pour le cas complexe, c'est le lemme 10.32 et le théorème 12.104.

12.11 Matrices, spectre et norme

Le lien entre la norme opérateur d'une matrice et son spectre sera entre autres utilisé pour étudier le conditionnement de problèmes numériques. Voir la définition 34.107 et par exemple son lien avec la résolution numérique de systèmes linéaires dans la proposition 34.112.

PROPooKLFKooSVnDzr

Proposition 12.114 ([376])**.**
Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ *de rayon spectral* $\rho(A)$*. Soit une norme* $\|.\|$ *sur* $\mathbb{C}^n$ *et la norme opérateur correspondante. Alors*

$$\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k} \tag{12.250}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$*.*

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ un couple vecteur-valeur propre. Nous avons $\|Av\| = |\lambda|\|v\|$ et aussi

$$|\lambda|^k\|v\| = \|\lambda^k v\| = \|A^k v\| \leqslant \|A^k\|\|v\|. \tag{12.251}$$

La dernière inégalité est due au fait que nous avons choisi sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ la norme subordonnée à celle choisie sur $\mathbb{C}^n$, via le lemme 10.81. Nous simplifions par $\|v\|$ et obtenons $|\lambda| \leqslant \|A^k\|^{1/k}$. Étant donné que $\rho(A)$ est la maximum de tous les λ possibles, la majoration passe au maximum :

$$\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k}. \tag{12.252}$$

□

[63] Définition 8.109.

PROPooJGNFooEwtNmJ

Proposition 12.115.
Soient deux espaces vectoriels normés E et V. Soient des applications continues $f, g\colon E \to \mathrm{End}(V)$. Alors l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon E &\to \mathrm{End}(V)\\ x &\mapsto f(x)\circ g(x)\end{aligned} \tag{12.253}$$

est continue.

Démonstration. Soit une suite $x_k \xrightarrow{E} x$. Nous devons montrer que $\psi(x_k) \xrightarrow{\mathrm{End}(V)} \psi(x)$. Pour cela nous utilisons le lemme 10.84 qui indique que la norme opérateur est une norme d'algèbre. Nous avons :

$$\begin{aligned}\|\psi(x_k)-\psi(x)\| &= \|f(x_k)\circ g(x_k)-f(x)\circ g(x)\| && \text{(12.254a)}\\ &\leqslant \|f(x_k)\circ g(x_k)-f(x_k)\circ g(x)\|+\|f(x_k)\circ g(x)-f(x)\circ g(x)\| && \text{(12.254b)}\\ &= \|f(x_k)\circ\big(g(x_k)-g(x)\big)\|+\|\big(f(x_k)-f(x)\big)\circ g(x)\| && \text{(12.254c)}\\ &\leqslant \|f(x_k)\|\|g(x_k)-g(x)\|+\|f(x_k)-f(x)\|\|g(x)\|. && \text{(12.254d)}\end{aligned}$$

Pour $k\to\infty$ nous avons $\|f(x_k)\|\to\|f(x)\|$, $\|f(x_k)-f(x)\|\to 0$ (parce que f est continue) et similaire avec g. Donc le tout tend vers zéro. □

12.11.1 Rayon spectral

La chose impressionnante dans la proposition suivante est que $\rho(A)$ est défini indépendamment du choix de la norme sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ ou sur $\mathbb{K}$. Lorsque nous écrivons $\|A\|$, nous disons implicitement qu'une norme a été choisie sur $\mathbb{K}$, et que nous avons pris la norme subordonnée sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$.

PROPooWZJBooTPLSZp

Proposition 12.116 ([445])**.**
Soit A une matrice de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ ou $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$. Alors

$$\rho(A)\leqslant\|A\|. \tag{12.255}$$

Démonstration. Nous devons séparer les cas, suivant que le corps de base soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(1) **Pour $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$** Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda|$ soit la plus grande. Nous avons donc $\rho(A)=|\lambda|$. Soit un vecteur propre $u\in\mathbb{C}^n$ pour la valeur propre λ. En prenant la norme sur l'égalité $Au=\lambda u$, et en utilisant le lemme 10.81,

$$|\lambda|\|u\|=\|Au\|\leqslant\|A\|\|u\|. \tag{12.256}$$

Donc $|\lambda|\leqslant\|A\|$ et $\rho(A)\leqslant\|A\|$.

(2) **Pour $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$**
L'endroit qui coince dans le raisonnement effectué pour $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ est que, certes $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ possède une plus grande valeur propre en module et qu'un vecteur propre lui est associé. Mais ce vecteur propre est, à priori, dans $\mathbb{C}^n$, et non dans $\mathbb{R}^n$. Nous pouvons donc écrire $Au=\lambda u$, mais pas $\|Au\|=|\lambda|\|u\|$ parce que nous ne savons pas quelle norme prendre sur $\mathbb{C}^n$.

Il n'est pas certain que nous ayons une norme sur $\mathbb{C}^n$ qui se réduit sur $\mathbb{R}^n$ à celle choisie implicitement dans l'énoncé. Nous allons donc ruser un peu.

Soit une norme N sur $\mathbb{C}^n$[64]. Nous nommons également N la norme subordonnée sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ et la norme restreinte sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Vu que N est une norme sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et que ce dernier est de dimension finie, le théorème 10.61 nous indique que N est équivalente à $\|.\|$. Il existe donc $C>0$ tel que

EQooBNWMooNgnMxC
$$N(B)\leqslant C\|B\| \tag{12.257}$$

pour tout $B\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Nous avons maintenant

$$\rho(A)^m\leqslant N(A^m)\leqslant C\|A^m\|\leqslant C\|A\|^m. \tag{12.258}$$

Justifications

- Par la proposition 12.114.

[64] Il y en a plein, par exemple celle du produit scalaire $\langle x,y\rangle=\sum_k x_k\bar{y}_k$.

- Parce que $A^m \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et la relation (12.257).
- Par itération du lemme 10.84.

Nous avons donc $\rho(A) \leqslant C^{1/m}\|A\|$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. En prenant $m \to \infty$ et en tenant compte de $C^{1/m} \to 1$ nous trouvons $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

□
LEMooGBLJooCPvxNl

Lemme 12.117 ([445]).
Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe une norme algébrique sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ telle que

$$N(A) \leqslant \rho(A) + \epsilon. \tag{12.259}$$

Démonstration. Soit par le lemme 12.102 une matrice inversible U telle que $T = UAU^{-1}$ soit triangulaire supérieure, avec les valeurs propres sur la diagonale. Notons que même si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, les matrices U et T sont, à priori, complexes.

Soit $s \in \mathbb{R}$ ainsi que les matrices

$$D_s = \operatorname{diag}(1, s^{-1}, s^{-2}, \dots, s^{1-n}) \tag{12.260}$$

et $T_s = D_s T D_s^{-1}$. Nous fixerons un choix de s plus tard.

La norme que nous considérons est :

$$N(B) = \|(D_sU)B(D_sU)^{-1}\|_\infty \tag{12.261}$$

où $\|.\|_\infty$ est la norme sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ subordonnée à la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ dont nous avons déjà parlé dans l'exemple 10.76. Cela est bien une norme parce que

- Nous avons $\|B\|_\infty = 0$ si et seulement si $B = 0$, et comme (D_sU) est inversible, nous avons $(D_sU)B(D_sU)^{-1} = 0$ si et seulement si $B = 0$.
- $N(\lambda B) = |\lambda| N(B)$.
- Pour l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} N(B+C) &= \|(D_sU)B(D_sU)^{-1} + (D_sU)C(D_sU)^{-1}\|_\infty && \text{(12.262a)}\\ &\leqslant \|(D_sU)B(D_sU)^{-1}\|_\infty + \|(D_sU)C(D_sU)^{-1}\|_\infty && \text{(12.262b)}\\ &= N(B) + N(C). && \text{(12.262c)} \end{aligned}$$

En ce qui concerne la matrice A elle-même, nous avons

$$N(A) = \|(D_sU)A(D_sU)^{-1}\|_\infty = \|T_s\|_\infty. \tag{12.263}$$

C'est le moment de se demander comment se présente la matrice T_s. En tenant compte du fait que $(D_s)_{ik} = \delta_{ik}s^{1-i}$ nous avons

$$(T_s)_{ij} = \sum_{kl} (D_s)_{ik} T_{kl} (D_s^{-1})_{lj} = T_{ij} s^{j-i}. \tag{12.264}$$

La matrice T est encore triangulaire supérieure avec les valeurs propres de A sur la diagonale. Les éléments au-dessus de la diagonale sont tous multipliés par au moins s. Il est donc possible de choisir s suffisamment petit pour avoir[65]

$$\sum_{j=i+1}^{n} |(T_s)_{ij}| < \epsilon \tag{12.265}$$
EQooSIEIooTWAXQD

Avec ce choix, la formule 10.213 donne

$$N(T_s) \leqslant \max_i \sum_k |(T_s)_{ik}| \leqslant \epsilon + \rho(A). \tag{12.266}$$

En effet le ϵ vient de la somme sur toute la ligne sauf la diagonale (c'est-à-dire la partie $k \neq i$) et du choix (12.265) pour s. Le $\rho(A)$ provient du dernier terme de la somme (le terme sur la diagonale) qui est une valeur propre de A, donc majorable par $\rho(A)$.

[65] Il me semble qu'il manque un module dans [445].

Nous devons encore prouver que N est une norme algébrique. Pour cela nous allons montrer qu'elle est subordonnée à la norme

$$\begin{aligned} n\colon \mathbb{K}^n &\to \mathbb{R}^+ \\ v &\mapsto \|(UD_s)v\|_\infty. \end{aligned} \tag{12.267}$$

Cela sera suffisant pour avoir une norme algébrique par le lemme 10.84. La norme n sur $\mathbb{K}^n$ produit la norme suivante sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$:

$$n(B) = \sup_{v\neq 0} \frac{n(B)}{n(v)} = \sup_{v\neq 0} \frac{\|(UD_s)Bv\|_\infty}{\|UD_sv\|_\infty}. \tag{12.268}$$

Puisque UD_s est inversible, nous pouvons effectuer le changement de variables $v \mapsto (UD_s)^{-1}v$ pour écrire

$$n(B) = \sup_{v\neq 0} \frac{\|(UD_s)B(UD_s)^{-1}v\|_\infty}{\|(UD_s)(UD_s)^{-1}v\|_\infty} = \sup_{v\neq 0} \frac{\|(UD_s)B(UD_s)^{-1}v\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \|(UD_s)B(UD_s)^{-1}\|_\infty = N(B). \tag{12.269}$$

□

PROPooYPLGooWKLbPA

Proposition 12.118.
Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ alors $\rho(A)^m = \rho(A^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. La matrice A peut être vue dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ et nous pouvons lui appliquer le corolaire 12.113 :

$$\mathrm{Spec}(A^k) = \{\lambda^k \text{ tel que } \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}. \tag{12.270}$$

EQooJJIYooDBacjn

À noter qu'il n'y a pas de magie : le spectre de la matrice réelle A est déjà défini en voyant A comme matrice complexe. Le spectre dont il est question dans (12.270) est bien celui dont on parle dans la définition du rayon spectral.

Nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} \rho(A^k) &= \max\{|\lambda| \text{ tel que } \lambda \in \mathrm{Spec}(A^k)\} && \text{(12.271a)}\\ &= \max\{|\lambda^k| \text{ tel que } \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\} && \text{(12.271b)}\\ &= \max\{|\lambda|^k \text{ tel que } \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\} && \text{(12.271c)}\\ &= \rho(A)^k. && \text{(12.271d)} \end{aligned}$$

□

PROPooXEQLooHvzVVm

Proposition 12.119.
Soient des espaces vectoriels normés V de dimension n et W de dimension m sur $\mathbb{K}$ (corps normé). Nous considérons une base $\{e_s\}_{s=1,\dots,n}$ de V et $\{f_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,m}$ de W.

Alors l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{M}(n\times m,\mathbb{K}) &\to \mathcal{L}(V,W) \\ \psi(A)v &= \sum_{s\alpha} A_{s\alpha}v_sf_\alpha \end{aligned} \tag{12.272}$$

est un isomorphisme d'espaces topologiques.

Pour rappel, la topologie sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ est donnée par la définition 9.34.

Démonstration. Nous savons déjà que ψ est une bijection. De plus, elle est linéaire et donc continue par la proposition 10.273. En ce qui concerne son inverse, c'est également une application linéaire (lemme 4.37) ; elle est alors également continue. □

PROPooDRHMooYzXbkl

Proposition 12.120.
Soit un espace vectoriel normé V de dimension finie. Soit une suite d'opérateurs $T_n \in \mathrm{End}(V)$. Si $\{e_i\}$ est une base de V et si $T_n(e_i) \xrightarrow{V} e_i$ pour tout i, alors $T_n \xrightarrow{\mathrm{End}(V)} \mathrm{Id}$.

Démonstration. Nous utilisons l'application $\psi\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{K}) \to \mathrm{End}(V)$ définie en 4.72. Elle nous permet d'écrire

$$T_n(x) = \sum_{kl} \psi^{-1}(T_i)_{kl}x_le_k, \tag{12.273}$$

que nous allons particulariser à $x = e_j$. Nous avons

$$e_j = \lim_{n\to\infty} T_n(e_j) \tag{12.274a}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{kl} \psi^{-1}(T_n)_{kl}\delta_{jl}e_k \tag{12.274b}$$
$$= \sum_k \big(\lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(T_n)_{kj}\big)e_k \tag{12.274c}$$

En identifiant les coefficients de e_j, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(T_n)_{kj} = \delta_{kj}. \tag{12.275}$$

Pour chaque k et l, à gauche nous avons une limite dans $\mathbb{K}$. Vue la topologie sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$[66], nous pouvons écrire cela comme une limite dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$:

$$\lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(T_n) = \mathbb{1}. \tag{12.276}$$

Nous savons que ψ^{-1} est continue (proposition 12.119) de telle sorte que nous pouvons la commuter avec la limite :

$$\mathbb{1} = \lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(T_n) = \psi^{-1}\big(\lim_{n\to\infty} T_n\big). \tag{12.277}$$

Appliquant maintenant ψ des deux côtés, $\psi(\mathbb{1}) = \mathrm{Id}$ et

$$\mathrm{Id} = \lim_{n\to\infty} T_n. \tag{12.278}$$

□

Le point important de la définition 10.312 est la continuité. En dimension infinie, la continuité n'est par exemple pas équivalente à l'inversibilité (penser à $e_k \mapsto ke_k$).

Si V est un espace vectoriel normé, nous avons déjà défini son dual topologique V' comme étant l'ensemble des applications linéaires continues $V \to \mathbb{C}$ ou $V \to \mathbb{R}$ selon le corps de base de V. C'est la définition 4.135.

Proposition 12.121.
Soient un espace vectoriel normé V et un élément $v \in V$ vérifiant $\|v\| = 1$. Il existe une forme $\varphi \in V'$ telle que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(v) = 1$.

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème de la base incomplète 4.26. Pour cela nous considérons $I = V$ et la partie clairement génératrice $G = \{e_i = i\}_{i\in I}$ (si vous avez bien suivi, $G = V$ en fait ; rien de bien profond). Nous considérons ensuite $I_0 = \{v\}$. Le théorème de la base incomplète nous donne l'existence de I_1 tel que $I_0 \subset I_I \subset I$ et tel que $B = \{e_i\}_{i\in I_1}$ est une base.

Tout cela pour dire que $B = \{e_i\}_{i\in I_1}$ est une base contenant v. Nous allons aussi éventuellement redéfinir la norme de e_i pour avoir $\|e_i\| = 1$. Cette renormalisation n'affecte pas le fait que $v \in B$.

Nous passons maintenant à la définition de $\varphi\colon V \to \mathbb{K}$. Pour $x \in V$ nous commençons par écrire

$$x = \sum_{j\in J} x_j e_j \tag{12.279}$$

et nous posons

$$\varphi(x) = \begin{cases} x_v & \text{si } v \in J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12.280}$$

Cette définition a un sens par la partie unicité de la proposition 4.7 de décomposition d'un élément dans une base.

Nous devons calculer la norme de φ. Par la proposition 10.70 nous avons

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|. \tag{12.281}$$ EQooEFLLooOWPSev

Avec $x = v$ nous avons $\varphi(x) = 1$ et donc $\|\varphi\| \geqslant 1$.

Nous devons encore montrer que $\|\varphi\| \leqslant 1$. Un élément $x \in V$ s'écrit toujours sous la forme

$$x = \sum_{i\in J} x_j e_j \tag{12.282}$$

[66] Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes (théorème 10.61). Sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, nous avons convenu dans la définition 9.34 de considérer la norme maximum.

pour un certain J fini dans I_1 et pour certains $x_j \in \mathbb{K}$. Pour un tel x nous avons $\varphi(x) = x_v$. Si $|\varphi(x)| \geqslant 1$, alors $|x_v| \geqslant 1$, mais alors

$$\|x\| \leqslant \sum_{j\in J} |x_j|\|e_j\| = \sum_{j\in J} |x_j| \geqslant |x_v| > 1, \tag{12.283}$$

ce qui fait que ce x ne participe pas au supremum (12.281).

Notons que φ est continue (et donc bien dans V') parce qu'elle est bornée (proposition 10.85). □

12.11.2 Normes de matrices et d'applications linéaires

THOooNDQSooOUWQrK

Théorème 12.122 (Norme matricielle et rayon spectral[446])**.**
La norme 2 d'une matrice réelle est liée au rayon spectral de la façon suivante :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)}. \tag{12.284}$$

Démonstration. La matrice A^tA est réelle et symétrique ; nous pouvons lui appliquer le théorème spectral 8.225. Il existe une base orthonormée $\{e_i\}$ de vecteurs propres de A^tA. Nous notons λ_i la valeur propre de e_i. La définition de la norme opérateur donne

$$\|A\|^2 = \sum_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sum_{\|x\|=1} (Ax) \cdot (Ax) = \sum_{\|x\|=1} x \cdot A^tA. \tag{12.285}$$

Par ailleurs, soit $x \in \mathbb{R}^n$; nous le décomposons dans la base $\{e_i\}$: $x = \sum_i x_i e_i$. Nous avons

$$A^tAx = \sum_i x_i(A^tAe_i) = \sum_i x_i\lambda_i e_i, \tag{12.286}$$

et donc

$$\begin{aligned} Ax \cdot Ax &= (\sum_j x_i e_j) \cdot (\sum_i x_i\lambda_i e_i) && \text{(12.287a)}\\ &= \sum_i x_i^2\lambda_i && \text{(12.287b)}\\ &\leqslant (\max_i \lambda_i)\|x\|^2 && \text{(12.287c)}\\ &= \rho(A^tA)\|x\|^2. && \text{(12.287d)} \end{aligned}$$

Donc $\|A\|^2 = \sum_{\|x\|=1} Ax \cdot Ax \leqslant \rho(A^tA)$.

Pour avoir l'inégalité dans l'autre sens, nous considérons u, le vecteur parmi les e_i qui a la plus grande valeur propre. Autrement dit $Au = (\max_i \lambda_i)u = \rho(A^tA)u$. Nous avons $\|u\| = 1$ et

$$\|Au\|^2 = A^tAu \cdot u = \lambda = \rho(A^tA). \tag{12.288}$$

Donc $\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geqslant \|Au\|^2 = \rho(A^tA)$. □

LEMooNESTooVvUEOv

Lemme 12.123.
Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ qui est symétrique, strictement définie positive. Soient λ_{min} et λ_{max} les plus petites et plus grandes valeurs propres. Alors

$$\|A\|_2 = \lambda_{max} \qquad et \qquad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_{min}}. \tag{12.289a}$$

Démonstration. Soient les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ formant une base orthonormée de vecteurs propres[67] de A. Nous notons v_{max} celui de λ_{max}. Nous avons :

$$\|A\|_2 \geqslant \|Av_{max}\| = |\lambda_{max}|\|v_{max}\| = |\lambda_{max}| = \lambda_{max}. \tag{12.290}$$

Voilà l'inégalité dans un sens. Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Soit $x = \sum_i x_i v_i$ avec $\|x\|_2 = 1$. Alors

$$\|Ax\| = \left|\sum_i x_i\lambda_i v_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_i x_i^2\lambda_i^2} \leqslant \lambda_{max}\sqrt{\sum_i x_i^2} = \lambda_{max}. \tag{12.291}$$

En ce qui concerne l'affirmation pour la norme de A^{-1}, il suffit de remarquer que ses valeurs propres sont les inverses des valeurs propres de A. □

[67] Possible par le théorème spectral 8.225.

LEMooCSBVooZzqxqg

Lemme 12.124 ([1, 447]).
Soit une matrice diagonale $D \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ dont nous notons $\lambda_i \in \mathbb{C}$ les éléments diagonaux. Alors la norme opérateur[68] *de D est donnée par*

$$\|D\|_2 = \max_i \{|\lambda_i|\}. \tag{12.292}$$

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Le compact** Puisque la partie $\{x \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } \|x\|_2 = 1\}$ est compacte, nous pouvons utiliser un maximum au lieu d'un supremum dans la définition de la norme opérateur (théorème de Weierstrass 7.196.).

(2) **Notations pour $\mathbb{C}^n$** Pour se mettre d'accord sur les notations, si $x \in \mathbb{C}^n$, alors $x = \sum_i x_i e_i$ où $e_1 \in \mathbb{C}^n$ est le vecteur $(1, 0, \ldots, 0)$. C'est un vecteur de base de $\mathbb{C}^n$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Et d'ailleurs $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

(3) **Norme dans $\mathbb{C}^n$** Lorsque A est un opérateur sur $\mathbb{C}^n$, nous avons

$$\|Ax\|_2 = \left(\sum_i |(Ax)_i|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_i \left| \sum_j A_{ij} x_j \right|^2 \right)^{1/2}. \tag{12.293}$$

Nous avons utilisé les conventions (4.92).

(4) **Le calcul** Si c'est bon pour vous, je me lance dans le calcul :

$$\|D\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Dx\|_2 \tag{12.294a}$$

$$= \max_{\|x\|_2=1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \tag{12.294b}$$

$$\leqslant \max_{\|x\|_2=1} \max_i |\lambda_i| \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}}_{=\|x\|_2} = \max_i |\lambda_i|. \tag{12.294c}$$

L'inégalité $\|D\|_2 \leqslant \max_i |\lambda_i|$ est prouvée. Nous démontrons à présent l'inégalité dans l'autre sens. Appliquons D au vecteur de base e_i : $De_i = \lambda_i e_i$. Donc

$$\|D\|_2 \geqslant \|De_i\|_2 = |\lambda_i e_i| = |\lambda_i|. \tag{12.295}$$

Cela étant valable pour tout i, nous avons $\|D\|_2 \geqslant \max_i |\lambda_i|$. □

PropMAQoKAg

Proposition 12.125.
La fonction

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \mathrm{Tr}(X^t Y) \end{aligned} \tag{12.296}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$.

Démonstration. Il faut vérifier la définition 8.163.

- La bilinéarité est la linéarité de la trace.
- La symétrie de f est le fait que $\mathrm{Tr}(A^t) = \mathrm{Tr}(A)$.
- L'application f est définie positive parce que si $X \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, alors $X^t X$ est symétrique définie positive, donc diagonalisable avec des nombres positifs sur la diagonale. La trace étant un invariant de similitude, nous avons $f(X, X) = \mathrm{Tr}(X^t X) \geqslant 0$. De plus si $\mathrm{Tr}(X^t X) = 0$, alors $X^t X = 0$ (pour la même raison de diagonalisation). Mais alors $\|Xu\| = 0$ pour tout $u \in E$, ce qui signifie que $X = 0$.

□

[68] Norme opérateur, définition 10.67. La notation $\|D\|_2$ signifie la norme opérateur de $D \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ où l'on a mis la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire la norme de la définition 10.31.

EXooHDCWooHragNA

Exemple 12.126.
Soient $m = n$, un point λ dans $\mathbb{R}$ et T_λ l'application linéaire définie par $T_\lambda(x) = \lambda x$. La norme de T_λ est alors

$$\|T_\lambda\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1} \|\lambda x\|_{\mathbb{R}^n} = |\lambda|.$$

Notez que T_λ n'est rien d'autre que l'homothétie de rapport λ dans $\mathbb{R}^m$. △

EXooVXENooZbtBNi

Exemple 12.127.
Toutes les isométries de $\mathbb{R}^n$ ont norme 1. En effet si T est une isométrie, $\|Tx\| = \|x\|$. En ce qui concerne la norme de T nous avons alors

$$\|T\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1. \tag{12.297}$$

△

LEMooNWQWooBrpXgn

Lemme 12.128.
Soit $b \in \mathbb{R}^m$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} T_b\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto b \cdot x. \end{aligned} \tag{12.298}$$

(1) L'application T_b est linéaire.

(2) Sa norme est $\|T_b\|_{\mathcal{L}} = \|b\|_{\mathbb{R}^m}$.

Démonstration. La norme de T_b satisfait les inégalités suivantes

$$\|T_b\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^m}\leqslant 1} |b \cdot x| \leqslant \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^m}\leqslant 1} \|b\|_{\mathbb{R}^m}\|x\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant \|b\|_{\mathbb{R}^m},$$

$$\|T_b\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^m}\leqslant 1} \|b \cdot x\|_{\mathbb{R}^n} \geqslant \left| b \cdot \frac{b}{\|b|} \right| = \frac{\|b\|^2}{\|b\|} = \|b\|_{\mathbb{R}^n},$$

donc $\|T_b\|_{\mathcal{L}} = \|b\|_{\mathbb{R}^n}$. □

Proposition 12.129.
Une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est continue.

Démonstration. Soit x un point dans $\mathbb{R}^m$. Nous devons vérifier l'égalité

$$\lim_{h\to 0_m} T(x+h) = T(x). \tag{12.299}$$

Cela revient à prouver que $\lim_{h\to 0_m} T(h) = 0$, parce que $T(x+h) = T(x) + T(h)$. Nous pouvons toujours majorer $\|T(h)\|_n$ par $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)}\|h\|_{\mathbb{R}^m}$ (lemme 10.81). Quand h s'approche de 0_m sa norme $\|h\|_m$ tend vers 0, ce que nous permet de conclure parce que nous savons que de toutes façons, $\|T\|_{\mathcal{L}}$ est fini. □

Note : dans un espace de dimension infinie, la linéarité ne suffit pas pour avoir la continuité : il faut de plus être borné (ce que sont toutes les applications linéaires $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$). Voir la proposition 10.85.

PROPooHXJAooGaDtme

Proposition 12.130 ([1]).
Soit $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. La suite[69] *$(A^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée*[70] *si et seulement si A est diagonalisable*[71] *et* $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathrm{S}^1$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que A est diagonalisable et que $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathrm{S}^1$. Nous nommons λ_i ses valeurs propres. Par hypothèse $\lambda_i \in \mathrm{S}^1$. Nous avons donc $|\lambda_i| = 1$ et, par la proposition 9.105(7), nous avons $|\lambda_i|^k = 1$.

La proposition 8.214 permet de considérer une matrice inversible Q telle que $A = Q^{-1}DQ$ où D est la matrice diagonale $D_{ii} = \lambda_i$. Nous avons donc aussi

$$A^k = Q^{-1}D^kQ. \tag{12.300}$$

La matrice D^k est diagonale et $D^k_{ii} = \lambda_i^k$.

[69] Oui, c'est avec $k \in \mathbb{Z}$. Vu que A est dans GL, elle est inversible, donc pas de soucis à considérer A^{-1}.
[70] Nous considérons sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ la norme opérateur dérivant de la norme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$ donnée par la proposition 10.30.
[71] Définition 8.212.

(1) **Pour $k \geqslant 0$** La norme matricielle étant une norme d'algèbre[72],

$$\|A^k\|_2 = \|Q^{-1}D^kQ\|_2 \leqslant \|Q^{-1}\|_2\|D^k\|_2\|Q\|_2. \tag{12.301}$$

En ce qui concerne la norme $\|D\|_2$, nous avons le lemme 12.124 qui nous annonce que $\|D\|_2 = \max_i\{|\lambda_i|\} = 1$. Dans notre cas, nous avons donc $\|D\|_2 = 1$ et

$$\|A^k\|_2 \leqslant \|Q^{-1}\|_2\|Q\|_2. \tag{12.302}$$

Autrement dit, la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée en norme par le nombre $\|Q^{-1}\|_2\|Q\|_2$.

(2) **Pour $k \leqslant 0$** Alors il suffit de poser $B = A^{-1}$. La matrice B est autant diagonalisable que A et le même raisonnement s'applique : il existe une matrice inversible P telle que

$$\|B^k\|_2 \leqslant \|P^{-1}\|_2\|P\|_2. \tag{12.303}$$

(3) **Pour tous les k** La suite $(A^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est donc majorée par le maximum entre $\|P^{-1}\|_2\|P\|$ et $\|Q^{-1}\|_2\|Q\|$.

Dans l'autre sens, maintenant.

Puisque nous travaillons sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de A est scindé et la réduction de Jordan[73] s'applique. Nous considérons une matrice inversible Q telle que $A = Q^{-1}MQ$ avec

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbb{1} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s\mathbb{1} + N_s \end{pmatrix}, \tag{12.304}$$

où les N_i sont nilpotents. Notez qu'ici les « $\mathbb{1}$ » sont de différentes tailles.

(1) **Juste un bloc** Nous considérons un bloc de Jordan $\lambda\mathbb{1} + N$. Nous supposons que la suite $(\lambda\mathbb{1} + N)^k$ est bornée, et nous allons montrer que $|\lambda| = 1$ et $N = 0$.

Pour que $k \mapsto (\lambda\mathbb{1} + N)^k$ soit bornée, il faut que $\|\lambda\mathbb{1} + N\| \leqslant 1$. Vu que N est nilpotente, il existe un vecteur u tel que $Nu = 0$. Nous avons

$$\|\lambda\mathbb{1} + N\| = \sup_{\|x\|=1} \|(\lambda\mathbb{1} + N)x\| \geqslant \|(\lambda\mathbb{1} + N)u\| = |\lambda|. \tag{12.305}$$

Donc $|\lambda| \leqslant 1$ est obligatoire pour que $\|\lambda\mathbb{1} + N\|^k$reste bornée. Nous avons donc deux possibilités : $|\lambda| < 1$ et $|\lambda| = 1$.

Supposons que $|\lambda| = 1$. Si N n'est pas nulle[74], nous pouvons considérer un vecteur u tel que $Nu \neq 0$ et $N^2u = 0$. En utilisant la formule du binôme,

$$(\lambda + N)^n u = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k}N^k u \tag{12.306a}$$

$$= \binom{n}{0}\lambda^n u + \binom{n}{1}\lambda^{n-1}Nu \tag{12.306b}$$

$$= \lambda^n u + n\lambda^{n-1}Nu. \tag{12.306c}$$

Grâce à la proposition 7.213, nous avons alors

$$\|(\lambda + N)^n\| \geqslant \|(\lambda + N)^n u\| \geqslant \big|1 - n\|Nu\|\big|. \tag{12.307}$$

Cette dernière expression n'est pas bornée quand $n \to \infty$. Nous devons donc avoir $N = 0$.

Nous avons donc deux possibilités :

- $|\lambda| < 1$
- $|\lambda| = 1$ et $N = 0$.

[72] Lemme 10.84.
[73] Théorème 8.292.
[74] Méthode alternative pour prouver que $N = 0$ dans [448].

Nous nous tournons maintenant sur la contrainte que $(\lambda\mathbb{1}+N)^k$ doive rester borné pour $k<0$. Nous avons

$$\lambda\mathbb{1}+N=\lambda(\mathbb{1}+\lambda^{-1}N),\tag{12.308}$$

et nous pouvons appliquer la proposition 8.211 à l'opérateur nilpotent $-\lambda^{-1}N$ pour avoir

$$\big(\mathbb{1}-(-\lambda^{-1}N)\big)^{-1}=\sum_{l=0}^{\infty}(-\lambda)^{-l}N^l\tag{12.309a}$$

$$=\mathbb{1}+\sum_{l=1}^{\infty}(-\lambda)^{-l}N^l\tag{12.309b}$$

$$=\mathbb{1}+\sum_{l=1}^{r-1}(-\lambda)^{-l}N^l.\tag{12.309c}$$

Ceci pour dire que $(\lambda\mathbb{1}+N)^{-1}=\lambda^{-1}(\mathbb{1}+\lambda^{-1}N')$ pour une autre matrice nilpotente[75] $N'=\sum_{l=1}^{r-1}(-\lambda)^{-l}N^l$. Le travail déjà fait, appliqué à λ^{-1} et N', nous donne deux possibilités :

- $|\lambda^{-1}|<1$
- $|\lambda^{-1}|=1$ et $N'=0$.

La possibilité $|\lambda^{-1}|<1$ est exclue parce qu'elle impliquerait $|\lambda|>1$ qui avait déjà été exclu. Il ne reste donc que la possibilité $|\lambda|=1$ et $N=N'=0$.

(2) **Pour la matrice M** Nous supposons que $\{M^k\}$ est borné : $\|M^k\|\leqslant s$ pour tout s. En utilisant le lemme 10.74 et la proposition 10.75, pour tout n et pour tout i nous avons :

$$\|(\mathbb{1}+\lambda_iN_i)^k\|<s.\tag{12.310}$$

Nous appliquons ce que nous venons de montrer pour les blocs et nous obtenons $|\lambda_i|=1$ et $N_i=0$.

(3) **La matrice A** Nous pouvons enfin parler de la matrice $A=Q^{-1}MQ$. Nous avons $A^k=Q^{-1}M^kQ$, et donc aussi

$$M^k=QA^kQ^{-1}.\tag{12.311}$$

En ce qui concerne la norme, si la suite (A^k) est bornée par le réel s, alors

$$\|M^k\|=\|QA^kQ^{-1}\|\leqslant\|Q\|\|Q^{-1}\|\|A^k\|\leqslant s\|Q\|\|Q^{-1}\|.\tag{12.312}$$

Donc la suite (M^k) est bornée et nous pouvons appliquer à M^k ce que nous avons fait sur M. Nous avons donc

$$A=Q^{-1}MQ=Q^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_s\end{pmatrix}Q\tag{12.313}$$

avec $|\lambda_i|=1$. Nous avons prouvé que A est diagonalisable et que $\mathrm{Spec}(A)\subset S^1$.

□

12.12 Droites dans un espace vectoriel

DEFooTQIFooKcloeY

Définition 12.131.
Soit un espace vectoriel E.

*(1) Une **droite vectorielle** dans E est un sous-espace vectoriel de dimension 1.* ITEMooLJZFooEzSkMT

*(2) Une **droite affine** est une partie de E de la forme $a+V$ où $a\in E$ et V est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de E.*

*(3) Un **plan vectoriel** est un sous-espace vectoriel de dimension 2.* ITEMooQNAYooZymIqK

*(4) Une partie P est un **plan affine** si il existe un $v\in E$ tel que $P-v$ soit un plan vectoriel.*

Le plus souvent, nous parlerons de « droite » et « plan » sans préciser « vectoriel » ou « affine ». Dans ces cas, le plus souvent, ce sera « affine ».

[75] Notez que la somme part de $l=1$, sinon ce serait raté pour la nilpotence de N'.

PROPooQTZYooYWmnlu

Proposition 12.132 ([1]).
Si D est une droite dans E, alors il existe $u \in E$ et $a \in E$ tels que

$$D = \{\lambda u + a\}_{\lambda \in \mathbb{K}}. \tag{12.314}$$

Démonstration. Par définition 12.131(2), il existe un sous-espace vectoriel V de dimension 1 et un point $a \in E$ tels que $D = V + a$. Si $\{u\}$ est une base de V, alors $V = \{\lambda u\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$ et donc $D = \{\lambda v + a\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$. □

LEMooLIASooAvjTvt

Lemme 12.133 ([1]).
Soient un espace vectoriel E, un sous-espace V de dimension 1 ainsi que $a, b \in E$ tels que $V + a \cap V + b \neq \varnothing$. Alors $V + a = V + b$.

Démonstration. Soit $p \in V + a \cap V + b$. Il existe $\lambda_a \in \mathbb{K}$ et $\lambda_b \in \mathbb{K}$ tels que

$$p = \lambda_a u + a = \lambda_b u + b. \tag{12.315}$$

Un élément générique de $V + a$ est $\lambda u + a$. Nous montrons que $\lambda u + a \in V + b$:

$$\begin{aligned} \lambda u + a &= \lambda_a u + a + (\lambda - \lambda_a)u && \text{(12.316a)}\\ &= \lambda_b u + b + (\lambda - \alpha_a)u && \text{(12.316b)}\\ &= (\lambda - \lambda_a + \lambda_b)u + b && \text{(12.316c)}\\ &\in V + b. && \text{(12.316d)} \end{aligned}$$

Cela prouve que $V + a \subset V + b$. Nous montrons de même que $V + b \subset V + a$. □

PROPooRSKLooVrxrFz

Proposition 12.134.
Soient deux points distincts a et b de l'espace vectoriel E.

ITEMooQSJMooKUBHwf

(1) Il existe une unique droite contenant a et b.

ITEMooEOJNooSMCXtA

(2) Cette droite est donnée par $\{\lambda(b - a) + a\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$.

Démonstration. Nous posons $V = \{\lambda(b - a) + a\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$. Il est vite vérifié en posant $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ que $a, b \in d_1$. Cela prouve le point (2).

Soit maintenant une autre droite, $W + x$ contenant également a et b. Nous posons $V = \{\lambda(b - a)\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$. Nous devons montrer que $W + x = V + a$. Vu que $a, b \in W + x$, il existe $w_a, w_b \in W$ tels que

$$\begin{cases} w_a + x = a & \text{(12.317a)}\\ w_b + x = b. & \text{(12.317b)} \end{cases}$$

En faisant la différence, $w_b - w_a = b - a$ et donc $b - a \in W$. Cela montre que $W = V$ parce que V et W ont une base commune ($\{b - a\}$).

Il reste à prouver que $V + a = W + x$. Le lemme 12.133 fait le boulot parce que $V + a$ et $V + x$ ont deux points d'intersection : a et b. □

LEMooWDADooGuKwvZ

Lemme 12.135 ([1]).
Soit un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Soient une droite D ainsi que 4 points $a, b, x, y \in D$ avec $a \neq b$. Alors il existe $\sigma \in \mathbb{K}$ tels que

$$a - b = \sigma(x - y). \tag{12.318}$$

Démonstration. Par la proposition 12.132, il existe $u, w \in E$ tels que $D = \{\lambda u + w\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$. Il existe donc $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{K}$, tels que $a = \lambda_a u + w$, $b = \lambda_b u + w$, $x = \lambda_x u + w$, $y = \lambda_y u + w$. Nous avons donc $a - b = (\lambda_a - \lambda_b)u$ et $x - y = (\lambda_x - \lambda_y)u$. Étant donné que les points $a \neq b$ sont distincts, nous avons $\lambda_a - \lambda_b \leqslant 0$, et en posant

$$\sigma = \frac{\lambda_x - \lambda_y}{\lambda_a - \lambda_b}, \tag{12.319}$$

nous avons bien

$$\begin{aligned} \sigma(a - b) &= \frac{\lambda_x - \lambda_y}{\lambda_a - \lambda_b}(\lambda_a - \lambda_b)u && \text{(12.320a)}\\ &= (\lambda_x - \lambda_y)u && \text{(12.320b)}\\ &= x - y. && \text{(12.320c)} \end{aligned}$$

□

PROPooEBXLooKewanh

Proposition 12.136 ([1]).
Soit un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Si les points a, m, b sont alignés et distincts, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$b = m + \lambda(m - a). \tag{12.321}$$

12.12.1 Parallélisme et perpendicularité

DEFooXVWGooIDYXGj

Définition 12.137 (Perpendiculaires et parallèles).
Soient un espace vectoriel E ainsi que deux sous-espaces V et W de dimension 1.

ITEMooWTVKooPohmUX

*(1) Nous disons que les droites $a + V$ et $b + W$ sont **parallèles** lorsque $V = W$.*

*(2) Nous disons que les droites $a + V$ et $b + W$ sont **perpendiculaires** si pour tout $v \in V$ et $w \in W$ nous avons $v \cdot w = 0$.*

PROPooZMVZooSRwCLT

Proposition 12.138 ([1]).
Soient deux droites parallèles[76] D et E. Soient $a, b \in D$ et $x, y \in E$. Alors il existe $\sigma \in \mathbb{K}$ tel que $b - a = \sigma(y - x)$.

Vous noterez que le parallélisme est une notion vectorielle alors que la perpendicularité dépend du produit scalaire ; c'est une notion comme qui dirait « métrique ».

PROPooADJNooMyXUxG

Proposition 12.139.
Les propriétés usuelles.

ITEMooSXVYooBUvvxj

(1) Deux droites parallèles ayant une intersection sont confondues.

(2) Le parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites de E.

(3) Si la droite d_1 est parallèle à la droite d_2, alors une droite est perpendiculaire à d_1 si et seulement si elle est perpendiculaire à d_2.

Démonstration. Pour (1), il s'agit du lemme 12.133. □

PROPooKWJLooIYVKhs

Proposition 12.140 ([1]).
Soient deux droites parallèles d_1 et d_2 dans l'espace vectoriel E. Si $a, b \in d_1$ et si $x, y \in d_2$, alors il existe $\sigma \in \mathbb{K}$ tel que $b - a = \sigma(y - x)$.

Démonstration. Par définition 12.137(1), il existe $u \in E$ tel que $d_2 = d_1 + u$. Vu que $x, y \in d_2$, il existe $x', y' \in d_1$ tels que $x = x' + u$ et $y = y' + u$. Nous avons

$$y - x = y' - x'. \tag{12.322}$$

Comme $a, b, x', y' \in d_1$, le lemme 12.135 dit qu'il existe $\sigma \in \mathbb{K}$ tel que $b - a = \sigma(y' - x')$. Et donc aussi $b - a = \sigma(y - x)$. □

LEMooRLFQooJADark

Lemme 12.141.
Deux droites perpendiculaires ont un unique point d'intersection.

PROPooPWNWooYuyrOc

Proposition 12.142.
Soient une droite d et un point p.

(1) Il existe une unique droite parallèle à d contenant p.

(2) Il existe une unique droite perpendiculaire à d contenant p.

LEMooQQFFooEZYeck

Lemme 12.143.
Si D est une droite et si $a, b \in D$, alors $D - a = D - b$ et $D - a$ est une droite vectorielle.

Démonstration. Vu que D est une droite, il existe $v \in V$ tel que $D - v$ soit une droite vectorielle que nous notons L. Nous allons montrer que $D - a = D - v$. Comme a est arbitraire, cela suffit.

[76] Définition 12.137(1).

(1) $\underline{D-a\subset D-v}$ Un élément de $D-a$ est de la forme $x-a$ avec $x\in D$. Nous écrivons $x-a$ sous la forme $y-v$ et nous espérons que $y\in D$. Allons-y : d'abord nous isolons y dans $x-a=y-v$:

$$y=x-a+v=(x-v)-(a-v)+v. \tag{12.323a}$$

Puisque $x-v$ et $a-v$ sont des éléments de L, la somme est dans L et donc $y=l+v$ pour un certain élément de $l\in L$. Nous avons donc prouvé que $y\in D$ et donc que $x-a=y-v\in D-v$.

(2) $\underline{D-v\subset D-a}$ Nous notons $x-v$ un élément générique de $D-v$ ($x\in D$). En posant $y-a=x-v$, nous trouvons

$$y=x-v+a=\underbrace{x-v}_{\in L}+\underbrace{(a-v)}_{\in L}+v \tag{12.324}$$

Donc $y\in D$ et $x-v=y-a\in D-a$.

□

12.12.2 Droites et applications linéaires

LEMooRWASooOfwjdw

Lemme 12.144.
Soit un espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{K}$.

ITEMooYQCIooOrhRwj

(1) Si L est une droite vectorielle, alors pour tout $a\neq 0$ dans L, nous avons $L=\text{Image}(f)$ où f est l'application linéaire donnée par

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{K}&\to V\\ \lambda&\mapsto \lambda a. \end{aligned} \tag{12.325}$$

ITEMooZIGMooGruFMP

(2) Si D est une droite, alors pour tout $a\neq b$ sur D nous avons $D=\text{Image}(f)$ où f est l'application affine donnée par

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{K}&\to V\\ \lambda&\mapsto a+\lambda(b-a). \end{aligned} \tag{12.326}$$

ITEMooOKJZooIHYDIk

(3) Une partie $D\subset V$ est une droite (affine) si et seulement si il existe $a,v\in V$ tels que

$$D=\{a+\lambda v\}_{\lambda\in\mathbb{K}}. \tag{12.327}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Comme L est un sous-espace de dimension 1, il possède une base contenant un unique élément, disons $\{b\}$. En particulier $a=\mu b$ pour un certain $\mu\in\mathbb{K}$. Si $x\in L$ nous avons $x=\lambda_x b$ pour un certain λ_x, et donc

$$x=\frac{\lambda_x}{\mu}a. \tag{12.328}$$

Donc $x=f(\lambda_x/\mu)$. Cela prouve que $L\subset\text{Image}(f)$.

L'inclusion inverse est simplement le fait que $\lambda a\in L$ dès que $a\in L$ parce que L est vectoriel.

(2) **Pour (2)** Le lemme 12.143 nous indique qu'il existe une droite vectorielle L telle que $D-x=L$ pour tout $x\in D$.

(2a) $\underline{D\subset\text{Image}(g)}$ Nous nommons $f\colon\mathbb{K}\to V$ l'application linéaire qui donne L. Puisque $b-a\in L$ nous avons

$$f(\lambda)=\lambda(b-a), \tag{12.329}$$

et tout élément de L est de la forme $f(\lambda)$. Nous avons aussi $D=L+a$; donc un élément de D est de la forme $f(\lambda)+a$ et donc de la forme $\lambda(b-a)+a=g(\lambda)$.

(2b) $\underline{\text{Image}(g)\subset D}$ Un élément de $\text{Image}(g)$ est de la forme $a+\lambda(b-a)$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$. Mais $b-a\in L$, donc $\lambda(b-a)\in L$ et

$$g(\lambda)=a+\lambda(b-a)\in a+L=D. \tag{12.330}$$

(3) **Pour (3)** En deux parties.

(3a) $\Rightarrow$ Si $D\subset V$ est une droite, alors $D=D_0+a$ où D_0 est un sous-espace de dimension 1 et $a\in V$. Nous avons $D_0=\{\lambda v\}_{\lambda\in\mathbb{K}}$, et donc

$$D=D_0+a=\{a+\lambda v\}_{\lambda\in\mathbb{K}}. \tag{12.331}$$

(3b) $\Leftarrow$ Si $D = \{a + \lambda v\}_{\lambda\in\mathbb{K}}$, alors en posant $D_0 = \{\lambda v\}_{\lambda\in\mathbb{K}}$, nous avons bien $D = a + D_0$.

□

PROPooNTHVooWWyafJ

Proposition 12.145.
L'image d'une droite par une application affine[77] *est une droite.*

PROPooTFTJooJejuBU

Proposition 12.146.
Soient deux droites d_1 et d_2 dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$). Alors nous sommes dans une des trois situations suivantes :

(1) $d_1 \cap d_2 = \varnothing$.

(2) $\text{Card}(d_1 \cap d_2) = 1$

(3) $d_1 = d_2$.

Démonstration. Il y a 3 possibilités : $\text{Card}(d_1 \cap d_2)$ peut être 0, 1 ou $\text{Card}(d_1 \cap d_2) \geqslant 2$. Je vous laisse trouver des exemples explicites des deux premiers cas. Dans le troisième cas, la proposition 12.134 dit que $d_1 = d_2$. □

Exemple 12.147.
Les exemples les plus courants d'applications affines sont les droites et les plans ne passant pas par l'origine.

Les droites Une droite dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) qui ne passe pas par l'origine est l'image d'une fonction de la forme $s(t) = ut + v$, avec $t \in \mathbb{R}$, et u et v dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ selon le cas.

En choisissant des coordonnées adéquates, les droites peuvent être aussi vues comme graphes de fonctions affines. Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, on retrouve la fonction de l'exemple 4.35, pour $n = m = 1$.

Les plans De la même façon nous savons que tout plan qui ne passe pas par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est le graphe d'une application affine, $P(x, y) = (a, b)^T \cdot (x, y)^T + (c, d)^T$, lorsque les coordonnées sont bien choisies.

△

PROPooTVSZooOJTnnn

Proposition 12.148 ([1])**.**
Soient trois points a, b, c distincts et non alignés de $\mathbb{R}^n$.

(1) Il existe un unique plan contenant a, b et c.

(2) Ce plan est donné par $P = \{a + \lambda(b - a) + \mu(c - a)$ tel que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n\}$.

PROPooUDLRooShTGmV

Proposition 12.149 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$. Soient $a, b \in V$. Si x est un point de la droite (ab), alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda(b - a)$.

12.12.3 Projection orthogonale

Le théorème suivant n'est pas indispensablissime parce qu'il est le même que le théorème de la projection sur les espaces de Hilbert[78]. Cependant la partie existence est plus simple en se limitant au cas de dimension finie.

ThoWKwosrH

Théorème-Définition 12.150 (Théorème de la projection)**.**
Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, $x \in E$, et C un sous-ensemble fermé convexe de E.

(1) Les deux conditions suivantes sur $y \in E$ sont équivalentes :

zzETsfYCSItemi

(1a) $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\|$ *tel que* $z \in C\}$,

zzETsfYCSItemii

(1b) pour tout $z \in C$, $\text{Re}\langle x - y, z - y\rangle \leqslant 0$.

(2) Il existe un unique $y \in E$, noté $y = \texttt{proj}_C(x)$ vérifiant ces conditions.

Démonstration. Nous commençons par prouver l'existence et l'unicité d'un élément dans C vérifiant la première condition. Ensuite nous verrons l'équivalence.

[77] Définition 8.155.
[78] Théorème 25.7

(1) **Existence**

Soit $z_0 \in C$ et $r = \|x - z_0\|$. La boule fermée $\overline{B(x,r)}$ est compacte[79] et intersecte C. Vu que C est fermé, l'ensemble $C' = C \cap \overline{B(x,r)}$ est compact. Tous les points qui minimisent la distance entre x et C sont dans C' ; la fonction

$$\begin{aligned} C' &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto d(x,z) \end{aligned} \tag{12.332}$$

est continue sur un compact et donc a un minimum qu'elle atteint[80]. Un point P réalisant ce minimum prouve l'existence d'un point vérifiant la première condition.

(2) **Unicité** Soient y_1 et y_2, deux éléments de C minimisant la distance avec x, et soit d ce minimum. Nous avons par l'identité du parallélogramme (10.3) que

$$\|y_1 - y_2\|^2 = -4\left\|\frac{y_1 + y_2 - x}{2}\right\|^2 + 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 \leqslant -4d + 2d + 2d = 0. \tag{12.333}$$

Par conséquent $y_1 = y_2$.

(3) **(1a)⇒ (1b)** Soit $z \in C$ et $t \in]0,1[$; nous notons $P = \texttt{proj}_C x$. Vu que y et P sont dans C et que C est convexe[81], le point $z = ty + (1-t)P$ est également dans C, et par conséquent,

$$\|x - P\|^2 \leqslant \|x - tz - (1-t)P\|^2 = \|(x-P) - t(z-P)\|^2. \tag{12.334}$$

Nous sommes dans un cas $\|a\|^2 \leqslant |a-b|^2$, qui implique $2\operatorname{Re}\langle a, b\rangle \leqslant \|b\|^2$. Dans notre cas,

$$2\operatorname{Re}\langle x - P, t(z-P)\rangle \leqslant t^2\|z-P\|^2. \tag{12.335}$$

En divisant par t et en faisant $t \to 0$ nous trouvons l'inégalité demandée[82] :

$$2\operatorname{Re}\langle x - P, z - P\rangle \leqslant 0. \tag{12.336}$$

(4) **(1b)⇒ (1a)**

Soit un point $P \in C$ vérifiant

$$\operatorname{Re}\langle x - P, z - P\rangle \leqslant 0 \tag{12.337}$$

pour tout $z \in C$. Alors en notant $a = x - P$ et $b = P - z$,

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 = \|x - P + P - z\|^2 &= \|a + b\|^2 \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle a, b\rangle \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x - P, z - P\rangle \\ &\geqslant \|b\|^2, \end{aligned} \tag{12.338}$$

ce qu'il fallait.

□

PROPooHGGIooIssaTA

Proposition 12.151.
Soient une droite d dans $\mathbb{R}^3$ ainsi qu'un point p. La projection[83] $\texttt{proj}_d(p)$ *est le point d'intersection*[84] *entre d et la perpendiculaire à d passant par p.*

Démonstration. Nous considérons la droite $d = \{a + \lambda v\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ et un point $p \in \mathbb{R}^3$. Nous notons $x(\lambda) = a + \lambda v$ le point courant dans d. Conformément à la définition 12.150 de la projection orthogonale, nous allons minimiser la distance $\|p - x(\lambda)\|$ par rapport à λ.

Puisque $\|p - x(\lambda)\|$ est toujours positif, nous pouvons chercher à minimiser le carré :

$$\|p - x(\lambda)\|^2 = \|p\|^2 - 2p \cdot a - 2\lambda p \cdot v + \|a\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\lambda a \cdot v. \tag{12.339}$$

[79] C'est ceci qui ne marche plus en dimension infinie.
[80] Théorème 9.56.
[81] Définition 7.208.
[82] Ici nous utilisons la proposition 12.37, et c'est une des choses qui font que cette partie sur la « géométrie élémentaire » demande en réalité d'être placée après déjà une partie de l'analyse réelle.
[83] Définition 12.150.
[84] Lemme 12.141.

Quitte à minimiser ça par rapport à λ, nous pouvons oublier les termes ne contenant pas λ. Nous posons donc

$$f(\lambda) = \|v\|^2\lambda^2 + 2(a-p) \cdot v\lambda \tag{12.340}$$

Comme le coefficient de λ^2 est positif, la proposition 9.118 nous dit que cette fonction aura un minimum (et non un maximum). La valeur λ_0 pour laquelle f est minimal se découvre grâce à 9.118(2) :

$$\lambda_0 = \frac{-2(a-p) \cdot v}{2\|v\|^2}. \tag{12.341}$$

Cela est la valeur de λ pour laquelle

$$\texttt{proj}_d(p) = x(\lambda_0); \tag{12.342}$$

nous avons donc

$$x(\lambda_0) = a - \frac{(a-p) \cdot v}{\|v\|^2}v. \tag{12.343}$$

Nous devons voir maintenant que $\big(p - x(\lambda_0)\big) \cdot v = 0$. Il suffit d'un peu déballer :

$$\big(p - x(\lambda_0)\big) \cdot v = p \cdot v - a \cdot v + \frac{(a-p) \cdot v}{\|v\|^2}\|v\|^2 = p \cdot v - a \cdot v + (a-p) \cdot v = 0. \tag{12.344}$$

□

12.13 Géométrie dans le plan

LEMooYIHXooEwmlPo

Lemme 12.152 (Équation de droite)**.**
Si D est une droite[85] *dans $\mathbb{R}^2$, alors D est d'une des deux formes suivantes :*

- *Soit il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = \alpha\}, \tag{12.345}$$
- *soit il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que*
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = \alpha x + \beta\}. \tag{12.346}$$

Le premier cas correspond aux droites verticales.

Démonstration. Nous prenons une droite D et une application affine f donnée par (12.144)(3). Il y a deux possibilités : soit $b-a$ est un multiple de e_2, sois pas.

(1) **Si $b - a = \mu e_2$** Alors $f(\lambda) = a + \lambda\mu e_2$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} D &= \{a + \lambda e_2\}_{\lambda\in\mathbb{R}} && \text{(12.347a)}\\ &= \{\lambda e_2 + a_1 e_1\} && \text{cf. justif.} \quad \text{(12.347b)}\\ &= \{(a_1, \lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}} && \text{(12.347c)}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = a_1\}. && \text{(12.347d)} \end{aligned}$$

SUBEQooEKMNooQgkSeC

Justifications.

- Pour 12.347b. Parce que $a_2e_2 + \lambda e_2$ prend toutes les valeurs de la forme λe_2.

(2) **Sinon** Nous avons

$$f(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda(b-a)_1 \\ a_2 + \lambda(b-a)_2 \end{pmatrix} \tag{12.348}$$

En posant $\alpha = (b-a)_2/(b-a)_1$ et $\beta = -\alpha a_1 + a_2$, nous avons bien

$$f(\lambda)_2 = \alpha f(\lambda)_1 + \beta. \tag{12.349}$$

□

[85] Définition 12.131, mais c'est surtout la caractérisation du lemme 12.144(3) que nous devons avoir en tête.

PROPooOFKXooARiQZK

Proposition 12.153.
Une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ est une droite si et seulement si il existe une application affine[86] *qui n'est pas une translation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x) = 0\}. \tag{12.350}$$

Démonstration. Dans les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Soit une droite D. Elle est de la forme $D = D_0 + a$ où D_0 est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Autrement dit, il existe $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $D_0 = \{\lambda u\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Nous considérons un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\{u, v\}$ soit une base de $\mathbb{R}^2$, et nous posons

$$\begin{aligned} f_0 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_v \end{aligned} \tag{12.351}$$

où x_v est la composante de x dans la direction de v dans la base $\{u, v\}$. On vérifie que f_0 est linéaire. Nous avons $D_0 = \{f_0 = 0\}$.

Maintenant en posant

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_0(x - a), \end{aligned} \tag{12.352}$$

nous avons $D = \{f = 0\}$.

(1a) f **est affine** C'est immédiat parce que $f(x) = f_0(x) - f_0(a)$. L'application f_0 est linéaire et $f_0(a)$ est une constante.

(1b) $\{f = 0\} \subset D$ Si $f(x) = 0$, alors $f_0(x - a) = 0$. Cela signifie que $x - a \in D_0$ et donc que $x \in D_0 + a = D$.

(1c) $D \subset \{f = 0\}$ Si $x \in D$, alors $x - a \in D_0$ et $f(x) = f_0(x - a) = 0$.

(2) $\Leftarrow$ Soit une application affine $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Nous montrons que $D = \{f = 0\}$ est une droite. Il existe une application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \alpha(x) + a$. Posons $D_0 = \{\alpha = 0\}$. La proposition 4.54 dit qu'il existe $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(u) = 0$. Vu que α est linéaire, $\alpha(\lambda u) = \lambda \alpha(u)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc $\{\lambda u\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \subset D_0$. Inversement, si $v \in \{\alpha = 0\}$ avec v hors de $\mathbb{R}u$, alors $\{u, v\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et nous aurions $\alpha = 0$.

Nous avons donc $D_0 = \{\alpha = 0\}$. Maintenant avec $f(x) = \alpha(x) + a$, nous avons $D = \{f = 0\} = D_0 - a$. Donc D est une droite.

□

Si f est une application affine quelle que $f(x) = 0$ donne la droite D, alors pour tout réel non nul λ, l'application affine λf donnent également D. Il n'y a donc pas d'unicité.

PROPooTIIUooNtbQLz

Proposition 12.154 ([1])**.**
Soient $v \in \mathbb{R}^2$ et $c \in \mathbb{R}$. Nous posons

$$D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = 0\} \tag{12.353a}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = c\} \tag{12.353b}$$

Nous considérons $w \neq 0 \in D_0$ et $b \in D$. Alors Alors

ITEMooSTSZooKMQImS

(1)

$$D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = 0\} = \{\lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{12.354}$$

ITEMooWNRSooLcCikX

(2)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = c\} = \{b + \lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{12.355}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (2)** Nous posons $E_0 = \{\lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\}$, et nous prouvons que $D_0 = E_0$.

(1a) $D_0 \subset E_0$ Soit $x \in D_0$. Nous avons $x \cdot v = w \cdot v = 0$, c'est-à-dire EQooUPMEooCPCrqw

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0 \tag{12.356a}$$

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 = 0. \tag{12.356b}$$

[86] Définition 8.155.

(1a.i) **Si $v_1 \neq 0$** Nous avons

$$x_1 = -\frac{v_2}{v_1}x_2 \tag{12.357a}$$
$$w_1 = -\frac{v_2}{v_1}w_2. \tag{12.357b}$$

A. **Si $w_2 \neq 0$** Alors en posant $\lambda = x_2/w_2$ nous avons $x_2 = \lambda w_2$, et

$$x_1 = -\frac{v_2}{v_1}\lambda w_2 = -\frac{v_2}{v_1}w_2\lambda = \lambda w_1. \tag{12.358}$$

Et donc nous avons bien $x_1 = \lambda w_1$ et $x_2 = \lambda w_2$, c'est-à-dire $x = \lambda w$.

B. **Si $w_2 = 0$** Alors, vu que $w \neq 0$, nous avons $w_1 \neq 0$. Mais aussi : $w_1 v_1 = 0$. Et comme nous avons dit que $v_1 \neq 0$, c'est impossible.

(1a.ii) **Si $v_1 = 0$** Les équations (12.356) deviennent

$$x_2 v_2 = 0 \tag{12.359a}$$
$$w_2 v_2 = 0 \tag{12.359b}$$

Vu que $v \neq 0$, nous avons $v_2 \neq 0$ et donc $x_2 = w_2 = 0$. Comme $v_2 \neq 0$, il suffi de poser $\lambda = x_1/w_1$ pour avoir $x_1 = \lambda w_1$ et donc $x = \lambda w$.

(1b) $E_0 \subset D_0$ Soit $x \in E_0$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda w$. Vu que $w \in D_0$, nous avons $w \cdot v = 0$. Donc

$$x \cdot v = \lambda w \cdot v = 0. \tag{12.360}$$

Donc $x \in D_0$.

(2) **Pour (2)** Soient $w \in D_0$ et $b \in D$. Nous posons

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = c\} \tag{12.361a}$$
$$E = \{b + \lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\}, \tag{12.361b}$$

et nous prouvons que $D = E$.

(2a) $D \subset E$ Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \cdot v = c$. Alors $(x - b) \cdot v = 0$ parce que $b \in D$. Donc $x - b \in D_0$. Par le point (1), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x - b = \lambda w$. Et donc $x = b + \lambda w$, c'est-à-dire $x \in E$.

(2b) $E \subset D$ Vu que $b \in D$ et $w \in D_0$, nous avons $b \cdot v = c$ et $w \cdot v = 0$. Donc $(b + \lambda w) \cdot v = c$ et donc $b + \lambda w \in D$.

□

PROPooJSBKooJspdiF

Proposition 12.155 ([1]).
Si D est une droite de $\mathbb{R}^2$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = c\}. \tag{12.362}$$

Démonstration. Nous commençons par supposer que notre droite a la forme

$$E_0 = \{\lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{12.363}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. En choisissant $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $v \cdot w = 0$ nous posons $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } v \cdot x = 0\}$. Vu que $w \in D_0$, nous avons $E_0 = D_0$ par la proposition 12.154.

Prenons maintenant une droite générale $D = \{a + \lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\}$ avec $a \in \mathbb{R}^2$ et $w \in \mathbb{R}^2$. En posant $D_0 = \{\lambda w\}$, nous avons $D = D_0 + a$. Par la première partie, il existe $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = 0\}$. En posant $c = a \cdot v$ et $D' = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = c\}$, nous avons $a \in D'$ et $w \in D_0$. Et donc

$$D' = \{a + \lambda w \text{ tel que } \mu \in \mathbb{R}\} = D_0 + a = D. \tag{12.364}$$

□

12.13.1 Segment, médiatrice et équidistance

DEFooDLBFooYmJPhQ

Définition 12.156 ([1]).
*Soient deux points a et b dans $\mathbb{R}^2$. Nous posons $m = (a+b)/2$, et nous disons que la **médiatrice** du segment $[a, b]$ est la partie*

EQooTOACooUQiNJa

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x - m) \cdot (a - b) = 0\}. \tag{12.365}$$

PROPooPOKCooMoEfOB

Proposition 12.157 ([1]).
La médiatrice du segment $[a, b]$ est une droite. Si w vérifie $w \cdot (a - b) = 0$, alors en posant $m = (a + b)/2$ et $c = m \cdot (a - b)$, la médiatrice est également donnée par

EQooYJKWooIMBdjO

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = c\} = \{m + \lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{12.366}$$

Démonstration. La définition (12.365) dit que $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x - m) \cdot (a - b) = 0\}$. En posant $c = m \cdot (a - b)$ et $v = (a - b)$, nous avons

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = c\}. \tag{12.367}$$

La proposition 12.154 dit que c'est une droite. En ce qui concerne la seconde expression de (12.366), il s'agit de prendre la proposition 12.154(2). En notant $M_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = 0\}$, nous avons $M = \{m+\lambda w\}$ pour tout $w \in M_0$. En particulier pour le w vérifiant les hypothèses $(w \cdot v = w \cdot (b - a) = 0)$. □

LEMooSZZWooPDHnGl

Lemme 12.158.
Un point M est sur la médiatrice[87] du segment $[A, B]$ si et seulement si $\|M - A\| = \|M - B\|$.

Démonstration. Nous posons $I = (A + B)/2$. D'une part l'expression que M est sur la médiatrice est que

$$(M - I) \cdot (A - B) = 0. \tag{12.368}$$

D'autre part, l'expresson d'être équidistant de A est de B est

$$\|M - A\|^2 - \|M - B\|^2 = 0. \tag{12.369}$$

La preuve consiste à montrer que

$$2(M - I) \cdot (B - A) = \|M - A\|^2 - \|M - B\|^2. \tag{12.370}$$

Pour cela, il suffit d'injecter $I = (A + B)/2$ et d'effectuer les produits.

Nous avons par exemple

$$\begin{aligned} 2(M - I) \cdot (B - A) &= (2M - A - B) \cdot (B - A) && \text{(12.371a)}\\ &= 2M \cdot B - 2M \cdot A - A \cdot B + \|A\|^2 - \|B\|^2 + A \cdot B && \text{(12.371b)}\\ &= 2M \cdot (B - A) + \|A\|^2 - \|B\|^2. && \text{(12.371c)} \end{aligned}$$

□

PROPooIPKSooAOfTDy

Proposition 12.159 ([1]).
Il n'existe pas 4 points distincts de $\mathbb{R}^2$ deux à deux équidistants.

Démonstration. Soient deux points distincts $a, b \in \mathbb{R}^2$. Nous nommons ℓ la distance $\|a - b\|$. Si les points $c, d \in \mathbb{R}^2$ sont équidistants de a et b, alors ils doivent être sur la médiatrice (lemme 12.158). La proposition 12.157 nous indique que, si nous posons $m = (a+b)/2$ et si nous considérons $w \in \mathbb{R}^2$ tel que $w \cdot (a-b) = 0$, alors la médiatrice est

$$M = \{m + \lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{12.372}$$

Il existe donc λ_c et λ_d tels que $c = m + \lambda_c w$ et $d = m + \lambda_d w$. Nous cherchons donc les $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $\|x - a\| = \|x - b\| = \ell$ sous la forme $x = l + \lambda x$. Nous posons donc

$$\|m + \lambda w - a\| = \ell \tag{12.373}$$

et nous cherchons pour quelles valeurs de λ l'égalité est respectée. En utilisant le fait que $w \cdot (b - a) = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \|m + \lambda w - a\|^2 &= \|\frac{b - a}{2} + \lambda w\|^2 && \text{(12.374a)}\\ &= \big(\frac{b - a}{2} + \lambda w\big) \cdot \big(\frac{b - a}{2} + \lambda w\big) && \text{(12.374b)}\\ &= \frac{1}{4}\|b - a\|^2 + \lambda^2\|w\|^2. && \text{(12.374c)} \end{aligned}$$

[87] Médiatrice, définition 12.156.

Le tout doit être égal à $\ell^2 = \|b-a\|^2$. Nous avons donc $\lambda^2 = \frac{3\ell^2}{4\|w\|^2}$. Vu que ℓ et $\|w\|$ sont positifs, nous pouvons passer à la racine carrée :

$$\lambda_{\pm} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{l}{\|w\|}. \tag{12.375}$$

Les points c et d sont donc forcément $c = m + \lambda_+ w$ et $d = m + \lambda_- w$. C'est la seule manière de garantir $\|a-b\| = \|a-c\| = \|b-c\| = \|a-d\| = \|b-d\|$. Hélas, de cette façon nous n'avons pas $\|c-d\| = \ell$ parce que

$$\|c-d\| = 2\lambda\|w\| = \sqrt{3}\ell \neq \ell. \tag{12.376}$$

□

Si A' est l'image de A par σ_ℓ alors ℓ est la médiatrice du segment $[A, A']$. Voir le lemme 18.111.

Définition 12.160.
*Soit une application affine $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Nous appelons **demi-plans** associés à f les parties*

$$H_f^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x) > 0\} \tag{12.377}$$

et

$$H_f^- = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x) < 0\}. \tag{12.378}$$

LEMooEZEDooSDbrkq

Lemme 12.161 ([1]).
Les demi-plans sont convexes[88].

Démonstration. Soit une applications affine $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ainsi que $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(a) > 0$ et $f(b) > 0$. Vu que f est affine, il existe une application linéaire $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ainsi que $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = l(x) + \alpha$ pour tout x.

Nous considérons

$$\begin{aligned}\gamma\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto a + t(b-a).\end{aligned} \tag{12.379}$$

Nous devons prouver que $(f\circ\gamma)(t) > 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

Nous avons $(f\circ\gamma)(0) > 0$ et $(f\circ\gamma)(1) > 0$. Nous avons d'abord

$$\begin{aligned}(f\circ\gamma)(t) &= l\big(a + t(b-a)\big) + \alpha && \text{(12.380a)}\\ &= l(a) + fl(b) - tl(a) + \alpha && \text{(12.380b)}\\ &= (1-t)l(a) + tl(b) + t\alpha + (1-t)\alpha && \text{(12.380c)}\\ &= (1-t)f(a) + tf(b). && \text{(12.380d)}\end{aligned}$$

SUBEQooXZIPooMoJCRm

Les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont strictement positifs. Les nombres $(1-t)$ et t sont positifs, mais ne s'annulent pas en même temps. Donc dans (12.380d), au moins un des deux termes est strictement positifs tandis que l'autre est positif ou nul. Bref, $(f\circ\gamma)(t) > 0$.

Cela prouve que le demi-plan $f(x) > 0$ est convexe. Le même raisonnement tient pour le demi-plan $f(x) < 0$. □

LEMooXLNZooFyqPxG

Lemme 12.162 ([1]).
Si $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont affines et si $\ker(f) = \ker(g)$, alors

$$\{H_f^+, H_f^-\} = \{H_g^+, H_g^-\}. \tag{12.381}$$

Démonstration. Il existe un $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(a) > 0$. En effet $f(x) = l(x) + \alpha$ où $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$. Il suffit de prendre x tel que $l(x) < -\alpha$. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(a) > 0$. Il y a deux possibilités : $g(a) > 0$ ou $g(a) < 0$ parce que $g(a) = 0$ n'est pas possible du fait que f et g s'annulent aux mêmes points..

(1) **Si $g(a) > 0$** Nous allons prouver qu'alors $H_f^+ = H_g^+$ et $H_f^- = H_g^-$. Soit $b \in H_f^+$. Nous savons que H_f^+ est convexe (lemme 12.161), de telle sorte que $f\big([a,b]\big) > 0$. En particulier f ne s'annule pas sur le segment $[a,b]$, et g non plus. Autrement dit, la fonction

$$\begin{aligned}s\colon [0,1] &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto g\big((1-t)a + tb\big)\end{aligned} \tag{12.382}$$

[88] Définition 7.208.

ne s'annule pas. Vu que $s(0) = g(a) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires[89] nous indique que $g(b) = s(1) > 0$. Donc $b \in H_g^+$.

Nous avons prouvé que $H_f^+ \subset H_g^+$. En inversant les rôles de f et g nous prouvons que $H_g^+ \subset H_f^+$.

(2) **Si $g(a) < 0$** Il se prouve de même que $H_f^+ = H_g^-$ et $H_f^- = H_g^+$.

□

PROPooSIANooTOKlBI

Proposition 12.163.
Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une application affine non constante, alors $\ker(f)$ est une droite[90].

Démonstration. Posons $f(x) = l(x) + \alpha$ où $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Commençons avec $\alpha = 0$. Considérons $a \in \ker(f)$ et prouvons que $\ker(f) = \{\lambda a\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. D'abord $f(\lambda a) = l(\lambda a) = \lambda l(a) = 0$. Donc $\{\lambda a\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \subset \ker(f)$. D'autre part si $f(x) = 0$ alors que x n'est pas de la forme λa. Dans ce cas, $\{x, a\}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ et nous concluons que $\ker(f) = \mathbb{R}^2$, ce qui est contraire à l'hypothèse comme quoi $f \neq 0$.

Nous ne supposons plus que $\alpha = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $l(a) = -\alpha$. Nous allons prouver que $\ker(f) = a + \ker(l)$.

(1) **$a + \ker(l) \subset \ker(f)$** Soit $z \in \ker(l)$. Nous avons $f(a + z) = l(a) + l(z) + \alpha = -\alpha + 0 + \alpha = 0$. Donc $a + z \in \ker(f)$.

(2) **$\ker(f) \subset a + \ker(l)$** . Soit $b \in \ker(f)$. Nous prouvons que $b - a \in \ker(l)$. Nous avons $0 = f(b) = l(b) + \alpha$ et donc $l(b) = -\alpha$. Donc

$$l(b - a) = l(b) - l(a) = -\alpha + \alpha = 0. \tag{12.383}$$

parce que $l(a) = -\alpha$.

La conclusion est que $\ker(f) = a + \ker(l)$. La première partie ayant déjà montré que $\ker(l)$ est une droite, nous avons fini. □

LEMooTOUOooJbpLVB

Lemme 12.164 ([1, 186]).
Soit une fonction affine $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(a), f(b) \neq 0$.

ITEMooXLCFooQiDCrR

(1) L'intersection $[a, b] \cap \ker(f)$ contient 0 ou 1 point.

ITEMooMORGooTzNefp

(2) Si $[a, b] \cap \ker(f) = \varnothing$ alors $f(a)$ et $f(b)$ ont même signe.

ITEMooDWIQooXnoMJT

(3) Si $[a, b] \cap \ker(f) \neq \varnothing$ alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Nous savons que $\ker(f)$ est une droite (proposition 12.163). Vu que $f(a) \neq 0$, l'unique droite passant par a et b (proposition 12.134) n'est pas la droite $\ker(f)$. Donc parmi les trois possibilités de la proposition 12.134, nous sommes forcément dans le cas où l'intersection est vide ou réduite à un unique point.

(2) **Pour (2)** Nous supposons que $\ker(f) \cap [a, b] = \varnothing$. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} s\colon [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f\big((1 - t)a + tb\big). \end{aligned} \tag{12.384}$$

La fonction s est continue et ne s'annule pas parce que les points $(1-t)a+tb$ sont ceux de $[a, b]$. Si $s(0)$ et $s(1)$ étaient de signe différents, le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 donnerait un $t_0 \in]0, 1[$ tel que $s(t_0) = 0$. Donc $s(0)$ et $s(1)$ ont le même signe.

(3) **Pour (3)** Nous prouvons la contraposée. Supposons que $f(a)$ et $f(b)$ aient le même signe (strict), et disons que $f(a), f(b) > 0$ pour fixer les idées. Cela signifie que a et b sont dans le demi-plan H_f^+. Par convexité de ce dernier (lemme 12.161), nous avons $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

□

[89] Théorème 9.95.
[90] La caractérisation 12.144(3) est plus pratique que la définition.

LEMooBWFSooBkIcOg

Lemme 12.165 ([1]).
Soient une application affine f. Soient $a \in \ker(f)$ et $v \in \mathbb{R}^2$ tels que[91] $\ker(f) = \{a + \lambda v\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. *Soit un vecteur non nul $w \in \mathbb{R}^2$ non parallèle à v.*

ITEMooYDYPooRzupcO

(1) $\{v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

ITEMooHKVWooLAEMTm

(2) Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \lambda v + \mu w &\mapsto \mu. \end{aligned} \tag{12.385}$$

Alors l'application

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto p(x - a) \end{aligned} \tag{12.386}$$

est affine.

ITEMooGRZGooMFQPjM

(3) Les demi-plans de f et de g sont les mêmes.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Les vecteurs v et w ne sont pas colinéaire et forment donc une base par le lemme 4.10(1).

(2) **Pour (2)** L'application p est linéaire. Nous avons

$$g(x) = p(x - a) = p(x) - p(a). \tag{12.387}$$

L'application g est donc bien affine.

(3) **Pour (3)** Les applications f et g sont affines. Si $x \in \ker(g)$, alors $p(x - a) = 0$, c'est-à-dire que $x - a = \lambda v$ et donc $x = \lambda v + a \in \ker(f)$. Donc $\ker(g) \subset \ker(f)$. De même nous trouvons que $\ker(f) \subset \ker(g)$.

Deux applications affines ayant le même noyau ont les mêmes demi-plans par le lemme 12.162.

□

LEMooURPNooYRsuaI

Lemme 12.166 ([1]).
Soit une application affine f ainsi qu'une application continue $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que $\ker(f) = \ker(g)$. Supposons l'existence de $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$.

Alors les demi-plans de f sont les parties $\{x$ tel que $g(x) > 0\}$ et $\{x$ tel que $g(x) < 0\}$.

Démonstration. Vu que $g(a) \neq 0$ et que $\ker(f) = \ker(g)$, nous avons $f(a) \neq 0$. Pour fixer les idées[92], nous supposons que $f(a) > 0$. Nous allons prouver que $H_f^+ = \{g > 0\}$.

(1) $H_f^+ \subset \{g > 0\}$ Soit $x \in H_f^+$. Nous avons $f(a) > 0$ et $g(a) > 0$. Vu que H_f^+ est convexe[93], en posant

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto tx + (1 - t)a, \end{aligned} \tag{12.388}$$

nous avons $\gamma(t) \in H_f^+$ pour tout t dans $[0, 1]$. Nous avons donc

$$\gamma\big([0,1]\big) \cap \ker(g) = \gamma\big([0,1]\big) \cap \ker(f) \subset H_f^+ \cap \ker(f) = \varnothing. \tag{12.389}$$

Vu que γ et g sont continues, l'application $g \circ \gamma$ est continue[94] et vérifie $(g \circ \gamma)(0) = g(a) > 0$, nous avons aussi[95] $(g \circ \gamma)(1) > 0$, c'est-à-dire $g(x) > 0$.

(2) $\{g > 0\} \subset H_f^+$ Soit $x \in \{g > 0\}$, c'est-à-dire $g(x) > 0$. Supposons que $f(x) < 0$. Alors le segment $[x, b]$ est dans H_f^-, et donc $g(b) < 0$ impliquerait $g(x) < 0$.

□

[91] Si on en croit la proposition 12.163, ça existe parce que le noyau d'une application affine est une droite.
[92] L'expression « pour fixer les idées » signifie « je ne fais que la moitié de la démonstration, mais vous devriez être capable de la faire complètement ».
[93] Lemme 12.161.
[94] Composée d'applications continues, proposition 7.267.
[95] Corolaire 9.98 au théorème des valeurs intermédiaires.

PROPooTPHKooXnpJaV

Proposition 12.167 ([1]).
Soit une droite d dans $\mathbb{R}^2$ et une chemin dérivable $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Nous supposons que $\gamma(t_0) \in d$ et que $\gamma'(t_0)$ est non nul et non parallèle à d.

Alors il existe δ tel que pour tout $\epsilon < \delta$, $\gamma(t_0 + \epsilon)$ est dans un demi-plan de d et $\gamma(t_0 - \epsilon)$ est dans l'autre demi-plan de d.

Démonstration. Posons $a = \gamma(t_0)$. Nous considérons un vecteur $b_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $d = \{a + \lambda b_1\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, ainsi que b_2 tel que $\{b_1, b_2\}$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

Tout élément de $\mathbb{R}^2$ peut être écrit de façon unique sous la forme

$$x = a + x_1 b_1 + x_2 b_2. \tag{12.390}$$

Cela nous donne des fonctions continues $\sigma_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\gamma(t) = a + \sigma_1(t) b_1 + \sigma_2(t) b_2, \tag{12.391}$$

et que

$$\gamma'(t) = \sigma_1'(t) b_1 + \sigma_2'(t) b_2. \tag{12.392}$$

Vu que $\gamma'(t_0)$ n'est pas parallèle à la droite d, nous avons $\sigma_2'(t_0) \neq 0$. De plus $\gamma(t_0) = a$, de telle sorte que $\sigma_1(t_0) = \sigma_2(t_0) = 0$.

Que dites-vous ? La fonction dérivable $\sigma_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vaut zéro en t_0 et sa dérivée y est non nulle ? Supposons pour fixer les idées que $\sigma_2'(t_0) > 0$. Il existe donc un $\epsilon > 0$ tel que σ_2 est strictement positive sur $[t_0 - \epsilon, t_0[$ et strictement négative sur $]t_0, t_0 + \epsilon]$.

En vertu du lemme 12.165, les points de γ tels que $\sigma_2 > 0$ sont dans un demi-plan de d et les points de γ avec $\sigma_2 < 0$ sont dans l'autre demi-plan. □

DEFooIOALooFNlswL

Définition 12.168 ([1]).
*Soit un espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{K}$. Soient $a \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'**homothétie** de rapport λ centrée en a est l'application*

$$\begin{aligned} \phi\colon V &\to V \\ x &\mapsto a + \lambda(x - a). \end{aligned} \tag{12.393}$$

THOooFMMLooLmAnAd

Théorème 12.169 (Théorème de Thalès[449]).
Soient trois points A, B, C non alignés dans $\mathbb{R}^2$. Soient $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$. Nous supposons que (DE) est parallèle à BC.

Alors

(1)

$$\frac{\|D - A\|}{\|B - A\|} = \frac{\|E - A\|}{\|C - A\|} = \frac{\|E - D\|}{\|C - B\|} \tag{12.394}$$

EQooRDBYooEXWwGl

(2) Il existe une homothétie[96] $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ centrée en A telle que $\phi(D) = B$ et $\phi(E) = C$.

Démonstration. Nous définissons $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ par $B = A + u$, $C = A + v$ et $C = B + w$. Vu que D est sur la droite (AB), il existe[97] $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $D = A + \lambda u$. De même il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $E = A + \mu v$.

Le fait que (ED) soit parallèle à (CB) implique qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $E - D = \sigma w$ (proposition 12.138).

Nous écrivons C de deux façons différentes : $C = A + v$ et $C = B + w = A + u + w$, de telle sorte que $v = u + w$ ou encore

$$w = v - u. \tag{12.395}$$

D'autre part, nous avons

$$\sigma w = E - D = A + \mu v - (A + \lambda u) = \mu v - \lambda u. \tag{12.396}$$

Vu que $w = v - u$ nous avons

$$\mu v - \lambda u = \sigma w = \sigma v - \sigma u \tag{12.397}$$

EQooMTYXooLBlpBm

Vu que $\{u, v\}$ est une base[98] de $\mathbb{R}^2$, l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base ainsi que 12.397 donne que $\mu = \sigma$ et $\lambda = \sigma$. Nous avons donc déjà prouvé que

$$\mu = \sigma = \lambda. \tag{12.398}$$

[96] Définition 12.168.
[97] Proposition 12.149.
[98] Parce que les points A, B et C ne sont pas alignés, lemme 4.10.

Les équations (12.394) sont maintenant faciles à prouver parce que

$$\frac{\|D-A\|}{\|B-A\|}=\frac{\|\lambda u\|}{\|u\|}=|\lambda|, \tag{12.399}$$

et

$$\frac{\|E-A\|}{\|C-A\|}=\frac{\|\mu v\|}{\|v\|}=|\mu|, \tag{12.400}$$

et

$$\frac{\|E-D\|}{\|C-B\|}=\frac{\|\sigma w\|}{\|w\|}=|\sigma|. \tag{12.401}$$

Nous prouvons maintenant l'existence de l'homothétie. Nous avons déjà vu que

$$D-A=\lambda(B-A) \tag{12.402a}$$
$$E-A=\lambda(C-A). \tag{12.402b}$$

Maintenant nous posons $\rho=1/\lambda$ et nous considérons

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}^2\\ x&\mapsto A+\rho(x-A).\end{aligned} \tag{12.403}$$

Nous avons

$$\phi(E)=A+\rho(E-A)=A+\rho\lambda(C-A)=C, \tag{12.404}$$

et

$$\phi(D)=A+\rho(D-A)=A+\phi\lambda(B-A)=B. \tag{12.405}$$

□

THOooGFTWooACQLFJ

Théorème 12.170 (Théorème de Thalès dans le cercle[450])**.**
Soient des points M, A, B, C distincts dans $\mathbb{R}^2$ tels que

(1) $\|A-M\|=\|B-M\|=\|C-M\|$.

(2) A, M et B sont alignés.

Alors le triangle ABC est rectangle en C, c'est-à-dire que $(C-A)\cdot(B-C)=0$.

Démonstration. Vu que A, M et B sont alignés, la proposition 12.136 dit qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $B=M+\lambda(M-A)$. Nous avons donc $\|B-M\|=|\lambda|\|M-A\|$ et donc $\lambda=\pm1$. Notons qu'avec $\lambda=-1$ nous aurions $B=M-M+A$, c'est-à-dire $B=A$. Donc $\lambda=1$ et nous avons

$$B=2M-A. \tag{12.406}$$

Nous devons calculer $(C-A)\cdot(B-C)=(C-A)\cdot(2M-A-C)$. Pour cela nous substituons $2M-A-C=(M-A)+(M-C)$ et $C-A=(C-M)+(A-M)$ et nous effectuons toutes les distributivités utiles :

$$\begin{aligned}(C-A)\cdot(B-C)&=(C-A)\cdot(M-A)+(C-A)\cdot(M-C) && (12.407a)\\ &=\big((M-A)+(C-M)\big)\cdot(M-A) && (12.407b)\\ &\quad+\big((C-M)-(A-M)\big)\cdot(M-C)\\ &=\|M-A\|^2+(C-M)\cdot(M-A) && (12.407c)\\ &\quad-\|C-M\|^2-(A-M)\cdot(M-C)\\ &=0 && (12.407d)\end{aligned}$$

parce que $\|M-A\|^2=\|C-M\|^2$. □

12.14 Géométrie dans l'espace

12.171.
Les notions de droites, plans et parallélisme sont des notions vectorielles qui auraient pu être traitées beaucoup plus haut. La chose qui rend la géométrie un peu piquante est la notion de perpendicularité. Cette notion demande un produit scalaire et fait intervenir ici et là des polynômes du second degré. Travailler avec le second degré demande la connaissance des racines carrés[99] et donc d'un peu de topologie réelle et de continuité. La résolution dans $\mathbb{R}$ du polynôme du second degré est la proposition 9.118.

[99] Définition 9.100.

12.14.1 Droites et plans dans l'espace

La notion d'application affine entre espaces vectoriels est la définition 8.155.

PROPooONJHooDArmPT

Proposition 12.172 (Équation de plan dans $\mathbb{R}^3$[1])**.**
Si P est un plan dans $\mathbb{R}^3$, alors il existe $v, w \in \mathbb{R}^3$ tels que $\|v\| = \|w\| = 1$, $v \cdot w = 0$ et tels que pour tout $a \in P$, nous avons

$$P = \{a + \lambda v + \mu w \text{ tel que } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \tag{12.408}$$

Dans ce cas l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to P \\ (\lambda, \mu) &\mapsto a + \lambda v + \mu v \end{aligned} \tag{12.409}$$

est une bijection vérifiant

$$\|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\| = \|\alpha - \beta\| \tag{12.410}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$.

Démonstration. Nous démontrons la dernière formule[100]. Soient $x, y, s, t \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|\varphi(x,y) - \varphi(s,t)\|^2 &= \|a + xv + yw - a - sv - tw\| && \text{(12.411a)} \\ &= \|(x-s)v + (y-t)w\|^2 && \text{(12.411b)} \\ &= (x-s)^2 + (y-t)^2 \qquad v, w \text{ orthon.} && \text{(12.411c)} \\ &= \|(x,y) - (s,t)\|^2. && \text{(12.411d)} \end{aligned}$$

□

PROPooRACBooQdhyEg

Proposition 12.173 (Équation de droite dans l'espace[1])**.**
Soit une droite D dans $\mathbb{R}^3$. Il existe $w \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $a \in D$,

$$D = \{a + \lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{12.412}$$

PROPooQZGVooLTtyQT

Proposition 12.174 ([1])**.**
Si deux droites non confondues de $\mathbb{R}^n$ s'intersectent, alors il existe un unique plan[101] contenant les deux droites.

Démonstration. Soient deux droites D_1 et D_2. Si $a = D_1 \cap D_2$ alors la proposition 12.173 nous assure qu'il existe $v, w \in \mathbb{R}^n$ tels que $D_1 = \{a+\lambda v\}$ et $D_2 = \{a+\mu w\}$. Donc en posant $P = \{a+\lambda v+\mu w \text{ tel que } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ nous avons bien un plan contenant les deux droites.

En ce qui concerne l'unicité, un plan contenant D_1 et D_2 doit contenir les trois points a, $a+v$ et $a+w$ (qui sont non alignés parce que D_1 et D_2 sont non confondues). La proposition 12.148 donne alors l'unicité. □

Une application affine n'est pas linéaire, mais presque au sens où des incréments égaux dans le paramètre donne des incréments égaux dans la valeur.

LEMooEQEAooQaFCMW

Lemme 12.175.
Si f est affine alors pour tout $a, b, v \in V$ nous avons

$$f(a+v) - f(a) = f(b+v) - f(b). \tag{12.413}$$

Démonstration. Simple calcul :

$$f(a+v) - f(a) = u(a+v) + \alpha - u(a) - \alpha = u(a) + u(v) - u(a) = u(v). \tag{12.414}$$

Le même calcul partant de $f(b+v)$ donnera évidemment aussi $u(v)$. □

LEMooGUVMooPXtXnV

Lemme 12.176.
Soit $v_1 \in \mathbb{R}^3$. Il existe des vecteurs v_2 et v_3 tels que les v_i sont deux à deux perpendiculaires.

Démonstration. Nous considérons $w \neq v$ dans $\mathbb{R}^3$ et nous profitons de la proposition 10.49 pour poser $v_2 = v_1 \times w$. Enfin nous définissons $v_3 = v_1 \times v_2$. □

LEMooGXGCooDfgbqG

Lemme 12.177.
Soient trois éléments $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ deux à deux perpendiculaires. Si $x \perp v_1$, alors $x \in \text{Span}\{v_2, v_3\}$.

[100] Pour le reste, vous pouvez m'envoyer une preuve et je l'ajouterai.
[101] Définition 12.131(4).

Démonstration. Il faut se rappeler de la proposition 10.27 qui fait de $\{v_1, v_2, v_3\}$ une partie libre. Elle est donc une base par la proposition 4.19(2).

Soit $x \perp v_1$. Nous le décomposons dans la base $\{v_1, v_2, v_3\} : x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. En prenant le produit scalaire par v_1, et en tenant compte du fait que $v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_3 = 0$ nous trouvons $0 = v_1 \cdot x = \lambda_1 \|v_1\|^2$. Donc $\lambda_1 = 0$ et $x \in \text{Span}\{v_2, v_3\}$. □

Voici une version dans $\mathbb{R}^3$ de la proposition 12.159.

PROPooVSOQooMwxHNa

Proposition 12.178 ([1]).
Il n'existe pas de plan dans $\mathbb{R}^3$ contenant 4 points distincts équidistants.

Démonstration. Soit un plan P dans $\mathbb{R}^2$. Nous considérons la bijection

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to P \\ (\lambda, \mu) &\mapsto a + \lambda v + \mu w \end{aligned} \tag{12.415}$$

de la proposition 12.172. Si a, b, c et d sont 4 points distincts deux à deux équidistants dans P, alors les points $\varphi^{-1}(a)$, $\varphi^{-1}(b)$, $\varphi^{-1}(c)$ et $\varphi^{-1}(d)$ sont 4 points distincts deux à deux équidistants de $\mathbb{R}^2$. La proposition 12.159 dit que de tels points n'existent pas. □

12.14.2 Plan médiateur

PROPooSNUDooTxovMz

Proposition 12.179 (plan médiateur[1]).
Soient un espace euclidien V ainsi que deux points distincts $a, b \in V$. Si $m = (a+b)/2$, nous avons

$$\{x \in V \text{ tel que } x - m \perp b - a\} = \{x \in V \text{ tel que } \|x - a\| = \|x - b\|\}. \tag{12.416}$$

Dans le cas de $V = \mathbb{R}^3$, alors cet ensemble est un plan[102].

*Ce plan est le **plan médiateur** du segment $[a, b]$.*

Démonstration. Nous notons

$$M = \{x \in V \text{ tel que } x - m \perp b - a\}, \tag{12.417a}$$
$$N = \{x \in V \text{ tel que } \|x - a\| = \|x - b\|\}. \tag{12.417b}$$

(1) $\underline{M \subset N}$ Soit $x \in M$. Nous avons $(x - m) \cdot (b - a) = 0$, et nous pouvons utiliser Pythagore 10.37 dans les triangles xbm et xma : SUBEQSooVEPCooKnyPoq

$$\|x - a\|^2 = \|x - m\|^2 + \|a - m\|^2 \tag{12.418a}$$
$$\|x - b\|^2 = \|x - m\|^2 + \|m - b\|^2. \tag{12.418b}$$

Vu que m est le milieu, nous avons $a - m = m - b$ et donc $\|a - m\| = \|m - b\|$. Nous voyons donc que les membres de droites des deux équations (12.418) sont égaux. Donc $\|x - a\|^2 = \|x - b\|^2$. Comme une norme est toujours positive, les carrés peuvent être simplifiés : $\|x - a\| = \|x - b\|$.

Donc $x \in N$.

(2) $\underline{N \subset M}$ Soit $x \in N$. Nous posons $h = \texttt{proj}_{(ab)}(x)$, la projection de x sur la droite (ab). La proposition 12.151 nous dit que h est l'unique point de (ab) tel que $x - h \perp b - a$.

Le théorème de Pythagore 10.37 dans le triangle ahx donne

$$\|x - a\|^2 = \|a - h\|^2 + \|x - h\|^2 \tag{12.419}$$

et dans le triangle bhx il donne :

$$\|b - x\|^2 = \|b - h\|^2 + \|h - x\|^2. \tag{12.420}$$

Par hypothèse nous avons $\|x - a\|^2 = \|x - b\|^2$ et donc

$$\|a - h\| = \|b - h\|. \tag{12.421}$$

Nous cherchons à présent quel(s) point(s) h de la droite (ab) vérifie(nt) cette condition, et nous espérons que ce sera $(a + b)/2$.

[102] Définition 12.131.

Nous cherchons h sous la forme $h = a + \lambda(b-a)$. D'une part nous avons $\|a-h\|^2 = \|\lambda(b-a)\|^2 = \lambda^2\|b-a\|^2$, et d'autre part

$$\|b-h\|^2 = \|b-a-\lambda(b-a)\|^2 = |1-\lambda|^2\|b-a\|^2 \tag{12.422}$$

Nous en déduisons que $|\lambda| = |1-\lambda|$. Cela laisse deux possibilités : la première est $\lambda = 1-\lambda$ qui donne $\lambda = 1/2$ et la seconde est $\lambda = -(1-\lambda)$ qui est impossible. Donc $\lambda = 1/2$ et

$$h = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}. \tag{12.423}$$

Donc en posant $m = (a+b)/2$ nous avons bien $b-a \perp x-m$.

(3) **C'est un plan** Nous nous mettons maintenant dans le cas où V est l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa norme usuelle. Posons $f_1 = b-a$ et considérons deux vecteurs f_2, f_3 tels que les f_i soient deux à deux perpendiculaires (lemme 12.176).

Nous allons prouver que $M = \text{Span}\{f_2, f_3\} + m$.

(3a) **Une inclusion** Si $x \in \text{Span}(f_2, f_3)+m$, alors $x = \alpha f_2 + \beta f_3 + m$ et nous avons bien $x-m \perp b-a$.

(3b) **L'autre inclusion** Soit $x \in M$. Donc $x-m \perp b-a$. Le lemme 12.177 nous indique alors que $x-m \in \text{Span}\{f_2, f_3\}$, ce qu'il fallait.

□

12.14.3 Tétraèdre

DEFooMUUMooFVxKyb

Définition 12.180 ([1]).
*Un **tétraèdre régulier** est un ensemble de 4 points A, B, C et D de $\mathbb{R}^3$ deux à deux équidistants.*

Nous allons nommer $\{a_i\}$ les segments entre les points, $\{d_i\}$ les droites sur ces segments, et $\{s_i\}$ les sommets.

Lemme 12.181.
Un tétraèdre régulier existe.

Démonstration. Prenez un triangle équilatéral ABC dans le plan $(.,.,0)$, et prenez ensuite un point D à la verticale du centre, placé à la bonne hauteur pour que les longueurs $\|AD\|$, $\|BD\|$ et $\|CD\|$ soient égales à $\|AB\|$. □

LEMooNWELooZeSEMN

Lemme 12.182.
Si T est un tétraèdre régulier, nous avons $d_i \cap T = a_i$.

LEMooUSKVooQJiBuz

Lemme 12.183.
Les droites $\{d_i\}_{i=1,\dots,6}$ ne sont pas confondues ni parallèles.

Démonstration. Si trois points A, B, C sont alignés, il n'est pas possible d'avoir $\|AB\| = \|AC\| = \|BC\|$. Donc il n'y a pas deux droites parmi les $\{d_i\}$ qui sont confondues.

Supposons que deux des droites AB et CD sont parallèles. En particulier, les points A, B, C et D sont dans un même plan : le plan $A + \text{Span}\{B-A, C-A\}$. Il n'est pas possible d'avoir 4 points dans un plan, tous équidistants deux à deux (proposition 12.178). □

Dans la suite, quand nous parlerons du « tétraèdre », nous parlerons de ses six points et six segments les joignant. L'ensemble $T \subset \mathbb{R}^3$ ne contient pas les surfaces et les volumes.

LEMooJCMKooOjMqtw

Lemme 12.184.
Soit un tétraèdre régulier T. Un point de $\mathbb{R}^3$ est un sommet si et seulement si il est l'intersection de deux des droites $\{d_i\}$ différentes.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct**

Par définition les sommets sont les points A, B, C, D ; et les droites d_i sont les droites (AB), (AC), (AD), (BC), (DB) et (CD). Donc oui, les sommets sont à des intersections de ces droites.

(2) **Sens inverse** Soit un point $X \in \mathbb{R}^3$ à l'intersection entre deux des d_i. Nous avons déjà vu dans le lemme 12.183 que ces droites ne sont ni parallèles ni confondues. Donc elles ont au plus un point d'intersection. Voyons les couples possibles de droites. Les droites possibles sont (AB), (AC), (AD), (BC), (BD) et (CD). Il y a 15 couples possibles que nous regroupons de la façon suivante :

$$(AB),(AC) \qquad (AB),(CD) \tag{12.424a}$$
$$(AB),(AD) \qquad (AC),(BD) \tag{12.424b}$$
$$(AB),(BC) \qquad (AD),(BC) \tag{12.424c}$$
$$(AB),(BD) \tag{12.424d}$$
$$(AC),(AD) \tag{12.424e}$$
$$(AC),(BD) \tag{12.424f}$$
$$(AC),(CD) \tag{12.424g}$$
$$(AD),(BD) \tag{12.424h}$$
$$(AD),(CD) \tag{12.424i}$$
$$(BC),(BD) \tag{12.424j}$$
$$(BC),(CD) \tag{12.424k}$$
$$(BD),(CD) \tag{12.424l}$$

Dans la colonne de gauche, nous voyons tout de suite que le point d'intersection est un des sommets. Qui de la colonne de droite ? Si $(AB)\cap(CD)$ a une intersection, alors ce sont deux droites coplanaires (proposition 12.174). Dans ce cas, les points A, B, C et D sont coplanaires et équidistants. Impossible par la proposition 12.178.

On a une série de possibilités comme $(AB)\cap(AC)$. Dans ce cas, l'intersection entre ces deux droits est A qui est un des sommets. Ensuite nous avons une série de possibilités comme $(AB)\cap(CD)$. Ces deux droites n'ont pas d'intersection parce que si elles en avaient, les points A, B, C et D seraient dans le même plan, ce qui est impossible[103]. Donc deux droites d_i ont soit, pas d'intersection, soit, une intersection qui est un sommet.

□

12.15 Plan médiateur dans l'espace

LEMooVBVUooOTFFXT

Lemme 12.185.
Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^3$. Alors le plan médiateur du segment $[A,B]$ est le lieu des points de $\mathbb{R}^3$ qui sont équidistants de A et B.

Démonstration. Nous nommons σ ce plan.

Soit X un point équidistant de A et B. Alors dans le plan (A,B,X), le triangle ABX est isocèle en X, et la hauteur issue de X coupe perpendiculairement $[A,B]$ en son milieu. Cela prouve que X est dans le plan médiateur du segment $[A,B]$ (lemme 12.158).

Réciproquement, supposons que X soit dans le plan médiateur de $[A,B]$. Soit M le point du segment $[A,B]$ équidistant de A et B. Nous avons $(X,M)\perp(A,B)$. Donc le triangle A,B,X est isocèle en X et donc X est équidistant de A et B. □

12.16 Dérivée : exemples introductifs

12.16.1 La vitesse

Lorsqu'un mobile se déplace à une vitesse variable, nous obtenons la *vitesse instantanée* en calculant une vitesse moyenne sur des intervalles de plus en plus petits. Si le mobile a un mouvement donné par $x(t)$, la vitesse moyenne entre $t=2$ et $t=5$ sera

$$v_{\text{moy}}(2\to 5)=\frac{x(5)-x(2)}{5-2}.$$

Plus généralement, la vitesse moyenne entre 2 et $2+\Delta t$ est donnée par

$$v_{\text{moy}}(2\to 2+\Delta t)=\frac{x(2+\Delta t)-x(2)}{\Delta t}.$$

[103] La proposition 12.174 dit que deux droites qui ont une intersection sont coplanaires.

Cela est une fonction de Δt. Oui, mais rappellons qu'on a dans l'idée de calculer une vitesse instantanée, c'est-à-dire de voir ce que vaut la vitesse moyenne sur un intervalle très très très très petit. La notion de limite semble toute indiquée pour décrire mathématiquement l'idée physique de vitesse instantanée.

Nous allons dire que la vitesse instantanée d'un mobile est la limite quand Δt tend vers zéro de sa vitesse moyenne sur l'intervalle de temps Δt, ou en formule :

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)}{\Delta t}. \tag{12.425}$$ Eqvinstlimite

12.16.2 La tangente à une courbe

Passons maintenant à tout autre chose, mais toujours dans l'utilisation de la notion de limite pour résoudre des problèmes intéressants. Comment trouver l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$?

Essayons de trouver la tangente au point P donné de la courbe donnée à la figure 12.1.

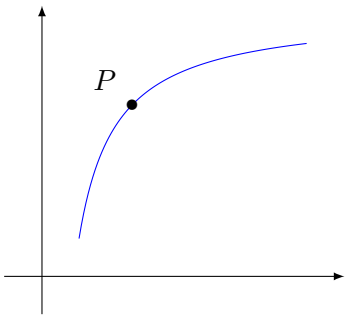


FIGURE 12.1 : Comment trouver la tangente à la courbe au point P ? LabelFigTangenteQuestion

La tangente est la droite qui touche la courbe en un seul point sans la traverser. Afin de la construire, nous allons dessiner des droites qui touchent la courbe en P et un autre point Q, et nous allons voir ce qu'il se passe quand Q est très proche de P. Cela donnera une droite qui, certes, touchera la courbe en deux points, mais en deux points *tellement proches que c'est comme si c'étaient les mêmes*. On sent que la notion de limite va encore intervenir.

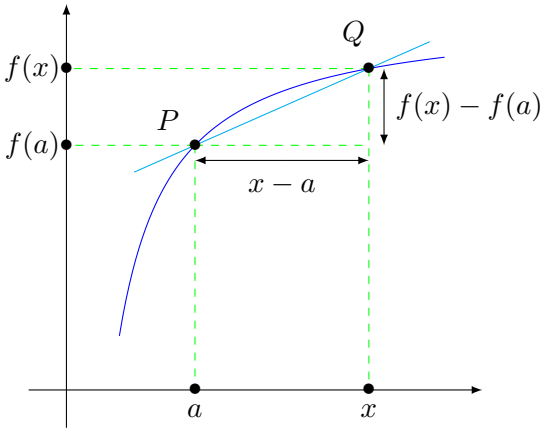


FIGURE 12.2 : Traçons d'abord une corde entre le point P et un point Q un peu plus loin. LabelFigTangenteDetail

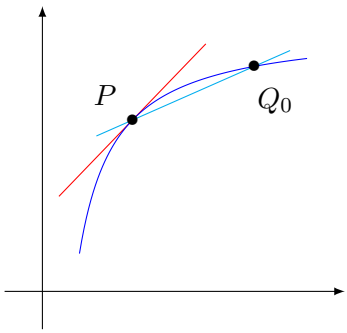
Nous avons placé le point, sur la figure 12.2, le point P en a et le point Q un peu plus loin, en x. En d'autres termes leurs coordonnées sont

$$P = \big(a, f(a)\big) \qquad\qquad Q = \big(x, f(x)\big). \tag{12.426}$$

En regardant par exemple la figure 12.2, le coefficient directeur de la droite qui passe par ces deux points est donné par

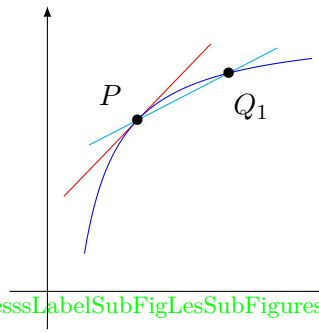
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{12.427}$$

et bang ! Encore le même rapport que celui qu'on avait trouvé à l'équation (12.425) en parlant de vitesses. En regardant la figure 12.3, on constate réellement qu'en faisant tendre x vers a, on obtient la tangente.

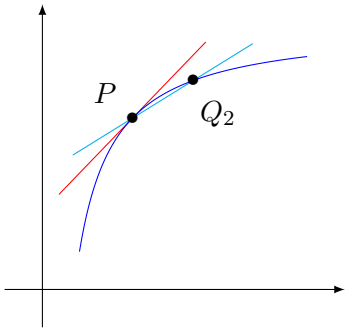


(a) Pas très bon ...

LabelFigLesSubFiguresssLabelSubFigLesSubFigures0 LabelFigLesSubI

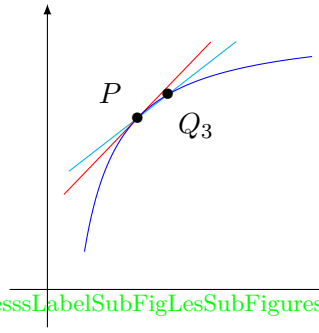


(b) ...de mieux en mieux ...



(c) ...de mieux en mieux ...

LabelFigLesSubFiguresssLabelSubFigLesSubFigures2 LabelFigLesSubI



(d) ...presque parfait

FIGURE 12.3 : Recherche de la tangente par approximations successives. LabelFigLesSubFigures

12.16.3 L'aire en dessous d'une courbe

SubSecAirePrimInto

Encore un exemple. Nous voudrions bien pouvoir calculer l'aire en dessous d'une courbe. Nous notons $S_f(x)$ l'aire en dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x, c'est-à-dire l'aire bleue de la figure 12.4.

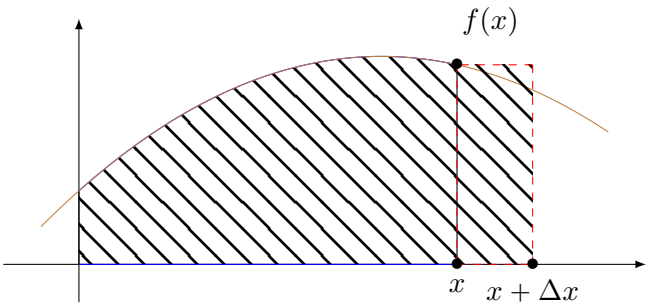


FIGURE 12.4 : L'aire en dessous d'une courbe. Le rectangle rouge d'aire $f(x)\Delta x$ approxime l'augmentation de l'aire lorsqu'on passe de x à $x + \Delta x$. LabelFigNOCGooYRHLCn

Si la fonction f est continue et que Δx est assez petit, la fonction ne varie pas beaucoup entre x et $x+\Delta x$. L'augmentation de surface entre x et $x+\Delta x$ peut donc être approximée par le rectangle de surface $f(x)\Delta x$. Ce que nous avons donc, c'est que quand Δx est très petit,

$$S_f(x + \Delta x) - S_f(x) = f(x)\Delta x, \tag{12.428}$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S_f(x + \Delta x) - S_f(x)}{\Delta x}. \tag{12.429}$$

Donc, la fonction f est la dérivée de la fonction qui représente l'aire en dessous de f. Calculer des surfaces revient donc au travail inverse de calculer des dérivées.

Nous avons déjà vu que calculer la dérivée d'une fonction n'est pas très compliqué. Aussi étonnant que cela puisse paraitre, il se fait que le processus inverse est très compliqué : il est en général extrêmement difficile (et même souvent impossible) de trouver une fonction dont la dérivée est une fonction donnée.

Une fonction dont la dérivée est la fonction f s'appelle une **primitive** de f, et la fonction qui donne l'aire en dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x est notée

$$S_f(x) = \int_0^x f(t)dt. \tag{12.430}$$

Nous pouvons nous demander si, pour une fonction f donnée, il existe une ou plusieurs primitives, c'est-à-dire si il existe une ou plusieurs fonctions F telles que $F' = f$. La réponse viendra par le corolaire 12.224.

12.17 Dérivation de fonctions réelles

seccontetderiv

Exemple 12.186.
Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ est continue et dérivable[104]. Exceptionnellement (bien qu'on sache que la dérivabilité implique la continuité), montrons ces deux assertions séparément.

Continuité Pour prouver la continuité au point $a \in \mathbb{R}$ nous devons montrer que

$$\lim_{x\to a} x = a \tag{12.431}$$

c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}\, |x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \epsilon \tag{12.432}$$

ce qui est clair en prenant $\delta = \epsilon$.

Dérivabilité Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculons la limite du quotient différentiel

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{x-a}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} 1 = 1 \tag{12.433}$$

ce qui prouve que f est dérivable et que sa dérivée vaut 1 en tout point a de $\mathbb{R}$.

On a donc montré que la fonction $x \mapsto x$ est continue, dérivable, et que sa dérivée vaut 1 en tout point a de son domaine.

△

PropSFyxOWF

Proposition 12.187.
Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Démonstration. Soit I un intervalle sur lequel la fonction f est dérivable, et soit $x_0 \in I$. Nous allons prouver la continuité de f en x_0.

Si ϵ est assez petit, nous pouvons poser

$$\begin{aligned} g\colon]-\epsilon,\epsilon[\setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \end{aligned} \tag{12.434}$$

En vertu de la proposition 12.8(2), nous avons

$$\lim_{h\to 0} hg(h) = \big(\lim_{h\to 0} h\big)\big(\lim_{h\to 0} g(h)\big) \tag{12.435a}$$
$$= 0 \cdot f'(x_0) \tag{12.435b}$$
$$= 0, \tag{12.435c}$$

autrement dit, $\lim_{h\to 0}\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) = 0$ ou encore

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0). \tag{12.436}$$

La proposition 7.231 dit alors que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce signifie la continuité de f en vertu du théorème 12.55. □

THOooFFOZooCYGets

Théorème 12.188.
Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

[104] Définition 10.281.

Démonstration. Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Nous supposons que f n'est pas continue en a et nous allons en déduire qu'elle n'est pas non plus dérivable en a. Pour cela nous considérons le lien entre limite et continuité donné dans le théorème 12.55. Nier que f est continue en a revient à dire qu'il existe un voisinage V de $f(a)$ tel que

$$\forall r > 0, \exists \epsilon < r \text{ tel que } f(a+\epsilon) \notin V. \tag{12.437}$$

Si $B\big(f(a), R\big) \subset V$[105], et si $r = 1/n$, nous construisons une suite $\epsilon_n \to 0$ telle que

$$|f(a+\epsilon_n) - f(a)| > R. \tag{12.438}$$

Avec cela nous avons

$$\frac{|f(a+\epsilon_n) - f(a)|}{\epsilon_n} > \frac{R}{\epsilon_n} \to \infty. \tag{12.439}$$

Donc la fonction f ne peut pas être dérivable en a. □

Remarque 12.189.
La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie : il existe bien des fonctions qui sont continues en un point x_0, mais qui ne sont pas dérivables en x_0. La fonction valeur absolue, $x \mapsto |x|$, par exemple est continue sur tout $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Si f est une fonction dérivable, il peut arriver que la fonction dérivée f' soit elle-même dérivable. Dans ce cas nous notons f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de la fonction f'. Cette fonction f'' est la **dérivée seconde** de f. Elle peut encore être dérivable ; dans ce cas nous notons $f^{(3)}$ sa dérivée, et ainsi de suite. Nous définissons $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ la dérivée n^{e} de f. Nous posons évidemment $f^{(0)} = f$.

12.17.1 Exemples

Exemple 12.190.
Commençons par la fonction $f(x) = x$. Dans ce cas nous avons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1. \tag{12.440}$$

La dérivée est donc 1. △

Proposition 12.191.
La dérivé de la fonction $x \mapsto x$ vaut 1, en notations compactes : $(x)' = 1$.

Démonstration. D'après la définition de la dérivée, si $f(x) = x$, nous avons

$$f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(x+\epsilon) - x}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1, \tag{12.441}$$

et c'est déjà fini. □

12.17.1.1 La fonction carré

Prenons ensuite $f(x) = x^2$. En utilisant le produit remarquable $(x^2 - a^2) = (x - a)(x + a)$ nous trouvons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = x + a. \tag{12.442}$$

Lorsque $x \to a$, cela devient $2a$. Nous avons par conséquent

$$f'(x) = 2x. \tag{12.443}$$

LemDeccCarr

Lemme 12.192.
Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

[105] Existence par la définition de la topologie métrique 7.142.

Démonstration. Utilisons la définition, et remplaçons f par sa valeur :

$$f'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} \tag{12.444a}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(x+\epsilon)^2 - x^2}{\epsilon} \tag{12.444b}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{x^2+2x\epsilon+\epsilon^2 - x^2}{\epsilon} \tag{12.444c}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon(2x+\epsilon)}{\epsilon} \tag{12.444d}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} (2x+\epsilon) \tag{12.444e}$$
$$= 2x, \tag{12.444f}$$

ce qu'il fallait prouver. □

12.17.1.2 La fonction racine carré

Considérons maintenant la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.\end{aligned} \tag{12.445}$$

Lorsque $x \to a$, nous obtenons

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \tag{12.446}$$

Notons que la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ n'existe pas en $x = 0$. En effet elle serait donnée par le quotient

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{12.447}$$

Mais si x devient très petit, la dernière fraction tend vers l'infini.

12.17.2 Interprétation géométrique de la dérivée : tangente

Considérons le **graphe** de la fonction f sur I, c'est-à-dire l'ensemble

$$\big\{\big(x, f(x)\big) \text{ tel que } x \in I\big\}. \tag{12.448}$$

Le nombre

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{12.449}$$

est la pente de la droite qui joint les points $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(a, f(a)\big)$, voir la figure 12.5.

Étant donné que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point $\big(a, f(a)\big)$, l'équation de la tangente est

$$y - f(a) = f'(a)(x-a). \tag{12.450}$$ EqTgfaen

12.17.3 Interprétation géométrique de la dérivée : approximation affine

Le fait que la fonction f soit dérivable au point $a \in I$ signifie que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \tag{12.451}$$

pour un certain nombre ℓ. Cela peut être réécrit sous la forme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell = 0, \tag{12.452}$$

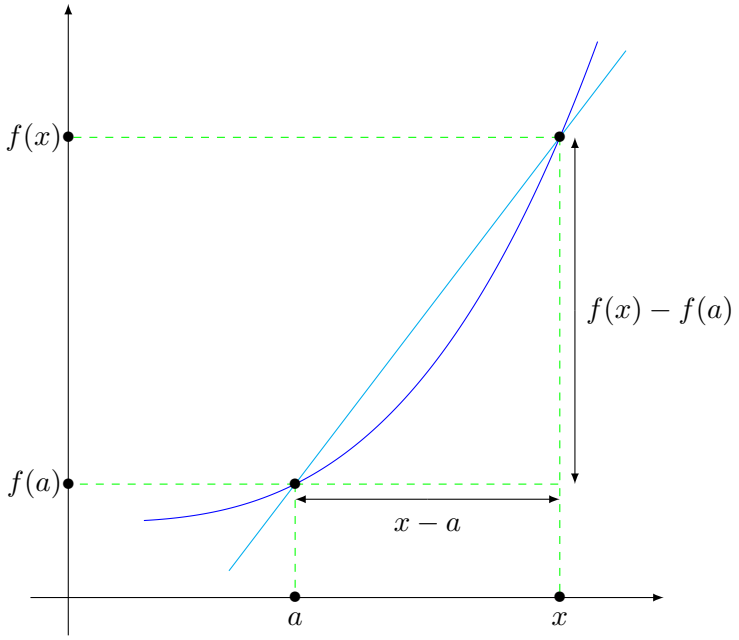


FIGURE 12.5 : Le coefficient directeur de la corde entre a et x. LabelFigGWOYooRxHKSm

ou encore

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \ell(x-a)}{x-a} = 0. \tag{12.453}$$

Introduisons la fonction

$$\alpha(t) = \frac{f(a+t) - f(a) - t\ell}{t}. \tag{12.454}$$

Cette fonction est faite exprès pour que

$$\alpha(x-a) = \frac{f(x) - f(a) - \ell(x-a)}{x-a}; \tag{12.455}$$ EqIntermsaxaama

par conséquent $\lim_{x\to a} \alpha(x-a) = 0$. Nous récrivons l'équation (12.455) sous la forme

$$f(x) - f(a) - \ell(x-a) = (x-a)\alpha(x-a). \tag{12.456}$$ EqCodeDerviffxam

Le second membre tend vers zéro lorsque x tend vers a avec une « vitesse au carré » : c'est le produit de deux facteurs tous deux tendant vers zéro. Si x n'est pas très loin de a, il n'est donc pas une mauvaise approximation de dire

$$f(x) - f(a) - \ell(x-a) \simeq 0, \tag{12.457}$$

c'est-à-dire

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a). \tag{12.458}$$ Eqfxsimesfa

Nous avons retrouvé l'équation (12.450). La manipulation que nous venons de faire revient donc à dire que la fonction f, au voisinage de a, est bien approximée par sa tangente.

L'équation (12.458) peut être aussi écrite sous la forme

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x \tag{12.459}$$ EqfxdxSimegfxfpx

qui est une approximation d'autant meilleure que Δx est petit.

12.18 Règles de calcul

D'abord une dérivée facile, qui sera utile pour démontrer la formule de dérivation d'un quotient.

Lemme 12.193.
Nous avons :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \tag{12.460}$$

Démonstration. En posant $f(x) = 1/x$, nous avons le calcul

$$\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} = \frac{\frac{1}{x+\epsilon}-\frac{1}{x}}{\epsilon} = \frac{x-(x+\epsilon)}{\epsilon x(x+\epsilon)} = \frac{-1}{x(x+\epsilon)}. \tag{12.461}$$

Nous trouvons le résultat en passant à la limite et en tenant compte de la proposition 12.11 sur la limite d'un quotient. □

PROPooOUZOooEcYKxn

Proposition 12.194 ([451, 452, 453])**.**
Nous avons les règles suivantes.

ITEMooTFNPooYngHnD

(1) Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $a \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ est dérivable en a et

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a). \tag{12.462}$$

ITEMooIPLRooOZXqMg

(2) Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors (λf) est dérivable en a et

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a). \tag{12.463}$$

ITEMooMQERooBCqnvS

(3) Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $a \in \mathbb{R}$, alors fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \tag{12.464}$$

Cette formule est appelée ***règle de Leibniz***[106]*.*

ITEMooLYZCooVUPTyh

(4) Soient deux intervalles I, J dans $\mathbb{R}$. Soient des fonctions $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$. Soit encore $a \in I$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g\circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a). \tag{12.465}$$

ITEMooMUNQooLiKffz

(5) Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ des fonctions sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$; supposons que $g(a) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \tag{12.466}$$

En particulier, la dérivation est une opération linéaire sur l'espace des fonctions infiniment dérivables.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Soit $\epsilon > 0$. Nous avons

$$\frac{(f+g)(a+\epsilon)-(f+g)(a)}{\epsilon} = \frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon} + \frac{g(a+\epsilon)-g(a)}{\epsilon}. \tag{12.467}$$

Par hypothèse, les deux termes de droite ont une limite lorsque $\epsilon \to 0$. Donc le membre de gauche a une limite qui vaut la somme des deux limites[107], c'est-à-dire $f'(a) + g'(a)$.

(2) **Pour (2)** Écrivons la définition de la dérivée avec (λf) au lieu de f, et calculons un petit peu :

$$\begin{aligned}
(\lambda f)'(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(\lambda f)(x+\epsilon)-(\lambda f)(x)}{\epsilon} && \text{(12.468a)}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\lambda\big(f(x+\epsilon)\big)-\lambda f(x)}{\epsilon} && \text{(12.468b)}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \lambda\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} && \text{(12.468c)}\\
&= \lambda \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} && \text{(12.468d)}\\
&= \lambda f'(x). && \text{(12.468e)}
\end{aligned}$$

[106] Pour des formes plus générales, voir la proposition 30.10 et le lemme 30.11.
[107] Limite de sommes, proposition 12.8(1).

(3) **Pour (3), règle de Leibniz** La définition de la dérivée dit que

$$(fg)'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) - f(x)g(x)}{\epsilon}. \tag{12.469}$$

Eqfgrimeepsfgx

La subtilité est d'ajouter au numérateur la quantité $-f(x)g(x+\epsilon) + f(x)g(x+\epsilon)$, ce qui est permis parce que cette quantité est nulle[108]. Le numérateur de (12.469) devient donc

$$\begin{aligned} f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) - f(x)g(x+\epsilon) + f(x)g(x+\epsilon) - f(x)g(x) \\ = g(x+\epsilon)\big(f(x+\epsilon) - f(x)\big) + f(x)\big(g(x+\epsilon) - g(x)\big), \end{aligned} \tag{12.470}$$

où nous avons effectué deux mises en évidence. Étant donné que nous avons deux termes, nous pouvons couper la limite en deux :

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon)\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} + \lim_{\epsilon\to 0} f(x)\frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon) \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} + f(x) \lim_{\epsilon\to 0} \frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon}, \end{aligned} \tag{12.471}$$

où nous avons utilisé le théorème 12.14 pour scinder la première limite en deux, ainsi que la proposition 12.8(2) pour sortir le $f(x)$ de la limite dans le second terme. Maintenant, dans le premier terme, nous avons évidemment[109] $\lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon) = g(x)$. Les limites qui restent sont les définitions classiques des dérivées de f et g au point x :

$$(fg)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x), \tag{12.472}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(4) **Pour (4)** Nous posons $b = f(a)$ et nous considérons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} u\colon J &\to \mathbb{R} \\ y \mapsto u(y) &= \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} & \text{si } y \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b. \end{cases} \end{aligned} \tag{12.473}$$

Vu que g est dérivable en b, la seconde ligne existe et u est continue en $y = b = f(a)$. C'est la définition de la dérivée.

Mais f est continue en a, donc $u \circ f$ est également continue en a, et nous avons

$$\lim_{x\to a} (u \circ f)(x) = u\big(f(a)\big) = u(b) = g'(b). \tag{12.474}$$

En réécrivant la définition de u en $f(x)$, l'expression suivante est une fonction continue de x :

$$u\big(f(x)\big) = \begin{cases} \dfrac{g\big(f(x)\big) - g(b)}{f(x) - b} & \text{si } f(x) \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b. \end{cases} \tag{12.475}$$

Si $f(x) \neq b$ nous avons :

$$g\big(f(x)\big) - g(b) = u\big(f(x)\big)\big(f(x) - b\big). \tag{12.476}$$

EQooKHQZooJdbmlT

Si par contre $f(x) = b$, en réalité, l'égalité (12.476) est encore valable parce qu'elle se résume à $0 = 0$. Nous divisons par $x - a$ et nous avons l'égalité

$$\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x - a} = u\big(f(x)\big)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{12.477}$$

qui est valable sur $I \setminus \{a\}$.

Il ne s'agit pas maintenant de prendre la limite $x \to a$ des deux côtés, parce que la limite du membre de gauche est précisément ce que ce théorème s'efforce de prouver exister. Nous montrons que la limite du membre de gauche existe en montrant que celle de droite existe.

[108] Nous avons déjà fait le coup d'ajouter et enlever la même chose durant la démonstration du théorème 12.14. C'est une technique assez courante en analyse.

[109] Pas tout à fait évidemment : selon le théorème 12.55, *limite et continuité*, il faut que g soit continue.

D'une part, $u \circ f$ est continue et

$$\lim_{x\to a} u\big(f(x)\big) = u\big(f(a)\big) = u(b) = g'(b). \tag{12.478}$$

D'autre part, f est dérivable en a, donc

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \tag{12.479}$$

Tout cela pour dire qu'à droite, la limite existe et vaut $g'(b)f'(a)$. Donc nous avons l'existence de la limite que nous définissons $(g \circ f)'(a)$, et la valeur

$$\lim_{x\to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x - a} = g'\big(f(a)\big)f'(a). \tag{12.480}$$

Le résultat est prouvé.

(5) **Pour (5)** Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{12.481}$$

La fonction g est dérivable en a, la fonction i est dérivable en $g(a)$. Donc par le théorème de dérivation des fonctions composées[110], la fonction $i \circ g$ est dérivable en a et

$$(i \circ g)'(a) = i'\big(g(a)\big)g'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}. \tag{12.482}$$

Pour le quotient, nous utilisons la formule de la dérivée du produit sur $\frac{f}{g}(x) = f(x)\frac{1}{g(x)}$ pour dire que f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}, \tag{12.483}$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

Remarque 12.195.
Nous ne pouvons pas dire que la dérivée est une opération linéaire sur l'espace des fonctions dérivables. Certes la proposition 12.194 implique entre autres que l'ensemble des fonctions dérivables est un espace vectoriel. Mais la dérivée d'une fonction dérivable n'est pas spécialement dérivable.

Remarque 12.196.
La formule $(1/u)' = -u'/u^2$ ne peut pas être vue comme un cas particulier de $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}$ (proposition 12.461) parce que cette formule est utilisée dans la démonstration de la formule générale.

LEMooZQIAooVbgFKo

Lemme 12.197 ([1])**.**
Soit le monôme $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donné par $f(x) = x^n$. Alors

(1) f est dérivable et $f'(x) = nx^{n-1}$

ITEMooQKYJooKqZhRS

(2) Si $k \leqslant n$ nous avons

$$f^{(k)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1}. \tag{12.484}$$

Pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, nous posons la définition suivante.

DEFooNEPUooWOMpyu

Définition 12.198.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dont les composantes $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables. Nous définissons la fonction f' par

$$f'(x) = \sum_i f_i'(x)e_i, \tag{12.485}$$

c'est-à-dire une dérivation composante par composante.

[110] Proposition 12.194(4).

Cette définition est celle pour une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, et elle est facile. Très différente est la situation d'une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans laquelle il faudra introduire la notion de différentielle[111].

LEMooXHVBooHYjXdq

Lemme 12.199.
Soit une fonction dérivable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous posons

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a+\lambda t) \end{aligned} \tag{12.486}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Alors g est dérivable et $g'(0) = \lambda f'(a)$.

Démonstration. Nous devons prouver que la limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{g(\epsilon) - g(0)}{\epsilon} \tag{12.487}$$

existe et vaut $\lambda f'(a)$. Nous y allons avec les accroissements finis 10.293 :

$$g(\epsilon) - g(0) = f(a+\lambda\epsilon) - f(a) = f(a) + \lambda\epsilon f'(a) - f(a) = \lambda\epsilon f'(a). \tag{12.488}$$

Le quotient différentiel devient donc

$$\frac{g(\epsilon) - g(0)}{\epsilon} = \frac{\lambda\epsilon f'(a)}{\epsilon} = \lambda f'(a). \tag{12.489}$$

Il n'y a donc pas de problème à passer à la limite et nous avons $g'(0) = f'(a)$. □

Par rapport à la dérivation, les produits scalaire et vectoriel vérifient une règle de Leibniz.

PROPooFKKHooQZGXhE

Proposition 12.200.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si u et v sont dans $C^1(I, \mathbb{R}^3)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(u(t) \cdot v(t)\big) &= \big(u'(t) \cdot v(t)\big) + \big(u(t) \cdot v'(t)\big) \\ \frac{d}{dt}\big(u(t) \times v(t)\big) &= \big(u'(t) \times v(t)\big) + \big(u(t) \times v'(t)\big). \end{aligned} \tag{12.490}$$

EqFormLeibProdscalVect

Démonstration. Nous considérons des fonctions dérivables $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, et nous posons $\varphi(t) = f(t) \cdot g(t)$. En ce qui concerne la dérivée de la fonction $f \cdot g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous devons étudier la limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\varphi(t+\epsilon) - \varphi(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t+\epsilon) \cdot g(t+\epsilon) - f(t) \cdot g(t)}{\epsilon}. \tag{12.491}$$

EQooGRFKooNHceiW

La fonction f étant dérivable, la proposition 10.293 nous donne une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$f(t+\epsilon) = f(t) + \epsilon f'(t) + \epsilon\alpha(\epsilon) \tag{12.492}$$

et $\lim_{\epsilon \to 0} \alpha(\epsilon) = 0$. En substituant cela dans le numérateur de (12.491) nous calculons un peu :

SUBEQSooMNAZooQjGC

$$\begin{aligned} f(t+\epsilon) \cdot g(t+\epsilon) - f(t) \cdot g(t) &= \big(f(t) + \epsilon f'(t) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big) \cdot \big(g(t) + \epsilon g'(t) + \epsilon\beta(\epsilon)\big) && \text{(12.493a)} \\ &\quad - f(t) \cdot g(t) && \text{(12.493b)} \\ &= \epsilon f(t) \cdot g'(t) + \epsilon f(t) \cdot \beta(\epsilon) && \text{(12.493c)} \\ &\quad + \epsilon f'(t) \cdot g(t) + \epsilon^2 f'(t) \cdot g'(t) + \epsilon^2 f'(t) \cdot \beta(\epsilon) && \text{(12.493d)} \\ &\quad + \epsilon\alpha(\epsilon) \cdot g(t) + \alpha(\epsilon)\epsilon^2 \cdot g'(t) + \epsilon^2\alpha(\epsilon) \cdot \beta(\epsilon). && \text{(12.493e)} \end{aligned}$$

En divisant cela par ϵ et en prenant la limite $\epsilon \to 0$, il nous reste

$$f(t) \cdot g'(t) + f'(t) \cdot g(t). \tag{12.494}$$

□

PROPooZCUSooLUUrxi

Proposition 12.201 (Exemple en dimension infinie[1])**.**
L'endomorphisme de dérivation sur l'espace des fonctions[112] $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'a pas de polynôme minimal.

[111] Ce sera pour la définition 10.279.
[112] Les classes C^k, définition 10.297.

Démonstration. Nous considérons l'opérateur de dérivation $\mathcal{D}\colon C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^{\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Comme demandé dans la définition 6.64 nous considérons la partie

$$I_{\mathcal{D}} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(\mathcal{D}) = 0\}. \tag{12.495}$$

Nous montrons que $I_{\mathcal{D}} = \{0\}$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Nous considérons $f(x) = x^{n+1}$ qui est de classe C^∞ parce que c'est ce que dit la proposition 10.301. Nous considérons aussi le plus petit k pour lequel $a_k \neq 0$. Le lemme 12.197(2) donne

$$(a_k\mathcal{D}^k)(f)(x) = a_k \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}. \tag{12.496}$$

Tous les autres termes de $P(\mathcal{D})f$ sont de degrés plus petits. Donc $P(\mathcal{D})f$ est un polynôme non nul.

Tout ça pour dire que $I_{\mathcal{D}} = \{0\}$ et que donc $\mathcal{D}$ n'a pas de polynôme minimal. □

12.18.1 Dérivée de la réciproque

PropMRBooXnnDLq

Proposition 12.202 ([454])**.**
Soit $f\colon I \to J$ une fonction bijective, continue et dérivable[113]*. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et sa dérivée est donnée par*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{12.497}$$

EQooXGJEooSRaQBe

Démonstration. Pour rappel, une fonction dérivable est toujours continue (proposition 12.187).

Prouvons que f^{-1} est dérivable au point $b = f(a) \in J$. Étant donné que f est dérivable en a, nous avons

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{12.498}$$

EqJEWooSjQrfk

Par ailleurs, étant donnée la continuité de f^{-1} donnée par la proposition 12.53(4), nous avons

$$\lim_{\epsilon\to 0} f^{-1}(b+\epsilon) = f^{-1}(b) = a. \tag{12.499}$$

Nous pouvons donc remplacer dans (12.498) tous les x par $f^{-1}(b+\epsilon)$ et prendre la limite $\epsilon \to 0$ au lieu de $x \to a$:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f\big(f^{-1}(b+\epsilon)\big) - f(a)}{f^{-1}(b+\epsilon) - a} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{b+\epsilon - f(a)}{f^{-1}(b+\epsilon) - f^{-1}(b)} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon}{f^{-1}(b+\epsilon) - f^{-1}(b)} \\ &= \frac{1}{\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f^{-1}(b+\epsilon)-f^{-1}(b)}{\epsilon}} \\ &= \frac{1}{(f^{-1})'(b)}. \end{aligned} \tag{12.500}$$

Nous avons utilisé le fait que $f(a) = b$ et $a = f^{-1}(b)$. □

Nous cherchons à construire une application dérivable et d'inverse dérivable entre $\mathbb{R}$ (en entier) et un ouvert borné de $\mathbb{R}$. Il serait tentant de prendre l'application arc tangente

$$\begin{aligned} \arctan\colon \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned} \tag{12.501}$$

mais elle ne sera définie que dans le théorème 18.39.

Nous aimerions donner le logarithme comme exemple, mais l'exponentielle ne sera définie que dans longtemps, à partir des séries entières. Allez voir l'exemple 15.105 pour le logarithme comme réciproque de l'exponentielle.

[113] Définition 10.281.

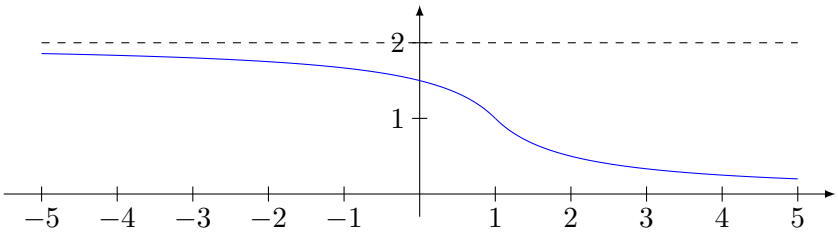
PROPooKPACooElwCbh

Proposition 12.203 (difféomorphisme entre $\mathbb{R}$ et un ouvert borné)**.**
L'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to]0,2[\\ x &\mapsto \begin{cases} 2+\frac{1}{x-2} & si\ x\leqslant 1 \\ \frac{1}{x} & si\ x>1. \end{cases} \end{aligned} \tag{12.502}$$

EQooOSPIooNWZBCa

est un C^1-difféomorphisme[114].



Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Bijection** Nous voyons vite que cette fonction est strictement décroissante ; et un calcul de limite nous dit qu'il s'agit d'une bijection dérivable

$$f\colon \mathbb{R} \to]0,2[. \tag{12.503}$$

La proposition 12.202 s'applique et la bijection réciproque est également dérivable (donc continue aussi).

(2) **Continue en $x=1$** Il suffit de calculer les deux valeurs. Dans les deux cas nous obtenons $f(1)=1$.

(3) **Dérivable en $x=1$**

En ce qui concerne la dérivabilité en $x=1$, nous devons étudier

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(1+\epsilon)-f(1)}{\epsilon}. \tag{12.504}$$

La limite à gauche est égale à la dérivée de $x\mapsto 2+\frac{1}{x-2}$ en $x=1$ et la limite à droite est égale à la dérivée de $x\mapsto 1/x$ en $x=1$. Dans les deux cas nous trouvons -1.

(4) **Dérivée continue** La proposition 12.202 dit que

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{(f'\circ f^{-1})(y)}. \tag{12.505}$$

EQooNTHEooUQqMHT

Vu que f' et f^{-1} sont continues, $f'\circ f^{-1}$ est continue[115]. Et comme elle ne s'annule pas, la formule (12.505) donne une fonction continue[116].

□

PROPooFEJXooMjsvFo

Proposition 12.204 ([455])**.**
L'application

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{R}^n &\to B(0,1) \\ x &\mapsto \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}} \end{aligned} \tag{12.506}$$

est un C^∞-difféomorphisme[117].

Démonstration. En plusieurs parties.

[114] Définition 10.302.
[115] Proposition 9.90
[116] Proposition 9.88.
[117] Définition 10.302.

(1) **Injective** Notons pour commencer que $\psi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\psi(x) = \psi(y)$. Nous avons

$$\frac{x}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2}}, \tag{12.507}$$

EQooYGIWooBxSxvd

ce qui donne immédiatement que $y = \lambda x$. Nous devons prouver que $\lambda = 1$. Nous remplaçons y par λx dans le membre de droite de (12.507). En posant $r = \|x\|^2$ nous avons

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2 r}} = \frac{1}{\sqrt{1 + r}}. \tag{12.508}$$

Nous passons au carré et nous résolvons par rapport à r : $(1 + r)\lambda^2 = 1 + \lambda^2 r$, ce qui donne $\lambda^2 = 1$ et donc $\lambda = \pm 1$. Étant donné que

$$\frac{x}{\sqrt{1 + r}} = \frac{\lambda x}{\sqrt{1 + \lambda^2 r}}, \tag{12.509}$$

nous ne pouvons avoir $\lambda = -1$ que poir $x = 0$.

(2) **surjectif** D'abord $0 = \psi(0)$. Nous considérons $y \in B(0, 1)$ et nous cherchons un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(x) = y$. Nous le cherchons sous la forme $x = \lambda y$ (où λ est une fonction de y). Nous avons à résoudre pour λ l'équation

$$\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2 \|y\|^2} = 1. \tag{12.510}$$

Cela nous mène à

$$\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}, \tag{12.511}$$

et nous vérifions qu'en posant $\lambda = 1$, c'est bon. Notons d'abord qu'il n'y a aucun problèmes de zéros parce que $y \in B(0, 1)$ donne toujours $1 - \|y\|^2 > 0$.

Maintenant, la vérification :

$$\psi\left(\frac{y}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}\right) = \frac{y}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\|y\|^2}{1 - \|y\|^2}}}. \tag{12.512}$$

En travaillant un peu nous trouvons que le tout est égal à y.

(3) **ψ est C^∞** Ça se voit sur la formule parce que ce qui est dans la racine carrée est toujours strictement positif (et même borné par 1 vers le bas).

(4) **Calcul de la réciproque** Le calcul de la réciproque est déjà fait dans la partie sur la surjectivité. Nous notons juste le résultat :

$$\begin{aligned} \psi^{-1} \colon B(0, 1) &\to \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto \frac{y}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}. \end{aligned} \tag{12.513}$$

EQooOTQZooBXiZGb

(5) **Inverse est C^∞** Cela se voit encore sur la formule (12.513), en gardant en tête que $y \in B(0, 1)$.

□

12.18.2 Dérivée de fonction composée

PROPooDONLooWthqRR

Proposition 12.205 ([456])**.**
Soient des intervalles I et J dans $\mathbb{R}$ ainsi que des fonctions $f \colon I \to \mathbb{R}$ et $g \colon J \to \mathbb{R}$ tels que $g(J) \subset I$. Soit $a \in J$. Nous supposons que f est dérivable en $g(a)$ et g est dérivable en a.

Alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) g'(a). \tag{12.514}$$

Démonstration. Nous considérons la formule des accroissements finis sous la forme (10.842). Pour la fonction g, nous écrivons

$$g(a + \epsilon) = g(a) + \epsilon g'(a) + \epsilon \alpha(\epsilon) \tag{12.515}$$

avec $\alpha(\epsilon) \to 0$. Et de même pour $f\big(g(a)\big)$:

$$f\big(g(a+\epsilon)\big) = f\big(g(a) + \epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big) \tag{12.516a}$$
$$= f\big(g(a)\big) + \big(\epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big)f'\big(g(a)\big) + \epsilon\beta\big(\epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big) \tag{12.516b}$$

avec $\beta(\epsilon) \to 0$. Nous avons donc, pour ϵ assez petit pour que tout reste dans I et J[118], que

$$\frac{(f\circ g)(a+\epsilon) - (f\circ g)(a)}{\epsilon} = \big(g'(a) + \alpha(\epsilon)\big)f'\big(g(a)\big) + \beta\big(\epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big). \tag{12.517}$$

En ce qui concerne la limite $\epsilon \to 0$, nous avons entre autres,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \beta\big(\epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big) = 0, \tag{12.518}$$

et donc bien $(f\circ g)'(a) = g'(a)f'\big(g(a)\big)$. □

12.18.3 Dérivée de fonction périodique

DEFooHUZAooYyBmwe

Définition 12.206.
*Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **périodique** si il existe $T > 0 \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f(x+T) = f(x) \tag{12.519}$$

*pour tout $x \in \mathbb{R}$. Un tel T est une **période** de f. Nous disons que T est* la *période de f si il est le minimum vérifiant la propriété.*

LEMooOGFGooCnTDjO

Lemme 12.207 ([1])**.**
Si f est une fonction périodique de période T, alors toutes les périodes sont de la forme kT avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Considérons une période t. Nous avons $t > T$ par hypothèse. Si t n'est pas un multiple de T, la division euclidienne 1.352 permet d'écrire $t = kT + l$ avec $l < T$. Nous avons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x+t) = f(x+kT+l) = f(x+l). \tag{12.520}$$

Donc l est une période de f. Cela n'est pas possible parce que T est la plus petite. □

LEMooHWQYooXcNLts

Lemme 12.208.
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique et si T est une période de f, alors f' est périodique et T en est une période.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. Par hypothèse f est dérivable en a et les limites qui suivent existent :

$$f'(a+T) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(a+T+\epsilon) - f(a+T)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} = f'(a). \tag{12.521}$$

Nous avons utilisé la condition de périodicité en a et en $a+\epsilon$. □

12.19 Dérivation et croissance

Supposons une fonction dont la dérivée est positive. Étant donné que la courbe est « collée » à ses tangentes, tant que les tangentes montent, la fonction monte. Or, une tangente qui monte correspond à une dérivée positive, parce que la dérivée est le coefficient directeur de la tangente.

Ce résultat très intuitif peut être prouvé rigoureusement. C'est la tâche à laquelle nous allons nous atteler maintenant.

PropGFkZMwD

Proposition 12.209.
Si f et f' sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ et si f' est strictement positive sur $[a,b]$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.

De la même manière, si f' est strictement négative sur $[a,b]$, alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.

[118] Et c'est là qu'on utilise la continuité de f et g garantie par la proposition 12.187.

Démonstration. Nous n'allons prouver que la première partie. La seconde partie se prouve en considérant $-f$ et en invoquant alors la première[119]. Prenons x_1 et x_2 dans $[a,b]$ tels que $x_1 < x_2$. Par hypothèse, pour tout x dans $[x_1, x_2]$, nous avons

$$f'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} > 0. \tag{12.522}$$

Maintenant, la proposition 12.13 dit que quand une limite est positive, alors la fonction dans la limite est positive sur un voisinage. En appliquant cette proposition à la fonction

$$r(\epsilon) = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \tag{12.523}$$

dont la limite en zéro est positive, nous trouvons que $r(\epsilon) > 0$ pour tout ϵ pas trop éloigné de zéro. En particulier, il existe un $\delta > 0$ tel que $\epsilon < \delta$ implique $r(\epsilon) > 0$; pour un tel ϵ, nous avons donc

$$r(\epsilon) = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} > 0. \tag{12.524}$$

Étant donné que $\epsilon > 0$, nous avons que $f(x+\epsilon) - f(x) > 0$, c'est-à-dire que f est strictement croissante entre x et $x+\epsilon$.

Jusqu'ici, nous avons prouvé que la fonction f était strictement croissante dans un voisinage autour de chaque point de $[a,b]$. Cela n'est cependant pas encore tout à fait suffisant pour conclure. Ce que nous voudrions faire, c'est de prendre un voisinage $]a, m_1[$ autour de a sur lequel f est croissante. Donc, $f(m_1) > f(a)$. Ensuite, on prend un voisinage $]m_1, m_2[$ de m_1 sur lequel f est croissante. De ce fait, $f(m_2) > f(m_1) > f(a)$. Et ainsi de suite, nous voulons construire des m_3, m_4,..., jusqu'à arriver en b. Hélas, rien ne dit que ce processus va fonctionner. Il faut trouver une subtilité. Le problème est que les voisinages sur lesquels la fonction est croissante sont peut-être de plus en plus petits, de telle sorte à ce qu'il faille une infinité d'étapes avant d'arriver à bon port (en b).

Heureusement, nous pouvons drastiquement réduire le nombre d'étapes en nous souvenant du théorème de Borel-Lebesgue 9.19. Nous notons par $\mathcal{O}_x$, un ouvert autour de x tel que f soit strictement croissante sur $\mathcal{O}_x$. Un tel voisinage existe. Cela fait une infinité d'ouverts tels que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{x\in[a,b]} \mathcal{O}_x. \tag{12.525}$$

Ce que le théorème dit, c'est qu'on peut en choisir un nombre fini qui recouvre encore $[a,b]$. Soient $\{\mathcal{O}_{x_1}, \dots, \mathcal{O}_{x_n}\}$, les heureux élus, que nous supposons pris dans l'ordre : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Nous avons

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i. \tag{12.526}$$

Quitte à les rajouter à la collection, nous supposons que $x_1 = a$ et que $x_n = b$. Maintenant nous allons choisir encore un sous-ensemble de cette collection d'ouverts. On pose $\mathcal{A}_1 = \mathcal{O}_{x_1}$. Nous savons que $\mathcal{A}_1$ intersecte au moins un des autres $\mathcal{O}_{x_i}$. Cette affirmation vient du fait que $[a,b]$ est connexe (proposition 9.54), et que si $\mathcal{O}_{x_1}$ n'intersectait personne, alors

$$\mathcal{O}_{x_1} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=2}^{n} \mathcal{O}_{x_i} \tag{12.527}$$

forment une partition de $[a,b]$ en deux ouverts disjoints, ce qui n'est pas possible parce que $[a,b]$ est connexe. Nous nommons $\mathcal{A}_2$, un des ouverts $\mathcal{O}_{x_i}$ qui intersecte $\mathcal{A}_1$. Disons que c'est $\mathcal{O}_k$. Notons que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est un intervalle sur lequel f est strictement croissante. En effet, si y_{12} est dans l'intersection, $f(a) < f(y_{12})$ parce que f est strictement croissante sur $\mathcal{A}_1$, et pour tout $x > y_{12}$ dans $\mathcal{A}_2$, $f(x) > f(y_{12})$ parce que f est strictement croissante dans $\mathcal{A}_2$.

Maintenant, nous éliminons de la liste des $\mathcal{O}_{x_i}$ tous ceux qui sont inclus dans $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Dans ce qu'il reste, il y en a automatiquement un qui intersecte $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, pour la même raison de connexité que celle invoquée plus haut. Nous appelons cet ouvert $\mathcal{A}_3$, et pour la même raison qu'avant, f est strictement croissante sur $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$.

En recommençant suffisamment de fois, nous finissons par devoir prendre un des $\mathcal{O}_{x_i}$ qui contient b, parce qu'au moins un des $\mathcal{O}_{x_i}$ contient b. À ce moment, nous avons fini la démonstration. □

PROPooKZPZooWjIsWg

Proposition 12.210 (Dérivée et croissance)**.**
Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ est

[119] Méditer cela.

(1) *Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.* ITEMooKMDXooPBnVoi

(2) *Si $f' \geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I.*

(3) *Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.*

(4) *Si $f' \leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.* ITEMooYCDQooFvFyEH

(5) *Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.* PROPooSGTBooFxUuXK

Proposition 12.211 ([457]).
Soient des intervalles I et J dans $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$ une fonction dérivable et strictement monotone. Si f' ne s'annule pas sur I alors ITEMooFXHYooRNHYPI

(1) *la fonction f est injective de I vers J,* ITEMooWPPIooDUAYsH

(2) *la fonction f^{-1} est dérivable sur J,* ITEMooTVMLooQgjLEB

(3) *et nous avons la formule*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \tag{12.528}$$ EQooELIHooDxUFxH

Démonstration. Nous supposons que f est strictement croissante sur I. Les adaptations à faire en cas de fonction strictement décroissante sont laissées à la lectrice. En plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Une fonction strictement croissante est injective.

(2) **Pour (2)** Vu que f' ne s'annule pas, la la proposition 12.202 dit que f^{-1} est dérivable.

(3) **Pour (3)** Formule 12.497.

□

12.212.
Très souvent on préfère retenir la formule

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\big((f^{-1})(y_0)\big)} \tag{12.529}$$ EqWWAooBRFNsv

Elle est très simple à retrouver : il suffit d'écrire

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \tag{12.530}$$

puis de dériver les deux côtés par rapport à x en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées de la proposition 12.205 :

$$(f^{-1})'\big(f(x)\big)f'(x) = 1. \tag{12.531}$$

12.19.1 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

ThoRolle

Théorème 12.213 (Théorème de Rolle[458, 459]).
Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Étant donné que $[a,b]$ est un intervalle compact, l'image de $[a,b]$ par f est un intervalle compact, soit $[m,M]$ (théorème 7.275). Si $m = M$, alors le théorème est évident : c'est que la fonction est constante, et la dérivée est par conséquent nulle. Supposons que $M > f(a)$ (il se peut que $M = f(a)$, mais alors si f n'est pas constante, il faut avoir $m < f(a)$ et le reste de la preuve peut être adaptée).

Comme M est dans l'image de $[a,b]$ par f, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = M$. Considérons maintenant la fonction

$$\tau(x) = \frac{f(c+x) - f(c)}{x}. \tag{12.532}$$

Par définition, $\lim_{x\to 0} \tau(x) = f'(c)$. Par hypothèse, si $u < c$,

$$\tau(u-c) = \frac{f(u) - f(c)}{u - c} > 0 \tag{12.533}$$

parce que $u-c<0$ et $f(u)-f(c)<0$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0}\tau(x)\geqslant 0$. Nous avons aussi, pour $v>c$,

$$\tau(v-c)=\frac{f(v)-f(c)}{v-c}<0 \tag{12.534}$$

parce que $v-c>0$ et $f(v)-f(c)<0$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0}\tau(x)\leqslant 0$. Mettant les deux ensemble, nous avons $f'(c)=\lim_{x\to 0}\tau(x)=0$, et c est le point que nous cherchions. □

Voici une généralisation du théorème de Rolle, dans le cas où nous n'aurions pas deux points sur lesquels la fonction est identique, mais deux points en lesquels la limite de la fonction est identique. Typiquement, lorsque les points en question sont $\pm\infty$.

THOooXDTBooFeSZoK

Théorème 12.214 (Généralisation du théorème de Rolle[458])**.**
Soient $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$. Soit une fonction dérivable $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to b}f(x)=\ell \tag{12.535}$$

avec $\ell\in\bar{\mathbb{R}}$. Alors il existe $x\in]a,b[$ tel que $f'(x)=0$.

Démonstration. Soit un difféomorphisme[120] strictement croissant $\varphi\colon\mathbb{R}\to]\alpha,\beta[$. Pour cela vous pouvez bricoler quelque chose à partie de la proposition 12.203. Mais n'utilisez pas la fonction arc tangente, parce qu'elle n'est définie qu'au théorème 18.39.

Nous posons $\tilde{a}=\varphi(a)$, $\tilde{b}=\varphi(b)$ et

$$g=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon]\tilde{a},\tilde{b}[\to]\alpha,\beta[. \tag{12.536}$$

Cela est une fonction dérivable et continue sur $[\tilde{a},\tilde{b}]$ en posant $g(\tilde{a})=g(\tilde{b})=\varphi(\ell)$.

Donc il existe $\tilde{c}\in]\tilde{a},\tilde{b}[$ tel que $g'(\tilde{c})=0$. En posant $c=\varphi^{-1}(\tilde{c})$ nous avons $c\in]a,b[$ et, en utilisant de nombreuses fois la règle de dérivation des fonctions composées 12.194(4),

$$\begin{aligned}
f'(c)&=f'\big(\varphi^{-1}(\tilde{c})\big) && \text{(12.537a)}\\
&=(\varphi^{-1})'\Big((g\circ\varphi)\big(\varphi^{-1}(\tilde{c})\big)\Big)(g\circ\varphi)'\big(\varphi^{-1}(\tilde{c})\big) && \text{(12.537b)}\\
&=(\varphi^{-1})'\big(g(\tilde{c})\big)\underbrace{g'(\tilde{c})}_{=0}\varphi'\big(\varphi^{-1}(\tilde{c})\big) && \text{(12.537c)}\\
&=0. && \text{(12.537d)}
\end{aligned}$$

□

Une autre généralisation du théorème de Rolle, avec des dérivées d'ordre supérieur :

PROPooCPCAooJjOZNy

Proposition 12.215 ([460])**.**
Soit un intervalle ouvert $I\subset\mathbb{R}$ contenant a,b $(a\neq b)$. Soit une fonction $f\in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Si $f(a)=f(b)$ et si $f^{(j)}(a)=0$ pour $j=1,\dots,n$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f^{(n+1)}(c)=0$.

Démonstration. Le théorème de Rolle 12.213 nous dit qu'il existe $c_1\in]a,b[$ tel que $f'(c_1)=0$. Mais alors $f'(a)=f'(c_1)=0$, et le théorème de Rolle appliqué à f' donne $c_2\in]a,c_1[$ tel que $f''(c_2)=0$. Continuant ainsi n fois, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f^{(n+1)}(c)=0$. □

Le théorème suivant est le théorème des **accroissements finis**. Une version avec des dérivées partielles sera la proposition 12.261.

ThoAccFinis

Théorème 12.216 (Accroissements finis)**.**
Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

ITEMooFZONooXJqLyX

(1) Il existe au moins un réel $c\in]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{12.538}$$

Autrement dit, la tangente en c est parallèle à la corde entre a et b.

ITEMooXRQKooDBFpdQ

(2) Nous avons la majoration

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leqslant\sup_{x\in]a,b[}|f'(x)||b-a|. \tag{12.539}$$

[120] Définition 10.302.

Démonstration. Considérons la fonction

$$\tau(x) = f(x) - \Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(a) - a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big), \tag{12.540}$$

c'est-à-dire la fonction qui donne la distance entre f et le segment de droite qui lie $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$. Par construction, $\tau(a) - \tau(b) = 0$, donc le théorème de Rolle s'applique à τ pour laquelle il existe donc un $c \in]a, b[$ tel que $\tau'(c) = 0$.

En utilisant les règles de dérivation, nous trouvons que la dérivée de τ vaut

$$\tau'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{12.541}$$

donc dire que $\tau'(c) = 0$ revient à dire que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$, ce qu'il fallait démontrer.

La majoration est une conséquence immédiate, parce que le supremum de $|f'(x)|$ est forcément plus grand que $|f'(c)|$. □

THOooRALIooVGDcFi

Théorème 12.217 (Inégalité des accroissements finis[461])**.**
Soit une application $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Soient m et M tels que $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a) \tag{12.542}$$

Une généralisation pour une fonction sur un intervalle $]a, b[$ où a et b peuvent être infinis.

THOooRIIBooOjkzMa

Théorème 12.218 (Généralisation des accroissements finis)**.**
Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f, g des fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

Si $a = -\infty$:

- *Nous demandons la continuité sur $]-\infty, b]$ et la dérivabilité sur $]-\infty, b[$.*
- *Nous notons $f(a)$ la limite $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, et nous supposons qu'elle est finie.*

Mêmes conventions si $b = +\infty$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c). \tag{12.543}$$

Démonstration. Nous posons

$$h(t) = \big(g(b) - g(a)\big)f(t) - \big(f(b) - f(a)\big)g(t). \tag{12.544}$$

Nous avons $\lim_{t\to a} h(t) = \lim_{t\to b} h(t)$, de telle sorte que le théorème de Rolle généralisé 12.214 s'applique et il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. Pour ce c nous avons

$$0 = h'(c) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(c), \tag{12.545}$$

et donc

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c). \tag{12.546}$$

□

12.19.2 Règle de L'Hôpital

PROPooBZHTooHmyGsy

Proposition 12.219 (Règle de L'Hôpital pour $\frac{0}{0}$[462])**.**
Soient des fonctions f, g dérivables sur $]a, b[$ et dont la limite en a est nulle. Si g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et si

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \tag{12.547}$$

alors

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{12.548}$$

EQooJHWYooLGdbPH

Ici $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, et les hypothèses garantissent l'existence de la limite (12.548).

Démonstration. Soit $x \in]a,b[$. Les fonctions f et g sont dérivables sur $]a,x[$ et continues sur $[a,x]$, de telle sorte que le théorème 12.218 s'applique et nous avons $c_x \in]a,x[$ tel que

$$\big(f(x)-f(a)\big)g'(c_x) = \big(g(x)-g(a)\big)f'(c_x). \tag{12.549}$$

Nous nous souvenons de ce que signifient les notations dans le théorème : les notations $f(a)$, $f(x)$, $g(a)$ et $g(x)$ désignent en réalité les limites. Donc dans (12.549), nous avons $f(a)=g(a)=0$.

D'autre part nous avons $g(x) \neq g(a)$, sinon le théorème de Rolle 12.214 annulerait g' quelque part dans $]a,x[$. Nous pouvons donc réécrire (12.549) sous la forme

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{12.550}$$

Mais $\lim_{x\to a^+} c_x = a$ parce que $c_x \in]a,x[$. Donc la limite du membre de droite de (12.550) lorsque $x \to a^+$ existe et vaut ℓ. La même limite à gauche doit alors exister et valoir la même valeur. □

Proposition 12.220 (L'Hôpital pur $\frac{\infty}{\infty}$).
Soient f et g deux fonctions

(1) dérivables sur $]a,b[$,

(2) dont les limites en a sont toutes deux ∞,

(3) $g' \neq 0$ sur $]a,b[$.

(4)

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}. \tag{12.551}$$

Alors

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{12.552}$$

Cette dernière égalité signifie « la limite existe et vaut ℓ ».

Démonstration. Soit un intervalle $]x,y[$ strictement inclus dans $]a,b[$ avec $x,y \in \mathbb{R}$. Par le théorème des accroissements finis généralisés 12.218 il existe $c \in]x,y[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{12.553}$$

Notons que le dénominateur à gauche n'est pas nul à cause du théorème de Rolle et de l'hypothèse que g' ne s'annule pas sur $[x,y]$. Nous isolons $f(x)$:

$$f(x) = \frac{f'(c)}{g'(c)}\Big(g(x)-g(y)\Big) + f(y). \tag{12.554}$$

Avant de diviser par $g(x)$ nous devons prendre quelques précautions. Soit V, un voisinage de ℓ[121]. Vu la limite (12.551), il existe $y \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} \in V \tag{12.555}$$

pour tout $t \in]a,y[$. Nous utilisons ici avec subtilité le fait que ces intervalles sont une base de la topologie autour de ∞. Maintenant $f(y)$ et $g(y)$ sont fixés et sont des nombres réels. Vu que $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ nous pouvons choisir $r < y$ tel que nous ayons simultanément

(1) $g(x) \neq 0$ sur $]a,r[$,

(2)

$$\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| \leqslant \epsilon \tag{12.556}$$

et

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| \leqslant \epsilon \tag{12.557}$$

pour tout $x \in]a,r[$.

[121] Vous savez ce que signifie un « voisinage de ∞ » ? Allez voir la définition 12.26.

Nous sommes maintenant armés de y et r satisfaisant tout cela et nous pouvons traiter avec la formule (12.554) en ne la considérant que pour $x \in]a,r[$. Soit $x \in]a,r[$; il existe $c_x \in]a,x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}. \tag{12.558}$$ EQooNEZQooYGJmFW

Nous avons :

(1) $\lim_{x\to a^+} c_x = a$,

(2)
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \tag{12.559}$$

(3)
$$\lim_{x\to a^+} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) = 1, \tag{12.560}$$

(4) $\lim_{x\to a^+} \frac{f(y)}{g(x)} = 0$.

Donc chaque partie du membre de droite de (12.558) a une limite bien déterminée pour $x \to a^+$. Les règles de calcul s'appliquent et nous avons

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \times 1 + 0 = \ell. \tag{12.561}$$

□

12.19.3 Dérivée et primitive

CORooEOERooYprteX

Corolaire 12.221.
Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors f est constante sur $[a,b]$.

Démonstration. Si f n'était pas constante sur $[a,b]$, il existerait un $x_1 \in]a,b[$ tel que $f(a) \neq f(x_1)$, et dans ce cas, il existerait, par le théorème des accroissements finis 12.216, un $c \in]a,x_1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \neq 0, \tag{12.562}$$

ce qui contredirait les hypothèses. □

CorNErEgcQ

Corolaire 12.222.
Soient f et g, deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que

$$f'(x) = g'(x) \tag{12.563}$$

pour tout $x \in [a,b]$. Alors il existe un réel C tel que $f(x) = g(x) + C$ pour tout $x \in [a,b]$.

Démonstration. Considérons la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$, dont la dérivée est, par hypothèse, nulle. L'annulation de la dérivée entraine par le corolaire 12.222 que h est constante. Si $h(x) = C$, alors $f(x) = g(x) + C$, ce qu'il fallait prouver. □

DefXVMVooWhsfuI

Définition 12.223.
*Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable sur I et si $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans I.*

Exprimé en termes des primitives, le corolaire 12.222 signifie que

CorZeroCst

Corolaire 12.224.
Si F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle, alors il existe une constante C pour laquelle $F(x) = G(x) + C$.

Cela signifie qu'il n'y a, en réalité, pas des milliards de primitives différentes à une fonction. Il y en a essentiellement une seule, et puis les autres, ce sont juste les mêmes, mais décalées d'une constante.

Remarque 12.225.
L'hypothèse de se limiter à un intervalle est importante parce que si on considère la fonction sur deux intervalles disjoints, nous pouvons choisir la constante indépendamment dans l'un et dans l'autre. Par exemple la fonction

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(x) - 7 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{12.564}$$

est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Certains ne s'en privent pas. Le logiciel Sage par exemple fait ceci :

```
sage: f(x)=1/x
sage: F=f.integrate(x)
sage: A=F(x)-F(-x)
sage: A.full_simplify()
I*pi
```

En réalité lorsque $x > 0$, Sage définit $\ln(-x) = \ln(x) + i\pi$. Cela a une certaine logique parce que $\ln(-1) = i\pi$ (du fait que $e^{i\pi} = -1$), mais si on ne le sait pas, ça peut étonner.

12.226.
Il existe plusieurs primitives à une fonction donnée. En physique, la constante arbitraire est souvent fixée par une condition initiale, comme nous le verrons dans la section 42.1.

12.20 Fonctions de plusieurs variables

La physique, et les sciences en général, regorgent de fonctions à plusieurs variables.

Accélération centripète [122] Si une masse m tourne sur un cercle, elle subira une accélération dirigée vers l'intérieur égale à

$$F(v, r) = \frac{mv^2}{r} \tag{12.565}$$

où r est le rayon du cercle et v est la vitesse.

Pression dans un gaz Si on a n moles de gaz dans un volume V a une température T, alors la pression sera donnée par la fonction de trois variables

$$p = \frac{nRT}{V} \tag{12.566}$$

où R est la constante des gaz parfaits.

En mathématique, on peut inventer de nombreuses fonctions de plusieurs variables. La fonction

$$f(x, y) = x^2 + xy \cos(x^2 + y^3) \tag{12.567}$$

est définie sur $\mathbb{R}^2$. La fonction

$$f(x, y, z) = \frac{x + y - 2z}{1 - x^2 - y^2 - z^2} \tag{12.568}$$

est définie sur $\mathbb{R}^3$ moins la sphère unité $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Consacrons nous à l'étude des fonctions de plusieurs variables, en donnant tout d'abord quelques indications sur comment «dessiner» une telle fonction. Vous connaissez déjà la définition de graphe pour une fonction f d'une seule variable à valeurs dans $\mathbb{R}$: c'est l'ensemble des points du plan de la forme $(x, f(x))$. Vous voyez que cet ensemble n'est pas vraiment un gros morceau de $\mathbb{R}^2$ parce que son intérieur est vide : il y a une seule valeur de f qui correspond au point x, donc une boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en $(x, f(x))$ de n'importe quel rayon contient toujours des points qui ne font pas partie du graphe de f.

Nous voulons donner une définition assez générale pour le graphe d'une fonction.

Définition 12.227.
*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Le **graphe** de f est la partie de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de la forme*

$$\operatorname{Graph} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \,|\, y = f(x)\}. \tag{12.569}$$

[122] Appelez la « centrifuge » si vous voulez ; ça ne me fait ni chaud ni froid.

Cette définition se spécialise de la façon suivante dans les cas communs. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. Le graphe de f est la partie de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ donné par

$$\text{Graph } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \,|\, y = f(x)\}. \tag{12.570}$$

Et pour les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\text{Graph } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z = f(x, y)\}. \tag{12.571}$$

C'est cette définition qu'il faut garder à l'esprit lorsqu'on travaille sur des dessins en trois dimensions.

Si f est une fonction de deux variables indépendantes x et y à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors un point dans le graphe de f est un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$z = f(x, y), \tag{12.572}$$

ou encore, un point de la forme

$$\big(x, y, f(x, y)\big). \tag{12.573}$$

Nous avons parfois besoin de donner des représentations graphiques d'une fonction. Nous pouvons, par exemple, penser à la fonction qui associe à un point de la Terre, son altitude. Lorsqu'on part pour une promenade en montagne on a envie de connaitre le graphe de cette fonction qui correspond en fait à la surface de la montagne. Bien sûr, nous ne voulons pas amener avec nous un modèle en 3D de la montagne, donc il nous faut une méthode efficace pour projeter le graphe de f sur le plan x-y tout en gardant les informations fondamentales. Pour cela nous avons besoin de deux définitions (à ne pas confondre !)

Définition 12.228.
*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et soit c dans $\mathbb{R}$. La **z-section** de* Graph f *à la hauteur c est donnée par*

$$S_c^z = \{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x, y) = c\}.$$

def_niveau

Définition 12.229.
*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit c dans $\mathbb{R}$. La **courbe de niveau** de f à la hauteur c est l'ensemble*

$$N_c = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x_1, \dots, x_n) = c\}. \tag{12.574}$$

On peut représenter la fonction f d'une façon très précise en traçant quelques-unes de ses courbes de niveau. Dans la suite, on pourra considérer aussi les x-sections et les y-sections du graphe d'une fonction de deux variables. La x-section de Graph f à la hauteur a est

$$S_a^x = \{(a, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(a, y) = z\}.$$

Comme vous avez peut être déjà compris, S_a^x est le graphe de la fonction de y qu'on obtient de f en fixant $x = a$. Cette fonction est appelée x-section de f pour $x = a$.

Certaines surfaces dans $\mathbb{R}^3$ sont le graphe d'une fonction.

Exemple 12.230.
Quelques graphes importants.

Un plan non vertical Tout plan dans $\mathbb{R}^3$ peut être décrit par une équation de la forme

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = r,$$

où, (x_0, y_0, z_0) est vecteur dans $\mathbb{R}^3$, et a, b, c et r sont des nombres réels. Si $c \neq 0$ alors le plan n'est pas vertical et on peut dire qu'il est le graphe de la fonction

$$P(x, y) = \frac{r + cz_0 - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{c},$$

quitte à choisir des nouvelles constantes s, t, q,

$$P(x, y) = sx + ty + q.$$

Un paraboloïde elliptique Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$ les graphes des fonctions

$$PE_1(x, y) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

ou de la fonction

$$PE_2(x, y) = -\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$$

sont des paraboloïdes elliptiques. Le premier est contenu dans le demi-espace $z \geqslant 0$, l'autre dans $z \leqslant 0$. Le nom de cette surface vient de la forme de ses sections. En fait toutes sections S_c^z sont des ellipses, alors que les sections S_a^x et S_b^y sont des paraboles.

Un paraboloïde hyperbolique (selle) Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$ les graphes des fonctions

$$PH_1(x,y) = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$$

ou de la fonction

$$PH_2(x,y) = -\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

sont des paraboloïdes hyperboliques. Remarquez que les sections S_c^z de ce graphe sont des hyperboles, alors que les sections S_a^x et S_b^y sont des paraboles.

Une demi-sphère La fonction $S^+(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ a pour graphe la demi-sphère supérieure centrée en l'origine et de rayon R. Le dernier de ces exemples nous signale une chose très importante : une sphère entière n'est pas le graphe d'une fonction de x et y. Par contre, une demi-sphère est bien le graphe de la fonction $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

L'équation que nous utilisons pour décrire une sphère de rayon R centrée en l'origine est

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Donc, à chaque point (x,y) dans le disque $x^2+y^2 \leqslant R^2$ (notez que ce disque est contenu dans la section S_0^z), on peut associer deux valeurs de z : $z_1 = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ et $z_2 = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Par définition, une fonction n'associe qu'une seule valeur à chaque point de son domaine, d'où l'impossibilité de décrire cette sphère comme le graphe d'une fonction de x et y.

△

Considérons la fonction $Sp : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui associe à (x,y,z) la valeur $x^2 + y^2 + z^2$. La sphère de rayon R centrée en l'origine est l'ensemble de niveau N_{R^2} de Sp. L'ensemble de niveau N_0 de Sp est l'origine, et tous les ensembles de niveau de hauteur négative sont vides. La même chose est vraie pour les ellipsoïdes centrées en l'origine avec les axes x, y et z comme axes principaux et comme longueurs de demi-axes a, b et c. Voici la fonction dont il sont les ensembles de niveau

$$El(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Exemple 12.231.
Des ensembles de niveau importants.

Tout graphe Le graphe de toute fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ peut être considéré comme l'ensemble de niveau zéro de la fonction $F(x,y,z) = z - f(x,y)$.

Hyperboloïdes Les hyperboloïdes, comme les ellipsoïdes, sont une famille d'ensemble de niveau. En particulier, nous considérons des hyperboloïdes dont l'axe de symétrie est l'axe des z et qui sont symétriques par rapport un plan x-y. Une fois que les paramètres a, b et c sont fixés la fonction que nous intéresse est

$$Hyp(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

Les ensembles de niveau N_d pour $d > 0$ sont connexes, on les appelle *hyperboloïdes à une feuille*. L'ensemble de niveau N_0 est un *cône (elliptique)*, les deux moitiés du cône se touchent en l'origine. Enfin, les ensembles de niveau N_d pour $d < 0$ ne sont pas connexes et pour cette raison on les appelle *hyperboloïdes à deux feuilles*.

△

12.20.1 Graphes de fonctions à plusieurs variables

Le **graphe** d'une fonction de deux variables $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Big\{\big(x,y,f(x,y)\big) \text{ tel que } (x,y) \in D\Big\} \subset \mathbb{R}^3. \tag{12.575}$$

Ce graphe est une surface dans $\mathbb{R}^3$.

ExempleTroisDxxyy

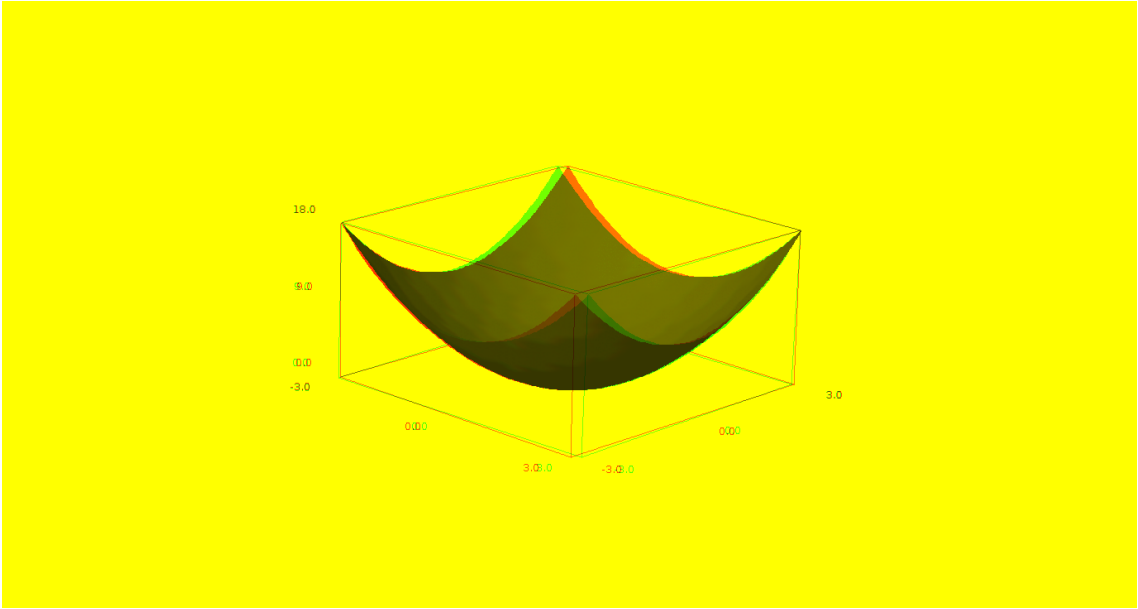
Exemple 12.232.
Tracer le graphe de la fonction

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2. \tag{12.576}$$

Le plus simple est de demander à Sage de nous fournir une représentation 3D

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y)=x**2+y**2
sage: plot3d(f,(x,-3,3),(y,-3,3))
```

Voici ce que cela donne[123] : (à regarder avec des lunettes bleues et rouges) :



À part que l'ordinateur l'a dit, est-ce qu'on peut comprendre pourquoi le graphe de la fonction $x^2 + y^2$ ressemble à un bol ? En coordonnées cylindriques, le graphe s'écrit

$$z = r^2. \tag{12.577}$$

Donc il apparaît que plus on s'éloigne du point $(0, 0)$ dans le plan XY, plus le graphe va monter. Et il monte à quelle vitesse ? Il monte à la vitesse r^2. Il s'agit donc de dessiner la fonction $z = r^2$ dans le plan et de la « faire tourner ». △

12.20.2 Courbes de niveau

Une technique utile pour se faire une idée de la forme d'une fonction en trois dimensions est de tracer les **courbes de niveau**. La courbe de niveau de hauteur h est la courbe dans le plan donnée par l'équation

$$f(x, y) = h. \tag{12.578}$$

Exemple 12.233.
Dessinons par exemple les courbes de niveau de la fonction

$$f(x, y) = x + y + 2. \tag{12.579}$$

La courbe de niveau h est donnée par l'équation $x + y + 2 = h$, c'est-à-dire

$$y(x) = -x + h - 2. \tag{12.580}$$

Par conséquent la courbe de niveau de hauteur 0 est $y = -x - 2$, celle de hauteur 5 est $y = -x + 3$, etc.

Nous pouvons également nous aider de Sage pour ce faire :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
```

[123] En vrai, ce que Sage donne est un objet qu'on peut même faire bouger.

```
sage: f(x,y)=x+y+2
sage: var('h')
h
sage: niveau(h,x)=solve(f(x,y)==h,y)[0].rhs()
sage: g1(x)=niveau(1,x)
sage: g1
x |--> -x - 1
```

Ici la fonction `g1` est la courbe de niveau 1.

Si on veut faire tracer une courbe de niveau, Sage peut le faire :

```
sage: implicit_plot(f(x,y)==1,(x,-3,3),(y,-4,4))
```

Cela tracera la courbe de niveau $h = 1$ dans la partie du plan $x \in [-3, 3]$ et $y \in [-4, 4,]$.

△

Il est bien entendu possible de créer automatiquement 50 courbes de niveau et de demander de les tracer toutes sur le même graphe.

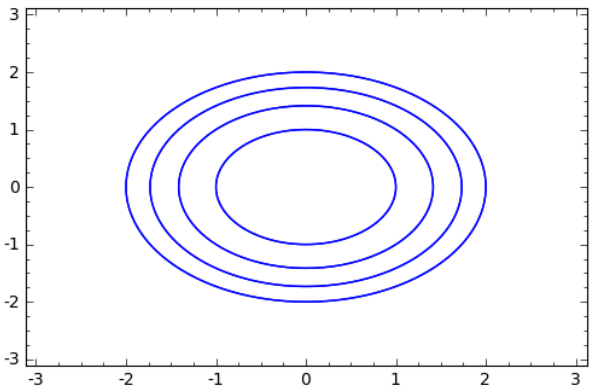
```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

var('x,y')
f=x**2+y**2
G=Graphics()
a=3
for i in range(0,5):
  G=G+implicit_plot(f==i,(x,-a,a),(y,-a,a))
show(G)
```

tex/frido/courbeNiveau.py

Le résultat est :



Notez que les courbes sont censées être des cercles : les axes X et Y n'ont pas la même échelle.

Exemple 12.234.
Un exemple plus riche en enseignements est celui de la fonction

$$f(x, y) = x^2 - y^2. \tag{12.581}$$

La courbe de niveau h est donnée par l'équation $x^2 - y^2 = h$.

Commençons par $h = 0$. Dans ce cas nous avons $(x + y)(x - y) = 0$ et par conséquent les courbes de niveau de hauteur zéro sont les deux droites $x + y = 0$ et $x - y = 0$.

Voyons ensuite la courbe de niveau $h = 1$. Cela est l'équation $x^2 - y^2 = 1$, c'est-à-dire

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}. \tag{12.582}$$

C'est une fonction qui n'est définie que pour $|x| \geqslant 1$. Avec $x = 1$ nous avons $y = 1$. Ensuite, lorsque x grandit, y grandit également, mais la courbe ne peut pas croiser la courbe de niveau $h = 0$. Donc, suivant les notations de la figure 12.6, la courbe de niveau « part » de P et doit monter sans croiser les diagonales.

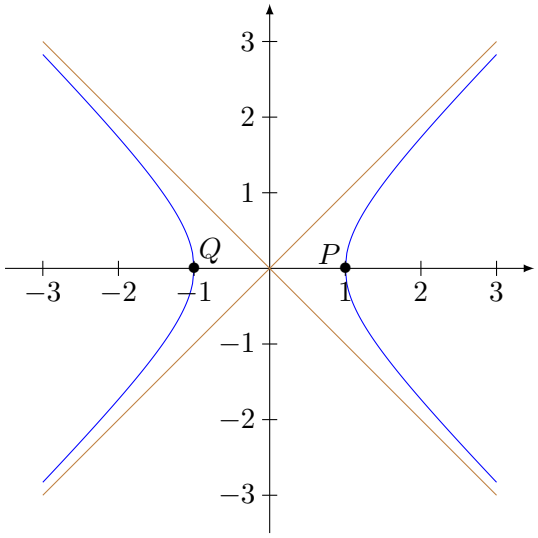


FIGURE 12.6 : La courbe de niveau $h = 1$ de $x^2 - y^2$. Notez qu'elle est en deux morceaux. LabelFigGQXooBEDnfK

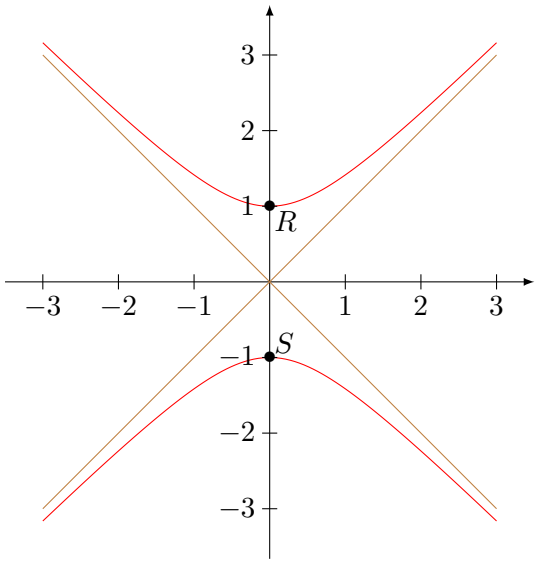


FIGURE 12.7 : La courbe de niveau $x^2 - y^2 = -1$. LabelFigKGQXooZFNVnW

En ce qui concerne la courbe de niveau $h = -1$, elle correspond à la courbe $y = \pm\sqrt{1 + x^2}$ qui est définie pour tous les $x \in \mathbb{R}$. Le même raisonnement que précédemment nous amène à la figure 12.7. △

Une autre façon de voir les courbes de niveau est de dire que la courbe de niveau de hauteur h est la projection dans le plan XY de la section du graphe de f par le plan $z = h$.

On peut également définir le graphe de fonctions de trois (ou plus) variables. Le graphe de la fonction $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\big\{\big(x, y, z, f(x, y, z)\big) \text{ tel que } (x, y, z) \in D\big\} \subset \mathbb{R}^4. \tag{12.583}$$

De tels graphes ne peuvent pas être représentés sur une feuille de papier. Il est toutefois possible de définir les ensembles de niveaux :

$$E_h = \big\{(x, y, z) \in D \text{ tel que } f(x, y, z) = h\big\}. \tag{12.584}$$

Ce sont des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ que l'on peut dessiner.

Exemple 12.235.
Les surfaces de niveau de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sont des sphères. Il n'y a pas de surfaces de niveau pour les « hauteurs » négatives. △

Exemple 12.236.
Considérons la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. En coordonnées cylindriques, cette fonction s'écrit

$$f(r,\theta,z) = r^2 - z^2. \tag{12.585}$$

La surface de niveau 0 est donnée par l'équation $r = |z|$. Cela fait un cercle à chaque hauteur, dont le rayon grandit linéairement avec la hauteur ; le tout est donc un cône. C'est d'ailleurs le cône obtenu par rotation de la courbe de niveau $h = 0$ que nous avions obtenu pour la fonction $x^2 - y^2$.

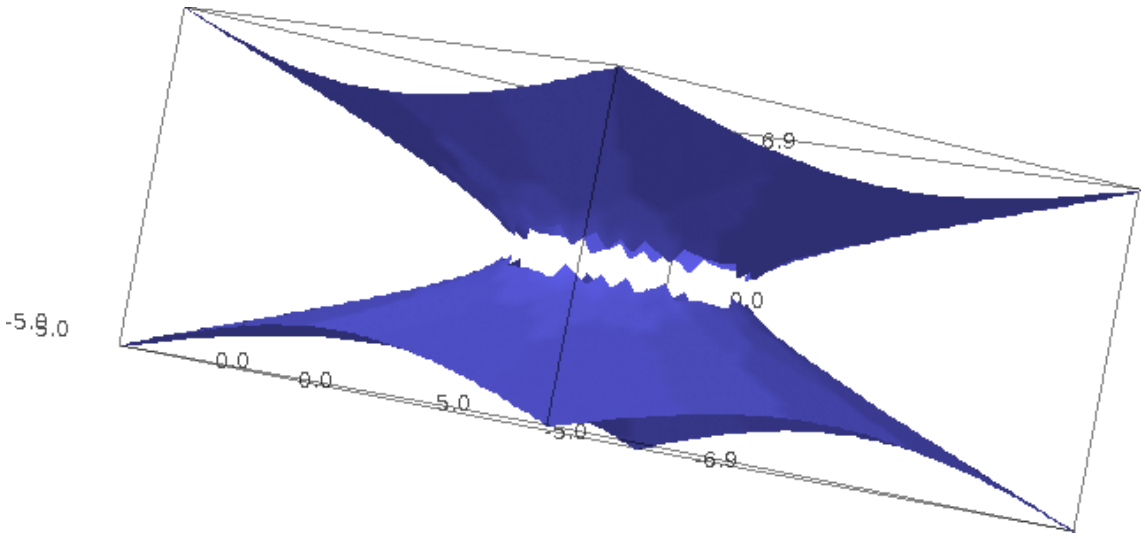
En ce qui concerne les ensembles de niveau positifs, ils sont donnés par

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - h}. \tag{12.586}$$

Notez qu'ils ne sont pas définis pour $r \geqslant h$. Cela pose un petit problème quand on veut le tracer à l'ordinateur :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=sqrt(x**2+y**2-3)
sage: F=plot3d(f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5))
sage: G=plot3d(-f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5))
sage: F+G
```

Le résultat est[124] :

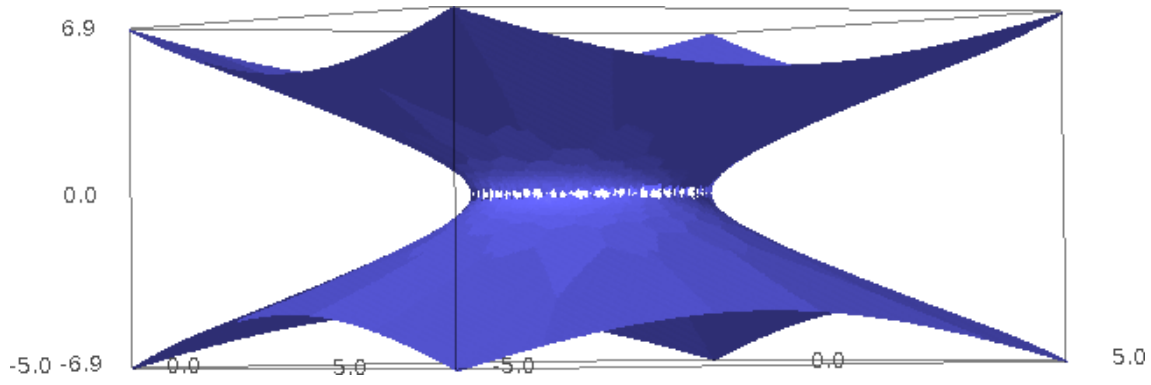


On voit qu'il y a un grand trou au centre correspondant aux z proches de zéro. Or d'après l'équation, il n'en est rien : en $z = 0$ il y a bel et bien tout un cercle. Afin d'obtenir une meilleur image, il faut demander de tracer avec un maillage plus fin :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=sqrt(x**2+y**2-3)
sage: F=plot3d(f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5),plot_points=300)
sage: G=plot3d(-f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5),plot_points=300)
sage: F+G
```

[124] Encore une fois : ça donne mieux à l'écran, et vous pouvez le faire bouger ; je vous encourage à le faire !

Le temps de calcul est un peu plus long, mais le résultat est meilleur :



△

12.21 Limites à plusieurs variables

SecLimVarsPlus

Prenons une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nous disons que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \tag{12.587}$$

lorsque $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ tel que $\|x - x_0\| \leqslant \delta$ implique $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$.

Remarquez qu'ici, $x \in \mathbb{R}^n$, et sachez distinguer $\|.\|$, la norme dans $\mathbb{R}^n$ de $|.|$ qui est la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Une autre façon d'exprimer cette définition est que l'ensemble des valeurs atteintes par f dans une boule de rayon δ autour de x_0 n'est pas très loin de l. Nous définissons donc

$$E_\delta = \{f(x) \text{ tel que } x \in B(x_0, \delta)\}. \tag{12.588}$$

Notez que si f n'est pas définie en x_0, il n'y a pas de valeurs correspondantes au centre de la boule dans E_δ. Ceci est évidemment la situation générique lorsqu'il y a une indétermination à lever dans le calcul de la limite. Nous avons alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \tag{12.589}$$

lorsque $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ tel que

Eqvmoinsrapplimdeux

$$\sup\{|v - l| \text{ tel que } v \in E_\delta\} \leqslant \epsilon. \tag{12.590}$$

Une façon classique de montrer qu'une limite n'existe pas, est de prouver que, pour tout δ, l'ensemble E_δ contient deux valeurs constantes. Si par exemple $0 \in E_\delta$ et $1 \in E_\delta$ pour tout δ, alors aucune valeur de l (même pas $l = \pm\infty$) ne peut satisfaire à la condition (12.590) pour toute valeur de ϵ.

Nous laissons à la sagacité de l'étudiant le soin d'adapter tout ceci pour le cas $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

La proposition suivante semble évidente, mais nous sera tellement utile qu'il est préférable de l'expliciter :

PROPooPOAQooPmxEtb

Proposition 12.237.
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de domaine D, $a \in \mathrm{Adh}(D)$ et un voisinage V de a. Nous supposons que $V \cap D$ s'écrive comme une intersection finie :

$$V \cap D = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$$

telle que $a \in \mathrm{Adh}\, A_i$ pour tout $i \leqslant k$. Alors, la limite

EQooEXELooHccCGw

$$\lim_{x\to a} f(x) \tag{12.591}$$

existe et vaut $b \in \mathbb{R}$ si et seulement si chacune des limites

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_i}} f(x) \tag{12.592}$$

existe et vaut b.

Démonstration. On sait déjà que si la limite de $f : D \to \mathbb{R}$ existe, alors toute restriction à A_i admet la même limite[125]. Il suffit donc de prouver la réciproque.

Fixons provisoirement un entier i entre 1 et k ainsi que $\epsilon > 0$. Vu que $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_i}} f(x) = b$, il existe $\delta_i > 0$ tel que si $x \in A_i$ et si $0 < |x - a| < \delta_i$, alors

EQooUCAIooRpUgnE
$$|f(x) - f(a)| < \epsilon. \tag{12.593}$$

Quitte à prendre δ_i un peu plus petit, nous supposons que $V \subset B(a, \delta_i)$.

Nous posons $\delta = \min\{\delta_i\}_{i=1,\dots,k}$, et nous considérons $x \in D$ tel que $0 < |x - a| < \delta$. Nous avons alors

(1) $x \in V \cap D$,

(2) il existe i tel que $x \in A_i$.

Ce x est donc un élément de A_i vérifiant $0 < |x - a| < \delta \leqslant \delta_i$. Il vérifie donc (12.593) : $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Cela prouve la limite (12.591). □

Exemple 12.238. (1) Pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admette une limite en $a \in \mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'elle y admette une limite à droite et une limite à gauche qui soient égales.

Cela est une application de la proposition 12.237 avec $\mathbb{R} =]-\infty, a[\cup]a, \infty[$.

(2) Une suite (x_k) admet une limite si et seulement si les sous-suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}) convergent vers la même limite. Ceci n'est pas une application directe de la proposition, mais la teneur est la même.

△

Lemme 12.239 ([1])**.**
Soient deux espaces vectoriels E et F. Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to F$ telle que $\lim_{t\to 0} f(t) = y \in F$. Nous posons

$$\begin{aligned} \varphi\colon E &\to F \\ h &\mapsto f(\|h\|). \end{aligned} \tag{12.594}$$

Alors φ admet une limite pour $h \to 0$ et elle est donnée par

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = \lim_{t\to 0} f(t). \tag{12.595}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe δ tel que si $t < \delta$ alors $\|f(t) - y\|_F < \epsilon$. Si $\|h\| < \delta$ nous avons

$$\|\varphi(h) - y\| = \|f(\|h\|) - y\| < \epsilon. \tag{12.596}$$

Donc c'est bon. □

Voici, dans le même ordre d'idée, un autre résultat qui permet de réduire le nombre de variables dans une limite lorsque la fonction ne dépend pas de certaines variables.

LEMooYLIHooFBQyzC
Lemme 12.240 ([1])**.**
Soit une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{t\to a} g(t) = \ell. \tag{12.597}$$

Alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto g(x) \end{aligned} \tag{12.598}$$

vérifie

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ x\neq a}} f(x, y) = \ell. \tag{12.599}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse sur la limite de g en a, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |t - a| < \delta$ implique $|g(t) - \ell| < \epsilon$.

Attention : passage subtil[126]. Si $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$, alors nous avons évidemment aussi $|x - a| < \delta$, mais pas spécialement $0 < |x - a| < \delta$ comme le requis pour utiliser la limite de g.

Dans le calcul de la limite restreinte à $x \neq a$, les points qui interviennent sont les valeurs de (x, y) dans $B\big((a, b), \delta\big) \setminus \{x = a\}$. Or pour celles-là nous avons bien $0 < |x - a| < \delta$. Le calcul suivant fonctionne donc :

$$|f(x, y) - \ell| = |g(x) - \ell| < \epsilon. \tag{12.600}$$

□

[125] C'est une conséquence de la caractérisation séquentielle de la continuité 7.146.

[126] Je rejette déjà en bloc et d'un revers de main toute tentative de dire « la limite épointée, c'est mieux ». Voir aussi l'exemple 12.241.

EXooHSYNooBZhDbE

Exemple 12.241.
Pourquoi prendre la limite $(x,y)\to(a,b)$ avec $x\neq a$ dans l'énoncé du lemme 12.240 ? Imaginons la fonction

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}\tag{12.601}$$

Dans ce cas, le graphe de la fonction $f(x,y)=g(x)$ est tout plat sauf la ligne $x=0$ qui est en hauteur. Nous avons donc $f(0,t)=1$ pour tout t et donc nous n'avons pas $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$: tout voisinage de $(0,0)$ contient des points (x,y) tels que $f(x,y)=1$ et des points (x,y) tels que $f(x,y)=0$. △

12.242.
Il existe de nombreuses façons de calculer des limites à plusieurs variables. Plus nous connaîtrons de mathématiques, plus nous aurons de techniques à notre disposition. Nous allons tout de suite voir quelques méthodes. Voir le thème 67 pour plus de techniques et d'exemples.

12.21.1 Caractérisation de la limite par les suites

ExFNExempleMethodeTrigigi

Exemple 12.243.
Considérons la fonction

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\tag{12.602}$$

et remarquons que, quelle que soit la valeur de y, cette fonction est nulle lorsque $x=0$. De la même manière, nous voyons que si $x=y$, alors la fonction vaut[127] $\frac{1}{2}$.

Il est impossible que la fonction ait une limite en $(0,0)$ parce qu'on ne peut pas trouver un ℓ dont on s'approche à la fois en suivant la ligne $x=0$ et la ligne $x=y$.

Deux autres chemins avec encore deux autres valeurs sont dessinés sur la figure 12.8.

Cet exemple pourra être formalisé en utilisant le théorème 12.244. Voir l'exemple 12.245. △

ThoLimSuite

Théorème 12.244 (Caractérisation de la limite par les suites)**.**
Une fonction $f\colon D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ admet une limite ℓ en un point d'accumulation a de D si et seulement si pour toute suite (x_n) dans $D\setminus\{a\}$ convergente vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ dans $\mathbb{R}^n$ converge vers ℓ.

Démonstration. Supposons d'abord que la fonction ait une limite ℓ lorsque $x\to a$, et considérons une suite (x_n) dans $D\setminus\{a\}$ convergente vers a. Nous devons montrer que la suite $y_n=f(x_n)$ converge vers ℓ, c'est-à-dire que si nous choisissons $\varepsilon>0$ nous devons montrer qu'il existe un N tel que $n>N$ implique $\|y_n-\ell\|=\|f(x_n)-\ell\|<\varepsilon$.

Nous avons deux hypothèses. La première est la convergence de la fonction et la seconde est la convergence de la suite (x_n). L'hypothèse de convergence de la fonction nous dit que (le ε a déjà été choisi dans le paragraphe précédent)

$$\exists\delta \text{ tel que } 0<\|x-a\|<\delta\Rightarrow\|f(x)-\ell\|<\varepsilon.\tag{12.603}$$

Une fois choisi ce δ qui « va avec » le ε qui a été choisi précédemment, la définition de la convergence de la suite nous enseigne que

$$\exists N \text{ tel que } n>N\Rightarrow\|x_n-a\|<\delta.\tag{12.604}$$

Récapitulons ce que nous avons fait. Nous avons choisi un ε, et puis nous avons construit un N. Lorsque $n>N$, nous avons $\|x_n-a\|<\delta$. Mais alors, par construction de ce δ, nous avons $\|f(x_n)-\ell\|<\varepsilon$. Au final, $n>N$ implique bien $\|y_n-\ell\|<\varepsilon$, ce qu'il nous fallait.

Nous supposons maintenant que la fonction f *ne* converge *pas* vers ℓ, et nous allons construire une suite d'éléments x_n qui converge vers a sans que $(y_n)=(f(x_n))$ ne converge vers ℓ. La fonction f vérifie la condition (12.66). Nous prenons donc un ε tel que $\forall\delta$, il existe un x qui vérifie *en même temps* les deux conditions

$$\begin{cases}0<\|x-a\|<\delta & \text{(12.605a)}\\ \|f(x)-\ell\|>\varepsilon. & \text{(12.605b)}\end{cases}$$

Un tel x existe pour tout choix de δ. Choisissons un n arbitraire et $\delta=\frac{1}{n}$. Nous nommons x_n le x correspondant à ce choix de n. La suite (x_n) ainsi construite converge vers a parce que

$$\|x_n-a\|<\delta_n=\frac{1}{n},\tag{12.606}$$

[127] En fait ce que nous sommes en train de faire est de poser $\theta=\pi/2$ et $\theta=\pi/4$ dans (18.818).

donc dès que n est grand, $\|x_n - a\|$ est petit. Mais la suite $y_n = f(x_n)$ ne converge pas vers ℓ parce que

$$\|f(x_n) - \ell\| > \varepsilon \tag{12.607}$$

pour tout n. La suite y_n ne s'approche donc jamais à moins d'une distance ε de ℓ. □

EXooNBTYooFyKRTB

Exemple 12.245.
Reprenons l'exemple 12.243. Considérons les deux suites $x_n = (0, \frac{1}{n})$ et $y_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Ce sont deux suites dans $\mathbb{R}^2$ qui tendent vers $(0,0)$. Si la fonction f convergeait vers ℓ, alors nous aurions au moins l

Eq3007Lixxyyell

$$\lim f(x_n) = \ell \tag{12.608a}$$
$$\lim f(y_n) = \ell, \tag{12.608b}$$

mais nous savons que pour tout n, $f(x_n) = f(0, \frac{1}{n}) = 0$ et $f(y_n) = f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. Il n'y a donc aucun nombre ℓ qui vérifie les deux équations (12.608) parce que $\lim f(x_n) = 0$ et $\lim f(y_n) = \frac{1}{2}$. △

12.21.2 Règle de l'étau

Une première façon de calculer la limite d'une fonction est de la « coincer » entre deux fonctions dont nous connaissons la limite.

ThoRegleEtau

Théorème 12.246 (Règle de l'étau[463])**.**
Soit $\mathcal{O}$, un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant le point a. Soient f, g et h, trois fonctions définies sur $\mathcal{O} \setminus \{a\}$. Supposons que

(1)

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x). \tag{12.609}$$

pour tout $x \in \mathcal{O} \setminus \{a\}$

(2)

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell. \tag{12.610}$$

Alors la limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et vaut ℓ.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous devons trouver un voisinage V de a tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ pour tout $x \in V \setminus \{a\}$. Étant donné que $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$, il existe un voisinage ouvert V de a tel que[128]

$$|g(x) - \ell| < \epsilon \tag{12.611a}$$
$$|h(x) - \ell| < \epsilon. \tag{12.611b}$$

pour tout $x \in V \setminus \{a\}$. Pour tout $x \neq a$ dans V, nous avons

$$\ell - \epsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + \epsilon. \tag{12.612}$$

Donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$, comme nous l'avions annoncé. □

Cette méthode est très pratique lorsqu'on a des fonctions trigonométriques qui se factorisent parce qu'elles sont toujours majorables par 1 ; voir l'exemple 18.74.

Exemple 12.247.
Prouver la continuité en $(0,0)$ de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12.613}$$

Considérons une suite $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ qui tend vers $(0,0)$. Étant donné que $\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} < 1$ pour tout x et y, nous avons

$$0 \leqslant |f(x_n, y_n)| = \left| \frac{x_n |y_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right| \leqslant |x_n| \to 0. \tag{12.614}$$

[128] Si vous ne voyez pas comment avoir les deux conditions en même temps, prenez V_1 pour g et V_2 pour h, et considérez $V = V_1 \cap V_2$ qui sera encore un ouvert.

Donc nous avons

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0), \tag{12.615}$$

ce qui prouve que la fonction est continue en $(0,0)$ par la proposition 7.187. Nous avons utilisé la règle de l'étau (théorème 12.246). △

12.248.
Nous notons $f \sim g$ pour $x \to a$ lorsque $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Cela signifie que f et g tendent vers la même limite, à la même vitesse.

12.21.3 Méthode des chemins

Lorsque la limite n'existe pas, il y a une façon en général assez simple de le savoir, c'est la **méthode des chemins**.

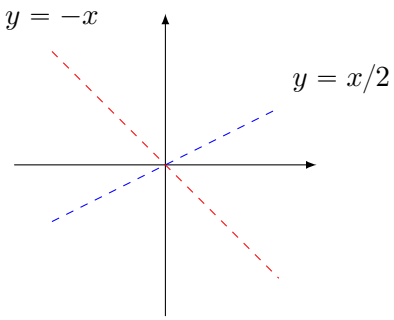


FIGURE 12.8 : Sur toute la droite $y = -x$, la fonction vaut $-1/2$, tandis que sur toute la droite $y = x/2$, elle vaut $\frac{2}{5}$. Il est donc impossible que la fonction ait une limite en $(0,0)$, parce que dans toute boule autour de zéro, il y aura toujours un point de chacune de ces deux droites. LabelFigMethodeChemin

C'est la proposition suivante qui va faire une grosse partie du travail.

PROPooSAFIooWvmSiT

Proposition 12.249 ([1]).
Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et a un point d'adhérence de D. Alors nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \tag{12.616}$$

si et seulement si pour toute fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = a$, nous avons

$$\lim_{t\to 0} (f \circ \gamma)(t) = \ell. \tag{12.617}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct** Soit une fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telles que $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = a$. Par le théorème 12.244, il suffit de montrer que $(f \circ \gamma)(t_n) \to \ell$ pour toute suite $t_n \to 0$ dans $\mathbb{R}$.

Nous savons que la suite $n \mapsto \gamma(t_n)$ est une suite qui converge vers a. Mais l'hypothèse $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ implique que pour toute suite $x_n \to a$ nous avons $f(x_n) \to \ell$. Cela est en particulier vrai pour la suite $n \mapsto \gamma(t_n)$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} f\big(\gamma(t_n)\big) = \ell, \tag{12.618}$$

ce qu'il fallait prouver.

(2) **Réciproque** Pour les mêmes raisons de caractérisation séquentielle que précédemment, il faut prouver que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ pour tout suite $x_n \to a$.

(2a) **Un chemin** Soit la fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ affine par morceaux et telle que

$$\gamma\left(\frac{1}{n}\right) = x_n. \tag{12.619}$$

Nous prolongeons γ par $\gamma(t) = a$ pour $t \leqslant 0$.

(2b) $\gamma(t) \to a$ Nous montrons que $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = a$. Soient $\epsilon > 0$ et N tel que $x_n \in B(a,\epsilon)$ pour tout $n \geqslant N$. Si $t < \frac{1}{N}$ alors $t \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ pour un certain $k > N$. Donc

$$\gamma(t) \in [\gamma(\frac{1}{k+1}), \gamma(\frac{1}{k})] \tag{12.620}$$

et donc $\gamma(t) \in [x_{k+1}, x_k]$ parce que γ est formé de ces segments de droites. Mais comme $B(a,\epsilon)$ est convexe[129], nous avons

$$\gamma(t) \in [x_{k+1}, x_k] \subset B(a,\epsilon). \tag{12.621}$$

Nous avons donc bien $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = a$.

(2c) **Conclusion** L'hypothèse nous donne alors $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t) = \ell$. En particulier le critère de la caractérisation séquentielle de la limite dit que

$$\lim_{n\to\infty} f\big(\gamma(\frac{1}{n})\big) = \ell, \tag{12.622}$$

ce qui signifie $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

□

CorMethodeChemin

Corolaire 12.250.
Soient $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et a un point d'accumulation de D. Si nous avons deux fonctions $\gamma_1, \gamma_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telles que

$$\lim_{t\to 0}\gamma_1(t) = \lim_{t\to 0}\gamma_2(t) = a \tag{12.623}$$

tandis que

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_1)(t) \neq \lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_2)(t), \tag{12.624}$$

ou bien que l'une des deux limites n'existe pas, alors la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$ n'existe pas.

CorMethodeChemoinNegatif

Corolaire 12.251.
Soient $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et a un point d'accumulation de D. Si il existe une fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ avec $\gamma(0) = a$ telle que la limite $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t)$ n'existe pas, alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.

En ce qui concerne le calcul de limites, la méthode des chemins peut être utilisé de trois façons :

(1) Dès que l'on trouve une fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t) = \ell$, alors nous savons que *si la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe*, alors cette limite vaut ℓ.

(2) Dès que l'on a trouvé deux fonctions γ_i qui tendent vers a, mais dont les limites de $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_i)(t)$ sont différentes, alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.

(3) Dès qu'on trouve une chemin le long duquel il n'y a pas de limite, alors la limite n'existe pas (corolaire 12.251).

La méthode des chemins ne permet donc pas de calculer une limite quand elle existe. Elle permet uniquement de la « deviner », ou bien de prouver que la limite n'existe pas.

Exemple 12.252.
Soit à calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}. \tag{12.625}$$

Eq3007ExempleLimiche

Si nous prenons le chemin $\gamma_1(t) = (t,t)$, nous avons bien $\lim_{t\to 0}\gamma_1(t) = (0,0)$, et nous avons

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_1)(t) = \lim_{t\to 0}\frac{t-t}{t+t} = 0. \tag{12.626}$$

Donc si la limite (12.625) existait, elle vaudrait obligatoirement 0. Mais si nous considérons $\gamma_2(t) = (0,t)$, nous avons

$$(f\circ\gamma_2)(t) = \frac{-t}{t} = -1, \tag{12.627}$$

donc si la limite existe, elle doit obligatoirement valoir -1. Ne pouvant être égale à 0 et à -1 en même temps, la limite (12.625) n'existe pas. △

[129] C'est la proposition 7.254.

12.22 Dérivée directionnelle

Nous sommes capables de dériver une fonction de deux variables $f(x,y)$ par rapport à x et par rapport à y. C'est-à-dire que nous sommes capables de donner la variation de la fonction lorsqu'on bouge le long des axes horizontal et vertical. Il est évidemment souhaitable de parler de la variation de la fonction lorsqu'on se déplace le long d'autre droites.

Soit donc $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire (c'est-à-dire $u_1^2 + u_2^2 = 1$), et considérons la fonction de une variable

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a+tu_1, b+tu_2). \end{aligned} \tag{12.628}$$

La fonction φ n'est rien d'autre que la fonction f vue le long de la droite de direction donnée par le vecteur u. Nous pouvons aussi l'écrire $\varphi(t) = f(p+tu)$.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. La façon la plus naturelle de définir une dérivée à deux variables est de considérer les **dérivées partielles** définies par

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}. \end{aligned} \tag{12.629}$$

Ces nombres représentent la façon dont le nombre $f(x,y)$ varie lorsque soit seul x varie soit seul y varie. Les dérivées partielles se calculent de la même façon que les dérivées normales. Pour calculer $\partial_x f$, on fait « comme si » y était une constante, et pour calculer $\partial_y f$, on fait comme si x était une constante.

12.22.1 Dérivée partielle et directionnelles

Lorsque f est différentiable, la dérivée directionnelle est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \nabla f(p) \cdot u. \tag{12.630}$$

EqDerDirnablau

LEMooASGNooCWqAmN

Lemme 12.253.
Les projections canonniques sont des applications différentiables.

LEMooGYJUooOudNLH

Lemme 12.254.
Toute fonction polynômiale à n variables est différentiable comme application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.

LEMooUMRXooDUQHpK

Lemme 12.255.
Toute fonction rationnelle, du type $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes, est différentiable en tout point a tel que $Q(a) \neq 0$.

LEMooTPDSooGbxfhP

Lemme 12.256.
Pour une fonction d'une variable $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le caractère différentiable et le caractère dérivable coïncident. De plus, on a

$$df_a(u) = f'(a)u. \tag{12.631}$$

deriveepartielles

12.257.
En pratique, ayant une formule pour la fonction f, nous la dérivons par rapport à la variable x_i en utilisant les règles usuelle de dérivation en considérant que les autres (x_j avec $j \neq i$) sont des constantes.

Exemple 12.258.
Pour $f(x,y) = xy + x^2$, les dérivées partielles s'écrivent

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

△

12.22.2 Gradient : direction de plus grande pente

Étant donné que u est de norme 1, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \nabla f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right| \leqslant \|\nabla f(a,b)\|. \tag{12.632}$$

Donc

$$-\|\nabla f(p)\| \leqslant \nabla f(p) \cdot u \leqslant \|\nabla f(p)\|. \tag{12.633}$$

La norme de la dérivée directionnelle (qui est la valeur absolue du nombre au centre) est donc « coincée » entre $-\|\nabla f(p)\|$ et $\|\nabla f(p)\|$. Prenons par exemple

$$u = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}. \tag{12.634}$$

Dans ce cas, nous avons exactement

$$\nabla f(p) \cdot u = \|\nabla f(p)\|, \tag{12.635}$$

qui est la valeur maximale que la dérivée directionnelle peut prendre.

La direction du gradient est donc la direction suivant laquelle la dérivée directionnelle est la plus grande. Pour la même raison, la dérivée directionnelle est la plus petite dans le sens opposé au gradient.

En termes bien clairs : lorsqu'on veut aller le plus vite possible au ski, on prend la direction du gradient de la piste de ski. C'est dans cette direction que ça descend le plus vite. Dans quelle direction vont les débutants ? Ils vont perpendiculairement à la pente (ce qui ennuie tout le monde, mais c'est un autre problème). Les débutants vont donc dans la direction perpendiculaire au gradient. Prenons donc $u \perp \nabla f(p)$ et calculons la dérivée directionnelle de f dans la direction u en utilisant la formule 12.630 :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \nabla f(p) \cdot u = 0 \tag{12.636}$$

parce que nous avons choisi $u \perp \nabla f(p)$. Nous voyons donc que les débutants en ski ont eu la bonne intuition que la direction dans laquelle la piste ne descend pas, c'est la direction perpendiculaire au gradient.

C'est aussi pour cela que l'on a tendance à faire du zig-zag à vélo lorsqu'on monte une pente très forte et qu'on est fatigué. C'est toujours pour cela que les routes de montagne font de longs lacets. La montée est moins rude en suivant une direction proche d'être perpendiculaire au gradient !

Théorème 12.259.
Le gradient des fonctions suit à peu près les mêmes règles que les dérivées. Soient f et g deux fonctions différentiables. Nous avons entre autres

(1) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(2) $\nabla(fg)(a,b) = g(a,b)\nabla f(a,b) + f(a,b)\nabla g(a,b)$;

(3) Dès que $g(a,b) \neq 0$, nous avons

$$\nabla \frac{f}{g} = \frac{g(a,b)\nabla f(a,b) - f(a,b)\nabla g(a,b)}{g(a,b)^2}. \tag{12.637}$$

12.22.3 Gradient : orthogonal au plan tangent

Vu que le gradient d'une fonction est la direction de plus grande pente et que le plan tangent est le plan de plus petite pente, quoi de plus naturel que de penser que le gradient est orthogonal au plan tangent ?

Lemme 12.260.
Soit $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et la partie

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \phi(x) = C\} \tag{12.638}$$

pour une certaine constante C.

Soit $x_0 \in \Gamma$. Le gradient de ϕ en x_0 est orthogonal au plan tangent à Γ en x_0.

Démonstration. Un vecteur tangent à Γ en x_0 est de la forme $\gamma'(0)$ où $\gamma\colon \mathbb{R} \to \Gamma$ vérifie $\gamma(0) = x_0$. Puisque ϕ est constante sur Γ nous avons

$$\frac{d}{ds}\Big[\phi\big(\gamma(s)\big)\Big]_{s=0} = 0, \tag{12.639}$$

ce qui donne

$$\sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\big(\gamma(0)\big)\gamma_i'(0) = 0, \tag{12.640}$$

ce qui signifie exactement $\langle (\nabla\phi)(x_0), \gamma'(0)\rangle = 0$. Le vecteur $(\nabla\phi)(x_0)$ est donc perpendiculaire à tout vecteur tangent de Γ en x_0. □

12.22.4 Mise en bouche en dimension 2

Nous savons déjà comment dériver les fonctions composées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est la proposition 12.205. Si nous avons deux fonctions $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $u\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, nous formons la composée $\varphi=f\circ u\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dont la dérivée vaut

$$\varphi'(a)=f'\big(u(a)\big)u'(a). \tag{12.641}$$

Considérons maintenant le cas un peu plus compliqué des fonctions $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $u\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, et de la composée

$$\begin{aligned}&\varphi\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ &\varphi(x,y)=f\big(u(x,y)\big).\end{aligned} \tag{12.642}$$

Afin de calculer la dérivée partielle de φ par rapport à x, nous admettons que pour tout a, b et t, il existe $c\in[a,a+t]$ tel que

$$u(a+t,b)=u(a,b)+t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b). \tag{12.643}$$

Cela est une généralisation immédiate du théorème 12.216. Nous devons calculer

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,b)=\lim_{t\to0}\frac{\varphi(a+t,b)-\varphi(a,b)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f\big(u(a+t,b)\big)-f\big(u(a,b)\big)}{t}. \tag{12.644}$$ EqPremPasDiffxvp

Étant donné l'hypothèse que nous avons faite sur u, nous avons

$$f\big(u(a+t,b)\big)=f\big(u(a,b)+t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)\big). \tag{12.645}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis pour f, nous avons un point d entre $u(a,b)$ et $u(a,b)+t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)$ tel que

$$f\big(u(a,b)+t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)\big)=f\big(u(a,b)\big)+t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)f'(d). \tag{12.646}$$

Le numérateur de (12.644) devient donc

$$t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)f'(d). \tag{12.647}$$

Certes les points c et d sont inconnus, mais nous savons que c est entre a et $a+t$ ainsi que d se situe entre $u(a,b)$ et $u(a,b)+t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)$. Lorsque nous prenons la limite $t\to0$, nous avons donc $\lim_{t\to0}c=a$ et $\lim_{t\to0}d=u(a,b)$. Nous avons alors

$$\lim_{t\to0}\frac{t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)f'(d)}{t}=\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)f'\big(u(a,b)\big). \tag{12.648}$$

La formule que nous avons obtenue (de façon pas très rigoureuse) est

$$\frac{\partial}{\partial x}f\big(u(x,y)\big)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)f'\big(u(x,y)\big). \tag{12.649}$$

Prenons maintenant un cas un peu plus compliqué où nous voudrions connaître les dérivées partielles de la fonction φ donnée par

$$\varphi(x,y,z)=f\big(u(x,y),v(x,y,z)\big) \tag{12.650}$$

où $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $u\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $v\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

Commençons par la dérivée partielle par rapport à z. Étant donné que φ ne dépend de z que via la seconde entrée de f, il est normal que seule la dérivée partielle de f par rapport à sa seconde entrée arrive dans la formule :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y),v(x,y,z)\big)\frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z). \tag{12.651}$$

La dérivée partielle par rapport à y demande de tenir compte en même temps de la façon dont f varie avec sa première entrée et la façon dont elle varie avec sa seconde entrée ; cela nous fait deux termes :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y),v(x,y,z)\big)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y),v(x,y,z)\big)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z). \tag{12.652}$$

Cette formule a une interprétation simple. Lançons un caillou du sommet d'une falaise. Son mouvement est une chute libre avec une vitesse initiale horizontale :

$$\begin{cases}x(t)=v_0t & \text{(12.653a)}\\ y(t)=h_0-\dfrac{gt^2}{2} & \text{(12.653b)}\end{cases}$$

où v_0 est la vitesse initiale horizontale et h_0 est la hauteur de la falaise. Si nous sommes intéressés à la distance entre le caillou et le bas de la falaise (point $(0,0)$), le théorème de Pythagore nous dit que

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}. \tag{12.654}$$

Pour trouver la variation de la distance par rapport au temps il faut savoir de combien la distance varie lorsque x varie et multiplier par la variation de x par rapport à t, et puis faire la même chose avec y.

12.23 Accroissements finis et dérivées partielles

PROPooCAWBooINcNxj

Proposition 12.261 (Accroissements finis)**.**
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soit une application $f\colon V \to W$. Soient des points $a, b \in V$ tels que f est continue sur le segment $[a,b]$ et partiellement dérivable dans la direction $b-a$ sur $]a,b]$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (\partial_\beta f)(c) \tag{12.655}$$

où $c \in [a,b]$ et $\beta = b - a$.

Démonstration. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0,1] &\to W \\ t &\mapsto f\big(a + t(b-a)\big). \end{aligned} \tag{12.656}$$

Par le théorème des accroissements finis 12.216, il existe $s \in [0,1]$ tel que[130]

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(s)(1-0). \tag{12.657}$$

Autrement dit,

$$f(b) = f(a) + (\partial_\beta f)\big(a + s(b-a)\big). \tag{12.658}$$

Nous avons le résultat en posant $c = a + s(b-a)$. □

LEMooNMTAooLgMkgH

Lemme 12.262 (Accroissements finis[1])**.**
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soit une fonction $f\colon V \to W$ qui est différentiable sur un voisinage $\mathcal{O}$ de $a \in V$. Soient $v \in V$ et $\epsilon > 0$ tels que $a + \epsilon v$ reste dans $\mathcal{O}$.

Nous considérons une base de V pour donner un sens aux dérivées partielles $\partial_k f$. Alors il existe une fonction $\alpha\colon V \to W$ telle que

$$\begin{cases} f(a+\epsilon v) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \epsilon v_k (\partial_k f)\big(a + \sum_{i=k+1}^{n} \epsilon v_i e_i\big) + \epsilon\alpha(\epsilon) & \text{(12.659a)} \\ \lim_{\epsilon\to 0} \alpha(\epsilon) = 0. & \text{(12.659b)} \end{cases}$$

où la somme sur i est nulle dans le cas $k = n$.

Démonstration. Nous commençons par nous attaquer à la dérivation par rapport à la première variable. La définition 10.280 de la dérivation partielle nous invite à poser

$$\varphi(t) = f\big(a + \sum_{k=2}^{n} \epsilon v_k e_k + t v_1 e_1\big). \tag{12.660}$$

Nous avons :

$$\varphi'(0) = v_1 (\partial_1 f)\big(a + \sum_{k=2}^{n} \epsilon v_k e_k\big). \tag{12.661}$$

Nous appliquons les accroissements finis 10.293 à la fonction φ en $t = 0$. Nous avons une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to W$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha_1(t) = 0$ et

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + t\alpha_1(t). \tag{12.662}$$

Nous écrivons cette égalité pour $t = \epsilon$, tout en rappelant que $\varphi(\epsilon) = f(a+\epsilon v)$:

$$f(a+\epsilon v) = \varphi(\epsilon) = f\big(a + \sum_{k=2}^{n} \epsilon v_k e_k\big) + \epsilon v_1 (\partial_1 f)\big(a + \sum_{k=2}^{n} \epsilon v_k e_k\big) + \epsilon\alpha_1(\epsilon). \tag{12.663}$$

Pour la suite, il suffit de recommencer en écrivant $\sum_{k=2}^{n} \epsilon v_k e_k = \epsilon v_2 e_2 + \sum_{k=3}^{n} \epsilon v_k e_k$ dans le second terme. □

[130] Les a et b dans l'énoncé de 12.216 sont les valeurs $s = 0$ et $s = 1$ ici. Rien à voir avec les a et b d'ici qui sont des éléments de V.

Voici une version un peu moins technologique.

PROPooYYSMooUDxtlB

Proposition 12.263.
Soit une fonction $f\colon V \to \mathbb{R}$ où V est un espace vectoriel métrique. Soit $a \in V$ tel que $(\partial_i f)(a)$ existe. Alors il existe une fonction $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que

$$f(a + \epsilon e_i) = f(a) + \epsilon(\partial_i f)(a) + \epsilon\beta(\epsilon) \tag{12.664}$$

et $\lim_{\epsilon\to 0} \beta(\epsilon) = 0$.

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + te_i). \end{aligned} \tag{12.665}$$

Par hypothèse (et définition 10.280 de la dérivée partielle), la fonction φ est dérivable et

$$\varphi'(0) = (\partial_i f)(a). \tag{12.666}$$

Nous appliquons le théorème des accroissements finis 10.293 sur la fonction φ :

EQooGSLNooJcrLIb

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + t\beta(t) \tag{12.667}$$

pour une certaine fonction $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\lim_{t\to 0} \beta(t) = 0$. En remplaçant φ par sa valeur en termes de f dans (12.667),

$$f(a + te_i) = f(a) + t(\partial_i f)(a) + t\beta(t). \tag{12.668}$$

□

12.24 Formes différentielles

SecFormDiffRappel

Nous parlerons de formes différentielles exactes et fermées dans la section 20.84.

12.24.1 Décomposition dans la base duale

DEFooMGXSooWioKie

Définition 12.264.
*Soit U, un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Une 1-**forme différentielle** ω sur U est une application*

$$\begin{aligned} \omega\colon U &\to (\mathbb{R}^n)^* \\ x &\mapsto \omega_x. \end{aligned} \tag{12.669}$$

*Une k-**forme différentielle** est une application*

$$\omega\colon U \to \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \tag{12.670}$$

telle que ω_x est alternée pour tout x.

Étant donné que $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé (définition 10.107), nous savons ce qu'est une forme différentielle continue ou de classe C^k.

REMooSKKSooDZFMAr

Remarque 12.265.
L'ensemble des 1-formes différentielles devient un espace vectoriel avec les définitions

$$\begin{aligned} (\lambda\omega)_x(v) &= \lambda\omega_x(v) \\ (\omega + \mu)_x(v) &= \omega_x(v) + \mu_x(v). \end{aligned} \tag{12.671}$$

Nous connaissons la base de $(\mathbb{R}^n)^*$ définie en 4.136. Nous allons noter ces formes par dx_i :

EQooITHKooDzigPY

$$\begin{aligned} e_1^* = dx_1\colon v &\mapsto v_1 \\ &\vdots \\ e_n^* = dx_n\colon v &\mapsto v_n \end{aligned} \tag{12.672}$$

Toute forme différentielle s'écrit

$$\omega_x = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)dx_i \tag{12.673}$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont les composantes de ω dans la base usuelle, et sont des fonctions à valeurs réelles.

LEMooNSFKooLOKGGy

Lemme 12.266.
*Une 1-forme différentielle est **continue** si les fonctions a_i sont continues. La forme sera C^k quand les a_i seront C^k.*

Pour un vecteur $v = (v_1, \dots, v_n)$ on a donc par définition de dx_i

$$\omega_x(v) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) v_i. \tag{12.674}$$

Ces fonctions a_i peuvent être trouvées en appliquant ω aux éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$a_j(x) = \omega_x(e_j) \tag{12.675}$$

parce que $\omega_x(e_j) = \sum_i a_i(x) dx_i(e_i) = \sum_i a_i(x)\delta_{ij} = a_j(x)$.

12.24.2 L'isomorphisme musical

Si G est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, et si $x \in \mathbb{R}^n$, nous pouvons définir

$$\begin{aligned} G_x^\flat \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle G(x), v \rangle \end{aligned} \tag{12.676}$$ EqDefBemol

Pour chaque x, l'application $G_x^\flat$ est une forme sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Nous écrivons que

$$G_x^\flat \in \big(\mathbb{R}^n\big)^*. \tag{12.677}$$

Nous pouvons ainsi déterminer le développement de $G^\flat$ dans la base des dx_i en faisant le calcul

$$G_x^\flat(e_i) = \langle G(x), e_i \rangle = G_i(x), \tag{12.678}$$

donc les composantes de $G^\flat$ dans la base dx_i sont exactement les composantes de G dans la base e_i :

$$G_x^\flat = G_1(x)dx_1 + \cdots + G_n(x)dx_n. \tag{12.679}$$

La construction inverse existe également. Si ω est une 1-forme différentielle, nous pouvons définir le champ de vecteurs $\omega^\sharp$ par la formule (implicite)

$$\omega_x(v) = \langle \omega^\sharp(x), v \rangle \tag{12.680}$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. Par définition, $(\omega^\sharp)^\flat = \omega$.

Lemme 12.267.
En composantes nous avons :

$$\omega^\sharp(x) = \big(a_1(x), \dots, a_n(x)\big). \tag{12.681}$$

Si G est un champ de vecteurs, alors $(G^\flat)^\sharp = G$.

12.25 Différentielle

Nous avons déjà donné une définition abstraite de la différentielle dans la définition 10.279. Nous en voyons maintenant quelques motivations dans le cas de fonctions sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^n$.

12.25.1 Exemples introductifs

SEBSECooLPRQooJRQCFL

La notion de dérivée est associée à la recherche de la droite tangente à une courbe. Reprenons rapidement le cheminement. La dérivée de $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point a est un nombre $f'(a)$, qui définit donc une application linéaire dont le coefficient angulaire est $f'(a)$, et que nous notons df_a :

$$\begin{aligned} df_a \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto f'(a)u. \end{aligned} \tag{12.682}$$

La droite donnée par l'équation

$$y(a+u) = f'(a)u \tag{12.683}$$

est parallèle à la tangente en a. Pour trouver la tangente, il suffit de la décaler de la hauteur qu'il faut. L'équation de la droite tangente au graphe de f au point $\big(a, f(a)\big)$ devient

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = f(a) + df_a(x-a). \tag{12.684}$$ EqDiffRapTgDer

Nous nous proposons de généraliser cette formule au cas de la recherche du plan tangent à une surface.

Exemple 12.268.
Considérons $f(x,y) = x^2y + y^2e^x$. Les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy + y^2e^x\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + 2ye^x.\end{aligned} \tag{12.685}$$

△

Cet exemple était l'exemple facile où tout se passe bien.

Exemple 12.269.
Les choses sont moins simples lorsqu'on considère la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0).\end{cases} \tag{12.686}$$

On voit que pour tout x et tout y, nous avons $f(x,0) = f(0,y) = 0$. Donc cette fonction est nulle sur les axes horizontaux et verticaux. Nous avons en particulier

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0.\end{aligned} \tag{12.687}$$

Donc ces dérivées partielles existent.

Il n'est par contre pas question de dire que cette fonction « va bien » autour du point $(0,0)$. En effet si nous regardons sa valeur sur la droite diagonale $y = x$, nous avons

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}. \tag{12.688}$$

Par conséquent si nous suivons la fonction le long de la droite $y = x$, la hauteur vaut $\frac{1}{2}$ en permanence, sauf juste en $(0,0)$ où la fonction fait un grand plongeon !

```
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=(x*y)/(x**2+y**2)
sage: plot3d(f,(x,-2,2),y(-2,2))
```

D'ailleurs elle fait un plongeon le long de toutes les droites (sauf verticale et horizontale). En effet si nous regardons la fonction le long de la droite $y = mx$, nous avons

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}. \tag{12.689}$$

La fonction est donc *constante* sur chacune de ces droites. Il n'est donc pas question de dire que cette fonction est « dérivable » en $(0,0)$, vu qu'elle fait des grands sauts dans presque toutes les directions. △

Nous devons donc trouver mieux que les dérivées partielles pour étudier le comportement des fonctions un peu problématiques.

12.25.2 Différentielle

Nous nous souvenons de l'équation (12.456) qui nous dit que pour une fonction d'une variable la dérivabilité signifiait qu'il existait un nombre ℓ et une fonction α tels que

$$f(x) = f(a) + \ell(x-a) + (x-a)\alpha(x-a) \tag{12.690}$$

et $\lim_{t\to 0}\alpha(t) = 0$.

En nous inspirant de cela, nous comprenons peut-être un peu le pourquoi de la définition 10.279.

12.270.
L'objet df_a est *en soi* une application $df_a\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Nous notons $df_a(u)$ la valeur de df_a sur le vecteur $u \in \mathbb{R}^m$. En particulier, l'application df est une forme différentielle au sens de la définition 12.264.

12.271.
Les propositions 12.282 et 12.320 vont montrer qu'en étudiant bien les dérivées partielles, nous pouvons conclure à la différentiabilité d'une fonction. Attention cependant, nous verrons dans l'exemple 12.290 que l'existence des dérivées directionnelles partielles ne permettait pas de conclure à la différentiabilité.

12.25.3 Matrice de la différentielle

La différentielle est une application linéaire. Elle possède donc une matrice lorsque des bases sont fixées.

PROPooBMROooThgLuU

Proposition 12.272.
Soient une application différentiable $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^m$. Dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, la matrice de df_a est

$$(df_a)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \tag{12.691}$$

Démonstration. Le lien entre matrice et application linéaire est vu dans la proposition 4.75. Dans le cas des bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ nous savons qu'extraire une composante revient à prendre le produit scalaire. Nous avons donc

$$(df_a)_{ij} = \big(df_a(e_j)\big)_i = df_a(e_j) \cdot e_i. \tag{12.692}$$

La linéarité de la dérivation donne alors

$$(df_a)_{ij} = df_a(e_j) \cdot e_i = \frac{d}{dt}\Big[f(a+te_j)\Big]_{t=0} \cdot e_i = \frac{d}{dt}\Big[f_i(a+te_j)\Big]_{t=0} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \tag{12.693}$$

□

LEMooDDUZooLwXkRp

Lemme 12.273 ([1])**.**
Soit une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Nous posons

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto g(x). \end{aligned} \tag{12.694}$$

Alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Le problème lorsqu'il faut démontrer qu'une fonction est de classe C^∞, c'est que $d^k f$ sera une application de $\mathbb{R}^2$ vers un espace qui est un terrible emboîtement de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \dots)$. Pour traiter cette difficulté, nous considérons les espaces suivants : $V_0 = \mathbb{R}$ et par récurrence $V_{k+1} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, V_k)$.

Et nous considérons également les éléments

$$\begin{aligned} \alpha_1\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto u \end{aligned} \tag{12.695}$$

et plus généralement $\alpha_k \in V_k$ donné par

$$\begin{aligned} \alpha_k\colon \mathbb{R}^2 &\to V_{k-1} \\ (u,v) &\mapsto u\alpha_{k-1}. \end{aligned} \tag{12.696}$$

Notons que dans l'expression $u\alpha_{k-1}$, il s'agit d'un produit entre un scalaire $u \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\alpha_{k+1} \in V_{k-1}$.

Nous prouvons maintenant par récurrence que $d^k f_{(a,b)} = g^{(k)}(a)\alpha_k$, en utilisant directement la définition.

(1) **Initialisation**

Pour $k = 1$, nous calculons

$$\frac{|f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) - g'(a)\alpha_1(h)|}{\|h\|} = \frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{\|h\|} \tag{12.697}$$

Notre but est de calculer la limite de cela lorsque $h \xrightarrow{\mathbb{R}^2} 0$ avec $h \neq 0$. L'hypothèse sur la dérivabilité de g nous indique que si $0 < |t| < \delta$, alors

$$\frac{|g(a+t) - g(a) - tg'(a)|}{|t|} < \epsilon. \tag{12.698}$$

EQooQLWNooLRKhUv

Nous considérons donc la boule épointée de $\mathbb{R}^2$ de rayon δ : $B = B\big((0,0),\delta\big) \setminus \{(0,0)\}$, et nous considérons $h \in B$. Deux cas sont à distinguer : $h_1 = 0$ et $h_1 \neq 0$.

Si $h_1 = 0$, alors

$$\frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{\|h\|} = 0. \tag{12.699}$$

Sinon nous avons $0 < h_1 \leqslant \|h\| < \delta$ et donc

$$\frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{\|h\|} \leqslant \frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{|h_1|} < \epsilon \tag{12.700}$$

par la relation (12.698). Nous avons donc bien

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) - g'(a)\alpha_1(h)|}{\|h\|} = 0. \tag{12.701}$$

(2) **Récurrence**

Nous supposons que $d^k f_{a,b} = g^{(k)}(a)\alpha_k$, et nous devons prouver que $d^k f$ est différentiable et que $d^{k+1} f_{(a,b)} = g^{(k+1)}(a)\alpha_{k+1}$. Pour cela nous introduisons tout dans la définition de la différentielle pour voir ce qui arrive.

Nous avons :

$$\begin{aligned}&\frac{d^k f_{(a+h_1,b+h_2)} - d^k f_{(a,b)} - g^{(k+1)}(a)\alpha_{k+1}(h_1,h_2)}{\|h\|}\\ &= \frac{g^{(k)}(a+h_1)\alpha_k - g^{(k)}(a)\alpha_k - g^{(k+1)}(a)h_1\alpha_k}{\|h\|}.\end{aligned} \tag{12.702}$$

Cela est, pour chaque $h \neq 0$, un élément V_k, mais le coefficient α_k se factorise de telle sorte que nous devons seulement calculer la limite (si elle existe)

$$\lim_{h\to 0} \frac{g^{(k)}(a+h_1) - g^{(k)}(a) - h_1 g^{(k+1)}(a)}{\|h\|}. \tag{12.703}$$

Le même jeu de séparation entre $h_1 = 0$ et $h_1 \neq 0$ que dans le cas $k = 1$ nous permet de déduire que cette limite existe et vaut zéro, grace à la définition de $g^{(k+1)}$.

Nous avons donc prouvé que f est différentiable autant que fois que souhaité. Elle est donc de classe C^∞ comme annoncé. □

12.25.4 Différentielle, dual et forme différentielle

12.25.4.1 Dans la base duale

Nous avons déjà parlé en (12.672) de la base $\{dx_i\}_{i=1,\dots,n}$ des formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 12.274.
La forme de base dx_i est la différentielle de la fonction de projection

$$\begin{aligned}\texttt{proj}_i \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ v &\mapsto v_i.\end{aligned} \tag{12.704}$$

Autrement dit nous avons

$$d(\texttt{proj}_i)_a = dx_i \tag{12.705}$$

pour tout i et pour tout a.

Démonstration. Le quotient

$$\frac{\texttt{proj}_i(a+h) - \texttt{proj}_i(a) - dx_i(h)}{\|h\|} \tag{12.706}$$

est toujours nul. La limite est a fortiori nulle. □

Nous avons donc $(d\,\texttt{proj}_i)_a = dx_i$ pour tout a. Notons que les fonctions dx_i et $\texttt{proj}_i$ sont les mêmes. Cela justifie la notation « dx_i » pour les formes différentielles de base, parce que ce sont les différentielles des fonctions « coordonnées » que nous pouvons noter x_i.

Étant donnée une fonction f, il est légitime de nous demander comment (si elle existe) la différentielle se décompose en chaque point dans la base duale. C'est-à-dire fixer les fonctions a_i en termes des dérivées de f pour avoir

$$df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i. \tag{12.707}$$

C'est ce que nous allons faire dans le corolaire 12.279.

Exemple 12.275.
Si $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction C^2, sa différentielle est la forme

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy. \tag{12.708}$$

Si nous nommons f et g les fonctions $\partial_x F$ et $\partial_y F$, nous avons donc

$$Df = f dx + g dy, \tag{12.709}$$

qui vérifie

$$\partial_y f = \partial_x g, \tag{12.710}$$

parce que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Ce que nous avons donc prouvé, c'est que △

Lemme 12.276.
Si $f dx + g dy$ est la différentielle d'une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, alors $\partial_y f = \partial_x g$.

12.25.5 Ce n'est pas la différentielle extérieure

Il existe une notion de différentielle extérieure, mais ce n'est pas celle-là que nous utilisons la majorité du temps. En particulier si E et F sont des espaces vectoriels normés, lorsque $f\colon E \to F$ est une fonction, df est une application

$$df\colon E \to \mathcal{L}(E, F) \tag{12.711}$$

et la différentielle seconde est la différentielle de cette application-là. Chose faisable parce que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel on ne peut plus respectable.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$. Par définition de la différentielle extérieure d'une 1-forme, nous avons une formule de Leibniz

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega. \tag{12.712}$$

En particulier,

$$d(f dx) = df \wedge dx + f \underbrace{d(dx)}_{=0} = \frac{\partial f}{\partial x} \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx. \tag{12.713}$$

Attention : la différentielle extérieure n'est pas la différentielle usuelle. Certes dans le cas d'une 0-forme (c'est-à-dire d'une fonction), les deux notions coïncident, mais ça ne va pas plus loin. La différentielle extérieure vérifie $d^2\omega = 0$ pour tout ω, y compris pour les fonctions : si $\omega = df$ alors $d\omega = 0$.

Nous mentionnerons la différentielle extérieure dans le cas de

(1) Théorème de Stockes 20.71.

12.25.6 Continuité, dérivabilité et différentiabilité

Le théorème suivant reprend les principales propriétés d'une fonction différentiable. Il est à ne pas confondre avec le théorème 12.320 qui dira que si les dérivées partielles sont continues sur un voisinage de a, alors f est différentiable en a.

ThoRapPropDiffSi

Proposition 12.277.
Soit un espace vectoriel normé V et une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to V$. Si f est différentiable au point $a \in \mathbb{R}^n$ alors

(1) elle est continue en a,

(2) elle admet une dérivée dans toutes les directions de $\mathbb{R}^n$,

(3) toutes les dérivées directionnelles $\partial_u f(a)$ existent et nous avons l'égalité

$$\begin{aligned} df_a\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ u &\mapsto df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)u_i, \end{aligned} \tag{12.714}$$

si les u_i sont les composantes de u dans la base canonique $\mathbb{R}^n$.

La dernière égalité sera de temps en temps utilisée sous la forme

$$df_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0}. \tag{12.715}$$

Démonstration. La limite

$$\lim_{h\to 0_m} \frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|_n}{\|h\|_m} = 0,$$

implique que

$$\lim_{h\to 0_m} \|f(a+h)-f(a)-T(h)\|_n = 0.$$

Comme T est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, on a $\lim_{h\to 0} T(h) = 0$, d'où la continuité de f au point a.

Si u est un vecteur non nul, la différentiabilité de f au point a implique

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(a+tu)-f(a)-T(tu)\|_n}{\|tu\|_m} = 0,$$

par la linéarité de T et par l'égalité $\|tu\|_m = |t|\|u\|_m$ on obtient

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{|t|} = T(u).$$

Donc f est dérivable suivant le vecteur u et $\partial_u f(a) = T(u) = df_a(u)$. □

Corolaire 12.278 (Différentielle et dérivée)**.**
Soit une application différentiable $f\colon \mathbb{R}\to V$ où V est un espace vectoriel normé. Alors $f'(u) = df_u(1)$.

Démonstration. En vertu de la proposition 12.277, nous avons

$$df_u(1) = \frac{d}{dt}\Big[f(u+t1)\Big]_{t=0} = f'(u). \tag{12.716}$$

Nous avons utilisé le fait que pour une fonction sur $\mathbb{R}$, l'unique dérivée partielle est la dérivée normale. □

Corolaire 12.279.
Si f est différentiable, alors la forme différentielle df_a se décompose en

$$df_a = \sum_i (\partial_i f)(a)dx_i. \tag{12.717}$$

Démonstration. Vue la définition des formes dx_i nous pouvons remplacer u_i par $dx_i(u)$ dans l'égalité (12.714) et écrire

$$df_a(u) = \sum_i (\partial_i f)(a)dx_i(u) \tag{12.718}$$

et donc écrire l'égalité demandée. □

Le lemme suivant regroupe quelques égalités avec lesquelles nous allons souvent travailler. Il explique comment sont liées les dérivées directionnelles, les dérivées partielles et la différentielle.

Lemme 12.280.
Si $f\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable, alors

$$df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \nabla f(a)\cdot u \tag{12.719}$$

pour tout vecteur $u\in\mathbb{R}^m$

Démonstration. La première égalité est la proposition 12.277, et la seconde est seulement la définition de la dérivée directionnelle avec des notations un peu plus snob. En particulier nous avons

$$df_a(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \tag{12.720}$$

Pour le reste c'est la linéarité de la différentielle qui joue : le vecteur u peut être écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de base

$$u = \sum_{i=1}^{m} u_i e_i, \qquad u_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Alors, la linéarité de df_a nous donne

$$df_a(u) = df_a\left(\sum_{i=1}^{m} u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} u_i \, (df_a e_i) = \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \tag{12.721}$$

Le lien avec le gradient est la définition du produit scalaire (8.168). □

La formule $df_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0}$ est bien utile pour calculer des différentielles, mais elle ne permet pas de prouver que f est différentiable. Autrement dit, même si le calcul de la dérivée $\frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0}$ donne un résultat pour tout u, nous ne pouvons pas en déduire que f est différentiable au point a.

PROPooJMBJooQzjXYf

Proposition 12.281 ([1])**.**
Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application différentiable, alors sa matrice est donnée par

$$(df_a)_{ij} = df_a(e_j) \cdot e_i = (\partial_j f_i)(a). \tag{12.722}$$

Démonstration. En suivant la formule de la proposition 4.75(1), nous devons calculer

$$(df_a)_{ij} = \big(df_a(e_j)\big)_i. \tag{12.723}$$

En utilisant les formules du lemme 12.280, nous avons $df_a(e_i) = (\partial_i f)(a)$, et donc

$$(df_a)_{ij} = \big(df a_a(e_j)\big)_i = (\partial_j f)(a)_i = (\partial_j f_i)(a). \tag{12.724}$$

□

PropExistDiffUn

Proposition 12.282.
Soient f une fonction de x et y et un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si les nombres $\partial_x f(a,b)$ et $\partial_y f(a,b)$ existent et si il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ + \|(x,y)-(a,b)\|\alpha\Big(\|(x,y)-(a,b)\|\Big) \end{aligned} \tag{12.725}$$

eqCritDiffabsrt

et

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0, \tag{12.726}$$

alors f est différentiable en (a,b).

12.283.
Dans cet énoncé nous avons écrit $d\big((x,y),(a,b)\big)$ la distance entre (x,y) et (a,b), c'est-à-dire le nombre $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Afin d'écrire l'équation (12.725) sous forme plus compacte, nous introduisons le vecteur

$$\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b). \end{pmatrix} \tag{12.727}$$

L'équation (12.725) devient alors

$$f(X) = f(P) + \nabla f(a,b) \cdot (X-P) + \|X-P\|\alpha\big(\|X-P\|\big). \tag{12.728}$$

EqdiffComp

Le vecteur $(\nabla f)(a,b)$ est appelé le **gradient** de f au point (a,b).

Remarque 12.284.
Nous avons introduit la notation ∇f pour le gradient d'une fonction f. Nous allons par la suite introduire $\nabla \cdot F$ pour la divergence du champ de vecteurs F et $\nabla \times F$ pour son rotationnel.

Toutes les formules pour ∇f, $\nabla \cdot F$ et $\nabla \times F$ peuvent facilement être mémorisées en pensant à ∇ comme étant le vecteur

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}. \tag{12.729}$$

EQooQKGQooOPeFoo

Nous allons ici cependant seulement penser à (12.729) comme un moyen mnémotechnique ; nous ne donnons pas de définition à « ∇ » tout seul.

PROPooEYPKooAVjJRF

Proposition 12.285.
Si f est différentiable en (a,b) alors pour tout vecteur u, la fonction

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a+tu_1, b+tu_2) \end{aligned} \tag{12.730}$$

est dérivable en 0 et on a

$$\varphi'(0) = \nabla f(p) \cdot u \tag{12.731}$$

où nous avons noté $p = (a,b)$.

Démonstration. Réécrivons la formule (12.728) sous la forme

$$f(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p) + \|x-p\|\alpha(\|x-p\|). \tag{12.732}$$

Cela étant vrai pour tout x, nous l'écrivons en particulier pour $x = p+tu$ où t est un réel et u est le vecteur unitaire choisi. Nous avons donc

$$f(p+tu) = f(p) + t\nabla f(p) \cdot u + \|tu\|\alpha(\|tu\|). \tag{12.733}$$

En utilisant le fait que u est unitaire, $\|tu\| = |t|\|u\| = |t|$. La dérivée de φ en 0 est alors donnée par

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p+tu)-f(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \nabla f(p) \cdot u + \alpha(|t|). \tag{12.734}$$

Lorsque nous prenons la limite, le membre de gauche devient $\varphi'(0)$ tandis que dans le membre de droite, le second terme disparaît. Nous avons finalement

$$\varphi'(0) = \nabla f(p) \cdot u \tag{12.735}$$

□

12.25.7 Calcul de valeurs approchées

Si nous remplaçons les accroissements $x-a$ et $y-b$ par h et k, le critère de différentiabilité s'écrit

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ + \sqrt{h^2+k^2}\alpha\big(\sqrt{h^2+k^2}\big). \end{aligned} \tag{12.736}$$

Le dernier terme du membre de droite tend vers zéro à une vitesse double lorsque h et k tendent vers zéro : d'une part parce que $\sqrt{h^2+k^2}$ tend vers zéro et d'autre part parce que $\alpha\big(\sqrt{h^2+k^2}\big)$ tend vers zéro. Nous avons donc la « bonne » approximation

$$f(x,y) \simeq f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b). \tag{12.737}$$

EqFormApproxfxyab

lorsque (x,y) n'est pas trop loin de (a,b). Cette expression est évidemment une généralisation immédiate de l'équation (12.459). Elle exprime que l'on peut obtenir des informations sur la valeur d'une fonction en (x,y) si on peut calculer la fonction et ses dérivées en un point (a,b) non loin de (x,y).

Cette formule peut aussi être vue sous la forme suivante, plus pratique dans certains calculs :

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \simeq f(a,b) + \Delta x\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \Delta y\frac{\partial f}{\partial y}(a,b). \tag{12.738}$$

EqFormApproxfxyabDF

Exemple 12.286.
Prenons la fonction $f(x,y)=\cos(x)\sin(y)$ et calculons une approximation de

$$f\big(\frac{\pi}{3}+0.01,\frac{\pi}{2}+0.03\big). \tag{12.739}$$

D'abord les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=-\sin(x)\sin(y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\cos(x)\cos(y).\end{aligned} \tag{12.740}$$

Nous allons utiliser l'approximation

$$f\big(\frac{\pi}{3}+0.01,\frac{\pi}{2}+0.03\big)\simeq f\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\big)+0.01\frac{\partial f}{\partial x}\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\big)+0.03\frac{\partial f}{\partial y}\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\big). \tag{12.741}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\big)&=-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\big)&=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2}=0.\end{aligned} \tag{12.742}$$

Par conséquent

$$f\big(\frac{\pi}{3}+0.01,\frac{\pi}{2}+0.03\big)\simeq\frac{1}{2}-0.01\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{200}. \tag{12.743}$$

```
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=cos(x)*sin(y)
sage: a=f(pi/3+0.01,pi/2+0.03)
sage: numerical_approx(a)
0.491093815387986
sage: b=1/2-sqrt(3)/200
sage: numerical_approx(b)
0.491339745962156
sage: numerical_approx(a-b)
-0.000245930574169814
```

Cela fait une erreur de l'ordre du dix millième.

△

Remarque 12.287.
Les esprits les plus critiques diront que cette vérification par Sage n'en est pas une parce que Sage a certainement utilisé un algorithme d'approximation qui se base sur la même idée que ce que nous venons de faire, et que par conséquent le fait qu'il obtienne le même résultat que nous est un peu tautologique.

Ils n'auront pas tort. Cependant, le code source de Sage est disponible publiquement[131] ; vous pouvez aller le lire et vérifier qu'il y a effectivement une *preuve* que le résultat fourni par Sage possède une bonne dizaine de décimales correctes.

Cette disponibilité publique du code source est une des nombreuses différences fondamentales entre Sage et votre calculatrice[132]. Dois-je vous rappeler qu'un des principes fondamentaux de l'éthique scientifique est que les résultats et les méthodes utilisés doivent être absolument ouverts à la vérification et à la critique de tous ?

12.25.8 Différentielle et tangente

La notion de dérivée partielle (ou de dérivée suivant un vecteur) pour une fonction de plusieurs variables n'est pas une généralisation de la notion de dérivée en une variable d'espace. En fait, du point de vue géométrique, la dérivée de la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ au point a est la pente de la ligne droite tangente au graphe de g au point $(a,g(a))$. Cette ligne, d'équation $r(x)=g'(a)x+g(a)$, est la meilleure approximation affine du graphe de g au point a, comme à la figure 12.9.

[131] Voir http://www.sagemath.org
[132] et les autres logiciels de type fenêtre, pomme ou feuille d'érable.

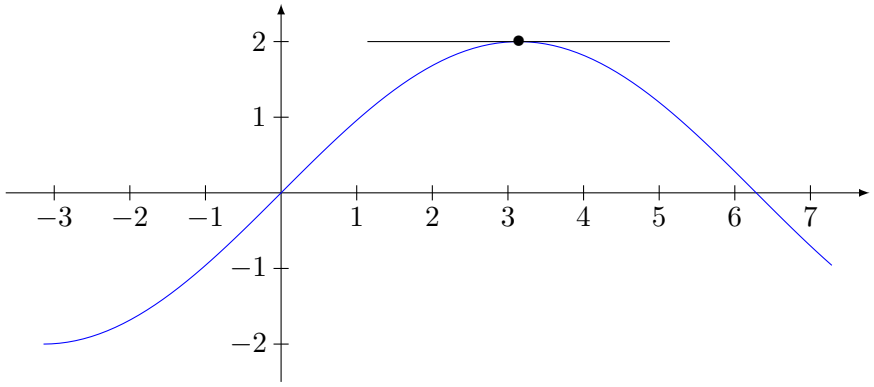


FIGURE 12.9 : Tangentes au graphe d'une fonction d'une variable. LabelFigTangentSegment

Le graphe d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une surface de deux paramètres dans $\mathbb{R}^3$. Si l'approximation affine d'une telle surface au point $(x, y, f(x, y))$ existe, alors elle est un plan tangent. En dimension plus haute, le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une surface de m paramètres dans $\mathbb{R}^{m+1}$ et son approximation affine (si elle existe) est un hyperplan de $\mathbb{R}^m$.

Nous allons voir que si f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$ l'approximation affine de f au point a est l'élément de $f(a) + \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ qui ressemble le plus à f au voisinage de a. Plus précisément, on utilise les définitions suivantes.

Définition 12.288.
*Soient f et g deux applications d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. On dit que g est **tangente** à f au point $a \in U$ si $f(a) = g(a)$ et*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\|f(x) - g(x)\|_n}{\|x - a\|_m} = 0.$$

La relation de tangence est une relation d'équivalence. Nous sommes particulièrement intéressés par le cas où f admet une application affine tangente au point a.

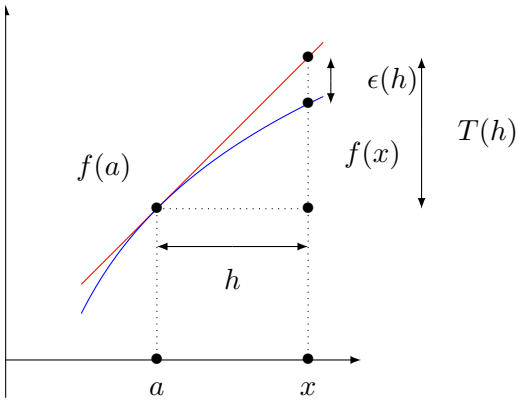


FIGURE 12.10 : Interprétation géométrique de la différentielle. LabelFigDifferentielle

En ce qui concerne l'interprétation géométrique, si nous regardons la figure 12.10, et d'ailleurs aussi en voyant la définition 10.807, la fonction est différentiable et la différentielle est T si il existe une fonction α telle que

$$f(a + u) - f(a) - T(u) = \alpha(u) \tag{12.744}$$

où la fonction α satisfait

$$\lim_{u \to 0} \frac{\|\alpha(u)\|}{\|u\|} = 0 \tag{12.745}$$ EqPresqueTa

C'est cela qui fait écrire $f(a + u) - f(a) - df_a(u) = o(\|u\|)$ à ceux qui n'ont pas peur de la notation o.

La différentielle df_a est donc la partie linéaire de l'application affine qui approxime au mieux la fonction f autour du point a. La notion de différentielle est la vraie généralisation du concept de dérivée pour fonctions de plusieurs variables, en outre elle nous permet d'expliciter la relation qui associe au vecteur u la dérivée $\partial_u f(a)$, pour f et a fixés.

Remarque 12.289.
Si on remplace les normes $\|\cdot\|_m$ et $\|\cdot\|_n$ par d'autres normes, l'existence et la valeur de la différentielle de f au point a ne sont pas remises en cause. En effet, soient $\|\cdot\|_M$ une norme sur $\mathbb{R}^m$ et $\|\cdot\|_N$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Par le théorème 10.61, ces normes sont équivalentes à $\|.\|_m$ et $\|.\|_n$ respectivement ; il existe donc des constantes k, K, l, $L > 0$ telles que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^m$ et tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$

$$k\|u\|_M \leqslant \|u\|_m \leqslant K\|u\|_M,$$
$$l\|v\|_N \leqslant \|v\|_n \leqslant L\|v\|_N.$$

Les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ sont les mêmes et on a

$$\begin{aligned}\frac{l}{K}\frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|_N}{\|h\|_M} \leqslant \frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|_n}{\|h\|_m} \leqslant \\ \leqslant \frac{L}{k}\frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|_N}{\|h\|_M}.\end{aligned} \tag{12.746}$$

Il est donc possible, pour démontrer la différentiabilité ou pour calculer la différentielle, d'utiliser le critère (10.807) avec une norme au choix. Parfois c'est utile.

12.25.9 Prouver qu'une fonction n'est pas différentiable

Chacun des points du théorème 12.277 est en soi un critère pour montrer qu'une fonction n'est pas différentiable en un point.

12.25.9.1 Continuité

Le premier critère à vérifier est donc la continuité. Si une fonction n'est pas continue en un point, alors elle n'y sera pas différentiable. Pour rappel, la continuité en a se teste en vérifiant si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

12.25.9.2 Linéarité

Un second test est la linéarité de la dérivée directionnelle par rapport à la direction : l'application $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ doit être linéaire, sinon df_a n'existe pas.

Exemple0046Diff

Exemple 12.290.
Examinons la fonction

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{12.747}$$

Prenons $u = (u_1, u_2)$ et calculons la dérivée de f dans la direction de u au point $(0,0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{tu_1t^2u_2^2}{t^2u_1^2+t^4u_2^4}\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{u_1u_2^2}{u_1^2+t^2u_2^4}\right) \\ &= \begin{cases}\frac{u_2^2}{u_1} & \text{si } u_1\neq 0 \\ 0 & \text{si } u_1 = 0.\end{cases}\end{aligned} \tag{12.748}$$

Cette application n'est pas linéaire par rapport à u. En effet, notons

$$\begin{aligned}A\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(0,0),\end{aligned} \tag{12.749}$$

et vérifions que pour tout u et v dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous ayons $A(\lambda u) = \lambda A(u)$ et $A(u+v) = A(u) + A(v)$. La première égalité est vraie, parce que

$$A(\lambda u) = A(\lambda u_1, \lambda u_2) = \frac{\lambda^2 u_2^2}{\lambda u_1} = \lambda\frac{u_2^2}{u_1} = \lambda A(u). \tag{12.750}$$

Mais nous avons par exemple

$$A\big((0,1)+(2,3)\big)=A(2,4)=\frac{16}{2}=8, \tag{12.751}$$

tandis que

$$A(0,1)+A(2,3)=0+\frac{9}{2}\neq 8. \tag{12.752}$$

La fonction f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$, parce que la candidate différentielle, $df_{(0,0)}(u)=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, n'est même pas linéaire.

△

Voici une autre façon de traiter la fonction de l'exemple 12.290.

ExeFHmCLII

Exemple 12.291.
La figure 12.11 représente le domaine d'une fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, et sur chacune des parties, elle est définie différemment.

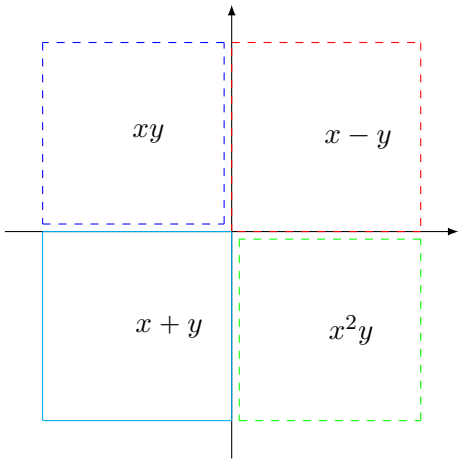


FIGURE 12.11 : La fonction de l'exemple 12.291.

LabelFigFWJuNhU

L'expression de f est ici

$$f(x,y)=\begin{cases}xy & \text{si } x<0 \text{ et } y>0\\ x-y & \text{si } x\geqslant 0 \text{ et } y\geqslant 0\\ x^2y & \text{si } x>0 \text{ et } y<0\\ x+y & \text{sinon.}\end{cases} \tag{12.753}$$

On note que les deux axes forment une zone à problèmes. La zone hors des axes est un ouvert sur lequel f est différentiable car composée de polynômes. Analysons chacun des points de la forme (a,b) dans la zone à problèmes (c'est-à-dire si $ab=0$).

(1) **Si $a=0$ et $b>0$** Un tel point $(0,b)$ est sur l'axe vertical, dans la moitié supérieure. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $y>0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x\geqslant 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x\geqslant 0}} x-y=0-b=-b$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x<0}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x<0}} xy=0b=0$$

qui sont différentes puisque b est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(0,b)$ avec $b>0$.

(2) **Si $a=0$ et $b<0$** Un tel point $(0,b)$ est sur l'axe vertical, dans la moitié inférieure. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $y<0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x\geqslant 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x\geqslant 0}} x^2y=0^2b=0$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x<0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x<0}} x+y = 0+b = b$$

qui sont différentes puisque b est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(0,b)$ avec $b<0$.

(3) **Si $a>0$ et $b=0$** Un tel point $(a,0)$ est sur l'axe horizontal, dans la moitié droite. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $x>0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y\geqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y\geqslant 0}} x-y = a-0 = a$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y<0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y<0}} x^2y = a^20 = 0$$

qui sont différentes puisque a est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(a,0)$ avec $a>0$.

(4) **Si $a<0$ et $b=0$** Un tel point $(a,0)$ est sur l'axe horizontal, dans la moitié gauche. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $x<0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y>0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y>0}} xy = a0 = 0$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y\leqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y\leqslant 0}} x+y = a+0 = a$$

qui sont différentes puisque a est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(a,0)$ avec $a<0$.

(5) **Si $a=0$ et $b=0$** Le cas du point $(0,0)$ est particulier, puisque il est adhérent aux quatre composantes du domaine où la fonction est définie différemment. Pour étudier la continuité, il faut donc étudier quatre limites. Ces limites ont déjà été étudiées ci-dessus et valent toutes 0, ce qui prouve la continuité de f en $(0,0)$.

En ce qui concerne la différentiabilité, on sait qu'il est nécessaire que toutes les dérivées directionnelles existent. Calculons la dérivée dans la direction $(0,1)$ (au point $(0,0)$) :

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(0,t)}{t} = \dots$$

qu'on sépare en deux cas, car $f(0,t)$ possède une formule différente si $t<0$ ou si $t\geqslant 0$:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(0,t)}{t} = \begin{cases} \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{0+t}{t} = 1 \\ \lim_{\substack{t\to 0\\ t\geqslant 0}} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\geqslant 0}} \frac{0-t}{t} = -1 \end{cases}$$

ce qui prouve que la limite n'existe pas, donc que la dérivée directionnelle n'existe pas, et finalement que la fonction n'est pas différentiable.

Conclusion : La fonction donnée est continue hors des axes et au point $(0,0)$, mais discontinue partout ailleurs sur les axes. Elle est différentiable hors des axes, mais ne l'est pas sur les axes.

△

12.25.9.3 Cohérence des dérivées partielles et directionnelle

Dans la pratique, nous pouvons calculer $\partial_u f(a)$ pour une direction u générale, et puis en déduire $\partial_x f$ et $\partial_y f$ comme cas particuliers en posant $u=(1,0)$ et $u=(0,1)$. Une chose incroyable, mais pourtant possible est qu'il peut arriver que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) \neq \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)u_i. \tag{12.754}$$

Ceci se produit lorsque f n'est pas différentiable en a.

12.25.9.4 Un candidat dans la définition (marche toujours)

Lorsqu'une fonction est donnée, un candidat différentielle au point (a_1, a_2) est souvent assez simple à trouver en un point :

$$T(u_1, u_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)u_2. \tag{12.755}$$

L'application T est la candidate différentielle en ce sens que si la différentielle existe, alors elle est égale à T. Ensuite, il faut vérifier si

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - f(a_1,a_2) - T\big((x,y) - (a_1,a_2)\big)}{\|(x,y) - (a_1,a_2)\|} = 0 \tag{12.756}$$

EqLimDefDiff

ou non. Si oui, alors la différentielle existe et $df_{(a,b)}(u) = T(u)$, sinon[133], la différentielle n'existe pas.

Attention : dans la ZAP, les dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ ne peuvent en général pas être calculées en utilisant les règles de calcul (c'est bien pour ça que la ZAP est une zone à problèmes). Il faut d'office utiliser la définition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}, \tag{12.757}$$

et la définition correspondante pour $\partial_y f$.

Conclusion

Soient $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, et $a \in \text{Int}(A)$. Si f est différentiable en a,

$$(df_a(e_j))_i = d(f_i)_a(e_j) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = [Jac(f)_{|a}]_{ij} \tag{12.758}$$

et la matrice de l'application linéaire df_a est la matrice jacobienne $m \times n$ de f en a notée $Jac(f)_{|a}$.

12.25.10 Gradient

Définition 12.292.
*Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. On appelle **gradient** de f la fonction $\nabla f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de composantes*

$$\partial_1 f, \dots, \partial_m f.$$

*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, $f(a) = (f_1(a), \dots, f_n(a))^T$. On appelle **matrice jacobienne** de f la fonction $J(f) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ définie par*

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_m f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n(a) & \dots & \partial_m f_n(a) \end{pmatrix} \tag{12.759}$$

12.25.11 Linéarité

La proposition suivante signifie que la différentiation est une opération linéaire sur l'ensemble des fonctions différentiables.

PropDiffLineaire

Proposition 12.293.
Soient f et g deux fonctions de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ différentiables au point $a \in U$, et soit λ dans $\mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$ et λf sont différentiables au point a et on a

$$\begin{aligned} d(f+g)(a) &= df(a) + dg(a), \\ d(\lambda f)(a) &= \lambda df(a), \end{aligned} \tag{12.760}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0_m} \frac{\|(f(a+h) + g(a+h)) - (f(a) + g(a)) - df(a).h - dg(a).h\|_n}{\|h\|_m} \leqslant \\ &\lim_{h\to 0_m} \frac{\|f(a+h) - f(a) - df(a).h\|_n}{\|h\|_m} + \lim_{h\to 0_m} \frac{\|g(a+h) - g(a) - dg(a).h\|_n}{\|h\|_m} = 0. \end{aligned} \tag{12.761}$$

De même on démontre la propriété $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$. □

[133] y compris si la limite (12.756) n'existe même pas.

12.26 Produit

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Nous notons $f \cdot g$ la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ donnée par le produit scalaire point par point, c'est-à-dire

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \tag{12.762}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Le point dans le membre de droite est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. Le cas particulier $n = 1$ revient au produit usuel de fonctions :

$$(fg)(x) = f(x)g(x). \tag{12.763}$$

LemDiffProsuid

Lemme 12.294.
Si f et g sont des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la fonction produit fg est également différentiable et

EqDifffgProd
$$(dfg)_a = g(a)df_a + f(a)dg_a \tag{12.764}$$

au sens où pour chaque u dans $\mathbb{R}^m$,

$$(dfg)_a(u) = g(a)df_a(u) + f(a)dg_a(u). \tag{12.765}$$

Démonstration. Ce que nous devons faire pour vérifier la formule 12.764, c'est de vérifier le critère (10.807) en remplaçant f par fg et $T(h)$ par $g(a)df(a).h + f(a)dg(a).h$.

Ce que nous avons au numérateur est

$$\begin{aligned}\clubsuit &= (fg)(a+h) - (fg)(a) - g(a)df(a).h - f(a)dg(a).h \\ &= f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) - g(a)df(a).h - f(a)dg(a).h.\end{aligned} \tag{12.766}$$

Maintenant, nous allons faire apparaitre $\big(f(a+h) - f(a) - df(a)\big)g(a+h)$ en ajoutant et soustrayant ce qu'il faut pour conserver $\clubsuit$:

$$\begin{aligned}\clubsuit = &\big(f(a+h) - f(a) - df(a).h\big)g(a+h) \\ &+ f(a)g(a+h) + g(a+h)df(a).h \\ &- f(a)g(a) - g(a)df(a).h - f(a)dg(a).h.\end{aligned} \tag{12.767}$$

Nous mettons maintenant $f(a)$ et $df(a).h$ en évidence là où c'est possible :

$$\begin{aligned}\clubsuit = &\big(f(a+h) - f(a) - df(a).h\big)g(a+h) \\ &+ f(a)\big(g(a+h) - g(a) - dg(a).h\big) \\ &+ \big(g(a+h) - g(a)\big)df(a).h.\end{aligned} \tag{12.768}$$

Nous devons maintenant considérer la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\clubsuit\|}{\|h\|}. \tag{12.769}$$

Étant donné que f et g sont différentiables, les deux premiers termes sont nuls :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\big(f(a+h) - f(a) - df(a).h\big)}{\|h\|}g(a+h) = 0 \\ \lim_{h\to 0} f(a)\frac{\big(g(a+h) - g(a) - dg(a).h\big)}{\|h\|} = 0.\end{aligned} \tag{12.770}$$

En ce qui concerne le troisième terme, en utilisant la norme d'une application linéaire, nous avons

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|df(a).h\|}{\|h\|} \leqslant \sup_{h\in\mathbb{R}^m} \frac{\|df(a).h\|}{\|h\|} = \|df(a)\|, \tag{12.771}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \lim_{h\to 0} \|g(a+h) - g(a)\| \frac{\|df(a).h\|\|h\|}{\|h\|} \\ &\leqslant \lim_{h\to 0} \|g(a+h) - g(a)\|\|df(a)\| = 0\end{aligned} \tag{12.772}$$

parce que g est continue (la limite du premier facteur est nulle tandis que la norme de $df(a)$ est un nombre constant). Nous avons donc bien prouvé que la formule (12.764) est la différentielle de fg au point a. □

Ce résultat se généralise pour des fonctions f et g de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ dans la proposition suivante qui généralise tout en même temps la proposition 12.200.

Proposition 12.295.
Soient f et g deux fonctions de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ différentiables au point $a \in U$. Alors la fonction $f \cdot g$ est différentiable au point a et on a

$$d(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot df(a) + f(a) \cdot dg(a) \tag{12.773}$$

au sens où

$$d(f \cdot g)_a(u) = g(a) \cdot \big(df_a(u)\big) + f(a) \cdot \big(dg_a(u)\big) \tag{12.774}$$ Eqdfcdotgexpl

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$.

Démonstration. La preuve du cas $n = 1$ est déjà faite ; c'est la formule (12.764). Pour le cas général $n \geqslant 2$, nous passons aux composantes en nous rappelant que

$$(f \cdot g)(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a)g_i(a) = \sum_{i=1}^{n}(f_i g_i)(a). \tag{12.775}$$

En utilisant la linéarité de la différentiation, nous nous réduisons donc au cas des produits $f_i g_i$ qui sont des fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} d(f \cdot g)(a) &= d\left(\sum_{i=1}^{n} f_i g_i\right)(a) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(df_i(a)g_i(a) + f_i(a)dg_i(a)\big) \\ &= g(a) \cdot df(a) + f(a) \cdot dg(a). \end{aligned} \tag{12.776}$$

Ceci termine la preuve. □

12.26.1 Difficulté d'ordre supérieur

12.296.
Il serait tentant de faire une récurrence sur le lemme 12.294 pour dire que si f et g sont de classe C^p, alors le produit fg est également de classe C^p, parce que la formule de $d(fg)$ contient des produits de fonctions de classe C^p et C^{p-1}.

Le problème est que le lemme 12.294 est énoncé et prouvé pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors que déjà la formule

$$d(fg) = gdf + fdg \tag{12.777}$$

contient le produit de $g\colon E \to \mathbb{R}$ par $df\colon E \to \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Lorsque nous montons dans les différentielles, la situation empire, et les produits dont sont composés les formules sont réellement à définir…

Oublions un instant les questions de régularité, et calculons sans ménagement, pour voir ce qu'il se passe. Nous considérons un espace vectoriel E ainsi que des fonctions $f\colon E \to \mathbb{R}$ et $g\colon E \to V$ où V est un autre espace vectoriel.

Nous avons

$$d(fg)_a(u) = df_a(u)g(a) + f(a)dg_a(u). \tag{12.778}$$

Les deux termes sont des produits $\mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}$. Montons un coup :

$$d(gdf)_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[(gdf)(a+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[g(a+tu)df_{a+tu}\Big]_{t=0} = dg_a(u)df_a + g(a)(d^2 f)_a(u). \tag{12.779}$$

Un autre pour voir comment ça se passe plus haut :

$$d(df dg)_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[(df dg)(a+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}dg_{a+tu}\Big]_{t=0} = (d^2 f)_a(u)dg_a + df_a(d^2 g)_a(u). \tag{12.780}$$

Là déjà vous noterez que nous sommes passés par le produit

$$df_{a+tu}df_{a+tu} \tag{12.781}$$

qui pour chaque t est un produit $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(E, V)$ que nous n'avons pas réellement défini.

En continuant le calcul ainsi nous trouvons par exemple

$$\begin{aligned}(d^3fg)_a(u) = {} & d^3f_a(u)g(a) + d^2f_a dg_a(u) \\ & + d^2f_a(u)dg_a + df_a d^2g_a(u) \\ & + d^2f_a(u)dg_a + df_a(d^2g)_a(u) \\ & + df_a(u)d^2g_a + f(a)(d^3g)_a(u).\end{aligned} \tag{12.782}$$

Vous noterez que cette formule contient trois termes que nous aurions eu envie de noter d^2fdg. Or ces trois termes ne sont pas identiques : deux sont $d^2f_a(u)dg_a$ et un est $(d^2f)_a dg_a(u)$.

12.26.2 Solution : produit tensoriel

Afin de donner un sens à tous les produits, nous allons passer par les produits tensoriels. Nous avons déjà le théorème 10.330 qui fait pratiquement tout.

PROPooWNCGooHbmcVb

Proposition 12.297 ([1]).
Soient des fonctions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^p. Alors fg est de classe C^p.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}\otimes\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ 1\otimes 1 &\mapsto 1\end{aligned} \tag{12.783}$$

dont nous avons déjà parlé dans le lemme 10.271. En utilisant la notation $\tilde{\otimes}$ de la définition 10.326, nous avons

$$fg = \varphi\circ(f\tilde{\otimes}g). \tag{12.784}$$

La proposition 10.330 nous dit que $f\tilde{\otimes}g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$ est de classe C^p. Vu que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, la proposition 10.318 nous dit que $\varphi\circ(f\tilde{\otimes}g)$ est encore de classe C^p.

Et voilà. □

12.26.3 Formes bilinéaires

Nous avons aussi une formule importante pour la différentielle des formes bilinéaires.

bilin_diff

Lemme 12.298.
Toute application bilinéaire

$$\begin{aligned}B\colon \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^p \\ B(a_1,a_2) &= a_1\star a_2\end{aligned} \tag{12.785}$$

est différentiable en tout point (a_1,a_2) de $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$, et on a

$$dB(a_1,a_2).(h_1,h_2) = h_1\star a_2 + a_1\star h_2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}&\frac{\|B(a_1+h_1,a_2+h_2) - B(a_1,a_2) - (h_1\star a_2 + a_1\star h_2)\|_p}{\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}} = \\ &= \frac{\|(a_1+h_1)\star(a_2+h_2) - a_1\star a_2 - (h_1\star a_2 + a_1\star h_2)\|_p}{\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}} = \spadesuit\end{aligned} \tag{12.786}$$

on rajoute et on enlève la quantité $(a_1+h_1)\star a_2$ dans le numérateur, et on obtient

$$\begin{aligned}\spadesuit &= \frac{\|(a_1+h_1)\star h_2 + h_1\star a_2 - (h_1\star a_2 + a_1\star h_2)\|_p}{\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}} = \\ &= \frac{\|h_1\star h_2\|_p}{\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}} \leqslant C\frac{\|h_1\|_m\|h_2\|_n}{\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}} \\ &\leqslant C\frac{\|(h_1,h_2)\|^2_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}}{\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}} = C\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}.\end{aligned} \tag{12.787}$$

Si on prend la limite de cette expression pour $(h_1,h_2)\to(0_m,0_n)$ on obtient 0, donc la preuve est complète. À noter, que dans l'avant-dernier passage on a utilisé la continuité des applications linéaires $\texttt{proj}_m : \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\texttt{proj}_n : \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui à chaque point (a_1,a_2) de $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ associent a_1 et a_2 respectivement. □

PropEKLTooSvZjdW

Proposition 12.299.
Soit V et W deux espaces vectoriels et $\varphi\colon V\to W$ un isomorphisme. Soit $f\colon\mathbb{C}\to V$ une application telle que $\varphi\circ f\colon\mathbb{C}\to W$ soit différentiable.

Alors f est différentiable et $df=\varphi^{-1}\circ d(\varphi\circ f)$.

Démonstration. Si T est la différentielle de $\varphi\circ f$ au point z nous avons

$$0=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}}\frac{(\varphi\circ f)(z+h)-(\varphi\circ f)(z)+T(h)}{h} \tag{12.788a}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}}\frac{(\varphi\circ f)(z+h)-(\varphi\circ f)(z)+\varphi\big((\varphi\circ T)(h)\big)}{h} \tag{12.788b}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}}\varphi\left(\frac{f(z+h)-f(z)+(\varphi\circ T)(h)}{h}\right) \tag{12.788c}$$

$$=\varphi\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)+\varphi^{-1}T(h)}{h}. \tag{12.788d}$$

Pour la dernière ligne, nous avons permuté φ avec la limite (parce que φ est continue). Nous avons prouvé que f est différentiable et que $df=\varphi^{-1}\circ T=\varphi^{-1}\circ d(\varphi\circ f)$. □

12.27 Différentielle de fonction composée

Une importante règle de différentiation est la règle de différentiation d'une fonction composée (*chain rule* dans les livres anglais et américains). Cette règle généralise la règle de dérivation pour fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Cette règle a déjà été donnée dans le théorème 10.316, mais si vous avez seulement envie d'entendre parler de $\mathbb{R}^n$, vous pouvez lire le lemme 12.300 suivi de la proposition 12.302.

Le lemme suivant est essentiellement une reformulation du lemme 10.311.

Def_diff2

Lemme 12.300.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. La fonction $f:U\to\mathbb{R}^n$ est différentiable au point a dans U, si et seulement si il existe une fonction $\sigma_f:U\times U\to\mathbb{R}^n$ telle que SubEqsDiff2

$$\sigma_f(a,a)=\lim_{x\to a}\sigma_f(a,x)=0 \tag{12.789a}$$

$$f(x)=f(a)+T(x-a)+\sigma_f(a,x)\|x-a\|_m, \tag{12.789b}$$ def_diff2

pour une certaine application linéaire $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Si les conditions (12.789) sont satisfaites alors T est la différentielle de f en a. En effet, dans ce cas nous avons

$$f(a+h)=f(a)+T(h)+\sigma_f(a,a+h)\|h\|, \tag{12.790}$$

et la condition (10.807) devient

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\sigma_f(a,a+h)\|\|h\|}{\|h\|}=\lim_{h\to 0}\|\sigma_f(a,a+h)\|=0 \tag{12.791}$$

Si f est différentiable au point a il suffit de prendre $T=df(a)$ et

$$\sigma_f(a,x)=\frac{f(x)-f(a)-df(a).(x-a)}{\|x-a\|_m}.$$

□

Remarque 12.301.
La fonction $\sigma_f(a,x)\|x-a\|_m$ est ce qui avait été appelé $\epsilon(h)$ sur la figure 12.10.

PropDiffCompose

Proposition 12.302.
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f:U\to V$ et $g:V\to\mathbb{R}^p$ deux fonctions différentiables respectivement au point a dans U et $b=f(a)$ dans V. Alors la fonction composée $g\circ f:U\to\mathbb{R}^p$ est différentiable au point a et

$$d(g\circ f)_a=dg_{f(a)}\circ df_a. \tag{12.792}$$ EqDiffCompose

Démonstration. En tenant compte du lemme 12.300 on peut écrire

$$f(a+h)-f(a)=df_a(h)+\sigma_f(a,a+h)\|h\|_m, \qquad \forall h\in U\setminus\{0\}, \tag{12.793a}$$
$$g(b+k)-g(b)=dg_b(k)+\sigma_g(b,b+k)\|k\|_n, \qquad \forall k\in V\setminus\{0\}. \tag{12.793b}$$

On sait que $f(a)=b$ et que $f(a+h)$ est un élément de V et $f(a+h)=f(a)+k$ pour $k=df(a).h+\sigma_f(a,a+h)\|h\|_m$. Par substitution dans la deuxième équation on obtient

$$\begin{aligned}
&g\big(f(a+h)\big)-g\big(f(a)\big)\\
&\quad=dg_{f(a)}\Big(df_a(h)+\sigma_f(a,a+h)\|h\|_m\Big)\\
&\qquad+\sigma_g\left(f(a),f(a+h)\right)\|df_a(h)+\sigma_f(a,a+h)\|h\|_m\|_n\\
&\quad=g\circ f(a+h)-g\circ f(a)\\
&\quad=dg_{f(a)}\circ df_a(h)\\
&\qquad+\|h\|_m\Big[dg_{f(a)}\sigma_f(a,a+h)\\
&\qquad+\sigma_g\left(f(a),f(a+h)\right)\Big\|df_a\frac{h}{\|h\|_m}+\sigma_f(a,a+h)\Big\|_n\Big],
\end{aligned} \tag{12.794}$$

donc

$$(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)=dg_f(a)\circ df_a(h)+S(a,a+h)\|h\|_m \tag{12.795}$$

où S représente le contenu du dernier grand crochet. Il ne reste plus qu'à prouver que $S(a,a+h)$ est $o(\|h\|_m)$. En tenant compte du fait que $\sigma_f(a,a+h)$ et $\sigma_g\left(f(a),f(a+h)\right)$ sont $o(\|h\|_m)$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0_m}\frac{S(a,a+h)}{\|h\|_m}=\lim_{h\to 0_m}\frac{dg_{f(a)}\sigma_f(a,a+h)}{\|h\|_m}+\\
&+\lim_{h\to 0_m}\frac{\sigma_g\left(f(a),f(a+h)\right)\Big\|df_a\frac{h}{\|h\|_m}+\sigma_f(a,a+h)\Big\|_n}{\|h\|_m}=0.
\end{aligned} \tag{12.796}$$

□

Remarque 12.303.
Note : la formule (12.792) est à comprendre de la façon suivante. Si $u\in\mathbb{R}^m$, alors

$$d(g\circ f)_a(u)=\underbrace{dg_{f(a)}}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)}\Big(\underbrace{df_a(u)}_{\in\mathbb{R}^n}\Big)\in\mathbb{R}^p. \tag{12.797}$$

PROPooYNQYooSjXBfU

Proposition 12.304 ([1])**.**
Soient des espaces vectoriels normés V et W munis d'une base[134]*. Soient des applications $s\colon\mathbb{R}\to V$ et $g\colon V\to W$. Nous supposons que s est différentiable en $a\in\mathbb{R}$ et que g est différentiable en $f(a)$. Alors*

$$(g\circ s)'(a)=\sum_i(\partial_i g)\big(s(a)\big)s_i'(a). \tag{12.798}$$

PROPooXAGQooRLMshw

Proposition 12.305 ([1])**.**
Soit une application $g\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ de classe C^k. Nous posons

$$\begin{aligned}h\colon\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto g(t,\dots,t).\end{aligned} \tag{12.799}$$

Alors

$$h^{(k)}(t)=\sum_{i_1}\dots\sum_{i_k}(\partial_{i_1}\dots\partial_{i_k}g)(t,\dots,t). \tag{12.800}$$

Démonstration. Nous faisons une récurrence sur k en posant

$$\begin{aligned}s\colon\mathbb{R}&\to\mathbb{R}^k\\ t&\mapsto(t,\dots,t)\end{aligned} \tag{12.801}$$

[134] Par rapport à laquelle seront écrites les dérivées partielles.

et en utilisant la proposition 12.304. Nous avons $h = g \circ s$ et donc

$$h'(t) = \sum_i (\partial_i g)\big(s(t)\big) \underbrace{\frac{\partial s_i}{\partial t}(t)}_{=1}, \tag{12.802}$$

et donc $h' = \sum_i (\partial_i g) \circ s$.

Ensuite c'est la récurrence. □

Le lemme suivant sert à prouver les théorèmes 15.9 et 20.72. Il est fondamentalement la raison de la formule définissant l'intégrale d'une forme sur un chemin (définition 20.47).

LEMooKNBVooQSowos

Lemme 12.306 ([1]).
Soient un espace vectoriel normé F de dimension finie, ainsi que E, un espace vectoriel normé. Nous considérons un chemin de classe C^1

$$\gamma\colon [a,b] \to E \tag{12.803}$$

et une application de classe C^1

$$f\colon E \to F. \tag{12.804}$$

Si $g = f \circ \gamma$, alors

$$g'(t) = (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big) \tag{12.805}$$

pour tout $t \in [a,b]$.

Démonstration. Nous écrivons la dérivée de g de la façon suivante : SUBEQSooWKRYooGyVgNl

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{d}{ds}\Big[g(t+s)\Big]_{s=0} && \text{(12.806a)}\\
&= \frac{d}{ds}\Big[(f\circ\gamma)(t+s)\Big]_{s=0} && \text{(12.806b)}\\
&= d(f\circ\gamma)_t(1) && \text{(12.806c)}\\
&= (df)_{\gamma(t)}\big(d\gamma_t(1)\big) && \text{(12.806d)}
\end{aligned}$$

SUBEQooHUZVooWECnVZ

SUBEQooOAYLooIzltaY

(12.806e)

Justifications :

- Pour (12.806c) : les formules (12.280). Notez que le 1 à qui s'applique la différentielle de $f \circ \gamma$ est le vecteur de $\mathbb{R}$ qui est multiplié par s dans l'expression $(f \circ \gamma)(t+s)$.
- Pour (12.806d) : la différentiation de fonctions composées de la proposition 12.302.

Mais

$$d\gamma_t(1) = \frac{d}{ds}\Big[\gamma(t+s)\Big]_{s=0} = \gamma'(t). \tag{12.807}$$

En remettant au bout de (12.806), nous obtenons le résultat. □

12.27.1 Fonctions composées

Cette façon de voir la différentielle nous permet de jeter un nouveau regard sur la formule de différentiation des fonctions composées. Soient

$$\begin{aligned}
f&\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n\\
g&\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{12.808}$$

et $h\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(u) = g\big(f(u)\big) = (g \circ f)(u). \tag{12.809}$$

Nous allons noter x les coordonnées de $\mathbb{R}^p$, a un point de $\mathbb{R}^p$ et u, un vecteur de $\mathbb{R}^p$ accroché au point a. Pour $\mathbb{R}^n$, les notations seront y pour les coordonnées, b pour un point de $\mathbb{R}^n$ et v, un vecteur « accroché » au point b.

Nous avons

$$dg_b(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) dy_i(v). \tag{12.810}$$

Ici $dy_i(v)$ signifie la $i$ème composante de v. C'est simplement v_i. Cette formule étant valable pour tout point $b \in \mathbb{R}^n$ et pour tout vecteur v, nous pouvons l'écrire en particulier pour

$$\begin{cases} b = f(a) & \text{(12.811a)} \\ v = df_a(u). & \text{(12.811b)} \end{cases}$$

Cela donne

$$dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big) dy_i\big(df_a(u)\big). \tag{12.812}$$ Eqdgfadfau

Mais

$$df_a(u) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j(u), \tag{12.813}$$

donc la $i$ème composante de ce vecteur est

$$\big(df_a(u)\big)_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) dx_j(u). \tag{12.814}$$

En remplaçant $dy_i\big(df_a(u)\big)$ par cela dans l'expression (12.812), nous trouvons

$$dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big) \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) dx_j(u). \tag{12.815}$$

Nous pouvons vérifier que c'est la différentielle de $g \circ f$ au point a, appliquée au vecteur u. En effet

$$d(g \circ f)_a(u) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) dx_j(u), \tag{12.816}$$

tandis que, par la dérivation de fonctions composées,

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \tag{12.817}$$ EqDerCompofg

Au final, ce que nous avons prouvé est que

$$d(g \circ f)_a(u) = dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big). \tag{12.818}$$ EQooWSIYooBmsBDU

12.28 Autres trucs sur la différentielle

12.28.1 Différentielle et dérivées partielles

Étant donné que pour tout vecteur u dans $\mathbb{R}^m$ on a $\partial_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$, le gradient de f nous donne la direction dans laquelle la croissance de f est maximale.

La matrice jacobienne calculée au point a est la matrice associée canoniquement à l'application linéaire $df_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

12.28.2 Plan tangent

On a dit au début de cette section que si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ alors le graphe de f est une surface à deux paramètres et que l'application affine tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ est un plan. Maintenant on sait que ce plan est celui d'équation

$$T_a(x, y) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y - a_2). \tag{12.819}$$

Le plan tangent au graphe de f au point a est le graphe de cette fonction T_a.

PROPooJPRUooNOcXPJ

Proposition 12.307.
Il existe des fonctions différentiables dont les dérivées partielles ne sont pas continues.

Retenez que si vous obtenez que les dérivées partielles d'une fonction ne sont pas continues, vous ne pouvez pas immédiatement en conclure que la fonction ne sera pas différentiable.

12.28.3 Notes idéologiques quant au concept de plan tangent

ssecConceptPlanTag

Notons G, le graphe d'une fonction f, c'est-à-dire

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z = f(x, y)\}. \tag{12.820}$$

Première affirmation : si $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ est une courbe telle que $\gamma(0) = \big(a, f(a)\big)$, alors $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$ est dans le plan tangent à G au point $\big(a, f(a)\big)$.

Plus fort : tous les éléments du plan tangent sont de cette forme.

Le plan tangent à G en un point $x \in G$ est donc constitué des vecteurs vitesse de tous les chemins qui passent par x.

Prenons maintenant S, une courbe de niveau de G, c'est-à-dire

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x, y) = C\}. \tag{12.821}$$

Si nous prenons un chemin dans G qui est, de plus, contraint à S, c'est-à-dire tel que $\gamma(t) \in S$, alors $\gamma'(0)$ sera tangent à G (ça, on le savait déjà), mais en plus, $\gamma'(0)$ sera tangent à S, ce qui est logique.

La morale est que si vous prenez un chemin qui se ballade dans n'importe quoi, alors la dérivée du chemin sera un vecteur tangent à ce n'importe quoi.

En outre, si $\gamma(t) \in S$ et $\gamma(0) = a$, alors

$$\langle \nabla f(a), \gamma'(0) \rangle = 0, \tag{12.822}$$

c'est-à-dire que le vecteur tangent à la courbe de niveau est perpendiculaire au gradient. Cela est intuitivement logique parce que la tangente à la courbe de niveau correspond à la direction de *moins* grande pente.

12.28.4 Gradient et recherche du plan tangent

Nous avons maintenant en main les concepts utiles pour trouver l'équation du plan tangent à une surface.

De la même manière que la tangente à une courbe était la droite de coefficient directeur donné par la dérivée, maintenant, le plan tangent à une surface est le plan dont les vecteurs directeurs sont les dérivées partielles :

La généralisation de l'équation (12.684) est

$$T_a(x) = f(a) + \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x - a)_k \tag{12.823}$$

EqDefPlanTag

Nous introduisons aussi souvent l'opérateur différentiel abstrait **nabla**, noté ∇ et qui est donné par le vecteur

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \tag{12.824}$$

Les égalités suivantes sont juste des notations, sommes toutes logiques, liées à ∇ :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \tag{12.825}$$

et

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right). \tag{12.826}$$

EqDefGradient

Ce dernier est un élément de $\mathbb{R}^n$: chaque entrée est un nombre réel.

Définition 12.308.
Le vecteur gradient de f au point a est le vecteur donné par la formule (12.826).

La notation ∇ permet d'écrire la différentielle sous forme un peu plus compacte. En effet, la formule (12.714) peut être notée

$$df_a(u) = \langle \nabla f(a), u \rangle. \tag{12.827}$$

En utilisant ce produit scalaire, l'équation (12.823) peut se réécrire

$$T_a(x) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x - a)^i = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle. \tag{12.828}$$

Afin d'éviter les confusions, il est souhaitable de bien mettre les parenthèses et noter $(\nabla f)(a)$ au lieu de $\nabla f(a)$.

12.28.4.1 Plan tangent en dimension deux

Le plan T_a avec $a = (a_1, a_2)$ a pour équation dans $\mathbb{R}^3$:

$$z = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)\,(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)\,(y - a_2). \tag{12.829}$$

EqPlanTgEnDimDeux

Définition 12.309.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point a. Le plan tangent *au graphe de f en $(a, f(a))$ est l'ensemble des points*

$$\begin{aligned} T_a f &= \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ tel que } z = f(a) + df_a(x - a)\} \\ &= \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ tel que } z = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a\rangle\} \end{aligned}$$

EXOooMWGTooLxZp0035

Exemple 12.310.
Étudiez la continuité, la dérivabilité et la continuité de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

(2) $x \mapsto \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(3) $x \mapsto \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Item0035d

(4) $x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dans ces exercices, les fonctions données sont dérivables et à dérivée continue sur $\mathbb{R}_0$ car pour $a \in \mathbb{R}_0$, il existe toujours une boule autour de a dans laquelle la fonction est composée de fonctions dérivables (sin, $\frac{1}{x}$, ...). L'intérêt de l'exercice est donc d'établir (ou réfuter) la continuité et la dérivabilité en 0.

(1) Notons f cette fonction. f n'est pas continue en 0 car

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} 0 = 0 \neq f(0)$$

En particulier f n'est pas dérivable en 0 (et donc la continuité de sa dérivée n'a pas de sens en 0).

(2) Dans ce cas-ci, la limite « restreinte »

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'existe pas puisque, par exemple, pour la suite de terme général

$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

on a bien $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ mais

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = 1 \neq f(0)$$

puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) = 1$. Donc la fonction n'est pas continue.

(3) Montrons que la fonction, notée f, est continue en 0. Pour tout x réel, nous avons

$$0 \leqslant |f(x)| = |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$$

ce qui montre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ par la règle de l'étau.
Par ailleurs, f n'est pas dérivable en 0 car la limite

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'existe pas, comme on l'a vu précédemment.

(4) Montrons que cette fonction, notée f, est dérivable en 0 (ce qui prouvera qu'elle y est continue). Calculons

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

où la dernière égalité a été montrée à l'exercice précédent. Nous avons donc $f'(0) = 0$.

Par ailleurs, en utilisant les règles de calcul usuelles sur les dérivées, nous obtenons pour $x \neq 0$

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui est une fonction ne possédant pas de limite en 0 puisque, par exemple, si x_k est tel que

$$\frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, mais $f'(x_k)$ tend vers $+\infty$ lorsque $k \to +\infty$. La dérivée n'est donc pas continue en zéro.

△

EXooELTHooDdJyJE

Exemple 12.311.
Dessiner les courbes de niveaux des fonctions suivantes. Représenter ensuite leur graphe dans l'espace. Donner l'équation du plan tangent en l'origine.

(1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

(2) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

(3) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8xy$.

Item0041

Les courbes de niveau de l'exercice (3) sont les *ovales de Cassini* ; en particulier, la courbe de niveau 0 est la *lemniscate de Bernouilli*.

(1) $f(x) = \sqrt{x^2+y^2}$. Les courbes de niveau $f(x) = C$ sont des cercles (sauf $f(x) = 0$ qui se réduit à un point). Les sections horizontales étant des cercles, et le rayon de ces cercles augmentant linéairement, le graphe est une cône. Nous pouvons nous en convaincre en vérifiant par exemple que la droite $t \mapsto (t, 0, t)$ est bien entièrement contenue dans $z = f(x,y)$.

Afin de déterminer la différentielle, nous calculons les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{12.830}$$

EqDerrPaert0041x

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{12.831}$$

EqDerrPart0041y

Pour le plan tangent, nous essayons d'utiliser la formule (12.829). Pour cela, nous devons trouver les dérivées partielles en zéro.

Il est vite vu que la formule (12.830) n'a pas de limite pour $(x,y) \to (0,0)$. Ceci *ne prouve pas* que la différentielle de f n'existe pas en $(0,0)$. L'existence de la différentielle implique la continuité de la fonction, et non de la différentielle elle-même. En effet, une différentielle peut exister en un point sans qu'elle soit la limite de la différentielle aux autres points. Nous avons vu par exemple, dans l'exercice 12.310(4), un exemple de fonction dérivable[135] en 0, mais dont la dérivée n'est pas continue en zéro.

Il ne suffit donc pas de calculer les limites de 12.830 et de 12.831 pour trouver la différentielle de f en $(0,0)$. Il n'est par contre pas très compliqué de remarquer que les dérivées partielles n'existent pas en $(0,0)$, par exemple parce que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \tag{12.832}$$

n'existe pas pour cause de limite différente pour $t > 0$ et $t < 0$. Il n'y a donc pas de plan tangent. Ceci est conforme à l'intuition : il n'y a pas de plan tangent à un cône en son sommet.

[135] Pour rappel, en dimension un, la dérivée est *exactement* la notion de différentielle.

Nous pouvons faire une petite vérification du fait que le graphe est bien un cône : la droite reliant $(0,0,0)$ à $(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$ est entièrement contenue dans le graphe de f. En effet si nous posons

$$\gamma(t)=(tx,ty,t\sqrt{x^2+y^2}),\tag{12.833}$$

pour tout t, nous avons $\gamma_z(t)=f\big(\gamma_x(t)^2+\gamma_y(t)^2\big)$.

(2) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Les courbes de niveau $f(x,y)=C$ n'existent que pour $C\leqslant 1$, et ce sont des cercles

$$x^2+y^2=1-C.\tag{12.834}$$

Cette fois, le graphe est une coupole de sphère. Nous allons en effet vérifier que l'arc de cercle centré en $(0,0,0)$ joignant se sommet $(0,0,1)$ à $(1,0,0)$ dans le plan $y=0$ est entièrement contenu dans le graphe de f. La symétrie de f sous les rotations dans le plan $x-y$ fait le reste. L'arc de cercle en question est le chemin

$$\gamma(t)=\big(1-t,0,\sqrt{1-(1-t)^2}\big).\tag{12.835}$$

Chaque point de ce chemin vérifie bien la relation

$$f\big(\gamma_x(t),\gamma_y(t)\big)=\gamma_z(t).\tag{12.836}$$

Le plan tangent à la coupole de sphère en $(0,0,1)$ est évidemment horizontal. Nous nous attendons donc à trouver que la différentielle de f en $(0,0)$ est nulle. Simple calcul :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\tag{12.837}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2}\frac{-2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.\tag{12.838}$$

Évaluées en $(0,0)$, ce deux dérivées partielles sont nulles. Donc *si la différentielle existe* en $(0,0)$, elle sera nulle (voir l'expression (12.714)). Afin de voir qu'elle existe, il faut juste montrer que $df_{(0,0)}(x,y)=0$ fonctionne dans la définition 10.279.

(3) $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-8xy$. La courbe de niveau zéro, en coordonnées polaires est donnée par

$$r=2\sqrt{\sin(2\theta)}.\tag{12.839}$$

Les dérivées partielles sont données par

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=4(x^2+y^2)x-8y\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=4(x^2+y^2)y-8x\end{aligned}\tag{12.840}$$

△

12.28.4.2 Plan tangent en dimension trois

Nous avons vu que, de la même façon qu'en deux dimensions nous avions l'approximation (12.458) d'une fonction par sa tangente, en trois dimensions nous avons l'approximation suivante d'une fonction de deux variables :

$$f(x,y)\simeq f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\tag{12.841}$$

lorsque (x,y) n'est pas trop loin de (a,b). Cela signifie que le graphe de f ressemble au graphe de la fonction $T_{(a,b)}$ donnée par

$$T_{(a,b)}(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(x-a).\tag{12.842}$$

En notations compactes :

$$T_p(x)=f(p)+\nabla f(p)\cdot(x-p).\tag{12.843}$$

Le graphe de la fonction T_p sera le **plan tangent** au graphe de f au point p. L'équation du plan tangent sera donc

$$z-f(p)=\nabla f(p)\cdot(x-p).\tag{12.844}$$

Remarque 12.312.
Lorsque nous utilisons la notation vectorielle, la lettre « x » désigne le vecteur (x,y). Il faut être attentif. Dans un cas x est un vecteur dans l'autre c'est une composante d'un vecteur.

12.29 Jacobienne

12.29.1 Rappels et définitions

Dans cette section nous considérons des fonctions $f : D \to \mathbb{R}^m$ où $D \subset \mathbb{R}^n$, et un point $a \in \operatorname{Int} D$ où f est différentiable.

Remarque 12.313.
La définition de continuité (resp. différentiabilité) pour une fonction à valeurs vectorielles est celle introduite précédemment, et on remarque que pour avoir la continuité (resp. différentiabilité) de f en un point, il faut et il suffit que chacunes des composantes de $f = (f_1, \dots, f_m)$, vues séparément comme fonctions à n variables et à valeurs réelles, soient continues (resp. différentiables) en ce point.

Définition 12.314.
*La **jacobienne** de f en a est la matrice de l'application linéaire donnée par la différentielle. Elle a de nombreuses notations*

$$J_f(a) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial x_1, \dots, x_m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \tag{12.845}$$

*Autrement dit, c'est la matrice composée de l'ensemble des dérivées partielles de f. Le **jacobien** de f au point a est le déterminant de cette matrice.*

*Si $m = 1$, cette matrice ne contient qu'une ligne ; c'est donc un vecteur appelé le **gradient** de f au point a et noté $\nabla f(a)$.*

Remarque 12.315. (1) Si la fonction est supposée différentiable, calculer la jacobienne revient à connaitre la différentielle. En effet, par linéarité de la différentielle et par définition des dérivées partielles, nous avons

$$df_a(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)$ et où le membre de droite est un produit matriciel

(2) Remarquons que la jacobienne peut exister en un point donné sans que la fonction soit différentiable en ce point !

NORMooKBJVooDDDmOa

12.316.
Le théorème de différentiation de fonctions composées 12.302 peut également se lire au niveau des matrices jacobiennes. La matrice jacobienne de $g \circ f$ au point a est le produit matriciel des matrices jacobiennes de g et de f. Plus précisément, nous avons

$$J_{g\circ f}(a) = J_g\big(f(a)\big) J_f(a). \tag{12.846}$$

Remarquez que nous considérons la matrice jacobienne de g au point $f(a)$.

Dans le cas particulier où $m = 1$ et f est une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}^n$, dérivable au point a, on trouve que la fonction composée $g \circ f$ est dérivable au point a si g est différentiable, et alors

$$(g \circ f)'(a) = dg\,(f(a))\,.f'(a).$$

En fait, pour les fonctions d'une seule variable la dérivabilité coïncide avec la différentiabilité.

12.30 Fonctions de classe C^1

La définition des fonctions de classe C^k est la définition 10.297.

Soit f une fonction différentiable de U, ouvert de $\mathbb{R}^m$, dans $\mathbb{R}^n$. L'application différentielle de f est une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} df \colon \mathbb{R}^m &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ a &\mapsto df_a \end{aligned} \tag{12.847}$$

Nous savons que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel normé avec la définition 4.33. Si T est un élément dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ alors la norme de T est définie par

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \frac{\|T(x)\|_n}{\|x\|_m} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m \\ \|x\|_m\leqslant 1}} \|T(x)\|_n.$$

Lorsqu'il existe un $M > 0$ tel que $\|df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} < M$ pour tout a dans U, nous disons que la différentielle de f est **bornée** sur U.

NORMooDAZZooDiGFoW

12.317.
Quelques précisions sur l'énoncé de la proposition 12.318. Lorsque nous parlons de $\partial_i f$, nous supposons donnée une base de V. Il n'y a aucune raison que la norme sur V soit adaptée à cette base. Nous allons donc utiliser une norme « euclidienne » adaptée à la base, et invoquer l'équivalence de toutes les normes pour dire que si une fonction est différentiable pour une norme elle l'est pour toutes les normes.

12.30.0.1 Différentielle et dérivées partielles

PROPooUDJLooHwzjQF

Proposition 12.318 ([373]).
Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies V et E ainsi qu'une application $f\colon V \to E$. Nous supposons que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent sur un voisinage de $a \in V$ et qu'elles sont continues en a.
Alors

(1) l'application f est différentiable en a,

(2) la différentielle est donnée par[136]

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \times_1 \omega_j. \tag{12.848}$$

Démonstration. L'espace V a une norme que nous notons $\|.\|_V$; nous n'allons presque pas l'utiliser. Nous nommons $\{e_i\}$ la base de V sous-entendue lorsque nous parlons des dérivées partielles, et nous considérons la norme $\|\|$ sur V donnée par $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ pour $x = \sum_i x_i e_i$. Toutes les normes et boules dont nous allons parler dans la suite seront par rapport à cette norme.

Nous posons $\epsilon > 0$. La continuité des dérivées partielles en a nous permet de considérer $\delta > 0$ tel que

$$\|\frac{\partial f}{\partial x_j}(s) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\| < \epsilon \tag{12.849}$$

EQooPBYDooAtPkGl

pour tout $s \in B(a,\delta)$, et pour tous les j en même temps[137].

Soit $x \in B(a,\delta)$. Nous considérons les points

$$s_j = (x_1, \dots, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n). \tag{12.850}$$

Précision : $s_n = x$.

(1) **Un peu de convexité** Nous montrons que le segment $[s_j, s_{j-1}]$ est dans $B(a,\delta)$. Nous avons $s_j - a = (x_1 - a_1, \dots, x_j - a_j, 0, \dots, 0)$, et donc

$$\|s_j - a\| \leqslant \|x - a\| < \delta, \tag{12.851}$$

et donc $s_j \in B(a,\delta)$ pour tout j. Vu que la sphère $B(a,\delta)$ est convexe[138], tout le segment entre s_j et s_{j-1} est dedans.

(2) **Accroissements finis** En nous souvenant que x et a ont été fixés, nous considérons les fonctions intermédiaires suivantes :

$$\begin{cases} g_1(t) = f(t, a_2, \dots, a_n) & \text{(12.852a)} \\ g_j(t) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) & \text{(12.852b)} \\ g_n(t) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, t). & \text{(12.852c)} \end{cases}$$

Elles vérifient en particulier $g_j(x_j) = f(s_j)$ et $g_j(a_j) = f(s_{j-1})$. Donc le théorème des accroissements finis 12.216 nous donne l'existence de τ_j entre x_j et a_j tel que

$$f(s_j) - f(s_{j-1}) = g_j(x_j) - g_j(a_j) = g_j'(\tau_j)(x_j - a_j). \tag{12.853}$$

EQooVALVooXmUmwR

[136] Voir la définition 10.300 pour $\times_n$.
[137] Ce qui peut n'être pas possible en dimension infine. Je dis ça comme ça, juste pour faire remarquer que cette proposition n'est peut-être pas vraie en dimension infine. Voir aussi l'exemple de la fonction (25.152).
[138] Proposition 7.254.

(3) **Dérivées partielles** Les fonctions g_j ont été construites de telle sorte à donner les dérivées partielles de f via une simple dérivation :

$$g_j'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, t_0, a_{j+1}, \dots, a_n). \tag{12.854}$$

Or lorsque[139] $t_0 \in [x_j, a_j]$, le point $(x_1, \dots, x_{j-1}, t_0, a_{j+1}, \dots, a_n)$ est dans $[s_j, s_{j-1}]$. Cela est le cas pour $t_0 = \tau_j$. Nous notons

$$\bar{s}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, \tau_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \tag{12.855}$$

et nous avons

$$g_j'(\tau_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{s}_j) \tag{12.856}$$

avec $\bar{s}_j \in [s_{j-1}, s_j]$. Tout cela pour récrire (12.853) sous la forme

$$f(s_j) - f(s_{j-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{s}_j)(x_j - a_j). \tag{12.857}$$

(4) **Une belle somme télescopique** En nous souvenant que $s_0 = a$ et que $s_n = x$, nous avons cette somme télescopique

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \big(f(s_j) - f(s_{j-1})\big) \tag{12.858a}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{s}_j)(x_j - a_j) \tag{12.858b}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \big[(\partial_j f)(\bar{s}_j) - (\partial_j f)(a)\big](x_j - a_j) + \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(a)(x_j - a_j). \tag{12.858c}$$

Nous isolons les termes qui nous intéressent dans la définition de la différentielle :

$$f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(a)(x_j - a_j) = \sum_{j=1}^{n} \big[(\partial_j f)(\bar{s}_j) - (\partial_j f)(a)\big](x_j - a_j). \tag{12.859}$$

(5) **Et enfin : le quotient différentiel** En utilisant la majoration (12.849), et en remarquant que $\|x - a\|$ majore $|x_j - a_j|$ pour chaque j, nous avons l'inégalité

$$\|f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j)\| \leqslant n\epsilon\|x - a\|. \tag{12.860}$$

Autrement dit, en posant $T = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\omega_j$ nous avons

$$\|f(a + h) - f(a) - T(h)\| \leqslant n\epsilon\|h\|, \tag{12.861}$$

et donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - T(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{12.862}$$

EQooVBYTooEYutya

(6) **Et donc ?** La limite (12.862) nous indique que f serait différentiable de différentielle T si $\|.\|$ était la norme sur V. C'est l'équivalence de toutes les normes[140] qui fait en sorte que la norme sur V n'est pas importante.

□

PROPooUUOSooPuXJjQ

Proposition 12.319.
Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies V et E ainsi qu'une application $f : V \to E$. Nous supposons que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et sont continues sur un ouvert $\mathcal{U}$ de V.

Alors f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$.

[139] Retournez éventuellement les intervalles sur $a_j < x_j$.
[140] Sur un espace de dimension finie, 10.61.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{U}$ le voisinage sur lequel les dérivées partielles de f existent et sont continues. Il s'agit d'appliquer la proposition 12.318 en chaque point de $\mathcal{U}$. Nous avons alors

$$df_x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \times_1 \omega_j \tag{12.863}$$

pour tout $x \in \mathcal{U}$. Pour $a \in V$ et $h \in V$ supposé petit, nous avons

$$\begin{aligned}
\| df_a - df_{a+h} \|_{\mathcal{L}(V,E)} &= \sup_{\|v\|=1} \| df_a(v) - df_{a+h}(v) \|_E && \text{(12.864a)}\\
&= \sup_{\|v\|=1} \| \sum_{j=1}^{n} \big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h) \big) v_j \| && \text{(12.864b)}\\
&\leqslant \sup_{\|v\|=1} \| \sum_{j=1}^{n} \big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h) \big) \| |v_i| && \text{(12.864c)}\\
&\leqslant \| \sum_{j=1}^{n} \big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h) \big) \| && \text{(12.864d)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (12.864d), nous avons majoré $|v_i| \leqslant \|v\| = 1$.
- Pour (12.864c), nous avons utilisé le lemme 10.81.

La continuité de $\partial_j f$ conclut que $\lim_{h\to 0} \|df_a - df_{a+h}\| = 0$, ce qui signifie que df est continue et donc que f est de classe C^1. □

Théorème 12.320.
Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies V et E. Soit un ouvert $\mathcal{U}$ de V. Une application $f : V \to E$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.
Dans ce cas, nous avons la formule

$$df_a = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \times_1 \omega_i. \tag{12.865}$$

Démonstration. Le premier sens, y compris la formule (12.865), a été fait dans la proposition 12.319. Nous supposons maintenant que f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et nous allons prouver que ses dérivées partielles existent et sont continues. Pour tout $t \neq 0$ nous avons l'égalité

$$\frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = \frac{f(a+te_i) - f(a) - df_a(te_i)}{t} + df_a(e_i). \tag{12.866}$$

Par définition de la différentielle, prendre la limite $t \to 0$ à droite donne $df_a(e_i)$ parce que la fraction tend vers zéro. La limite définissant la dérivée partielle existe donc et vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(e_i). \tag{12.867}$$

Il nous reste à prouver que les dérivées partielles sont continues :

$$\begin{aligned}
\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+h) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \| &= \| df_a(e_i) - df_{a+h}(e_i) \| && \text{(12.868a)}\\
&= \| (df_{a+h} - df_a)(e_i) \| && \text{(12.868b)}\\
&\leqslant \| df_{a+h} - df_a \| \| e_i \| && \text{(12.868c)}\\
&= \| df_{a+h} - df_a \|. && \text{(12.868d)}
\end{aligned}$$

Vu que f est de classe C^1, la limite $h \to 0$ de cela donne zéro. □

Voici une version du même théorème, démontré dans le cas seulement de dimension deux. Il rend peut-être aussi plus clairement pourquoi ça ne marche pas en dimension infinie.

Diff_totale

Proposition 12.321.
Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et a un point dans U. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$. Si toutes les dérivées partielles de f existent sur U et sont continues au point a alors f est différentiable au point a.

Démonstration. On se limite au cas $m = 2$. Pour rendre les calculs plus simples on utilise ici la norme $\| \cdot \|_\infty$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$, mais comme on a vu plus en haut, cela ne peut pas avoir des conséquences sur la différentiabilité de f. Si la différentielle de f au point a existe alors elle est définie par la formule

$$df_a(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)v_2$$

pour tout v dans $\mathbb{R}^m$.

On commence par prouver le résultat en supposant que les dérivées partielles de f au point a sont nulles. La différentiabilité de f signifie que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il y a une constante $\delta > 0$ telle que si $\|v\|_\infty \leqslant \delta$ alors

$$\frac{\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2)\|_n}{\|v\|_\infty} \leqslant \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} &\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2)\|_n = \\ &= \|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1 + v_1, a_2) + f(a_1 + v_1, a_2) - f(a_1, a_2)\|_n \leqslant \\ &\leqslant \|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1 + v_1, a_2)\|_n + \|f(a_1 + v_1, a_2) - f(a_1, a_2)\|_n. \end{aligned} \tag{12.869}$$

Comme la dérivée partielle $\partial_x f$ est nulle au point a on sait que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il y a une constante $\delta_1 > 0$ telle que si $|v_1| \leqslant \delta_1$ alors

$$\|f(a_1 + v_1, a_2) - f(a_1, a_2)\|_n \leqslant \varepsilon|v_1|.$$

Pour l'autre terme on a, par la proposition 10.295,

$$\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1 + v_1, a_2)\|_n \leqslant \sup\{\|\partial_y f(x)\|_n \,|\, x \in S\}|v_2|. \tag{12.870}$$

où S est le segment d'extrémités $(a_1 + v_1, a_2)$ et $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$. Comme la dérivée partielle $\partial_y f$ est continue et nulle au point a on sait que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il existe une constante $\delta_2 > 0$ telle que si $\|(u_1, u_2)\|_\infty \leqslant \delta_2$ alors $\|\partial_y f(a_1 + u_1, a_2 + u_2)\|_n \leqslant \varepsilon$. Si on choisit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ le segment S est contenu dans la boule de rayon δ centrée au point a et on obtient

$$\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2)\|_n \leqslant \varepsilon|v_1| + \varepsilon|v_2| \leqslant 2\varepsilon\|v\|_\infty.$$

Cela prouve que f est différentiable en (a_1, a_2) et que la différentielle est nulle :

$$df_{(a_1,a_2)} = 0. \tag{12.871}$$

Dans le cas général, où les dérivées partielles de f au point a ne sont pas spécialement nulles, on peut considérer la fonction[141]

$$g(x, y) = f(x, y) - \partial_1 f(a)x - \partial_2 f(a)y, \tag{12.872}$$ EqXHVooJeQKrB

qui a dérivées partielles nulles au point a. La fonction g est donc différentiables. La fonction f est maintenant la somme de g et de la fonction linéaire et continue $(x, y) \mapsto \partial_1 f(a)x - \partial_2 f(a)y$. On verra dans la prochaine section que la somme de deux fonctions différentiables est une fonction différentiable. Par conséquent, la fonction f est différentiable. □

Remarque 12.322.
En dimension infinie, il n'est pas vrai que l'existence et la continuité de toutes les dérivées partielles en un point implique la différentiabilité en ce point. Pour donner un exemple, nous allons continuer l'exemple 10.86 avec la fonction 25.152 sur un espace de Hilbert.

En dimension infinie nous aurons le théorème 10.339 qui donnera quelque chose de moins fort.

12.30.0.2 Dérivée partielle de fonctions composées

12.323.
Une petite note sur les notations du théorème de dérivation partielle de fonctions composées. La formule (12.884) est plus souvent écrite sous la forme

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}\big(g(a)\big)\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a). \tag{12.873}$$

[141] Vous verrez dans la discussion à propos de la fonction (25.152) pourquoi cette fonction ne fonctionne pas dans le cas de la dimension infinie.

Du point de vue du névrosé des notations précises que je suis, cette façon d'écrire est délicate à exprimer parce qu'il faudrait décider ce que signifie « noter x les variables de $\mathbb{R}^n$ et y celles de $\mathbb{R}^m$ ».

Et je ne vous parle même pas des problèmes que ça pose si x est justement le nom d'une fonction quand on considère un changement de variable.

12.324.
À propos de changement de variables … J'ai une bonne nouvelle : il n'y a pas de notions de « différentielle partielle » et de « différentielle totale ». Ces notions sont introduites par les personnes qui utilisent de mauvaises notations pour distinguer deux notions différentes qu'ils sont incapables de distinguer par des notations claires[142].

Les choses mal faites en une dimension Voici comment on présente (mal) les choses. Soit une fonction $y(x)$. Si on effectue un changement de variables $x = x(t)$, on peut voir y comme une fonction de t au lieu de x, et parler de la dérivée de y à travers x.

Si $y(x) = x^2$ et si $x(t) = \sin(t)$, on se retrouve à écrire

$$y'(t) = 2\sin(t)\cos(t) \tag{12.874}$$

EQooNGFYooCJDmNq

et

$$y'(x) = 2x. \tag{12.875}$$

EQooYXJEooQYfCYQ

Comment l'objet y' peut dépendre du nom de la variable ?!? Notez qu'en substituant $x = \sin(t)$ dans (12.875), le compte n'est pas bon : on n'a pas (12.874).

Pour résoudre ce problème, on peut dire que la bonne quantité à regarder n'est pas y' mais bien dy. Alors on doit en fait regarder non $y'(x)$ mais $y'(x)dx$ où $dx = \cos(t)dt$. Avec ça, on a en effet

$$dy = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}dt = 2\sin(t)\cos(t)dt, \tag{12.876}$$

et

$$dy = \frac{dy}{dt}dt = 2\sin(t)\cos(t)dt. \tag{12.877}$$

Il faut alors bien comprendre que le « y » dans $\frac{dy}{dt}$ n'est pas le même que le y dans $\frac{dy}{dx}$.

Les choses bien faites en une dimension Soit une fonction $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous considérons une application (appelée « changement de variable » si on veut, mais surtout appelée « difféomorphisme de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ») $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Maintenant que la notation « x » est prise pour désigner une fonction, il n'est plus possible d'écrire $y(x)$, parce que y est une application qui prend en argument un élément de $\mathbb{R}$ et non de $C^\infty(\mathbb{R})$.

On introduit donc une nouvelle fonction $z = y \circ x$. Donc $z(t) = y\big(x(t)\big) = \sin(t)^2$. Le nom de la variable importe peu tant que ce n'est pas un nom déjà utilisé. Nous avons alors aucune ambigüité :

$$y'(u) = 2u \tag{12.878}$$

et

$$z'(u) = 2\sin(u)\cos(u). \tag{12.879}$$

Notez que les égalités suivante sont parfaitement correctes et ne souffrent d'aucun problème d'interprétation :

- $y(t) = t^2$
- $z(\xi) = \sin(\xi)^2$
- $x(s) = \sin(s)$
- $x\big(y(u)\big) = \sin\big(y(u)\big) = \sin(u^2)$.

Si les fonctions y et x représentent des quantités physiques, certaines de ces formules sont peut-être idiotes à écrire, mais elles sont correctes.

[142] Là je vise la quasi totalité des sources parlant de changement de variable dans les équations différentielles et les physiciens, en particulier les mécaniciens.

Les choses mal faites en dimension 2 Soit une fonction f de la position et du temps qu'on note $f(x,t)$. Cette fonction vérifie une équation aux dérivées partielles, mettant en jeu $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Coup de théâtre : on veut savoir la valeur de f le long d'une trajectoire $x(t)$. Nous voici avec

$$f\big(x(t),t\big). \tag{12.880}$$

Et là quand on veut parler de la dérivée de f par rapport à t, on doit distinguer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ qui consiste à ne dériver l'expression $f\big(x(t),t\big)$ que par rapport aux t qui apparaissent « vraiment », de la « dérivée totale » qui consiste à dériver par rapport à toutes les occurrences de t, y compris à travers x.

Les choses bien faites en dimension 2 Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Prenons par exemple $f(x,t) = x\sin(t)$. Soit une trajectoire $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que nous nous gardons bien de noter « x ». Ce qu'on entend par « voir f sur la trajectoire s » signifie en réalité considérer la fonction

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto f\big(s(t),t\big).\end{aligned} \tag{12.881}$$

Ce qu'on aurait appelé la dérivée totale de f par rapport à t est simplement la dérivée usuelle φ' de φ en tant que bête fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si par exemple $s(t) = t^2$, nous avons

$$\varphi(t) = t^2\sin(t). \tag{12.882}$$

Nous avons donc toutes les dérivées sans ambigüité :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \sin(t) \tag{12.883a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = x\cos(t) \tag{12.883b}$$

$$\varphi'(t) = 2t\sin(t) + t^2\cos(t). \tag{12.883c}$$

Le mieux serait même d'écrire $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$, parce que ce sont des fonctions complètement déterminées par f et non par la notation x et t qu'on a choisie pour nommer les variables au moment d'écrire $f(x,t) = x\sin(t)$.

12.325.
Et d'ailleurs en mathématique, il n'y a rien qui s'appelle « changement de variable ». Il y a seulement des choses qui s'appellent « composition de fonction ».

Cela n'est pas limité à l'analyse. Il n'y a par exemple pas de concept de « choisir une base dans laquelle une matrice est diagonale ». Si S est une matrice symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale A telles que $D = ASA^{-1}$. Quand on veut démontrer une théorème sur S, on commence par démontrer le théorème dans le cas particulier où S est diagonale, puis on espère que le résultat se généralise facilement aux matrices de la forme ADA^{-1} où D est diagonale et A est orthogonale.

12.326.
Tout cela pour dire que nous allons maintenant prouver le théorème de dérivation partielle de fonctions composées. C'est ce théorème qui est utilisé chaque fois qu'on fait un « changement de variables » dans une équation aux dérivées partielles.

THOooKBTYooWFtoSF

Théorème 12.327 ([1, 464]).
Soient :

1. *trois espaces vectoriels normés U, V et W de dimension finie*
2. *$a \in V$, un voisinage Ω de a*
3. *des applications $g\colon \Omega \to U$ et $f\colon g(\Omega) \to W$*
4. *des bases de U, V et W de telle sorte que parler des dérivées partielles ait un sens. Toutes les bases vont être notées $\{e_i\}$ sans précisions. Sinon, on ne va pas s'en sortir.*

Nous supposons que

1. *f est de classe C^1 sur un voisinage de $g(a)$*[143],

[143] Classe C^1, définition 10.297.

(2) g admet une dérivée partielle dans la direction de e_i en a.

Alors

(1) La fonction $f \circ g$ a une dérivée partielle dans la direction de e_i en a,

(2) nous avons la formule

$$\partial_i(f \circ g)(a) = \sum_k (\partial_k f)\big(g(a)\big)(\partial_i g_k)(a). \tag{12.884}$$

EQooZMAUooIusxgD

Démonstration. Vu que f est différentiable en $g(a)$, nous pouvons y utiliser le lemme 12.280 et écrire

EQooFZBVooTwNexc

$$df_{g(a)}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\right) = \frac{d}{dt}\Big[f\big(g(a) + t\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\big)\Big]_{t=0} \tag{12.885a}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f\big(g(a) + \epsilon\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\big) - f\big(g(a)\big)}{\epsilon}. \tag{12.885b}$$

Maintenant, le jeu est de travailler $f\big(g(a)+\epsilon\partial_i g(a)\big)$ de deux façons différentes. D'une part en effectuant un développement de f autour de $g(a)$ et d'autre part dé-développant $g(a) + \epsilon\partial_i g(a)$ pour le changer en $g(a + \epsilon e_i)$.

(1) **Développer f** En utilisant le lemme 12.262 pour f autour de $g(a)$, nous avons

$$f\big(g(a) + \epsilon\partial_i g(a)\big) = f\big(g(a) + \epsilon\sum_k (\partial_i g_k)(a)e_k\big) \tag{12.886a}$$

$$= f\big(g(a)\big) + \epsilon\sum_k (\partial_i g_k)(a)(\partial_k f)\big(g(a) + \epsilon u_k\big) \tag{12.886b}$$

où $u_k = \sum_{l=k+1}^n (\partial_i g_l)(a)e_l$. La forme exacte de u_k n'est pas importante pour notre histoire.
En mettant cela dans la dernière fraction de (12.885),

$$\frac{f\big(g(a) + \epsilon(\partial_i g)(a)\big) - f\big(g(a)\big)}{\epsilon} \tag{12.887a}$$

$$= \frac{f\big(g(a)\big) + \epsilon\sum_k (\partial_i g_k)(a)(\partial_k f)\big(g(a) + \epsilon u_k\big) + \epsilon\alpha(\epsilon) - f\big(g(a)\big)}{\epsilon} \tag{12.887b}$$

$$= \sum_k (\partial_i g_k)(a)(\partial_k f)\big(g(a) + \epsilon u_k\big) + \alpha(\epsilon). \tag{12.887c}$$

Nous prenons la limite $\epsilon \to 0$ en tenant compte du fait que $\lim_{\epsilon\to 0}\alpha(\epsilon) = 0$ et du fait que les dérivées partielles de f sont continues en $g(a)$ (théorème 12.320). Nous avons

$$df_{g(a)}\big((\partial_i g)(a)\big) = \sum_k (\partial_i g_k)(a)(\partial_k f)\big(g(a)\big). \tag{12.888}$$

(2) **Développer g** Nous développons maintenant g à l'intérieur de f. Pour cela nous utilisons les accroissements finis 12.263 pour g :

$$g(a) + \epsilon\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = g(a + \epsilon e_i) - \epsilon\alpha(\epsilon). \tag{12.889}$$

Pour avancer dans (12.885), nous considérons le terme

$$f\big(g(a) + \epsilon\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\big) = f\big(g(a + \epsilon e_i) - \epsilon\alpha(\epsilon)\big) \tag{12.890}$$

dans lequel nous allons développer f autour de $g(a+\epsilon e_i)$. Vu que la fonction $\epsilon \mapsto g(a+\epsilon e_i)$ est continue (elle est dérivable par hypothèse), pourvu que ϵ soit assez petit, le point $g(a + \epsilon e_i)$ est encore dans le voisinage de $g(a)$ sur lequel f est de classe C^1, de telle sorte qu'un développement de f ne pose pas de problèmes. Nous pouvons appliquer le lemme (12.262) :

$$f\big(g(a + \epsilon e_i) - \epsilon\alpha(\epsilon)\big) = f\big(g(a + \epsilon e_i)\big) - \sum_k \epsilon\alpha(\epsilon)_k(\partial_k f)\big(g(a + \epsilon e_i) + \epsilon u_k\big) + \epsilon\beta(\epsilon). \tag{12.891}$$

Ce que nous avons dans la limite dans (12.885) est

$$\frac{f\big(g(a+\epsilon e_i)\big)-\sum_k \epsilon\alpha(\epsilon)_k(\partial_k f)\big(g(a+\epsilon e_i)+\epsilon u_k\big)-f\big(g(a)\big)}{\epsilon} \tag{12.892a}$$

$$=\frac{(f\circ g)(a+\epsilon e_i)-(f\circ g)(a)}{\epsilon}-\sum_k \alpha(\epsilon)_k(\partial_k f)\big(f(a+\epsilon e_i)+\epsilon u_k\big). \tag{12.892b}$$

Nous allons passer à la limite. Vu que f est de classe C^1, ses dérivées partielles sont continue. Le vecteur u_k ne dépendant pas de ϵ, toute la partie $(\partial_k f)\big(g(a+\epsilon e_i)+\epsilon u_k\big)$ peut être majorée uniformément en ϵ. Et comme $\alpha(\epsilon)\to 0$, tout le second terme disparait.

Ce qui reste à la limite est

$$df_{g(a)}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\right)=\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(a). \tag{12.893}$$

□

CORooNQURooAWjfcA

Corolaire 12.328.
Soient $a\in\mathbb{R}$, un voisinage ouvert I de a, une application $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon\gamma(I)\to\mathbb{R}$. Nous supposons que f est de classe C^1 sur $\gamma(I)$ et que γ est dérivable en a.

Alors

(1) La fonction $f\circ\gamma$ est dérivable en a.

(2) Nous avons la formule

$$(f\circ\gamma)'(a)=\gamma'(a)\cdot(\nabla f)\big(\gamma(a)\big). \tag{12.894}$$

Démonstration. Toutes les hypothèses sont calquées sur celles du théorème 12.327. L'application $f\circ\gamma$ est donc dérivable en a. Pour les applications sur $\mathbb{R}$, la seule dérivée partielle est la dérivée usuelle, donc la formule (12.884) s'écrit

$$(f\circ\gamma)'(t)=\sum_k(\partial_k f)\big(\gamma(a)\big)\gamma_k'(a)=(\nabla f)\big(\gamma(a)\big)\cdot\gamma'(a). \tag{12.895}$$

□

Donnons un exemple d'utilisation de cette formule. Si

$$\begin{aligned}g&\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\\ f&\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\end{aligned} \tag{12.896}$$

nous avons $\varphi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Les dérivées partielles de φ sont données par les formules

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x_3}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y) \tag{12.897}$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x_3}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) \tag{12.898}$$

Notez que les dérivées de φ et des composantes de g sont calculées en (x,y), tandis que celles de f sont calculées en $g(x,y)$.

12.31 Différentielle et dérivée complexe

SECooJWNOooOgMiWR

12.329.
Nous commençons par donner quelques éléments à propos de dérivée et de différentielle pour des fonctions $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ parce que les séries entières vont souvent être des fonctions complexes. Le gros du chapitre sur les fonctions holomorphes est le chapitre 26.

Nous identifions $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'application

$$\begin{aligned}\varphi&\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}\\ &(x,y)\mapsto x+iy.\end{aligned} \tag{12.899}$$

Dans cette partie, nous désignons par Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

DEFooVJVXooKlnFkh

Définition 12.330.
*Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-**dérivable** si la limite*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{12.900}$$

existe. Dans ce cas, cette limite est la dérivée de f et est notée f'.

DefMMpjJZ

Définition 12.331.
*Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est **holomorphe** si elle est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.*

Une avalanche de conditions équivalentes à l'holomorphie est donnée dans le théorème 26.82.

DEFooQSMCooOoWVZk

Définition 12.332.
*Si K est un compact de $\mathbb{C}$, nous disons qu'une fonction est **holomorphe** sur K si il existe un ouvert contenant K sur lequel f est holomorphe.*

Et si f n'est réellement définie que sur K, elle est holomorphe sur K si il existe une extension holomorphe de f vers un ouvert contenant K.

DEFooSRKYooLkGVUe

Définition 12.333 (Similitude)**.**
Une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{12.901}$$

*avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est une **similitude**.*

LEMooJNFEooZCbJMo

Lemme 12.334.
En tant qu'application linéaire $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, l'opération de multiplication par $\alpha + \beta i$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{12.902}$$

Démonstration. Cela est vite remarqué en calculant explicitement $(\alpha + \beta i)(u_1 + iu_2)$. □

LEMooKIOZooEUxfsB

Lemme 12.335.
Une application $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si elle est une similitude en tant qu'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Dans ce cas, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $A(z) = z_0 z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Commençons par considérer l'application A sur $\mathbb{R}^2$. Elle est en particulier une application $\mathbb{R}$-linéaire et par conséquent il existe une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telle que

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{12.903}$$

Nous voulons maintenant imposer la $\mathbb{C}$-linéarité, c'est-à-dire que nous voulons

$$A\big((a+bi)(x+iy)\big) = (a+bi)A(x+iy) \tag{12.904}$$

pour tout $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. À gauche nous avons

$$A\big(ax - by + i(bx + ay)\big) \tag{12.905}$$

et à droite nous avons

$$(a+bi)\big(\alpha x + \beta y + i(\gamma x + \delta y)\big). \tag{12.906}$$

En égalant les deux expressions nous obtenons les équations

$$\begin{cases} \beta b = -b\gamma & \text{(12.907a)} \\ -\alpha b + \beta a = a\beta - b\delta & \text{(12.907b)} \\ \delta b = b\alpha & \text{(12.907c)} \\ -\gamma b + \delta a = b\beta + a\delta, & \text{(12.907d)} \end{cases}$$

dont nous tirons immédiatement que $\gamma = -\beta$ et $\delta = \alpha$. La matrice de A est donc de la forme demandée.

Inversement nous devons prouver que la fonction

$$f(x+iy)=\alpha x+\beta y+i(-\beta x+\alpha y) \tag{12.908}$$

EqOEWYooMaHCNb

est $\mathbb{C}$-linéaire, c'est-à-dire qu'elle vérifie $f(z_0z)=z_0f(z)$ pour tout $z_0,z\in\mathbb{C}$. Cela est un simple calcul que nous confions à Sage : le code suivant affiche « 0 ».

```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

def f(z):
    var('alpha,beta')
    x=z.real_part()
    y=z.imag_part()
    return alpha*x+beta*y+I*( -beta*x+alpha*y  )


var('a,b,x,y')

A=a+b*I
Z=x+y*I

z1=f( A*Z  )
z2=A*f( Z )

rep=z1-z2
print(rep.full_simplify())
```

tex/frido/code_sage3.py

Pour conclure, notons que la fonction (12.908) est la fonction de multiplication par $\alpha-i\beta$. □

NORMooMKNDooBeoGRN

12.336.
Soient une fonction $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ et l'isomorphisme canonique $\varphi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$. La fonction f définit la fonction

$$F=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2. \tag{12.909}$$

Cela est la fonction $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ associée à f. Il serait tentant de croire que tout ce qui est vrai pour F est également vrai pour f. Eh bien non.

Par exemple, F peut être différentiable sans que f le soit. La proposition suivante donne une condition sur dF pour que f soit différentiable.

La proposition suivante donne le lien entre df et la dérivée complexe f'. Pour avoir le lien avec $\partial_z f$, il faudra voir la proposition 26.5.

PropKJUDooJfqgYS

Proposition 12.337.
Une fonction $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $a\in\Omega$ si et seulement si elle est différentiable en a et si df_a est une similitude.

Plus précisément avec les notations de 12.336, la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable (donc holomorphe) au point $z_0=x_0+iy_0$ si et seulement si la fonction F est différentiable en (x_0,y_0) et si la matrice de dF est de la forme

$$dF=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}, \tag{12.910}$$

EQooWZGKooLDEHGr

c'est-à-dire si $dF_{(x_0,y_0)}$ fournit une application $\mathbb{C}$-linéaire.

Dans ce cas, le lien entre $\mathbb{C}$-dérivée et différentielle est donné par

$$(df_{z_0})(z)=f'(z_0)z. \tag{12.911}$$

EqPAEFooYNhYpz

Démonstration. Nous décomposons f en parties réelles et imaginaires :

$$f(x+iy)=P(x,y)+iQ(x,y) \tag{12.912}$$

où P et Q sont des fonctions réelles. La jacobienne de F est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{12.913}$$

et la condition dont nous parlons s'écrit comme le système EqFDUrXBP

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} & \text{(12.914a)} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. & \text{(12.914b)} \end{cases}$$

Si F est différentiable en (x_0, y_0) alors nous avons

$$F\big((x_0, y_0) + (h, k)\big) = F(x_0, y_0) + dF_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + s(|h| + |k|) \tag{12.915}$$ EqwlVfiR

où s est une fonction vérifiant $\lim_{t\to 0} \frac{s(t)}{t} = 0$. Soit

$$dF_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{12.916}$$

Si nous posons $\sigma = \alpha - i\beta$ et $w = h + ik$, l'équation (12.915) s'écrit dans $\mathbb{C}$ sous la forme

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + \sigma w + s(|w|), \tag{12.917}$$ EqYFmoiM

ce qui implique que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.

Supposons maintenant que f soit $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Alors nous avons

$$f'(z_0) = \lim_{w\to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \sigma \in \mathbb{C}, \tag{12.918}$$

ce qui se récrit sous la forme

$$\lim_{w\to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0) - \sigma w}{w} = 0. \tag{12.919}$$

Si nous posons $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = h + ik$ et $\sigma = \alpha - i\beta$ nous avons

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{F\big((x_0, y_0) + (h, k)\big) - F(x_0, y_0) - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{|w|} \right| = 0, \tag{12.920}$$

ce qui signifie que F est différentiable et que sa différentielle est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{12.921}$$ EqMLtbLD

La matrice (12.921) est, vue dans $\mathbb{R}^2$, la matrice de multiplication dans $\mathbb{C}$ par $\alpha - i\beta = f'(z_0)$. En d'autre termes, dans $\mathbb{C}$ nous avons

$$df_{z_0}(z) = f'(z_0)z, \tag{12.922}$$

et en particulier la différentielle est donnée par

$$df_{z_0} = f'(z_0)dz. \tag{12.923}$$ EqPropZQkfmQ

□

Exemple 12.338 (Une application C^∞ mais pas $\mathbb{C}$-dérivable)**.**
Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x + iy &\mapsto x. \end{aligned} \tag{12.924}$$

Vu que c'est une application linéaire, elle est différentiable une infinité de fois et sa différentielle est elle-même. C'est donc une application C^∞.

Elle n'est cependant pas $\mathbb{C}$-dérivable. En effet le quotient différentiel est, pour $\epsilon \in \mathbb{C}$:

$$\frac{f(x + iy + \epsilon_x + i\epsilon_y) - f(x + iy)}{\epsilon} = \frac{\epsilon_x}{\epsilon}. \tag{12.925}$$

Cela n'a pas de limite lorsque $\epsilon \to 0$. Pour voir cela nous invoquons la méthode des chemins du corolaire 12.250 avec les chemins $\epsilon_1(t) = t$ et $\epsilon_2(t) = it$. Dans le premier cas, le quotient différentiel vaut 1 pour tout t, tandis que dans le second il vaut zéro pour tout t. △

12.31.1 Quelques règles de calcul

LEMooVDXOooUyFHXZ

Lemme 12.339.
Si f et g sont deux fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si g ne s'annule pas sur Ω, alors f/g est holomorphe sur Ω.

12.32 Théorèmes des accroissements finis

SecThoAccrsFinis

Nous avons déjà démontré (lemme 12.280) que si f est différentiable au point x alors $df_x(u) = \partial_u f(x)$. Une importante conséquence est le théorème des accroissements finis

val_medio_2

Théorème 12.340 (Accroissements finis, inégalité de la moyenne)**.**
Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. Soient a et b deux points dans U, $a \neq b$, tels que le segment $[a, b]$ soit contenu dans U. Alors

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|df_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|b - a\|_m. \tag{12.926}$$

Démonstration. On utilise le théorème 10.295 et le fait que

$$\|\partial_u f(x)\|_n \leqslant \|df_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|u\|_m,$$

pour tout u dans $\mathbb{R}^m$. □

La proposition suivante est une application fondamentale du théorème des accroissements finis 12.340.

PropAnnulationEtConstance

Proposition 12.341.
Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^m$ et une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

ItemPropCstDiffZeroi

(1) f est constante ;

ItemPropCstDiffZeroii

(2) f est différentiable et $df(a) = 0$ pour tout $a \in U$;

ItemPropCstDiffZeroiii

(3) les dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_m f$ existent et sont nulles sur U.

Démonstration. Nous allons démonter les équivalences en plusieurs étapes. D'abord (1) ⇒ (2), puis (2) ⇒ (3), ensuite (3) ⇒ (2) et enfin (2) ⇒ (1).

Commençons par montrer que la condition (1) implique la condition (2). Si $f(x)$ est constante, alors la condition (10.807) est vite vérifiée en posant $T(h) = 0$.

Afin de voir que la condition (2) implique la condition (3), remarquons d'abord que la différentiabilité de f implique que les dérivées partielles existent (proposition 12.277) et que nous avons l'égalité $df(a).u = \sum_i u_i \partial_i f(a)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ (lemme 12.280). L'annulation de $\sum_i u_i \partial_i f(a)$ pour tout u implique l'annulation des $\partial_i f(a)$ pour tout i.

Prouvons maintenant que la propriété (3) implique la propriété (2). D'abord, par le théorème 12.320, l'existence et la continuité des dérivées partielles $\partial_i f(a)$ implique la différentiabilité de f. Ensuite, la formule $df(a).u = \sum_i u_i \partial_i f(a)$ implique que $df(a) = 0$.

Il reste à montrer que (2) implique la condition (1), c'est-à-dire que l'annulation de la différentielle implique la constance de la fonction. C'est ici que nous allons utiliser le théorème des accroissements finis. En effet, si a et b sont des points de U, le théorème 12.340 nous dit que

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|b - a\|_m. \tag{12.927}$$

Mais $\|df(x)\| = 0$ pour tout $x \in U$, donc ce supremum est nul et $f(b) = f(a)$, ce qui signifie la constance de la fonction. □

12.33 Fonctions lipschitziennes

DEFooQHVEooDbYKmz

Définition 12.342.
Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques[144]*, $f\colon E \to F$ une application et un réel k strictement positif. Nous disons que f est **lipschitzienne** de constante k sur E si pour tout $x, y \in E$,*

$$d_F\big(f(x), f(y)\big) \leqslant k d_E(x, y). \tag{12.928}$$

Soit f une fonction k-lipschitzienne. Si $y \in \overline{B(x,\delta)}$ alors $\|x - y\| \leqslant \delta$ et donc $\big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant k\delta$. Cela signifie que la condition de Lipschitz peut s'énoncer en termes de boules fermées par

$$f\big(\overline{B(x,\delta)}\big) \subset \overline{B\big(f(x), k\delta\big)} \tag{12.929}$$

EqDZytUbn

tant que $\overline{B(x,\delta)}$ est contenue dans le domaine sur lequel f est lipschitzienne.

Proposition 12.343.
Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^m$, et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. La fonction f est lipschitzienne sur U si et seulement si df est bornée sur U.

Démonstration. Le fait que l'application différentielle df soit bornée signifie qu'il existe un $M > 0$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\|df_a\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \leqslant M$, pour tout a dans U. Si cela est le cas, alors le théorème 12.340 et la convexité[145] de U impliquent évidemment que f est de Lipschitz de constante plus petite ou égale à M.

Inversement, si f est lipschitzienne de constante k, alors pour tout a dans U et u dans $\mathbb{R}^m$ on a

$$\left\| \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} \right\|_n \leqslant k\|u\|_m,$$

En passant à la limite pour $t \to 0$ on a

$$\|\partial_u f(a)\|_n = \|df_a(u)\|_n \leqslant k\|u\|_m,$$

donc la norme de df_a est majorée par k pour tout a dans U. □

Notez cependant qu'une fonction peut être lipschitzienne sans être différentiable.

PropFZgFTEW

Proposition 12.344.
Une fonction lipschitzienne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Démonstration. Nous utilisons la caractérisation de la continuité donnée par le théorème 7.263. Prouvons donc la continuité en $a \in \mathbb{R}$. Pour tout x nous avons

$$\big|f(x) - f(a)\big| \leqslant k|x - a|. \tag{12.930}$$

Si $\epsilon > 0$ est donné, il suffit de prendre $\delta < \frac{\epsilon}{k}$ pour avoir

$$\big|f(x) - f(a)\big| \leqslant k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon. \tag{12.931}$$

Donc f est continue en a. □

DefJSFFooEOCogV

Définition 12.345.
Une fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^p \\ (t, y) &\mapsto f(t, y) \end{aligned} \tag{12.932}$$

*est **localement lipschitzienne** en y au point (t_0, y_0) si il existe des voisinages V de t_0 et W de y_0 et un nombre $k > 0$ tels que pour tout $(t, y) \in V \times W$ on ait*

$$\big\|f(t_0, y_0) - f(t, y)\big\| \leqslant k\|y - y_0\|. \tag{12.933}$$

La fonction est localement lipschitzienne sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ si elle est localement lipschitzienne en chaque point de U.

[144] Pour rappel, les espaces métriques sont définis par la définition 7.139 et le théorème 7.142 ; je précise que nous ne supposons pas que E soit vectoriel ; en particulier il peut être un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

[145] La convexité de U sert à assurer que la droite reliant a à b est contenue dans U ; c'est ce que nous utilisons dans la démonstration du théorème 12.340.

NORMooYNRAooBgobcK

12.346.
Autrement dit, une fonction est localement lipschitzienne en sa deuxième variable lorsque tout point admet un voisinage sur lequel elle est lipschitzienne.

PROPooVZSAooUneOQK

Proposition 12.347.
Toute application lipschitzienne[146] *est uniformément continue*[147].

Démonstration. Soit une application k-lipschitzienne $f\colon E \to F$ entre deux espaces métriques. Soient $\epsilon > 0$ ainsi que $a \in E$. Nous considérons $\delta = \epsilon/k$. Si $x \in B(a, \delta)$ nous avons

$$d_F\big(f(a), f(x)\big) \leqslant k d_E(a, x) \leqslant k\delta \leqslant \epsilon. \tag{12.934}$$

□

PropGIBZooVsIqfY

Proposition 12.348.
Si f et g sont deux fonctions localement lipschitziennes alors $f + g$ l'est.

Démonstration. Il s'agit d'un simple calcul avec une majoration standard :

$$\begin{aligned}\|(f+g)(t_0,y_0) - (f+g)(t,y)\| &\leqslant \|f(t_0,y_0) - f(t,y)\| + \|g(t_0,y_0) - g(t,y)\| && \text{(12.935a)}\\ &\leqslant k_f\|y - y_0\| + k_g\|y - y_0\| && \text{(12.935b)}\\ &= (k_f + k_g)\|y - y_0\|. && \text{(12.935c)}\end{aligned}$$

□

LemCFZUooVqZmpc

Lemme 12.349.
La fonction donnée par

$$f(t,(x,y)) = xy \tag{12.936}$$

est localement lipschitzienne en tout point.

Démonstration. Nous avons la majoration classique

$$|f\big(t,(x_0,y_0)\big) - f\big(t,(x,y)\big)| = |x_0y_0 - xy| \leqslant |x_0y_0 - x_0y| + |x_0y - xy| \leqslant |x_0||y_0 - y| + |y||x_0 - x|. \tag{12.937}$$

Vu que nous parlons de fonction *localement lipschitzienne*, nous pouvons majorer $|y|$ et $|x_0|$ par un même nombre k dans un voisinage de (x_0, y_0). Cela donne

$$|f\big(t,(x_0,y_0)\big) - f\big(t,(x,y)\big)| \leqslant k\big(|y_0 - y| + |x_0 - x|\big) \leqslant \sqrt{2}k\| \begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \end{pmatrix} \|. \tag{12.938}$$

Nous avons utilisé l'équivalence de norme de la proposition 10.59(1). □

12.34 Différentielles d'ordre supérieur

SecDiffOrdSup

12.34.1 Différentielle et dérivées partielles

La définition des applications de classe C^k est 10.297. C'est également le moment de relire la définition 10.298 des espaces emboîtés.

Définition 12.350.
Une sorte de projection. Pour $u \in V$ nous définissons

$$\begin{aligned}\texttt{proj}_u\colon \mathcal{L}^n(V,E) &\to \mathcal{L}^{n-1}(V,E)\\ \texttt{proj}_u(\omega)(v_1,\dots,v_{n-1}) &= \omega(u,v_1,\dots,v_{n-1}).\end{aligned} \tag{12.939}$$

LEMooSMZQooJBVySP

Lemme 12.351 ([1, 465])**.**
À propos de dimensions[148]*,*

ITEMooUWEBooSzFseN

(1) $\dim(E_n) = \dim(V)^n \dim(E)$.

[146] Définition 12.342.
[147] Définition 7.377.
[148] E_n, définition 10.298.

ITEMooFMKQooFSMpgF

(2) $\dim\big(\mathcal{L}^n(V,E)\big) = \dim(E)\dim(V)^n$.

LEMooTDLNooTcPkLg

Lemme 12.352 ([1]).
Nous définissons les ϕ_k par récurrence. D'abord

$$\begin{aligned}\phi_1\colon \mathcal{L}^n(V,E) &\to \mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}^{n-1}(V,E)\big)\\ \phi_1(\omega)u &= \texttt{proj}_u(\omega),\end{aligned} \tag{12.940}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}\phi_k\colon \mathcal{L}^n(V,E) &\to \mathcal{L}^{n-k}(V,E)_k\\ \phi_k(\omega)u &= \phi_{k-1}\big(\texttt{proj}_u(\omega)\big).\end{aligned} \tag{12.941}$$

Les applications ϕ_k sont bijectives.

Démonstration. Nous prouvons par récurrence.

(1) **Injective, $k=1$** Soit $\omega\in\mathcal{L}^n(V,E)$ tel que $\phi_1(\omega)=0$. Pour tout $u\in V$ nous avons $\phi_1(\omega)u=0$, ce qui signifie que $\texttt{proj}_u(\omega)=0$ ou encore que pour tout $v_1,\dots,v_{n-1}\in V$ nous avons $\omega(u,v_1,\dots,v_{n-1})=0$. Nous avons donc bien $\omega=0$.

(2) **Surjective, $k=1$** Soit $\alpha\in\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}^{n-1}(V,E)\big)$. Nous allons construire $\omega\in\mathcal{L}^n(V,E)$ tel que $\phi_1(\omega)=\alpha$. Nous posons

$$\omega(v_0,\dots,v_{n-1}) = \alpha(v_0)(v_1,\dots,v_{n-1}). \tag{12.942}$$

Avec lui nous avons bien $\texttt{proj}_{v_0}(\omega)=\alpha(v_0)$.

(3) **Injective, $k=k$** Nous supposons que $\phi_k(\omega)=0$, c'est-à-dire que pour tout $u\in V$ nous avons

$$\phi_{k-1}\big(\texttt{proj}_u(\omega)\big)=0. \tag{12.943}$$

Cela implique $\texttt{proj}_u(\omega)=0$ parce que ϕ_{k-1} est injective par hypothèse de récurrence. Nous déduisons que $\omega=0$, et que ϕ_k est injective.

(4) **Surjective, $k=k$** Nous allons montrer que $\phi_k\colon\mathcal{L}^n(V,E)\to\mathcal{L}^{n-k}(V,E)_k$ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension.

Il s'agit d'utiliser le lemme 12.351. D'abord

$$\dim\big(\mathcal{L}^{n-k}(V,E)_k\big) = \dim(V)^k\dim\big(\mathcal{L}^{n-k}(V,E)\big) = \dim(V)^n\dim(E). \tag{12.944}$$

Ensuite $\dim\big(\mathcal{L}^n(V,E)\big)=\dim(V)^n\dim(E)$. Le compte est bon.

Le théorème du rang (formule (4.51)) avec $\dim\big(\ker(\phi_k)\big)=0$ nous dit que le rang de ϕ_k est maximal et donc que ϕ_k est surjective.

□

LEMooLTYCooAoMJKD

Lemme 12.353.
Soit $w\in W$. Nous avons

$$\big[w\times_k\phi_k(\omega_I)\big]\times_1\omega_l = w\times_{k+1}\phi_{k+1}(\omega_{l,I}). \tag{12.945}$$

Démonstration. Il s'agit d'appliquer les deux membres à un élément $v\in V$. D'abord

$$\begin{aligned}\big[w\times_k\phi_k(\omega_I)\big]\times_1\omega_l(v) &= \omega_l(v)w\times_k\phi_k(\omega_I) && \text{(12.946a)}\\ &= w\times_k\big(\phi_k(\omega_I)v_l\big) && \text{(12.946b)}\end{aligned}$$

SUBEQooMWPMooYAsYCB

Pour (12.946b) nous avons utilisé le fait que $\omega_{l,I}(v)=v_l\in\mathbb{R}$ et que le produit $\times_k$ est linéaire. De l'autre côté, en utilisant les définitions de $\times_k$ et de ϕ_k, nous avons

$$\begin{aligned}\big[w\times_{k+1}\phi_{k+1}(\omega_{l,I})\big]v &= w\times_k\big(\phi_{k+1}(\omega_{l,I})v\big) && \text{(12.947a)}\\ &= w\times_k\phi_k\big(\texttt{proj}_v(\omega_{l,I})\big) && \text{(12.947b)}\\ &= w\times_k\phi_k(v_l\omega_I) && \text{(12.947c)}\end{aligned}$$

parce que $\texttt{proj}_v(\omega_{l,I})=v_l\omega_I$. □

PROPooVGRRooHSwcPl

Proposition 12.354 ([1]).
Soit une application $f\colon V \to E$ de classe C^n. Alors

(1) pour tout n-multiindice I, la dérivée partielle $\partial_I^n f$ existe,

(2) nous avons la formule

$$(d^n f)_a = \sum_{i_1,\dots,i_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) \times_n \phi_n(\omega_{i_1,\dots,i_n}) \tag{12.948}$$

où la somme porte sur tous les multiindices de taille n, le produit $\times_n$ est la définition 10.300 et l'application ϕ_n est donnée dans l'énoncé du lemme 12.352.

Démonstration. Nous faisons tout cela par récurrence. Le cas $n = 1$ est déjà fait par le théorème 12.320 parce que $\phi_1(\omega) = \omega$. Nous supposons que le résultat est démontré pour une valeur k, et nous considérons f de classe C^n avec $n \geqslant k+1$. L'hypothèse de récurrence dit que

EQooBOZUooCiFIYR
$$(d^k f)_a = \sum_I (\partial_I f)(a) \times_k \phi_k(\omega_I) \tag{12.949}$$

est continuement différentiable par rapport à a. Nous pouvons donc utiliser la formule (12.865) pour calculer la différentielle de (12.949) :

$$\begin{aligned}
(d^{k+1} f)_a &= \sum_l \frac{\partial (d^k f)}{\partial x_l}(a) \times_1 \omega_l && \text{(12.950a)}\\
&= \sum_l \sum_I \big[(\partial_l \partial_I f)(a) \times_k \phi_k(\omega_I)\big] \times_1 \omega_l && \text{(12.950b)}\\
&= \sum_{l,I} (\partial_{l,I} f)(a) \times_{k+1} \phi_{k+1}(\omega_{l,I}) && \text{(12.950c)}
\end{aligned}$$

SUBEQooOXUHooFDJiow

où nous avons utilisé le lemme 12.353 pour obtenir (12.950c). □

PROPooKOBVooQhrAeJ

Proposition 12.355.
Soit une application $f\colon V \to E$ telle que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}$ existent et sont continues sur un ouvert $\mathcal{U}$. Alors f est de classe C^n sur $\mathcal{U}$.

Démonstration. Pour $n = 1$, cette proposition est déjà contenue dans le théorème 12.320. Nous pouvons donc directement passer au pas de récurrence. Nous définissons les objets

$$T_k(a) = \sum_I (\partial_I f)(a) \times_k \phi_k(\omega_I) \tag{12.951}$$

où la somme porte sur tous les k-multiindices. Ces applications T_k existent et sont continues par hypothèse.

Le théorème 12.320 nous indique que $T_1(a) = df_a$. Nous supposons maintenant que $(d^k f)_a = T_k(a)$ et nous allons prouver que T_{k+1} est la différentielle de $d^k f$. Pour cela nous devons prouver que

EQooPKXDooWWVikT
$$\lim_{h\to 0} \frac{T_k(a+h) - T_k(a) - T_{k+1}(a)h}{\|h\|} = 0. \tag{12.952}$$

En utilisant le lemme 12.353 nous pouvons dégrossir le terme $T_{k+1}(a)h$:

$$\begin{aligned}
T_{k+1}(a)h &= \sum_{l,I} \big[(\partial_{l,I} f)(a) \times_{k+1} \phi_{k+1}(\omega_{l,I})\big] h && \text{(12.953a)}\\
&= \sum_{l,I} \big[(\partial_{l,I} f)(a) \times_k \phi_k(\omega_I)\big] \times_1 \omega_l(h) && \text{(12.953b)}\\
&= \sum_{l,I} h_l (\partial_{l,I} f)(a) \times_k \phi_k(\Omega_I) && \text{(12.953c)}\\
&= \sum_l h_l \big[\partial_l \sum_I (\partial_I f)(a)\big] \times_k \phi_k(\omega_I). && \text{(12.953d)}
\end{aligned}$$

SUBEQooACCZooXrxHpY

Vu que $\partial_I f$ est une fonction dont les dérivées partielles existent et sont continues, le théorème 12.320 (toujours lui) nous dit qu'elle est différentiable et que

$$d(\partial_I f)_a(h) = \sum_l h_l \partial_l (\partial_I f)(a). \tag{12.954}$$

En mettant la somme sur I tout devant dans (12.953d), nous trouvons

$$T_{k+1}(a)h = \sum_I d(\partial_I f)_a(h) \times_k \phi_k(\omega_I). \tag{12.955}$$

C'est pas beau la vie ? Nous pouvons écrire le numérateur du quotient différentiel (12.952) :

$$T_k(a+h) - T_k(a) - T_{k+1}(a)h = \sum_I \big[(\partial_I f)(a+h) - (\partial_I f)(a)\big] \times_k \phi_k(\omega_I) \tag{12.956a}$$

$$- \sum_I d(\partial_I f)_a(h) \times_k \phi_k(\omega_I) \tag{12.956b}$$

$$= \sum_I \big[(\partial_I f)(a+h) - (\partial_I f)(a) - d(\partial_I f)(a)h\big] \times_l \phi_k(\omega_I). \tag{12.956c}$$

Nous utilisons le fait que l'application $w \mapsto w \times_k \phi_k(\omega_I)$ est linéaire et commute avec la limite, c'est-à-dire que

$$\lim_{h\to 0} \big(w(h) \times_k \phi_k(\omega_I)\big) = \big(\lim_{h\to 0} w(h)\big) \times_k \phi_k(\omega_I). \tag{12.957}$$

Et bien sûr, la somme sur les multiindices I commute également avec la limite. Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{T_k(a+h) - T_k(a) - T_{k+1}(a)h}{\|h\|} = \sum_I \left(\lim_{h\to 0} \frac{(\partial_I f)(a+h) - (\partial_I f)(a) - d(\partial_I f)_a h}{\|h\|}\right) \times_k \phi_k(\omega_I) \tag{12.958a}$$

$$= 0. \tag{12.958b}$$

Cela prouve que T_{k+1} est bien la différentielle de T_k. Par récurrence, la fonction f est bien n fois continuement différentiable. □

Maintenant que nous avons plein de lemmes et de résultats, il est facile de démontrer un très gros résultat en peu de lignes.

THOooPZTAooTASBhZ

Théorème 12.356.
Soit une application $f\colon V \to E$ entre deux espaces vectoriels normés de dimension finies. Nous avons équivalence entre

ITEMooBOWTooXgxhpS

(1) f est de classe C^n

ITEMooPVZHooHihSRD

(2) les dérivées partielles $\partial_i f$ sont de classe C^{n-1}

ITEMooVBQMooBleazN

(3) les dérivées partielles $\partial_I^n f$ existent et sont continues pour tout multiiindice de longueur n.

Démonstration. En plusieurs implications.

(1) **(3) implique (1)** C'est la proposition 12.355.

(2) **(1) implique (3)** C'est la proposition 12.354.

(3) **(3) implique (2)** En posant $g_i = \partial_i f$, l'hypothèse est que les $\partial_I^{n-1} g_i$ existent et sont continues pour tout multiindices I de longueur $n-1$. En appliquant « (3) implique (1) » à la fonction g_i, la fonction g_i est de classe C^{n-1}.

(4) **(2) implique (3)** Les fonctions g_i déjà définies sont de classe C^{n-1}. Nous leur appliquons « (1) implique (3) », nous savons que les fonctions $\partial_I^{n-1} g_i$ sont continues, c'est-à-dire que les $\partial_I \partial_i f$. Vu que tout multiiindice de longueur n peut être écrit sous la forme iI où I est de longueur $n-1$, nous avons prouvé que les $\partial_J^n f$ existent et sont continues pour tout multiindice J de longueur n.

□

PROPooCKROooYutfEX

Proposition 12.357 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel V de dimension finie n sur K ($= \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$). Soit une base $\{e_i\}_{i\in I}$ de V. Pour chaque i, la projection

$$\begin{aligned} \mathit{proj}_i\colon V &\to \mathbb{K} \\ \sum_k e_k &\mapsto a_i \end{aligned} \tag{12.959}$$

est de classe C^∞.

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

PROPooMOMMooDYIayv

Proposition 12.358 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés de dimension finie V et W. Soient des bases $\{e_i\}$ et $\{e'_j\}$ de V et W. Une application $f\colon V \to W$ est de classe C^p si et seulement si chacune de ses composantes le sont, c'est-à-dire si en écrivant

$$f(s) = \sum_j f_j(s) e'_j, \tag{12.960}$$

les applications $f_j\colon V \to \mathbb{R}$ sont de classe C^p.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct** Considérant la proposition 12.357, la projection

$$\begin{aligned} \texttt{proj}_i\colon W &\to \mathbb{R} \\ \sum_k a_k e'_k &\mapsto a_i \end{aligned} \tag{12.961}$$

est de classe C^∞. Vu que f est de classe C^p, la composée $\texttt{proj}_i \circ f$ est de classe C^p par la proposition 10.320.

(2) **Sens réciproque** Si I est un multiindice de longueur p, nous avons

$$(\partial_I^p f)(s) = \sum_k (\partial_I^p f_k)(s) e'_k, \tag{12.962}$$

qui est continue parce que les f_k sont de classe C^p. Donc f est de classe C^p par le théorème 12.356(3).

□

PROPooWOYSooVERAAx

Proposition 12.359 ([1]).
Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit une application $s\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k. Alors

$$\begin{aligned} f\colon U &\to U \times \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \big(x, s(x)\big) \end{aligned} \tag{12.963}$$

est de classe C^k.

12.34.2 Application à valeurs dans les opérateurs

PROPooUCRNooaqsebj

Proposition 12.360 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soient un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et une application $A\colon U \to \mathrm{End}(V, W)$. L'application A est de classe C^k si et seulement si toutes les applications $s \mapsto A(s)_{ij}$ sont de classe C^k.

Démonstration. Nous utilisons les applications f_{ij} de la proposition 4.81, en nous souvenant que les éléments de matrice de $A(s)$ sont les coordonnées de $A(s) \in \mathrm{End}(V, W)$ dans ces coordonnées (proposition 4.82). Le résultat est alors seulement un cas particulier de la proposition 12.358. □

PROPooYORGooDmwrJg

Proposition 12.361 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soient un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et une application $A\colon U \to \mathrm{End}(V, W)$. Nous supposons que pour chaque $v \in V$, l'application $s \mapsto A(s)v$ est C^k.
Alors A est C^k.

Démonstration. Soient une base $\{e_i\}$ de V et $\{e'_j\}$ de W. Nous considérons les applications

$$\begin{aligned} f_i\colon U &\to W \\ s &\mapsto A(s)e_i. \end{aligned} \tag{12.964}$$

Par hypothèse, f_i est une application C^k. Nous avons

$$f_i(s) = A(s)e_i = \sum_j A(s)_{ji} e'_j \tag{12.965}$$

Nous profitons de la proposition 12.357 qui dit que la projection est de classe C^∞, et de la proposition 10.320 à propos des composées, l'application $(\texttt{proj}_j \circ f_i)$ est de classe C^p. Or nous avons

$$(\texttt{proj}_j \circ f_i)(s) = A(s)_{ji}. \tag{12.966}$$

La proposition 12.360 conclut que f est de classe C^p. □

12.34.3 Espaces d'applications multilinéaires et identifications

Si V et E sont des espaces vectoriels de dimensions finies, la différentielle de $f\colon V\to E$ est une application $df\colon V\to\mathcal{L}(V,E)$. La différentielle seconde est une application $d(df)\colon V\to\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,E)\big)$ et ainsi de suite.

Une grande difficulté de la manipulation des différentielles d'ordre supérieurs provient de cet emboîtement d'espaces d'applications linéaires. Nous nous attaquons à présent à la description de ces espaces emboîtés[149].

Pour la suite, nous considérerons des espaces vectoriels normés V et E de dimension finie. Nous notons $\mathcal{L}^n(V,E)$ l'espace des applications multilinéaires $V^n\to E$.

Nous introduisons le produit suivant[1] :

$$\begin{aligned}\cdot\ :W\times\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,\mathbb{R})\big)&\to\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,W)\big)\\ \big((w\cdot\psi)(u)\big)v&=\big(\psi(u)v\big)w.\end{aligned}\tag{12.967}$$

Dans la suite, pour économiser des parenthèses et des maux de tête, nous allons noter $\psi(u,v)$ le nombre $\psi(u)v$. Il n'est cependant pas question de dire que ψ est une application bilinéaire. En effet, identifier $\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,W)\big)$ à l'espace des applications bilinéaires $V\times V\to W$ ne sert pas à grand chose pour l'instant parce qu'une telle identification a le prix de devoir prouver que toutes les propriétés des différentielles passent à travers l'identification, tâche qui est à priori (conservation de la difficulté) de la même nature que celle à laquelle nous nous attachons à présent.

LEMooHCUSooXYHuBR

Lemme 12.362 ([1])**.**
Soient deux espaces vectoriels normés V et E ainsi que $\psi\in\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,\mathbb{R})\big)$. Pour tout $a\in E$ nous avons

$$\|a\cdot\psi\|_{\mathcal{L}\left(V,\mathcal{L}(V,E)\right)}=\|\psi\|_{\mathcal{L}\left(V,\mathcal{L}(V,\mathbb{R})\right)}\|a\|_E.\tag{12.968}$$

Démonstration. Il s'agit seulement d'un calcul :

$$\begin{aligned}\|a\cdot\psi\|&=\sup_{\|v\|=1}\|(a\cdot\psi)(v)\|_{\mathcal{L}(V,E)}&\text{(12.969a)}\\ &=\sup_{\|v\|=1}\sup_{\|w\|=1}\|(a\cdot\psi)(v)w\|_E&\text{(12.969b)}\\ &=\sup_{\|v\|=1}\sup_{\|w\|=1}\|\big(\psi(v)w\big)a\|_E&\text{(12.969c)}\\ &=\sup_{\|v\|=1}\sup_{\|w\|=1}|\psi(v)w|\,\|a\|_E&\text{(12.969d)}\\ &=\sup_{\|v\|=1}\|\psi(v)\|\,\|a\|&\text{(12.969e)}\\ &=\|\psi\|\|a\|.&\text{(12.969f)}\end{aligned}$$

SUBEQooDVSVooFkgDQb

SUBEQooBJQDooDyZMQy

Notez que dans (12.969c), $|\psi(v)w|$ est un simple réel ; c'est pourquoi nous le retrouvons hors de la norme $\|.\|_E$ dans (12.969d), muni d'une simple valeur absolue. □

Lemme 12.363 ([1])**.**
Soient $\psi\in\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,\mathbb{R})\big)$ et une fonction continue $f\colon V\to E$. Alors la fonction

$$\begin{aligned}g\colon V&\to\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,E)\big)\\ x&\mapsto f(x)\cdot\psi\end{aligned}\tag{12.970}$$

est continue.

Démonstration. Pour des raisons de notations, nous allons écrire g_x pour $g(x)$. Cela étant dit nous consi-

[149] Toutes les constructions, tous les énoncés et les preuves qui suivent sont de l'invention personnelle de l'auteur de ces lignes. Je n'ai trouvé nulle part une source qui s'attaque réellement à la récurrence.

dérons $a \in E$, une suite $x_k \xrightarrow{E} a$ et nous calculons :

$$\begin{aligned}
\|g_a - g_{x_k}\| &= \sup_{\|u\|=1} \|g_a(u) - g_{x_k}(u)\|_{\mathcal{L}(V,E)} && \text{(12.971a)}\\
&= \sup_{\|u\|=1} \sup_{\|v\|=1} \|g_a(u)v - g_{x_k}(u)v\|_E && \text{(12.971b)}\\
&= \sup_{\|u\|=1} \sup_{\|v\|=1} \|f(a)\psi(u)v - f(x_k)\psi(u)v\| && \text{(12.971c)}\\
&= \sup_{\|u\|=1} \sup_{\|v\|=1} \|f(a) - f(x_k)\|\big|\psi(u)v\big| && \text{(12.971d)}\\
&= \big\|f(a) - f(x_k)\big\| \sup_{u,v} |\psi(u)v| && \text{(12.971e)}\\
&= \|f(a) - f(x_k)\|\, \|\psi\|. && \text{(12.971f)}
\end{aligned}$$

En prenant la limite $k \to \infty$, et en considérant que f est continue en a, nous obtenons

$$\lim_{k\to\infty} \|g_a - g_{x_k}\| = 0. \tag{12.972}$$

□

Lemme 12.364 ([1]).
Soient une application différentiable $f\colon V \to E$ ainsi que $\psi \in \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V, \mathbb{R})\big)$. Soit

$$\begin{aligned} g\colon V &\to \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,E)\big)\\ x &\mapsto f(x)\cdot\psi. \end{aligned} \tag{12.973}$$

Alors g est différentiable et pour tout $a \in V$ nous avons

$$dg_a(h) = df_a(h)\cdot\psi. \tag{12.974}$$

Notons que nous n'avons pas $dg_a = df_a \cdot \psi$. En effet, $df_a \in \mathcal{L}(V,W)$, de telle sorte que $df_a \cdot \psi \in \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,W)\big)\big)$. Les espaces ne s'emboîtent pas dans le bon ordre.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que $h \mapsto df_a(h)\cdot\psi$ vérifie la condition de la définition 10.279. En utilisant le fait que $(a+b)\cdot\psi = a\cdot\psi + b\cdot\psi$ ainsi que le lemme 12.362 nous écrivons

$$\begin{aligned}
\frac{\|f(a+h)\cdot\psi - f(a)\cdot\psi - df_a(h)\cdot\psi\|}{\|h\|} &= \|\frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{h}\cdot\psi\| && \text{(12.975a)}\\
&= \|\frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{h}\|\|\psi\|. && \text{(12.975b)}
\end{aligned}$$

Vu que f est différentiable en a et que df_a est la différentielle, nous avons bien

$$\lim_{h\to 0} \|\frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{h}\|\|\psi\| = 0. \tag{12.976}$$

□

Démonstration. Nous faisons (1) par récurrence. D'abord $\dim(E_0) = \dim(E)$ et ensuite

$$\dim(E_{k+1}) = \dim \mathcal{L}(V, E_k) = \dim(V)\dim(E_k) = \dim(V)^{n+1}\dim(E). \tag{12.977}$$

Pour (2), si $\{e_i\}$ est une base de V, un élément $\omega \in \mathcal{L}^n(V,E)$ est déterminé par les valeurs de $\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ qui peuvent être n'importe quel vecteur de E. Donc la dimension est $\dim(V)^n \dim(E)$. □

Lemme 12.365 ([1]).
Soit $n \in \mathbb{N}$ nous définissons par récurrence

$$\begin{aligned} \psi_{n,0}\colon E_n &\to E_n\\ \alpha &\mapsto \alpha. \end{aligned} \tag{12.978}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_{n,k}\colon E_n &\to \mathcal{L}^k(V, E_{n-k})\\ \psi_{n,k}(\alpha)(v_1, \dots, v_k) &= \big(\psi_{n,k-1}(\alpha)(v_1, \dots, v_{k-1})\big)v_k. \end{aligned} \tag{12.979}$$

L'application

$$\psi_{n,n}\colon E_n \to \mathcal{L}^n(V,E) \tag{12.980}$$

est un isomorphisme isométrique.

Démonstration. Nous allons démontrer par récurrence sur k que tous les $\psi_{n,k}$ sont des isomorphismes isométriques. Pour $k=0$ c'est évident parce que $\psi_{n,0}$ est l'identité.

(1) **Injective** Soient $\alpha\in E_n$ tels que $\psi_{n,k+1}(\alpha)=0$. Cela signifie que pour tout $v_1,\dots,v_{k+1}$ nous avons

$$\psi_{n,k}(\alpha)(v_1,\dots,v_k)v_{k+1}=0. \tag{12.981}$$

c'est-à-dire $\psi_{n,k}(\alpha)(v_1,\dots,v_k)=0$. Vu que $\psi_{n,k}$ est injective (hypothèse de récurrence), nous avons $\alpha=0$.

(2) **Surjective** Soit $\omega\in\mathcal{L}^{k+1}(V,E_{n-k})$; nous cherchons $\alpha\in E_n$ tel que $\psi_{n,k+1}(\alpha)=\omega$, c'est-à-dire tel que

$$\psi_{n,k+1}(\alpha)(v_1,\dots,v_{k+1})=\psi_{n,k}(\alpha)(v_1,\dots,v_k)v_{k+1}=\omega(v_1,\dots,v_{k+1}). \tag{12.982}$$ EQooACUOooKCKame

Notez que

$$\psi_{n,k}(\alpha)\in\mathcal{L}^k(V,E_{n-k})=\mathcal{L}^k\big(V,\mathcal{L}(V,E_{n-k-1})\big). \tag{12.983}$$

En considérant $\sigma\in\mathcal{L}^k\big(V,\mathcal{L}(V,E_{n-k-1})\big)$ donné par

$$\sigma(v_1,\dots,v_k)v_{k+1}=\omega(v_1,\dots,v_{k+1}), \tag{12.984}$$

il existe (hypothèse de récurrence sur k) un $\alpha\in E_n$ tel que $\psi_{n,k}(\alpha)=\sigma$.

Pour ce α, la condition (12.982) est satisfaite.

(3) **Isométrique** Encore une fois par récurrence. Soit $\alpha\in E_n$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|\psi_{n,k}(\alpha)\|_{\mathcal{L}^k(V,E_{n-k})}&=\sup_{\|v_i\|=1}\|\psi_{n,k}(\alpha)(v_1,\dots,v_k)\|_{E_{n-k}} &(12.985a)\\
&=\sup_{\|v_i\|=1}\|\psi_{n,k-1}(\alpha)(v_1,\dots,v_{k-1})v_k\|_{E_{n-k}} &(12.985b)\\
&=\sup_{\substack{\|v_i\|=1\\ i=1,\dots,k-1}}\|\psi_{n,k-1}(v_1,\dots,v_{k-1})\|_{\mathcal{L}(V,E_{n-k-1})} &(12.985c)\\
&=\|\psi_{n,k-1}(\alpha)\| &(12.985d)\\
&=\|\alpha\|. &(12.985e)
\end{aligned}$$

La dernière égalité est l'hypothèse de récurrence. Notez la subtile utilisation du lemme 7.197 qui permet de donner un sens aux supremums, grace au fait que $\{v\in V \text{ tel que } \|v\|=1\}$ est compact.

□ LEMooFBEGooCqrzxH

Lemme 12.366.
Nous avons $\psi_{n,n}=\phi_n^{-1}$.

Démonstration. Pour nous échauffer nous posons $\omega\in\mathcal{L}^n(V,\mathbb{R})$, et nous calculons : EQooPBQIooUValDA

$$\begin{aligned}
\psi_{n,2}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,v_2)&=\Big(\psi_{n,1}\big(\phi_n(\omega)\big)v_1\Big)v_2 &(12.986a)\\
&=\big(\phi_n(\omega)v_1\big)v_2 &(12.986b)\\
&=\phi_{n-1}\big(\mathtt{proj}_{v_1}(\omega)\big) &(12.986c)\\
&=\phi_{n-2}\big(\mathtt{proj}_{v_2}\mathtt{proj}_{v_1}(\omega)\big). &(12.986d)
\end{aligned}$$

Cela étant dit, nous allons prouver ceci par récurrence :

$$\psi_{n,k}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,\dots,v_k)=\phi_{n-k}\Big(\prod_{i=1}^{k}\mathtt{proj}_{v_i}(\omega)\Big). \tag{12.987}$$

Notez l'ordre du produit des projections. En ce qui concerne cet ordre, pour fixer les idées voici un exemple :

$$\mathtt{proj}_{v_2}\mathtt{proj}_{v_1}(\omega)=\big(\mathtt{proj}_{v_1}(\omega)\big)(v_2)=\omega(v_1,v_2). \tag{12.988}$$

Faisons maintenant la récurrence.

(1) **Pour $k=2$** C'est le calcul (12.986).

(2) **Pour $k+1$** C'est encore un calcul, en faisant attention à l'ordre dans lequel viennent les projections :

$$\psi_{n,k+1}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,\dots,v_{k+1}) = \Big(\psi_{n,k}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,\dots,v_k)\Big)v_{k+1} \tag{12.989a}$$
$$= \Big(\phi_{n-k}\big(\prod_{i=1}^{k}\mathtt{proj}_{v_i}(\omega)\big)\Big)v_{k+1} \tag{12.989b}$$
$$= \phi_{n-k-1}\big(\mathtt{proj}_{v_{k+1}}\prod_{i=1}^{k}\mathtt{proj}_{v_i}(\omega)\big) \tag{12.989c}$$
$$= \phi_{n-(k+1)}\big(\prod_{i=1}^{k+1}\mathtt{proj}_{v_i}(\omega)\big). \tag{12.989d}$$

Il ne reste qu'à écrire la formule démontrée avec $k=n$:

$$\psi_{n,n}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,\dots,v_n) = \phi_{n-n}\big(\prod_{i=1}^{n}\mathtt{proj}_{v_i}(\omega)\big) = \omega(v_1,\dots,v_n). \tag{12.990}$$

Donc nous avons bien que $\psi_{n,n}\big(\phi_n(\omega)\big)=\omega$. □

LEMooDGUGooTXOtih

Lemme 12.367.
Soient deux espaces vectoriels normés V et E. Nous considérons une application linéaire $A\colon V\to E$, une forme $\omega\in\mathcal{L}^n(V,\mathbb{R})$ ainsi que la forme

$$\begin{aligned}\alpha\colon V &\to E_n\\ u &\mapsto A(u)\psi^{-1}(\omega).\end{aligned} \tag{12.991}$$

Alors

$$\psi_{n+1,n+1}(\alpha)(v_1,\dots,v_{n+1}) = A(v_1)\omega(v_2,\dots,v_{n+1}). \tag{12.992}$$

Démonstration. Nous prouvons la formule suivante par récurrence :

$$\psi_{n+1,k}(\omega)(v_1,\dots,v_k) = A(v_1)\phi_{n-k+1}\big(\prod_{i=2}^{k}\mathtt{proj}_{v_i}(\omega)\big). \tag{12.993}$$

Nous commençons la récurrence avec $k=2$, en tenant compte que $\psi^{-1}=\phi_n$ (lemme 12.366) :

$$\psi_{n+1,2}(\alpha)(v_1,v_2) = \big(\psi_{n+1,1}(\alpha)v_1\big)v_2 \tag{12.994a}$$
$$= \alpha(v_1)v_2 \tag{12.994b}$$
$$= A(v_1)\big(\psi^{-1}(\omega)v_2\big) \tag{12.994c}$$
$$= A(v_1)\big(\phi_n(\omega)v_2\big) \tag{12.994d}$$
$$= A(v_1)\phi_{n-1}\big(\mathtt{proj}_{v_2}(\omega)\big). \tag{12.994e}$$

C'est bon pour $k=2$. Nous passons à la récurrence :

$$\psi_{n+1,k+1}(\omega)(v_1,\dots,v_{k+1}) = \big(\phi_{n+1,k}(\omega)(v_1,\dots,v_k)\big)v_{k+1} \tag{12.995a}$$
$$= A(v_1)\Big(\phi_{n-k+1}\big(\prod_{i=2}^{k}\mathtt{proj}_{v_i}\omega\big)\Big)v_{k+1} \tag{12.995b}$$
$$= A(v_1)\phi_{n-k}\big(\mathtt{proj}_{v_{k+1}}\prod_{i=2}^{k}\mathtt{proj}_{v_i}\omega\big) \tag{12.995c}$$
$$= A(v_1)\phi_{n-(k+1)}\big(\prod_{i=2}^{k+1}\mathtt{proj}_{v_i}\omega\big). \tag{12.995d}$$

La récurrence est terminée. Nous écrivons la formule pour $k=n+1$ en tenant compte de $\phi_0=\mathrm{Id}$ pour terminer la preuve de ce lemme :

$$\psi_{n+1,n+1}(\omega)(v_1,\dots,v_{n+1}) = A(v_1)\phi_0\big(\prod_{i=2}^{n+1}\mathtt{proj}_{v_i}\omega\big) = A(v_1)\omega(v_2,\dots,v_{n+1}). \tag{12.996}$$

□

12.34.4 Fonctions différentiables plusieurs fois

Définition 12.368.
*Un C^k-**difféomorphisme** est une application inversible de classe C^k dont l'inverse est également de classe C^k.*

bilin_2diff

Exemple 12.369.
Soit $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application bilinéaire. On définit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ par $f(x) = B(x, x)$. Le lemme 12.298 nous dit que B est différentiable. Cela implique la différentiabilité de f. Pour trouver la différentielle de la fonction f, nous écrivons $f = B \circ s$ où $s\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ est l'application $s(x) = (x, x)$. En utilisant la règle de différentiation de fonctions composées,

$$df(a) = dB\big(s(a)\big) \circ ds(a). \tag{12.997}$$

Mais $ds(a).u = (u, u)$ parce que $s(a + h) - s(a) - (h, h) = 0$. Par conséquent,

$$df(a).u = dB\big(s(a)\big)(u, u) = B(u, a) + B(a, u) \tag{12.998}$$

EqdBsaExp

où nous avons utilisé la formule du lemme 12.298. La formule (12.998) peut être écrite sous la forme compacte

$$df(a) = B(\ \cdot\ , a) + B(a,\ \cdot\ ) \tag{12.999}$$

La fonction $df(a)$ ainsi écrite est linéaire par rapport à a, donc différentiable. En outre elle coïncide avec sa différentielle, comme on a vu dans le lemme 10.307, au sens que la différentielle de df au point a sera l'application que à chaque x dans $\mathbb{R}^m$ associe l'application linéaire $B(x,\ \cdot\ ) + B(\ \cdot\ , x)$. On voit bien que $d^2 f$ au point a est une application de $\mathbb{R}^m$ vers l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. On peut utiliser d'autre part l'isomorphisme des espaces $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et dire que, une fois que a est fixé, l'application $d^2 f(a)$ est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. On écrit alors $d^2 f(a)(x, y) = B(x, y) + B(y, x)$. △

12.34.5 Différentielle seconde, fonction de classe C^2

La différentielle seconde dans l'exemple 12.369 est symétrique, c'est-à-dire que $d^2 f(a)(x_1, x_2) = d^2 f(a)(x_2, x_1)$. En fait toute différentielle seconde est symétrique.

Le théorème de Schwarz permet de permuter les dérivées partielles d'ordre 2 dans le cas d'une fonction de classe C^2. Il y aura une généralisation pour les fonctions de classe C^m dans la proposition 12.379.

Schwarz

Théorème 12.370 (Schwarz)**.**
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, pour tout couple i, j d'indices dans $\{1, \dots, m\}$ et pour tout point a dans U, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Démonstration. Pour simplifier nous nous limitons ici au cas $m = 2$. Soit (h, g) un vecteur fixé dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $v = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ on note

$$\begin{aligned} \Delta_h f(v) &= f(v + he_1) - f(v) = f(x + h, y) - f(x, y), \\ \Delta_g f(v) &= f(v + ge_2) - f(v) = f(x, y + g) - f(x, y), \end{aligned} \tag{12.1000}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_g \Delta_h f(v) &= \big(f(x + h, y + g) - f(x, y + g)\big) - \big(f(x + h, y) - f(x, y)\big)\,, \\ \Delta_h \Delta_g f(v) &= \big(f(x + h, y + g) - f(x + h, y)\big) - \big(f(x, y + g) - f(x, y)\big)\,, \end{aligned} \tag{12.1001}$$

donc,

$$\frac{1}{g}\Delta_g \left(\frac{1}{h}\Delta_h f(v)\right) = \frac{1}{h}\Delta_h \left(\frac{1}{g}\Delta_g f(v)\right). \tag{12.1002}$$

On utilise alors le théorème des accroissements finis 12.216

$$\frac{1}{h}\Delta_h f(v) = \frac{1}{h}\big(f(x + h, y) - f(x, y)\big) = \frac{1}{h}\partial_1 f(x + t_1 h, y)h = \partial_1 f(x + t_1 h, y), \tag{12.1003}$$

pour un certain t_1 dans $]0, 1[$. De même on obtient

$$\frac{1}{g}\Delta_g f(v) = \partial_2 f(x, y + t_2 g),$$

pour un certain t_2 dans $]0,1[$. Alors

$$\frac{1}{g}\Delta_g\big(\partial_1 f(x+t_1h,y)\big)=\frac{1}{h}\Delta_h\big(\partial_2 f(x,y+t_2g)\big). \tag{12.1004}$$

En appliquant encore une fois le théorème des accroissements finis on a

$$\partial_2\partial_1 f(x+t_1h,y+s_1g)=\partial_1\partial_2 f(x+s_2h,y+t_2g). \tag{12.1005}$$

Il suffit maintenant de passer à la limite pour $(h,g)\to(0,0)$ et de se souvenir du fait que f est $\mathcal{C}^2$ seulement si ses dérivées partielles secondes sont continues[150] pour avoir $\partial_2\partial_1 f(v)=\partial_1\partial_2 f(v)$. □

Si f est deux fois différentiable $d^2f(a)$ est l'application bilinéaire associée avec la matrice symétrique

$$H_f(a)=\begin{pmatrix}\partial_1^2 f(a) & \dots & \partial_1\partial_m f(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_1\partial_m f(a) & \dots & \partial_m^2 f(a),\end{pmatrix} \tag{12.1006}$$

Cette matrice est dite la matrice **hessienne** de f.

Exemple 12.371.
Montrons qu'il n'existe pas de fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\begin{cases}\partial_x f(x,y)=5\sin x & \text{(12.1007a)}\\ \partial_y(x,y)=6x+y. & \text{(12.1007b)}\end{cases}$$

Ceci est vite fait en appliquant le théorème de Schwarz, 12.370 ; ce que nous trouvons est

$$\partial_y(\partial_x f)=0$$

alors que

$$\partial_x(\partial_y f)=6. \tag{12.1008}$$

Vu que $\partial_x(\partial_y f)\neq\partial_y(\partial_x f)$, le théorème 12.370 dit que f ne peut pas être de classe C^2. △

NORMooKSAVooCeILmI

12.372.
Soit une fonction de classe C^2 $f\colon V\to\mathbb{R}$ où V est un espace vectoriel de dimension $n<\infty$. Nous avons

$$f\colon V\to\mathbb{R} \tag{12.1009a}$$
$$df\colon V\to\mathcal{L}(V,\mathbb{R}) \tag{12.1009b}$$
$$d^2f\colon V\to\mathcal{L}\Big(V,\mathcal{L}(V,\mathbb{R})\Big), \tag{12.1009c}$$

avec, en suivant les différentes formules du lemme 12.280,

$$df_a(u)=\frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0} \tag{12.1010}$$

et

$$(d^2f)_a(u)=\frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}\Big]_{t=0} \tag{12.1011}$$

pour tout $a,u\in V$. Notons que dans le deuxième cas, il s'agit d'une limite dans $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$. Si $\dim(V)=n$, alors $\dim\mathcal{L}(V,\mathbb{R})=n$ et avec un choix de base, nous pouvons trouver une matrice $n\times n$ pour $(d^2f)_a$.

Soit une base $\{e_i\}$ de V et la base duale $\{e_i^*\}$ de $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$. Nous allons chercher la matrice de $(d^2f)_a$ pour ces bases. L'élément de matrice

$$\big[(d^2f)_a\big]_{ij} \tag{12.1012}$$

est la composante e_j^* de $(d^2f)_a$ appliqué à e_i. Trouver cette composante e_j^* revient à appliquer l'élément $(d^2f)_ae_i$ de $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ à e_j. Le calcul est donc :

$$\begin{aligned}\big[(d^2f)_a\big]_{ij}&=\big((d^2f)_ae_i\big)(e_j) && \text{(12.1013a)}\\ &=\frac{d}{dt}\Big[df_{a+te_i}(e_j)\Big]_{t=0} && \text{(12.1013b)}\\ &=\frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{ds}\Big[f(a+te_i+se_j)\Big]_{s=0}\Big]_{t=0} && \text{(12.1013c)}\\ &=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a). && \text{(12.1013d)}\end{aligned}$$

SUBEQooDRZFooAuuaad

[150] Théorème 12.356.

Attention : le passage à (12.1013b) n'est pas une trivialité. Le fait est que si $t \mapsto A(t)$ est une application continue $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ alors

$$\lim_{t\to 0} \big(A(t)v\big) = \big(\lim_{t\to 0} A(t)\big)v. \tag{12.1014}$$

Donc la matrice de d^2f est la matrice des dérivées secondes. Il s'agit d'une matrice symétrique par le théorème de Schwarz 12.370.

NORMooZAOEooGqjpLH

12.373.
Si $a \in V$, nous pouvons aussi voir $(d^2f)_a$ comme une forme bilinéaire sur V grâce à la proposition 10.110. Si $u, v \in V$ nous notons

$$(d^2f)_a(u, v) = (d^2f)_a(u)v. \tag{12.1015}$$

À droite, il s'agit de la définition réelle de d^2f sans abus de notations, et à gauche, il s'agit d'une notation. Cette application bilinéaire $(d^2f)_a \in \mathcal{L}^{(2)}(V, \mathbb{R})$ a pour matrice symétrique la matrice des dérivées secondes calculées en a.

ExZHZYcNH

Exemple 12.374.
Voyons comment la différentielle seconde fonctionne entre deux espaces vectoriels. Soient deux espaces vectoriels de dimension finie V et W. Pour que les choses soient claires, nous avons :

$$f\colon V \to W \tag{12.1016a}$$
$$df\colon V \to \mathcal{L}(V, W) \tag{12.1016b}$$
$$d^2f\colon V \to \mathcal{L}\Big(V, \mathcal{L}(V, W)\Big). \tag{12.1016c}$$

Si $a \in V$, alors $(d^2f)_a$ est une application $V \to \mathcal{L}(V, W)$. Il faut donc l'appliquer à $u \in V$ et ensuite à $v \in V$ pour obtenir un élément de W :

$$(d^2f)_a(u)v = \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}\Big]_{t=0} v \tag{12.1017a}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}(v)\Big]_{t=0} \tag{12.1017b}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{ds}\Big[f(a+tu+sv)\Big]_{s=0}\Big]_{t=0} \tag{12.1017c}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a). \tag{12.1017d}$$

Par conséquent nous voyons

$$d^2f\colon V \to \mathcal{L}^{(2)}(V, W)$$
$$d^2f_a(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a). \tag{12.1018}$$

EqQHINNtD

Dans le cas d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous avons une seule direction et par linéarité de (12.1018) par rapport à u et v, nous avons

$$d^2f_a(u, v) = f''(a)uv \tag{12.1019}$$

EQooSOCGooIiNGmG

où les produits sont des produits usuels dans $\mathbb{R}$ et f'' est la dérivée seconde usuelle. △

Tout ceci est un peu résumé dans la proposition suivante.

PROPooFWZYooUQwzjW

Proposition 12.375.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors en désignant par H_af sa matrice hessienne au point a nous avons

$$(d^2f)_a(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a) = \langle (H_af)u, v\rangle \tag{12.1020}$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. La première égalité est l'équation (12.1019) déjà faite. Pour la seconde, il faut se rappeler du lien entre dérivée partielle et dérivée directionnelle, donné en le lemme 12.280. En particulier ici nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \sum_{kl} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(a) u_k v_l = \langle (H_af)u, v\rangle. \tag{12.1021}$$

□

En particulier, la matrice hessienne $H_a f$ est symétrique et donc diagonalisable (théorème spectral 8.225). Si e_i est un vecteur propre unitaire pour la valeur propre λ_i nous avons

$$(d^2f)_a(e_i,e_i) = \langle (H_af)e_i, e_i\rangle = \lambda\langle e_i,e_i\rangle = \lambda. \tag{12.1022}$$

Enfin pour celles qui aiment les notations matricielles de tout poil, il y a cette façon-ci d'écrire :

$$(d^2f)_a(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial^2_x f(a) & \partial^2_{xy}f(a)\\ \partial^2_{xy}f(a) & \partial^2_y f(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}. \tag{12.1023}$$

12.34.6 Ordre supérieur

Intuitivement, une fonction est de classe C^p si elle est p fois continûment différentiable. Cela est la définition 10.297.

Ce qui est terrible avec les différentielles d'ordre supérieurs, c'est l'emboîtement des espaces. Pour une fonction $f\colon E\to F$, nous allons souvent poser

$$V_0 = F \tag{12.1024a}$$
$$V_{k+1} = \mathcal{L}(E,V_k), \tag{12.1024b}$$

de telle sorte à avoir

$$df\colon E\to\mathcal{L}(E,F) = V_1 \tag{12.1025}$$

et

$$d^2f\colon E\to\mathcal{L}(E,V_1) = V_2, \tag{12.1026}$$

ce qui donne en général

$$d^kf\colon E\to\mathcal{L}(E,v_{k-1}) = V_k. \tag{12.1027}$$

La proposition suivante lie une bonne fois pour toute dérivée et différentielle dans le cadre de fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

PROPooCNDHooKRwils

Proposition 12.376 ([1]).
Une fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe C^p si et seulement si elle est p fois continûment dérivable.

Démonstration. Nous commençons par poser un certain nombre de notations. Comme souvent nous posons $V_0=\mathbb{R}$ et

$$V_{k+1} = \mathcal{L}(\mathbb{R},V_k). \tag{12.1028}$$

De plus nous considérons $M_1\in\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donnée par $M_1(t)=t$. Et par récurrence

$$M_{k+1}(t) = tM_k. \tag{12.1029}$$

Nous avons $M_1\in V_1$ et $M_k\colon\mathbb{R}\to V_{k-1}$, c'est-à-dire $M_k\in V_k$.

Les formules que nous allons prouver sont que d'une part,

$$df_a = f'(a)M_1. \tag{12.1030}$$

et que d'autre part, plus généralement,

$$(d^kf)_a = f^{(k)}(a)M_k. \tag{12.1031}$$

En plusieurs parties et par récurrence.

(1) **Si f est continûment dérivable, alors f est C^1** Nous montrons que l'application T donnée par $T(h)=hf'(a)$ vérifie la condition pour être la différentielle de f en a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{\|h\|} = \frac{f(a+h)-f(a)}{\|h\|} - 1_hf'(a). \tag{12.1032}$$

EQooCPWKooWdgbED

où nous avons noté 1_h le vecteur unité dans la direction de h, c'est-à-dire $1_h=h/\|h\|$. Vu que $h\in\mathbb{R}$, c'est simplement

$$1_h = \begin{cases}1 & \text{si } h>0\\ -1 & \text{si } h<0\end{cases} \tag{12.1033}$$

et nous ne définissons pas 1_h si $h=0$.

C'est le moment de prendre la limite de (12.1032) pour $h \to 0^+$ et $h \to 0^-$ séparément. Lorsque $h \to 0^+$, nous avons $\|h\| = h$ et $1_h = 1$. Vu que f est supposée dérivable, la limite du quotient existe et vaut $f'(a)$. Donc le tout a une limite nulle :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{\|h\|} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0. \tag{12.1034}$$

En ce qui concerne la limite $h \to 0^-$, nous avons $\|h\| = -h$ et $1_h = -1$, et à nouveau une limite nulle. La proposition 12.41 nous permet alors de conclure que la limite existe et est nulle. Les limites à gauche et à droite étant nulles, la limite existe et est nulle par la proposition 12.41.

(2) **Si $f^{(p)}$ est continue alors d^pf aussi** Nous passons à la récurrence de notre preuve. Sous l'hypothèse que $f^{(p)}$ existe et est continue, nous allons montrer que d^pf existe, est continue et vaut

$$(d^pf)_a = f^{(p)}(a)M_p. \tag{12.1035}$$

Soit $k < p$ tel que ce soit bon (pour $k = 1$ c'est déjà fait). Nous avons $(d^kf)_a = f^{(k)}(a)M_k$, et pour prouver que $(d^{k+1}f)_a = f^{(k+1)}(a)M_{k+1}$ nous l'y mettons dans la définition de la différentielle. Nous avons :

$$\frac{(d^kf)_{a+h} - (d^kf)_a - f^{(k+1)}(a)M_{k+1}(h)}{\|h\|} = \frac{f^{(k)}(a+h)M_k - f^{(k)}(a)M_k - hf^{(k+1)}(a)M_k}{\|h\|}. \tag{12.1036}$$

La limite $h \to 0$ est une limite dans V_k, et elle se traite comme précédemment. Elle vaut zéro parce que $f^{(k+1)}$ est la dérivée de $f^{(k)}$. Cela justifie les faits que d^kf est différentiable en a et que la différentielle est donné par la formule voulue.

Par hypothèse, $k + 1 \leqslant p$, donc $f^{(k+1)}$ est continue. Par conséquent l'application $a \mapsto f^{(k+1)}(a)M_{k+1}$ est continue.

(3) **Si f est de classe C^1 alors f' existe et est continue** Dire que f est de classe C^1 revient à dire que la différentielle $df : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existe et est continue. Soyons conscient que $df_a(\epsilon) = \epsilon df_a(1)$ et calculons

$$\frac{f(a+\epsilon) - f(a) - df_a(\epsilon)}{\epsilon} = \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} - df_a(1). \tag{12.1037}$$

La définition de la différentielle est que la limite de cela pour $\epsilon \to 0$ soit nulle. Cela implique que la limite suivante existe et vaut

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} = df_a(1). \tag{12.1038}$$

Nous avons prouvé que $f'(a) = df_a(1)$.

La fonction $a \mapsto df_a$ est continue. Pouvons-nous en déduire que f' est continue ? Nous avons

$$f' = ev_1 \circ df \tag{12.1039}$$

où ev_1 est l'application d'évaluation dont le lemme 10.82 a déjà donné la continuité. Donc f' est continue comme composée d'applications continues.

(4) **f est C^p. Récurrence** Nous supposons que f est de classe C^p, et nous allons montrer par récurrence que $f^{(k)}$ existe et est continue pour tout $k \leqslant p$. Posons exactement l'énoncé de notre récurrence.

Pour $k = 1$ c'est fait. Nous supposons que la formule soit correcte pour un certain $k < p$ et nous y allons pour $k + 1$. Nous avons

SUBEQSobUPLAobQhueCl

$$\frac{(d^kf)(a+h) - (d^kf)(a) - f^{(k+1)}(a)M_{k+1}(h)}{\|h\|} = \frac{\big[f^{(k)}(a+h) - f^k(a) - hf^{(k+1)}(a)\big]M_k}{\|h\|} \tag{12.1040a}$$

$$= \big[\frac{f^{(k)}(a+h) - f^{(k)}(a)}{\|h\|} - 1_hf^{(k+1)}(a)\big]M_k. \tag{12.1040b}$$

où nous avons aussi tenu compte que $M_{k+1}(h) = hM_k$.

C'est le moment de calculer séparément les limites $h \to 0^+$ et $h \to 0^-$. Cela fonctionne comme toutes les autres fois.

□

Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable l fois. L'application

$$d^l f\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}\Big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\dots)\big)\Big) \tag{12.1041}$$

au point x appliquée à $v^{(1)}$ appliquée au point $v^{(2)}$, ..., appliquée à $v^{(l)}$ est notée

$$(d^l f)_x(v^{(1)}, \dots, v^{(l)}) \in \mathbb{R}. \tag{12.1042}$$

EQooITOLooQlUlJ

PROPooQKZIooXTvkIr

Proposition 12.377.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable l fois. Avec la notation (12.1042) nous avons

$$(d^l f)_x(v^{(1)}, \dots v^{(l)}) = \sum_{k_1,\dots,k_l} v^{(1)}_{k_1} \dots, v^{(l)}_{k_l} \frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_l}}(x). \tag{12.1043}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur l, en sachant que la formule est déjà vraie pour $l = 1$ et $l = 2$. Si la formule est valable pour l, nous avons

$$(d^{l+1} f)_x(v^{(1)}, \dots, v^{(l+1)}) = \frac{d}{dt}\Big[(d^l f)_{x+tv^{(l+1)}}(v^{(1)}, \dots, v^{(l)})\Big]_{t=0} \tag{12.1044a}$$

$$= \sum_{k_1 \dots k_l} v^{(1)}_{k_1} \dots v^{(l)}_{k_l} \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_l}}(x + tv^{l+1})\Big]_{t=0} \tag{12.1044b}$$

$$= \sum_{k_1 \dots k_l} v^{(1)}_{k_1} \dots v^{(l)}_{k_l} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_k}(x). \tag{12.1044c}$$

Cela donne le résultat attendu. □

12.378.
La formule de la proposition 12.377 nous permet d'écrire de jolies formules comme

$$(d^3 f)_x(h, h, h) = \sum_{ijk} h_i h_j h_k (\partial^3_{ijk} f)(x). \tag{12.1045}$$

EQooXRWWooMoKoQB

À mon avis la proposition 12.379 se fait par récurrence avec 12.370.

PROPooYGJDooOqibbh

Proposition 12.379 ([1]).
Soit un espace vectoriel V. Si $f\colon \mathbb{R}^n \to V$ est une application de classe C^m, alors pour tout $p \leqslant m$ nous pouvons permuter les dérivées partielles. Plus précisément, si $i_1, \dots, i_p$ sont dans $\{1, \dots, n\}$ et si $\sigma \in S_p$, nous avons

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_p} f = \partial_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial_{i_{\sigma(p)}} f. \tag{12.1046}$$

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

12.35 Suites et séries : généralités

SECooTDZNooJvjPks

12.35.1 Norme supremum

LEMooLPRZooUPsWTR

Lemme 12.380.
Soient un espace compact K et une fonction continue $f\colon K \to \mathbb{C}$ qui se décompose en partie réelle et complexe comme $f(x) = u(x) + iv(x)$. Alors

(1) Les fonctions u et v sont continues sur K.

(2) $\|u\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$,

(3) $\|v\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$

où $\|.\|_\infty$ est la norme supremum 10.116.

12.35.2 Convergence uniforme

ThoUnigCvCont

Théorème 12.381 (Limite uniforme de fonctions continues)**.**
Soit A, un ensemble mesuré et $f_n\colon A\to\mathbb{R}^n$, une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f. Si les fonctions f_n sont toutes continues en $x_0\in A$, alors f est continue en x_0.

Démonstration. Soit $\epsilon>0$. Si $x\in A$ nous avons, pour tout n, la majoration

$$\|f(x)-f(x_0)\|\leqslant\|f(x)-f_n(x)\|+\|f_n(x)-f_n(x_0)\|+\|f_n(x_0)-f(x_0)\| \tag{12.1047a}$$
$$\leqslant\|f_n(x)-f_n(x_0)\|+2\|f_n-f\|_\infty. \tag{12.1047b}$$

Grâce à l'uniforme convergence, nous considérons $N\in\mathbb{N}$ tel que $\|f_n-f\|\leqslant\epsilon$ pour tout $n\geqslant N$. Pour de tels n, nous avons

$$\|f(x)-f(x_0)\|\leqslant 2\epsilon+\|f_n(x)-f_n(x_0)\|. \tag{12.1048}$$

La continuité de f_n nous fournit un $\delta>0$ tel que $\|f_n(x_0)-f_n(x)\|<\epsilon$ dès que $\|x-x_0\|<\delta$. Pour ce δ, nous avons alors $\|f_n(x)-f_n(x_0)\|<\epsilon$.

Donc lorsque $n\geqslant N$ (N est choisi en fonction de ϵ), et $\|x-x_0\|<\delta$ (δ est choisi en fonction de N), nous avons

$$\|f(x)-f(x_0)\|\leqslant 3\epsilon, \tag{12.1049}$$

ce qui prouve la continuité de f en x_0. □

12.35.2.1 Complétude avec la norme uniforme

PropCZslHBx

Proposition 12.382 (Limite uniforme de fonctions continues)**.**
Soit X un espace topologique et (Y,d) un espace métrique. Si une suite de fonctions $f_n\colon X\to Y$ continues converge uniformément[151]*, alors la limite est séquentiellement continue*[152]*.*

Démonstration. Soit $a\in X$ et prouvons que f est séquentiellement continue en a. Pour cela nous considérons une suite $x_n\to a$ dans X. Nous savons que $f(x_n)\xrightarrow{Y}f(x)$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in X$ nous avons la majoration

$$\big\|f(x_n)-f(x)\big\|\leqslant\big\|f(x_n)-f_k(x_n)\big\|+\big\|f_k(x_n)-f_k(x)\big\|+\big\|f_k(x)-f(x)\big\| \tag{12.1050a}$$
$$\leqslant 2\|f-f_k\|_\infty+\big\|f_k(x_n)-f_k(x)\big\|. \tag{12.1050b}$$

Soit $\epsilon>0$. Si nous choisissons k suffisamment grand la premier terme est plus petit que ϵ. Et par continuité de f_k, en prenant n assez grand, le dernier terme est également plus petit que ϵ. □

PropSYMEZGU

Proposition 12.383.
Soit X un espace topologique métrique (Y,d) un espace métrique complet. Alors les espaces

(1) $\big(C_b^0(X,Y),\|.\|_\infty\big)$ *des fonctions continues et bornées $X\to Y$,*

(2) $\big(C_0^0(X,Y),\|.\|_\infty\big)$ *des fonctions continues et s'annulant à l'infini*

(3) $\big(C_0^k(X,Y),\|.\|_\infty\big)$ *des fonctions de classe C^k et s'annulant à l'infini*

sont complets.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $C(X,Y)$, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que si $k,l>N$ nous avons $\|f_k-f_l\|_\infty\leqslant\epsilon$. Cette suite vérifie le critère de Cauchy uniforme 10.148 et donc converge uniformément vers une fonction $f\colon X\to Y$. La continuité (ou l'aspect C^k) de la fonction f découle de la convergence uniforme et de la proposition 12.382 (c'est pour avoir l'équivalence entre la continuité séquentielle et la continuité normale que nous avons pris l'hypothèse d'espace métrique).

Si les fonctions f_k sont bornées ou s'annulent à l'infini, la convergence uniforme implique que la limite le sera également. □

Notons que si X est compact, les fonctions continues sont bornées par le théorème 7.275 et nous pouvons simplement dire que $C^0(X,Y)$ est complet, sans préciser que nous parlons des fonctions bornées.

LemdLKKnd

Lemme 12.384.
Soient un espace topologique compact A et un espace complet B. L'ensemble des fonctions continues de A vers B muni de la norme uniforme est complet.

Dit de façon courte : $\big(C(A,B),\|.\|_\infty\big)$ *est complet.*

[151] Convergence uniforme, définition 10.117.
[152] Si X est métrique, alors c'est la continuité usuelle par la proposition 7.187.

Démonstration. Soit (f_k) une suite de Cauchy de fonctions dans $C(A,B)$. Pour chaque $x\in A$ nous avons

$$\|f_k(x)-f_l(x)\|_B\leqslant\|f_k-f_l\|_\infty, \tag{12.1051}$$

de telle sorte que la suite $(f_k(x))$ est de Cauchy dans B et converge donc vers un élément de B. La suite de Cauchy (f_k) converge donc ponctuellement vers une fonction $f\colon A\to B$. Nous devons encore voir que cette fonction est continue ; ce sera l'uniformité de la norme qui donnera la continuité. En effet soit $x_n\to x$ une suite dans A qui converge vers $x\in A$. Pour chaque $k\in\mathbb{N}$ nous avons

$$\|f(x_n)-f(x)\|\leqslant\|f(x_n)-f_k(x_n)\|+\|f_k(x_n)-f_k(x)\|+\|f_k(x)-f(x)\|. \tag{12.1052}$$

En prenant k et n assez grands, cette expression peut être rendue aussi petite que l'on veut ; le premier et le troisième terme par convergence ponctuelle $f_k\to f$, le second terme par continuité de f_k. La suite $f(x_n)$ est donc convergente vers $f(x)$ et la fonction f est continue. □

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 12.385
Il serait sans doute bon de revoir cette preuve à la lumière du critère de Cauchy uniforme 10.148.

12.386 ([466]).
Le théorème de Stone-Weierstrass indique que les polynômes sont denses pour la topologie uniforme dans les fonctions continues. Donc il existe des limites uniformes de fonctions C^∞ qui ne sont même pas dérivables. Les espaces de type C^p munis de $\|.\|_\infty$ ne sont donc pas complets sans quelques hypothèses. Voir la proposition 12.383 et le thème 37.

ThoUFPLEZh

Théorème 12.387 (Théorème de Dini[467]).
Soient un espace métrique complet D et une suite de fonctions $f_n\in C(D,\mathbb{R})$ telle que

(1) $f_n\to g$ ponctuellement,

(2) $g\in C(D,\mathbb{R})$,

(3) la suite (f_n) est croissante, c'est-à-dire que pour tout $x\in D$ et pour tout $n\geqslant 0$ nous avons $f_{n+1}(x)\geqslant f_n(x)$.

Alors la convergence est uniforme.

Démonstration. Soit $x\in D$ et $\epsilon>0$. Il existe $N(x)\in\mathbb{N}$ tel que

$$g(x)-\epsilon\leqslant f_{N(x)}\leqslant g(x). \tag{12.1053}$$

De plus g et $f_{N(x)}$ sont des fonctions continues, donc il existe $\eta(x)$ tel que si $y\in B\big(x,\eta(x)\big)$ alors

$$g(y)\in B\big(g(x),\epsilon\big) \tag{12.1054a}$$ subEqXKjgKgv
$$f_{N(x)}(y)\in B\big(f_{N(x)}(x),\epsilon\big). \tag{12.1054b}$$ subEqHTiYZLd

Si $n\geqslant N(x)$ et si $y\in B(x,\eta(x))$ alors nous avons les majorations

$$g(y)\geqslant f_n(y)\geqslant f_{N(x)}(y)\geqslant f_{N(x)}(x)-\epsilon\geqslant g(x)-2\epsilon\geqslant g(y)-3\epsilon. \tag{12.1055}$$

Justifications :

(1) Les deux premières inégalités sont la croissance de la suite.
(2) La suivante est (12.1054b).
(3) Ensuite il y a le choix de $N(x)$.
(4) Et enfin il y a (12.1054a).

Nous retenons que si $x\in D$ et si $n\geqslant N(x)$ alors

$$g(y)\geqslant f_n(y)\geqslant g(y)-3\epsilon \tag{12.1056}$$ EqJCMktdj

pour tout $y\in B(x,\eta(x))$.

Nous utilisons maintenant la compacité de D. Pour chaque $x\in D$ nous pouvons considérer la boule ouverte $B\big(x,\eta(x)\big)$; ces boules recouvrent D. Nous en extrayons un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire un ensemble fini d'éléments x_1,..., x_K tels que

$$D=\bigcup_{k=1}^{K}B\big(x_k,\eta(x_k)\big). \tag{12.1057}$$

Si à ce moment vous ne comprenez pas pourquoi c'est une égalité au lieu d'une inclusion, il faut lire l'exemple 7.42. Considérons

$$n \geqslant N = \max\{N(x_1), \dots, N(x_K)\}. \tag{12.1058}$$

Pour tout $y \in D$ il existe $k \in \{1, \dots, K\}$ tel que $y \in B\big(x_k, \eta(x_k)\big)$, et vu que $n \geqslant N(x_k)$ nous reprenons la majoration (12.1056) :

$$g(y) \geqslant f_n(y) \geqslant g(y) - 3\epsilon. \tag{12.1059}$$

Pour le n choisi nous avons ces inégalités pour tout $y \in D$, c'est-à-dire que nous avons $\|f_n - g\| \leqslant 3\epsilon$ et donc la convergence uniforme. □

PROPooFWVIooCzXojO

Proposition 12.388 ([1])**.**
Soient une suite de fonctions continues $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction continue u telle que $u_i \to u$ simplement. Alors la convergence est uniforme sur tout compact.

Démonstration. Soit un compact K ; nous notons $\|.\|$ la norme uniforme sur K. Supposons que la limite ne soit pas uniforme, c'est-à-dire qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$\|u_i - u\| > 2\epsilon \tag{12.1060}$$

pour tout i. Cela permet de considérer pour tout i un élément $x_i \in K$ tel que[153]

$$\|u_i(x_i) - u(x_i)\| > \epsilon. \tag{12.1061}$$

Pour cela, il faut noter que K est compact et que la fonction $x \mapsto \|u_i(x) - u(x)\|$ est continue sur K. Elle est donc bornée et atteint son maximum (c'est le théorème de Weierstrass 7.196).

La suite $i \mapsto x_i$ est une suite dans un compact, et quitte à prendre une sous-suite, nous supposons qu'elle converge vers $a \in K$ (ça, c'est Bolzano-Weierstrass 7.193).

La convergence ponctuelle $u_i \to u$, prise en a, dit qu'il existe un N tel que $|u_i(a) - u(a)| < \epsilon$ pour tout $i \geqslant N$. Pour un tel i, nous avons aussi

$$|u_i(x) - u(x)| < \epsilon \tag{12.1062}$$

sur un voisinage de a, parce que $u_i - u$ est continue. Mais tout voisinage de a contient un élément x_j pour lequel

$$|u_i(x_j) - u(x_j)| > \epsilon. \tag{12.1063}$$

Contradiction. □

12.35.3 Série de fonctions

Les séries de fonctions sont des cas particuliers de suites.

DEFooYEIUooCAgrxI

Définition 12.389.
Si (f_n) est une suite de fonctions, nous définissons la somme des f_n de la façon suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n. \tag{12.1064}$$

Le membre de droite est une définition de la notation introduite dans le membre de gauche.

Avant de vous lancer, relisez une bonne fois les définitions de convergence absolue (définition 10.118) et de convergence uniforme (équation 10.325).

LEMooJDYSooRnurKb

Lemme 12.390.
Soit un ensemble dénombrable I. Soient des fonctions $(u_i : \Omega \to \mathbb{C})_{i\in I}$. Si il existe des réels positifs $(a_i)_{i\in I}$ telle que

(1) pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $i \in I$ nous avons $|u_i(z)| \leqslant a_i$ (c'est-à-dire $a_i \geqslant \|u_i\|_\infty$),

(2) la somme $\sum_{i\in I} a_i$ converge,

alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

(1) converge normalement[154],

[153] Notez l'inégalité stricte, obetenue en considérant 2ϵ plus haut.
[154] Définition 10.119.

(2) converge uniformément.

Démonstration. Le premier point découle du lemme de comparaison 10.165. Le second point est alors le lemme 10.150. □

ThoSerCritAbel

Théorème 12.391.
Soit $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$, une série de fonctions complexes où $g_k(x) = \varphi_k(x)\psi_k(x)$. Supposons que

(1) $\varphi_k : A \to \mathbb{C}$ et $|\sum_{k=1}^{K} \varphi_k(x)| \leqslant M$ où M est indépendant de x et K,

(2) $\psi_k : A \to \mathbb{R}$ avec $\psi_k(x) \geqslant 0$ et pour tout x dans A, $\psi_{k+1}(x) \leqslant \psi_k(x)$, et enfin supposons que $\psi_k(x)$ converge uniformément vers 0.

Alors $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ est uniformément convergente.

ThoAbelSeriePuiss

Théorème 12.392.
Soit une série de puissances réelle dont le disque de convergence est $B(x_0, R)$. Si la série converge en $x = x_0 + R$, alors elle converge uniformément sur $[x_0 - R - \epsilon, x_0 + R]$ ($\epsilon > 0$) vers une fonction continue.

PropOMBbwst

Proposition 12.393.
Soient E et F, deux espaces vectoriels normés, Ω une partie ouverte de E et une suite de fonctions continues $u_n : \Omega \to F$ convergeant normalement sur Ω, c'est-à-dire que $\sum_n \|u_n\|_\infty$ converge, la norme $\|.\|_\infty$ devant être comprise comme la norme supremum sur Ω. Alors la fonction $u = \sum_n u_n$ est continue sur Ω.

Démonstration. Soit $x, x' \in \Omega$ en supposant que $\|x - x'\|$ est petit. Soit encore $\epsilon > 0$. Nous allons montrer la continuité en x. Pour cela nous savons que pour tout N l'inégalité suivante est correcte :

$$\|u(x) - u(x')\| \leqslant \left\| \sum_{n=0}^{N} u_n(x) - \sum_{n=0}^{N} u_n(x') \right\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n(x)\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n(x')\|. \tag{12.1065}$$

Les deux derniers termes sont majorés par $\sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|_\infty$ qui, par hypothèse, peut être rendu aussi petit que souhaité en choisissant N assez grand. Nous choisissons donc un N tel que ces deux termes soient plus petits que ϵ. Ce N étant fixé, la fonction $\sum_{n=0}^{N} u_n$ est continue et nous pouvons choisir x' assez proche de x pour que le premier terme soit majoré par ϵ. □

ThoSerUnifCont

Théorème 12.394 (Série uniforme de fonctions continues[1])**.**
Soit un espace topologique X ainsi qu'un espace vectoriel normé V. Soient des fonctions continues $f_n : X \to V$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément[155], alors la fonction somme est séquentiellement continue.
Si X est métrisable, alors la somme est continue.

Démonstration. Nous notons f la somme (qui existe par hypothèse) et par (s_N) la suite des sommes partielles. En tant que somme finie de fonctions continues, chacune des fonctions s_N est continue. Ce que dit la définition 10.120, c'est que la convergence des sommes partielles est uniforme :

$$s_N \xrightarrow{unif} f. \tag{12.1066}$$

La proposition 12.382 dit alors que f est séquentiellement continue.
Nous en déduisons la continuité de f dans le cas d'un espace métrisable avec la proposition 7.157. □

Le corolaire suivant permet de considérer des séries de fonctions indexées par exemple par $\mathbb{Z}$ plutôt que par $\mathbb{N}$.

CORooEWOBooShCysg

Corolaire 12.395.
Une famille dénombrable de fonctions continues convergeant normalement converge vers une fonction continue.

Démonstration. Soit I dénombrable. Considérons une famille de fonctions continues $(f_n)_{n\in I}$ telles que la famille $(\|f_i\|_\infty)_{i\in I}$ soit sommable. Le proposition 10.145 nous permet d'utiliser une bijection entre I et $\mathbb{N}$. La proposition 12.393 s'applique alors. □

ThoCritWeierstrass

Théorème 12.396 (Critère de Weierstrass)**.**
Soit une suite de fonctions $f_k : A \to \mathbb{C}$ telles que $|f_k(x)| \leqslant M_k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge absolument et uniformément.

[155] Définition 10.120.

Démonstration. La convergence normale est facile : l'hypothèse dit que $\|f_k\|_\infty \leqslant M_k$, et donc que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \leqslant \sum_k M_k < \infty. \tag{12.1067}$$

La convergence uniforme est à peine plus subtile. Nous nommons F la fonction somme. Pour tout x et pour tout N, nous avons

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - F(x) \right\| = \| \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \| \tag{12.1068a}$$

$$\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \|f_k(x)\| \tag{12.1068b}$$

$$\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\|_\infty. \tag{12.1068c}$$

La convergence normale étant assurée, la série $\sum_{n_1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ est finie, ce qui implique que la queue de somme $\sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ tend vers zéro lorsque $N \to \infty$. Pour tout ϵ, il existe donc un N (non dépendant de x) tel que

$$\| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - F(x) \| \leqslant \epsilon. \tag{12.1069}$$

En prenant le supremum sur $x \in A$ nous trouvons la convergence uniforme. □

Remarque 12.397.
Il n'y a pas de critère correspondant pour les suites. Il n'est pas vrai que si $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|$ existe, alors $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe, comme le montre l'exemple

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \text{ et } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } x \in [1,2] \text{ et } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12.1070}$$

12.36 Permuter limite et dérivée

Une version avec intégrales de la démonstration qui suit est dans 14.328. Le même pour les dérivées partielles sera le théorème 12.401.

THOooXZQCooSRteSr

Théorème 12.398 ([373, 409, 1], thème 62)**.**
Soient une suite de fonctions $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

(1) f_i est de classe C^1 pour tout i,

(2) $f_i \to f$ simplement,

(3) $f_i' \to g$ uniformément sur tout compact.

Alors

ITEMooYSWDooFFeQCd

(1) $f_i \to f$ uniformément sur tout compact.

ITEMooFAWUooVQJPZh

(2) $f' = g$,

(3) f est de classe C^1,

Démonstration. Un point à la fois.

(1) **Pour (1)** Soit un compact $K \subset \mathbb{R}$. Dans cette partie, toutes les fonctions en jeu sont restreintes à K. En particulier, lorsque nous parlerons du module de continuité[156] ω_g pour g ou ω_i pour f_i', nous parlerons en réalité des fonctions $g|_K$ et $f_i'|_K$.

Ceci dit, nous allons montrer que (f_i) est une suite de Cauchy pour la norme uniforme[157].

[156] Définition 10.355.
[157] Et si vous avez bien suivi l'avertissement, c'est bien de la norme uniforme sur K que nous parlons.

Soit $\epsilon > 0$. On note ω_i le module de continuité de f_i'. Soient $y \in K$, $n \in \mathbb{N}$ et posons $\alpha_n = \frac{y-x}{n+1}$. Pour tout $i \geqslant 0$, nous avons la somme télescopique

$$f_i(y) = f_i(x) + \sum_{k=0}^{n} \Big[f_i(x + (k+1)\alpha_n) - f_i(x + k\alpha_n) \Big]. \tag{12.1071}$$

Par le théorème des accroissements finis 12.216, il existe pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$ un réel $u_{n,i,k} \in [k\alpha_n, (k+1)\alpha_n]$ tel que

$$f_i(x + (k+1)\alpha_n) - f_i(x + k\alpha_n) = |\alpha_n| f_i'(x + u_{n,i,k}), \tag{12.1072}$$

de sorte que

$$f_i(y) = f_i(x) + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} f_i'(x + u_{n,i,k}). \tag{12.1073}$$

Et pour tout $i, j \geqslant 0$, on obtient SUBEQSooUYFTooWPVfWt

$$|f_i(y) - f_j(y)| \leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \big| f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_j'(x + u_{n,j,k}) \big| \tag{12.1074a}$$

$$\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| \tag{12.1074b}$$
$$+ |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} |f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_i'(x + u_{n,j,k})|$$
$$+ |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \big| f_i'(x + u_{n,j,k}) - f_j'(x + u_{n,j,k}) \big|$$

$$\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| \tag{12.1074c}$$ EQooYMHKooDFYPIf
$$+ |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} |f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_i'(x + u_{n,j,k})|$$
$$+ |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \|f_i' - f_j'\|$$

$$\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \omega_i(|\alpha_n|) + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \|f_i' - f_j'\| \tag{12.1074d}$$ EQooGHDOooMMNXdj

$$\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |x - y| \big(\omega_i(|\alpha_n|) + \|f_i' - f_j'\|_K \big) \tag{12.1074e}$$ EQooZCFIooNDoiBX

$$\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + M \Big(\omega_i\big(\frac{M}{n+1}\big) + \|f_i' - f_j'\|_K \Big) \tag{12.1074f}$$ SUBEQooISWEooBfnJVN

Justifications :

- Pour (12.1074c) La norme supremum est forcément plus grande que la valeur en un point.
- Pour (12.1074d) Remarquer que $\|x + u_{n,i,k} - (x + u_{n,j,k})\| = \|u_{n,i,k} - u_{n,j,k}\| \leqslant |\alpha_n|$. Cela est donc une bonne occasion de prendre la définition (10.1083) du module de continuité :

$$|f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_i'(x + u_{n,j,k})| \leqslant \omega_i(\alpha_n). \tag{12.1075}$$

- Pour (12.1074e), il y a $n+1$ termes dans les sommes et $\alpha_n = (y-x)/(n+1)$.
- Pour (12.1074f), nous travaillons uniquement sur le compact K. En particulier $x, y \in K$ et il existe un nombre M ne dépendant que de K tel que $|y - x| < M$. De plus ω_i est décroissante. Donc en remplaçant $|y - x|$ par M nous majorons.

Recopions notre dernière inéquation :

$$|f_i(y) - f_j(y)| \leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + M \Big(\omega_i\big(\frac{M}{n+1}\big) + \|f_i' - f_j'\|_K \Big) \tag{12.1076}$$

Vu que f_i est de classe C^1, la fonction f_i' est continue. Et vu que nous travaillons sur le compact K, elle est même uniformément continue (proposition 12.80). Le lemme 10.357 dit qu'une fonction uniformément continue a un module de continuité continu en zéro : $\lim_{\delta \to 0} \omega_i(\delta) = 0$. Nous pouvons donc prendre la limite $n \to 0$ pour nous supprimer le module de continuité :

$$|f_i(y) - f_j(y)| \leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + M \|f_i' - f_j'\|_K. \tag{12.1077}$$

Nous prenons maintenant le supremum par rapport à y :

$$\|f_i - f_j\|_K \leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + M\|f_i' + f_j'\|_K. \tag{12.1078}$$

Par hypothèse nous avons la convergence simple $f_i \to f$, c'est-à-dire la convergence $f_i(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f_i(x)$ pour tout x. Pour le x que nous nous sommes fixés, la suite $i \mapsto f_i(x)$ est donc une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que si $i, j > N$ nous avons $|f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon$. De même la convergence uniforme $f_i' \xrightarrow{\|.\|_K} g$ implique que f_k' est également de Cauchy pour la norme uniforme. Donc pour un $i, j > N$ (éventuellement un autre N, mais on prend le maximum entre les deux), nous avons $\|f_i' - f_j'\| < \epsilon$.

Donc si $i, j > N$ nous avons

$$\|f_i - f_j\|_K \leqslant \epsilon + M\epsilon = (M + 1)\epsilon. \tag{12.1079}$$

Nous avons donc prouvé que (f_i) est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_K$. Cela implique que (f_i) a une limite uniforme sur K. Vu que nous avons déjà $f_i \to f$, nous en déduisons que sur K, cette limite est uniforme :

$$f_i \xrightarrow{\|.\|_K} f. \tag{12.1080}$$

Voilà qui prouve la convergence uniforme sur tout compact.

(2) **Pour (2)** Nous ne savons encore rien de la fonction limite f. Nous montrons qu'elle est dérivable et que $f' = g$.

Soient $y \in \mathbb{R}$ et un voisinage compact $K = \overline{B(y, \delta)}$ de y avec $\delta > 0$. Pour tout $i > 0$ nous avons :

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{f(y+\delta) - f(y)}{\delta} - g(y)\Big| && \text{(12.1081a)}\\
&\leqslant \frac{|f(y) - f_i(y)|}{\delta} + \frac{|f(y+\delta) - f_i(y+\delta)|}{\delta} + \Big|\frac{f_i(y+\delta) - f_i(y)}{\delta} - g(y)\Big| && \text{(12.1081b)}\\
&\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \Big|\frac{f_i(y+\delta) - f_i(y)}{\delta} - g(y)\Big| && \text{(12.1081c)}\\
&\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + |f_i'(u) - g(y)| && \text{(12.1081d)}\\
&\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + |f_i'(u) - f_i'(y)| + |f_i'(y) - g(y)| && \text{(12.1081e)}\\
&\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + |f_i'(u) - f_i'(y)| + \|f_i' - g\|_K && \text{(12.1081f)}\\
&\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \omega_i(|u - y|) + \|f_i' - g\|_K && \text{(12.1081g)}\\
&\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \|f_i' - g\|_K + \omega_i(2\delta) && \text{(12.1081h)}\\
&\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \|f_i' - g\|_K + \omega_g(2\delta) && \text{(12.1081i)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour 12.1081d. Nous avons utilisé le théorème des accroissements finis 12.216, qui assure l'existence de $u \in B(y, \delta)$ tel que
$$\frac{f_i(y+\delta) - f_i(y)}{\delta} = f_i'(u). \tag{12.1082}$$
- Pour 12.1081f. Nous faisons un supremum sur le $y \in K$ dans le dernier terme.
- Pour 12.1081h. Nous majorons $|u - y|$ par le diamètre 2δ du compact $K = \overline{B(y, \delta)}$.
- Pour 12.1081i. Le lemme 10.358 et le fait que $f_i' \xrightarrow{\|.\|_K} g$.

Recopions la dernière inégalité :

$$\Big|\frac{f(y+\delta) - f(y)}{\delta} - g(y)\Big| \leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \|f_i' - g\|_K + \omega_g(2\delta). \tag{12.1083}$$

Nous prenons la limite $i \to \infty$. Par le point (1) nous savons que $\|f_i - f\|_K \to 0$. Par hypothèse nous savons aussi que $\|f_i' - g\|_K \to 0$. Nous restons donc avec

$$\Big|\frac{f(y+\delta)-f(y)}{\delta} - g(y)\Big| \leqslant \omega_g(2\delta). \tag{12.1084}$$

Or, par uniforme continuité de g, nous avons $\lim_{\delta\to 0}\omega_g(\delta) = 0$, donc la limite dans le membre de gauche se passe bien et

$$\lim_{\delta\to\delta}\frac{f(y+\delta)-f(y)}{\delta} = g(y), \tag{12.1085}$$

ce qui signifie que f est dérivable en y et que la dérivée est $g(y)$.

□

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 12.399
Aussi incroyable que cela puisse paraitre, je n'ai pas trouvé d'énoncés du théorème 12.401. Donc soyez prudente. C'est donc une adaptation personnelle du cas sur $\mathbb{R}$. Écrivez-moi si vous avez un problème ou un doute.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 12.400
De plus, l'énoncé de 12.401 demande la convergence uniforme des dérivées directionnelles dans toutes les directions. Je ne serais pas étonné que la convergence uniforme seulement des dérivées partielles dans les directions « de base » suffise.

ThoSerUnifDerr

Théorème 12.401 ([373, 409, 1], thème 62)**.**
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soient un ouvert U de V et des fonctions $f_k : U \to W$, une autre fonction $f : U \to W$ ainsi que, pour toute direction[158] $\alpha \in V$, des fonctions $g_\alpha : U \to W$. Nous supposons que

(1) Les f_k sont de classe C^1.

(2) $f_k \to f$ simplement.

(3) $\partial_\alpha f_k \to g_\alpha$ uniformément sur tout compact.

Alors

ITEMooQOSUooQGSUXC

(1) Nous avons la convergence $f_i \to f$ uniformément sur tout compact.

ITEMooGFPLooGYEvkh

(2) Pour toute direction α, nous avons $\partial_\alpha f = g_\alpha$.

(3) La fonction f est de classe C^1 sur U.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Uniforme convergence sur les boules fermées** Soit $a \in U$. Nous considérons $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset U$ (ça existe parce que U est ouvert ; il suffit de prenre r plus petit qu'un qui fait que $B(a,r) \subset U$), et nous posons $K = \overline{B(a,r)}$. Nous allons prouver l'uniforme convergence $f_i \xrightarrow{\|.\|_{\overline{B(a,r)}}} f$, et nous verrons plus tard comment faire pour l'uniforme convergence sur un compact général dans U.

Nous restreignons toutes les fonctions à K. Nous notons $\omega_{\alpha,i}$ le module de continuité[159] de $\partial_\alpha f_i$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous définissons encore

$$\begin{aligned}\alpha_n : V &\to V\\ x &\mapsto \frac{a-x}{n+1}.\end{aligned} \tag{12.1086}$$

Soit $x \in \overline{B(a,r)}$. Nous écrivons la somme télescopique

$$f_i(x) = f_i(a) + \sum_{k=0}^{n}\big[f_i\big(a+(k+1)\alpha_n(x)\big) - f_i\big(a+k\alpha_n(x)\big)\big] \tag{12.1087}$$

EQooMXVLooXFceGH

[158] Ici le mot « direction » n'a pas de sens particulier ; c'est juste un élément quelconque. Si nous faisions de la géométrie différentielle hard-core, ce serait un vecteur tangent.
[159] Définition 10.355.

Notez que les points auxquels sont évalués f_i sont dans $\overline{B(a,r)}$ parce que, si $l \in [0, n+1]$, nous avons

$$\|a + l\alpha_n(x) - a\| = \|l\alpha_n(x)\| = l\frac{\|a-x\|}{n+1} \leqslant \|a-x\| \leqslant r. \tag{12.1088}$$

Ce point est important parce que rien ne nous dit que U est convexe ; pour la suite nous avons besoin que tous les points sur les segments entre a et les différents points que nous allons considérer restent dans $\overline{B(a,r)}$. C'est d'ailleurs pour cette convexité de la boule que nous commençons notre preuve par le cas où K est une boule. Bref.

Le théorème des accroissements finis 12.261 nous assure l'existences d'éléments

$$y_{k,i} \in \big[a + (k+1)\alpha_n(x), a + k\alpha_n(x)\big] \tag{12.1089}$$

tels que

$$f_i\big(a + (k+1)\alpha_n(x)\big) - f_i\big(a + k\alpha_n(x)\big) = (\partial_\beta f)\big(y_{k,i}(x)\big)\alpha_n(x). \tag{12.1090}$$

Notez que les $y_{j,i}(x)$ sont dans $\overline{B(a,r)}$.

Soit $\epsilon > 0$. Nous allons calculer $\|f_i(x) - f_j(x)\|$ en substituant les valeurs de $f_i(x)$ et $f_j(x)$ données par (12.1087). Nous avons :

$$\begin{aligned}
\clubsuit = \|f_i(x) - f_j(x)\| &\leqslant \|f_i(a) - f_j(a)\| + \sum_{k=0}^{n} \|\alpha_n(x)\|\|(\partial_\beta f_i)\big(y_{k,i}(x)\big) - (\partial_\beta f_j)\big(y_{k,j}(x)\big)\| && \text{(12.1091a)}\\
&\leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|(\partial_\beta f_i)\big(y_{k,i}(x)\big) - (\partial_\beta f_j)\big(y_{k,j}(x)\big)\| && \text{(12.1091b)}\\
&\leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|(\partial_\beta f_i)\big(y_{k,i}(x)\big) - (\partial_\beta f_i)\big(y_{k,j}(x)\big)\| && \text{(12.1091c)}\\
&\quad + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|(\partial_\beta f_i)\big(y_{k,j}(x)\big) - (\partial_\beta f_j)\big(y_{k,j}(x)\big)\| && \\
&\leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \big\|\omega_{\beta,i}\big(\|y_{k,i}(x) - y_{k,j}(x)\|\big)\big\| && \text{(12.1091d)}\\
&\quad + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|\partial_\beta f_i - \partial_\beta f_j\| && \\
&\leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \big\|\omega_{\beta,i}\big(\|y_{k,i}(x) - y_{k,j}(x)\|\big)\big\| + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\epsilon && \text{(12.1091e)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (12.1091c). Majoration $\|\alpha_n(x)\| \leqslant \frac{r}{n+1}$. De plus nous considérons des i et j assez grands pour que $\|f_i(a) - f_j(a)\|_K \leqslant \epsilon$. Cela est possible parce que (f_i) est une suite de Cauchy pour la norme uniforme sur K.
- Pour (12.1091d). Utilisation du module de continuité, définition 10.355.
- Pour (12.1091e). Nous avons la convergence uniforme $\partial_\beta f_i \xrightarrow{\overline{B(a,r)}} g_\beta$, de sorte que $i \mapsto \partial_\beta f_i$ est une suite de Cauchy. Si i et j sont assez grands, nous pouvons majorer $\|\partial_\beta f_i - \partial_\beta f_j\| \leqslant \epsilon$.

Étudions deux minutes ce qui est dans le module de continuité de (12.1091e). Nous avons $y_{k,i}(x) \in \big[a + (k+1)\alpha_n(x), a + k\alpha_n(x)\big]$, donc la différence $\|y_{k,i}(x) - y_{k,j}(x)\|$ se majore par la taille de cet intervalle :

$$\|y_{k,i}(x) - y_{k,j}(x)\| \leqslant \|a - k\alpha_n(x) - \big(a + (k+1)\alpha_n(x)\big)\| = \|\alpha_n(x)\|. \tag{12.1092}$$

Vu que le module de continuité est une fonction croissante,

$$\omega_{\beta,i}\big(\|y_{k,i}(x) - y_{k,j}(x)\|\big) \leqslant \omega_{\beta,i}\big(\|\alpha_n(x)\|\big) \leqslant \omega_{\beta,i}\left(\frac{\|a-x\|}{n+1}\right) \leqslant \omega_{\beta,i}\left(\frac{r}{n+1}\right). \tag{12.1093}$$

En substituant tout ça dans (12.1091e), nous continuons :

$$\clubsuit \leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \omega_{\beta,i}\big(\frac{r}{n+1}\big) + r\epsilon \leqslant \epsilon + r\omega_{\beta,i}\left(\frac{r}{n+1}\right) + r\epsilon \tag{12.1094}$$

Résumons. Pour tout $x \in \overline{B(a,r)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si i et j sont assez grands, nous avons la majoration

$$\|f_i(x) - f_j(x)\| \leqslant \epsilon + r\omega_{\beta,i}\big(\frac{r}{n+1}\big) + r\epsilon. \tag{12.1095}$$

Nous pouvons prendre la limite $n \to \infty$ de deux côtés. Vu que $\partial_\beta f_i$ est uniformément continue[160], le module de continuité tend vers zéro (lemme 10.357).

Si i et j sont assez grands, nous avons donc

$$\|f_i(x) - f_j(x)\| \leqslant \epsilon(1+r), \tag{12.1096}$$

et donc aussi

$$\|f_i - f_j\|_{\overline{B(a,r)}} \leqslant \|f_i(x) - f_j(x)\| \leqslant \epsilon(1+r). \tag{12.1097}$$

Cela prouve que (f_i) est une suite de Cauchy pour $\|.\|_K$. Donc f_i converge uniformément vers une certaine fonction. Vu qu'elle converge simplement vers f, elle converge uniformément vers f.

Nous avons donc prouvé que

$$f_i \xrightarrow{\|\cdot\|_{\overline{B(a,r)}}} f, \tag{12.1098}$$

c'est-à-dire la convergence uniforme sur toute boule compacte.

(2) **Convergence uniforme sur tout compact** Soient un compact K de U, et $\epsilon > 0$. L'ensemble $\{B(x,r)\}_{x\in K, r>0}$ est un recouvrement de K par des ouverts. On en extrait un sous-recouvrent fini, et on ferme les boules sans changer le fait que ce soit un recouvrement :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(a_i, r_i)}. \tag{12.1099}$$

Vue la convergence uniforme sur toute boule fermée, pour chaque i, il existe N_i tel que $n > N_i$ implique

$$\|f_n - f\|_{\overline{B(a_i,r_i)}} < \epsilon. \tag{12.1100}$$

En prenant $N > \max\{N_i\}$, nous avons

$$\|f_n - f\|_K < \epsilon \tag{12.1101}$$

pour tout $n > N$.

(3) **Pour (2)** Soit $a \in U$ et un voisinage compact $K = \overline{B(a,\delta)}$ de a. Nous considérons une direction u avec $\|u\| = 1$. Nous calculons un peu :

$$\begin{aligned}
\heartsuit = \|\frac{f(a+\delta u) - f(a)}{\delta} - g_u(a)\| &\leqslant \|\frac{f(a+\delta u) - f_i(a+\delta u)}{\delta}\| && \text{(12.1102a)}\\
&\quad + \|\frac{f_i(a+\delta u) - f_i(a)}{\delta} - g_u(a)\| \\
&\quad + \|\frac{f_i(a) - f(a)}{\delta}\| \\
&\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\| + \|\frac{f_i(a+\delta u) - f_i(a)}{\delta} - g_u(a)\| && \text{(12.1102b)}
\end{aligned}$$

Ici, la norme $\|f_i - f\|$ est une norme supremum sur K (vous devriez l'avoir deviné du contexte). C'est le moment d'utiliser le théorème des accroissements finis 12.261 : il existe $y \in [a+\delta u, a]$ tel que

$$\frac{f_i(a+\delta u) - f_i(a)}{\delta} = (\partial_i f_i)(y) \tag{12.1103}$$

Nous continuons :

$$\begin{aligned}
\heartsuit &\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\| + \|(\partial_u f_i)(y) - g_u(a)\| && \text{(12.1104a)}\\
&\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\| + \|(\partial_u f_i)(y) - (\partial_u f_i)(a)\| + \|(\partial_u f_i)(a) - g_u(a)\| && \text{(12.1104b)}
\end{aligned}$$

SUBEQooCLCQooGcFAZD

Nous introduisons le module de continuité[161] $\omega_{i,u}$ de $(\partial_u f_i)$ pour traiter le premier terme :

$$\|(\partial_u f_i)(y) - (\partial_u f_i)(a)\| \leqslant \omega_{i,u}\big(\|y-a\|\big) \leqslant \omega_{i,u}(\delta). \tag{12.1105}$$

[160] Elle est continue sur un compact, proposition 12.80.
[161] Définition 10.355.

Nous utilisons aussi la convergence uniforme sur tout compact (point (1)) $\partial_u f_i \xrightarrow{\|.\|_K} g_u$ pour majorer le second terme de (12.1104b) par ϵ lorsque i est grand.

Nous continuons. Pour tout i assez grand, nous avons

$$\| \frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a) \| \leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\| + \epsilon + \omega_{i,u}(\delta). \tag{12.1106}$$

Nous prenons la limite $i \to \infty$ en tenant compte du lemme 10.358 : $\lim_{i\to\infty} \omega_{i,u}(\delta) = \omega_g(\delta)$:

$$\| \frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a) \| \leqslant \epsilon + \omega_g(\delta). \tag{12.1107}$$

Et enfin en prenant la limite $\delta \to 0$ nous trouvons que pour tout ϵ,

$$\lim_{\delta\to 0} \| \frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a) \| \leqslant \epsilon, \tag{12.1108}$$

et donc nous avons prouvé que

$$\lim_{\delta\to 0} \| \frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a) \| = 0. \tag{12.1109}$$

Cela prouve que $(\partial_u f)(a)$ existe et vaut $g_u(a)$.

Vu que les g_u sont continues, la fonction f est également de classe C^1 par le théorème 12.320. □

12.37 La fonction puissance

Si x et y sont des réels, définir x^y n'est pas une mince affaire. Pour l'instant nous savons déjà définir x^n lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Voir la définition 1.342 et le thème 52.

Pour la suite nous notons

$$\begin{cases} f_\alpha(x) = x^\alpha & \text{(12.1110a)} \\ g_a(x) = a^x & \text{(12.1110b)} \end{cases}$$

pour autant que ces fonctions sont définies[162].

12.37.1 Sur les naturels

DEFooKEBIooZtPkac

Définition 12.402.
La fonction puissance définie sur $\mathbb{N}$ s'étend à $\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \tag{12.1111}$$

pour $n \geqslant 0$. Cela donne donne donc x^n pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ a l'exception de $x = 0$ lorsque $n < 0$.

Nous étudions quelques propriétés de cette fonction pour $n > 0$ fixé.

12.403.
La limite

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty \tag{12.1112}$$

demande la topologie sur la droite réelle achevée. C'est le lemme 12.33.

PROPooXQYFooPxoEHE

Proposition 12.404.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; nous posons $f_n(x) = x^n$.

Si n est pair,

$$f_n : [0,\infty[\to [0,\infty[\tag{12.1113}$$

est bijective.

Si n est impair,

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{12.1114}$$

est bijective.

Toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$.

[162] L'objet des pages suivantes est de déterminer pour quelles valeurs de a, α et x nous pouvons trouver des définitions raisonnables pour ces fonctions.

Démonstration. En plusieurs morceaux, pas spécialement dans l'ordre auquel on s'attend.

(1) **Continuité**

Soit $x \in \mathbb{R}$. En vertu de 12.55 nous allons prouver que $\lim_{\epsilon\to 0} f_n(x+\epsilon) = f_n(x)$. Pour cela nous utilisons la formule du binôme 1.387 avec $x, h > 0$:

$$f_n(x+h) = (x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k. \tag{12.1115}$$

Nous fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. Calcul :

$$|f_n(x_0+h) - f_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}h^k| \tag{12.1116a}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k}|h|^k \tag{12.1116b}$$

$$= h\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k}|h|^{k-1} \tag{12.1116c}$$

$$\leqslant h\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k}. \tag{12.1116d}$$

Justifications :

- Le terme $k = 0$ est égal à $x^n = f_n(x)$ parce que $\binom{n}{0} = 1$.
- Dans la somme nous avons majoré $|h|$ par 1, opération justifiée par le fait que nous ayons dans l'idée de faire $h \to 0$.

Nous avons donc

$$\lim_{h\to 0} |f_n(x_0+h) - f_n(x)| \leqslant \lim_{h\to 0} h\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} = 0. \tag{12.1117}$$

D'où la continuité de f_n en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2) **Pour n pair ou impair, bijection sur les positifs** Ceci sera déjà le résultat complet pour les n pairs, et a moitié du résultat pour les n impairs.

(2a) **Stricte croissance** Soit $n \neq 0$ dans $\mathbb{N}$. Nous commençons par prouver que f_n est strictement croissante sur $[0, \infty[$. Nous repartons de la formule du binôme, mais cette fois, nous séparons les termes $k = 0$ et $k = n$ des autres (si $n = 1$, il y a un peu de réécriture) en tenant compte de $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$:

$$f_n(x+h) = x^n + h^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k > x^n = f_n(x). \tag{12.1118}$$

Vous noterez que l'inégalité est stricte même si $n = 1$.

Vu que nous avons stricte monotonie, le théorème 12.53(2) nous dit que

$$f_n : [0, \infty[\to f_n\big([0, \infty[\big) \tag{12.1119}$$

est une bijection.

(2b) **Bijection**

Nous prouvons que $f_n\big([0, \infty[\big) = [0, \infty[$. Si $x > 0$ alors $f_n(x) > 0$, cela prouve une inclusion.

Pour l'autre inclusion nous savons que $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \infty$ par le lemme 12.33. Si $y \in [0, \infty[$, alors il existe x_0 tel que $f_n(x_0) > y$. Étant donné que $f_n(0) = 0$ et que nous avons déjà prouvé que f_n était continue (proposition 12.404), le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 nous indique l'existence de $x_1 \in [0, x_0[$ tel que $f_n(x_1) = y$.

Nous avons prouvé que pour tout n, la fonction

$$f_n : [0, \infty[\to [0, \infty[\tag{12.1120}$$

est une bijection.

EQooYWHGooJWMTUI

(3) **Pour n impair**

Nous montrons à présent que si n est impair, alors

$$f_n\colon]-\infty,0] \to]-\infty,0] \tag{12.1121}$$

EQooTSLJooMAAUXH

est une bijection.

Tout se base sur le fait que si $x > 0$ alors $f_n(-x) = -f_n(x)$. Le fait que (12.1120) soit injective et surjective montre alors tout de suite le fait que (12.1121) soit également injective et surjective.

□

Vous noterez que la continuité de f_n démontrée dans la proposition 12.404 est indépendant de la proposition 12.63 qui sera invoquée plus tard pour définir a^x lorsque $a > 0$ dans $\mathbb{R}$.

12.37.2 Sur les rationnels, racines

L'existence, pour tout réel $a \geqslant 0$, d'un réel r tel que $r^2 = a$ est déjà faite en la proposition 1.593.

DEFooJWQLooWkOBxQ

Définition 12.405 (Exposant rationnels)**.**
La proposition 12.404 nous dit entre autres que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\begin{aligned} f_n\colon [0,\infty[&\to [0,\infty[\\ x &\mapsto x^n \end{aligned} \tag{12.1122}$$

est bijective. Nous définissions alors, pour $a \in [0,\infty[$,

$$a^{1/n} = f_n^{-1}(a). \tag{12.1123}$$

Autrement dit, le nombre $a^{1/n}$ est l'unique solution positive de

$$x^n = a. \tag{12.1124}$$

NORMooDUNZooUNdUKg

12.406.
Nous ne définissons pas $a^{1/n}$ pour $a < 0$, du moins pas encore. Vu que f_3 est bijective sur $\mathbb{R}$, il serait tentant de définir $(-1)^{1/3} = f_3^{-1}(-1) = -1$.

Cela causera un certain nombre de problèmes plus tard vu que nous aurons envie de deux choses en même temps :

- d'une part $\ln(-1) = i\pi$,
- d'autre part, $a^x = e^{x\ln(a)}$.

De cette façon, nous devrions avoir

$$(-1)^{1/3} = e^{i\pi/3}, \tag{12.1125}$$

qui est un nombre complexe non réel. Voici un exemple de ce que ça donne avec Sage :

```
sage: a=(-1)**(1/3)
sage: a.real_part()
1/2
sage: a.imag_part()
1/2*sqrt(3)
```

tex/sage/sageSnip019.sage

DEFooPOELooPouwtD

Définition 12.407 (Racine)**.**
Pour $n \in \mathbb{N}$ nous définissons $\sqrt[n]{x} = f_n^{-1}(x)$. Lorsque n est pair, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$, et lorsque n est impair, elle est définie sur tout $\mathbb{R}$.

NORMooYPRNooWCjEgR

12.408.
Notons que les fonctions $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ et $x \mapsto x^{1/3}$ ne sont pas les mêmes : la première est définie sur tout $\mathbb{R}$ et donne des valeurs réelles tandis que la seconde n'est (pour l'instant) définie que sur les positifs, et donnera (quand on l'aura définie par l'exponentielle) des nombres complexes sur les négatifs.

En suivant cette convention, c'est-à-dire en réservant la notation $\sqrt{\ }$ pour l'inverse de f_2, nous ne devrions pas écrire des choses comme « $\sqrt{-1} = i$ », mais plutôt « $(-1)^{1/2} = i$ ». En effet, $\sqrt{-1}$ n'est pas défini et ne sera jamais défini alors que $(-1)^{1/2}$ n'est pas encore défini, mais sera défini par

$$(-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln(-1)} = e^{i\pi/2} = i. \tag{12.1126}$$

En résumé, nous avons les fonctions suivantes :

(1) $\sqrt[n]{}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si n est impair,

(2) $\sqrt[n]{}: [0,\infty[\to [0,\infty[$ si n est pair,

(3) $x^{1/n}: [0,\infty[\to [0,\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cependant nous n'hésiterons pas à utiliser la notation $\sqrt{x}$ pour $x^{1/2}$ même lorsque x est négatif, parce c'est une notation très pratique. Il faut garder en tête que cette façon de faire est incohérente parce qu'elle inciterait à penser que $\sqrt[3]{-1} = e^{i\pi/3}$ au lieu de $\sqrt[3]{-1} = -1$.

Pour toute la suite de cette section, nous allons considérer a^x uniquement pour $a > 0$.

DEFooHXUFooOJTVXA

Définition 12.409.
Pour $m, n \in \mathbb{N}$ nous définissons ($a^{1/n}$ est la définition 12.405)

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n}, \tag{12.1127}$$

EQooZFOAooTsMbub

ce qui définit la fonction puissance sur $\mathbb{Q}^+$. Enfin nous posons

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q} \tag{12.1128}$$

DEFooTUCVooXikxRh

lorsque $q \in \mathbb{Q}^+$.

Et avec tout ça, lorsque $a > 0$ nous avons défini a^q pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

Nous allons souvent noter la définition (12.1127) sous la forme

$$f_{m/n}(x)^n = x^m. \tag{12.1129}$$

EQooZIKKooVfjkZo

LEMooOFPMooIEmSNA

Lemme 12.410 ([1]).
Si $a, b > 0$, nous avons

ITEMooEFUAooYBeJza

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$ nous avons $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$.

ITEMooHGPPooDBzWKx

(2) Pour $n, m \in \mathbb{N}$ nous avons $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$.

ITEMooUYTLooHzXwtf

(3) Pour $q \in \mathbb{N}$ nous avons $(ab)^q = a^q b^q$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Utilisant la formule pour les exposants entiers, nous avons

$$\left[(a^{1/n})(b^{1/n})\right]^n = (a^{1/n})^n(b^{1/n})^n = ab. \tag{12.1130}$$

Donc le nombre $x = a^{1/n}b^{1/n}$ vérifie $x^n = ab$. Autrement dit $x = f_n^{-1}(ab) = (ab)^{1/n}$

(2) **Pour (2)**

(3) **Pour (3)**

□

LEMooIDLJooZALNaD

Lemme 12.411 ([1]).
Pour $a > 0$ et $p, q \in \mathbb{Z}$ nous avons :

$$a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p. \tag{12.1131}$$

Démonstration. Nous divisons la preuve en fonction de la positivité du numérateur et du dénominateur.

(1) **Numérateur et dénominateurs positifs**
Nous commençons avec $p, q \in \mathbb{N}$. La première égalité est la définition 12.405. Pour la seconde, la définition de $(a^p)^{1/q}$ est d'être le $x > 0$ tel que

$$x^q = a^p. \tag{12.1132}$$

La définition de $a^{1/q}$ est d'être le $y > 0$ tel que

$$y^q = a. \tag{12.1133}$$

Ce y vérifie donc aussi $y^{pq} = a^p$ et donc $(y^p)^q = a^p$. Autrement dit, $y^p = x$, c'est-à-dire exactement

$$(a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q}. \tag{12.1134}$$

Le lemme est prouvé dans le cas où $p, q \in \mathbb{N}$.

(2) **Numérateur et dénominateur négatifs**

Si p et q sont tous les deux négatifs, nous remarquons que $p/q = (-p)/(-q)$ et nous sommes dans le même cas qu'avant.

(3) **Numérateur négatif, dénominateur positif**

Pour simplifier les notations nous supposons toujours $p, q \in \mathbb{N}$ mais nous considérons $a^{(-p)/q}$. Nous avons d'une part :

$$a^{(-p)/q} = a^{-(p/q)} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{(a^{1/q})^p} = (a^{1/q})^{-p}. \tag{12.1135}$$

Dans ce calcul, nous avons utilisé au dénominateur le résultat dans le cas positif.

Le lemme 7.152(3) nous dit que $(1/a^p) = (1/a)^p$. Nous faisons le calcul suivant :

$$(a^{-p})^{1/q} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^p\right)^{1/q} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{1/q}\right)^p = \left(\frac{1}{a^{1/q}}\right)^p = \frac{1}{(a^{1/q})^p} = (a^{1/q})^{-p} \tag{12.1136}$$

où nous avons utilisé le résultat avec $1/a$ en guise de a.

(4) **Numérateur positif, dénominateur négatif**

Nous traitons maintenant $a^{p/(-q)}$. Nous avons d'une part

$$a^{p/(-q)} = a^{-(p/q)} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{(a^p)^{1/q}} = (a^p)^{-(1/q)} = (a^p)^{1/(-q)}. \tag{12.1137}$$

Et d'autre part :

$$a^{p/(-q)} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{(a^{1/q})^p} = \left(\frac{1}{a^{1/q}}\right)^p = \left(a^{-(1/q)}\right)^p = (a^{1/(-q)})^p. \tag{12.1138}$$

□

Le lemme suivant montre que la définition sur $\mathbb{Q}^-$ est cohérente avec celle sur $\mathbb{Q}^+$, au sens où finalement nous retrouvons que $a^{m/n}$ vérifie $x^n = a^m$ quel que soient les signes de m et n.

Lemme 12.412 ([1]).
Le nombre $y = a^{-m/n}$ vérifie l'équation $y^{-n} = a^m$

Démonstration. Nous posons $x = a^{m/n}$, c'est-à-dire $x^n = a^m$. Nous avons, par définition $y = a^{-m/n} = \frac{1}{x}$. Alors

$$y^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = x^n = a^m, \tag{12.1139}$$

donc c'est bon. □

LEMooJYGUooHhLASp

Lemme 12.413 ([1]).
Pour $a > 0$ et $q, q' \in \mathbb{Q}$ nous avons

$$a^q a^{q'} = a^{q+q'}. \tag{12.1140}$$

Démonstration. Nous mettons q et q' au même dénominateur. Soient $q = s/c$ et $q' = r/c$ avec $s, r \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}$. En utilisant les égalités du lemme 12.411 nous trouvons

$$a^{s/c}a^{r/c} = (a^{1/c})^s(a^{1/c})^r = (a^{1/c})^{s+r} = a^{(s+r)/c} = a^{q+q'}. \tag{12.1141}$$

□

LEMooXJXUooLoiTMo

Lemme 12.414 ([1]).
La fonction puissance prend les valeurs suivantes.

(1) Si $a = 1$ alors $a^q = 1$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

ITEMooKZCGooKskUQx

(2) Si $a > 1$ alors

- *$a^q > 1$ si $q > 0$*
- *$a^q < 1$ si $q < 0$*
- *$a^0 = 1$.*

(3) *Si $a < 1$ alors*

- $a^q < 1$ *si* $q > 0$
- $a^q > 1$ *si* $q < 0$
- $a^0 = 1$.

Démonstration. Si $a = 1$ alors $a^k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ensuite, pour $m, n \in \mathbb{N}$, $a^{n/m}$ est solution de $x^m = a^n = 1$, donc $x = 1$. En ce qui concerne les puissances négatives, $1/1 = 1$.

Si $a > 1$ alors $a^k > 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus pour $q > 0$ nous avons $q = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Alors $a^{m/n}$ est solution de $x^m = a^n > 1$. Or pour $x \leqslant 1$ nous avons $x^m \leqslant 1$, donc la solution à $x^m = a^n$ vérifie forcément $x > 1$.

Toujours avec $a > 1$, si $q < 0$ nous posons $q = -q'$ avec $q' > 0$. Alors

$$a^q = q^{-q'} = \frac{1}{a^{q'}}. \tag{12.1142}$$

Mais $a^{q'} > 1$, donc l'inverse est inférieur à 1.

En ce qui concerne les cas $a < 1$, ils sont obtenus en posant $b = 1/a$ et en calculant

$$a^q = \left(\frac{1}{b}\right)^q = \frac{1}{b^q} = b^{-q}. \tag{12.1143}$$

□

PROPooVXKBooQPPjMn

Proposition 12.415 ([1])**.**
Soit $a > 1$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty. \tag{12.1144}$$

Démonstration. Soient $a > 1$ et $M > 0$. Nous devons prouver qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n > M$. Nous posons $a = 1 + h$. Alors en utilisant la formule du binôme,

$$a^n = (1 + h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{n-k}. \tag{12.1145}$$

Tous les termes de la somme sont strictement positifs. Prenons le terme $k = n - 1$. Il vaut

$$\binom{n}{n-1} h = nh. \tag{12.1146}$$

Donc $a^n \geqslant nh$, donc oui, cela peut être rendu arbitrairement grand avec n sans toucher à a parce que $\mathbb{N}$ est archimédien par la proposition 1.158. □

PROPooGCBZooTcyGtO

Proposition 12.416 ([1])**.**
Pour $a > 0$ nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} g_a \colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto a^q. \end{aligned} \tag{12.1147}$$

(1) *Si $a \in]0, 1[$ alors g_a est décroissante et*

$$\lim_{q\to\infty} g_a(q) = 0, \qquad \lim_{q\to-\infty} g_a(q) = \infty. \tag{12.1148a}$$

ITEMooGOEVooKVoVpZ

(2) *Si $a > 1$ alors g_a est croissante et*

$$\lim_{q\to\infty} g_a(q) = \infty, \qquad \lim_{q\to-\infty} g_a(q) = 0. \tag{12.1149a}$$

Démonstration. Nous prouvons le cas $a > 1$. L'autre cas s'en déduit en posant $b = 1/a$. Pour la croissance, soient $q \in \mathbb{Q}$ et $r > 0$ dans $\mathbb{Q}$. En utilisant le lemme 12.413, nous avons

$$a^{q+r} = a^q a^r > a^q \tag{12.1150}$$

parce que $a^r > 1$ par le lemme 12.414.

En ce qui concerne la limite $q \to \infty$, la fonction g_a est croissante et non bornée par la proposition 12.415. Donc sa limite est ∞.

Pour la limite $q \to -\infty$, nous avons

$$\lim_{q\to-\infty} a^q = \lim_{q\to\infty} a^{-q} = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{a^q} = 0. \tag{12.1151}$$

□

PROPooIIDGooTRtlUD

Proposition 12.417 ([1]).
Soit $a > 0$. Nous avons

$$\lim_{q\to 0} a^q = 1. \tag{12.1152}$$

Notons que cette limite est une limite dans $\mathbb{Q}$ parce que nous n'avons même pas encore défini a^x lorsque x est irrationnel.

Démonstration. Nous notons, comme à l'accoutumée, $g_a(x) = a^x$. Nous allons prouver que pour toute suite (x_k) dans $\mathbb{Q}$ telle que $x_k \to 0$, nous avons $a^{x_k} \to 1$.

(1) **Suite positive** Soit une suite de rationnels $x_k \to 0$ avec $x_k > 0$. En définissant y_k par $x_k = 1/y_k$ nous savons que a^{1/y_k} est la solution de $x^{y_k} = a$.

Nous posons $t_k = a^{x_k}$ et notre but est de prouver que $t_k \to 1$. Pour tout k nous avons la relation

$$t_k^{y_k} = a. \tag{12.1153}$$

Soit $s > 1$. Il existe un $M > 0$ tel que $y_k > M$ implique $s^{y_k} > a$ (proposition 12.415). Donc dès que $y_k > M$ nous avons $t_k < s$.

De la même manière, si $r < 1$, il existe un $R > 0$ tel que $y_k > R$ implique $r^{y_k} < a$. Donc dès que $y_k > R$ nous avons $t_k > r$.

Soit donc un voisinage $]r, s[$ de 1 (avec $r < 1$ et $s > 1$). Nous avons les nombres M et R correspondant et nous posons $L = \max\{M, R\}$. Soit K tel que $k > K$ implique $y_k > L$. Alors pour $k > K$ nous avons aussi $t_k < s$ et $t_k > r$, c'est-à-dire $t_k \in]r, s[$.

Cela prouve que $t_k \to 1$.

(2) **Suite négative** Supposons maintenant que (x_k) est une suite de rationnels vérifiant $x_k \to 0$ avec $x_k < 0$. En posant $z_k = -x_k$, la suite (z_k) est dans le cas précédent et nous avons

$$a^{x_k} = a^{-z_k} = \frac{1}{a^{z_k}} \to 1. \tag{12.1154}$$

(3) **Suite générale** Si $x_k \xrightarrow{\mathbb{Q}} 0$ avec $x_k \neq 0$. Nous considérons la suite $t_k = a^{x_k}$. Toute sous-suite contient une sous-suite avec $x_k > 0$ ou une sous-suite avec $x_k < 0$. Dans les deux cas, la sous-sous-suite converge vers 1. Le lemme 7.86 conclut que $t_k \to 1$.

(4) **Conclusion** Pour toute suite $x_k \to 0$ nous avons $g_a(x_k) \to 1$. Par le critère séquentiel de la limite (proposition 7.151) nous avons $\lim_{x\to 0} g_a(x) = 1$.

□

LEMooKDBPooLQwxMD

Lemme 12.418.
Soit $a > 0$. La fonction

$$\begin{aligned} g_a\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x \end{aligned} \tag{12.1155}$$

est continue.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{Q}$ et une suite $x_k \to 0$ (toujours dans $\mathbb{Q}$) et utilisons le lemme 12.413 :

$$a^{x+x_k} = a^x a^{x_k}. \tag{12.1156}$$

Cela est, dans $\mathbb{R}$, le produit entre une constante (a^x) et une suite. La limite est donc le produit de cette constante et la limite de la suite (si elle existe). Par la proposition 12.417 nous avons la limite $a^{x_k} \to 1$, et donc

$$\lim_{k\to\infty} a^{x+x_k} = a^x, \tag{12.1157}$$

ce qui prouve la continuité (caractérisation séquentielle, proposition 7.187) de g_a. □

PROPooQRFSooVzYdJM

Proposition 12.419 ([1, 186]).
Soit $a > 0$ dans $\mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned} g_a\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto a^q \end{aligned} \tag{12.1158}$$

est Cauchy-continue.

Démonstration. En quelque étapes.

(1) **Pour $a > 1$** Avant de nous lancer dans la preuve directe, nous prouvons une petite formule. Soit $\epsilon > 0$. Vu que, par la proposition 12.417, $\lim_{q\to 0} g_a(q) = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < q < \delta$ implique $|1 - g_a(q)| < \epsilon$.

Soient maintenant $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $|p - q| < \delta$. En utilisant de plus la définition (12.1128) et la formule du lemme 12.413,

$$|g_a(q) - g_a(p)| = |g_a(q)| \left|1 - \frac{g_a(p)}{g_a(q)}\right| \tag{12.1159a}$$
$$= |g_a(q)||1 - g_a(p - q)| \tag{12.1159b}$$
$$\leqslant |g_a(q)|\epsilon. \tag{12.1159c}$$

Nous y allons pour la preuve directe. Soit une suite de Cauchy (q_n) dans $\mathbb{Q}$. Nous devons prouver que la suite $n \mapsto g_a(q_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$.

La suite (q_n) étant de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, elle l'est également dans $\mathbb{R}$, elle est bornée parce que convergente vu que $\mathbb{R}$ est complet[163]. Vu que g_a est croissante[164] et que (q_n) est bornée, il existe M tel que $|g_a(q_n)| \leqslant M$ pour tout n.

Nous considérons δ tel que $0 < q < \delta$ implique $|1 - g_a(q)| \leqslant \epsilon$, ainsi que N tel que $i, j > N$ implique $|q_i - q_j| \leqslant \delta$ (là nous utilisons le fait que (q_n) est de Cauchy). Pour de tels N, i, j nous avons

$$|g_a(q_i) - g_a(q_j)| \leqslant M\epsilon. \tag{12.1160}$$

Donc la suite $g_a(q_n)$ est de Cauchy.

(2) **Pour $a = 1$** La fonction g_a est constante.

(3) **Pour $a = 0$** Dans ce cas $a^q = 0$ pour tout q, et l'image de toute suite de Cauchy est de Cauchy.

(4) **Pour $0 < a < 1$** Considérons une suite de Cauchy (q_i) dans $\mathbb{Q}$. Nous posons $b = 1/a$, et nous utilisons la définition 12.409 ainsi que le lemme 12.410 :

$$a^{q_i} = \frac{1}{b^{q_i}} = b^{-q_i}. \tag{12.1161}$$

La suite $(-q_i)$ est de Cauchy et $b > 1$, donc la suite $i \mapsto b^{-q_i}$ est de Cauchy par le point précédent.

□

12.420.
L'ingrédient magique qui fait fonctionner la proposition 12.419 est le fait que $g_a(x+y) = g_a(x)g_a(y)$ couplé au fait que $\lim_{q\to 0} g_a(q) = 1$. C'est cela qui débloque la situation pour étendre la fonction puissance de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}$ en utilisant le lemme 12.63.

Le chemin suivi par [468] pour étendre la fonction puissance de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}$ est un peu différent : il définit $a^x = \sup\{a^q \text{ tel que } q < x, q \in \mathbb{Q}\}$. La preuve que cette définition donne $x \mapsto a^x$ continue sur $\mathbb{R}$ repose, elle aussi, essentiellement sur le fait que $\lim_{q\to 0} a^q = 1$.

Il y a donc une certaine justice.

DEFooOJMKooJgcCtq

Proposition-Définition 12.421 (Fonction puissance[1])**.**
Si $a > 0$ la fonction

$$\begin{aligned} g_a : \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x. \end{aligned} \tag{12.1162}$$

est Cauchy-continue par la proposition 12.419. Si $x \in \mathbb{R}$ nous définissons

$$a^x = \tilde{g}_a(x) \tag{12.1163}$$

où $\tilde{g}_a$ est l'extension de g_a donnée par le lemme 12.63.

Nous allons la noter g_a également, et écrire a^x la valeur de g_a même lorsque x n'est pas un rationnel.

PROPooVADRooLCLOzP

Proposition 12.422 ([1])**.**
Quelques propriétés de la fonction puissance.

[163] Théorème 7.340.
[164] Proposition 12.416(2).

ITEMooQHYRooJIewyp

(1) *Pour $a > 0$, la fonction $g_a : x \mapsto a^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

ITEMooIZBLooSGtWIp

(2) *Pour $a > 1$, la fonction $g_a : x \mapsto a^x$ est croissante.*

ITEMooSCJBooNVJZah

(3) *Pour $a > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons*

EQooEWIHooDRAQGR

$$a^x a^y = a^{x+y}. \tag{12.1164}$$

En particulier,

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{12.1165}$$

Démonstration. La continuité de $x \mapsto a^x$ est par construction. Le point (1) est fait.

Pour le point (2), lorsque $a > 1$, la fonction $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est croissante (proposition 12.416). Donc par la proposition 12.65, la fonction $x \mapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Et enfin pour le point (3), il faut faire un peu plus attention. Soient des suites $x_i \to x$ et $y_i \to y$ dans $\mathbb{Q}$. Calculons : SUBEQSooMPNLooPoyjwJ

SUBEQooOCIOooZcewMo
$$a^x a^y = (\lim_i a^{x_i}) a^y \tag{12.1166a}$$
SUBEQooEKQXooPLqzcG
$$= \lim_i \left(a^{x_i} a^y\right) \tag{12.1166b}$$
SUBEQooZEXDooRytDvS
$$= \lim_i \left(\lim_k a^{x_i} a^{y_k}\right) \tag{12.1166c}$$
SUBEQooSYNBooIQZJzl
$$= \lim_i \left(\lim_k a^{x_i + y_k}\right) \tag{12.1166d}$$
SUBEQooKHKCooGwaPDQ
$$= \lim_i a^{x_i + y} \tag{12.1166e}$$
SUBEQooMZBFooSoSgKU
$$= a^{x+y}. \tag{12.1166f}$$

Justifications :

- Pour 12.1166a. Définition de a^x lorsque $x \in \mathbb{R}$.
- Pour 12.1166b. Nous entrons le nombre a^y dans la limite. Entrer un facteur dans une limite convergente dans $\mathbb{R}$ est un acte anodin.
- Pour 12.1166c. Définition de a^y, et renter le nombre réel a^{x_i} dans la limite sur k.
- Pour 12.1166d. Utilisation du lemme 12.413, valable pour $x_i, y_k \in \mathbb{Q}$.
- Pour 12.1166e. Pour i fixé, la suite $k \mapsto x_i + x_k$ est une suite de rationnels qui converge vers le réel $x_i + y$. Par définition 12.421 de la fonction puissance nous avons alors $\lim_k a^{x_i + y_k} = a^{x_i + y}$.
- Pour 12.1166f. La suite de réels $i \mapsto x_i + y$ converge dans $\mathbb{R}$ vers le réel $x + y$. Par la continuité de $t \mapsto a^t$ (ça fait partie du lemme 12.63 définissant la fonction puissance sur $\mathbb{R}$) nous avons $\lim_i a^{x_i + y} = a^{x+y}$.

Vous remarquerez que les limites sur k et sur i ne s'enlèvent pas tout à fait avec la même justification. Nous aurions pu invoquer la continuité sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto a^t$ pour les deux limites. Mais cette continuité, dans le cas d'une suite purement constituée de rationnels, est la définition de la prolongation vers $\mathbb{R}$. □

LEMooIPLLooCgpCIn

Lemme 12.423.
Soient $a, b > 0$. Si $1 < x < y$ alors

$$a - b < ay - bx. \tag{12.1167}$$

Démonstration. Nous posons $y = x + s$ avec $s > 0$. Alors

$$ay - bx = a(x + s) - bx = (a - b)x + as > (a - b)x > a - b \tag{12.1168}$$

parce que $as > 0$ et $x > 1$. □

PROPooJXHFooCDwxCS

Proposition 12.424 ([1]).
Pour $q > 0$ dans $\mathbb{Q}$, la fonction

$$\begin{aligned} f_q : \mathbb{Q}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^q \end{aligned} \tag{12.1169}$$

est strictement croissante.

Démonstration. Division selon la généralité de q.

(1) **Si q est entier positif** Soit $q = n \in \mathbb{N}$. Si $s > 0$ alors l'inégalité $(x+s)^n > x^n$ découle du binôme de Newton de la proposition 1.387.

(2) **Si q est rationnel** Soient un rationnel $q = m/n$ et un nombre strictement positif s. Nous avons, par la définition 12.405 sous la forme (12.1129) :

$$f_{m/n}(x+s)^n = (x+s)^m > x^m = f_{m/n}(x)^n. \tag{12.1170}$$

Nous avons utilisé la stricte croissance de $x \mapsto x^m$. Cela donne

$$f_{m/n}(x+s)^n > f_{m/n}(x)^n. \tag{12.1171}$$

En utilisant encore la stricte croissance de $x \mapsto x^n$, nous avons le résultat.

□
CORooYWNNooLwKmiD

Corolaire 12.425.
Soient $1 < b < a$ dans $\mathbb{R}$ et des rationnels strictement positifs $p < q$. Alors

$$a^p - b^p < a^q - b^q \tag{12.1172}$$

Démonstration. Nous notons $q = p + r$ avec $r > 0$ dans $\mathbb{Q}$. Par la proposition 12.424,

$$a^r > b^r. \tag{12.1173}$$

Cela nous permet d'utilise le lemme 12.423 pour écrire

$$a^p - b^p < a^p a^r - b^p b^r = a^q - b^q. \tag{12.1174}$$

□
PROPooKWRGooMTbRdU

Proposition 12.426 ([1]).
Soient $a, b > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha. \tag{12.1175}$$

Démonstration. Nous supposons que c'est bon pour $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$. Pour les autres, nous donnons plus de détails.

(1) $\mathbb{Q}^+$ Soit $q = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Si $a^{m/n} = x$ et $b^{m/n} = y$, alors

EQooGNMAooQJMNsL

$$x^n = a^m \tag{12.1176a}$$
$$y^n = b^m \tag{12.1176b}$$

par (12.1129). Nous multiplions (12.1176a) par y^n à gauche et par b^m à droite : $x^n y^n = a^m b^m$. En tenant compte du résultat pour $\mathbb{N}$, nous avons

$$(xy)^n = (ab)^m, \tag{12.1177}$$

ce qui signifie que le nombre xy est $(ab)^{m/n}$.

(2) **Pour $\mathbb{Q}^-$** Soit $q \in \mathbb{Q}^+$, nous avons le calcul

$$a^{-q} b^{-q} = \frac{1}{a^q b^q} = \frac{1}{(ab)^q} = (ab)^{-q}. \tag{12.1178}$$

(3) **Pour $\mathbb{R}$** Soit une suite de rationnels $\alpha_i \to \alpha$. Nous avons

$$a^\alpha b^\alpha = \big(\lim_i a^{\alpha_i}\big)\big(\lim_j b^{\alpha_j}\big) = \lim_i \big(a^{\alpha_i} b^{\alpha_i}\big) = \lim_i (ab)^{\alpha_i} = (ab)^\alpha. \tag{12.1179}$$

Justifications :

- la proposition 9.28 pour le produit des limites,
- le résultat dans $\mathbb{Q}$ que nous venons de prouver,
- la définition de $(ab)^\alpha$ comme limite de $(ab)^{\alpha_i}$.

□

Pour rappel, la proposition suivante, dans le cas de $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ est la proposition 12.424.

PROPooUOFKooYyGwIr

Proposition 12.427 ([1]).
Pour $\alpha > 0$, la fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon]0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{12.1180}$$

est strictement croissante.

Démonstration. Nous rappellons que le cas $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ est déjà traité par la proposition 12.424. Soient $x \in]0,\infty[$ et $s > 0$. Nous allons montrer que $f_\alpha(x+s) - f_\alpha(x) > 0$. Pour cela nous décomposons en plusieurs cas.

(1) $\underline{x > 1}$ Par la proposition 1.570, nous considérons une suite strictement croissante de rationnels strictement positifs $\alpha_i \to \alpha$. Pour tout i nous avons $\alpha_i > \alpha_0$.

En utilisant la stricte croissance de f_{α_0} et le lemme 12.414(2), nous avons les inégalités $1 < x^{\alpha_0} < (x+s)^{\alpha_0}$, et en particulier

$$0 < (x+s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}. \tag{12.1181}$$

De plus nous avons $1 < x < x+s$ et $\alpha_0 < \alpha_i$ pour tout i. Donc le corolaire 12.425 s'applique et nous avons, pour tout i :

$$0 < (x+s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0} < (x+s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}. \tag{12.1182}$$

C'est le moment de passer à la limite $i \to \infty$. La seconde inégalité devient non stricte, mais la première reste :

$$0 < (x+s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0} \leqslant (x+s)^{\alpha} - x^{\alpha}. \tag{12.1183}$$

Nous avons donc bien la stricte croissance de f_α sur $]1,\infty[$.

(2) $\underline{0 < x \leqslant 1}$ Nous choisissons encore $\alpha_i \to \alpha$ strictement croissante dans $\mathbb{Q}$. Pour chaque i, nous avons encore

$$(x+s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i} > 0. \tag{12.1184}$$

Le passage à la limite change l'inégalité stricte en inégalité large, et ne permet donc pas de conclure immédiatement. Nous devons donc ruser. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k(x+s) > 1$ et $kx > 1$ (existence parce que $\mathbb{R}$ est archimédien, proposition 1.555). Nous avons :

$$\big(k(x+s)\big)^\alpha - (kx)^\alpha > 0 \tag{12.1185}$$

par la partie « $x > 1$ » que nous venons de prouver. Grâce à la proposition 12.426 nous pouvons factoriser k^α :

$$0 < \big(k(x+s)\big)^\alpha - (kx)^\alpha = k^\alpha\big((x+s)^\alpha - x^\alpha\big). \tag{12.1186}$$

Vu que $k^\alpha > 0$, cela implique $(x+s)^\alpha - x^\alpha > 0$, ce qu'il fallait.

Nous avons fini de prouver que la fonction f_α était strictement croissante sur $]0,\infty[$. □

LEMooJVXQooDPUuuJ

Lemme 12.428.
Si $p \geqslant 1$ et si $x \in [0,1]$ alors $x^p \leqslant x$.

Démonstration. Vu que $p \geqslant 1$, nous avons $p = 1+\alpha$ avec $\alpha \geqslant 0$. Nous pouvons donc écrire[165]

$$x^p = x^{1+\alpha} = xx^\alpha = xf_\alpha(x). \tag{12.1187}$$

Vu que f_α est croissante (proposition 12.427), que $f_\alpha(0) = 1$ et que $f_\alpha(1) = 1$, nous avons $f_\alpha(x) \in [0,1]$ dès lors que $x \in [0,1]$. Donc

$$xf_\alpha(x) \leqslant x. \tag{12.1188}$$

□

Nous prouvons à présent que f_α est localement injective ; nous en avons besoin pour prouver la continuité. Or cette continuité est nécessaire à prouver que f_α est localement bijective. Donc nous ne pouvons pas énoncer la bijectivité ici. Ce sera la proposition 12.435.

[165] En utilisant la proposition 12.422(3).

PROPooHKTKooCUEBjh

Proposition 12.429.
Soient $\alpha \neq 0$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il existe un voisinage V de x sur lequel

$$f_\alpha : V \to f_\alpha(V) \tag{12.1189}$$

est injective.

Démonstration. Soit $x > 0$; nous considérons un voisinage V de x inclu à $]0, \infty[$. Soit $y \in V$; pour fixer les idées nous supposons $y < x$. Par la stricte croissance de f_α sur $]0, \infty[$ (proposition 12.427), nous avons $f_\alpha(y) < f_\alpha(x)$ et en particulier $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

Le cas $x < 0$ se traite de façon analogue, avec la stricte décroissance de f_α sur $]-\infty, 0[$. □

Notons que les voisinages sur lesquels f_α est injective sont assez grands. Ils peuvent être toute une demi-droite, si l'on veut.

LEMooQTNKooLVEytN

Lemme 12.430.
Soient $\alpha > 0$, une suite de rationnels strictement décroissante $\alpha_i \to \alpha$ ainsi que les fonctions

$$\begin{aligned} f_{\alpha_i} :]1, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{\alpha_i}. \end{aligned} \tag{12.1190}$$

La famille $\{f_{\alpha_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ est équicontinue[166].

Démonstration. Soient $x > 1$, et $\alpha > 0$. Nous allons montrer que $\{f_{\alpha_i}\}$ est équicontinue en x. Soit s tel que $1 < x < x + s$; le corolaire 12.425 nous enseigne que

$$(x + s)^p - x^p < (x + s)^q - x^q \tag{12.1191}$$

dès que $p < q$. En particulier, f_p étant croissante par la proposition 12.427,

$$0 < (x + s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i} < (x + s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}. \tag{12.1192}$$

Soit $\epsilon > 0$ et δ tel que $s < \delta$ implique $|(x + s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}| < \epsilon$. Alors nous avons aussi, pour de tels δ et s :

$$|(x + s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}| < |(x + s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}| < \epsilon. \tag{12.1193}$$

En procédant de même pour $s < 0$, nous trouvons bien que

$$|y^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}| \leqslant \epsilon \tag{12.1194}$$

pour tout $y \in B(x, \delta)$.

Cela signifie que $\{f_i\}$ est équicontinue. □

PROPooUQNZooSSHLqr

Proposition 12.431 ([1])**.**
Soit $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{12.1195}$$

est continue.

Démonstration. Nous allons subdiviser quelque cas.

(1) **Pour $\alpha \in \mathbb{N}$** Nous prouvons que f_n est continue pour tout n par récurrence. D'abord la fonction f_1 est continue parce que c'est l'identité. Pour les autres, il s'agit d'une récurrence en utilisant le théorème 9.89(2).

(2) **Pour $\alpha \in \mathbb{Q}^+$** Soit $q = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Soit aussi $\epsilon > 0$. Nous avons :

$$f_{m/n}(x)^n = x^m \tag{12.1196a}$$
$$f_{m/n}(x + \epsilon)^n = (x + \epsilon)^m. \tag{12.1196b}$$

SUBEQooGNCSooWAeRcL

L'équation (12.1196b) s'écrit aussi bien sous la forme

$$f_n\big(f_{m/n}(x + \epsilon)\big) = (x + \epsilon)^m. \tag{12.1197}$$

[166] Définition 7.371.

En prenant la limite,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big[f_n\big(f_{m/n}(x+\epsilon)\big)\big] = x^m = f_{m/n}(x)^n. \tag{12.1198}$$

Vu que f_n est continue, nous pouvons la permuter avec la limite dans le membre de gauche tout en écrivant $f_{m/n}(x)^n = f_n\big(f_{m/n}(x)\big)$ dans le membre de droite :

$$f_n\big[\lim_{\epsilon\to 0} f_{m/n}(x+\epsilon)\big] = f_n\big(f_{m/n}(x)\big). \tag{12.1199}$$

La fonction f_n étant injective dans un voisinage autour de x (proposition 12.429),

$$\lim_{\epsilon\to 0} f_{m/n}(x+\epsilon) = f_{m/n}(x), \tag{12.1200}$$

ce qui est la continuité de $f_{m/n}$ en x.

(3) **Pour $\alpha\in\mathbb{R}^+$**

Nous prouvons séparément le cas $x<1$ et le cas $x\geqslant 1$.

(3a) **Si $x\in\,]1,\infty[$**

Commençons par $x\in\,]1,\infty[$.

Soit une suite $\alpha_i\to\alpha$ strictement décroissante dans $\mathbb{Q}^+$. Le lemme 12.430 nous dit que l'ensemble de fonctions $\{f_{\alpha_i}\colon]1,\infty[\to\mathbb{R}\}_{i\in\mathbb{N}}$ est équicontinu. La convergence simple $f_{\alpha_i}\to f_\alpha$ étant par définition, la proposition 7.374 nous dit que la fonction $f_\alpha\colon]1,\infty[\to\mathbb{R}$ est continue.

(3b) **Si $x\in\,]0,1]$**

Soient maintenant $x\in\,]0,1]$, et $\epsilon>0$. Il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $kx>1$, et $k^\alpha>1$. Soit $\delta_1>0$ tel que $B(x,\delta_1)>0$. Si $y\in B(x,\delta_1)$, alors

$$|y^\alpha-x^\alpha|\leqslant k^\alpha|y^\alpha-x^\alpha| = \big|(ky)^\alpha-(kx)^\alpha\big|. \tag{12.1201}$$

Par ailleurs, vu que $kx>1$, la fonction f_α est continue en kx. Il existe donc δ_2 tel que

$$z\in B(kx,\delta_2)\Rightarrow\big|z^\alpha-(kx)^\alpha\big|<\epsilon. \tag{12.1202}$$

Nous considérons $\delta<\min(\delta_1,\delta_2/k)$. Si $y\in B(x,\delta)$, alors d'une part

$$|ky-kx| = k|y-x|\leqslant k\delta<\delta_2. \tag{12.1203}$$

Pour un tel y nous avons donc $ky\in B(kx,\delta_2)$ et donc

$$|y^\alpha-x^\alpha|\leqslant\big|(ky)^\alpha-(kx)^\alpha\big|<\epsilon. \tag{12.1204}$$

Donc la continuité de f_α en x.

(4) **Pour $\alpha\in\mathbb{R}^-$**

Si $\alpha>0$, la fonction $f_{-\alpha}$ est donnée par

$$f_{-\alpha}(x) = \frac{1}{f_\alpha(x)} \tag{12.1205}$$

et est donc continue (sauf en $x=0$ où elle n'existe pas).

□

PROPooDWZKooNwXsdV

Proposition 12.432 ([1]).
Soient $a>0$ ainsi que $x,y\in\mathbb{R}$. Alors

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}. \tag{12.1206}$$

Démonstration. Nous découpons en fonction de la nature de x et y.

(1) **x rationnel, y naturel** Si $q\in\mathbb{Q}$ et $n\in\mathbb{N}$ alors la formule

$$(a^q)^n = a^{nq} \tag{12.1207}$$

découle seulement d'une récurrence sur la formule 12.1164.

(2) $x, y \in \mathbb{Q}$ Soient $y = m/n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Q}$. Nous avons, en utilisant la partie déjà démontrée et le lemme 12.411,

$$(a^q)^y = (a^q)^{m/n} = \big((a^q)^m\big)^{1/n} = (a^{mq})^{1/n} = a^{mq/n} = a^{yq}. \tag{12.1208}$$

(3) x, y **irrationnels**

Soient des suites des rationnels $x_i \to x$ et $y_i \to y$. En utilisant les définitions,

$$(a^x)^y = \lim_i (a^x)^{y_i} = \lim_i \big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i}. \tag{12.1209}$$

EQooXITUooHYNSPU

Fixons un i pour commencer. Nous avons, par la continuité de f_{y_i} (proposition 12.431)

$$\big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i} = f_{y_i}\big(\lim_j a^{x_j}\big) = \lim_j \big(f_{y_i}(a^{x_j})\big) = \lim_j a^{x_j y_i}. \tag{12.1210}$$

Nous avons utilisé le résultat déjà démontré dans le cas des rationnels. La suite $j \mapsto x_j y_i$ est une suite dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers le réel xy_i, donc la limite sur j redonne la fonction puissance :

$$\big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i} = \lim_j a^{x_j y_i} = a^{xy_i}. \tag{12.1211}$$

EQooWORSooFoRBod

Le résultat découle maintenant de la prise de limite dans (12.1209) qui revient à prendre la limite $i \to \infty$ de l'expression dans (12.1211) :

$$(a^x)^y = \lim_i \big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i} = \lim_i a^{xy_i} = a^{xy}. \tag{12.1212}$$

□

PROPooURSHooFfEsFS

Proposition 12.433 ([1])**.**
Soient $a, b > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha. \tag{12.1213}$$

PROPooJRWCooGiXAYt

Proposition 12.434.
Soit $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}$. Nous avons

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty. \tag{12.1214}$$

Démonstration. Nous séparons la preuve en fonction de la nature de α.

(1) **Si $\alpha \in \mathbb{N}$** C'est le lemme 12.33.

(2) **Si $\alpha = 1/n$** Soit $n \neq 0$ dans $\mathbb{N}$, et prouvons que $\lim_{x\to\infty} x^{1/n} = \infty$. La proposition 12.422 nous indique que $x \mapsto x^{1/n} = f_n^{-1}(u)$ est croissante et continue. Elle possède donc une limite ℓ éventuellement infinie par la proposition 12.38. Posons

$$\lim_{x\to\infty} f_n^{-1}(x) = \ell. \tag{12.1215}$$

Nous voulons appliquer f_n des deux côtés et profiter de la continuité de f_n pour permuter avec la limite. Si vous avez peur du cas $\ell = +\infty$, supposez $\ell \neq +\infty$ et considérez ce qui suit comme une preuve par l'absurde que $\ell = +\infty$. Nous avons :

$$f_n\big(\lim_{x\to\infty} f_n^{-1}(x)\big) = \lim_{x\to\infty} f_n\big(f_n^{-1}(x)\big) = \lim_{x\to\infty} x = \infty. \tag{12.1216}$$

donc $f_n(\ell) = \infty$, et nous concluons que $\ell = \infty$.

(3) **Si $\alpha \in \mathbb{Q}$** Nous posons $\alpha = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Alors

$$x^\alpha = (x^{1/q})^p \tag{12.1217}$$

par la proposition 12.432. Autrement dit,

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \lim_{x\to\infty} (f_p \circ f_{1/q})(x) = \infty \tag{12.1218}$$

parce que tant f_p que $f_{1/q}$ ont une limite $+\infty$.

(4) **Le cas général** Nous considérons enfin $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}$. Le lemme 1.556 nous permet de considérer $q \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < q < \alpha$. La proposition 12.422(2) nous dit que, pour chaque x, $x^q < x^\alpha$. Donc

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \geqslant \lim_{x\to\infty} x^q = \infty \tag{12.1219}$$

en utilisant le point précédent.

□

PROPooEXGKooCqzLor

Proposition 12.435.
Soit $\alpha > 0$. La fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon [0,\infty[&\to [0,\infty[\\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{12.1220}$$

est bijective.

Démonstration. La proposition 12.427 nous dit que $f_\alpha \colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante. Vu que $f_\alpha(0) = 0$, nous savons que $f_\alpha([0,\infty[) \subset [0,\infty[$. La stricte croissance nous dit également que f_α est injective.

Il reste à voir que f_α est surjective. Rappelons quelque faits.

- D'abord une facile : $f_\alpha(0) = 0$.
- Nous avons $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$ par la proposition 12.434.
- La fonction f_α est continue par la proposition 12.431.

Le théorème des valeurs intermédiaires[167] conclut que f_α est surjective sur $[0,\infty[$. □

Le lemme suivant montre en gros que x^y croît plus rapidement en y qu'en x.

LemLJOSooEiNtTs

Lemme 12.436.
Pour tout $\alpha > 0$ et $a < 1$ nous avons la limite

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n = 0 \tag{12.1221}$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ plus grand que α. Soit la suite numérique $s_n = n^k a^n$. Tous ses termes sont positifs et

$$\frac{s_n}{s_{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \frac{1}{a}. \tag{12.1222}$$

Étant donné que $n/n+1 \to 1$ et que $a < 1$, il existe un certain rang à partir duquel la suite (s_n) est décroissante. Deux conclusions :

- Elle est majorée par une constante M.
- Elle est convergente par le lemme 9.36.

Soit l tel que $ka^l < 1$ et $n > l$ alors

$$s_{n+l} = (n+l)^k a^{n+l} \leqslant k n^k a^n a^l = k a^l s_n \leqslant k a^l M. \tag{12.1223}$$

La majoration est due au fait que dans $(n+l)^k$ nous avons k termes tous plus petits que n^k. De la même façon,

$$s_{2n+2l} \leqslant k a^{2l} s_{2n} \leqslant k a^{2l} M. \tag{12.1224}$$

En posant $\varphi(i) = in + il$ nous avons

$$s_{\varphi(i)} \leqslant k a^i M, \tag{12.1225}$$

qui est une sous-suite convergente vers 0. Or si une suite est convergente (ce qui est le cas de (s_n)), toutes les sous-suites convergent vers la même limite. Nous en concluons que $s_n \to 0$. □

12.437.
Une conséquence est que si vous voulez choisir un mot de passe fort, la longueur du mot est plus importante que la taille de l'alphabet choisi : il est plus efficace de choisir une combinaison longue qu'une combinaison mélangeant des lettres, chiffres et symboles spéciaux.

Exemple : si vous choisissez un mot de passe contenant majuscules, minuscules, chiffres et symboles spéciaux complètement mélangés (ne mentez pas, vous ne le faites pas), mais que vous ne le choisissez que de taille 6, vous avez 72^6 possibilités (en supposant un jeu de 10 symboles spéciaux).

Eh bien, en seulement 8 lettres minuscules, vous avez plus de possibilités : $26^8 > 72^6$.

De nombreux sites font l'erreur de considérer que

[167] Dans sa version de la proposition 9.96.

- « ggzxzheaiynshunxuydajkwyohgqxz » est un mot de passe faible,
- « azerty.2019A » est un mot de passe fort.

Il n'en est rien. Le premier est considérablement meilleur que le second, même si le second, très superficiellement, mélange les lettres majuscules, minuscules, chiffres et symboles spéciaux.

Voilà voilà. La prochaine fois qu'un site vous refusera un mot de passe de 30 lettres minuscules mélangées, vous saurez pourquoi il n'y a rien qui marche en informatique, et en particulier pourquoi la sécurité générale de nos systèmes d'information est désastreuse.

THOooHWNWooTewPvt

Théorème 12.438.
Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(N, \mathbb{C})$. La suite $(A^n x)$ tend vers zéro pour tout x si et seulement si $\rho(A) < 1$ où $\rho(A)$ est le rayon spectral de A

Démonstration. Dans le sens direct, il suffit de prendre comme x, un vecteur propre de A. Dans ce cas nous avons $A^n x = \lambda^n x$. Mais $\lambda^k x$ ne tend vers zéro que si $\lambda < 1$. Donc toutes les valeurs propres de A doivent être plus petites que 1 et $\rho(A) < 1$.

Pour l'autre sens nous utilisons la décomposition de Dunford (théorème 8.262) : il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P^{-1}(D + N)P \tag{12.1226}$$

où D est diagonale, N est nilpotente et $[D, N] = 0$. Étant donné que $D + N$ est triangulaire, son polynôme caractéristique est

$$\chi_{D+N}(X) = \prod_i (D_{ii} - X). \tag{12.1227}$$

Par similitude, c'est le même polynôme caractéristique que celui de A et nous savons alors que la diagonale de D contient les valeurs propres de A.

Vu que $A^n = P^{-1}(D + N)^n P$, nous allons montrer que $\|(D + N)^n\| \to 0$, et ce sera suffisant. Notons r l'ordre de nilpotence de N (c'est-à-dire $N^r = 0$), et prenons $n > r$. En utilisant le fait que D et N commutent, pour tout $n \geqslant r$ nous avons :

$$\|(D + N)^n\| \leqslant \|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k\| \tag{12.1228a}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|D\|^{n-k} \|N^k\| \tag{12.1228b}$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \rho(D)^{n-k} \|N\|^k \tag{12.1228c}$$

$$\leqslant c \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \rho(D)^n \tag{12.1228d}$$

SUBEQooDAUQooCeRKjl

$$= c\rho(D)^n \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \tag{12.1228e}$$

$$\leqslant c\rho(D)^n \sum_{k=0}^{r-1} \frac{n^{k-1}}{k!} \tag{12.1228f}$$

SUBEQooJZVDooEdbjFI

$$\leqslant c\rho(D)^n \sum_{k=0}^{r-1} n^{r-2} \tag{12.1228g}$$

SUBEQooXONCooBlYmbR

$$= cr\rho(D)^n n^{r-2}. \tag{12.1228h}$$

Justifications.

- Pour (12.1228d). Nous avons posé $c = \max_{k=1,\dots,r-1} \|N\|^k \rho(D)^{-k}$.
- Pour (12.1228f). Lemme 1.388.
- Pour (12.1228g). On oublie le $k!$ et on remplace k par $r - 1$.

Récapitulons ces inéquations :

$$\|(D + N)^n\| \leqslant c'\rho(D)^n n^{r-2} \tag{12.1229}$$

où c' est une nouvelle constante. Du coup si $\rho(D) < 1$ alors $\|(D + N)^k\| \to 0$ par lemme 12.436. □

LEMooZWXGooQkgsqw

Lemme 12.439 ([469, 1]).
Soient $a_n \geqslant 0$ tels que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n |x|^n < \infty \tag{12.1230}$$

pour tout $x \in B(0,r)$.

Alors

$$\lim_{t\to 0} \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^{n-1} = 0. \tag{12.1231}$$

Démonstration. Soit $0 < \epsilon < 1$. Soit $0 < x < \min\{r, 1\}$. Nous notons $M = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$. Nous considérons un nombre $0 < t_0 < 1$ tel que

$$t_0 < x^2. \tag{12.1232}$$

En utilisant les propositions 12.432 et 12.427, nous avons $t_0^{n-1} < x^{2n-2}$. Mais vu que nous ne considérons que $n \geqslant 2$ et que $0 < x < 1$, nous en déduisons

$$t_0^{n-1} < x^{2n-2} < x^n. \tag{12.1233}$$

Nous posons enfin $t_1 < \epsilon t_0$ de telle sorte à avoir, en utilisant 12.433,

$$a_n t_1^{n-1} < a_n \epsilon^{n-1} t_0^{n-1} < \epsilon^n a_n x^n < \epsilon a_n x^n. \tag{12.1234}$$

Enfin nous avons

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n t_1^{n-1} \leqslant \epsilon \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \epsilon M. \tag{12.1235}$$

Nous avons donc trouvé un $t > 0$ (donné par ϵt_0) tel que si $t_1 < t$ alors $\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^{n-1} < \epsilon M$. Cela prouve bien la limite demandée. □

12.38 Densité des polynômes

12.38.1 Théorème de Stone-Weierstrass

Voir le thème 34.

Note : le lemme 12.440 est utilisé dans la démonstration du théorème 12.444 ; c'est pour cela que nous l'avons isolé.

LemYdYLXb

Lemme 12.440.
Il existe une suite de polynômes sur $[0,1]$ convergeant uniformément vers la fonction racine carrée.

Démonstration. Nous donnons cette suite par récurrence :

$$P_0(t) = 0 \tag{12.1236a}$$

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\big(t - P_n(t)^2\big). \tag{12.1236b}$$

Nous commençons par montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $P_n(t) \in [0, \sqrt{t}]$. Pour P_0, c'est évident. Ensuite nous avons

$$P_{n+1}(t) - \sqrt{t} = P_n(t) - \sqrt{t} + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2) \tag{12.1237a}$$

$$= \big(P_n(t) - \sqrt{t}\big)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{t - P_n(t)^2}{P_n(t) - \sqrt{t}}\right) \tag{12.1237b}$$

$$= \big(P_n(t) - \sqrt{t}\big)\left(1 - \frac{\sqrt{t} + P_n(t)}{2}\right) \tag{12.1237c}$$

$$\leqslant 0 \tag{12.1237d}$$

parce que $\sqrt{t} \leqslant 1$ et $P_n(t) \leqslant 1$ par hypothèse de récurrence.

Nous savons au passage que $P_n(t)$ est une suite réelle croissante parce que $t - P_n(t)^2 \geqslant t - (\sqrt{t})^2 = 0$. La suite $P_n(t)$ est donc croissante et majorée par $\sqrt{t}$; elle converge donc. Les candidats limites sont déterminés par l'équation

$$\ell = \ell + \frac{1}{2}(t - \ell^2), \tag{12.1238}$$

dont les solutions sont $\ell = \pm\sqrt{t}$. La suite étant positive, nous avons une convergence ponctuelle de P_n vers la racine carrée. Cette suite étant une suite croissante de fonctions continues sur un compact, convergeant ponctuellement vers une fonction continue, la convergence est uniforme par le théorème de Dini 12.387. □
LemUuxcqY

Lemme 12.441.
Soit K, un compact de $\mathbb{R}$ et f_n une suite de fonctions sur K convergeant uniformément vers f. Soient un espace topologique X et une application $g\colon X \to K$. Alors $f_n \circ g$ converge uniformément vers $f \circ g$.

Démonstration. En effet, pour tout $x \in X$ nous avons

$$\|(f_n \circ g) - (f \circ g)\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f_n\big(g(x)\big) - f\big(g(x)\big)\| \leqslant \|f_n - f\|_\infty. \tag{12.1239}$$

Par conséquent, si $\epsilon > 0$ est donné, il suffit de choisir n de telle sorte à avoir $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$ et nous avons $\|(f_n \circ g) - (f \circ g)\|_\infty \leqslant \epsilon$. □

Définition 12.442.
*Nous disons qu'une algèbre A de fonctions sur un espace X **sépare les points** de X si pour tout $x_1 \neq x_2$ il existe $g \in A$ telle que $g(x_1) \neq g(x_2)$.*

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer une forme nettement plus générale du théorème de Stone-Weierstrass. Le théorème 12.444 le donne pour $C(X, \mathbb{C})$ et le théorème 12.443 le donne pour $C(X, \mathbb{R})$.
THOooMDILooGPXbTW

Théorème 12.443 (Stone-Weierstrass[470])**.**
Soient X, un espace compact et Hausdorff. Soit A, une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ contenant une fonction constante non nulle. Alors A est dense dans $\Big(C(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$ si et seulement si A sépare les points de X.

Démonstration. Nous allons écrire la démonstration en plusieurs étapes (dont la première est le lemme 12.440). Nous commençons par la première partie, sur les réels.

Première étape Pour tout $x \neq y \in X$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

En effet, vu que A sépare les points nous pouvons considérer une fonction $g \in A$ telle que $g(x) \neq g(y)$ et ensuite poser

$$f(z) = \alpha - \frac{\alpha - \beta}{g(y) - g(x)}\big(g(z) - g(x)\big). \tag{12.1240}$$

Les constantes faisant partie de A, cette fonction f est encore dans A.

Seconde étape Pour tout n-uples de fonctions $f_1, \dots, f_n$ dans $\bar{A}$, les fonctions $\min(f_1, \dots, f_n)$ et $\max(f_1, \dots, f_n)$ sont dans $\bar{A}$.

Nous le démontrons pour $n = 2$; le reste allant évidemment par récurrence. Soient $f, g \in \bar{A}$. Étant donné que

$$\max(f, g) = \frac{f + g}{2} + \frac{|f - g|}{2} \tag{12.1241a}$$

$$\min(f, g) = \frac{f + g}{2} - \frac{|f - g|}{2}, \tag{12.1241b}$$

if suffit de montrer que si $f \in \bar{A}$ alors $|f| \in \bar{A}$. Si f est nulle, c'est évident ; supposons que $f \neq 0$ et posons $M = \|f\|_\infty \neq 0$. Pour tout $x \in X$ nous avons

$$\frac{f(x)^2}{M^2} \in [0, 1]. \tag{12.1242}$$

Nous considérons alors la suite

$$h_n = P_n \circ \frac{f^2}{M^2} \tag{12.1243}$$

où P_n est une suite de polynômes convergent uniformément vers la racine carrée (voir lemme 12.440). Le lemme 12.441 nous assure que h_n converge uniformément vers $\frac{|f|}{M}$ dans $C(X, \mathbb{R})$. Étant donné que $\bar{A}$ est également une algèbre, h_n est dans $\bar{A}$ pour tout n et la limite s'y trouve également (pour rappel, la fermeture $\bar{A}$ est celle de la topologie de la convergence uniforme).

Troisième étape Soit $\epsilon > 0$, $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $x \in X$. Il existe une fonction $g_x \in \bar{A}$ telle que

$$\begin{cases} g_x(x) = f(x) & \text{(12.1244a)} \\ g_x(y) \leqslant f(y) + \epsilon & \text{(12.1244b)} \end{cases}$$

pour tout $y \in X$.

Soit $z \in X \setminus \{x\}$ et une fonction h_z telle que $h_z(x) = f(x)$ et $h_z(z) = f(z)$. Une telle fonction existe par une des étapes précédentes. Étant donné que f et h_z sont continues, il existe un voisinage ouvert V_z de z sur lequel

$$h_z(y) \leqslant f(y) + \epsilon \tag{12.1245}$$

pour tout $y \in V_z$. Nous pouvons sélectionner un nombre fini de points $z_1, \dots, z_n$ tels que les ouverts $V_{z_1}, \dots, V_{z_n}$ recouvrent X (parce que X est compact, de tout recouvrement par des ouverts, nous extrayons un sous recouvrement fini.). Nous posons

$$g_x = \min(h_{z_1}, \dots, h_{z_n}) \in \bar{A}. \tag{12.1246}$$

Si $y \in X$, nous sélectionnons le i tel que $h_{z_i}(y) \leqslant f(y) + \epsilon$ et nous avons

$$g_x(y) \leqslant h_{z_i}(y) \leqslant f(y) + \epsilon. \tag{12.1247}$$

Étape finale Soit $\epsilon > 0$ et $f \in C(X, \mathbb{R})$. Pour chaque $x \in X$ nous considérons une fonction $g_x \in \bar{A}$ telle que

$$\begin{cases} g_x(x) = f(x) & \text{(12.1248a)} \\ g_x(y) \leqslant f(y) + \epsilon & \text{(12.1248b)} \end{cases}$$

pour tout $y \in X$. Les fonctions f et g_x sont continues, donc il existe un voisinage ouvert W_x de x sur lequel

$$g_x(y) \geqslant f(y) - \epsilon. \tag{12.1249}$$

De ces W_x nous extrayons un sous recouvrement fini de X : $W_{x_1}, \dots, W_{x_m}$ et nous posons

$$\varphi = \max(g_{x_1}, \dots, g_{x_n}) \in \bar{A}. \tag{12.1250}$$

Si $y \in X$, il existe un i tel que

$$\varphi(y) \geqslant g_{x_i}(y) \geqslant f(y) - \epsilon. \tag{12.1251}$$

La première inégalité est le fait que φ est le maximum des g_{x_k}, et la seconde est le choix de i. Donc pour tout $y \in X$ nous avons

$$f(y) - \epsilon \leqslant \varphi(y) \leqslant f(y) + \epsilon. \tag{12.1252}$$ EqJMxHaF

La première inégalité est ce que l'on vient de faire. La seconde est le fait que pour tout i nous ayons $g_{x_i}(y) \leqslant f(y) + \epsilon$; le fait que φ soit le maximum sur les i ne change pas l'inégalité.

Le fait que les inégalités (12.1252) soient vraies pour tout $y \in X$ signifie que $\|\varphi - f\|_\infty \leqslant \epsilon$, et donc que $f \in \text{Adh}\big(\text{Adh}(A)\big) = \text{Adh}(A)$.

Tout cela prouve que $C(X, \mathbb{R}) \subset \text{Adh}(A)$. L'inclusion inverse est le fait que $C(X, \mathbb{R})$ est fermé pour la norme $\|.\|_\infty$, étant donné qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Nous pouvons maintenant nous tourner vers l'énoncé concernant $C(X, \mathbb{C})$. □ ThoWmAzSMF

Théorème 12.444 (Stone-Weierstrass[1])**.**
Soit X, un espace compact et Hausdorff. Soit une sous-algèbre[168] *A stable par conjugaison*[169] *de $C(X, \mathbb{C})$ contenant une fonction constante non nulle. Alors A est dense dans $\big(C(X, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\big)$ si et seulement si A sépare les points de X.*

Entendons-nous bien : ici A et $C(X, \mathbb{C})$ sont des algèbres à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. La preuve de cette version dans $C(X, \mathbb{C})$ va bien entendu fortement reposer sur le cas dans $C(X, \mathbb{R})$ que nous venons de prouver. Soit donc A, une sous-algèbre vérifiant les hypothèses.

(1) $\underline{\text{Re}(A) \subset A}$ Nous prouvons que si $f \in A$, alors $\text{Re}(f) \in A$. En effet, vu que A est stable par conjugaison, si $f \in A$, alors $\bar{f} \in A$ et $f + \bar{f} = 2\,\text{Re}(f) \in A$.

[168] Algèbre, définition 1.461.
[169] Pour tout $g \in A$, nous avons $\bar{g} \in A$.

Nous posons

$$A_1 = \{\text{Re}(g) \text{ tel que } g \in A\}. \tag{12.1253}$$

(1) A_1 **est une sous-algèbre de** A Le fait que les éléments de A_1 soient dans A est déjà fait. Pour le produit, si $g_1, h_1 \in A_1$, alors il existe $g, h \in A$ tels que $g_1 = \text{Re}(g)$ et $h_1 = \text{Re}(h)$. Nous avons

$$(g_1 + ig_2)(h_1 + ih_2) = g_1h_1 - g_2h_2 + i(g_1h_2 + g_2h_1) \in A. \tag{12.1254}$$

La partie réelle de cela est dans A_1, donc

$$g_1h_2 - g_2h_1 \in A_1. \tag{12.1255}$$ EQooYAGUooJVpaEa

Mais comme $g_1 + ig_2 \in A$, nous avons aussi $g_1 - ig_2 \in A$ et donc

$$(g_1 - ig_2)(h_1 + ih_2) = g_1h_1 + g_2h_2 + i(g_1h_2 - g_2h_1) \in A. \tag{12.1256}$$

La partie réelle de cela est dans A_1. Donc

$$g_1h_1 + g_2h_2 \in A_1. \tag{12.1257}$$

En comparant avec (12.1255), nous avons $g_1h_1 \in A_1$.

(2) A_1 **sépare les points de** X Soient $x, y \in X$ ainsi que $f \in A$ séparant les points x et y, c'est-à-dire

$$f(x) \neq f(y). \tag{12.1258}$$

Supposons $f_1(x) = f_1(y)$. Vu que f sépare, si ce ne sont pas les parties réelles, ce sont les parties imaginaires. C'est-à-dire que $f_2(x) \neq f_2(y)$. Mais d'autre part, $if = -f_2 + if_1 \in A$, donc en réalité $f_2 \in A_1$ également.

Le partie A_1 dans $C(X, \mathbb{R})$ vérifie les hypothèses de Stone-Weierstrass réel 12.443, donc A_1 est dense dans $C(X, \mathbb{R})$. Le même raisonnement montre que A_2 est également dense dans $C(X, \mathbb{R})$[170]

Soit maintenant le vif de la preuve : $f \in C(X, \mathbb{C})$ avec $f = u + iv$, les fonctions u et v étant dans $C(X, \mathbb{R})$. Nous avons des suites $u_k \xrightarrow{unif} u$ et $v_k \xrightarrow{unif} v$ pour des suites (u_k) et (v_k) dans $C(X, \mathbb{R})$.

Par le même genre de raisonnements que nous avons déjà fait, nous nous convainquons que $u_k + iv_k \in A$ pour chaque k. Nous avons

$$\|u_k + iv_k - u - iv\|_\infty \leqslant \|u_k - u\|_\infty + \|v_k - v\|_\infty \tag{12.1259}$$

En prenant k assez grand, les deux termes peuvent être rendus plus petit que ϵ. □ CORooNIUJooLDrPSv

Corolaire 12.445 ([1]).
Soit B, la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. La partie $C^\infty(B, \mathbb{R}^n)$ est dense dans $\big(C(B, B), \|.\|_\infty\big)$.

Démonstration. Soit $f \in C(B, B)$ et $\epsilon > 0$. La fonction donnant la composante i est une fonction $f_i \in C(B, \mathbb{R})$ et il existe donc, par le théorème de Stone-Weierstrass 12.444, une fonction $g_i \in C^\infty(B, \mathbb{R})$ telle que $\|g_i - f_i\|_\infty \leqslant \epsilon$.

La fonction g dont les composantes sont les g_i ainsi construits vérifie $\|g - f\|_\infty \leqslant n\epsilon$. □

Attention toutefois que rien n'assure que les fonctions construites par le corolaire 12.445 prennent leurs valeurs dans B.

Le théorème suivant est un des énoncés les plus classiques de Stone-Weierstrass. Il découle évidemment du théorème général 12.444 (encore qu'il faut alors bien comprendre qu'il faut traiter la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ séparément). Il en existe cependant une preuve indépendante via les polynômes de Bernstein, dans le théorème 36.191. Par contre, n'allez pas croire que c'est plus simple. ThoGddfas

Théorème 12.446 (Stone-Weierstrass).
Soit f, une fonction continue sur un compact $K \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\|P - f\|_\infty < \epsilon$.

Autrement dit, les polynômes sont denses dans $\big(C^0(K, \mathbb{R}), \|.\|_\infty\big)$.

Démonstration. Nous allons prouver que les polynômes sur $\mathbb{R}$, restreins à K satisfont les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass 12.443.

[170] Il me semble même que $A_1 = A_2$ et qu'il y a un raccourci possible dans cette preuve en exploitant ce fait. Écrivez-moi pour dire ce que vous en pensez.

(1) **Partie de $C^0(K,\mathbb{R})$** Les polynômes sont des fonctions continues par la proposition 12.431.

(2) **Sous-algèbre** Les produits et sommes de polynômes restent des polynômes.

(3) **Contient une fonction constante non nulle** Les fonctions constantes sont des polynômes.

(4) **Sépare les points de K** Le polynôme $P(x) = x$ sépare tous les points que vous voulez.

□

THOooJGAJooBcTtDH

Théorème 12.447 (Stone-Weierstrass)**.**
Soit $f \in C^0(K,\mathbb{R}^n)$ où K est un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que $\|P - f\|_K < \epsilon$.

Autrement dit, les polynômes sont denses dans $\big(C^0(K,\mathbb{R}^n), \|.\|_K\big)$.

12.39 Primitive de fonction continue

PropQACVooBnHtRJ

Proposition 12.448 ([471])**.**
Soit un intervalle compact K de $\mathbb{R}$ et une suite (f_n) de fonctions continues sur K telles que $f_n \xrightarrow{unif} f$. Si chacune des fonctions f_n a une primitive sur K alors f également.

Démonstration. Soit $x_0 \in K$ et les primitives F_n choisies[171] pour avoir $F_n' = f_n$ et $F_n(x_0) = 0$. Nous allons voir que (F_n) est une suite de Cauchy dans $\big(K, \|.\|_\infty\big)$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $x \in K$. Nous avons

$$\|F_n - F_m\|_\infty = \sup_{x\in K} \|F_n(x) - F_m(x)\| \tag{12.1260a}$$
$$= \sup_{x\in K} \|(F_n - F_m)(x)\| \tag{12.1260b}$$
$$\leqslant \sup_{x\in K} \Big(\|F_n' - F_m'\|_{[x,x_0]}\|x - x_0\|\Big) \tag{12.1260c}$$
SUBEQooDABTooNgvVaG
$$\leqslant \sup_{x\in K} \Big(\|f_n - f_m\| \operatorname{diam}(K)\Big) \tag{12.1260d}$$
SUBEQooKTTOooMJVsEZ
$$\leqslant \operatorname{diam}(K)\|f_n - f_m\|_K. \tag{12.1260e}$$

Justifications.

- Pour (12.1260c). Théorème des accroissements finis 10.337.
- Pour (12.1260d). Parce que $x \in K$ et que K est borné, $\|x - x_0\|$ est majoré par $\operatorname{diam}(K)$.

Vu que (f_n) est de Cauchy, si n et m sont assez grands, cela tend vers zéro. La suite (F_n) converge donc vers une certaine fonction F.

Le théorème 12.398 nous permet de permuter la limite et la dérivée pour conclure que $F' = f$ et donc que f a une primitive sur K. □

PropKKGAooDQYGKg

Proposition 12.449 ([471])**.**
Soit un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ qui admet une primitive sur tout compact de I. Alors f a une primitive sur I.

Démonstration. Nous considérons une suite exhaustive[172] de compacts K_n pour I et $x_0 \in K_0$. Nous considérons aussi F_n la primitive de f sur K_n telle que $F_n(x_0) = 0$ (possible parce que $x_0 \in K_n$ pour tout n). Les fonctions F_n sont des restrictions les unes des autres, et nous pouvons définir

$$\begin{aligned} F\colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F_n(x) \text{ si } x \in K_n. \end{aligned} \tag{12.1261}$$

Nous avons évidemment $F(x_0) = 0$ et nous allons prouver que F est une primitive de f sur I. Soit $x \in I$ vu que I est ouvert, nous pouvons choisir n_0 tel que $x \in \operatorname{Int}(K_{n_0})$. Les fonctions F et F_{n_0} sont égales sur K_n et donc sur un ouvert autour de x. Par conséquent F est dérivable en x et $F'(x) = F_{n_0}'(x) = f(x)$. □

[171] Les fonctions F_n étant dérivables sont continues.
[172] Voir le lemme 7.359.

ThoEXXyooCLwgQg

Théorème 12.450.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction continue sur I admet une primitive[173] *sur I.*

Démonstration. Sur chaque compact de I, la fonction f est limite uniforme de polynômes[174] (théorème de Stone-Weierstrass 12.446). Donc f est primitivable sur tout compact de I (proposition 12.448) et donc sur I par la proposition 12.449. □

12.39.1 Dérivation de la fonction puissance (première)

Nous n'allons pas complètement résoudre la question de la dérivation de la fonction $x \mapsto a^x$; il faudrait des logarithmes, et nous ne les avons pas encore définis. Le logarithme sera introduit comme fonction inverse de l'exponentielle en 15.95.

PROPooMXCDooBffXbl

Proposition 12.451 ([468]).
Soit la fonction puissance

$$\begin{aligned} g_a\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x. \end{aligned} \tag{12.1262}$$

(1) La fonction g_a est dérivable.

(2) La dérivée vérifie l'équation

$$g_a'(x) = g_a'(0)g_a(x). \tag{12.1263}$$

EQooNIUJooPqDnax

Démonstration. La fonction g_a est continue par 12.422(1). La proposition 12.450 nous dit donc que la fonction g_a admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Nous notons F une telle primitive.

Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $F_x(t) = F(x+t)$, nous avons une primitive de $t \mapsto a^x a^t$. En effet

$$F_x'(t) = F'(x+t)\frac{d}{dt}\Big[x+t\Big]_{t=0} = a^{x+t} = a^x a^t. \tag{12.1264}$$

Par ailleurs la fonction $t \mapsto a^x F(t)$ est également une primitive de $t \mapsto a^x a^t$. Donc il existe un nombre $C(x)$ tel que

$$F_x(t) = F(x+t) = a^x F(t) + C(x). \tag{12.1265}$$

Le nombre $F(1) - F(0)$ est un nombre sans histoires. Nous avons :

SUBALIGNooVARJooIcPEHN

$$\begin{aligned} g_a(x)\big(F(1)-F(0)\big) &= g_a(x)F(1) - g_a(x)F(0) && \text{(12.1266a)}\\ &= F_x(1) - C(x) - F_x(0) + C(x) && \text{(12.1266b)}\\ &= F_x(1) - F_x(0) && \text{(12.1266c)}\\ &= F(1+x) - F(x). && \text{(12.1266d)} \end{aligned}$$

La fonction F étant dérivable, nous en déduisons que g_a est dérivable.

Vu que nous n'avons aucune idée de la forme de F, nous ne pouvons pas tirer beaucoup d'informations d'une dérivation des membres de gauche et de droite de (12.1266).

En ce qui concerne la formule, nous écrivons la fameuse équation fonctionnelle[175]

$$g_a(x+y) = g_a(x)g_a(y) \tag{12.1267}$$

Nous fixons x et dérivons par rapport à y en $y = y_0$:

$$g_a'(x+y_0) = g_a(x)g_a'(y_0). \tag{12.1268}$$

En posant $y_0 = 0$ nous trouvons le résultat demandé. □

12.452.
La démonstration donnée dans [468] s'assure d'abord de l'existence d'une intégrale (lemme 14.256), pose ensuite $A = \int_0^1 g_a(t)dt$ et fait le calcul suivant :

$$Ag_a(x) = \int_0^1 g_a(x)g_a(t)dt = \int_0^1 g_a(x+t)dt = \int_x^{x+1} g_a(t)dt. \tag{12.1269}$$

[173] Définition 12.223.
[174] Si tu veux te passer de Stone-Weierstrass, tu peux prouver que toute fonction continue sur un compact est limite uniforme de fonctions affines par morceaux, par exemple. Voir [471].
[175] Pour rappel, proposition 12.422(3).

Vu que le membre de droite est une fonction dérivable de x, nous concluons que g_a est dérivable. Cela demande donc toute la théorie de l'intégration pour prouver la *dérivabilité* d'une fonction.

La démonstration donnée ici est à peine mieux. Elle utilise l'existence d'une primitive et donc tout le théorème de Stone-Weierstrass 12.446.

Dans les deux cas, je trouve que la situation n'est pas fameuse. Si vous êtes capable de montrer l'existence de la limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{a^\epsilon-1}{\epsilon} \tag{12.1270}$$

sans recourir à autre chose que des astuces sur les limites, je suis preneur. Ou, au contraire, si vous avez un argument pour dire que c'est impossible, dites-le moi également. Écrivez-moi.

Nous posons une définition

DEFooPJKMooOfZzgy

Définition 12.453.
EQooULHBooByFVec
*Soit $a>0$. Nous nommons l'**équation fonctionnelle** l'équation*

$$\begin{cases} f(x+y)=f(x)f(y) & \text{(12.1271a)}\\ f(1)=a & \text{(12.1271b)}\end{cases}$$

pour la fonction inconnue $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Note : une équation du même type, avec $f(x+y)=f(x)+f(y)$ sera dans le lemme 17.139.

DEFooXMQTooSbZzqJ

Définition 12.454.
EQooGDBYooUoAFPW
*Soit $a>0$. Nous nommons l'**équation exponentielle** l'équation*

$$\begin{cases} y'=y & \text{(12.1272a)}\\ y(1)=a & \text{(12.1272b)}\end{cases}$$

pour la fonction inconnue $y\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

LEMooWUQBooXzjmZv

Lemme 12.455 ([1])**.**
Si elle existe, la solution au problème

$$\begin{cases} y'=y & \text{(12.1273a)}\\ y(0)=1 & \text{(12.1273b)}\end{cases}$$

vérifie $y(x)=1/y(-x)$.

En particulier une telle solution ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Supposons que y soit une solution, et posons $h(x)=y(x)y(-x)$. Une dérivation montre que $h'(x)=0$. Vu que $h(0)=1$, nous avons $h(x)=1$ pour tout x. Par conséquent $y(x)y(-x)=1$ pour tout x. □

PropDJQSooYIwwhy

Proposition 12.456 (Unicité de l'exponentielle)**.**
Si elle existe, la solution au problème

$$\begin{cases} y'=y & \text{(12.1274a)}\\ y(0)=1 & \text{(12.1274b)}\end{cases}$$

est unique.

Démonstration. Soient y et g deux solutions et considérions la fonction $h(x)=g(x)y(-x)$. Un calcul immédiat donne

$$h'(x)=0 \tag{12.1275}$$

et donc h est constante. Vu que $h(0)=1$ nous avons $g(x)y(-x)=1$ pour tout x. Grâce au lemme 12.455 qui nous indisque que y ne s'annule pas, nous pouvons alors écrire

$$g(x)=\frac{1}{y(-x)}=y(x). \tag{12.1276}$$

□

12.457.
Nous savons qu'il existe une unique solution de l'équation exponentielle avec $a = 1$. Avec la relation

$$g'_a(x) = g_a(x)g'_a(0), \tag{12.1277}$$

de la proposition 12.451, nous n'en sommes pas loin. Il faut encore savoir si il existe un $a > 0$ tel que $g'_a(0) = 1$. Notre culture générale nous dit qu'un tel réel existe et est la fameuse constante e.

Nous nous attelons maintenant à la tâche de montrer l'existence de la chose.

12.39.2 Équation fonctionnelle

Il n'est un secret pour personne (proposition 12.422(3)) que la fonction

$$\begin{aligned} g_a\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x \end{aligned} \tag{12.1278}$$

vérifie l'équation fonctionnelle (12.1271). Nous pouvons nous demander à quel point cette propriété caractérise la fonction puissance.

PROPooJDPEooYTDVtU

Proposition 12.458 ([468]).
Encore plusieurs résultats sur la fonction g_a avec $a > 0$.

ITEMooZJUEooVoqKul

(1) La fonction g_a vérifie l'équation fonctionnelle.

ITEMooCSQXooUDyiMq

(2) La dérivée vérifie $g'_a(0) \neq 0$.

ITEMooCKIHooNuDwrk

(3) Pour tout a, en posant $\alpha = 1/g'_a(0)$ nous avons

$$g'_{a^\alpha}(0) = 1. \tag{12.1279}$$

ITEMooQQFRooWtlViJ

(4) Il existe un unique $e > 0$ tel que

$$g'_e = g_e. \tag{12.1280}$$

ITEMooERTLooWLjlnZ

(5) Pour la valeur de e donnée en (4), la fonction g_e vérifie l'équation exponentielle (12.1272)

$$\begin{cases} g'_e = g_e & \text{(12.1281a)} \\ g_e(1) = e. & \text{(12.1281b)} \end{cases}$$

Démonstration. Un point à la fois.

(1) **Pour (1)** Le fait que g_a vérifie l'équation fonctionnelle est la proposition 12.422(3).

(2) **Pour (2)**
La formule (12.1263) de la proposition 12.451 nous assure que

$$g'_a(x) = g_a(x)g'_a(0). \tag{12.1282}$$

EQooSCDJooTvniEp

Donc $g'_a(0) = 0$ impliquerait que g_a est constante, ce qui n'est pas le cas.

(3) **Pour (3)** Par ailleurs la proposition 12.432 nous permet d'écrire

$$g_a(\alpha x) = g_{a^\alpha}(x). \tag{12.1283}$$

En dérivant des deux côtés,

$$\alpha g'_a(\alpha x) = g'_{a^\alpha}(x). \tag{12.1284}$$

EQooIHCDooGSEGNm

En posant donc $\alpha = g'_a(0)$ et en évaluant (12.1284) en $x = 0$ nous trouvons le résultat.

(4) **Pour (4), existence**
Pour les valeurs de α données par le point (3), nous avons $g'_{a^\alpha}(0) = 1$, et l'équation (12.1282) nous donne alors

$$g'_{a^\alpha}(x) = g_{a^\alpha}(x). \tag{12.1285}$$

Comme de plus $g_{a^\alpha}(0) = 1$, cette fonction vérifie bien l'équation exponentielle.

(5) **Pour (4), unicité**

Si a et b font en sorte que $g'_a = g_a$ et $g'_b = g_b$, alors nous avons aussi $g'_a(0) = g'_b(0) = 1$ à cause de (12.1282). Donc g_a et g_b vérifient l'équation de la proposition 12.456 dont la solution est unique. Donc $g_a = g_b$.

Pour tout x nous avons $g_a(x) = g_b(x)$. En particulier pour $x = 1$ nous avons $a = b$.

□

PROPooGBUPooWtWaFI

Proposition 12.459 ([468]).
Soit $a > 0$. Nous considérons l'équation fonctionnelle 12.453 et l'équation exponentielle 12.454 pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

ITEMooYHAVooWzJqBj

(1) Si f vérifie l'équation fonctionnelle, alors

$$f(q) = a^q \tag{12.1286}$$

pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

ITEMooQHOMooNVzSxn

(2) Si f vérifie l'équation fonctionnelle et est monotone, alors $f = g_a$.

ITEMooCNXOooZcrxeB

(3) Si f vérifie l'équation fonctionnelle et est continue, alors $f = g_a$.

Démonstration. En beaucoup de parties. Nous commençons par prouver (1). Nous supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle[176].

(1) $f(x) \geqslant 0$ Quel que soit $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geqslant 0. \tag{12.1287}$$

Vous noterez que cet argument ne fonctionne pas si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$.

(2) **Pour $n \in \mathbb{N}$** Soit $n \in \mathbb{N}$. Je vous laisse rédiger la récurrence correctement, mais l'idée est que $f(1) = a$ et ensuite que

$$f(n+1) = f(n)f(1) = f(1)^n f(1) = f(1)^{n+1}. \tag{12.1288}$$

(3) **Pour $m \in \mathbb{Z}$** Nous avons d'une part que $f(-m+m) = f(0) = 1$, mais d'autre part que $f(-m+m) = f(-m)f(m)$. Donc $1 = f(-m)f(m)$; et nous concluons que

$$f(-m) = \frac{1}{f(m)}. \tag{12.1289}$$

(4) **Pour $q = 1/n$** Nous savons que $f(1) = a$, mais $1 = \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}$ (avec n termes), donc

$$a = f(\frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})^n. \tag{12.1290}$$

Cela implique que $f(\frac{1}{n})^n = a$. La proposition 12.404 indique qu'il existe un unique $x > 0$ tel que $x^n = a$. Vu que nous savons déjà que f est partout positive[177], cette contrainte fixe $f(1/n)$ et la définition 12.405 nous permet d'écrire

$$f(\frac{1}{n}) = a^{1/n}. \tag{12.1291}$$

(5) **Pour $q \in \mathbb{Q}$** Nous posons $q = m/n$. Le nombre q peut être écrit sous la forme $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$ avec m termes. Donc

$$f(\frac{m}{n}) = f(\frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})^m = (a^{1/n})^m = a^{m/n} \tag{12.1292}$$

où nous avons utilisé le lemme 12.411.

La preuve de (1) est terminée.

[176] Bien que ce ne soit pas strictement nécessaire ici, nous rappelons qu'une telle fonction existe par la proposition 12.458.
[177] C'est ici que l'hypothèse de fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ est cruciale. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ceci ne fonctionne pas, et de loin.

(1) **Démonstration de (2)** Nous faisons maintenant la preuve de (2). Nous supposons que f vérifie l'équation fonctionnelle et qu'elle est monotone. Pour fixer les idées, nous supposons qu'elle est monotone croissante[178].

Nous considérons les parties[179]

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } q < x\} \tag{12.1293a}$$
$$B = \{q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } q > x\}. \tag{12.1293b}$$

Vu que f est croissante, nous avons $f(x) \geqslant f(q)$ pour tout $q \in A$ et $f(x) \leqslant f(q)$ pour tout $q \in B$. En passant au supremum et à l'infimum,

$$\sup_{q\in A} f(q) \leqslant f(x) \leqslant \inf_{q\in B} f(q). \tag{12.1294}$$

Mais il existe dans A une suite strictement croissante convergente q_i vers x (parce que $x = \sup(A)$), donc

$$a^x = \lim_i a^{q_i} \tag{12.1295}$$

par la définition 12.421. Et de même, il existe une suite r_i décroissante dans B telle que $x = \lim r_i$. Cette suite donne aussi

$$a^x = \lim_i a^{r_i}. \tag{12.1296}$$

Nous avons donc l'encadrement

$$a^x \leqslant f(x) \leqslant a^x, \tag{12.1297}$$

qui implique que $f(x) = a^x$.

(2) **Démonstration de (3)**

Nous ne supposons plus que f est monotone. Au lieu de cela nous supposons qu'elle est continue. Nous avons déjà vu en (1) que $f = g_a$ sur $\mathbb{Q}$. Mais par hypothèse f est continue et par la proposition 12.422, g_a est continue. La proposition 12.64 conclut que $f = g_a$ sur $\mathbb{R}$.

□

PROPooLTLWooBGcXAZ

Proposition 12.460 ([468]).
Soit $a \in \mathbb{R}$.

ITEMooJDMKooAfUWnv

(1) Si elle existe, une solution y à l'équation différentielle EQooSJBOooWbgvDg

$$\begin{cases} y' = y & \text{(12.1298a)} \\ y(1) = a. & \text{(12.1298b)} \end{cases}$$

est nulle soit sur tout $\mathbb{R}$ soit nulle part.

ITEMooYPYAooHtCflq

(2) L'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = y & \text{(12.1299a)} \\ y(1) = a. & \text{(12.1299b)} \end{cases}$$

possède une unique solution $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Cette solution est donnée par

$$y(x) = \frac{a}{e} e^x \tag{12.1300}$$ EQooNHOOooLLGzRR

où e est la constante définie en 12.458(4).

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Supposons que y est une solution non identiquement nulle. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $y(x_1) \neq 0$. Alors en posant

$$z(x) = \frac{y(x + x_1)}{y(x_1)} \tag{12.1301}$$

nous avons $z' = z$ et $z(0) = 1$. Le lemme 12.455 nous dit alors que z ne s'annule pas. Donc y non plus.

[178] Si f est monotone décroissante, soit vous adaptez la preuve, soit vous essayez de voir si on ne peut pas recycler le cas croissant en l'appliquant à $-f$.
[179] Il du meilleur gout de citer le lemme 1.556 pour dire qu'ils sont non vides.

(2) **Pour (2), existence** Si $a = 0$ alors nous avons la solution $y = 0$ qui fonctionne. Sinon, il suffit de vérifier que (12.1300) fonctionne. C'est le cas grâce à la proposition 12.458 et au fait que $y = \frac{a}{e} g_e$.

(3) **Pour (2), unicité** Si $a = 0$ alors le point (1) dit que l'unique solution est $y = 0$. Si $a \neq 0$ alors nous savons qu'aucune solution ne s'annule où que ce soit, et nous pouvons travailler.

Nous supposons que y et g sont des solutions du problème (12.1298). En posant $h_1(x) = y(x)y(-x)$ et en dérivant nous trouvons que h est constante. Nous posons $A = h(x)$. En particulier pour $x = 1$ nous avons $y(1) = a$ et donc

$$A = h(1) = ay(-1). \tag{12.1302}$$

Nous faisons de même avec $h_2(x) = g(x)y(-x)$. Nous trouvons de même que h_2 est constante et nous posons $h_2(x) = B$. En évaluant en $x = 1$ nous trouvons

$$B = h_2(1) = ay(-1), \tag{12.1303}$$

de telle sorte que $A = B$.

Nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{h_2(x)}{y(-x)} && \text{(12.1304a)}\\ &= \frac{B}{y(-x)} && \text{(12.1304b)}\\ &= B\frac{y(x)}{A} && \text{(12.1304c)}\\ &= y(x). && \text{(12.1304d)} \end{aligned}$$

Notons que ce calcul est possible parce que $y(-x) \neq 0$ pour tout x. D'où l'importance du point (1).

□

12.39.3 Dérivation de la fonction puissance (seconde)

La proposition suivante donne la dérivée de $x \mapsto x^q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. La formule donnée est encore valable pour $x \mapsto x^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, mais elle demandera plus de théorie pour être démontrée, voir la proposition 14.295.

PROPooSGLGooIgzque

Proposition 12.461 ([1]).
Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, si $f_\alpha(x) = x^\alpha$ alors

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{12.1305}$$

En particulier, f_α est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Démonstration. Petit à petit.

(1) **Naturel** Nous prouvons que $(x^n)' = nx^{n-1}$ par récurrence en utilisant la règle de Leibniz de la propositon 12.194(3).

D'abord pour $n = 1$ nous avons $f_1(x) = x$ et donc

$$f'_1(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(x+\epsilon) - x}{\epsilon} = 1. \tag{12.1306}$$

Supposons que $f'_k(x) = kx^{k-1}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Nous prouvons que $f'_{k+1}(x) = (k+1)x^k$. Nous avons

$$x^{k+1} = xx^k. \tag{12.1307}$$

En utilisant la règle de Leibniz et l'hypothèse de récurrence,

$$\big(x^{k+1}\big)' = (x)'x^k + x\big(x^k\big)' = x^k + x\big(kx^{k-1}\big) = x^k + kx^k = (k+1)x^k, \tag{12.1308}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(2) **Rationnel positif** Soit donc $\alpha = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Le lemme 12.411 nous permet d'écrire $f_{p/q}(x) = x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$. Cela donne

$$f_{p/q}(x)^q = x^p. \tag{12.1309}$$

Nous dérivons cette relation par rapport à x en utilisant à la fois la règle pour les entiers et la règle des fonctions composées[180] :

$$qf'_{p/q}(x)^{q-1}f_{p/q}(x) = px^{p-1}. \tag{12.1310}$$

En isolant $f'_{p/q}(x)$ dans cette expression et en utilisant le fait que $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$, nous trouvons le résultat.

(3) **Rationnels négatifs**

Soit $\alpha = -p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Nous avons $x^{-p/q} = \frac{1}{f_{p/q}(x)}$. En utilisant la proposition 12.194(5) et le point déjà prouvé sur les rationnels positifs,

$$f'_{p/q} = -\frac{f'_{-p/q}}{f^2_{p/q}} = -\frac{(-p/q)x^{-p/q-1}}{x^{-2p/q}} = (p/q)x^{p/q-1}. \tag{12.1311}$$

Notez l'utilisation de la proposition 12.432 au dénominateur.

(4) **Irrationnel**

Ah ah ! On vous a bien eu. Les irrationnels, c'est pour la proposition 14.295.

En ce qui concerne le fait que la fonction f_α est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, c'est simplement une récurrence. Attention : si le rationnel α est négatif, $f_\alpha(0)$ n'est pas défini. Mais, lorsque α est positif non entier, à partir d'un certain ordre, les dérivées font intervenir x^β avec $\beta < 0$. D'où la restriction à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ du domaine sur lequel f_α est de classe C^∞.

Si α est positif entier, alors f_α est de classe C^∞ sur tout $\mathbb{R}$ parce que toutes les dérivées sont nulles à partir d'un certain ordre. □

12.39.4 Vers les complexes

Nous avons déjà vu la proposition 12.458 qui dit essentiellement que si une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $f(x + y) = f(x)f(y)$, alors $f(x) = a^x$. Comme indiqué durant la preuve, cette proposition (et en particulier sa preuve) ne fonctionne pas pour les fonctions à valeurs complexes. L'endroit où cela coinçait est que la contrainte

$$f(\frac{1}{n})^n = a \tag{12.1312}$$

n'implique pas grand chose lorsque f est à valeurs complexes.

Nous allons maintenant attaquer ce problème.

LEMooDEGEooXheixp

Lemme 12.462.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si elle existe, la solution au problème

$$\begin{cases} y' = \alpha y & \text{(12.1313a)} \\ y(0) = 1 & \text{(12.1313b)} \end{cases}$$

pour $y : \mathbb{R} \to S^1$ est unique.

Démonstration. Soient deux solutions y_1 et y_2. Nous posons $h(x) = y_1(x)y_2(-x)$. Une dérivation donne

$$h'(x) = y'_1(x)y_2(-x) - y_1(x)y'_2(-x). \tag{12.1314}$$

En y substituant $y'_1(x) = \alpha y_1(x)$ et $y'_2(-x) = \alpha y_2(x)$ nous trouvons $h'(x) = 0$. Donc h est constante et nous avons

EQooTWBQooBLLKSt

$$y_1(x)y_2(-x) = 1 \tag{12.1315}$$

pour tout x. Notons que cette identité est encore valable avec $y_1 = y_2$. Nous avons en particulier les égalités $y_1(x)y_1(-x) = 1$ et $y_2(x)y_2(-x) = 1$, et nous notons au passage que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne s'annulent pas.

En substituant dans (12.1315) la valeur $y_2(-x) = \frac{1}{y_2(x)}$ nous trouvons

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = 1, \tag{12.1316}$$

ce qui signifie $y_1(x) = y_2(x)$. □

[180] Proposition 12.194(4).

Dans la proposition suivante, S^1 désigne l'ensemble des nombres complexes de norme 1, dont un paramétrage sera donné dans la proposition 18.62(1) :

$$S^1 = \{e^{ix} \text{ tel que } x \in \mathbb{R}\} = \{e^{ix} \text{ tel que } x \in [0, 2\pi[\}. \tag{12.1317}$$

PROPooVJLYooOzfWCd

Proposition 12.463 ([1]).
Soit une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ vérifiant

$$f(x+y) = f(x)f(y). \tag{12.1318}$$

EQooHANKooHirpTL

Alors

(1) f est dérivable,

(2) f satisfait au système

$$\begin{cases} f'(x) = f'(0)f(x) & \text{(12.1319a)} \\ f(0) = 1, & \text{(12.1319b)} \end{cases}$$

(3) il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{imx}$.

Démonstration. Pour chaque $m \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g_m(x) = e^{imx} \tag{12.1320}$$

vérifie évidemment toutes les conditions. Le but de cette démonstration est de montrer que les conditions imposées à f la déterminent de façon univoque (à part ce m).

La condition (12.1318) nous dit que $f(0) = 1$. Soit une primitive F de f. Il existe $s > 0$ tel que $F(s) > F(0)$ parce que $F' = f$ et $f(0) = 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction G_a donnée par $G_a(x) = F(x+a)$ est une primitive de $x \mapsto f(x)f(a)$. Donc $G_a(x) = f(a)F(x)$. Cela dit nous avons

$$f(x)\big(F(s) - F(0)\big) = f(x)F(s) - f(x)F(0) = G_1(x) - G_0(x). \tag{12.1321}$$

Le membre de droite est évidemment dérivable, et $F(s) - F(0) \neq 0$. Donc f est dérivable.

Nous dérivons maintenant la relation $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à y en $y = 0$. Cela donne

$$f'(x) = f'(0)f(x). \tag{12.1322}$$

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f'(x) = \alpha f(x)$.

Jusqu'ici nous avons prouvé qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{cases} f'(x) = \alpha f(x) & \text{(12.1323a)} \\ f(0) = 1. & \text{(12.1323b)} \end{cases}$$

Or le lemme 12.462 donne l'unicité de la solution à ce système, et il ne faut pas chercher loin : la solution est

$$f(x) = e^{\alpha x}. \tag{12.1324}$$

Pour avoir $f(x) \in S^1$, nous devons de plus imposer que α soit imaginaire pur. Donc, en posant $\alpha = im$, nous avons $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{imx}$. □

12.40 Polynômes de Taylor

DEFooCAqZooTaylorHolR

Définition 12.464.
*Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-**analytique** sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe une suite complexe (c_n) et $r > 0$ tels que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{12.1325}$$

pour tout $z \in B(z_0, r)$.

Définition 12.465.
*Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si il existe, nous définissons le n^e **polynôme de Taylor** de f au point $a \in \mathbb{R}$ par*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{12.1326}$$

*Et la **série de Taylor** de f est la limite :*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{12.1327}$$

dans la mesure où la somme converge.

Tant que f est n fois dérivable, le polynôme P_n existe et vérifie $P_n(a) = f(a)$. Nous ne pouvons rien en dire de plus pour l'instant. En particulier, si f est de classe C^∞ il ne faudrait pas croire que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \tag{12.1328}$$

pour tout x dans un voisinage de a. Autrement dit, même si toutes les dérivées de f existent, la série entière T n'est pas garantie de

- un rayon de convergence[181] plus grand que zéro,
- et même avec un grand rayon de convergence, que la limite soit les valeurs de f.

NORMooADIZooUmevqk

12.466.
Il n'est pas très compliqué de construire une fonction f telles que $f(0) = 0$ et telle que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k, sans pour autant que f soit nulle partout (voir les fonctions plateaux 15.14.1). Les polynômes de Taylor d'une telle fonction sont tous identiquement nuls.

Ceci pour dire qu'en posant

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k, \tag{12.1329}$$

nous n'avons aucune garantie de $T = f$, même pas sur le rayon de convergence de la série entière définissant P. Et nous n'avons pas de garanties d'avoir un rayon de convergence plus grand que 0.

Notons toutefois que les polynômes étant denses pour la norme supremum parmi les fonctions continues[182], pour tout compact, il existe une suite de polynômes qui converge uniformément uniformément f. Mais ces polynômes ne sont pas spécialement ceux de Taylor.

12.467.
Ce que nous venons de dire en 12.466 n'est pas vrai pour les fonctions analytiques[183]. Une fonction analytique $f : \Omega \to \mathbb{R}$ s'écrit, autour de 0, sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{12.1330}$$

Demander $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k implique $a_n = 0$ pour tout n, et donc $f = 0$ sur un voisinage de 0.

La condition d'analycité est donc très rigide.

Le théorème de Taylor que nous démontrons à présent n'est pas un résultat que va dans le sens de $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$. C'est un résultat qui dit juste que $\lim_{x\to a} P_n(x) = f(a)$, et que la limite va d'autant plus vite que n est grand.

Le théorème de Taylor généralise le développement limité au premier ordre de la proposition 10.293.

12.468.
Lorsque le contexte n'est pas ambigu, nous notons simplement P_n le polynôme d'ordre n de f au point a. De même nous notons le reste

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \tag{12.1331}$$

[181] Définition 15.12.
[182] Théorème 12.446.
[183] Définition 12.464 qu'il faut écrire pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$

PROPooUYCMooQjeXpn

Proposition 12.469 ([472]).
Soit une fonction f qui est n fois dérivable sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant a. Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \tag{12.1332}$$

où P_n est le n^e polynôme de Taylor de f autour de $x = a$.

Démonstration. Pour tout $k = 0, \dots, n$ nous avons $f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a)$ et donc

$$R_n^{(k)}(a) = 0 \tag{12.1333}$$

pour $k = 0, \dots, n$. En posant d'autre part $s(x) = (x-a)^n$ nous avons $s^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$. Par conséquent la règle de L'Hôpital de la proposition 12.219 s'applique au quotient $R_n(x)/s(x)^n$. En l'utilisant n fois,

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{s(x)} = \lim_{x\to a} \frac{R^{(k)}(x)}{k!(x-a)^0} = \frac{0}{k!} = 0. \tag{12.1334}$$

□

Nous démontrons à présent que le polynôme de Taylor est le seul à avoir la propriété de la proposition 12.469.

Proposition 12.470 ([472]).
Soit f, une fonction n fois dérivable sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. Soit un polynôme Q de degré n (ou moins) tel que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{12.1335}$$

EQooXPTIooOZqBaD

Alors Q est le polynôme de Taylor de degré n pour f en a ci-après simplement noté P_n.

Démonstration. D'après la proposition 12.469, la fonction $f - P_n$ vérifie la même limite que $f - Q$. Donc $P_n - Q$ vérifie également la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(P_n-Q)(x)}{x^n} = 0. \tag{12.1336}$$

EQooYBHHooEgZxtk

Nous notons $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$. La relation (12.1336) donne en particulier

$$\lim_{x\to 0}(P_n - Q)(x) = 0 \tag{12.1337}$$

qui donne $a_0 - b_0 = 0$. Nous continuons par récurrence en supposant que $a_i = b_i$ pour $i = 0, \dots, k$. Alors

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{(P_n-Q)(x)}{x^{k+1}} = \lim_{x\to 0} \sum_{l=k+1}^n (a_l - b_l)x^{l-(k+1)}. \tag{12.1338}$$

Le seul terme non nul à droite est celui vérifiant $l - (k+1) = 0$. Et ce terme donne l'équation

$$a_{k+1} - b_{k+1} = 0, \tag{12.1339}$$

c'est-à-dire $a_{k+1} = b_{k+1}$. La récurrence continue ainsi jusqu'à $k = n$, et nous pouvons conclure que $Q = P_n$. □

L'intérêt de cette proposition est que si l'on trouve, par n'importe quel moyen, un polynôme Q vérifiant la condition (12.1335), alors nous savons que c'est le polynôme de Taylor.

ThoTaylor

Théorème 12.471 (Théorème de Taylor[373, 473]).
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ ainsi que $a \in I$. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors il existe une fonction α définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

SubEqsDevTaull

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \alpha(x)(x-a)^n, \tag{12.1340a}$$

subeqfTepseqb

$$\lim_{t\to a} \alpha(t) = 0 \tag{12.1340b}$$

pour tout $x \in I$. Ici $f^{(k)}$ dénote la k-ième dérivée de f (en particulier, $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$).

Démonstration. Si $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, il suffit de poser

$$\alpha(x) = \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \tag{12.1341}$$

et d'utiliser la proposition 12.469. □

Remarque 12.472.
Quelque remarques.

(1) La formule (12.1340a) est une égalité, et non une approximation. Ce qui serait une approximation serait de réécrire la formule dans le terme contenant α.

(2) Nous avons l'égalité (12.1340a) uniquement sur I. Pour les x hors de I, le polynôme existe évidemment, mais nous n'avons pas spécialement de fonction α, et d'ailleurs la fonction f n'est pas spécialement définie.

12.473.
Les conditions (12.1340) sont souvent aussi énoncées sous la forme qu'il existe une fonction α telle que SUBEQooPYABo

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t)}{t^n} = 0 & \text{(12.1342a)} \\ f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \alpha(h). & \text{(12.1342b)} \end{cases}$$

Le théorème suivant donne une expression pas tout à fait explicite, mais pas mal quand même pour le reste de Taylor.

THOooSIGRooJTLvlV

Théorème 12.474.
Soient un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ ainsi que $a \in I$. Soit encore une fonction de classe C^{k+1} sur I.

(1) Pour tout $x \in I$, il existe un $c \in]a, x[$ tel que l'égalité

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{12.1343}$$ EQooQFMFooBVpGzv

soit vérifiée. ITEMooVGBVooGXXvIz

(2) Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{B(a,h)} \subset I$. Il existe $\theta \in [0,1]$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}. \tag{12.1344}$$

Démonstration. Pour les besoins de la preuve, nous allons démontrer la formule (12.1343) pour un $b \in I$ au lieu de x. C'est juste que nous allons écrire b au lieu de x parce que nous aurons besoin de la notation x dans le courant de la preuve.

Nous posons

$$R(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{12.1345}$$

Cela vérifie $R(a) = f(a) - f(a) = 0$ et même

$$R^{(j)}(a) = 0 \tag{12.1346}$$

pour tout $j = 1, \ldots, n$. Nous posons encore

$$F(x) = R(x) - \frac{R(b)}{(b-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1}. \tag{12.1347}$$

Nous avons $F^{(j)}(a) = 0$ pour tout $j = 0, \ldots, n$ ainsi que

$$F(b) = R(b) - \frac{R(b)}{(b-a)^{n+1}}(b-a)^{n+1} = 0. \tag{12.1348}$$

et aussi

$$F(a) = R(a) - 0 = 0. \tag{12.1349}$$

Bref, la fonction F vérifie les conditions de la généralisation 12.215 du lemme de Rolle. Il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $F^{(n+1)}(c)=0$. Mais vu que $P_n^{(n+1)}(x)=0$, nous avons $R^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$, de telle sorte que

$$f^{(n+1)}(c)=\frac{R(b)(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}. \tag{12.1350}$$

En injectant cela dans la définition de F

$$F(x)=R(x)-\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{12.1351}$$

En évaluant en $x=b$, et en nous souvenant que $F(b)=0$, nous trouvons

$$0=R(b)-\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{12.1352}$$

qui est ce que nous voulions prouver. □

Voici un énoncé pour les fonctions à plusieurs variables.

THOooTDFRooEkChgi

Théorème 12.475 ([474]).
Si $f\colon E\to\mathbb{R}$ est une application n fois différentiable en $a\in E$ alors il existe une fonction $\epsilon\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h)+\ldots+ & \text{(12.1353a)}\\ \qquad +\ldots+\frac{1}{n!}(d^nf)_a(h,\ldots,h)+\|h\|^n\epsilon(\|h\|) & \text{(12.1353b)}\\ \lim_{t\to0}\epsilon(t)=0. & \text{(12.1353c)}\end{cases}$$

12.40.1 Fonctions « petit o »

Nous voulons formaliser l'idée d'une fonction qui tend vers zéro « plus vite » qu'une autre. Nous disons que $f\in o\big(\varphi(x)\big)$ si

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0. \tag{12.1354}$$

En particulier, nous disons que $f\in o(x)$ lorsque $\lim_{x\to0}f(x)/x=0$.

En termes de notations, nous définissons l'ensemble $o(x)$ l'ensemble des fonctions f telles que

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0. \tag{12.1355}$$

Plus généralement si g est une fonction telle que $\lim_{x\to0}g(x)=0$, nous disons $f\in o(g)$ si

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=0. \tag{12.1356}$$

De façon intuitive, l'ensemble $o(g)$ est l'ensemble des fonctions qui tendent vers zéro « plus vite » que g.

Nous pouvons donner un énoncé alternatif au théorème 12.471 en définissant $h(x)=\epsilon(x+a)x^n$. Cette fonction est définie exprès pour avoir

$$h(x-a)=\epsilon(x)(x-a)^n, \tag{12.1357}$$

et donc

$$\lim_{x\to0}\frac{h(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\epsilon(x-a)=\lim_{x\to a}\epsilon(x)=0. \tag{12.1358}$$

Donc $h\in o(x^n)$.

Le théorème dit donc qu'il existe une fonction $\alpha\in o(x^n)$ telle que

$$f(x)=T^a_{f,n}(x)+\alpha(x-a). \tag{12.1359}$$

pour tout $x\in I$.

Remarque 12.476.
À titre personnel, l'auteur de ces lignes déconseille d'utiliser cette notation qui est un peu casse-figure pour qui ne la maîtrise pas bien.

Exemple 12.477.
Le développement en série du cosinus sera traité dans la proposition 18.76. △

PROPooTOXIooMMlghF

Proposition 12.478 (Ordre deux sur $\mathbb{R}^n$[1])**.**
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$ ainsi qu'une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h\|^2\alpha(h) & \text{(12.1360a)} \\ \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0. & \text{(12.1360b)} \end{cases}$$

Ici, la notation $(d^2f)_a(h,h)$ réfère à ce qui est expliqué en 12.373.

Démonstration. Dans la suite nous considérons t et h tels que toutes les expressions suivantes aient un sens, c'est-à-dire que tous les trucs comme $a+th$ restent dans Ω. Pour $h \in \mathbb{R}^n$ nous nommons e_h le vecteur unitaire dans la direction de h, c'est-à-dire $e_h = h/\|h\|$ et nous posons

$$k_h(t) = f(a + te_h). \tag{12.1361}$$

et nous lui appliquons Taylor 12.471 à l'ordre deux : il existe une fonction β_h telle que

$$k_h(x) = k_h(0) + xk_h'(0) + \frac{x^2}{2}k_h''(0) + x^2\beta_h(x). \tag{12.1362}$$

EQooETDFooAmiRcV

avec $\lim_{x\to 0}\beta_h(x) = 0$.

En ce qui concerne les dérivées de k_h nous avons

$$k_h'(0) = df_a(e_h) \tag{12.1363}$$

et

$$k_h''(0) = (d^2f)_a(e_h, e_h). \tag{12.1364}$$

Il est maintenant temps d'écrire $f(a+h) = k(\|h\|)$ et de substituer les dérivées de k par les différentielles de f dans (12.1362) :

$$f(a+h) = k(\|h\|) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h^2\|\beta_h(\|h\|). \tag{12.1365}$$

EQooUSUGooYPscxV

Il reste à voir que la fonction $\alpha\colon h \mapsto \beta_h(\|h\|)$ tend vers zéro pour $h \to 0$. En prenant la limite $h \to 0$ dans (12.1365), il est manifeste que la limite du membre de gauche existe et vaut $f(a)$. Donc la limite du membre de droite doit exister et valoir également $f(a)$. Nous en déduisons que la limite de

$$df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h\|^2\beta_h(\|h\|) \tag{12.1366}$$

existe et vaut zéro. La limite des deux premiers termes existe et vaut zéro, donc la limite du troisième existe et vaut zéro :

$$\lim_{h\to 0} \|h\|^2\beta_h(\|h\|) = 0. \tag{12.1367}$$

□

PROPooWWMYooPOmSds

Proposition 12.479.
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et deux fois différentiable sur $]x, x+h[$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_{x+\theta h}(h,h). \tag{12.1368}$$

12.40.2 Autres formulations

ExempleUtlDev

Exemple 12.480.
Une des façons les plus courantes d'utiliser les formules (12.1340) est de développer $f(a+t)$ pour des petits t en posant $x = a+t$ dans la formule :

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + f''(a)\frac{t^2}{2} + \epsilon(a+t)t^2 \tag{12.1369}$$

EqDevfautouraeps

avec $\lim_{t\to 0}\epsilon(a+t)=0$. Ici, la fonction T dont on parle dans le théorème est $T^a_{f,2}(a+t)=f(a)+f'(a)t+f''(a)\frac{t^2}{2}$.

Lorsque x et y sont deux nombres « proches[184] », nous pouvons développer $f(y)$ autour de $f(x)$:

$$f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+f''(x)\frac{(y-x)^2}{2}+\epsilon(y-x)(y-x)^2, \tag{12.1370}$$ Eqfydevfx

et donc écrire

$$f(x)-f(y)=-f'(x)(y-x)-f''(x)\frac{(y-x)^2}{2}-\epsilon(y-x)(y-x)^2. \tag{12.1371}$$

De cette manière nous obtenons une formule qui ne contient plus que y dans la différence $y-x$. △

12.40.3 Formule et reste

PropDevTaylorPol

Proposition 12.481.
Soient $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathrm{Int}(I)$. Soit un entier $k\geqslant 1$. Si f est k fois dérivable en a, alors il existe un et un seul polynôme P de degré $\leqslant k$ tel que

$$f(x)-P(x-a)\in o\big(|x-a|^k\big) \tag{12.1372}$$

lorsque $x\to a$, $x\neq a$. Ce polynôme est donné par

$$P(h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k. \tag{12.1373}$$

Notons encore deux façons alternatives d'écrire le résultat. Si $f\in C^k$ il existe une fonction α telle que $\lim_{t\to 0}\alpha(t)=0$ et

$$f(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^n\alpha(x-a). \tag{12.1374}$$

Si $f\in C^{k+1}$ alors

$$f(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^{n+1}\xi(x-a) \tag{12.1375}$$ EquQtpoN

où ξ est une fonction telle que $\xi(t)$ tend vers une constante lorsque $t\to 0$.

La proposition suivante donne une intéressante façon de trouver le reste d'un développement de Taylor.

PropResteTaylorc

Proposition 12.482.
Soient I, un intervalle dans $\mathbb{R}$ et $f\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^k sur I telle que $f^{(k+1)}$ existe sur I. Soient $a\in\mathrm{Int}(I)$ et $x\in I$. Alors il existe $c\in\,]x,a[$ tel que

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{12.1376}$$

12.40.4 Reste intégral

Comme son nom l'indique, le « reste intégral » demande de savoir les intégrales. La formule du reste intégral sera donc pour après la définition des intégrales, proposition 20.149.

12.41 Développement limité autour de zéro

Dans cette sections nous supposons toujours que les fonctions sont définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, I, contenant 0.

[184] par exemple dans une limite $(x,y)\to(h,h)$.

12.41.1 Généralités

Définition 12.483.
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert I autour de zéro. Nous disons que f admet un **développement limité** autour de 0 à l'ordre n si il existe une fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + x^n\alpha(x) & (12.1377a) \\ \lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0 & (12.1377b) \end{cases}$$

*où $P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ est une polynôme de degré n. Le polynôme P_n est appelé la **partie régulière** du développement.*

La fonction α est appelé le **reste** du développement et sera parfois noté α_f. Lorsque P est la partie régulière d'un développement limité de f nous notons parfois $f \sim P$.

Proposition 12.484 (Troncature)**.**
Si f admet un développement limité d'ordre n alors il admet également un développement limité d'ordre n' pour tout $n' < n$. Ce dernier s'obtient en tronquant le polynôme d'ordre n à l'ordre n'.

Proposition 12.485 (Unicité)**.**
Si f admet une développement limité alors ce dernier est unique : il existe un unique polynôme P_n d'ordre n et une unique fonction α vérifiant simultanément les deux conditions

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + x^n\alpha(x), & (12.1378a) \\ \lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0. & (12.1378b) \end{cases}$$

ExTHGooCBcnAy

Exemple 12.486.
En ce qui concerne les séries géométriques de raison x nous savons les formules

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{12.1379}$$

et

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x} \tag{12.1380}$$

pour tout $x \in]-\infty, 1[$. Comparant les deux, il est naturel d'essayer de prendre $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ comme développement limité de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Pour voir si cela fonctionne, il faut vérifier si « le reste » est bien de la forme $x^n\alpha(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$.

Le reste en question est donné par

$$\frac{1}{1 - x} - 1 - x - x^2 - \ldots - x^n = \frac{1}{1 - x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1}}{1 - x} = x^n\frac{x}{1 - x}. \tag{12.1381}$$

En posant $\alpha(x) = \frac{x}{1-x}$ nous avons donc bien

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\frac{x}{1 - x} \tag{12.1382}$$

et $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$. Cela est le développement limité de f à l'ordre n autour de 0. △

La formule des accroissements finis est un cas particulier de développement fini. Supposons que f soit dérivable en 0. En effet nous pouvons facilement trouver la fonction α qui convient. Sachant que $f(0)+xf'(0)$ donne l'approximation affine de f autour de 0, nous cherchons α en écrivant

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\alpha(x). \tag{12.1383}$$

Cela nous pousse à définir

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0). \tag{12.1384}$$

EqDCFooKozKrt

Notons que cette fonction n'est pas définie en $x = 0$, mais cela n'a pas d'importance : seule la limite $\lim_{x\to 0} \alpha(x)$ nous intéresse. Par définition de la dérivée,

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) = 0. \tag{12.1385}$$

En conclusion si f est dérivable, son développement limité à l'ordre 1 est donné par

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\alpha(x) \tag{12.1386}$$

où $\alpha(x)$ est donnée par la formule (12.1384).

12.41.2 Formule de Taylor-Young

Plus généralement nous avons la proposition suivante qui donne le développement limité de toute fonction dérivable n fois.

PropVDGooCexFwy

Proposition 12.487 (Formule de Taylor-Young)**.**
Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant 0. Alors il existe une fonction $\alpha\colon I\to\mathbb{R}$ telle que

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+x^n\alpha(x) \tag{12.1387}$$

EQooBKZDooTqYyIB

et

$$\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0. \tag{12.1388}$$

Cette proposition nous permet de calculer facilement des développements limités tant que nous sommes capables de calculer les dérivées successives de la fonction à développer. Dans l'exemple 12.486 nous avons dû utiliser des astuces et des formules pour déterminer le développement limité de $\frac{1}{1-x}$. Au contraire la formule (12.1387) nous permet de trouver le polynôme en appliquant mécaniquement une formule simple.

Exemple 12.488.
Utilisation de la formule (12.1387) pour déterminer le développement limité de la fonction

$$f(x)=\frac{1}{1-x}. \tag{12.1389}$$

Il faut calculer les dérivées successives de f :

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \tag{12.1390a}$$
$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \tag{12.1390b}$$
$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3} \tag{12.1390c}$$

Avec ces résultats, nous devinons que

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}. \tag{12.1391}$$

Pour en être sûr nous le prouvons par récurrence. La dérivée de $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ est donnée par

$$\frac{n!(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}}=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}. \tag{12.1392}$$

Évaluées en $x=0$, les dérivées successives de f sont $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$,...,$f^{(n)}(0)=n!$. Utilisant la formule (12.1387) nous avons

$$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\alpha(x), \tag{12.1393}$$

conformément à ce que nous avions déjà trouvé. △

EXooFLBJooYfuRsG

Exemple 12.489.
Soient $r\in\mathbb{Q}$ et la fonction donnée par

$$f(x)=(1+x)^r. \tag{12.1394}$$

Nous notons I le domaine de cette fonction : c'est $\mathbb{R}$ si $r>0$ ou $[-1,\infty]$ si $r<0$. Si par contre $r=0$, la fonction est constante et le domaine est $I=\mathbb{R}$.

En ce qui concerne les dérivées[185] : $f'(x)=r(1+x)^{r-1}$ et plus généralement

$$f^{(k)}(x)=r(r-1)\dots(r-k+1)(1+x)^{r-k} \tag{12.1395}$$

si $k>0$. Pour $k=0$ nous avons $f^{(k)}(0)=1$. Le développement de Taylor-Young est alors

$$(1+x)^r=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}x^k+x^n\alpha(x). \tag{12.1396}$$

[185] Nous utilisons la proposition 12.461.

Notons que que si r est un entier, pour $k = r$, le produit au numérateur s'annule et le développement s'arrête.

Dans le développement de $(1+x)^r$, nous reconnaissons la formule de $\binom{r}{k}$, sauf que nous ne pouvons pas l'écrire avec cette notation lorsque r n'est pas entier. △

Cet exemple fonctionnera encore avec $r \in \mathbb{R}$ au lieu de $r \in \mathbb{Q}$, mais il faudra la proposition 15.107 pour la dérivée

Remarque 12.490.
Pour alléger la notation et ne pas écrire $\dots + x^n\alpha(x)$ nous pouvons aussi écrire

$$f(x) \sim 1 + x + x^2 + \cdots + x^n, \tag{12.1397}$$

mais il est interdit d'écrire

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \tag{12.1398}$$

en mettant un signe d'égalité entre une fonction et son développement limité[186].

Notons cependant que la proposition 12.487 ne donne pas de moyen simple de trouver la fonction α. Si la fonction f est très régulière dans l'intervalle I on a le résultat suivant.

Proposition 12.491 (Reste dans la forme de Lagrange)**.**
Si la fonction f est dérivable $n+1$ fois dans I alors il existe $\bar{x}$ dans l'intervalle $[0, x]$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\bar{x}) x^{n+1}. \tag{12.1399}$$

12.41.3 Règles de calcul

Les règles suivantes permettent de calculer les développements limités des fonctions qu'on peut écrire comme combinaison de fonctions dont nous savons déjà le développement.

Il est toujours possible de calculer le développement limité d'une fonction par la formule de Taylor-Young (proposition 12.487). Les règles suivantes peuvent nous économiser de l'effort et du temps.

12.41.3.1 Linéarité des développements limités

L'opération qui consiste à prendre le développement limité d'une fonction est une opération linéaire : connaissant les développements limités de f et de g, il suffit de les sommer pour obtenir celui de $f+g$. De même, si λ est une constante, le développement limité de λf est le développement limité de f fois λ.

PROPooAUVPooGRIZYF

Proposition 12.492.
Soient λ et μ dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont deux fonctions acceptant des développements limités d'ordre n EqJPPooCHihNn

$$f(x) = P(x) + x^n\alpha_f(x) \tag{12.1400a}$$
$$g(x) = Q(x) + x^n\beta(x) \tag{12.1400b}$$

avec $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = \lim_{x\to 0}\beta(x) = 0$, alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet le développement limité

$$(\lambda f + mug)(x) = (\lambda P + \mu Q)(x) + x^n(\lambda\alpha + \mu\beta)(x). \tag{12.1401}$$ EqCJFooVpyCtz

Remarque 12.493.
La forme explicite du reste ne nous interesse pas. Dans la pratique on écrira toujours $(f+g)(x) = (P+Q)(x) + x^n\alpha(x)$, où on appelle α une fonction opportune telle que $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$.

Démonstration. Vu les définitions (12.1400) des polynômes P, Q et des restes α et β, l'égalité (12.1401) est une conséquence de la linéarité de la dérivation et de la proposition 12.487

De plus $P+Q$ est un polynôme de degré n dès que P et Q sont des polynômes de degré n, et

$$\lim_{x\to 0}(\lambda\alpha + \mu\beta)(x) = \lim_{x\to 0}\lambda\alpha(x) + \lim_{x\to 0}\mu\beta(x) = 0. \tag{12.1402}$$

Par conséquent $\lambda\alpha + \mu\beta$ est la fonction de reste de $\lambda f + \mu g$. □

[186] Il faut cependant être très prudents avec la notation abrégée. Elle pourrait nous faire oublier des informations importantes, voir les développements des fonctions trigonométriques pour un exemple.

ExKPBooJmdFvY

Exemple 12.494.
Calculer le développement de la fonction

$$f(x)=3\sqrt[3]{1+x}+e^{-2x}. \tag{12.1403}$$

Le développement de $\sqrt[3]{1+x}$ est donné par la formule de l'exemple 12.489 avec $\alpha=\frac{1}{3}$. Nous avons donc dans un premier temps

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}x^3+x^3\alpha(x) \tag{12.1404a}$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+x^3\alpha(x). \tag{12.1404b}$$

Nous avons alors

$$3\sqrt[3]{1+x}+e^{-2x}=3\Big[1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+x^3\alpha(x)\Big]+1-2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+x^3\beta(x) \tag{12.1405a}$$

$$=4-x+\frac{5}{3}x^2-\frac{31}{27}x^3+x^3\big(\alpha(x)+\beta(x)\big). \tag{12.1405b}$$

△

La condition $\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0$ signifie que l'approximation qui consiste à remplacer $f(x)$ par le polynôme n'est pas une trop mauvaise approximation lorsque x est petit. Cela ne signifie rien de plus. En particulier si x est grand, l'approximation polynomiale peut-être (et est souvent) très mauvaise.

À ce propos, notez qu'un polynôme tend toujours vers $\pm\infty$ lorsque x est grand. Une approximation polynomiale d'une fonction bornée est donc toujours (très) mauvaise pour les grandes valeurs de x.

À titre d'exemple nous avons tracé sur la figure 12.12 la fonction

$$f(x)=3\sqrt[3]{x+1}+e^{-2x} \tag{12.1406}$$

et ses développements limités d'ordre 1 à 3. Il est particulièrement visible que l'approximation est assez bonne pour la partie gauche du graphe sur laquelle la fonction est bien croissante, alors qu'elle est franchement mauvaise sur la droite où le graphe ressemble plutôt à une constante[187].

12.41.3.2 Développement limité d'un quotient

PROPooMANAooXhuanS

Proposition 12.495.
Si P_f est le polynôme du développement limité de f à l'ordre n et P_g celui de g, alors nous obtenons le développement limité de f/g à l'ordre n en effectuant la division selon les puissances croissantes de P_f par P_g.

Attention : il s'agit bien de faire une division selon les puissances croissantes, et non une divisions euclidienne. La division euclidienne de A par B consiste à écrire $A=BQ+R$ avec le reste R de degré le plus *petit* possible. Ici nous voulons avoir un reste de degré le plus *grand* possible.

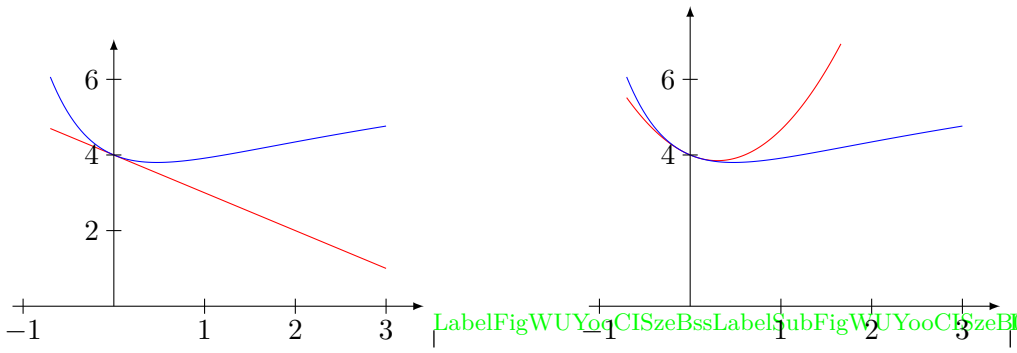
12.41.3.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 12.496.
Soient f et g des fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0. Nous supposons que $\lim_{x\to 0}g(x)=0$. Alors la composée $f\big(g(x)\big)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 qui s'obtient en substituant le développement de g à chaque «x» du développement de f, et en supprimant tous les termes de degré plus élevé que n.

12.42 Développement ailleurs qu'à l'origine

Il est intéressant de développer une fonction au voisinage de zéro lorsque nous nous intéressons à son comportement pour les x pas très grands. Il est toutefois souvent souhaitable de savoir le comportement d'une fonction au voisinage d'autres valeurs que zéro.

[187] Pouvez-vous cependant dire que vaut $\lim_{x\to\infty}f(x)$?



(a) Polyôme d'ordre 1

(b) Polyôme d'ordre 2

(c) Polyôme d'ordre 3

(d) Polyôme d'ordre 4

FIGURE 12.12 : Les développements limités d'ordre de plus en plus grand de la fonction de l'exemple 12.494. La fonction est en bleu et les « approximations » sont en rouge. LabelFigWUYooCISzeB

Pour développer la fonction f autour de x_0, nous considérons la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ que nous développons autour de zéro (pour h). L'objectif est de trouver une polynôme P et une fonction α tels que

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + (x-x_0)^n \alpha(x) & (12.1407a) \\ \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0. & (12.1407b) \end{cases}$$

En pratique, le développement limité à l'ordre n d'une fonction autour d'un point x_0 quelconque à l'intérieur de son domaine prend la forme suivante, qui généralise la formule de Taylor-Young vue dans la proposition 12.487

Proposition 12.497 (Formule de Taylor-Young, cas général)**.**
Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0. Alors il existe une fonction $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \\ + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \alpha(x-x_0) \quad (12.1408)$$

EqTJRooUbsyzJ

et

$$\lim_{t \to 0} \alpha(t) = 0. \quad (12.1409)$$

12.43 Développement au voisinage de l'infini

Il est souvent utile de connaitre le comportement d'une fonction pour les grandes valeurs de x et de déterminer ses asymptotes éventuelles. La technique que nous allons utiliser consiste à poser $x = \frac{1}{h}$ et de développer la fonction "auxiliaire" $g(h) = f(1/h)$ autour de $h = 0$. La limite avec $h \to 0^+$ donnera le comportement pour $x \to \infty$ et la limite $h \to 0^-$ donnera le comportement pour $x \to -\infty$.

Dans le cas d'une développement autour de $\pm\infty$ nous ne parlons plus de développement *limité* mais de **développement asymptotique**.

12.43.1 La fonction puissance : remarques pour la suite

Il y a encore de nombreuses choses à dire sur la fonction puissance. Pour savoir lesquelles, voir le thème 52.

12.44 Fonctions réelles de deux variables réelles

Une **fonction réelle de 2 variables réelles** est une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto z = f(x, y)$.

Le **graphe de** f, noté $\operatorname{Gr} f$, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{Gr} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \text{ et } z = f(x, y)\}$$

Les **courbes de niveau** de la fonction f sont obtenues en posant $f(x, y) = \lambda$.

12.44.1 Limites de fonctions à deux variables

Ici nous n'allons pas entrer dans tous les détails, mais simplement mentionner les quelques techniques les plus courantes.

ThoLimiteCompose

Théorème 12.498.
Soient deux fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Si a est un point adhérent au domaine de $g \circ f$ et si

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= b \\ \lim_{y \to b} g(y) &= c, \end{aligned} \tag{12.1410}$$

alors

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c. \tag{12.1411}$$

Les techniques usuelles sont

(1) La règle de l'étau. Cette technique demande un peu plus d'imagination parce qu'il faut penser à un « truc » différent pour chaque exercice. En revanche, la justification est facile : il y a un théorème qui dit que ça marche.

(2) Lorsqu'on applique la règle de l'étau, penser à

$$|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{12.1412}$$

Cela permet de majorer le numérateur. Attention : ce genre de majoration fonctionne seulement au numérateur : agrandir le dénominateur ferait diminuer la fraction.

(3) Il n'est pas vrai que

$$|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^4} \leqslant \sqrt{x^4 + 2y^4}. \tag{12.1413}$$

En effet, si x est petit, alors $x^2 > x^4$, et non le contraire.

Une technique très efficace pour les limites $(x, y) \to (0, 0)$ est le passage aux coordonnées polaires. Il s'agit de poser

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) & \text{(12.1414a)} \\ y = r\sin(\theta) & \text{(12.1414b)} \end{cases}$$

et puis de faire la limite $r \to 0$.

Si la limite obtenue **ne dépend pas de** θ, alors c'est la limite cherchée. Voici quelque exemples.

EXooASMWooCBSyVf

Exemple 12.499.
Calculer la limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x - y}{x + y}. \tag{12.1415}$$

Ici la méthode des chemins pour est particulièrement éclairante. Regardons d'abord la fonction sur la droite $x = y$. Nous avons

$$f(x, y) = \frac{x - x}{2x} = 0. \tag{12.1416}$$

Donc la fonction est nulle sur toute la ligne.

Si nous regardons maintenant la ligne verticale $x = 0$, nous avons

$$f(0, y) = \frac{-y}{y} = -1, \tag{12.1417}$$

donc la fonction vaut -1 sur toute la ligne verticale. △

Beaucoup d'autres exemples seront donné en 18.232 lorsque nous aurons vu les coordonnées polaires.

12.44.2 Dérivées partielles

La **dérivée partielle** par rapport à x au point (x, y) est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \tag{12.1418}$$

et se calcule en dérivant f par rapport à x en considérant que y est constante.

De la même manière, la dérivée partielle par rapport à y au point (x, y) est notée

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \tag{12.1419}$$

et se calcule en dérivant f par rapport à y en considérant que x est constante.

Pour les dérivées partielles secondes,

- $f''_{xx}(x, y) = (f'_x)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$.
- $f''_{yy}(x, y) = (f'_y)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$.
- $f''_{xy}(x, y) = (f'_x)'_y = (f'_y)'_x = f''_{yx}(x, y)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

12.44.3 Différentielle et accroissement

La **différentielle totale** de f au point (a, b) est donnée, quand elle existe (!), par la formule

$$df(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)dy. \tag{12.1420}$$

De la même façon que la formule des accroissements finis disait que $f(x + a) \simeq f(x) + af'(x)$, en deux dimensions nous avons que l'**accroissement** approximatif de f au point (a, b) pour des accroissements Δx et Δy est

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \tag{12.1421}$$

Le **plan tangent** au graphe de f au point $\big(a, b, f(a, b)\big)$ est

$$T_{(a,b)}(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \tag{12.1422}$$

essayez d'écrire l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x)$ au point $x = a$ en termes de la dérivée de f, et comparez votre résultat à cette formule.

Un des principaux théorèmes pour tester la différentiabilité d'une fonction est le suivant.

ThoProuverDiffable

Théorème 12.500.
Soit une fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Si les dérivées partielles existent dans un voisinage de a et donc continues en a, alors f est différentiable en a.

Le plus souvent, nous prouvons qu'une fonction est différentiable en calculant les dérivées partielles et en montrant qu'elles sont continues.

Dérivation implicite : Soit $F(x, f(x)) = 0$ la représentation implicite d'une fonction $y = f(x)$ alors

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

12.45 Les fonctions à valeurs vectorielles

Jusqu'à présent nous avons vu des fonctions de plusieurs variables qui prenaient leurs valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous allons maintenant voir ce qu'il se passe lorsque les fonctions prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Une fonction d'une variable est dite **à valeurs vectorielles** lorsque

$$\begin{aligned} f\colon I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ f(x) &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12.1423}$$

Les fonctions $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les **composantes** de f. Ce que nous avons raconté à propos des dérivées passe facilement :

$$\frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{f_1(a+\epsilon)-f_1(a)}{\epsilon} \\ \frac{f_2(a+\epsilon)-f_2(a)}{\epsilon} \\ \frac{f_3(a+\epsilon)-f_3(a)}{\epsilon} \end{pmatrix}. \tag{12.1424}$$

En particulier dès que les fonctions f_i sont dérivables, nous avons

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \\ f_3'(a) \end{pmatrix} \tag{12.1425}$$

comme dérivée de la fonction. Cette dérivée est un vecteur.

Exemple 12.501.
Si

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} x^2e^x \\ \cos(x^2) \\ x^3+x \end{pmatrix}, \tag{12.1426}$$

alors

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2xe^x + x^2e^x \\ -2x\sin(x^2) \\ 3x^2+1 \end{pmatrix}. \tag{12.1427}$$

△

12.46 Fonctions vectorielles de plusieurs variables

Ce sont les fonctions de la forme

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12.1428}$$

En ce qui concerne les dérivées, tout se passe comme avant. Si les dérivées partielles des composantes f_i existent au point $a \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(a) \\ \partial_x f_2(a) \\ \partial_x f_3(a) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \begin{pmatrix} \partial_y f_1(a) \\ \partial_y f_2(a) \\ \partial_y f_3(a) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \begin{pmatrix} \partial_z f_1(a) \\ \partial_z f_2(a) \\ \partial_z f_3(a) \end{pmatrix}. \tag{12.1429}$$

12.47 Limites à plusieurs variables

PropLimParcompos

Proposition 12.502.
Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \tag{12.1430}$$

si et seulement si

$$\lim_{x\to a} f_i(x) = \ell_i \tag{12.1431}$$

pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ où $f_i(x)$ dénote la i-ème composante de $f(x)$ et ℓ_i la i-ème composante de $\ell \in \mathbb{R}^n$.

Cette proposition revient à dire que la convergence d'une fonction est équivalente à la convergence de chacune de ses composantes.

Démonstration. L'élément clef de la preuve est le fait que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^p$, nous ayons l'inégalité

$$|u_i| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |u_k|^2} = \|u\|. \tag{12.1432}$$ Equilequnorme

La norme (dans $\mathbb{R}^p$) d'un vecteur est plus grande ou égale à la valeur absolue de chacune de ses composantes.

Supposons que nous ayons une fonction dont chacune des composantes a une limite en a : $\lim_{x\to a} f_i(x) = \ell_i$. Montrons que dans ce cas la fonction f tend vers ℓ. Si nous considérons $\varepsilon > 0$, par définition de la limite de chacune des fonctions f_i, il existent des δ_i tels que

$$\|x - a\|_{\mathbb{R}^m} < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon. \tag{12.1433}$$

Notez que la norme à gauche est une norme dans $\mathbb{R}^m$ et que celle à droite est une simple valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Considérons $\delta = \min\{\delta_i\}_{i=1,\dots n}$. Si $\|x - a\| < \delta$, alors

$$\|f(x) - \ell\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - \ell_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2} = \sqrt{n\varepsilon^2} = \sqrt{n}\varepsilon. \tag{12.1434}$$

Nous voyons qu'en choisissant les δ_i tels que $|f_i(x)-\ell_i| < \varepsilon$, nous trouvons $\|f(x)-\ell\| < \sqrt{n}\varepsilon$. Afin d'obtenir $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$, nous choisissons donc les δ_i de telle manière a avoir $|f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$.

Nous avons donc prouvé que la limite composante par composante impliquait la limite de la fonction. Nous devons encore prouver le sens inverse.

Supposons donc que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, et prouvons que nous ayons $\lim_{x\to a} f_i(x) = \ell_i$ pour chaque i. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $\|x - a\| < \delta$ implique $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$. Avec ces choix, nous avons

$$|f_i(x) - \ell_i| \leqslant \|f(x) - \ell\| < \varepsilon \tag{12.1435}$$

où nous avons utilisé la majoration (12.1432) avec $f(x) - \ell$ en guise de u. □

De même, pour la continuité nous avons la proposition suivante :

Proposition 12.503.
Soit une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. La fonction f est continue en a si et seulement si chacune de ses composantes l'est, c'est-à-dire si et seulement si chacune des fonctions $f_i\colon D \to \mathbb{R}$ est continue en a.

Essayez de prouver cette proposition directement par la définition de la continuité, en suivant pas à pas la démonstration de la proposition 12.502.

Propfaposfxposcont

Proposition 12.504.
Soit $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et a, un point du domaine de f telle que $f(a) > 0$. Alors il existe un rayon r tel que $f(x) > 0$ pour tout x dans $B(a, r)$.

Cette proposition signifie que si la fonction est strictement positive en un point, alors elle restera strictement positive en tous les points « pas trop loin ».

Démonstration. Prenons $\varepsilon = f(a)/2$ dans la définition de la continuité. Il existe donc un rayon δ tel que pour tout x dans $B(a, \delta)$,

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{f(a)}{2}, \tag{12.1436}$$

en d'autres termes, $f(x) \in B\big(f(a), \frac{f(a)}{2}\big)$. évidemment aucun nombre négatif ne fait partie de cette dernière boule lorsque $f(a)$ est strictement positif. □

CorfneqzOuvert

Corolaire 12.505.
Si $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R}^m \text{ tels que } f(x) \neq 0\} \tag{12.1437}$$

est ouvert.

Démonstration. Soit $x \in A$. Si $x > 0$ (le cas $x < 0$ est laissé en exercice), alors il existe une boule autour de x sur laquelle f reste strictement positive (proposition 12.504). Cette boule est donc contenue dans A. Étant donné qu'autour de chaque point de A nous pouvons trouver une boule contenue dans A, ce dernier est ouvert. □

ExBNOQEWe

Exemple 12.506.
Soit $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles. Nous allons montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$. L'identification entre les vecteurs et les matrices consiste simplement à « déplier » la matrice pour en faire un vecteur. Par exemple, en dimension deux,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4. \tag{12.1438}$$

En dimension 3,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9. \tag{12.1439}$$

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or le déterminant est un polynôme en les composantes de la matrice. En dimension deux, nous avons

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc, \tag{12.1440}$$

mais en écriture « dépliée », nous pouvons aussi bien écrire

$$\det \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = ad - bc. \tag{12.1441}$$

En dimension 3, le déterminant est donc un polynôme des 9 variables qui apparaissent dans le vecteur « déplié ». En général, dans $\mathbb{R}^{n^2}$, nous considérons donc le polynôme $\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ qui à un vecteur $X \in \mathbb{R}^{n^2}$ fait correspondre le déterminant de la matrice obtenue en « repliant » le vecteur X.

Donc dans $\mathbb{R}^{n^2}$, l'ensemble des matrices inversibles est donné par l'ensemble des vecteurs sur lesquels le polynôme det ne s'annule pas, c'est-à-dire

$$\{X \in \mathbb{R}^{n^2} \text{ tels que } \det(X) \neq 0\}. \tag{12.1442}$$

Mais le déterminant est un polynôme, et donc une fonction continue. Cet ensemble est par conséquence ouvert par le corolaire 12.505. △

La proposition suivante montre que la limite peut « passer à travers » les fonctions continues.

PropLimCompose

Proposition 12.507 (limite de fonction composée)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ et $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ telles que

$$\lim_{x \to a} g(x) = p \tag{12.1443a}$$
$$\lim_{y \to p} f(y) = q \tag{12.1443b}$$

EqLimCompHypa

EqLimCompHypb

Alors nous avons $\lim_{x \to a}(f \circ g)(x) = q$.

Démonstration. Comme presque toute preuve à propos de limite ou de continuité, nous commençons par choisir $\varepsilon > 0$. Nous devons montrer qu'il existe un δ tel que $\|x - a\| \leqslant \delta$ implique $\|f\big(g(x)\big) - q\| \leqslant \varepsilon$.

La limite (12.1443b) impose l'existence d'un $\tilde{\delta}$ tel que $\|y - p\| \leqslant \tilde{\delta}$ implique $\|f(y) - q\| \leqslant \varepsilon$, tandis que la limite (12.1443a) donne un δ tel que $\|x - a\| \leqslant \delta$ implique $\|g(x) - p\| \leqslant \tilde{\delta}$ (nous avons pris $\tilde{\delta}$ en guise de ε dans la définition de la limite pour g).

Avec ces choix, si $\|x-a\|\leqslant\delta$, alors $\|g(x)-p\|\leqslant\tilde{\delta}$, et par conséquent,

$$\|f\big(g(x)\big)-q\|\leqslant\varepsilon, \tag{12.1444}$$

ce que nous voulions. □

De façon pragmatique, la proposition 12.507 nous fournit une formule pour les limites de fonctions composée :

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=\lim_{y\to\lim_{x\to a}g(x)}f(y) \tag{12.1445}$$ Eqlimfgvomp

lorsque f est continue.

Remarque 12.508.
La formule (12.1445) ne peut pas être utilisée à l'envers. Il existe des cas où $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=q$, et $\lim_{x\to a}f(x)=p$ sans pour autant avoir $\lim_{y\to q}g(y)=q$. Par exemple

$$g(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases} \tag{12.1446a}$$

$$f(x)=|x|. \tag{12.1446b}$$

Nous avons $(g\circ f)(x)=2$ pour tout x, ainsi que $\lim_{x\to 0}f(x)=0$, mais la limite $\lim_{y\to 0}g(y)$ n'existe pas.

En général, lorsqu'un ensemble est donné par des inégalités, prendre la fermeture consiste à transformer les inégalités strictes en inégalités non strictes ; prendre l'intérieur consiste à rendre stricte toutes les inégalités ; la frontière consiste *en gros* à transformer toutes les inégalités en égalités (nous allons voir que pour la frontière, c'est un peu plus de travail). Comprenez bien que cela n'est vrai que « en général ». Il faut toujours bien regarder sur chaque exemple si il n'y a pas l'un ou l'autre point problématique.

La proposition 12.504 sera une des clefs pour dire que si une inégalité stricte est satisfaite en un point, alors elle sera satisfaite en tout point dans un voisinage. Voir aussi l'exemple 12.509.

exoEspVectoNorme0008

Exemple 12.509.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que le sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ défini par $A=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y>f(x)\big\}$ est ouvert.

Prouver que l'ensemble $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $y\geqslant f(x)\}$ est fermé.

Nous considérons la fonction $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ donnée par $g(x,y)=f(x)-y$. Cela est une fonction continue parce que c'est une différence de fonctions continues. Par définition,

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } g(x,y)>0\}. \tag{12.1447}$$

Par la proposition 12.504, autour de chaque point (x,y) tel que $g(x,y)>0$ (c'est-à-dire autour de chaque point de A), il existe une boule sur laquelle g reste strictement positive. L'ensemble A est donc ouvert.

Pour prouver que l'ensemble B est fermé, prouver que le complémentaire est ouvert, c'est-à-dire que les points tels que $y-f(x)<0$ forment un ouvert. Cela revient au même que ce que nous avons fait pour A. △

12.48 Champs de vecteurs

Un champ de vecteur est une fonction $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. Géométriquement, il s'agit simplement de mettre un vecteur en chaque point de l'espace. Cela arrive très souvent en physique.

Exemple 12.510.
Si un fluide (eau, gaz) coule dans un tube, en tout point le point a une vitesse, qui sera un vecteur généralement dirigé le long du tube. △

Exemple 12.511.
La force d'attraction de la Terre sur une masse m située au point $r=(x,y,z)$ est donnée par

$$F(r)=-G\frac{Mmr}{\|r\|^3}. \tag{12.1448}$$

Dans cette expression, tant r que $F(r)$ sont des vecteurs. Nous l'avons représenté sur la figure 12.13.

L'application

$$\begin{aligned}F:\mathbb{R}^3&\to\mathbb{R}^3\\ r&\mapsto F(r)\end{aligned} \tag{12.1449}$$

est le champ gravitationnel de la Terre.

△

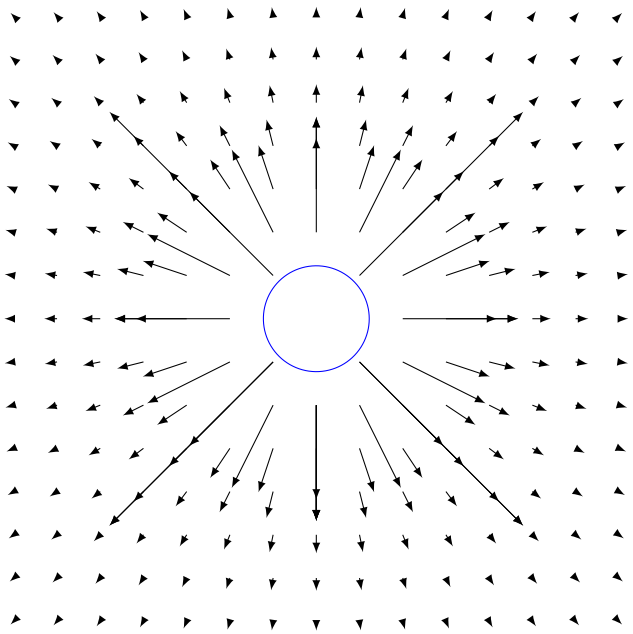


FIGURE 12.13 : Le champ de gravitation de la Terre. LabelFigSQNPooPTrLRQ

12.48.1 Matrice jacobienne

La **matrice jacobienne** de la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ au point $a \in \mathbb{R}^3$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$, c'est-à-dire

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(a) \end{pmatrix}. \tag{12.1450}$$

Exemple 12.512.
Si

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xye^z \\ x^2 + \cos(yz) \\ xyz \end{pmatrix}, \tag{12.1451}$$

alors

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^z & xe^z & xye^z \\ 2x & -z\sin(yz) & -y\sin(yz) \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}. \tag{12.1452}$$

△

12.49 Divergence, rotationnel et l'opérateur nabla

Nous avons déjà vu le gradient d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y,z) \\ \partial_y f(x,y,z) \\ \partial_z f(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{12.1453}$$ EqDefNablaf

Afin de définir la divergence et le rotationnel, nous introduisons ∇ sous une forme un peu plus abstraite comme le « vecteur »

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}. \tag{12.1454}$$

Vue comme ça, la formule (12.1453) est claire.

Si F est un champ de vecteurs, nous introduisons la **divergence** de F par

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{12.1455}$$

Cela est une fonction. Et nous introduisons le rotationnel du champ de vecteur F par

$$\begin{aligned}\nabla \times F &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) e_x - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) e_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) e_z.\end{aligned} \tag{12.1456}$$

Cela est un champ de vecteur. En utilisant le symbole complètement antisymétrique ϵ_{ijk}, le rotationnel d'un champ de vecteur peut s'écrire

$$\nabla \times F = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i F_j e_k. \tag{12.1457}$$

Le gradient, la divergence et le rotationnel consistent à appliquer simplement à ∇ les trois produits qu'on peut effectuer sur un vecteur :

(1) Le produit d'un vecteur par un scalaire multiplie chacune des composantes :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}. \tag{12.1458}$$

(2) Le produit scalaire d'un vecteur avec un autre vecteur donne lieu à la divergence :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{12.1459}$$

(3) Le produit vectoriel de deux vecteurs :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \tag{12.1460}$$

Ces trois opérations joueront un rôle central en électromagnétisme dans les équations de Maxwell.

Exemple 12.513.
Soit $F(x, y, z) = xe_x + xye_y + e_z$, c'est-à-dire

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{12.1461}$$

Son rotationnel est donné par

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0-0)e_x - (0-0)e_y + (y-0)e_z = ye_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}. \tag{12.1462}$$

△

Afin d'étudier comment se comporte la composition de ces opérateurs, nous aurons besoin de ce lemme que nous n'énoncerons pas précisément.

LemPermDerrxyz

Lemme 12.514.
Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, alors on peut permuter l'ordre des dérivées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{12.1463}$$

La fonction

$$(x,y,z)\mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z) \tag{12.1464}$$

sera notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}. \tag{12.1465}$$

Il y a deux propriétés importantes :

Théorème 12.515.
Soit $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors

$$\nabla\times(\nabla f)=0. \tag{12.1466}$$

Si $F\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs de classe C^2, alors

$$\nabla\cdot(\nabla\times F)=0. \tag{12.1467}$$

Démonstration. Ce sont seulement deux calculs qui manipulent les définitions. Pour le premier, la divergence de f est le champ de vecteurs

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}e_x+\frac{\partial f}{\partial y}e_y+\frac{\partial f}{\partial z}e_z. \tag{12.1468}$$

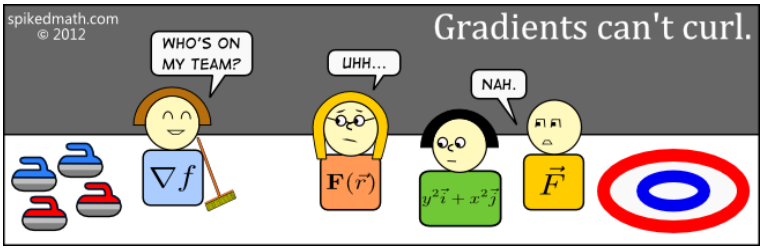
En mettant ce champ dans la définition du rotationnel,

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla f)=\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix} &= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]e_x\\ &\quad-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]e_y\\ &\quad+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]e_z.\end{aligned} \tag{12.1469}$$

En utilisant le lemme 12.514, chacun des termes fait zéro.

La seconde propriété se démontre en utilisant le même type de calcul. □

Remarque 12.516.
Il n'y a pas de propriétés du même style pour la combinaison $\nabla\times(\nabla\cdot F)$ pour le rotationnel de la divergence. En effet la divergence d'un champ de vecteur est une fonction, et il n'y a pas de rotationnel pour une fonction.



http://spikedmath.com/501.htmlSpiked math, licence Creative Commons by-nc 2.5.

12.50 Interprétation géométrique et physique de la divergence

En physique, on dit qu'un champ de vecteurs à divergence nulle est **incompressible**. Nous allons essayer de comprendre pourquoi. Lorsqu'un fluide incompressible se déplace, il faut qu'en chaque point il y ait autant de fluide qui rentre que de fluide qui sort. Nous allons voir sur quelques exemples que la divergence d'un champ de vecteurs est le « bilan de masse » d'un fluide qui se déplace selon le champ de vecteurs.

Si en un point la divergence est positive, cela signifie qu'il y a une perte de masse et si la divergence est négative, cela signifie qu'il y a une accumulation de masse.

Prenons par exemple un fluide qui se déplace selon le champ de vitesse montré à figure 12.14.

Étant donné que la vitesse diminue lorsque x avance, il y a une accumulation de fluide. Regardez en effet la quantité de fluide qui rentre dans le rectangle par rapport à la quantité de fluide qui en sort. Ce champ de vecteurs a pour équation :

$$F(x,y)=\frac{1}{x}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/x\\0\end{pmatrix}. \tag{12.1470}$$

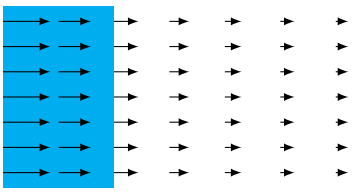


FIGURE 12.14 : Le champ de vecteurs $F(x,y)=\frac{1}{x}(1,0)$. LabelFigBEHTooWsdrys

Sa divergence vaut donc

$$(\nabla\cdot F)(x,y)=\frac{\partial F_x}{\partial x}(x,y)+\underbrace{\frac{\partial F_y}{\partial y}(x,y)}_{=0}=-\frac{1}{x^2}. \tag{12.1471}$$

Cette divergence étant négative, il y a bien accumulation de fluide en tout point, et d'autant plus que x est petit.

ExamDivFrot

Exemple 12.517.
Prenons le champ de vecteurs tournant

$$F(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix} \tag{12.1472}$$

représenté à la figure 12.15. Cela est un vecteur qui est constamment perpendiculaire au rayon.

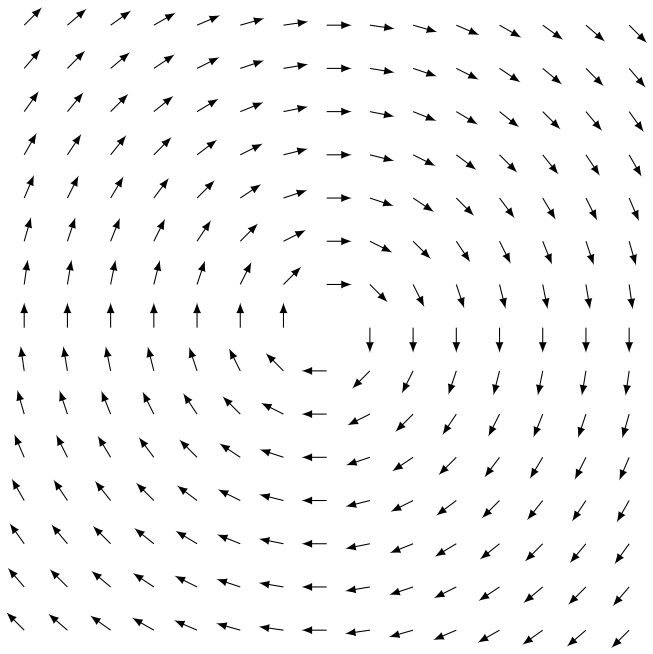


FIGURE 12.15 : Le champ de vecteurs $F(x,y)=(y,-x)$. LabelFigYQVHooYsGLHQ

Un fluide dont la vitesse serait donné par ce champ de vecteur se contente de tourner. Intuitivement il ne devrait pas y avoir de divergence parce qu'il n'y a aucune accumulation de fluide. En effet,

$$\nabla\cdot F(x,y)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=0. \tag{12.1473}$$

△

Exemple 12.518.
Prenons le cas du champ de force de gravitation :

$$F(x,y,z)=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}. \tag{12.1474}$$

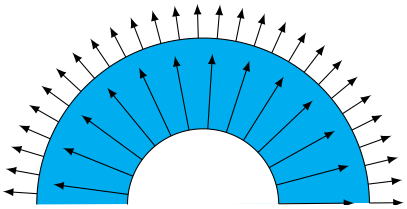


FIGURE 12.16 : Le champ de vecteur de la gravité. Nous avons tracé, sur les deux cercles la même densité de vecteurs, c'est-à-dire le même nombre de vecteurs par unité de surface. LabelFigZGUDooEsqCWQ

Nous pouvons rapidement remarquer que $\nabla \cdot F = 0$. Est-ce que cela peut se comprendre sur le dessin de la figure 12.16 ?

Essayons de voir combien de fluide entre dans la zone bleue et combien en sort. D'abord, il est certain que les vecteurs qui sortent sont plus courts que ceux qui rentrent, ce qui voudrait dire qu'il y a plus de fluide qui rentre. Mais on voit également que le *nombre* de vecteurs qui sortent est plus grand parce que la seconde sphère est plus grande et qu'il y a un vecteur en chaque point de la sphère.

Intuitivement nous pouvons dire que la quantité qui rentre dans la sphère de rayon r_1 donnée par la taille des vecteurs entrants multiplié par la surface de la sphère, c'est-à-dire

$$4\pi r_1^2 \| F(x,y,z) \|, \tag{12.1475}$$ EqQpinormeVecto

mais $\| F(x,y,z) \| = \frac{1}{r_1^2}$, donc la quantité de fluide entrant est 4π. La quantité de fluide sortant sera la même.

Cela explique deux choses

(1) Pourquoi les forces de gravitation et électromagnétiques sont en $1/r^2$; c'est parce que nous vivons dans un monde avec trois dimensions d'espace. En étudiant très précisément le champ de gravitation, certains physiciens espèrent trouver des déviations expérimentales par rapport à la règle du $1/r^2$; cela *pourrait* être un signe que l'espace contient des dimensions supplémentaires.

(2) Pourquoi il y a un 4π comme coefficient dans beaucoup d'équations en électromagnétisme ; en particulier dans certaines anciennes unités de flux.

△

Remarque 12.519.
Nous allons voir plus loin comment s'assurer que l'équation (12.1475) représente bien la « quantité de fluide » qui rentre dans la zone délimitée

12.51 Quelques formules de Leibniz

La divergence étant une combinaison de dérivées, il n'est pas tellement étonnant que la divergence de produits donne lieux à des formules en deux termes. Si f est une fonction et si F et G sont des champs de vecteurs, nous avons la proposition suivante.

PROPooDMWEooNaJBCM

Proposition 12.520.
Si F et G sont des champs de vecteurs dont toutes les dérivées partielles existent, alors

(1) $\nabla \cdot (fF) = f\nabla \cdot F + F \cdot \nabla f$

(2) $\nabla \cdot (F \times G) = G \cdot \nabla \times F - F \cdot \nabla \times G$

(3) $\nabla \times (fF) = f\nabla \times F + \nabla f \times F$. ITEMooFDJIooKTnvKj

Chapitre 13

Analyse sur des groupes

13.0.1 Groupe topologique

DEFooCHZVooHnvSgW

Définition 13.1.
*Un **groupe topologique** est un groupe G muni d'une topologie telle que les applications $(g,h) \mapsto gh$ et $g \mapsto g^{-1}$ sont continues.*

PROPooYNAXooWlUwfJ

Proposition 13.2 ([1, 238])**.**
Soit un ouvert S d'un groupe topologique[1] G. Il existe $W \subset G$ tel que

(1) W *est un voisinage ouvert de* e.

(2) $W \subset S$

(3) $W = W^{-1}$

(4) $WW \subset S$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Construction de W_1** Vu que S est ouvert et que l'inversion $i\colon G \to G$ est continue, la partie $i^{-1}(S) = i(S)$ est ouverte. Nous posons $W = i(S) \cap S$.

(1a) W_1 est ouvert en tant qu'intersection d'ouverts.

(1b) $W_1 = W_1^{-1}$ par le lemme 2.1.

(1c) $e \in W_1$ et donc W_1 est un voisinage ouvert de e.

Construction de W_2 La multiplication $m\colon G \times G \to G$ est continue. Nous posons $U = m^{-1}(S)$. C'est un ouvert contenant (e,e). En vertu de la définition de la topologie produit 7.63, il existe des voisinages ouverts $A, B \subset G$ de e tels que $A \times B \subset U$. Nous posons $A' = A \cap B$ et nous avons encore $A' \times A' \subset U$. Nous posons alors $W_2 = A' \cap i(A')$ de telle sorte à avoir

$$W_2 \times W_2 \subset A' \times A' \subset U. \tag{13.1}$$

La partie W_2 vérifie

(1) $W_2 = W_2^{-1}$

(2) $W_2W_2 \subset S$ parce que $W_2 \times W_2 \subset U = m^{-1}(S)$.

Définition de W Nous posons $W = W_1 \cap W_2$.

Vérification des propriétés Vérifions que W vérifie les propriétés demandées.

(1) $W = W^{-1}$ Nous avons :

$$x \in W \Rightarrow x \in W_1 \Rightarrow x^{-1} \in W_1 \tag{13.2a}$$
$$x \in W \Rightarrow x \in W_2 \Rightarrow x^{-1} \in W_2, \tag{13.2b}$$

et donc donc si $x \in W$ alors $x^{-1} \in W_1 \cap W_2 = W$.

[1] Définition 13.1.

(2) $\underline{W \subset S}$ Parce que $W \subset W_1 = S \cap i(S) \subset S$.

(3) $\underline{W \text{ est ouvert}}$ Comme intersection d'ouverts.

(4) $\underline{WW \subset S}$ Soient $x, y \in W$. Vu que $x, y \in W_2$ nous avons

$$(x, y) \in W_2 \times W_2 \subset A' \times A' \subset U = m^{-1}(S) \tag{13.3}$$

Donc $xy = m(x, y) \in S$.

□

13.1 Action de groupe et connexité

DEFooFRFGooPkzoyV

Définition 13.3 (Groupe agissant continûment[475]).
*Si $\phi\colon G \times X \to X$ est une action du groupe[2] topologique G sur l'espace topologique X, nous disons que G **agit continument** sur X lorsque ϕ est une application continue pour la topologie produit[3] sur $G \times E$.*

PROPooVWHJooXaMvTj

Proposition 13.4 ([475]).
Soit un groupe G agissant sur l'ensemble E. Pour chaque $x \in E$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi_x\colon G &\to \mathrm{Orb}(x) \\ g &\mapsto g \cdot x. \end{aligned} \tag{13.4}$$

Alors il existe une unique application $\tilde{\phi}_x\colon G/\mathrm{Stab}(x) \to \mathrm{Orb}(x)$ telle que

$$\phi_x = \tilde{\phi}_x \circ \pi. \tag{13.5}$$

Cette application $\tilde{\phi}_x$ est une bijection et

$$\tilde{\phi}_x^{-1} = \pi \circ \phi_x^{-1}. \tag{13.6}$$

EQooIOGMooEjMaCP

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) $\underline{\textbf{Existence et unicité}}$ Nous montrons que si $g \sim h$ alors $\phi_x(g) = \phi_x(h)$. La proposition 1.53 donnera l'existence et l'unicité. Soient $g, h \in G$. La condition $g \sim h$ signifie qu'il existe $z \in \mathrm{Stab}(x)$ tel que $g = hz$ (c'est la définition du quotient $G/\mathrm{Stab}(x)$). Nous avons alors

$$\phi_x(g) = \phi_x(hz) = (hz) \cdot x = h \cdot (z \cdot x) = h \cdot h = \phi_x(h). \tag{13.7}$$

Cela montre l'existence et l'unicité.

(2) $\underline{\textbf{Surjective}}$ Soit $y \in \mathrm{Orb}(x)$. Il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$. Nous avons alors

$$y = \phi_x(g) = \tilde{\phi}_x([g]). \tag{13.8}$$

(3) $\underline{\textbf{Injective}}$ Soient $g, h \in G$ tels que $\tilde{\phi}_x([g]) = \tilde{\phi}_x([h])$. Nous avons donc $\phi_x(g) = \phi_x(h)$ et donc $g \cdot x = h \cdot x$. En agissant avec g^{-1} des deux côtés nous trouvons

$$x = (g^{-1}h) \cdot x. \tag{13.9}$$

Autrement dit $g^{-1}h \in \mathrm{Stab}(x)$. Nous avons $h = g(g^{-1}h) \in g\,\mathrm{Stab}(x)$. Donc $h \sim g$.

(4) $\underline{\textbf{Inverse}}$ Il nous reste à prouver la formule (13.6). Soit $y \in \mathrm{Orb}(x)$. Nous avons

$$\phi_x^{-1}(y) = \{g \in G \text{ tel que } g \cdot x = y\}, \tag{13.10}$$

et donc

$$\begin{aligned} (\pi \circ \phi_x^{-1})(y) &= \{[g] \in G/\mathrm{Stab}(x) \text{ tel que } g \cdot x = y\} && \text{(13.11a)} \\ &= \{[g] \in G/\mathrm{Stab}(x) \text{ tel que } \tilde{\phi}_x([g]) = y\} && \text{(13.11b)} \\ &= \{\alpha \in G/\mathrm{Stab}(x) \text{ tel que } \tilde{\phi}_x(\alpha) = y\} && \text{(13.11c)} \\ &= \tilde{\phi}_x^{-1}(y). && \text{(13.11d)} \end{aligned}$$

[2] Définition 1.481.
[3] Définition 7.62.

□
ThojrLKZk

Théorème 13.5 ([475]).
Si G est un groupe topologique compact agissant continûment[4] *sur l'espace topologique séparé X, alors pour tout $x \in X$, l'application*

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_x \colon G/\operatorname{Stab}(x) &\to X\\ [g] &\mapsto g \cdot x\end{aligned} \tag{13.12}$$

définie en 13.4 est un homéomorphisme[5].

Démonstration. En vertu de la proposition 7.72, l'application $\tilde{\phi}_x$ est continue parce que $\tilde{\phi}_x \circ \pi = \phi_x$ est continue.

Nous devons maintenant prouver que $\tilde{\phi}_x^{-1}$ est continue. Nous utilisons pour cela la proposition 7.49. Par définition de la topologie quotient (définition 7.67), la projection canonique est continue. Étant donné que G est compact, l'espace $G/\operatorname{Stab}(x) = \pi(G)$ est compact (théorème 7.275).

Soit un fermé F dans $G/\operatorname{Stab}(x)$. La partie F est compacte par le lemme 7.121(1). Donc $\tilde{\phi}_x(F)$ est compacte dans X. Donc $\tilde{\phi}_x(F)$ est fermé par le lemme 7.121(2). □
LemkLRAet

Lemme 13.6.
Si G et H sont des groupes topologiques tels que G/H et H sont connexes[6]*, alors G est connexe.*

Démonstration. Soit $f \colon G \to \{0,1\}$ une fonction continue. Considérons l'application

$$\begin{aligned}\tilde{f} \colon G/H &\to \{0,1\}\\ [g] &\mapsto f(g).\end{aligned} \tag{13.13}$$

D'abord nous montrons qu'elle est bien définie. En effet si $h \in H$ nous aurions $\tilde{f}([gh]) = f(gh)$, mais étant donné que H est connexe, l'ensemble gH est également connexe ; la fonction continue f est donc constante sur gH. Nous avons donc $f(gh) = f(g)$.

Étant donné que G/H est également connexe, la fonction $\tilde{f}$ doit être constante. Si g_1 et g_2 sont deux éléments du groupe, nous avons $f(g_1) = \tilde{f}([g_1]) = \tilde{f}([g_2]) = f(g_2)$. Nous en déduisons que f est constante et que G est connexe. □

13.7.
La connexité de $\mathrm{SO}(3)$ peut être démontrée en suivant les lignes de [476]. Le corolaire 12.93 permet de dire que les éléments de $\mathrm{SO}(3)$ ont une valeur propre égale à 1.
THOooYQFNooPaYmaP

Théorème 13.8.
Pour tout $n \geqslant 2$, le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est connexe, le groupe $\mathrm{O}(n)$ a deux composantes connexes.

Démonstration. La seconde assertion découle de la première parce que les matrices de déterminant 1 et celles de déterminant -1 ne peuvent pas être reliées par un chemin continu tandis que l'application

$$M \mapsto \begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix} M \tag{13.14}$$

est un homéomorphisme entre les matrices de déterminant 1 et celles de déterminants -1. Montrons donc que $G = \mathrm{SO}(n)$ est connexe par arcs pour $n \geqslant 2$ en procédant par récurrence sur la dimension.

Nous acceptons le résultat pour $G = \mathrm{SO}(2)$. Notons que nous en avons besoin pour prouver que la sphère S^{n-1} est connexe.

Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ agit, par définition, de façon transitive sur la sphère S^{n-1}. Soit $a \in S^{n-1}$, nous avons

$$G \cdot a = S^{n-1} \tag{13.15a}$$
$$G_a \simeq \mathrm{SO}(n-1) \tag{13.15b}$$

où G_a est le fixateur de a dans G. Pour montrer le second point, nous considérons $\{e_i\}$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $M \in G$ telle que $Ma = e_1$. Le fixateur de e_1 est évidemment isomorphe à $\mathrm{SO}(n-1)$ parce qu'il

[4] Définitions 1.481 et 13.3.
[5] Isomorphisme d'espaces topologiques, définition 7.51.
[6] Définition 7.102.

est constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{13.16}$$

où $(a_{ij}) \in \mathrm{SO}(n-1)$. L'application

$$\begin{aligned} \alpha\colon G_{e_1} &\to G_a \\ A &\mapsto M^{-1}AM \end{aligned} \tag{13.17}$$

est un isomorphisme entre G_a et $\mathrm{SO}(n-1)$. Le théorème 13.5 nous montre alors que, en tant qu'espaces topologiques,

$$G/G_a = S^{n-1}. \tag{13.18}$$

L'hypothèse de récurrence montre que $G_a = \mathrm{SO}(n-1)$ est connexe tandis que nous savons que S^{n-1} est connexe. Le lemme 13.6 conclut que $G = \mathrm{SO}(n)$ est connexe. □

LemIbrsFT

Lemme 13.9.
Une bijection continue entre un espace compact et un espace séparé est un homéomorphisme.

PROPooTVHJooBRmUCd

Proposition 13.10.
Les groupes $\mathrm{U}(n)$ *et* $\mathrm{SU}(n)$ *sont connexes.*

Démonstration. Soit $G(n)$ le groupe $\mathrm{SU}(n)$ ou $\mathrm{U}(n)$. Ce groupe opère transitivement sur la sphère complexe

$$S^{n-1}_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } |z| = 1\}. \tag{13.19}$$

En notons, pour chaque k, $z_k = x_k + iy_k$, nous considérons l'application continue

$$\begin{aligned} s\colon S^{n-1}_{\mathbb{C}} &\to S^{2n-1} \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n). \end{aligned} \tag{13.20}$$

Vérifions que s prend bien ses valeurs dans S^{2n-1}. Nous avons

$$|s(z_1, \dots, z_n)| = \sqrt{\sum_k |x_k|^2 + |y_k|^2} = \sqrt{\sum_k |z_k|^2} = 1 \tag{13.21}$$

parce que $|z_k|^2 = |x_k|^2 + |y_k|^2$. Le lemme 13.9 dit que cette bijection continue est un homéomorphisme. Soit $a \in S^{n-1}_{\mathbb{C}}$, nous avons

$$G \cdot a = S^{n-1}_{\mathbb{C}} \tag{13.22a}$$

$$G_a \simeq G(n-1). \tag{13.22b}$$

La seconde ligne est un isomorphisme de groupe et un homéomorphisme. Il est donné de la façon suivante. D'abord le fixateur de e_1 dans $G(n)$ est donné par les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{13.23}$$

où $(a_{ij}) \in G(n-1)$. Par ailleurs si M est une matrice de $G(n)$ telle que $Ma = e_1$, nous avons l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} \alpha\colon G_{e_1} &\to G_a \\ A &\mapsto M^{-1}AM. \end{aligned} \tag{13.24}$$

Encore une fois, cela est un homéomorphisme par le lemme 13.9. Par composition nous avons $G_a \simeq G(n-1)$ et un homéomorphisme

$$G(n)/G_a = S^{n-1}_{\mathbb{C}}. \tag{13.25}$$

Le groupe G_a et l'ensemble $S^{n-1}_{\mathbb{C}}$ étant connexes, le groupe $G(n)$ est connexe par le lemme 13.6. □

Lemme 13.11 ([433]).
Si G est un sous-groupe connexe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ alors son groupe dérivé[7] l'est également.

Démonstration. Soit S_m l'ensemble des produits de m commutateurs de G :

$$S_m = \{g_1, \dots, g_m \text{ où les } g_i \text{ sont des commutateurs}\}. \tag{13.26}$$

La partie S_m est l'image de G par l'application continue

$$\begin{aligned} \underbrace{G \times \dots \times G}_{2m \text{ facteurs}} &\to G \\ (g_1, h_1, g_2, h_2, \dots, g_m, h_m) &\mapsto [g_1, h_1] \dots [g_m, h_m] \end{aligned} \tag{13.27}$$

En tant qu'image d'un connexe par une application continue, S_m est connexe par le lemme 7.273. Puisque les S_m ont l'identité en commun, le groupe dérivé

$$D(G) = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m \tag{13.28}$$

est également connexe. □

13.2 Espaces de matrices

13.2.1 Dilatations et transvections

Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $n \geqslant 2$.

ThoooAZKDooNDcznv

Théorème-Définition 13.12 ([433]).
Soit une application linéaire $u\colon E \to E$ dont les points fixes forment un hyperplan noté H d'équation $H = \ker(f)$ avec $f \in E^*$.

ITEMooGTKRooQSPNoI

(1) Les affirmations suivantes sont équivalentes :

ITEMooZHYRooFGKaifi

(1a) $\det(u) \neq 1$

ooXKLWooTfUMzV

(1b) L'application u est diagonalisable et a une valeur propre qui vaut $\det(u) \neq 1$.

ooMZPTooCLylbh

(1c) $\mathrm{Image}(u - \mathrm{Id}) \not\subseteq H$.

ITEMooZHYRooFGKaifiv

(1d) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$ *avec* $\lambda \neq 1$.

ITEMooMSJXooUsLCHx

(2) Les affirmations suivantes sont équivalentes :

ITEMooRTIEooOoWCFsa

(2a) Il existe $a \in H$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$.

ITEMooRTIEooOoWCFsb

(2b) Dans une base adaptée, la matrice de u est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{13.29}$$

EQooFXBDooTgZwMv

(3) Les conditions (1a)-(1d) sont respectées si et seulement si les conditions (2a)-(2b) ne sont pas respectées (elles sont les négations l'une de l'autre.).

*Une **dilatation** est soit l'identité soit un endomorphisme qui respecte les conditions (1).*
*Une **transvection** est soit l'identité soit un endomorphisme qui vérifie les conditions (2).*

Démonstration. Nous allons prouver plein d'implications …

(1) **(1a) implique (1b)** Le théorème de la base incomplète (voir remarque 4.15) permet de considérer une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ soit une base de H. Dans cette base, la matrice de

[7] Définition 2.3.

u est de la forme suivante (les cases non remplies sont nulles et les étoiles correspondent à des valeurs inconnues mais pas spécialement nulles) :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & * \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{13.30}$$ EqooPQOEooGUyIwa

Le fait que le déterminant de u ne soit pas 1 implique que $\lambda \neq 1$. Par conséquent le polynôme caractéristique

$$\chi_u(X) = (1-X)^{n-1}(\lambda - X) \tag{13.31}$$

possède une racine $\lambda \neq 1$, et donc u possède un vecteur propre v pour cette valeur[8]. Le vecteur v est linéairement indépendant de $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ (parce que vecteur propre de valeur propre différente). Par conséquent l'ensemble $\{e_1, \dots, e_{n-1}, v\}$ est une base par la proposition 4.19. C'est une base de vecteurs propres et donc une base de diagonalisation[9].

(2) **(1b) implique (1c)** Nous nommons maintenant $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base de diagonalisation. Nous avons $u(e_n) = \lambda e_n$ avec $\det(u) = \lambda \neq 1$. Nous avons

$$(u - \mathrm{Id})(e_n) = (\lambda - 1)e_n \notin H, \tag{13.32}$$

ce qui prouve que l'image de e_n par $u - \mathrm{Id}$ n'est pas dans H.

(3) **(1c) implique (1d)** Reprenons une base $\{e_1, \dots, , e_n\}$ donnant la matrice (13.30). Il existe $x \in E$ tel que $u(x) - x$ n'est pas dans H, c'est-à-dire tel que $u\big(u(x) - x\big) \neq u(x) - x$. Nous en déduisons que

$$u^2(x) - 2u(x) + x \neq 0 \tag{13.33}$$

ou encore que

$$(X-1)^2(u)x \neq 0. \tag{13.34}$$

C'est-à-dire que $(X-1)^2$ n'est pas un polynôme annulateur de u. Or ce serait le cas si $X - 1$ était le polynôme minimal (proposition 8.98). Le polynôme caractéristique étant $(X-1)^{n-1}(X-\lambda)$ (et étant annulateur[10]), le polynôme minimal est de la forme

$$\mu_u(X) = \begin{cases} (X-1)(X-\lambda) & \text{si } \lambda \neq 1 \\ X - 1 & \text{si } \lambda = 1. \end{cases} \tag{13.35}$$

Dans notre cas nous venons de voir que ce n'est pas $X - 1$ et donc c'est $(X-1)(X-\lambda)$ avec $\lambda \neq 1$.

Nous devons trouver une base de diagonalisation … Supposons

$$u(e_n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + \lambda e_n, \tag{13.36}$$

dans lequel nous venons de prouver que $\lambda \neq 1$, et cherchons

$$e'_n = \sum_{j=1}^{n} p_j e_j \tag{13.37}$$

de telle sorte à avoir $u(e'_n) = \lambda e'_n$. Nous avons

$$u(e'_n) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j u(e_j) + p_n u(e_n) = \sum_{j=1}^{n-1} (p_j + p_n a_j)e_j + p_n \lambda e_n. \tag{13.38}$$

En égalisant à $\lambda \sum_{j=1}^{n} p_j e_j$, il vient

$$p_j + p_n a_j = \lambda p_j \tag{13.39}$$

[8] Proposition 8.119.

[9] Nous pourrions en dire à peine un peu plus et prouver le point (1d), mais cela ne servirait à rien parce que nous voulons prouver les équivalences et qu'il faudra quand même prouver que (1c) implique (1d).

[10] Théorème de Cayley-Hamilton 8.116.

pour tout $j = 1, \dots, n-1$ et la condition triviale $p_n\lambda = \lambda p_n$ pour $j = n$. Nous en déduisons que le choix

$$p_j = \frac{p_n a_j}{\lambda - 1} \tag{13.40}$$

fonctionne (parce que $\lambda \neq 1$ comme nous l'avons démontré plus haut). En bref, il suffit de poser

$$e'_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_n a_j}{\lambda - 1} e_j + p_n e_n \tag{13.41}$$

avec p_n au choix pour avoir une base $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e'_n\}$ de diagonalisation de u avec $\lambda \neq 1$ comme dernière valeur propre.

(4) **(1d) implique (1a)** Évident … encore faut-il se souvenir d'invoquer l'invariance du déterminant par changement de base.

Nous avons terminé la première série d'équivalences. Nous continuons avec la seconde.

(1) **(2a) implique (2b)** Nous prenons $e_{n-1} = a$ et nous complétons en une base de H. Pour e_n il suffit de prendre n'importe quel vecteur v tel que $f(v) \neq 0$ (qui existe parce que $f = 0$ est seulement un hyperplan), et de le normaliser.

Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée parce que $u(e_n) = e_n + f(e_n)a = e_n + e_{n-1}$ du fait que $e_{n-1} = a$ et $f(e_n) = 1$.

(2) **(2b) implique (2a)** Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ cette base. En prenant $a = e_{n-1}$ et en posant $x = \sum_k x_k e_k$ nous avons

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k e_k + x_n(e_{n-1} + e_n) = x + x_n e_{n-1} = x + x_n a. \tag{13.42}$$

Mais puisque $f(x) = \sum_i f_i x_i$, et que $f(e_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$ nous avons $f(x) = f_n x_n$. Il n'y a cependant pas de raison d'avoir $f_n = 1$. Mais en définissant

$$e'_i = \frac{1}{f_n} e_i \tag{13.43}$$

nous avons bien $u(e'_n) = \frac{1}{f_n}(e_{n-1} + e_n) = e'_{n-1} + e'_n$. Donc dans cette base nous avons encore la matrice de u de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{13.44}$$

mais cette fois avec $f(e'_n) = 1$.

Nous avons terminé avec la seconde série d'équivalences. Il nous reste à prouver que la première est équivalente à la négation de la seconde.

(1) **non (1c) implique (2a)** Considérons $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$ et posons $a = u(x_0) - x_0 \in \text{Image}(u - \text{Id})$. Par la négation de (1c) nous avons $a \in H$. De plus $x_0 \notin H$ (sinon $f(x_0) = 0$) donc $u(x_0) \neq x_0$ et $a \neq 0$.

Nous montrons que ce choix de a fonctionne : $u(x) = x + f(x)a$ pour tout $x \in E$. Nous faisons cela séparément pour $x \in H$ et pour $x = x_0$.

Si $h \in H$ alors $u(h) = h$ et $f(h) = 0$ donc $h + f(h)a = h = u(h)$. Si $x = x_0$ alors $u(x_0) = a + x_0$ (c'est la définition de a) et $x_0 + f(x_0)a = x_0 + a$.

(2) **(2b) implique non (1a)** Dans une base adaptée nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{13.45}$$

et donc $\det(u) = 1$, ce qui contredit (1a).

□

13.13.
Dans le cas des dilatations et des transvections, les points fixes forment un hyperplan.

Selon cette terminologie, l'application $x \mapsto \lambda x$ n'est pas une dilatation mais un produit de dilatations.

PROPooNCKGooTuaYeq

Proposition 13.14 ([77, 1, 477]).
Les transvections de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ *sont dans* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$*, c'est-à-dire qu'elles ont un déterminant égal à* 1.

Démonstration. Si vous voulez des matrices, utilisez la définition 8.14 et la forme (13.29). Sous cette forme, le déterminant est clairement 1.

Soit une transvection $u(x) = x + f(x)a$ avec $H = \{f = \}$ et $a \in H$. En utilisant le lemme des déterminants 4.141(2), nous avons $\det(u) = 1 + f(a) = 1$ parce que $f(a) = 0$. □

LEMooYTUSooKqDJce

Lemme 13.15 ([1]).
Quelques trucs à propos des transvections[11].

ITEMooOGTOooVGYOUA

(1) Si τ *est une transvection, alors* τ^2 *est une transvection.*

ITEMooCSBVooTWYMvd

(2) Les transvections de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ *sont dans* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$

ITEMooYQKNooYCbpBP

(3) Toutes les transvections sont conjuguées dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$*, c'est-à-dire que si* τ_1 *et* τ_2 *sont des transvections, alors il existe* $g \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ *tel que* $\tau_1 = g\tau_2 g^{-1}$.

Démonstration. Plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Nous considérons une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ adaptée à τ et par facilité de notations, nous supposons $\tau(e_1) = e_1$ et $\tau(e_2) = e_1 + e_2$. En posant

$$\begin{cases} f_1 = ae_1 + be_2 & \text{(13.46a)} \\ f_2 = ce_1 + de_2, & \text{(13.46b)} \end{cases}$$

et en imposant $\tau^2(f_1) = f_1$, $\tau^2(f_2) = f_1 + f_2$, il est vite vu que ça marche avec $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 1$. Bref, en posant $f_1 = 2e_1$ et $f_2 = e_1 + e_2$ nous avons bien $\tau^2(f_1) = f_1$ et $\tau^2(f_2) = f_1 + f_2$, c'est-à-dire que $\{f_1, f_2, e_3, \dots, e_n\}$ est une base adaptée pour τ^2.

(2) **Pour (2)** C'est la proposition 13.14.

(3) **Pour (3)** Soient deux transvections τ_1 et τ_2. Il existe des applications linéaire inversibles P et Q telle que $A = P\tau_1 P^{-1}$ et $A = Q\tau_2 Q^{-1}$ où A est l'application de la matrice (13.29). Nous avons alors

$$\tau_1 = (P^{-1}Q)\tau_2(P^{-1}Q)^{-1}. \tag{13.47}$$

Donc τ_1 et τ_2 sont conjugués dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Nous devons encore prouver qu'elles sont conjuguées dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$.

Soit $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ tel que $\tau_1 = g\tau_2 g^{-1}$. Si $\det(g) = \lambda$, en posant $h = \lambda^{-1}g \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ nous avons $\tau_1 = h\tau_2 h^{-1}$. Donc τ_1 et τ_2 sont conjuguées par $h \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$.

□

Remarque 13.16.
Nous notons E_{ij} la matrice qui possède uniquement 1 en position (i,j). C'est-à-dire que $\left(E_{ij}\right)_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Soit H l'hyperplan des points fixes de f. Dans une base contenant une base de H, la matrice d'une transvection a pour forme type :

EqooZAKHooBjKlTd

$$T_{ij}(\lambda) = \mathbb{1} + \lambda E_{ij} \tag{13.48}$$

avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et une dilatation a pour forme type la matrice diagonale

$$D_i(\alpha) = \mathbb{1} + (\alpha - 1)E_{ii} \tag{13.49}$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Bien entendu, en choisissant une base quelconque, les matrices des dilatations et des translations peuvent avoir des formes différentes.

[11] Définition 13.12.

LemooTQJXooGoIxsI

Lemme 13.17.
Quelques manipulations de lignes et de colonnes pour les matrices.

ITEMooRWANooPAVjkm

(1) La multiplication à gauche par $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer le remplacement de ligne

$$L_i \to L_i + \lambda L_j. \tag{13.50}$$

ITEMooHPSMooWBrSXP

(2) La multiplication à droite par $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer le remplacement de colonne

$$C_j \to C_j + \lambda C_i. \tag{13.51}$$

ITEMooXUGFooKcbrxs

(3) La multiplication à gauche par $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$ revient à la substitution de lignes

$$\begin{cases} L_i \to L_j & \text{(13.52a)} \\ L_j \to -L_i. & \text{(13.52b)} \end{cases}$$

Notons qu'il n'est pas possible d'inverser deux lignes à l'aide de transvections sans changer un signe parce que les transvections sont de déterminant 1 alors que l'inversion de lignes change le signe du déterminant.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Nous devons prouver que

$$\big(T_{ij}(\lambda)A\big)_{kl} = \begin{cases} A_{kl} & \text{si } k \neq i \\ A_{il} + \lambda A_{jl} & \text{si } k = i. \end{cases} \tag{13.53}$$

Un peu de calcul matriciel avec utilisation modérée des indices donne :

$$\begin{aligned} \big(T_{ij}(\lambda)A\big)_{kl} &= \sum_s \big(T_{ij}(\lambda)\big)_{ks} A_{sl} && \text{(13.54a)} \\ &= \sum_s \delta_{ks}A_{sl} + \lambda\delta_{ik}\delta_{js}A_{sl} && \text{(13.54b)} \\ &= A_{kl} + \lambda\delta_{ik}A_{jl}. && \text{(13.54c)} \end{aligned}$$

(2) **Pour (2)** C'est la même chose.

(3) **Pour (3)** Si nous appliquons successivement ces trois matrices (de droite à gauche) nous effectuons les substitutions :

$$\begin{cases} L'_i = L_i + L_j \\ L'_j = L_j \end{cases} \quad \text{suivi de} \quad \begin{cases} L''_i = L'_i \\ L''_j = L'_j - L'_i \end{cases} \quad \text{et de} \quad \begin{cases} L'''_i = L''_i + L''_j \\ L'''_j = L''_j. \end{cases} \tag{13.55}$$

En effectuant ces substitutions,

$$L'''_i = L''_i + L''_j = L'_i + (L'_j - L'_i) = L'_j = L_j \tag{13.56}$$

et

$$L'''_j = L''_j = L'_j - L'_i = L_j - (L_i + L_j) = -L_i, \tag{13.57}$$

ce qu'il fallait.

□

PropooFDNRooWFfUDd

Proposition 13.18 ([478]).
Soient $n \geqslant 2$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

(1) Si $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, il existe des transvections $U_1, \dots, U_r$, $V_1, \dots, V_s$ telles que

EQooKSQVooIpkdIE

$$A = U_1 \dots U_r \, D_n\big(\det(A)\big) \, V_1 \dots V_s. \tag{13.58}$$

ITEMooLRYXooSoKRiA

(2) L'ensemble des transvections engendre le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$.

(3) L'ensemble des transvections et des dilatations engendre le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.

Démonstration. Nous allons montrer que toutes les matrices de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ peuvent être écrites comme produits de matrices de la forme (13.48). Cela montrera qu'étant donné un endomorphisme f et une base *pas spécialement liée à* f, il est possible d'écrire la matrice de f comme produit de transvections dont les hyperplans invariants sont « contenus » dans cette base. Cela suffit à prouver que les transvections engendrent $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ grâce au lemme 1.437.

Toutes les transvections ont un déterminant égal à 1. Donc le groupe engendré par les transvections est inclus dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$. Soit $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$; nous allons utiliser le pivot de Gauss pour la diagonaliser. Étant donné que A est inversible, sa première colonne n'est pas nulle. Si $A_{i1}\neq 0$ alors une multiplication à gauche par $L_{1i}\big((A_{11}-1)/A_{i1}\big)$ effectue la substitution

$$L_1\to L_1-\frac{A_{11}-1}{A_{i1}}L_i \tag{13.59}$$

qui met un 1 en la position $(1,1)$. Notons que si la première colonne est de la forme

$$\begin{pmatrix} s\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \tag{13.60}$$

avec $s\neq 0$ alors il faut plutôt faire les substitutions $L_2\to L_2+L_1$ et ensuite $L_1\to L_1-\frac{1}{s}L_2$ pour obtenir le même résultat. En effectuant le pivot avec A_{11}, une suite d'opérations sur les lignes et les colonnes donnent

$$M_1\dots M_pAN_1\dots N_q=\begin{pmatrix}1&0\\0&A_1\end{pmatrix} \tag{13.61}$$

où $A_1\in\mathrm{GL}(n-1,\mathbb{K})$ et $\det(A_1)=\det(A)$. En continuant de la sorte nous arrivons sur une matrice diagonale[12]

$$M_1\dots M_{p'}AN_1\dots N_{q'}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&\alpha\end{pmatrix} \tag{13.62}$$

avec $\alpha=\det(A)$. En d'autres termes nous avons prouvé qu'il existe des transvections $U_1,\dots,U_r$ et $V_1,\dots,V_s$ telles que

$$A=U_1\dots U_r\,D_n\big(\det(A)\big)\,V_1\dots V_s. \tag{13.63}$$

EQooZYYFooQGCgxU

Cela prouve que les transvections et les translations engendrent $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Si $A\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ alors $D_n\big(\det(A)\big)=1$ et l'équation (13.63) est un produit de transvections. □

Proposition 13.19.
Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *est engendré par les endomorphismes inversibles diagonalisables.*

Démonstration. Par la proposition 13.18, le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est engendré par les dilatations et les transvections. Il suffit donc de montrer qu'à leur tour, ces deux types d'endomorphismes sont engendrés par les endomorphismes inversibles et diagonalisables.

Les dilatations sont diagonalisables et inversibles. C'est bon pour elles.

Soit une transvection u, et une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ dans laquelle u est de la forme (13.29). Nous considérons l'endomorphisme $d\colon E\to E$ défini par $d(e_k)=ke_k$. Cet endomorphisme est diagonalisable parce que son polynôme minimal, $\mu_d=\prod_{k=1}^n(X-k)$, est scindé à racines simples (voir le théorème 8.217).

Nous avons évidemment $u=d^{-1}\circ(d\circ u)$ où d^{-1} est diagonalisable et inversible. Voyons que $d\circ u$ est également diagonalisable en montrant que μ_d est son polynôme minimal (qui est scindé à racines simples).

Il suffit de montrer que $\mu_d(d\circ u)(e_k)=0$ pour tout k. Ainsi μ_d sera un polynôme annulateur de $d\circ u$ de degré n, et donc minimal.

(1) **Si $k\leqslant n-1$** Alors $u(e_k)=e_k$ et $(d\circ u-n)e_k=(k-n)e_k$. Donc :

$$\mu_d(d\circ u)(e_k)=(d\circ u-1)(d\circ u-2)\dots(d\circ u-n)e_k=(k-1)(k-2)\dots(k-n)e_k=0 \tag{13.64}$$

parce que dans le produit des $k-i$, il y en a forcément un de nul.

[12] Attention : les opérations sur les lignes et les colonnes ne sont pas des opérations de similitude. Il n'est pas question de prétendre ici que toutes les matrices de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ sont diagonales, voir la définition 4.117.

(2) **Si $k = n$** Dans un premier temps,

$$(d \circ u - n)e_n = d(e_n + e_{n-1}) - ne_n = ne_n + (n-1)e_{n-1} - ne_n = (n-1)e_{n-1}. \tag{13.65}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}\big(d \circ u - (n-1)\big)e_{n-1} &= d(e_{n-1}) - (n-1)e_{n-1} && (13.66a)\\ &= d(e_{n-1}) - (n-1)e_{n-1} && (13.66b)\\ &= (n-1)e_{n-1} - (n-1)e_{n-1} && (13.66c)\\ &= 0 && (13.66d)\end{aligned}$$

Le polynôme μ_d est donc un polynôme scindé à n racines simples annulateur de $d \circ u$, qui est alors diagonalisable et inversible (parce que u et d le sont).

Donc sous la forme $u = d^{-1}(du)$, la transvection u est écrite comme produit de diagonalisables inversibles. □

PROPooSAOTooIlpJoY

Proposition 13.20 ([174]).
Soient $n \geqslant 3$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Alors

(1) le groupe dérivé[13] *de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ est $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$;*

(2) le groupe dérivé de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit une transvection τ. Dans une base adaptée nous avons $\tau(e_1) = e_1 + e_2$, $\tau(e_2) = e_2$. Pour ces vecteurs nous avons $\tau^2(e_1) = e_1 + 2e_2$. Étant donné que la caractéristique est différente de 2 nous avons $2 \neq 0$ et donc $\tau^2(e_2) \neq e_2$. Tout ça pour dire que $\tau^2 \neq \mathrm{Id}$.

En utilisant le lemme 13.15 nous savons que τ^2 est une transvection et donc que τ^2 est conjugué à τ dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$: il existe $g \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ telle que $\tau^2 = g\tau g^{-1}$. Donc

$$\tau = g\tau g^{-1}\tau^{-1} \in D\big(\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})\big). \tag{13.67}$$

Nous avons donc montré que $D\big(\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})\big)$ contient toutes les transvections. À fortiori, $D\big(\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\big)$ contient également toutes les transvections. Par 13.18, nous avons alors

$$\begin{aligned}\mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) &\subset D\big(\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})\big) && (13.68a)\\ \mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) &\subset D\big(\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\big) && (13.68b)\end{aligned}$$

Mais vu que le déterminant est multiplicatif[14], nous avons aussi $D\big(\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})\big) \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$, et $D\big(\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\big) \subset \mathrm{SL}(n\mathbb{K})$. □

13.2.2 Connexité de certains groupes

LEMooIPOVooZJyNoH

Lemme 13.21.
Le groupe $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Démonstration. La non connexité par arcs est facile parce que les éléments de déterminant 1 ne peuvent pas être reliés aux éléments de déterminant -1 par un chemin continu restant dans $\mathrm{O}(n)$ à cause du théorème des valeurs intermédiaires 9.95.

En ce qui concerne la connexité, il faut en dire un peu plus.

Les éléments de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ ont des déterminants égaux à 1 ou à -1. Ces deux parties sont des ouverts (pour la topologie induite de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$). En effet soit $A \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ (la partie contenant les déterminants 1 ; ce que l'on va dire tient pour l'autre partie). Alors, parce que le déterminant est une fonction continue sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de A dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ dans lequel le déterminant reste entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ (c'est la définition de la continuité avec $\epsilon = 1/2$). L'ensemble $\mathcal{O} \cap \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est par définition un ouvert de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et ne contient que des éléments de déterminant 1.

La partie $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ est donc non-connexe selon la définition 7.102. □

LEMooQMXHooZQozMK

Lemme 13.22.
Les groupes $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ sont connexes par arcs.

[13] Définition 2.3.
[14] Par le lemme 8.15(1).

Démonstration. Soient A une matrice unitaire, et Q une matrice unitaire qui diagonalise A. Étant donné que les valeurs propres arrivent par paires complexes conjuguées,

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & & & \\ & e^{-i\theta_1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e^{i\theta_r} & & \\ & & & & e^{-i\theta_r} & \end{pmatrix}. \tag{13.69}$$

Le chemin $U(t)$ obtenu en remplaçant θ_i par $t\theta_i$ avec $t \in [0,1]$ joint QAQ^{-1} à l'identité. Par conséquent $Q^{-1}U(t)Q$ joint A à l'unité. □

Théorème 13.23.
Les matrices normales[15] *forment un espace connexe par arc.*

Démonstration. Soient A une matrice normale et U une matrice unitaire qui diagonalise A. Nous considérons $U(t)$, un chemin qui joint $\mathbb{1}$ à U dans $\mathrm{U}(n)$. Pour chaque t, la matrice

$$A(t) = U(t)^{-1}AU(t) \tag{13.70}$$

est normale. Nous avons donc trouvé un chemin dans les matrices normales qui joint A à une matrice diagonale. Il est à présent facile de la joindre à l'identité.

Toutes les matrices normales étant connexes à l'identité, l'ensemble des matrices normales est connexe. □

PROPooALQCooLZCKrH

Proposition 13.24.
Le groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$; par la proposition 13.18(2) nous pouvons écrire

$$A = \prod_{c\in X} T_c(\lambda_c) \tag{13.71}$$

où X est une partie de l'ensemble des couples (i,j) dans $\{1,\dots,n\}$. En posant

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0,1] &\to \mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) \\ t &\mapsto \prod_{c\in X} T_c(t\lambda_c) \end{aligned} \tag{13.72}$$

nous avons une application continue de A vers $\mathbb{1}$, qui, à tout t fait correspondre la matrice $\varphi(t)$, inversible de déterminant 1.

Donc tous les éléments de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ peuvent être reliés à $\mathbb{1}$. Par conséquent, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est connexe par arcs. □

PROPooVJNIooMByUJQ

Proposition 13.25 ([479])**.**
Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soient $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et sa décomposition (13.58). Comme montré précédemment, chacune des transvections peut être reliée à $\mathbb{1}$ par un chemin continu dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. En ce qui concerne le facteur de translation, nous ne pouvons pas simplement prendre le chemin donné par $t \mapsto D_n\big(t\det(A)\big)$ parce que le résultat n'est pas inversible en $t = 0$.

Puisque $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs il existe une application continue $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ telle que $\alpha(0) = \det(A) \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha(1) = 1$. Il suffit alors de prendre $D_n\big(\alpha(t)\big)$ et nous avons un chemin continu de A vers $\mathbb{1}$ restant dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. □

PROPooBIYQooWLndSW

Proposition 13.26.
Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *a exactement deux composantes connexes par arcs.*

Démonstration. Nous notons $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ les parties de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ formées des applications de déterminant strictement positifs et strictement négatifs respectivement. D'après le théorème des valeurs

[15] Définition 12.103.

intermédiaires (théorème 9.95), il n'existe pas d'application continue dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ reliant $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ à $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ tout en restant dans les applications de déterminant non nul[16].

Montrons que $\mathrm{GL}^{\pm}(n,\mathbb{R})$ sont connexes par arcs. Si $A\in\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ alors grâce à la décomposition (13.58), il existe un chemin continu de A vers $D_n\big(\det(A)\big)$. Puisque $\mathbb{R}^{\pm}$ sont connexes par arcs, il est possible de relier $D_n\big(\det(A)\big)$ à $D_n(\pm1)$ par un chemin continu. □

13.2.3 Densité

PropDigDensVxzPuo

Proposition 13.27.
Les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$.

Démonstration. D'après le lemme de Schur 12.102, une matrice de $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ est de la forme

$$A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & *\\ 0 & \ddots & *\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}Q^{-1}. \tag{13.73}$$

Les valeurs propres sont sur la diagonale. La matrice est diagonalisable si les éléments de la diagonales sont tous différents. Il suffit maintenant de considérer n suites $(\epsilon_k^{(r)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergentes vers zéro telles que pour chaque k les nombres $\lambda_r+\epsilon_k^{(r)}$ soient tous différents. La suite de matrices

$$A_k=Q\begin{pmatrix}\lambda_1+\epsilon_k^{(1)} & * & *\\ 0 & \ddots & *\\ 0 & 0 & \lambda_n+\epsilon_k^{(n)}\end{pmatrix}Q^{-1}. \tag{13.74}$$

est alors diagonalisable pour tout k et nous avons $\lim_{k\to\infty}A_k=A$. □

PropQGUPooVudelJ

Proposition 13.28.
Les matrices inversibles sont denses dans l'ensemble des matrices. C'est-à-dire que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *est dense dans* $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$; le lemme de Schur réel 8.224 nous permet d'écrire

$$A=Q^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}Q \tag{13.75}$$

EQooJHPAooWFVSat

avec Q orthogonale.

Nous allons définir une suite (A_k) de matrices inversibles convergeant vers A. Pour cela nous considérons, pour chaque i, une suite $(\epsilon_k^{(i)})$ telle que $\lambda_i+\epsilon_k^{(i)}\neq0$ et $\epsilon_k^{(i)}\to0$. La matrice A_k est la matrice donnée par (13.75) dans laquelle nous remplaçons λ_i par $\lambda_i+\epsilon_k^{(i)}$.

En ce qui concerne les blocs, ceux dont le déterminant est non nul, nous n'y touchons pas, et ceux dont le déterminant est nul, nous remplaçons a par $a+\epsilon_k$.

Avec cela, $Q^{-1}A_kQ$ est une suite dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ qui converge vers A. □

PROPooZUHOooQBwfZq

Proposition 13.29.
Si $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ *alors*

$$e^{\mathrm{Tr}(A)}=\det(e^A). \tag{13.76}$$

Démonstration. Ici, e^A est l'exponentielle, soit d'endomorphisme, soit de matrice définie par la proposition 10.346.

Le résultat est un simple calcul pour les matrices diagonalisables. Si A n'est pas diagonalisable, nous considérons une suite de matrices diagonalisables A_k dont la limite est A (proposition 13.27). La suite

$$a_k=e^{\mathrm{Tr}(A_k)} \tag{13.77}$$

[16] Si $\varphi\colon[0,1]\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est le chemin, la fonction à mettre dans le théorème des valeurs intermédiaires est la fonction $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ $t\mapsto\det\big(\varphi(t)\big)$.

converge vers $e^{\mathrm{Tr}(A)}$ tandis que la suite

$$b_k = \det(e^{A_k}) \tag{13.78}$$

converge vers $\det(e^A)$. Mais nous avons $a_k = b_k$ pour tout k ; les limites sont donc égales. □
COROOOKKSooHrsYOs

Corolaire 13.30.
Si $X \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ alors

$$\frac{d}{dt}\Big[\det(e^{tX})\Big]_{t=0} = \mathrm{Tr}(X). \tag{13.79}$$

Démonstration. Nous écrivons la proposition 13.29 pour tX au lieu de X ; pour chaque t nous avons

$$\det\left(e^{tX}\right) = e^{\mathrm{Tr}(tX)} = e^{t\,\mathrm{Tr}(X)}. \tag{13.80}$$

La dérivation par rapport à t en $t = 0$ donne le résultat attendu. □
ThoHZTooWDjTYI

Théorème 13.31 (Cayley-Hamilton[480, 481])**.**
Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif quelconque annule son propre polynôme caractéristique

Une autre démonstration est donnée par le théorème 8.116.

Démonstration. La preuve est divisée en plusieurs étapes.

(1) **Endomorphisme diagonalisable** Soit u un endomorphisme sur un espace vectoriel V de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$ et χ_u sont polynôme caractéristique. Nous savons que si λ est une valeur propre de u alors $\chi_u(\lambda) = 0$ par le théorème 8.113(2). En combinant avec le lemme 8.93, si x est vecteur propre pour la valeur propre λ de u nous avons

$$\chi_u(u)x = \chi_u(\lambda)x = 0. \tag{13.81}$$

Donc tant que u possède une base de vecteurs propres nous avons $\chi_u(u) = 0$.

(2) **Le cas complexe**

Nous nous restreignons à présent (et provisoirement) au cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ce qui nous donne $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ par la proposition 13.27. Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ nous considérons une suite de matrices diagonalisables $A_k \xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{C})} A$. Pour chaque k nous avons par le point précédent

$$\chi_{u_k}(u_k) = 0. \tag{13.82}$$

Chacune des composantes de $\chi_{u_k}(u_k)$ est un polynôme en les composantes de u_k, ce qui légitime le passage à la limite :

$$\chi_u(u) = 0. \tag{13.83}$$

Le théorème est établi pour toutes les matrices de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ et donc aussi pour tous les sous-corps de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

(3) **Le cas général**

Par définition, $\chi_u(X) = \det(u - X\mathbb{1})$; les coefficients de X sont des polynômes à coefficients entiers en les composantes de u. En substituant u à X nous obtenons une matrice dont chacune des entrées est un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de u. Pour chaque i et j entre 1 et n il existe donc un polynôme $P_{ij} \in \mathbb{Z}(X_1, \dots, X_{n^2})$ tel que

$$\chi_u(u)_{ij} = P(u_{11}, \dots, u_{nn}). \tag{13.84}$$

Ces polynômes ne dépendent pas de u ni du corps sur lequel on travaille. Notre but est maintenant de prouver que $P_{ij} = 0$.

Étant donné que le cas complexe (et a fortiori entier) est déjà prouvé nous savons que pour tout $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{Z})$ nous avons $P(u_{11}, \dots, u_{nn}) = 0$. La proposition 6.185 nous donne effectivement $P = 0$, en conséquence de quoi l'endomorphisme $\chi_u(u)$ est nul.

□

Exemple 13.32.
Pour montrer que chaque composante $\chi_u(u)$ est bien un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de u, voyons l'exemple 2×2 : $u=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. D'abord

$$\chi_u(X)=\det\begin{pmatrix} a-X & b \\ c & d-X \end{pmatrix}=X^2-(a+d)X+ad-cb. \tag{13.85}$$

Le coefficient de X^2 est 1, celui de X est $-a-d$ et le terme indépendant est $ad-cb$; tout trois sont des polynômes à coefficients entiers en a,b,c,d. Après substitution de X par u,

$$\chi_u(u)_{ij}=(u^2)_{ij}-(a+d)u_{ij}+ad-cb. \tag{13.86}$$

C'est bien un polynôme à coefficients entiers en les entrées de la matrice u. △

13.2.4 Racine carrée d'une matrice hermitienne positive

PropVZvCWn

Proposition-Définition 13.33.
Si $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne[17] *positive, alors il existe une unique matrice hermitienne positive R telle que $A=R^2$. De plus R est un polynôme (de $\mathbb{R}[X]$) en A.*

La matrice R ainsi définie est la ***racine carrée*** *de A, et est notée $\sqrt{A}$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Existence** Étant donné que A est hermitienne, elle est diagonalisable par une matrice unitaire (proposition 12.104), et ses valeurs propres sont réelles et positives (parce que A est positive). Soit donc P une matrice unitaire telle que

$$P^*AP=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{13.87}$$

avec $\alpha_i>0$. Si on pose

$$R=P\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix}P^*, \tag{13.88}$$

alors $R^2=A$ parce que $P^*P=\mathbb{1}$.

(2) **Hermitienne positive** La matrice R est hermitienne parce que, avec un peu de notation raccourcie, $R=P^*\sqrt{\alpha}P$ et $R^*=P^*\sqrt{\alpha}P$. D'autre part, elle est positive parce que ses valeurs propres sont les $\sqrt{\alpha_i}$ qui sont positives.

(3) **Polynôme** Nous montrons maintenant que la matrice R est un polynôme en A. Pour cela nous considérons un polynôme Q tel que $Q(\alpha_i)=\sqrt{\alpha_i}$ pour tout i. Soit $\{e_i\}$ une base de diagonalisation de A : $Ae_i=\alpha_ie_i$. Alors c'est encore une base de diagonalisation de $Q(A)$. En effet si $Q=\sum_k a_kX^k$, alors

$$Q(A)e_i=(\sum_k a_kA^k)e_i=(\sum_k a_k\alpha_i^k)e_i=Q(\alpha_i)e_i=\sqrt{\alpha_i}e_i. \tag{13.89}$$

Les valeurs propres de $Q(A)$ sont donc $\sqrt{\alpha_i}$. Nous savons maintenant que $Q(A)$ a la même base de diagonalisation de A (et donc la même matrice unitaire P qui diagonalise), c'est-à-dire que

$$Q(A)=P^*\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix}=R. \tag{13.90}$$

Donc oui, R est un polynôme en A.

Notons que ce Q n'est pas du tout unique ; il existe une infinité de polynômes envoyant n nombres donnés sur n nombres donnés.

[17] Définition 8.174.

(4) **Unicité** Soit S une matrice hermitienne positive telle que $R^2 = S^2 = A$. D'abord S commute avec A parce que

$$SA = S^3 = S^2S = AS. \tag{13.91}$$

Donc S commute aussi avec $Q(A) = R$. Étant donné que S et R commutent et sont diagonalisables, ils sont simultanément diagonalisables par le corolaire 8.218. Soient $D_R = PRP^*$ et $D_S = PSP^*$ les formes diagonales de R et S dans une base de simultanée diagonalisation. Les carrés des valeurs propres de R et S étant identiques (ce sont les valeurs propres de A) et les valeurs propres de R et S étant positives, nous déduisons que $D_R = D_S$ et donc que $R = P^*D_RP = P^*D_SP = S$.

□

Une des applications usuelles de cette proposition est la décomposition polaire.

13.2.5 Racine carrée d'une matrice symétrique positive

LemTLlTAAf

Lemme 13.34 ([482]).
Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ *est compact.*

Démonstration. Nous avons $O(n) = f^{-1}\big(\{\mathbb{1}_n\}\big)$ où f est l'application continue $A \mapsto A^tA$. En tant qu'image inverse d'un fermé par une application continue, le groupe $O(n)$ est fermé.

De plus il est borné parce que tous les coefficients d'une matrice orthogonale sont $\leqslant 1$, donc $\|A\|_\infty$ pour tout $A \in O(n)$. □

PropPEMDqVT

Proposition 13.35.
Une matrice symétrique définie ou semi définie positive, admet une unique racine carrée symétrique. Le spectre de la racine carrée est la racine carrée du spectre de la matrice de départ.

Démonstration. Propriétés de la racine carrée d'une matrice symétrique

(1) **Existence** Soit T une matrice symétrique et Q une matrice orthogonale qui diagonalise[18] T : $QTQ^{-1} = D$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ et $\lambda_i \geqslant 0$. En posant $R = Q^{-1}\sqrt{D}Q$, il est vite vérifié que $R^2 = T$ et que R est symétrique. En ce qui concerne le spectre, R a pour valeurs propres les $\sqrt{\lambda_i}$.

(2) **Unicité**

Soit R une matrice symétrique de T : $R^2 = T$. Du coup R et T commutent : $RT = R^3 = TR$. Par conséquent les espaces propres de T sont stables sous R. Soit E_λ l'un d'eux de dimension d, et T_F, R_F les restrictions de T et R à E_λ. L'application T_F est une homothétie et $R_F^2 = T_F = \lambda\mathbb{1}$. Mais R_F est encore une matrice symétrique définie positive, donc nous pouvons considérer une base $\{e_1, \dots, e_d\}$ de E_λ qui diagonalise R_F avec les valeurs propres μ_i ; nous avons donc en même temps

$$R_f^2(e_i) = \mu_i^2 e_i \tag{13.92a}$$
$$T_F(e_i) = \lambda e_i, \tag{13.92b}$$

de telle sorte que $\mu_i^2 = \lambda$. Mais les valeurs propres de R_F sont positives, sont $\mu_i = \sqrt{\lambda}$ pour tout i. En conclusion R_F est univoquement déterminé par la donnée de T. Vu que cela est valable pour tous les espaces propres de T et que ces espaces propres engendrent tout E, l'opérateur R est déterminé de façon univoque par T.

□

Notons que nous n'avons démontré l'unicité qu'au sein des matrices symétriques.

13.2.6 Décomposition polaires : cas réel

Nous rappelons que $S^{++}(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives, d'après le paragraphe 8.229.

LemMGUSooPqjguE

Lemme 13.36.
La partie $S^+(n, \mathbb{R})$ *est fermée dans* $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$.

[18] Théorème 8.225.

Démonstration. En effet si S_k est une suite de matrices symétriques convergeant dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ vers la matrice A, les suites $(S_k)_{ij}$ et $(S_k)_{ji}$ des composantes ij et ji sont des suites égales, et donc leurs limites sont égales[19]. Donc la limite est symétrique.

En ce qui concerne le spectre, le théorème 8.225 nous permet de diagonaliser : $S_k = Q_k D_k Q_k^{-1}$ où les D_k sont des matrices diagonales remplies de nombres positifs ou nuls. Comme $O(n)$ est compact[20], nous avons une sous-suite $Q_{\varphi(k)}$ convergente : $Q_{\varphi(k)} \to Q$. Pour chaque k, nous avons

$$S_{\varphi(k)} = Q_{\varphi(k)} D_{\varphi(k)} Q_{\varphi(k)}^{-1}, \tag{13.93}$$

dont la limite existe et vaut A. Puisque pour tout k, $D_{\varphi(k)} = Q_{\varphi(k)}^{-1} S_{\varphi(k)} Q_{\varphi(k)}$ et que le produit matriciel est continu, la suite $k \mapsto D_{\varphi(k)}$ est une suite convergente dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Nous notons D sa limite qui est encore une matrice diagonale contenant des nombres positifs ou nuls sur la diagonale.

$$A = \lim_{k\to\infty} S_{\varphi(k)} = QDQ^{-1}, \tag{13.94}$$

et donc le spectre de A est la limite de ceux des matrices $D_{\varphi(k)}$. Chacun étant positif, la limite est positive. Donc $A \in S^+(n,\mathbb{R})$. □

LemZKJWqIP

Lemme 13.37.
La fermeture de l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives est l'ensemble des matrices définies positives : $\mathrm{Adh}(S^{++}(n,\mathbb{R})) = S^+(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Le lemme 13.36 nous dit que $S^+(n,\mathbb{R})$ était fermé. Nous devons prouver que pour tout élément de $S^+(n,\mathbb{R})$, il existe une suite (S_k) dans $S^{++}(n,\mathbb{R})$ convergeant vers S.

Si $S \in S^+(n,\mathbb{R})$ alors nous avons la diagonalisation

$$S = QDQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} \tag{13.95}$$

où $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i. Nous définissons

$$D_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \epsilon_k^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n + \epsilon_k^{(n)} \end{pmatrix} \tag{13.96}$$

où ϵ_k^i est une suite convergent vers 0 telle que $\lambda_i + \epsilon_n^{(i)} > 0$ pour tout i et k. Typiquement si $\lambda_i > 0$ alors $\epsilon_k^{(i)} = 0$ et sinon $\epsilon_k^{(i)} = 1/k$.

Pour tout k nous avons $QD_kQ^{-1} \in S^{++}(n,\mathbb{R})$ et de plus $QD_kQ^{-1} \to QDQ = S$. □

ThoLHebUAU

Théorème 13.38 (Décomposition polaire de matrices symétriques définies positives[482, 483, 484])**.**
En ce qui concerne les matrices inversibles :

$$\begin{aligned} f\colon O(n,\mathbb{R}) \times S^{++}(n,\mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ (Q,S) &\mapsto SQ \end{aligned} \tag{13.97}$$

est un homéomorphisme[21]*.*

En ce qui concerne les matrices en général :

$$\begin{aligned} g\colon O(n,\mathbb{R}) \times S^{+}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ (Q,S) &\mapsto SQ \end{aligned} \tag{13.98}$$

est une surjection mais pas une injection.

De plus les mêmes conclusions tiennent si nous prenons $(Q,S) \mapsto QS$ au lieu de SQ.

[19] Ici nous utilisons le critère de convergence composante par composante et le fait que nous ne sommes pas trop inquiétés par la norme que nous choisissons parce que toutes les normes sont équivalentes par le théorème 10.61.

[20] Lemme 13.34.

[21] Cela est en réalité un difféomorphisme, voir la remarque 13.40.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 13.39
Je crois que les éléments de la décomposition polaire sont des polynômes en M. Écrivez-moi si vous pouvez confirmer ou infirmer.

Démonstration. Nous commençons par prouver les résultats concernant les matrices inversibles.

(1) **Existence et unicité**

Si $M = SQ$, alors $MM^t = SQQ^tS^t = S^2$, donc S doit être une racine carrée symétrique de la matrice définie positive MM^t. La proposition 13.35 nous dit que ça existe et que c'est unique. Donc S est univoquement déterminé par M. Maintenant avoir $Q = MS^{-1}$ est obligatoire (unicité) et fonctionne :

$$Q^tQ = (S^{-1})^tM^tMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = \mathbb{1}, \tag{13.99}$$

donc Q ainsi défini est orthogonale.

Notons que ceci ne fonctionne pas lorsque M n'est pas inversible parce qu'alors S n'est pas inversible.

(2) **Homéomorphisme**

Le fait que f soit continue n'est pas un problème : c'est un produit de matrices. Nous devons vérifier que f^{-1} est continue. Soit une suite convergente $M_k \to M$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Si nous nommons (Q_k, S_k) la décomposition polaire de M_k et (Q, S) celle de M, nous devons prouver que $Q_k \to Q$ et $S_k \to S$. En effet dans ce cas nous aurions

$$\lim_{k\to\infty} f^{-1}(M_k) = \lim_{k\to\infty}(Q_k, S_k) = (Q, S) = f^{-1}(M). \tag{13.100}$$ EqJIkoaJv

Étant donné que $O(n)$ est compact (lemme 13.34), la suite (Q_k) admet une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass, théorème 7.194) que nous nommons

$$Q_{\varphi(k)} \to F \in O(n). \tag{13.101}$$

Vu que la suite (M_k) converge, sa sous-suite converge vers la même limite : $M_{\varphi(k)} \to M$ et vu que pour tout k nous avons $S_k = M_kQ_k^{-1}$,

$$S_{\varphi(k)} \to G = MF^{-1}. \tag{13.102}$$

Vu que chacune des matrices $S_{\varphi(k)}$ est symétrique définie positive, la limite est symétrique et semi-définie positive[22]. Donc $G \in S^+(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ parce que de plus M et F étant inversibles, G est inversible. En ce qui concerne la sous-suite nous avons

$$M_{\varphi(k)} = S_{\varphi(k)}Q_{\varphi(k)} \to GF = M \tag{13.103}$$

où $F \in O(n)$ et $G \in S^+(n,\mathbb{R})$. Par unicité de la décomposition polaire de M (partie déjà démontrée), nous avons $G = S$ et $F = Q$.

Nous avons prouvé que toute sous-suite convergente de Q_k a Q pour limite. Donc la suite elle-même converge[23] vers Q. Donc $Q_k \to Q$. Du coup vu que $S_k = M_kQ_k^{-1}$ est un produit de suites convergentes, S_k converge également, vers S : $S_k \to S$.

Au final l'application f^{-1} est bien continue parce que les égalités (13.100) ont bien lieu.

Nous passons maintenant à la preuve dans le cas des matrices en général.

Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$; par densité (lemme 13.28), il existe une suite (A_k) dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ telle que $A_k \to A$. Pour chacun des k nous appliquons la décomposition polaire déjà prouvée : $A_k = Q_kS_k$. D'abord (Q_k) est une suite dans le compact[24] $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et accepte donc une sous-suite convergente. Quitte à redéfinir la suite de départ, nous supposons pour alléger les notations que $Q_k \to Q \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. Vu que Q_k est inversible,

$$S_k = Q_k^{-1}A_k \tag{13.104}$$

Le produit matriciel étant continu nous avons $S_k \to S$ dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Mais $S^+(n,\mathbb{R})$ étant fermé (lemme 13.36) nous avons aussi $S \in S^+(n,\mathbb{R})$. □ RemBJCBooGLiRmG

Remarque 13.40.
Pour démontrer que f est différentiable, nous devons utiliser le théorème d'inversion locale 17.47 ; cela est fait dans la proposition 17.57.

[22] Lemme 13.37
[23] Proposition 7.358, pas difficile.
[24] Lemme 13.34.

CorAWYBooNCCQSf

Corolaire 13.41.
Toute matrice peut être écrite sous la forme Q_1DQ_2 où Q_1 et Q_2 sont orthogonales et D est diagonale.

Démonstration. Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ alors la décomposition polaire 13.38 nous donne $A = SQ$ où S est symétrique définie positive et Q est orthogonale. La matrice S peut ensuite être diagonalisée par le théorème 8.225 : $S = RDR^{-1}$ où D est diagonale et R est orthogonale. Avec ces deux décompositions en main, $A = SQ = RDR^{-1}Q$. La matrice $R^{-1}Q$ est orthogonale. □

13.2.7 Enveloppe convexe

Définition 13.42.
*Un point a d'un ensemble convexe C est un **point extrémal** si $C \setminus \{a\}$ est convexe.*

ThoBALmoQw

Théorème 13.43 ([128]).
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{L}(E)$ l'espace des opérateurs linéaires sur E sur lequel nous considérons la norme subordonnée[25] à celle sur E. L'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$ est le groupe orthogonal $O(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$. Montrons pour commencer que les éléments de $O(n)$ sont extrémaux dans $\mathcal{B}$. D'abord si $A \in O(E)$ alors $\|A\| = 1$ parce que $\|Ax\| = \|x\|$. Supposons maintenant que A n'est pas extrémal, c'est-à-dire qu'il est le milieu d'un segment joignant deux points (distincts) de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$. Soient donc $T, U \in \mathcal{B}$ tels que $A = \frac{1}{2}(T+U)$. Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ nous avons

$$1 = \|x\| = \|Ax\| = \frac{1}{2}\|Tx + Ux\| \leqslant \frac{1}{2}\big(\|Tx\| + \|Ux\|\big) \leqslant \frac{1}{2}\big(\|T\| + \|U\|\big) \leqslant 1 \tag{13.105}$$

EqKTuAIIE

Toutes les inégalités sont en réalité des égalités. En particulier nous avons

$$\|Tx + Ux\| = \|Tx\| + \|Ux\|, \tag{13.106}$$

mais alors nous sommes dans un cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 10.1) et donc il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $Tx = \lambda Ux$. Mais de plus les ~~inégalité~~ égalités (13.105) nous donnent

$$\frac{1}{2}\big(\|Tx\| + \|Ux\|\big) = 1 \tag{13.107}$$

alors que nous savons que $\|Tx\|, \|Ux\| \leqslant 1$, donc $\|Tx\| = \|Ux\| = 1$. La seule possibilité est d'avoir $\lambda = 1$. Nous avons prouvé que $Tx = Ux$ pour tout x de norme 1. Nous en déduisons que $T = U$.

Au final A n'est pas le milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$.

Nous passons donc à l'inclusion inverse : nous prouvons que les points extrémaux de $\mathcal{B}$ sont dans $O(E)$. Pour cela nous prenons $U \in \mathcal{B} \setminus O(E)$ et nous allons montrer que U n'est pas un point extrémal : nous allons l'écrire comme milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$.

Par la seconde partie du théorème de décomposition polaire 13.38, il existe $Q \in O(n,\mathbb{R})$ et $S \in S^+(n,\mathbb{R})$ tels que $U = QS$. Nous diagonalisons S à l'aide de la matrice orthogonale P :

$$S = PDP^{-1} \tag{13.108}$$

avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$. En termes de normes, nous avons

$$\|U\| = \|S\| = \|D\|. \tag{13.109}$$

En effet vu que Q est orthogonale, $\|Ux\| = \|QSx\| = \|Sx\|$ pour tout x, donc $\|U\| = \|S\|$. De plus pour tout x nous avons

$$\|Sx\| = \|PDP^{-1}x\| = \|DP^{-1}x\|. \tag{13.110}$$

Étant donné que P^{-1} est une bijection, le supremum des $\|Sx\|$ sera le même que celui des $\|Dx\|$ et donc $\|S\| = \|D\|$. Étant donné que par définition $\|U\| \leqslant 1$, nous avons aussi $\|D\| \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ (pour rappel, les valeurs propres de D sont positives ou nulles parce que S est ainsi).

Comme $U \notin O(E)$, au moins une des valeurs propres n'est pas 1, supposons que ce soit λ_1. Alors nous avons $\alpha, \beta \in [-1,1]$ avec $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ et $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Nous posons alors

$$D_1 = \operatorname{diag}(\alpha, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \tag{13.111a}$$
$$D_2 = \operatorname{diag}(\beta, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \tag{13.111b}$$

[25] Définition 10.67.

Nous avons bien $D_1 \neq D2$ et $D_1 + D_2 = D$. Par conséquent

$$U = \frac{1}{2}\big(QPD_1P^{-1} + QPD_2P^{-1}\big) \tag{13.112}$$

avec $QPD_1P^{-1} \neq QPD_2^{-1}$. La matrice U est donc le milieu d'un segment. Reste à montrer que ce segment est dans $\mathcal{B}$. Pour ce faire, prenons $x \in E$ et calculons :

$$\|QPD_iP^{-1}x\| = \|D_iP^{-1}x\| \leqslant \|P^{-1}x\| = \|x\| \tag{13.113}$$

parce que $\|D_i\| \leqslant 1$ et P^{-1} est orthogonale. Au final la norme de QPD_iP est plus petite que 1 et donc U est bien le milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$, et donc non extrémal. □

ThoVBzqUpy

Théorème 13.44 ([485]).
L'enveloppe convexe de $O(n)$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour la norme induite de $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}\text{onv}\big(O(n,\mathbb{R})\big)$ l'enveloppe convexe de $O(n,\mathbb{R})$. Vu que $\mathcal{B}$ est convexe nous avons $\mathcal{C}\text{onv}\big(O(n)\big) \subset \mathcal{B}$.

Maintenant nous devons prouver l'inclusion inverse. Pour ce faire nous supposons avoir un élément $A \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}\text{onv}\big(O(n)\big)$ et nous allons dériver une contradiction.

Remarquons que $O(n)$ est compact par le lemme 13.34 et que par conséquent $\mathcal{C}\text{onv}(O(n))$ est compacte par le corolaire 11.42 et donc fermée. Nous considérons un produit scalaire $(X,Y) \mapsto X \cdot Y$ sur $\mathbb{M}$. Vu que $\mathcal{C}\text{onv}\big(O(n)\big)$ est un fermé convexe nous pouvons considérer la projection[26] sur $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ relativement au produit scalaire choisi.

Nous notons $P = \texttt{proj}_{\mathcal{C}\text{onv}\left(O(n)\right)}(A)$. En vertu du théorème de projection, nous avons

$$(A - P) \cdot (M - P) \leqslant 0 \tag{13.114}$$

EqYSjsLTL

pour tout $M \in \mathcal{C}\text{onv}\, O(n)$. Notons $B = A - P$ pour alléger les notations. L'équation (13.114) s'écrit

$$B \cdot M \leqslant B \cdot P. \tag{13.115}$$

EqQDLZqXQ

D'autre part vu que $B \neq 0$ nous avons $B \cdot B > 0$, c'est-à-dire $B \cdot (A - P) > 0$ et donc

$$B \cdot A > B \cdot P. \tag{13.116}$$

En combinant avec (13.115),

$$B \cdot M \leqslant B \cdot P < B \cdot A. \tag{13.117}$$

EqIQNlwql

Nous utilisons maintenant la décomposition polaire, théorème 13.38, pour écrire $B = QS$ avec $Q \in O(n)$ et $S \in S^+(n,\mathbb{R})$. Vu que l'inégalité (13.117) tient pour tout $M \in \mathcal{C}\text{onv}(O(n))$, elle tient en particulier pour $Q \in O(n)$. Donc

$$B \cdot Q < B \cdot A. \tag{13.118}$$

EQooOSAXooLbTQAG

Nous nous attachons à présent au produit scalaire $(X,Y) \mapsto \text{Tr}(X^tY)$ de la proposition 12.125. D'abord

$$B \cdot Q = \text{Tr}(B^tQ) = \text{Tr}(S^tQ^tQ) = \text{Tr}(S^t) = \text{Tr}(S), \tag{13.119}$$

EaHVxWdau

et ensuite l'inégalité (13.118) devient

$$\text{Tr}(S) < B \cdot A = \text{Tr}(S^tQ^tA). \tag{13.120}$$

Nous choisissons une basse $\{e_i\}$ diagonalisant S : $Se_i = \lambda_i e_i$ vérifiant automatiquement $\lambda_i \geqslant 0$ parce que S est semi-définie positive[27]. Alors

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(S) &< \text{Tr}(S^tQ^tA) && \text{(13.121a)}\\
&= \sum_i \langle S^tQ^tAe_i, e_i\rangle && \text{(13.121b)}\\
&= \sum_i \langle Ae_i, QSe_i\rangle && \text{(13.121c)}\\
&\leqslant \sum_i \|Ae_i\||\lambda_i| \underbrace{\|Qe_i\|}_{=1} && \text{(13.121d)}\\
&\leqslant \sum_i \lambda_i && A \in \mathcal{B} \Rightarrow \|Ae_i\| \leqslant 1 \quad \text{(13.121e)}\\
&= \text{Tr}(S). && \text{(13.121f)}
\end{aligned}$$

Il faut noter que la première inégalité est stricte, et donc nous avons une contradiction. □

[26] Le théorème de projection : théorème 12.150.
[27] Définition 8.228.

13.2.8 Décomposition de Bruhat

ThoizlYJO

Théorème 13.45 (Décomposition de Bruhat)**.**
Soit $\mathbb{K}$ un corps ; un élément $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$M = T_1 P_\sigma T_2 \tag{13.122}$$

où T_1 et T_2 sont des matrices triangulaires supérieures inversibles et où P_σ est une matrice de permutations $\sigma \in S_n$. De plus il y a unicité de σ.

Démonstration. Afin de rendre les choses plus visuelles, nous nous permettons de donner des exemples au fur et à mesure de la preuve. Nous prenons l'exemple de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{13.123}$$

(1) **Existence** Soit $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$; puisqu'elle est inversible, on a un indice i_1 maximum tel que $M_{i_1,1} \neq 0$. Nous changeons toutes les lignes jusque là, c'est-à-dire que nous faisons, pour $1 \leqslant i < i_1$,

$$L_i \to L_i - \frac{M_{i1}}{M_{i_1 1}} L_{i_1}. \tag{13.124}$$

EqGHUbwR

Voir le lemme 13.17(3).

Nous avons donc obtenu une matrice dont la première colonne est nulle sauf la case numéro i_1. L'opération (13.124) revient à considérer la multiplication par la matrice de transvection

$$T_1^{(i)} = T_{ii_1}\left(-\frac{M_{i1}}{M_{i_1 1}}\right) \tag{13.125}$$

pour tout $i < i_1$. Pour rappel nous ne changeons que les lignes *au-dessus* de la i_1. Du coup les matrices $T_1^{(i)}$ sont triangulaires supérieures. Nous avons donc la nouvelle matrice $M_1 = \left(\prod_{i<i_1} T_1^{(i)}\right) M$ pour laquelle toute la première colonne est nulle sauf un élément.

Dans le cas de l'exemple, le « pivot » sera la ligne $(2,5,6)$ et la matrice se transforme à l'aide de la matrice $T_1 = T_{12}(-1/2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{13.126}$$

EqvjXIYf

Maintenant nous faisons de même avec les colonnes (en renommant M la matrice obtenue à l'étape précédente) :

$$C_j \to C_j - \frac{M_{i_1 j}}{M_{i_1 1}} C_1, \tag{13.127}$$

qui revient à multiplier à droite par les matrices $T_{1j}(\frac{M_{i_1 i}}{M_{i_1 1}})$ avec $j > 1$. Encore une fois ce sont des matrices triangulaires supérieures.

Dans l'exemple, pour traiter la seconde colonne, nous multiplions (13.126) à droite par la matrice $T_{12}(-5/2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{13.128}$$

Appliquer encore la matrice $T_{13}(-6/2)$ apporte la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{13.129}$$

Enfin nous multiplions la matrice obtenue par $\frac{1}{M_{i_1 1}}\mathbb{1}$ pour normaliser à 1 l'élément « pivot » que nous avions choisi. Dans notre exemple nous multiplions par $1/2$ pour trouver

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{13.130}$$

Eqduglwu

La matrice obtenue jusqu'ici possède une ligne et une colonne de zéros avec un 1 à leur intersection, et elle est de la forme

$$M' = T_1 M T_2 \tag{13.131}$$

où T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures et inversibles, produits de matrices de transvection (et d'une matrice scalaire pour la normalisation).

Il reste à recommencer l'opération avec la seconde colonne (qui n'est pas toute nulle parce que le déterminant est encore non nul) puis la suivante, etc. Dans notre exemple de l'équation (13.130), nous éliminerions le 1/4 et le 4 en utilisant le 7/2.

Encore une fois tout cela se fait à l'aide de matrices supérieures parce qu'à chaque étape, les colonnes précédent le pivot sont déjà nulles (sauf un 1) et ne doivent donc pas être touchées.

À la fin de ce processus, ce qui reste est une matrice TMT' qui ne contient plus qu'un seul 1 sur chaque ligne et chaque colonne, c'est-à-dire une matrice de permutations : $P_\sigma = TMT'$ et donc

$$M = T_\sigma^{-1}(T')^{-1}. \tag{13.132}$$

(2) **Unicité**

Soient $\sigma, \sigma \in S_n'$ tels que $T_1 P_\sigma T_2 = S_1 P_\tau S_2$ avec T_i et S_i triangulaires supérieures et inversibles. En posant $T = T_2 S_2^{-1}$ et $S = T_1^{-1} S_1$, nous avons

$$P_\sigma T = S P_\tau \tag{13.133}$$

où S et T sont des matrices triangulaires supérieures et inversibles. Par les calculs de la preuve du lemme 4.110,

$$\begin{cases} (P_\sigma T)_{kl} = T_{\sigma^{-1}(k)l} & \text{(13.134a)} \\ (SP_\tau)_{kl} = S_{k\tau(l)}, & \text{(13.134b)} \end{cases}$$

et donc

$$T_{\sigma^{-1}(k)l} = S_{k\tau(l)}. \tag{13.135}$$ EqKlmgOT

En écrivant cette équation avec $k = \sigma(i)$ (nous rappelons que σ est bijective),

$$T_{il} = S_{\sigma(i)\tau(l)}. \tag{13.136}$$

Nous savons que les termes diagonaux de T sont non nuls parce que T est triangulaire supérieure et inversible (donc pas de colonnes entières nulles). Nous avons donc, en prenant $i = l = k$,

$$0 \neq T_{kk} = S_{\sigma(k)\tau(k)}. \tag{13.137}$$

La matrice étant triangulaire supérieure, cela implique

$$\sigma(k) \leqslant \tau(k). \tag{13.138}$$ EqEmiBTX

De la même manière en écrivant (13.135) avec $l = \tau^{-1}(i)$,

$$S_{ki} = T_{\sigma^{-1}(k)\tau^{-1}(i)} \tag{13.139}$$

et donc

$$\sigma^{-1}(k) \leqslant \tau^{-1}(k). \tag{13.140}$$

En écrivant cela avec $k = \sigma(j)$, nous avons $j \leqslant \tau^{-1}\sigma(j)$ et en appliquant enfin τ,

$$\tau(j) \leqslant \sigma(j). \tag{13.141}$$

En comparant avec (13.138), nous avons $\sigma = \tau$.

□

13.3 Sous-groupes du groupe linéaire

LemOCtdiaE

Lemme 13.46 ([128]).
Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme euclidienne $\|.\|$. Soit K un compact convexe de V et G, un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$ tel que

$$u(K) \subset K \tag{13.142}$$

pour tout $u \in G$. Alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$ pour tout $u \in G$.

Démonstration. Avant de nous lancer dans la preuve, nous avons besoin d'un petit résultat.

(1) **Un pré-résultat**

Nous commençons par prouver que si $v \in \mathcal{L}(V)$ vérifie $v(K) \subset K$, alors v a un point fixe dans K. Pour cela nous considérons $x_0 \in K$ et la suite

$$x_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v^i(x_0). \tag{13.143}$$

Étant donné que K est convexe et stable par v, la suite (x_k) est contenue dans K et accepte une sous-suite convergente[28] que nous allons noter $x_{\varphi(n)}$ avec $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Soit $a \in K$ la limite :

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = a. \tag{13.144}$$

Tant que nous y sommes nous pouvons aussi calculer $v(x_k)$:

$$\begin{aligned} v(x_k) &= v\left(\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} v^i(x_0) \right) && \text{(13.145a)} \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v^{i+1}(x_0) && \text{(13.145b)} \\ &= x_k + \frac{1}{k+1}\Big(v^{k+1}(x_0) - x_0 \Big). && \text{(13.145c)} \end{aligned}$$

EqUAfcaKG

La norme $\|v^{k+1}(x_0) - x_0\|$ est bornée par le diamètre de K, donc en prenant la limite $k \to \infty$ le second terme de (13.145c) tend vers zéro. En prenant ces égalités en $k = \varphi(n)$ et en prenant $n \to \infty$, nous trouvons

$$v(a) = a, \tag{13.146}$$

c'est-à-dire le résultat que nous voulions dans un premier temps.

(2) **Une norme sur V**

Nous passons maintenant à la preuve du lemme. D'abord nous remarquons que le groupe G agit sur V par $u \cdot x = u(x)$ et de plus, considérant la fonction continue

$$\begin{aligned} \alpha\colon G &\to V \\ u &\mapsto u(x), \end{aligned} \tag{13.147}$$

nous voyons que les orbites de cette action sont compactes en tant qu'image par α du compact G (théorème 7.275). Nous posons

$$\begin{aligned} \nu\colon V &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \max_{u\in G} \|u(x)\|. \end{aligned} \tag{13.148}$$

Cette définition a un sens parce que l'orbite $\{u(x) \text{ tel que } u \in G\}$ est compacte dans V et donc l'ensemble des normes est compact dans $\mathbb{R}$ et admet un maximum. De plus cela donne une norme sur V parce que nous vérifions les conditions de la définition 7.212 :

(2a) Pour tout $x, y \in V$ nous avons :

$$\nu(x+y) = \max_{u\in G} \|u(x) + u(y)\| \leqslant \max_{u\in G} \big(\|u(x)\| + \|u(y)\|\big) \leqslant \nu(x) + \nu(y). \tag{13.149}$$

[28] C'est Bolzano-Weierstrass, théorème 7.194.

(2b) Si $\nu(x) = 0$, alors l'égalité $\max_{u\in G} \|u(x)\| = 0$ nous enseigne que $\|u(x)\| = 0$ pour tout $u \in G$ et donc en particulier avec $u = \mathrm{Id}$ nous trouvons $x = 0$.

(2c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in V$,

$$\nu(\lambda x) = \max_{u\in G} \|u(\lambda x)\| = \max \|\lambda u(x)\| = \max |\lambda| \|u(x)\| = |\lambda|\nu(x). \tag{13.150}$$

De plus la fonction ν est constante sur les orbites de G.

(3) **Un point fixe**

Pour tout $u \in G$ nous posons

$$F_u = \{x \in K \text{ tel que } u(x) = x\}; \tag{13.151}$$

par le pré-résultat, aucun de ces ensembles n'est vide. Ils sont de plus tous fermés par continuité de u (le complémentaire est ouvert). Nous devons prouver que $\bigcap_{u\in G} F_u \neq \varnothing$ parce qu'une intersection serait un point fixe de tous les éléments de G. Supposons donc que $\bigcap_{u\in G} F_u = \varnothing$. Alors les complémentaires des F_u forment un recouvrement ouvert de K et nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini par compacité. Soient $\{u_i\}_{i=1,\dots,p}$ les éléments qui réalisent ce recouvrement. Alors

$$\bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i} = \varnothing. \tag{13.152}$$

Nous considérons l'opérateur

$$v = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i \in \mathcal{L}(V). \tag{13.153}$$

Puisque K est convexe et stable sous chacun des u_i, nous avons aussi $v(K) \subset K$ et donc il existe $a \in K$ tel que $v(a) = a$. Pour ce a, nous avons

$$\begin{aligned}
\nu\big(v(a)\big) &= \nu\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i(a)\right) && \text{(13.154a)}\\
&\leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \nu\left(u_i(a)\right) && \text{(13.154b)}\\
&= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \nu(a) && \text{(13.154c)}\\
&= \nu(a) && \text{(13.154d)}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la constance de ν sur les orbites de G. Par ailleurs nous savons que $v(a) = a$, donc en réalité à gauche dans (13.154a) nous avons $\nu(a)$ et toutes les inégalités sont des égalités. Nous avons en particulier

$$\nu\left(\sum_{i=1}^{p} u_i(a)\right) = \sum_{i=1}^{p} \nu\left(u_i(a)\right). \tag{13.155}$$

Notons $u_0 \in G$ l'élément qui réalise le maximum de la définition de ν pour le vecteur $\sum_i u_i(a)$:

$$\nu\left(\sum_i u_i(a)\right) = \|u_0\left(\sum_i u_i(a)\right)\| \leqslant \sum_i \|u_0 u_i(a)\| \leqslant \sum_i \nu\big(u_i(a)\big). \tag{13.156}$$

Mais nous venons de voir (équation (13.155)) que l'expression de gauche est égale à celle de droite. Donc les inégalités sont des égalités et en particulier la première inégalité devient l'égalité

$$\|\sum_i u_0 u_i(a)\| = \sum_i \|u_0 u_i(a)\|. \tag{13.157}$$

En vertu du lemme 10.26, il existe des nombres positifs λ_i tels que

$$u_0 u_1(a) = \lambda_2 u_0 u_2(a) = \dots = \lambda_p u_0 u_p(a). \tag{13.158}$$

Du fait que u_0 est inversible nous avons aussi

$$u_1(a) = \lambda_2 u_2(a) = \dots = \lambda_p u_p(a). \tag{13.159}$$

Mais par constance de ν sur les orbites nous avons $\nu(u_i(a)) = \nu(u_j(a))$ pour tout i et j ; en appliquant ν à la série d'égalités (13.159), nous trouvons que tous les λ_i doivent être égaux à 1. En particulier

$$u_1(a) = u_2(a) = \ldots = u_p(a). \tag{13.160}$$

Nous récrivons maintenant l'équation $v(a) = a$ avec la définition de v :

$$a = v(a) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i(a) = u_j(a) \tag{13.161}$$

pour n'importe quel j. Donc

$$a \in \bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i}, \tag{13.162}$$

ce qui contredit notre hypothèse de départ.

□

PropQZkeHeG

Proposition 13.47 ([485, 128, 486])**.**
Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Alors

(1) Il existe une forme quadratique définie positive q sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset \mathrm{O}(q)$.

(2) Le groupe G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Nous considérons le (pas tout à fait) morphisme de groupe

$$\begin{aligned} \rho\colon G &\to \mathrm{GL}\big(\mathrm{S}(n,\mathbb{R})\big) \\ u &\mapsto \rho_u\colon s \mapsto u^t s u, \end{aligned} \tag{13.163}$$

et tant que nous en sommes à considérer, nous considérons l'ensemble

$$H = \{M^t M \text{ tel que } M \in G\} \subset \mathrm{S}(n,\mathbb{R}). \tag{13.164}$$

Cet ensemble est constitué de matrices définies positives parce que si $\langle M^t M x, x\rangle = 0$, alors $0 = \langle Mx, Mx\rangle = \|Mx\|$, mais M étant inversible, cela implique que $x = 0$. Qui plus est, cet ensemble est compact dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ en tant qu'image du compact G par l'application continue $M \mapsto M^t M$. L'enveloppe convexe $K = \mathcal{C}\mathrm{onv}(H)$ est alors également compacte par le théorème 11.42. Enfin nous considérons $L = \rho(G)$, qui est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}\big(\mathrm{S}(n,\mathbb{R})\big)$ parce que $\rho_u\rho_v = \rho_{vu} \in \rho(G)$. Nous remarquons que ρ_u étant linéaire, elle préserve les combinaisons convexes et donc pour tout $u \in G$, $\rho_u(K) \subset K$.

Bref, L est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ préservant le compact K de $\mathrm{S}(n,\mathbb{R})$. Par le lemme 13.46, il existe $s \in K$ tel que $\rho_u(s) = s$ pour tout $u \in G$. Ou encore :

$$u^t s u = s \tag{13.165}$$

pour tout $u \in G$. Fort de ce s bien particulier, nous considérons la forme quadratique associée : $q(x) = x^t s x$. Cette forme est définie positive parce que s l'est. Nous avons $G \subset \mathrm{O}(q)$ parce que si $u \in G$ alors

$$q\big(ux\big) = (ux)^t s u x = x^t \underbrace{u^t s u}_{=s} x = q(x). \tag{13.166}$$

Le premier point est prouvé.

La matrice s est symétrique et définie positive. Le théorème 8.225 nous permet donc de la diagonaliser en $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$, et ensuite transformée en la matrice $\mathbb{1}_n$ par la matrice $\mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_i})$. Nous avons donc une matrice $a \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ telle que $a^t s a = \mathbb{1}_n$. Avec ça, si $u \in G$, nous avons

$$(a^{-1}ua)^t(a^{-1}ua) = (a^{-1}ua)^t\mathbb{1}_n(a^{-1}ua) = a^t u^t (a^t)^{-1} a^t s a a^{-1} u a = a^t u^t s u a = a^t s a = \mathbb{1}, \tag{13.167}$$

ce qui prouve que $a^{-1}ua$ est dans $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, et donc que $a^{-1}Ga \subset \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. □

Chapitre 14

Tribus, théorie de la mesure, intégration

14.1 Tribus

Vous pouvez vous reporter au thème 23 pour voir plus vite où sont les définitions associées.

14.1.1 Généralités

DefjRsGSy

Définition 14.1 (Tribu, espace mesurable[487]).
*Si Ω est un ensemble, un ensemble $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de Ω est une **tribu** si*

ItemooPEQNooYiYNtN

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(2) $A^c \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$;

(3) si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

*Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est alors un **espace mesurable**.*

Remarque 14.2.
Nous trouvons parfois la notation

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \sup_{k\geqslant 0} A_k. \tag{14.1}$$

LemBWNlKfA

Lemme 14.3.
Opérations ensemblistes sur les tribus.

ITEMooTDXNooFszBzi

(1) Une tribu est stable par intersections au plus dénombrables.

ItemXQVLooFGBQNj

(2) Une tribu est stable par différence ensembliste.

Démonstration. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$. Nous devons prouver que $\bigcap_{i\in I} A_i$ est également un élément de $\mathcal{A}$. Pour cela nous passons au complémentaire :

$$\complement\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \complement A_i. \tag{14.2}$$

La définition d'une tribu implique que le membre de droite est un élément de la tribu. Par stabilité d'une tribu par complémentaire, l'ensemble $\bigcap_{i\in I} A_i$ est également un élément de la tribu.

La seconde assertion est immédiate à partir de la première parce que $A \setminus B = A \cap \complement B$. □

Si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est un ensemble de tribus (indexé par un ensemble I quelconque) alors

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \tag{14.3}$$

est également une tribu.

14.1.2 Tribu engendrée

DEFooJSAKooSDnGzt

Définition 14.4.
*Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de parties de Ω. La **tribu engendrée** par $\mathcal{D}$ est l'intersection de toutes les tribus de Ω contenant $\mathcal{D}$. C'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{D}$. Nous la noterons le plus souvent $\sigma(\mathcal{D})$*

LEMooCAUMooEdpjRs

Lemme 14.5.
Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et si A est une partie mesurable de Ω, alors la tribu engendrée[1] par A est

$$\sigma(A) = \{\varnothing, A, \complement A, \Omega\}. \tag{14.4}$$

DefNOJWooLGKhmJ

Lemme-Définition 14.6 (Tribu engendrée[488])**.**
Soit une application $f\colon S_1 \to S_2$ et $\mathcal{F}$ une tribu de S_1. Alors

(1) L'ensemble

$$\mathcal{F}_f = \{B \subset S_2 \text{ tel que } f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \tag{14.5}$$

est une tribu sur S_2.

(2) C'est la plus grande tribu de S_2 pour laquelle f est mesurable.

*Cette tribu est la est la **tribu engendrée** par f. Elle sera souvent notée $\sigma(f)$.*

Démonstration. Vérifier les trois propriétés de la définition 14.1.

(1) $S_2 \in \mathcal{F}$ parce que $f^{-1}(S_2) = S_1 \in \mathcal{F}_f$.

(2) Si $B \in \mathcal{F}_f$, alors nous prouvons que $B^c \in \mathcal{F}_f$. Nous avons $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ et donc $f^{-1}(B)^c \in \mathcal{F}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$.

(3) Si $(B_i) \in \mathcal{F}_f$, alors

$$f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}_f. \tag{14.6}$$

Donc $\bigcup_i B_i \in \mathcal{F}_f$.

En ce qui concerne la maximalité, si $R \subset S_2$ n'est pas dans $\mathcal{F}_f$ alors $f^{-1}(R)$ n'est pas dans $\mathcal{F}$ et donc f ne serait pas mesurable. □

PropHYLooLgOCy

Proposition 14.7 ([489])**.**
Soit S un ensemble et $\mathcal{F}$ une tribu de S. Soit une classe $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(S)$ telle que

(1) Si $A \in \mathcal{N}$ alors il existe $Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{N}$ tel que $A \subset Y$.

(2) Si $A \in \mathcal{N}$ et $B \subset A$ alors $B \in \mathcal{N}$.

(3) La classe $\mathcal{N}$ est stable par union dénombrable.

Alors la classe

$$\mathcal{T} = \{X \cup A \text{ avec } A \in \mathcal{N} \text{ et } X \in \mathcal{F}\} \tag{14.7}$$

est une tribu.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable parce que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{N}$ le sont. De plus S et $\varnothing$ sont dans $\mathcal{F}$ et donc dans $\mathcal{T}$. Nous devons voir que $\mathcal{T}$ est stable par complémentarité.

Soit donc $A \in \mathcal{N}$ et $X \in \mathcal{F}$; nous savons que $(A \cup X)^c = A^c \cap X^c$. De plus il existe $Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{N}$ tel que $A \subset Y$ et nous pouvons exprimer A^c en termes de Y : $A^c = Y^c \cup (Y \setminus A)$. Donc

$$(A \cup X)^c = \big(Y^c \cup (Y \setminus A)\big) \cap X^c = \underbrace{(Y^c \cap X^c)}_{\in\mathcal{F}} \cup \underbrace{\big((Y \setminus A) \cap X^c\big)}_{\in\mathcal{N}}. \tag{14.8}$$

Le fait que la seconde partie soit dans $\mathcal{N}$ est due au fait que ce soit une partie de $Y \in \mathcal{N}$. Nous avons donc bien $(A \cup X)^c \in \mathcal{T}$. □

[1] Tribu engendrée par une partie, définition 14.4.

14.1.3 Tribu induite

DefDHTTooWNoKDP

Proposition-Définition 14.8 (Tribu induite, tribu-trace[490]).
Soit un espace mesurable $(S, \mathcal{F})$ et une partie $R \subset S$. L'ensemble

EQooNOQNooYIdDOz

$$\mathcal{F}_R = \{A \cap R \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\} \tag{14.9}$$

*est une tribu. Elle est la **tribu induite** de R depuis S. Elle est aussi nommée « tribu trace ».*

Démonstration. D'abord R et $\varnothing$ dont dans $\mathcal{F}_R$. Si $C \in \mathcal{F}_R$ alors $C = A \cap R$ pour un certain $A \in \mathcal{F}$ et nous devons prouver que $R \cap C^c$ est dans $\mathcal{F}_R$ (le complémentaire de C dans R). Nous avons

$$R \cap C^c = R \cap (A \cap R)^c = R \cap A^c \in \mathcal{F}_R \tag{14.10}$$

parce que $A^c \in \mathcal{F}$. Enfin si $C_i \in \mathcal{F}_R$ alors $C_i = R \cap A_i$ pour des A_i dans $\mathcal{F}$. Nous avons

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (R \cap A_i) = R \cap \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big), \tag{14.11}$$

mais $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$ donc $\bigcup_i C_i \in \mathcal{F}_R$. □

PROPooUNNSooMUQKfp

Proposition 14.9.
Si R est mesurable dans $(\Omega, \mathcal{A})$ alors

$$\mathcal{A}_R = \{A \cap R \text{ tel que } A \in \mathcal{A}\} = \{S \in \mathcal{A} \text{ tel que } S \subset R\}, \tag{14.12}$$

où $\mathcal{A}_R$ est la tribu induite de $\mathcal{A}$ sur R.

Démonstration. La première égalité est simplement la définition (14.9) de la tribu induite. Pour le reste, nous notons $\mathcal{F} = \{S \in \mathcal{A} \text{ tel que } S \subset R\}$, et nous prouvons que $\mathcal{A}_R = \mathcal{F}$.

(1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_R$ Si $S \in \mathcal{F}$, alors $S \in \mathcal{A}$ et $S \subset R$. Donc $S = S \cap R \in \mathcal{A}_R$.

(2) $\mathcal{F}_R \subset \mathcal{A}_R$ Dans l'autre sens, si $S \in \mathcal{A}_R$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $S = A \cap R$. Donc $S \subset A$ et $S \in \mathcal{A}$ parce que R et A sont des éléments de $\mathcal{A}$ (stable par intersection).

□

14.2 Théorie de la mesure

DefSIVooeMaf

Définition 14.10 ([491]).
*Une **mesure extérieure** sur un ensemble S est une application $m^* : \mathcal{P}(S) \to [0, \infty]$ telle que*

(1) $m^*(\varnothing) = 0$,

(2) Si $A \subset B$ dans S alors $m^*(A) \leqslant m^*(B)$

ItemARKooppZfDaiii

(3) Si les A_n sont des parties de S alors

EqZLMooSxvaL

$$m^*\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(A_n). \tag{14.13}$$

La différence avec une mesure est que nous ne demandons pas que (14.13) soit une égalité lorsque les A_n sont disjoints.

14.2.1 Mesure sur un ensemble de parties

DefWUPHooEklLmR

Définition 14.11 (Mesure sur un ensemble de parties[492]).
*Soient S un ensemble et $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de S contenant $\varnothing$. Une **mesure positive** sur $(S, \mathcal{C})$ est une application $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ telle que*

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) Si $A_n \in \mathcal{C}$ sont des éléments deux à deux disjoints dans $\mathcal{C}$ et tels que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$ alors

$$\mu\big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n). \tag{14.14}$$

La mesure est ***finie*** *si* $\mu(S) < \infty$ *et* σ***-finie*** *si il existe une suite* (S_n) *dans* $\mathcal{C}$ *telle que* $S = \bigcup_n S_n$ *et* $\mu(S_n) < \infty$.

Remarque 14.12.
La condition $\mu(\varnothing) = 0$ est nécessaire. Certes, si $A \in \mathcal{A}$ nous avons

$$\mu(A) = \mu(A \cup \varnothing) = \mu(A) + \mu(\varnothing) \tag{14.15}$$

EQooCDSQooZMjgOY

parce que A et $\varnothing$ sont disjoints. Cela semble indiquer que $\mu(\varnothing) = 0$, mais pas tout à fait : il est encore possible d'avoir $\mu(B) = \infty$ pour tout $B \in \mathcal{A}$, y compris $\mu(\varnothing) = \infty$. À cause de cette exception, la relation (14.15) n'implique pas $\mu(\varnothing) = 0$.

Sans hypothèse sur l'ensemble de parties considéré, nous ne pouvons pas dire grand chose de plus.

14.2.2 Mesure sur une algèbre de parties

DefTCUoogGDud

Définition 14.13 (Algèbre de parties[491])**.**
Soit S*, un ensemble. Une classe* $\mathcal{D}$ *de parties de* S *est une* ***algèbre de parties*** *de* S *si*

(1) $S \in \mathcal{D}$ *et* $\varnothing \in \mathcal{D}$,

(2) si $A \in \mathcal{D}$ *alors* $A^c \in \mathcal{D}$,

(3) si $A, B \in \mathcal{D}$ *alors* $A \cup B \in \mathcal{D}$.

14.14.
En anglais, ce sont des *field of sets*[493].

Les algèbres de parties ne sont pas des classes si sauvages que ça ; en témoigne le lemme suivant.

LemBFKootqXKl

Lemme 14.15.
Une algèbre de partie est stable par intersection (finie) et par différence ensembliste.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $A \cap B = \big(A^c \cup B^c\big)^c$ et que $A \setminus B = A \cap B^c$. □

LemZQUooMdCpq

Lemme 14.16 ([491])**.**
Si $\mathcal{D}$ *est une algèbre de parties de* S *et si* μ *est une mesure sur* $(S, \mathcal{D})$ *alors*

(1) si $A, B \in \mathcal{D}$ *avec* $A \subset B$ *alors* $\mu(A) \leqslant \mu(B)$

ItemMFUooWCPNnii

(2) si $A_n \in \mathcal{D}$ *et* $\bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$ *alors*

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) \leqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{14.16}$$

La propriété (2) est la σ**-sous-additivité**.

Démonstration. Si $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \setminus A)$ avec A et $B \setminus A$ disjoints donc

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A). \tag{14.17}$$

Pour la seconde, on passe par les compléments deux à deux : nous posons

$$\begin{cases} B_0 = \varnothing & \text{(14.18a)} \\ B_n = A_n \setminus \bigcup_{k<n} B_k. & \text{(14.18b)} \end{cases}$$

Ces ensembles sont deux à deux disjoints et $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$, donc

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sum_n \mu\Big(A_n \setminus \bigcup_{k<n} B_k\Big) \leqslant \sum_n \mu(A_n), \tag{14.19}$$

où nous avons utilisé la première partie du lemme. □

PropIUOoobjflB

Proposition 14.17 (Mesure extérieure à partir d'une algèbre de parties[491]).
Soient $\mathcal{D}$ une algèbre de partie sur l'ensemble S et μ une mesure sur $(S,\mathcal{D})$. Alors l'application

$$\begin{aligned}\mu^*\colon \mathcal{P}(S) &\to [0,+\infty]\\ X &\mapsto \inf\left\{\sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n\in\mathcal{D}, X\subset\bigcup_n A_n\right\}\end{aligned} \tag{14.20}$$

EqRNJooQrcoa

est une mesure extérieure[2] *sur S et pour tout $A\in\mathcal{D}$ nous avons $\mu^*(A)=\mu(A)$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **La définition est bonne** L'ensemble sur lequel l'infimum est pris n'est pas vide : il suffit de prendre $A_1=S$ et $A_{n\geqslant 2}=\varnothing$.

(2) **Le vide** D'abord $\mu^*(\varnothing)=0$ parce que $\varnothing\in\mathcal{D}$. Prendre ensuite $A_n=\varnothing$.

(3) **μ^* est croissante** Soit $X\subset Y$ dans $\mathcal{P}(S)$. Si une suite (A_n) dans $\mathcal{D}$ vérifie $Y\subset\bigcup_n A_n$, alors la même suite vérifie $X\subset\bigcup_n A_n$. Par conséquent nous avons l'inclusion

$$\left\{\sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n\in\mathcal{D}, X\subset\bigcup_n A_n\right\}\subset\left\{\sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n\in\mathcal{D}, Y\subset\bigcup_n A_n\right\}, \tag{14.21}$$

et donc l'inégalité $\mu^*(X)\leqslant\mu^*(Y)$.

(4) **Inégalité par union dénombrable** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de S. Si il existe n_0 tel que $\mu^*(X_{n_0})=\infty$ alors nous avons automatiquement $\sum_n\mu^*(X_n)=\infty$ et l'inégalité demandée est évidente parce que n'importe quel nombre est plus petit ou égal à ∞. Nous supposons donc maintenant que $\mu^*(X_n)<\infty$ pour tout n.

Soit $\epsilon>0$. Pour tout $n\geqslant 1$ il existe une suite $(B_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}$ telle que $X_n\subset\bigcup_k B_k^{(n)}$ et

$$\mu^*(X_n)+\frac{\epsilon}{2^n}\geqslant\sum_k\mu(B_k^{(n)}). \tag{14.22}$$

Étant donné que

$$\bigcup_n X_n\subset\bigcup_n\big(\bigcup_k B_k^{(n)}\big), \tag{14.23}$$

nous avons[3]

$$\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big)\leqslant\sum_n\sum_k\mu^*(B_k^{(n)})\leqslant\sum_n\Big(\mu^*(X_n)+\frac{\epsilon}{2^n}\Big)=\sum_n\mu^*(X_n)+\epsilon. \tag{14.24}$$

Cette inégalité étant valable pour tout ϵ, nous avons bien

$$\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big)=\sum_n\mu^*(X_n). \tag{14.25}$$

(5) **Restriction** Soit $A\in\mathcal{D}$. Nous avons automatiquement $\mu^*(A)\leqslant\mu(A)$ parce que $\mu(A)$ est dans l'ensemble dont nous prenons l'infimum (prendre $A_1=A$ et $A_{n\geqslant 2}=\varnothing$).

En ce qui concerne l'inégalité inverse nous considérons une suite A_n dans $\mathcal{D}$ telle que $A\subset\bigcup_n A_n$. Étant donné que $A\in\mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est une algèbre de parties nous avons $A\cap A_n\in\mathcal{D}$ et $\bigcup_n(A\cap A_n)=A\in\mathcal{D}$. Par conséquent

$$\mu(A)=\mu\big(\bigcup_n(A\cap A_n)\big)\leqslant\sum_n\mu(A\cap A_n)\leqslant\sum_n\mu(A_n). \tag{14.26}$$

Donc tous les éléments de l'ensemble sur lequel nous prenons l'infimum sont plus grands que $\mu(A)$. Nous en déduisons que $\mu^*(A)\geqslant\mu(A)$.

□

[2] Définition 14.10.
[3] Nous utilisons la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1/2^n)=1$, proposition 10.172(2).

14.2.3 Mesure sur une tribu, espace mesuré

La définition suivante est une simple copie de la définition générale 14.11 d'une mesure sur un ensemble de parties. La seule différence est que l'union d'éléments d'une tribu est encore dans la tribu, et la condition (2) ne demande pas de le préciser.

DefBTsgznn

Définition 14.18 (Espace mesuré[492, 494])**.**
Soit un espace mesurable[4] $(\Omega, \mathcal{A})$.

Une ***mesure signée*** *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *est une application* $\mu\colon \mathcal{A} \to]-\infty, \infty]$ *telle que*

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

ItemQFjtOjXiii

(2)

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \tag{14.27}$$

EQooKJHQooHIQyUj

si les A_i *sont des éléments de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints.*

La mesure signée μ *est une* ***mesure positive*** *si elle prend ses valeurs dans* $[0, \infty]$.

Lorsque μ *est une mesure positive, le triplet* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *est un* ***espace mesuré****.*

Une mesure est σ***-finie*** *si il existe un recouvrement dénombrable de* Ω *par des ensembles de mesure finie. Si la mesure est* σ*-finie, nous disons que l'espace* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré* σ*-fini.*

La mesure μ *sur* Ω *est* ***finie*** *si* $\mu(\Omega) < \infty$.

LEMooECDQooEBtMxL

Lemme 14.19 ([1])**.**
Soit un espace mesuré[5] $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. *Si* $Z \in \mathcal{A}$ *est une partie de mesure nulle, et si* $A \subset Z$ *est mesurable alors* $\mu(A) = 0$.

Démonstration. Nous pouvons écrire $Z = A \cup (Z \setminus A)$. Vu que A et $Z \setminus A$ sont disjoints, nous avons

$$0 = \mu(Z) = \mu(A) + \mu(Z \setminus A). \tag{14.28}$$

La seule façon pour deux nombres positifs d'avoir une somme nulle est qu'ils soient tous les deux nuls. □

14.2.4 Mesures sigma-finies

LEMooXOPMooMmIbmD

Lemme 14.20 ([495])**.**
Soient deux mesures σ*-finies*[6] μ *et* λ *sur le même espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{A})$. *Il existe des parties mesurables* Z_n *telles que*

(1) $\mu(Z_n) < \infty$,

(2) $\lambda(Z_n) < \infty$

(3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n = \Omega$.

Nous pouvons de plus choisir ces Z_n *pour qu'ils soient disjoints.*

Démonstration. Le fait que les mesures soient σ-finies donne des parties mesurables (X_n) et(Y_n) telles que $\mu(X_n) < \infty$, $\lambda(Y_n) < \infty$, $\bigcup_n X_n = \bigcup_n Y_n = \Omega$.

Pour chaque $i, j \in \mathbb{N}^2$ nous posons $Z_{ij} = X_i \cap Y_j$. Nous avons $\lambda(Z_{ij}) \leqslant \lambda(Y_j) < \infty$. De même $\mu(Z_{ij}) \leqslant \mu(X_i) < \infty$. Et enfin

$$\bigcup_{ij} Z_{ij} = \bigcup_{n} (X_i \cap Y_j) = \bigcup_{i} \Big(\bigcup_{j} (X_i \cap Y_j) \Big) = \bigcup_{i} X_i = \Omega. \tag{14.29}$$

Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable[7], nous considérons une bijection $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ et les ensembles $Z'_i = Z_{\varphi(i)}$ répondent à la question.

En ce qui concerne la possibilité que les (Z_n) soient disjoints, supposons qu'ils ne le soient pas. Alors il suffit de poser $Z'_n = X_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} Z'_k$ pour que les Z'_n aient les bonnes propriétés tout en étant disjoints. □

[4] Les définitions de tribus et d'espaces mesurables sont en 14.1.
[5] Définition 14.18.
[6] Définition 14.18.
[7] L'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable par 1.221 et $\mathbb{N}^2$ l'est pas 1.224.

14.2.5 Suite du texte

14.21 ([1]).
Dans le cas d'une mesure signée, μ prend ses valeurs dans $]-\infty,\infty]$ et non dans $[-\infty,\infty]$ parce que nous ne voulons pas avoir des sommes contenant $\infty-\infty$.

Notez aussi que la condition (14.27) interdit d'avoir, pour un $\alpha>0$ fixé, une infinité de parties disjointes de mesure plus petite que α.

Si $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et $(S,\mathcal{F},\nu)$ sont deux espaces mesurés, alors nous notons

$$(\Omega,\mathcal{A},\mu)\subset(S,\mathcal{F},\nu) \tag{14.30}$$

lorsque $\Omega\subset S$, $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}$ et pour tout $A\in\mathcal{A}$, $\mu(A)=\nu(A)$.

DefHGsQxHB

Définition 14.22 (Ensemble mesurable).
*Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les ensembles **mesurables** pour la mesure μ.*

Si la mesure est σ-finie, nous pouvons choisir le recouvrement croissant pour l'inclusion. En effet si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le recouvrement, il suffit de considérer $F_n=\bigcup_{k\leqslant n}E_k$. Ces ensembles F_n forment tout autant un recouvrement dénombrable, mais ils vont évidemment croissants.

Le lemme suivant complète la propriété 14.18(2) lorsque les ensembles ne sont pas disjoints.

LemPMprYuC

Lemme 14.23 (Unions et différences ensemblistes dans un espace mesurable).
Soit un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$.

ITEMooSUIRooNDVOoB

(1) Soient $A,B\in\mathcal{F}$ avec $A\subset B$. Alors

$$\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A) \tag{14.31}$$

ITEMooLEGKooWnYmlf

(2) Si $A,B\in\mathcal{F}$ avec $A\subset B$, alors

$$\mu(A)\leqslant\mu(B). \tag{14.32}$$

ITEMooMCNBooRGVGqA

(3) Si $A,B\in\mathcal{F}$ avec $A\subset B$, et si $\mu(B)<\infty$, alors $\mu(A)<\infty$.

ITEMooABPYooFQEzqE

(4) Si (M_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ pas spécialement disjoints, alors

$$\mu\Big(\bigcup_k M_k\Big)\leqslant\sum_k\mu(M_k). \tag{14.33}$$

EqWWFooYPCTt

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Nous décomposons $B=A\cup(B\setminus A)$ en remarquant que l'union est disjointe et que $B\setminus A\in\mathcal{F}$ par le lemme 14.3. La propriété (2) de la définition de mesure nous donne alors

$$\mu(B)=\mu\big((B\setminus A)\cup A\big)=\mu(B\setminus A)+\mu(A) \tag{14.34}$$

et donc

$$\mu(B)=\mu(B\setminus A)+\mu(A) \tag{14.35}$$

EQooTWCWooGGQBjZ

comme demandé.

(2) **Pour (2)** Il s'agit de reprendre (14.35) :

$$\mu(A)=\mu(B)-\mu(B\setminus A)\leqslant\mu(B). \tag{14.36}$$

EQooXGVQooRucvoF

(3) **Pour (3)** Il s'agit de continuer (14.36) :

$$\mu(A)\leqslant\mu(B)<\infty. \tag{14.37}$$

(4) **Pour (4)** Nous considérons la suite disjointe

$$\begin{cases} M'_0=\varnothing & \text{(14.38a)}\\ M'_k=M_k\setminus M'_{k-1}. & \text{(14.38b)}\end{cases}$$

Nous avons $\bigcup_k M'_k=\bigcup_k M_k$. Nous avons alors le calcul suivant :

$$\mu\Big(\bigcup_k M_k\Big)=\mu\Big(\bigcup_k M'_k\Big)=\sum_k\mu(M'_k)=\sum_k\mu(M_k\setminus M'_{k-1})\leqslant\sum_k\mu(M_k). \tag{14.39}$$

La dernière inégalité utilise le point (2).

□

LemAZGByEs

Lemme 14.24 ([1]).
Résultats sur les unions croissantes d'ensembles mesurables dans $(S, \mathcal{A}, \mu)$.

ItemJWUooRXNPci

(1) Si (A_k) est une suite croissante d'ensembles μ-mesurables dont l'union est mesurable, alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_k A_k). \tag{14.40}$$

ItemJWUooRXNPcii

(2) Soit K_n, une suite emboîtée d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $K_n \to S$. Si $A \in \mathcal{A}$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap K_n) = \mu(A). \tag{14.41}$$

Démonstration. Pour prouver (1), nous faisons le coup de l'union télescopique, en posant $A_0 = \varnothing$:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k-1}). \tag{14.42}$$

Les ensembles $A_k \setminus A_{k-1}$ sont deux à deux disjoints, donc la propriété (2) de la définition d'une mesure donne

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k-1})\right) \tag{14.43a}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) \tag{14.43b}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big) \tag{14.43c}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) - \mu(A_0) \tag{14.43d}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k). \tag{14.43e}$$

subEqMDRRorb

où pour obtenir 14.43c, nous avons utilisé le lemme 14.23.

Le point (2) est une application du point (1). □

Exemple 14.25.
L'intégration « à la Riemann » n'est pas dans la théorie des espaces mesurés. En effet l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{A \subset [0,1] \text{ tel que } \mathbb{1}_A \text{ est intégrable au sens de Riemann}\} \tag{14.44}$$

n'est pas une tribu. Par exemple les singletons en font partie tandis que $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ n'en fait pas partie bien que ce soit une union dénombrable de singletons. △

Définition 14.26.
*Si μ est une mesure nous disons qu'une propriété est vraie μ-**presque partout** si elle est fausse seulement sur un ensemble de mesure nulle.*

Par exemple la fonction de Dirichlet est presque partout égale à la fonction 1 (pour la mesure de Lebesgue).

Définition 14.27 (fonction mesurable).
Une application entre espace mesurés

$$f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}') \tag{14.45}$$

*est **mesurable** si pour tout $B \in \mathcal{A}'$, l'ensemble $f^{-1}(B)$ est dans $\mathcal{A}$.*

LemIDITgAy

Lemme 14.28.
Une union dénombrable de parties de mesure nulle est de mesure nulle.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 14.23(4) : si les A_i sont de mesure nulle,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0 \tag{14.46}$$

□

Définition 14.29.
*Si (A_n) est une suite croissante d'ensembles alors la **limite** est*

$$\lim_n A_n = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i. \tag{14.47}$$

Si la suite est décroissante alors la limite est

$$\lim_n A_n = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i. \tag{14.48}$$

PropAFNPSsm

Proposition 14.30 ([496]).
Soient μ une mesure sur Ω et (S_n) une suite croissante d'ensembles μ-mesurables de Ω. Nous notons

$$S = \lim_n S_n. \tag{14.49}$$

Alors pour tout ensemble mesurable[8] $A \subset \Omega$ nous avons

$$\mu(A \cap S) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S_n). \tag{14.50}$$

Démonstration. L'inégalité $\lim \mu(A \cap S_n) \leqslant \mu(A \cap S)$ est simple à prouver. En effet pour tout n nous avons $A \cap S_n \subset A \cap S$ et donc par le lemme 14.23 nous avons

$$\mu(A \cap S_n) \leqslant \mu(A \cap S). \tag{14.51}$$

En passant à la limite (qui respecte les inégalités) nous avons l'inégalité.

Nous passons à l'inégalité dans l'autre sens.

(1) **Si ∞** D'abord si $\mu(A \cap S_n) = \infty$ pour un certain n, alors cela vaut encore ∞ pour tous les n suivants, et la limite est ∞ sans problème. Donc nous supposons que $\mu(A \cap S_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) **Une petite hypothèse en plus** Quitte à renommer les indices, nous supposons que $S_0 = \varnothing$.

(3) **S comme union de différences** Nous montrons à présent que $S = \bigcup_n (S_{n+1} \setminus S_n)$. Soit $x \in S$. Il existe $n \geqslant 0$ tel que $x \in S_n$. Et vu que $S_0 = \varnothing$, il existe même un $n \geqslant 0$ tel que $x \notin S_n$ et $x \in S_{n+1}$. Autrement dit, pour tout $x \in S$, il existe $n \geqslant 0$ tel que $x \in S_{n+1} \setminus S_n$.

Nous avons donc bien

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} (S_{n+1} \setminus S_n) \tag{14.52}$$

Comme annoncé.

(4) **Un bon petit calcul** Par conséquent

$$A \cap S = A \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} (S_{n+1} \setminus S_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A \cap (S_{n+1} \setminus S_n) \tag{14.53}$$

Étant donné que les ensembles $A \cap (S_{n+1} \setminus S_n)$ sont disjoints,

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap S) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu\big(A \cap (S_{n+1} \setminus S_n)\big) && \text{(14.54a)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mu\Big((A \cap S_{n+1}) \setminus (A \cap S_n)\Big) && \text{(14.54b)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \big(\mu(A \cap S_{n+1}) - \mu(A \cap S_n)\big) && \text{(14.54c)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S_{n+1}) - \underbrace{\mu(A \cap S_0)}_{=0} && \text{(14.54d)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S_n). && \text{(14.54e)}
\end{aligned}$$

subeqLTvmTjO

Dans ce calcul nous avons utilisé plusieurs fois le fait que les S_n et A étaient mesurables (et la propriété de tribu qui dit que $A \cap S_n$ est également mesurable) ainsi que le lemme 14.23. Nous avons aussi utilisé la série télescopique dans $\mathbb{R}$ pour obtenir (14.54d).

[8] Définition 14.22

□

DefRECXooWwYgej

Définition 14.31 (λ-système[497]).
Soit E un ensemble. Un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de E est un **λ-système** *lorsqu'il vérifie les conditions suivantes :*

(1) si $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$ alors $B \setminus A \in \mathcal{D}$,

(2) si $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{D}$ alors $\bigcup_k A_k \in \mathcal{D}$.

Note : une tribu est un λ-système.

Lemme 14.32 ([497]).
Une intersection quelconque de λ-systèmes dans E est un λ-système dans E.

Démonstration. Soient $\{\mathcal{D}_l\}_{l\in L}$ des λ-systèmes indicés par un ensemble L. Si $A, B \in \bigcap_{l\in L} \mathcal{D}_l$ alors $B\setminus A \in \mathcal{D}_l$ pour tout $l \in L$ et donc $B \setminus A \in \bigcap_{l\in L} \mathcal{D}_l$. De la même façon si (A_k) est une suite croissante dans $\bigcap_{l\in L} \mathcal{D}_l$ alors pour tout $l \in L$ nous avons $\bigcup_k A_k \in \mathcal{D}_l$. Donc $\bigcup_k A_k \in \bigcap_l \mathcal{D}_l$. □

Ce lemme est ce qui permet de définir le λ-système **engendré** par une classe $\mathcal{A}$ de parties de E : c'est l'intersection de tous les λ-systèmes de E contenant $\mathcal{A}$.

LemLUmopaZ

Lemme 14.33 ([497]).
Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties de E (contenant E lui-même) qui soit stable par intersection finie. Alors le λ-système engendré par $\mathcal{C}$ coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{E}$ le λ-système engendré par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Étant donné que $\mathcal{F}$ est un λ-système nous avons $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Pour montrer l'inclusion inverse nous allons prouver que $\mathcal{E}$ est une tribu.

D'abord pour $C \in \mathcal{C}$ nous posons

$$\mathcal{G}_C = \{A \subset \mathcal{E} \text{ tel que } A \cap C \in \mathcal{E}\}. \tag{14.55}$$

et pour $F \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{H}_F = \{A \in \mathcal{E} \text{ tel que } A \cap F \in \mathcal{E}\}. \tag{14.56}$$

Nous allons montrer que $\mathcal{G}_C$ et $\mathcal{H}_F$ sont des λ-systèmes et que $\mathcal{G}_C = \mathcal{H}_F = \mathcal{E}$.

Nous commençons par $\mathcal{G}_C$. Si $A, B \in \mathcal{G}_C$ avec $A \subset B$ alors

$$(B \setminus A) \cap C = \underbrace{(B \cap C)}_{\in\mathcal{E}} \setminus \underbrace{(A \cap C)}_{\in\mathcal{E}}. \tag{14.57}$$

Puisque $\mathcal{E}$ est un λ-système et que $(A\cap C) \subset (B\cap C)$, nous avons bien $(B \setminus A)\cap C \in \mathcal{E}$ et donc $B \setminus A \in \mathcal{G}_C$. Soit maintenant (A_k) une suite croissante dans $\mathcal{G}_C$. Nous avons

$$(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap C = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap C) \tag{14.58}$$

qui est une union d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$. Donc $\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap C) \in \mathcal{E}$, ce qui signifie que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{G}_C$. Cela termine la preuve du fait que $\mathcal{G}_C$ soit un λ-système.

Étant donné que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, si $K \in \mathcal{C}$ nous avons $C \cap K \in \mathcal{C}$, ce qui signifie que $K \in \mathcal{G}_C$. Nous avons donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_C$. Donc $\mathcal{G}_C$ est un λ-système vérifiant $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_C \subset \mathcal{E}$. Mais comme $\mathcal{E}$ est le plus petit λ-système contenant $\mathcal{C}$ nous avons en fait $\mathcal{G}_C = \mathcal{E}$.

Nous montrons à présent que $\mathcal{H}_F$ est un λ-système. Si $A, B \in \mathcal{H}_F$ avec $A \subset B$ alors $(B \setminus A) \cap F = (B\cap F) \setminus (A\cap F)$. Comme $\mathcal{E}$ est un λ-système et que $A\cap F$ et $B\cap F$ sont dans $\mathcal{E}$ avec $A\cap F \subset B\cap F$, nous avons

$$(B \cap F) \setminus (A \cap F) \in \mathcal{H}_F. \tag{14.59}$$

Soit maintenant $(A_k)_{k\geqslant 1}$ une suite croissante dans $\mathcal{H}_F$. Pour tout k nous avons $A_k \cap F \in \mathcal{E}$, ce qui donne

$$(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \cap F = \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_k \cap F) \in \mathcal{E}. \tag{14.60}$$

Donc $\mathcal{H}_F$ est un λ-système vérifiant $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}_F \subset \mathcal{E}$. Nous en concluons que pour tout $C \in \mathcal{C}$ et pour tout $F \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{G}_C = \mathcal{H}_F = \mathcal{E}. \tag{14.61}$$

Nous allons maintenant prouver que $\mathcal{E}$ est une tribu[9].

(1) Si $F \in \mathcal{E}$ alors $E \cap F = F \in \mathcal{E}$, ce qui signifie que $E \in \mathcal{H}_F = \mathcal{E}$.

(2) Si $A \in \mathcal{E}$ alors $E \setminus A \in \mathcal{E}$ parce que $\mathcal{E}$ est un λ-système et $E \in \mathcal{E}$. Donc $\complement A \in \mathcal{E}$.

(3) Montrons que $\mathcal{E}$ est stable par union finie en considérant $A, B \in \mathcal{E}$. Comme E est également un élément de $\mathcal{E}$ nous avons
$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) \in \mathcal{E}. \tag{14.62}$$
Cela prouve que $\complement(A \cup B) \in \mathcal{E}$. Par complémentarité nous avons aussi $A \cup B \in \mathcal{E}$.
Soient $A_k \in \mathcal{E}$, et nommons $B_p = A_1 \cup \ldots \cup A_p$. Les ensembles B_p forment une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$. L'union est donc dans $\mathcal{E}$ et ce dernier est, au final, stable par union dénombrable.

Maintenant que $\mathcal{E}$ est une tribu nous avons $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ parce que $\mathcal{F}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. Nous en déduisons que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, ce qu'il fallait démontrer. □

Le théorème suivant permet de prouver que la mesure de Lebesgue est l'unique mesure possible ayant les bonnes valeurs sur les intervalles (théorème 14.142). Si vous voulez il y a aussi le théorème de Dynkin qui est un peu similaire[498].

ThoJDYlsXu

Théorème 14.34 (Unicité des mesures[497])**.**
Soient μ et ν, deux mesures sur $(E, \mathcal{A})$ et un ensemble $\mathcal{E}$ de parties de E telles que

(1) La tribu engendrée par $\mathcal{E}$ soit $\mathcal{A}$.

(2) si $A, B \in \mathcal{E}$ alors $A \cap B \in \mathcal{E}$

(3) il existe une suite croissante (E_n) dans $\mathcal{E}$ telle que

(3a) $E = \lim E_n$,

(3b) $\mu(E_n)$ et $\nu(E_n)$ sont finis pour tout n.

Alors si les mesures μ et ν coïncident sur $\mathcal{E}$, elles coïncident sur $\mathcal{A}$ en entier.

Démonstration. Soit (E_n) une suite croissante dans $\mathcal{E}$ telle que $E = \lim E_n$.

(1) **Des restrictions** Nous considérons μ_n et ν_n, les restrictions de μ et ν à E_n, c'est-à-dire
$$\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n) \tag{14.63a}$$
$$\nu_n(A) = \nu(A \cap E_n). \tag{14.63b}$$
Puisque les E_n sont dans $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, ils sont mesurables au sens de μ et ν. Par la proposition 14.30, pour tout $A \in \mathcal{E}$ nous avons alors
$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A) \tag{14.64a}$$
$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = \nu(A) \tag{14.64b}$$

(2) **Ce que nous devons prouver** Nous devons donc seulement montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(A) = \nu_n(A)$. Pour cela nous nous fixons un n et nous considérons l'ensemble de parties
$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu_n(A) = \nu_n(A)\}. \tag{14.65}$$
Le but sera de prouver que $\mathcal{D} = \mathcal{A}$.

(3) **$\nu_n = \mu_n$ sur $\mathcal{E}$** Soit $A \in \mathcal{E}$. Vu que $E_n \in \mathcal{E}$, par hypothèse $A \cap E_n \in \mathcal{E}$ et donc
$$\begin{aligned} \mu_n(A) &= \mu(A \cap E_n) && \text{(14.66a)}\\ &= \nu(A \cap E_n) && \text{(14.66b)}\\ &= \nu_n(A). && \text{(14.66c)} \end{aligned}$$
SUBaEQooUJDPooQLSWmn

Pour (14.66b), nous avons utilisé l'hypothèse comme quoi $\mu = \nu$ sur $\mathcal{E}$.

[9] Définition 14.1.

(4) **Encore d'autres parties** Nous définissons $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{E\}$. En particulier $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}$.

(5) **$\mu_n = \nu_n$ sur $\mathcal{E}'$** Nous avons déjà vue l'égalité sur $\mathcal{E}$. Il suffit de vérifier l'égalité sur E. Vu que $E \cap E_n = E_n \in \mathcal{E}$, nous avons

$$\mu_n(E) = \mu(E \cap E_n) = \mu(E_n) = \nu(E_n) = \nu(E_n \cap E) = \nu_n(E). \tag{14.67}$$

(6) **$\mathcal{D}$ est un λ-système** Montrons que $\mathcal{D}$ est un λ-système. Soient $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$. Alors, étant donné que les mesures μ_n et ν_n sont finies, le lemme 14.23 nous donne

$$\mu_n(B \setminus A) = \mu_n(B) - \mu_n(A) \tag{14.68a}$$
$$\nu_n(B \setminus A) = \nu_n(B) - \nu_n(A). \tag{14.68b}$$

Donc $\mu_n(B \setminus A) = \nu_n(B \setminus A)$ et $B \setminus A \in \mathcal{D}$.

Soit par ailleurs une suite croissante $(A_k)_{k \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{D}$. Le lemme 14.24(1) nous donne

$$\mu_n(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{p \to \infty} \mu_n(A_p). \tag{14.69}$$

Mais puisque pour chaque p nous avons $\mu_n(A_p) = \nu_n(A_p)$, nous avons aussi

$$\mu_n(\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p) = \nu_n(\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p). \tag{14.70}$$

Donc $\mathcal{D}$ est bel et bien un λ-système contenant $\mathcal{E}'$.

(7) **Conclusion** Par le lemme 14.33, le λ-système engendré par $\mathcal{E}'$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{E}'$, mais par hypothèse la tribu engendrée par $\mathcal{E}$ est $\mathcal{A}$, donc le λ-système engendré par $\mathcal{E}'$ est $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{D}$ est un λ-système contenant $\mathcal{E}'$, nous avons alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ et donc $\mathcal{A} = \mathcal{D}$, ce qu'il fallait.

□

PROPooAMTTooDfFqcP

Proposition 14.35 ([499]).
Si $\mathcal{E}$ est une base dénombrable de la topologie de l'espace X, alors $\mathcal{B}or(X) = \sigma(\mathcal{E})$.

ExDMPoohtNAj

Exemple 14.36.
La partie $\mathcal{E}$ des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[$ (avec $a, b \in \mathbb{Q}$) engendre les boréliens par les proposition 7.188 et 14.35. Par conséquent pour vérifier que deux mesures sont égales sur les boréliens de $\mathbb{R}$, il suffit de prouver qu'elles sont égales sur les intervalles ouverts. △

14.2.6 Mesure extérieure

Nous avons déjà défini la notion de mesure extérieure en la définition 14.10.

LemULSooBgZLI

Lemme 14.37 ([491]).
Soit $(S, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $X \subset S$. Alors

$$\inf_{\substack{A \in \mathcal{F} \\ X \in A}} \mu(A) = \inf \left\{ \sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{F}, X \subset \bigcup_k A_k \right\}. \tag{14.71}$$

Démonstration. Pour montrer l'inégalité $\geqslant$, nous remarquons qu'il y a plus d'éléments dans l'ensemble du second membre que dans le premier. En effet si $A \in \mathcal{F}$ avec $X \subset A$ alors dans le membre de gauche nous pouvons prendre $A_1 = A$ et $A_{n \geqslant 1} = \varnothing$.

Pour l'inégalité dans l'autre sens, nous montrons que tout élément de

$$\left\{ \sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{F}, X \subset \bigcup_k A_k \right\} \tag{14.72}$$

EqZRAooBCPFk

est plus grand qu'un élément de

$$\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\}. \tag{14.73}$$

EqYNMooNyCtS

En effet si $A_n \in \mathcal{F}$ avec $X \subset \bigcup_k A_k$ alors en posant $A = \bigcup_k A_k$ nous avons $A \in \mathcal{F}$ avec $X \subset A$ ainsi que $\mu(A) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$. Cela prouve que l'élément $\sum_n \mu(A_n)$ de (14.72) est plus grand que l'élément $\mu(A)$ de (14.73). □

14.38.
La proposition 14.39 pourrait être vue comme un cas particulier de la proposition 14.17 en utilisant 14.37. Nous en donnons cependant une preuve directe, qui est presque identique à celle de 14.17, mais avec une ou deux simplifications.

PropFDUooVxJaJ

Proposition 14.39 ([491]).
Soit un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et l'application

$$\begin{aligned}\mu^*\colon \mathcal{P}(S) &\to [0,\infty] \\ X &\mapsto \inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\}.\end{aligned} \tag{14.74}$$

Alors μ^* est une mesure extérieure sur S et sa restriction à $\mathcal{F}$ est égale à μ.

Démonstration. Notons que la définition est bonne parce que l'ensemble sur lequel l'infimum est pris n'est pas vide : considérer $A = S$.

(1) **Le vide** D'abord $\mu^*(\varnothing) = 0$ parce que $\varnothing \in \mathcal{F}$.

(2) **μ^* est croissante** Soit $X \subset Y$ dans $\mathcal{P}(S)$. Si $Y \subset A$ alors $X \subset A$, donc

$$\inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\} \leqslant \inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, Y \subset A\}, \tag{14.75}$$

ce qui signifie que $\mu^*(X) \leqslant \mu^*(Y)$.

(3) **Inégalité par union dénombrable** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de S. Si il existe n_0 tel que $\mu^*(X_{n_0}) = \infty$ alors nous avons automatiquement $\sum_n \mu^*(X_n) = \infty$ et l'inégalité demandée est évidente parce que n'importe quel nombre est plus petit ou égal à ∞. Nous supposons donc que $\mu^*(X_n) < \infty$ pour tout n.

Soit $\epsilon > 0$ et par définition pour chaque n, il existe un $A_n \in \mathcal{F}$ tel que $X_n \subset A_n$ et $\mu(A_n) \leqslant \mu^*(X_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$. Bien entendu nous avons

$$\bigcup_n X_n \subset \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}. \tag{14.76}$$

Nous en déduisons que

$$\mu^*\Big(\bigcup_n X_n\Big) \leqslant \mu\Big(\bigcup_n A_n\Big). \tag{14.77}$$

Mais $(S, \mathcal{F}, \mu)$ étant un espace mesuré,

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) \leqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{14.78}$$

Au final nous avons les inégalités

$$\begin{aligned}\mu^*\Big(\bigcup_n X_n\Big) &\leqslant \mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) && (14.79a)\\ &\leqslant \sum_n \mu(A_n) && (14.79b)\\ &\leqslant \sum_n \mu^*(X_n) + \epsilon \underbrace{\sum_n \frac{1}{2^n}}_{=1} && (14.79c)\\ &= \sum_n \mu^*(X_n) + \epsilon. && (14.79d)\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ,

$$\mu^*\Big(\bigcup_n X_n\Big) \leqslant \sum_n \mu^*(X_n), \tag{14.80}$$

ce qui prouve que μ^* est une mesure extérieure.

(4) **Restriction** Supposons que $X \in \mathcal{F}$. Alors si $X \subset A$ nous avons $\mu(X) \leqslant \mu(A)$; mais en même temps, $\mu(X)$ est dans l'infimum qui définit $\mu^*(X)$ donc

$$\mu^*(X) \leqslant \mu(X) \leqslant \inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\} \leqslant \mu(X) \leqslant \mu^*(X). \tag{14.81}$$

Donc nous avons égalité de tous les éléments de cette chaine d'inégalité.

□

DefTRBoorvnUY

Définition 14.40.
*Soit S un ensemble et m^* une mesure extérieure sur S. Une partie $A \subset S$ est m^*-**mesurable** si pour tout $X \subset S$,*

$$m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c). \tag{14.82}$$

Remarque 14.41.
L'inégalité

$$m^*(X) \leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \tag{14.83}$$

étant toujours vraie, pour prouver qu'un ensemble est m^*-mesurable, il est suffisant de prouver l'inégalité inverse :

$$m^*(X) \geqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \tag{14.84}$$

La définition 14.40 est motivée par la proposition suivante.

PropOJFoozSKAE

Proposition 14.42.
Soit un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et μ^* la mesure extérieure qui va avec. Alors tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont μ^*-mesurables.

En d'autres termes, pour tout $A \in \mathcal{F}$ et tout $X \subset S$ nous avons

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{14.85}$$

Démonstration. Puisque $X = (X \cap A) \cup (X \cap A^c)$, et que μ^* est une mesure extérieure,

$$\mu^*(X) \leqslant \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{14.86}$$

Nous devons montrer l'inégalité inverse.

Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $X \subset B$. D'une part nous avons $X \cap A \subset B \cap A \in \mathcal{F}$, donc

$$\mu^*(X \cap A) \leqslant \mu^*(B \cap A) = \mu(B \cap A). \tag{14.87}$$

Et d'autre part, $X \cap A^c \subset B \cap A^c \in \mathcal{F}$, donc

$$\mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu(B \cap A^c). \tag{14.88}$$

En rassemblant,

EqLSMooTyHLB

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) = \mu(B). \tag{14.89}$$

La dernière égalité vient du fait que $B \cap A$ et $B \cap A^c$ sont disjoints et que μ est une mesure. L'inégalité (14.89) étant vraie pour tout $B \in \mathcal{F}$ tel que $X \subset B$, elle est encore vraie pour l'infimum :

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \inf\{\mu(B) \text{ tel que } B \in \mathcal{F}, X \subset B\} = \mu^*(X). \tag{14.90}$$

Nous avons donc prouvé que

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu^*(X). \tag{14.91}$$

□

Remarque 14.43.
Notons la duplicité du vocabulaire. Les ensembles μ-mesurables sont les éléments de $\mathcal{F}$, qui sont à priori les seuls sur lesquels μ est calculable[10], alors que les μ^*-mesurables sont les parties de S qui vérifient une certaine propriété (et μ^* est calculable sur toutes les parties de S).

14.3 Applications mesurables

14.3.1 Propriétés

DefQKjDSeC

Définition 14.44 (Fonction mesurable)**.**
*Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurés. Une fonction $f : E \to F$ est **mesurable** si pour tout $\mathcal{O} \in \mathcal{F}$, l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{O})$ est dans $\mathcal{A}$.*

[10] « calculable » au sens où μ y vaut un nombre bien défini ; après, que ce soit facile ou pas à calculer dans la pratique, c'est une autre histoire.

PROPooEFHKooARJBwW

Proposition 14.45.
Soient $(S_i, \mathcal{F}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ des espaces mesurables et des fonctions mesurables $f\colon S_1 \to S_2$ et $g\colon S_2 \to S_3$. Alors la fonction $g \circ f\colon S_1 \to S_3$ est mesurable.

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{F}_3$. Alors

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\big(g^{-1}(B)\big) \in f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1. \tag{14.92}$$

□

14.3.2 D'une tribu à l'autre

LemooVDXJooZNYelH

Lemme 14.46 ([488]).
Soient une application $f\colon S_1 \to S_2$ et une tribu $\mathcal{F}_2$ sur S_2. Alors $f^{-1}(\mathcal{F}_2)$ est une tribu sur S_1

Démonstration. Il faut prouver les trois propriétés de la définition 14.1 d'une tribu.

(1) D'abord f est définie sur tout S_1, donc $f^{-1}(S_2) = S_1$ alors que $S_2 \in \mathcal{F}_2$.

(2) Soit $A \in f^{-1}(\mathcal{F}_2)$, c'est-à-dire $A = f^{-1}(B)$ pour un certain $B \in \mathcal{F}_2$. En ce qui concerne le complémentaire :
$$A^c = f^{-1}(B)^c = S_1 \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(S_2 \setminus B) = f^{-1}(B^c). \tag{14.93}$$

(3) Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $f^{-1}(\mathcal{F}_2)$ avec $A_i = f^{-1}(B_i)$ alors
$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}\big(\bigcup_i B_i\big). \tag{14.94}$$
Ce qui est dans la dernière parenthèse est dans $\mathcal{F}_2$ parce que cette dernière est une tribu.

□

PROPooJXMKooNNNXaT

Proposition 14.47 ([1]).
Si $f\colon (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ est une application mesurable et si $\mu\colon \mathcal{A}_1 \to [0, \infty]$ est une mesure, alors

$$\begin{aligned} \mu'\colon \mathcal{A}_1 &\to [0, \infty] \\ A &\mapsto (\mu \circ f^{-1})(A) \end{aligned} \tag{14.95}$$

est une mesure.

Le lemme suivant est également nommé « lemme de transfert ».

LemOQTBooWGYuDU

Lemme 14.48 (Lemme de transport).
Soit $f\colon S_1 \to S_2$ une application et une classe $\mathcal{C}$ de parties de S_2. Alors

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big). \tag{14.96}$$

Démonstration. Puisque $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu dans S_2 alors le lemme 7.6 dit que $f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big)$ est une tribu qui contient en particulier $f^{-1}(\mathcal{C})$. Nous en déduisons que $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) \subset f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big)$.

Réciproquement. Dans S_1 nous avons la tribu $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)$. Nous pouvons alors considérer la tribu

$$\mathcal{F}_f = \{B \subset S_2 \text{ tel que } f^{-1}(B) \in \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)\}. \tag{14.97}$$

Montrons que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_f$. Lorsque $B \in \mathcal{C}$ nous avons $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)$. Du coup $B \in \mathcal{F}_f$. Nous avons alors, en passant aux tribus engendrées :

$$\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f. \tag{14.98}$$

Si maintenant $B \in \sigma(\mathcal{C})$, nous avons $f^{-1}(B) \in \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)$, ce qui signifie que

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big) \subset \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big). \tag{14.99}$$

□

Le théorème suivant est important pour prouver qu'une application est mesurable. En effet, il permet de ne tester si une application n'est mesurable uniquement que sur une partie génératrice de la tribu d'arrivée[11].

ThoECVAooDUxZrE

Théorème 14.49.
Soient des espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi qu'une application $f : S_1 \to S_2$. Si il existe un ensemble de parties $\mathcal{C}$ de S_2 tel que

- $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_2$
- $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$ *pour tout* $B \in \mathcal{C}$

alors f est mesurable.

Démonstration. Par hypothèse, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_2$ et $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_1$ et nous pouvons utiliser le lemme de transfert 14.48 :

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big) \tag{14.100}$$

qui s'écrit ici

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}(\mathcal{F}_2). \tag{14.101}$$

Mais comme $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_1$, nous avons aussi $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) \subset \mathcal{F}_1$, ce qui signifie que

$$f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1. \tag{14.102}$$

Cela est exactement le fait que f soit mesurable. □

14.4 Tribu borélienne

14.4.0.1 Définition

DEFooQBQGooTqGdtY

Définition 14.50 (Tribu borélienne)**.**
*La tribu des **boréliens**, notée $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Plus généralement si Y est un espace topologique, la tribu des boréliens est la tribu engendrée par les ouverts de Y.*

PROPooYEkvbWBz

Proposition 14.51.
La tribu engendrée par une base dénombrable de la topologie est celle des boréliens.

Démonstration. Si une base de topologie est donnée, tout ouvert peut être écrit comme union d'élément de la base, proposition 7.2. Dans le cas d'une base dénombrable, cette union sera forcément dénombrable. Une tribu étant stable par union dénombrable, tout ouvert est dans la tribu engendrée par la base de topologie. Les autres boréliens suivent automatiquement.

Dit avec plus de lettres et moins de phrases, si $\mathcal{D}$ est une base dénombrable de la topologie de X, et si $\mathcal{O}$ est un ouvert de X, nous avons $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec $A_i \in \mathcal{D}$. Puisqu'une tribu est stable par union dénombrable[12], nous avons $\mathcal{O} \in \sigma(\mathcal{D})$. En conséquence, $\mathcal{B}or(X) \subset \sigma(\mathcal{D})$.

Mais comme $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}or(X)$ l'inclusion inverse est automatique. D'où l'égalité $\mathcal{B}or(X) = \sigma(\mathcal{D})$. □

14.4.0.2 Les boréliens de $\mathbb{R}$

Nous rappelons que la topologie de $\mathbb{R}$ est celle des boules donnée par le théorème 7.142. Nous rappelons (voir la proposition 7.188 et sa preuve) que les boules ouvertes de la forme $B(q, r)$ avec $q, r \in \mathbb{Q}$ forment une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$.

LemZXnAbtl

Lemme 14.52.
Soit $\{q_i\}$ une énumération des rationnels. La tribu engendrée par les ouverts $\sigma_i =]q_i, \infty[$ est la tribu des boréliens.

Démonstration. Si $a < b$ dans $\mathbb{Q}$ alors $\sigma_a \setminus \sigma_b =]a, b]$. Ensuite

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_a \setminus \sigma_{b - \frac{1}{n}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]a, b - \frac{1}{n}] =]a, b[. \tag{14.103}$$

Par union dénombrable, tous les intervalles $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ sont dans la tribu engendrée par les σ_i. Ces boules ouvertes forment une base de la topologie de $\mathbb{R}$ par la proposition 7.188 et la proposition 14.51 conclut. □

[11] Typiquement les ouverts pour les boréliens.
[12] Définition 14.1(3)

Exemple 14.53.
Les singletons sont des boréliens de $\mathbb{R}$ parce que

$$\{x\} = \Big(]-\infty, x[\cup]x, +\infty[\Big)^c. \tag{14.104}$$

Puisqu'une tribu est stable par union dénombrable, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. Et comme les tribus sont stables par différence ensembliste (14.3(2)), l'ensemble des irrationnels est un borélien de $\mathbb{R}$. △

14.4.0.3 Diverses expressions

LEMooUPYDooPVjscA

Lemme 14.54.
Soient un espace topologique X et un borélien B de X. Nous considérons sur B la topologie induite[13] *de X et les boréliens $\mathcal{B}or(B)$ correspondants. Nous avons :*

$$\mathcal{B}or(B) = \{A \in \mathcal{B}or(X) \text{ tel que } A \subset B\} = \{B \cap A \text{ tel que } A \in \mathcal{B}or(X)\}. \tag{14.105}$$

En particulier,

EQooEUWVooCBUjms

$$\mathcal{B}or(B) = \mathcal{B}or(X)_B. \tag{14.106}$$

Démonstration. L'égalité

$$\{A \in \mathcal{B}\text{or}(X) \text{ tel que } A \subset B\} = \{B \cap A \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\} \tag{14.107}$$

est déjà dans la proposition 14.9.

Nous démontrons maintenant que

$$\mathcal{B}\text{or}(B) = \{A \cap B \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\}. \tag{14.108}$$

Pour ce faire, nous nous rappelons du lemme de transport 14.48. Soit l'injection canonique $f\colon B \to X$; pour tout $A \subset X$ nous avons $f^{-1}(A) = A \cap B$.

Nous considérons la classe $\mathcal{T}$ des ouverts de X. Par définition de la topologie induite, les ouverts de B sont les éléments de $f^{-1}(\mathcal{T})$. Donc

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{T})\big) = \mathcal{B}\text{or}(B). \tag{14.109}$$

Mais d'autre part,

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{T})\big) = \{A \cap B \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\}. \tag{14.110}$$

Donc le lemme de transport 14.48 nous dit que

$$\mathcal{B}\text{or}(B) = \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{T})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{T})\big) = \{A \cap B \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\}. \tag{14.111}$$

Pour finir, l'égalité (14.106) se démontre :

$$\mathcal{B}\text{or}(X)_B = \{B \cap A \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\} = \mathcal{B}\text{or}(B). \tag{14.112}$$

□

14.4.1 Applications continues et boréliennes

DefHHIBooNrpQjs

Définition 14.55 (Fonction borélienne)**.**
Une application $f\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d))$[14] *est* ***borélienne*** *si elle est mesurable, c'est-à-dire si pour tout $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$ nous avons $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Si rien n'est précisé, une application entre deux espaces topologiques est borélienne lorsqu'elle est mesurable en considérant la tribu borélienne sur les deux *espaces.*

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur un ensemble E, nous notons $m(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions qui sont $\mathcal{A}$-mesurables.

Le plus souvent lorsque nous parlerons de fonctions $f\colon X \to Y$ où Y est un espace topologique, nous considérons la tribu borélienne sur Y. Ce sera en particulier le cas dans la théorie de l'intégration.

Le théorème suivant est très important parce qu'en pratique c'est souvent lui, en conjonction avec la proposition 14.125 qui permet de déduire qu'une fonction est borélienne.

ThoJDOKooKaaiJh

Théorème 14.56 ([488])**.**
Soient X et Y deux espaces topologiques. Alors toute application continue $f\colon X \to Y$ est borélienne[15]*.*

[13] Définition 7.27.
[14] Tribu des boréliens, définition 14.50.
[15] Définition 14.55.

Démonstration. Pour vérifier que f est borélienne, nous devons prouver que $f^{-1}(B)$ est borélien pour tout borélien B de Y. Heureusement, le théorème 14.49 nous permet de limiter la vérification aux B appartenant à une classe engendrant les boréliens de Y.

La classe en question est toute trouvée : ce sont les ouverts. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de Y alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X et donc un borélien de X. □

Le théorème suivant donne une importante compatibilité entre l'induction de tribu et l'induction de topologie : la tribu induite à partir des boréliens sur un sous-espace topologique est la tribu des boréliens pour la topologie induite.

ThoSVTHooChgvYa

Théorème 14.57 ([488])**.**
Soit X, un espace topologique et $Y \subset X$ une partie munie de la topologie induite. Alors

$$\mathcal{B}or(Y) = \mathcal{B}or(X)_Y \tag{14.113}$$

où $\mathcal{B}or(X)_Y$ est la tribu sur Y induite de $\mathcal{B}or(X)$ par la définition 14.8.

Démonstration. Nous notons τ_X et τ_Y les topologies de X et Y.

(1) **$\mathcal{B}\mathrm{or}(Y) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$** Si $A \in \tau_Y$ alors $A = Y \cap \Omega$ pour un $\Omega \in \tau_X$. Mais puisque Ω est un ouvert de X, il est un borélien de X, ce qui donne que $Y \cap \Omega$ est un élément de $\mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$. Cela prouve que $\tau_Y \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$, c'est-à-dire que $\mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$ est une tribu sur Y contenant les ouverts de Y. Nous avons donc

$$\mathcal{B}\mathrm{or}(X) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y. \tag{14.114}$$

(2) **Réciproquement** L'application $\mathrm{Id}\colon (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_X)$ est continue parce que si Ω est ouvert de X alors $\mathrm{Id}^{-1}(\Omega) = \Omega \cap Y \in \tau_Y$. Par conséquent l'identité est une application borélienne (théorème 14.56), ce qui signifie que $\mathrm{Id}^{-1}\big(\mathcal{B}\mathrm{or}(X)\big) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(Y)$, ou encore que si $B \in \mathcal{B}\mathrm{or}(X)$, alors $\mathrm{Id}^{-1}(B) = B \cap Y \in \mathcal{B}\mathrm{or}(Y)$. Cela signifie que

$$\mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(Y). \tag{14.115}$$

□

CorooMJQYooFfwoTd

Corolaire 14.58.
Si U est un borélien de l'espace topologique X, alors les boréliens de U sont les boréliens de X inclus dans U :

$$\mathcal{B}or(U) = \{B \in \mathcal{B}or(X) \text{ tel que } B \subset U\}. \tag{14.116}$$

Démonstration. Si $B' \in \mathcal{B}\mathrm{or}(U)$, le théorème 14.57 donne un borélien $B \in \mathcal{B}\mathrm{or}(X)$ tel que $B' = B \cap U$. Mais U étant borélien de X, l'intersection $B \cap U$ est encore un borélien de X. □

Ce corolaire s'applique en particulier lorsque U est un ouvert.

La proposition suivante montre comment il est possible de construire un espace mesuré à partir d'une bijection avec un espace mesuré déjà connu. Attention cependant : la mesure construite dans cette proposition n'est pas celle qui est le plus adapté. Voir la proposition 14.284 et le blabla 14.285.

PROPooXQHTooUxJoyq

Proposition 14.59.
Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, un ensemble Ω' et une bijection $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$. Nous posons

(1) $\mathcal{A}' = \varphi(\mathcal{A})$,

(2) $\mu'(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big)$ *pour tout* $B \in \mathcal{A}'$.

Alors $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ est un espace mesuré.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **$\mathcal{A}'$ est une tribu** Il faut vérifier les différents points de la définition 14.1. D'abord, puisque $\Omega \in \mathcal{A}$, nous avons $\Omega' = \varphi(\Omega) \in \mathcal{A}'$. Pour le complémentaire, si $B \in \mathcal{A}'$ alors $B = \varphi(A)$ pour un certain $A \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu nous avons alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ et donc $\varphi(\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}'$. Mais comme φ est bijective,

$$\varphi(\Omega \setminus A) = \Omega' \setminus \varphi(A) = \Omega' \setminus B. \tag{14.117}$$

Le complémentaire de B est donc bien dans $\mathcal{A}'$. Pour la troisième condition, soient $B_i \in \mathcal{A}'$. Pour chaque i, il existe $A_i \in \mathcal{A}$ tel que $B_i = \varphi(A_i)$. Nous avons $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$, donc

$$\bigcup_i B_i = \bigcup_i \varphi(A_i) = \varphi\Big(\bigcup_i A_i\Big) \in \mathcal{A}'. \tag{14.118}$$

Nous avons fini de prouver que $(\Omega', \mathcal{A}')$ était un espace mesurable.

(2) μ' **est une mesure positive** D'abord $\mu'(\varnothing) = \mu\big(\varphi^{-1}(\varnothing)\big) = \mu(\varnothing) = 0$. Ensuite si les A_i sont disjoints dans $\mathcal{A}'$ nous avons

$$\mu'\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big) = \mu\left(\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big)\right) = \mu\left(\bigcup_i \varphi^{-1}(A_i)\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu\big(\varphi^{-1}(A_i)\big) = \sum_i \mu'(A_i). \tag{14.119}$$

□
PROPooIKYYooCFaDaI

Proposition 14.60.
Soit une bijection continue d'inverse continue $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$. Alors

$$\varphi\big(\mathcal{B}or(\Omega)\big) = \mathcal{B}or(\Omega'). \tag{14.120}$$

Démonstration. Si $A \in \mathcal{B}\text{or}(\Omega')$, alors $A = \varphi\big(\varphi^{-1}(A)\big) \in \varphi\big(\mathcal{B}\text{or}(\Omega)\big)$ parce que φ est continue et donc borélienne (proposition 14.56). Le même raisonnement fonctionne dans l'autre sens parce que nous avons supposé que φ est continue et d'inverse continu. □

14.4.2 Tribu de Baire

Définition 14.61.
Une partie d'un espace topologique est ***rare*** *si elle est contenue dans un fermé d'intérieur vide.*
Une partie est ***maigre*** *si elle est réunion finie ou dénombrable de parties rares.*

Exemple 14.62.
L'ensemble $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est maigre mais n'est pas rare parce que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. △
PROPooCHTWooZFiSMf

Proposition 14.63 ([489]).
Soit X un espace topologique. L'ensemble de parties[16]

$$\mathcal{B}a(X) = \{B \cup A \text{ avec } B \text{ borélien et } A \text{ maigre}\} \tag{14.121}$$

est une tribu. Elle est appelée la ***tribu de Baire*** *de l'espace X.*

Démonstration. Nous allons montrer que les boréliens et les maigres vérifient les conditions de la proposition 14.7.

(1) Si A est maigre, il s'écrit comme $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i$ où les R_i sont rares. Il existe donc des fermés d'intérieur vide F_i tels que $R_i \subset F_i$; en particulier $A \subset \bigcup_i F_i$. En tant que fermés, $F_i \in \mathcal{B}\text{or}(X)$; de plus chaque F_i est rare, donc $\bigcup_i F_i$ est maigre. L'ensemble A est donc bien contenu dans un ensemble maigre et borélien.

(2) Soit A maigre et $B \subset A$. Nous avons, avec les mêmes notations, $A = \bigcup_i R_i$ et $B = \bigcup_i (R_i \cap B)$. Les ensembles $R_i \cap B$ sont encore rares, donc B est une union dénombrable d'ensembles rares. L'ensemble B est donc maigre.

(3) Si les ensembles (A_i) sont maigres, alors ils sont unions dénombrables de rares : $A_i = \bigcup_k R_k^{(i)}$. Nous avons alors

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_{(i,k)\in\mathbb{N}^2} R_k^{(i)}, \tag{14.122}$$

et donc $\bigcup_i A_i$ est encore une union dénombrable d'ensembles rares.

□
PropGRHootvAWq

Proposition 14.64 ([489]).
Une partie B de l'espace topologique X est dans la tribu de Baire de X si et seulement si il existe un ouvert U tel que $B\Delta U$ est maigre.

Démonstration. Nous définissons la relation d'équivalence[17] suivante sur $\mathcal{P}(X)$: nous disons que $A \sim B$ si et seulement si $A\Delta B$ est maigre.

[16] Pour rappel, la tribu borélienne est définie en 14.50.
[17] Définition 1.50

(1) **Réflexive** Nous avons $A\Delta A = \varnothing$, donc $A \sim A$.

(2) **symétrique** Nous avons $A\Delta B = B\Delta A$, donc $\sim$ est symétrique.

(3) **transitive** Si A, B, C sont des parties de X alors nous avons toujours

$$A\Delta C \subset (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A\Delta B) \cup (B\Delta C). \tag{14.123}$$

Donc si $A \sim B$ et $B \sim C$ alors $A\Delta C$ est contenu dans une union de maigres et est donc maigre.

(4) **Autres propriétés de $\sim$** De plus la relation d'équivalence $\sim$ vérifie $A \sim B$ si et seulement si $A^c \sim B^c$, par le lemme 1.49(1).

Pour compléter les propriétés de $\sim$ mentionnons encore le fait que si F est fermé alors $F \sim \text{Int}(F)$. En effet $F \cup \text{Int}(F) = F$ et $F \cap \text{Int}(F) = \text{Int}(F)$, de telle sorte que $F\Delta \,\text{Int}(F) = F \setminus \text{Int}(F)$. Cet ensemble est un fermé parce que son complémentaire est $F^c \cup \text{Int}(F)$ qui est une union d'ouverts. De plus $F \subset \text{Int}(F)$ est d'intérieur vide, de telle sorte qu'il est rare et donc maigre.

Pour la suite de la preuve nous posons

$$\mathcal{F} = \{A \subset X \text{ tel que il existe un ouvert } U \text{ avec } U \sim A\}, \tag{14.124}$$

et nous devons prouver que $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{a}(X)$.

(1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}\mathbf{a}(X)$

Soit $A \in \mathcal{F}$ et un ouvert U tel que $U \sim A$. Alors nous posons $M = U\Delta A$ qui est maigre. En vertu du lemme 1.49(2), nous avons

$$A = M\Delta U = (M \cup U) \setminus (M \cap U), \tag{14.125}$$

ce qui prouve que A est dans la tribu engendrée par les ouverts et les maigres, laquelle tribu est contenue dans $\mathcal{B}\text{a}(X)$.

(2) $\mathcal{B}\mathbf{a}(X) \subset \mathcal{F}$

Nous allons montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu contenant tous les ouverts et tous les maigres. Alors en particulier $\mathcal{F}$ contiendra $\mathcal{B}\text{a}(X)$. Si U est ouvert, $U \sim U$ et donc $U \in \mathcal{F}$. Si M est maigre, alors $M \sim \varnothing$ et donc $M \in \mathcal{F}$. Il reste à prouver que $\mathcal{F}$ est une tribu.

(2a) **Vide et tout l'ensemble** C'est facile : $\varnothing$ et X sont dans $\mathcal{F}$.

(2b) **Comlémentaire** Commençons par nous souvenir que $F \sim \text{Int}(F)$ dès que F est fermé. Si $A \in \mathcal{F}$ alors il existe un ouvert U tel que $A \sim U$ et donc aussi $A^c \sim U^c$. D'autre part U^c est fermé, donc $U^c \sim \text{Int}(U^c)$, donc

$$A^c \sim U^c \sim \text{Int}(U^c), \tag{14.126}$$

ce qui implique que $A^c \in \mathcal{F}$.

(2c) **Union dénombrable** Soit $A_n \in \mathcal{F}$ et $M_n = A_n\Delta U_n$ avec M_n maigre et U_n ouvert. Nous allons prouver que

$$\bigcup_n A_n \sim \bigcup_n U_n. \tag{14.127}$$

Pour cela il faut remarquer que

$$\Big(\bigcup_n A_n\Big)\Delta\Big(\bigcup_n U_n\Big) \subset \bigcup_n (A_n\Delta U_n) = \bigcup_n M_n. \tag{14.128}$$

Le terme le plus à droite est maigre, ce qui signifie que celui le plus à gauche est contenu dans un maigre et donc est maigre lui-même.

□

Proposition 14.65.
Si B est un borélien de X, alors il existe un ouvert U et un maigre M tels que

(1) $B\Delta U$ est maigre,

(2) $M\Delta U = B$,

(3) $B\Delta M$ est ouvert.

Démonstration. Puisque B est borélien, il est aussi dans la tribu de Baire et il existe par la proposition 14.64 un ouvert U tel que $M = B\Delta U$ est maigre. En prenant ce U et ce M, les trois conditions sont vérifiées parce que

$$M\Delta U = (B\Delta U)\Delta U = B \tag{14.129}$$

et

$$B\Delta M = M\Delta B = (U\Delta B)\Delta B = U. \tag{14.130}$$

Tout ceci par le lemme 1.49(2). □

14.5 Espace mesuré complet

14.5.1 Partie négligeable

DefAVDoomkuXi

Définition 14.66.
*Soit un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Une partie N de X est **négligeable** pour μ si il existe $Y \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset Y$ et $\mu(Y) = 0$.*

LemVKNooOCOQw

Lemme 14.67.
L'ensemble des parties négligeables est stable par union dénombrable.

Démonstration. Si les ensembles N_i sont négligeables, alors pour chaque i nous avons $Y_i \in \mathcal{A}$ tel que $N_i \subset Y_i$ et $\mu(Y_i) = 0$. Alors bien entendu $\bigcup_i N_i \subset \bigcup_i Y_i$ et en utilisant (14.33),

$$\mu\Big(\bigcup_i Y_i\Big) \leqslant \sum_i \mu(Y_i) = 0. \tag{14.131}$$

□

DefBWAoomQZcI

Définition 14.68.
*L'espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est **complet** si tout ensemble μ-négligeable est dans $\mathcal{F}$.*

Notons que la proposition 14.7 s'applique si $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré et $\mathcal{N}$ est l'ensemble des parties μ-négligeables. C'est ce qui permet de donner le théorème suivant, que nous redémontrons de façon indépendante de la proposition 14.7.

thoCRMootPojn

Théorème 14.69 (Complétion d'espace mesuré[491, 500, 501])**.**
Soit un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties μ-négligeables de X.

(1) Les ensembles suivants sont égaux :

$$\mathcal{A} = \{A \subset X \text{ tel que } \exists B, C \in \mathcal{F} \text{ tel que } B \subset A \subset C, \mu(C \setminus B) = 0\} \tag{14.132a}$$
$$\mathcal{B} = \{B \cup N \text{ tel que } B \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\} \tag{14.132b}$$
$$\mathcal{C} = \{A \subset X \text{ tel que } \exists B \in \mathcal{F} \text{ tel que } A\Delta B \in \mathcal{N}\}. \tag{14.132c}$$

EqFJIoorxZNU

Ici $A\Delta B$ est la différence symétrique de A et B, définition 1.47.

(2) L'ensemble $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$ est une tribu.

(3) La définition

$$\begin{aligned} \mu' : \mathcal{B} &\to [0, \infty] \\ A \cup N &\mapsto \mu(A) \end{aligned} \tag{14.133}$$

est cohérente.

(4) L'application μ' ainsi définie est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

(5) L'espace $(X, \mathcal{A}, \mu')$ est complet.

(6) La mesure μ' prolonge μ.

thoCRMootPojnvii

(7) La mesure μ' est minimale au sens où toute mesure complète prolongeant μ prolonge μ'.

Démonstration. Commençons par prouver que les trois ensembles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont égaux.

(1) $\underline{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}.}$ Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors nous avons des ensembles $B, C \in \mathcal{F}$ tels que $B \subset A \subset C$ avec $\mu(C \setminus B) = 0$. Alors nous avons aussi $A = B \cup (C \setminus B)$, ce qui prouve que $A \in \mathcal{B}$.

(2) $\underline{\mathcal{B} \subset \mathcal{C}.}$ Soit $A \in \mathcal{B}$, c'est-à-dire que $A = B \cup N$ avec $B \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}$. Nous avons évidemment $A \cup B = A$ et donc

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus (A \cap B) = (B \cup N) \setminus (A \cap B) \subset N. \tag{14.134}$$

Pour comprendre la dernière inclusion, si x appartient à $A = B \cup N$ sans être dans N alors $x \in B$ et donc $x \in A \cap B$. Par conséquent nous avons $A\Delta B \subset N$ et donc $A\Delta B \in \mathcal{N}$.

(3) $\underline{\mathcal{C} \subset \mathcal{A}}$ Soit donc $A \in \mathcal{C}$; il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $A\Delta B \in \mathcal{N}$ ou encore, il existe $D \in \mathcal{F}$ tel que $A\Delta B \subset D$ avec $\mu(D) = 0$. Si nous posons $B' = B \cap D^c$ et $C' = B \cup D$ alors nous prétendons avoir

$$B' \subset A \subset C'. \tag{14.135}$$

Et nous le prouvons. En effet si $x \in B \cap D^c$ alors en remarquant que B se divise en

$$B = (B \cap A) \cup \big(B \cap (A\Delta B)\big), \tag{14.136}$$

et en nous souvenant que $B \cap (A\Delta B) \subset D$, il vient que $B \cap D^c \subset B \cap A$. Et en particulier $x \in A$. D'autre part

$$A \subset B \cup (A\Delta B) \subset B \cup D. \tag{14.137}$$

Nous avons donc bien $B' \subset A \subset C'$. Par stabilité de la tribu $\mathcal{F}$ sous les intersections et complémentaires, nous avons aussi $B', C' \in \mathcal{F}$. De plus

$$C' \setminus B' = (B \cup D) \setminus (B \cap D^c) \subset D, \tag{14.138}$$

et donc

$$\mu(C' \setminus B') \leqslant \mu(D) = 0. \tag{14.139}$$

Nous avons donc prouvé que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, et donc que $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$. Nous pouvons maintenant noter $\mathcal{A}$ indifféremment les trois ensembles.

Nous prouvons à présent que $\mathcal{A}$ est une tribu.

(1) $\underline{\textbf{Tribu : le vide}}$ Pas de problème à $\varnothing \in \mathcal{A}$

(2) $\underline{\textbf{Tribu : complémentaire}}$ Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors il existe $B, C \in \mathcal{F}$ tels que $B \subset A \subset C$ avec $\mu(C \setminus B) = 0$. En passant au complémentaire,

$$C^c \subset A^c \subset B^c. \tag{14.140}$$

Mais $B^c \setminus C^c = C \setminus B$, donc $\mu(B^c \setminus C^c) = 0$.

(3) $\underline{\textbf{Tribu : union dénombrable}}$ Soit (A_n) des éléments de $\mathcal{A}$. Pour chaque n nous avons des ensembles $B_n, C_n \in \mathcal{F}$ tels que$B_n \subset A_n \subset C_n$ avec $\mu(C_n \setminus B_n) = 0$. En ce qui concerne les unions nous avons

$$\bigcup_n B_n \subset \bigcup_n A_n \subset \bigcup_n C_n, \tag{14.141}$$

et

$$\big(\bigcup_n C_n\big) \setminus \big(\bigcup_n B_n\big) \subset \bigcup_n (C_n \setminus B_n). \tag{14.142}$$

Par conséquent, en utilisant (14.33),

$$\mu\left(\big(\bigcup_n C_n\big) \setminus \big(\bigcup_n B_n\big)\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_n (C_n \setminus B_n)\right) \leqslant \sum_n \mu(C_n \setminus B_n) = 0. \tag{14.143}$$

Cela prouve que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$, et donc que $\mathcal{A}$ est une tribu.

(4) $\underline{\textbf{Définition cohérente}}$ Soient $A, A' \in \mathcal{F}$ et $N, N' \in \mathcal{N}$ tels que $A \cup N = A' \cup N'$. Nous considérons $Y, Y' \in \mathcal{F}$ tel que $N \subset Y$, $N' \subset Y'$ et $\mu(Y) = \mu(Y') = 0$. En vertu de (14.33) nous avons

$$\mu(A) \leqslant \mu(A \cup Y) \leqslant \mu(A' \cup Y \cup Y') \leqslant \mu(A') + \mu(Y) + \mu(Y') = \mu(A'). \tag{14.144}$$

En écrivant la même chose en échangeant les primes, nous prouvons également $\mu(A') \leqslant \mu(A)$. Au final $\mu(A) = \mu(A')$, c'est-à-dire

$$\mu'(A \cup N) = \mu'(A' \cup N'). \tag{14.145}$$

La définition de μ' est donc cohérente.

(5) μ' **est une mesure**

Le fait que μ' soit positive et que $\mu'(\varnothing)$ soit nul ne pose pas de problème. Il faut voir l'union dénombrable disjointe. Si les ensembles $A_i = B_i \cup N_i$ sont disjoints, alors les B_i et le N_i sont tous disjoints deux à deux. De plus l'ensemble $\bigcup_i N_i$ est négligeable parce que nous avons déjà vu que $\mathcal{N}$ était stable par union dénombrable (14.33). Donc

$$\mu'\left(\bigcup_i B_i \cup N_i\right) = \mu'\Big((\bigcup_i B_i) \cup \underbrace{(\bigcup_i N_i)}_{\in\mathcal{N}}\Big) = \mu(\bigcup_i B_i) = \sum_u \mu(B_i) = \sum_i \mu'(B_i \cup N_i). \tag{14.146}$$

(6) **Espace complet** Un ensemble μ'-négligeable est automatiquement μ-négligeable. En effet si H est μ'-négligeable, il existe $B \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}$ tels que $H \subset B \cup N$ avec $\mu(B) = 0$. Comme N est μ-négligeable, il existe $Y \in \mathcal{F}$ tel que $N \subset Y$ et $\mu(Y) = 0$. Donc $H \subset B \cup N \subset B \cup Y$ avec $\mu(B \cup Y) = 0$.

Tous les ensembles μ-négligeables faisant partie de $\mathcal{B}$, tous les ensembles μ'-négligeables font partie de $\mathcal{A}$.

(7) **Prolongement** La mesure μ' prolonge μ. En effet si $A \in \mathcal{F}$ alors $A = A \cup \varnothing \in \mathcal{B}$ et A est μ'-mesurable. De plus $\mu'(A) = \mu'(A \cup \varnothing) = \mu(A)$.

(8) **Minimalité**

Soit un espace mesuré complet $(X, \mathcal{M}, \nu)$ prolongeant $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Pour $A \in \mathcal{A}$ nous devons prouver que $A \in \mathcal{M}$ et que $\mu'(A) = \nu(A)$. Il existe $B \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}$ tels que $A = B \cup N$. Puisque N est μ-négligeable, il est également ν-négligeable et donc ν-mesurable parce que ν est complète : $A \in \mathcal{M}$. Nous avons le calcul

$$\nu(B) \leqslant \nu(B \cup N) \leqslant \nu(B) + \nu(N) = \nu(B). \tag{14.147}$$

Vu que le premier et dernier termes de ces inégalités sont égaux, toutes les inégalités sont des égalités et nous avons $\nu(B) = \nu(B \cup N)$. Nous pouvons enfin faire le calcul

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \nu(B \cup N) && \text{(14.148a)}\\
&= \nu(B) && \text{(14.148b)}\\
&= \mu(B) && \text{(14.148c) SUBEQooVCROooSeRAjw}\\
&= \mu'(B \cup N) && \text{(14.148d) SUBEQooBDASooTBBBMs}\\
&= \mu'(A). && \text{(14.148e)}
\end{aligned}$$

Justifications.

- Pour (14.148c). La mesure ν prolonge μ.
- Pour (14.148d). Définition de μ'.

L'égalité $\mu'(A) = \nu(A)$ est prouvée.

□

Définition 14.70.
*L'espace mesuré complet $(X, \mathcal{A}, \mu')$ défini par le théorème 14.69 est l'**espace mesuré complété** de $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Nous noterons le complété de $(S, \mathcal{F}, \mu)$ par $(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$*

ThoUUIooaNljH

Théorème 14.71 (Carathéodory[491])**.**
Soit S un ensemble et m^* une mesure extérieure sur S. Alors RPPooHSWWsi

(1) l'ensemble $\mathcal{M}$ des parties m^*-mesurables est une tribu,

(2) la restriction de m^* est une mesure sur $(S, \mathcal{M})$,

(3) l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, m^*)$ est complet[18]*.*

Démonstration. Une grosse partie de la preuve sera de prouver la stabilité de $\mathcal{M}$ par union dénombrable quelconque ; cela sera divisé en plusieurs parties.

(1) **Tribu : le vide** L'ensemble vide est m^*-mesurable.

[18] Définition 14.68.

(2) **Tribu : complémentaire** Soit $A \in \mathcal{M}$ et $X \in S$. La condition qui dirait $A^c \in \mathcal{M}$ est :

$$m^*(X) = m^*(X \cap A^c) + m^*(X \cap A), \tag{14.149}$$

qui est la même que celle qui dit que A est dans $\mathcal{M}$.

(3) **Tribu : union finie** Soient $A, B \in \mathcal{M}$ et $X \subset S$. Alors, comme m^* est une mesure extérieure,

$$\begin{aligned} m^*(X) &\leqslant m^*\big(X \cap (A \cup B)\big) + m^*\big(X \cap (A \cup B)^c\big) && \text{(14.150a)}\\ &= m^*\big((X \cap A) \cup (X \cap B)\big) + m^*\big(X \cap A^c \cap B^c\big). && \text{(14.150b)} \end{aligned}$$

Mais nous pouvons écrire la première union sous forme d'une union disjointe de la façon suivante :

$$(X \cap A) \cup (X \cap B) = (X \cap A) \cup (X \cap B \cap A^c), \tag{14.151}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} m^*(X) &\leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap B \cap A^c) + m^*(X \cap A^c \cap B^c) && \text{(14.152a)}\\ &= m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) && \text{(14.152b)}\\ &= m^*(X) && \text{(14.152c)} \end{aligned}$$

subeqLYNooRdrgCi

parce que les deux derniers termes de (14.152a) se somment à $m^*(X \cap A^c)$ parce que $B \in \mathcal{M}$. La dernière ligne est le fait que A soit m^*-mesurable.

(4) **Union finie disjointe** Soient $\{A_1, \dots, A_n\}$ des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$. Nous allons maintenant prouver par récurrence que

$$m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)\Big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(X \cap A_k). \tag{14.153}$$

EqBRIooAnPCd

Si $n = 1$ le résultat est évident. Sinon, le fait que A_{n+1} soit m^*-mesurable donne

$$m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big)\Big) = m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1}\Big) + m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1}^c\Big). \tag{14.154}$$

Le fait que les A_k soient disjoints implique aussi que

$$X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1} = X \cap A_{n+1} \tag{14.155}$$

et

$$X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1}^c = X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) \tag{14.156}$$

et donc

$$\begin{aligned} m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big)\Big) &= m^*(X \cap A_{n+1}) + m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)\Big) && \text{(14.157a)}\\ &\overset{rec.}{=} m^*(X \cap A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} m^*(X \cap A_k) && \text{(14.157b)}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} m^*(X \cap A_k). && \text{(14.157c)} \end{aligned}$$

La relation (14.153) est prouvée.

Notons qu'en particularisant à $X = S$ nous avons

$$m^*\big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k) \tag{14.158}$$

dès que les A_k sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$.

(5) **Union dénombrable disjointe** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints dans $\mathcal{M}$. Nous allons prouver les affirmations suivantes :

- $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$
- $m^*\big(\bigcup_n A_n\big) = \sum_n m^*(A_n)$

où toutes les sommes et unions sur n sont entre 1 et ∞.

(5a) **Première affirmation**
Nous posons $A = \bigcup_k A_k$ et $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Nous savons que $B_n \in \mathcal{M}$ pour tout n par le point précédent. Donc si $X \in S$ nous avons

$$m^*(X) = m^*(X \cap B_n) + m^*(X \cap B_n^c) \tag{14.159a}$$
$$= \sum_{k=1}^n m^*(X \cap A_k) + m^*(X \cap B_n^x) \tag{14.159b}$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^n m^*(X \cap A_k) + m^*(X \cap A^c) \tag{14.159c}$$

où nous avons utilisé la relation (14.153) sur les B_n ainsi que le fait que $A^c \subset B_n^c$ (parce que $B_n \subset A$). L'inégalité (14.159a) étant vraie pour tout n, elle est vraie à la limite :

$$m^*(X) \geqslant \sum_{k=1}^\infty m^*(A \cap A_k) + m^*(X \cap A^c) \tag{14.160a}$$
$$\geqslant m^*\Big(\bigcup_k (X \cap A_k)\Big) + m^*(X \cap A^c) = m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_k A_k\big)\Big) + m^*(X \cap A^c) \tag{14.160b}$$
$$\geqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c), \tag{14.160c}$$

ce qui signifie que $A \in \mathcal{M}$.

(5b) **Seconde affirmation** En particularisant à $X = A$ et en tenant compte des faits que $A \cap A_k = A_k$ et $A \cap A^c = \varnothing$,

$$m^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^\infty m^*(A \cap A_k) + m^*(A \cap A^c), \tag{14.161}$$

c'est-à-dire que pour tout n nous avons

$$m^*\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\big) \geqslant \sum_{k=1}^n m^*(A_k). \tag{14.162}$$

L'inégalité est encore vraie à la limite, et l'inégalité inverse étant toujours vraie pour une mesure extérieure,

$$m^*\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\big) = \sum_{k=1}^\infty m^*(A_k). \tag{14.163}$$

(6) **Union dénombrable quelconque** Soit maintenant une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ que nous ne supposons plus être disjoints. Nous nous ramenons au cas disjoint en posant

$$\begin{cases} B_1 = A_1 & (14.164a)\\ B_n = A_n \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\big)^c, & (14.164b) \end{cases}$$

c'est-à-dire que nous mettons dans B_n les éléments de A_n qui ne sont dans aucun des A_k précédents. Autrement dit, nous posons $B_0 = \varnothing$ et $B_n = A_n \setminus B_{n-1}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ étant stable par réunion finie, par complément et par intersection finie nous avons $B_n \in \mathcal{M}$. De plus les B_n sont disjoints, donc

$$\bigcup_{k=1}^\infty A_k = \bigcup_{k=1}^\infty B_k \in \mathcal{M}. \tag{14.165}$$

La première égalité se justifie de la façon suivante : si $x \in \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ alors nous notons n_0 le plus petit n tel que $x \in A_n$ et alors $x \in B_{n_0}$.

(7) **Espace complet** Nous prouvons à présent que $(S, \mathcal{M}, m^*)$ est un espace mesuré complet. Soit N une partie m^*-négligeable de S et $Y \in \mathcal{M}$ tel que $m^*(Y) = 0$ et $N \subset Y$. D'abord $m^*(N) = 0$ parce que

$$m^*(N) \leqslant m^*(Y) = 0. \tag{14.166}$$

Si $X \subset S$ nous avons

$$X \cap N \subset N \Rightarrow m^*(X \cap N) = 0 \tag{14.167a}$$
$$X \cap N^c \subset X \Rightarrow m^*(X \cap N^c) \leqslant m^*(X). \tag{14.167b}$$

Donc

$$m^*(X \cap N) + m^*(X \cap N^c) \leqslant m^*(X), \tag{14.168}$$

ce qui montre que N est m^*-mesurable.

□

14.72.
Ce théorème nous pousse à adopter des éléments de notation. Lorsqu'un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est donné, nous noterons

$$(S, \mathcal{M}, \mu^*) \tag{14.169}$$

l'espace mesuré construit de la façon suivante. D'abord μ^* est la mesure extérieure associée à μ par la proposition 14.39. Ensuite $\mathcal{M}$ est la tribu des parties μ^*-mesurables, qui est bien une tribu parce que μ^* est une mesure extérieure (14.71). La proposition (14.42) dit alors que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. De plus 14.71 nous explique que si $A \in \mathcal{F}$ alors $\mu(A) = \mu^*(A)$. Tout cela pour dire que

EqXDPooKwWAF
$$(S, \mathcal{F}, \mu) \subset (S, \mathcal{M}, \mu^*). \tag{14.170}$$

Et enfin, 14.71 nous dit que l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est complet.

ExOIXoosScTC
Exemple 14.73.
Montrons un cas dans lequel $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ n'est pas σ-fini. Soit S un ensemble non dénombrable et $\mathcal{F}$ la tribu des parties de S qui sont, soit finis ou dénombrables, soit de complémentaire fini ou dénombrable. Nous y mettons la mesure

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.171}$$

Cette mesure n'est pas σ-finie parce qu'aucune union de dénombrables est non dénombrable. De plus $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est complet parce que toute partie contenue dans un ensemble fini ou dénombrable est fini ou dénombrable (1.236).

(1) $\mathcal{F}$ **n'est pas** $\mathcal{P}(S)$ La tribu $\mathcal{F}$ est différente de $\mathcal{P}(S)$. En effet S étant infini, il existe par 1.242 une bijection $\varphi\colon \{1, 2\} \times S \to S$. Alors l'ensemble $\varphi\big(\{1\} \times S\big)$ est non dénombrable et son complémentaire

$$\varphi\big(\{1\} \times S\big)^c = \varphi\big(\{2\} \times S\big) \tag{14.172}$$

n'est pas dénombrable non plus. Cet ensemble n'est donc pas de $\mathcal{F}$.

(2) $\mathcal{M}$ **est** $\mathcal{P}(S)$ En effet, soit $A \subset S$; il faut prouver que pour tout $X \subset S$ nous avons

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{14.173}$$

Nous prouvons cela en séparant les cas, suivant que X est dénombrable ou non.

Si X est fini ou dénombrable, alors $X \cap A$ et $X \cap A^c$ le sont également, et nous avons $\mu^*(X) = \mu(X) = 0$ ainsi que $\mu^*(X \cap A) = \mu^*(X \cap A^c) = 0$.

Si au contraire X n'est pas dénombrable,

$$\mu^*(X) = \inf_{\substack{A \in \mathcal{F} \\ X \subset A}} \mu(A) = \infty, \tag{14.174}$$

parce que X n'étant pas dénombrable, l'ensemble A ne l'est pas non plus et $\mu(A) = \infty$. Mais comme X n'est pas dénombrable, soit $X \cap A$, soit $X \cap A^c$ (soit les deux) n'est pas dénombrable non plus ; par conséquent

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) = \infty. \tag{14.175}$$

Par conséquent $(S,\mathcal{F},\mu)\neq(S,\mathcal{M},\mu^*)$. Mais puisque $(S,\mathcal{F},\mu)$ est complété nous devons avoir $(S,\mathcal{F},\mu)=(S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu})$. Tout cela pour dire que nous avons un exemple avec

$$(S,\mathcal{M},\mu^*)\neq(S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu}).\tag{14.176}$$

△

Nous avons deux façons de créer un espace complet à partir de $(S,\mathcal{F},\mu)$.

(1) Partir de la mesure extérieure μ^* et construire $(S,\mathcal{M},\mu^*)$.

(2) Partir des ensembles μ-négligeables, construire $\hat{\mathcal{F}}$ et ensuite $(S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu})$.

Ces deux façons ne sont pas équivalentes en général comme le montre l'exemple 14.73. Mais il sera montré par la proposition 14.77 que si $(S,\mathcal{F},\mu)$ est σ-fini alors les deux sont équivalents.

LemAESoofkMpi

Lemme 14.74.
Soit $(S,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré. Alors pour tout $X\subset S$ tel que $\mu^*(X)<\infty$ il existe $A\in\mathcal{F}$ tel que $X\subset A$ et $\mu^*(X)=\mu(A)$.

C'est-à-dire que μ^* a beau être défini sur toutes les parties de S, ce qu'il faut rajouter pour être μ-mesurable, c'est pas grand chose.

Démonstration. Par définition de la mesure extérieure associée à μ en tant qu'infimum, pour tout $n\geqslant 1$, il existe $A_n\in\mathcal{F}$ tel que $X\subset A_n$ et $\mu(A_n)\leqslant\mu^*(X)+\frac{1}{2^n}$. Nous posons $A=\bigcap_{n\geqslant 1}A_n$ et nous vérifions que ce A fait l'affaire.

D'abord $A\in\mathcal{F}$ parce qu'une tribu est stable par union dénombrable. Ensuite pour tout $n\geqslant 1$ nous avons

$$\mu(A)\leqslant\mu(A_n)\leqslant\mu^*(X)+\frac{1}{2^n},\tag{14.177}$$

et à la limite $\mu(A)\leqslant\mu^*(X)$. Mais $X\subset A$ implique $\mu^*(X)\leqslant\mu(A)$ parce que $\mu^*(X)$ l'infimum d'un ensemble contenant $\mu(A)$. □

LemXOUNooUbtpxm

Corolaire 14.75.
Soit une mesure μ et la mesure extérieure μ^* associée[19]. Une partie N de X est négligeable si et seulement si $\mu^*(N)=0$.

Démonstration. Si μ^* est la mesure extérieure associée à μ et si N est μ-négligeable alors $\mu^*(N)=0$ parce que

$$\mu^*(N)\leqslant\mu^*(Y)=\mu(Y)=0\tag{14.178}$$

pour un certain Y mesurable de mesure nulle contenant N.

D'autre part si $\mu^*(N)=0$ alors le lemme 14.74 donne une partie mesurable A telle que $N\subset A$ et $\mu(A)=0$, c'est-à-dire que N est négligeable. □

LemOAEoocBDaO

Lemme 14.76.
Si l'espace mesuré $(S,\mathcal{F},\mu)$ est σ-fini alors l'espace mesuré $(S,\mathcal{M},\mu^*)$ est également σ-fini.

Démonstration. Puisque $(S,\mathcal{F},\mu)$ est σ-fini, nous avons une suite croissante A_n d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que $\bigcup_n A_n=S$ et telle que $\mu(A_n)<\infty$ pour tout n. Étant donné que $\mathcal{F}\subset\mathcal{M}$, cette suite convient également pour montrer que $(S,\mathcal{M},\mu^*)$ est σ-fini parce que $\mu^*(A_n)=\mu(A_n)<\infty$. □

La proposition suivante montre que si $(S,\mathcal{F},\mu)$ est σ-finie alors nous avons l'égalité.

PropIIHooAIbfj

Proposition 14.77.
Soit $(S,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré σ-fini, μ^* la mesure extérieure associée et $\mathcal{M}$ la tribu des ensembles μ^*-mesurables[20]. Alors

$$(S,\mathcal{M},\mu^*)=(S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu}).\tag{14.179}$$

Démonstration. La proposition 14.42 indique que tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont μ^*-mesurables, c'est-à-dire que $\mathcal{F}\subset\mathcal{M}$. Mais l'espace $(S,\mathcal{M},\mu^*)$ est complet par le théorème de Carathéodory 14.71, donc par minimalité du complété (14.69(7)),

$$(S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu})\subset(S,\mathcal{M},\mu^*)\tag{14.180}$$

[19] Par la proposition 14.39.
[20] C'est bien une tribu par 14.71(1).

au sens où $\hat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{M}$ et si $A \in \hat{\mathcal{F}}$ alors $\hat{\mu}(A) = \mu^*(A)$. Notons que cette inclusion est vraie même si la mesure n'est pas σ-finie.

Nous passons à l'inclusion inverse. Soit $A \in \mathcal{M}$, c'est-à-dire que pour tout $Y \subset S$ nous avons

$$\mu^*(Y) = \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c). \tag{14.181}$$ EqTZAooTCdCg

Nous allons montrer que $A \in \hat{\mathcal{F}}$ en séparant les cas suivant que $\mu^*(A) = \infty$, ou non.

(1) **Si $\mu^*(A) < \infty$**

Par le lemme 14.74, il existe $X \in \mathcal{F}$ tel que $A \subset X$ et $\mu^*(A) = \mu(X)$. Comme $(S, \mathcal{F}, \mu) \subset (S, \mathcal{M}, \mu^*)$ nous avons alors

$$\mu^*(A) = \mu(X) = \mu^*(X). \tag{14.182}$$ EqKFQooQaont

Nous écrivons la relation (14.181) avec ce X en guise de Y, et en nous souvenant que $X \cap A = A$ et $X \cap A^c = X \setminus A$:

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A). \tag{14.183}$$

En tenant compte de (14.182) et du fait que $\mu^*(A) < \infty$, nous pouvons simplifier et trouver $\mu^*(X \setminus A) = 0$. Le lemme 14.74 nous donne alors $B \in \mathcal{F}$ tel que $X \setminus A \subset B$ et $\mu(B) = \mu^*(X \setminus A) = 0$, c'est-à-dire que $X \setminus A$ est μ-négligeable. Par conséquent $X \setminus A \in \hat{\mathcal{F}}$. En écrivant

$$A = X \setminus (X \setminus A), \tag{14.184}$$

nous avons écrit A comme différence de deux éléments de $\hat{\mathcal{F}}$ et nous concluons que $A \in \hat{\mathcal{F}}$.

(2) **Si $\mu^*(A) = \infty$**

Le lemme 14.76 nous indique que $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est σ-fini et il existe donc une suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ dans $\mathcal{M}$ telle que $\bigcup_n S_n = S$ et $\mu^*(S_n) < \infty$. L'ensemble $A \cap S_n$ est un élément de $\mathcal{M}$ vérifiant

$$\mu^*(A \cap S_n) \leqslant \mu^*(S_n) < \infty, \tag{14.185}$$

ce qui implique que $A \cap S_n \in \hat{\mathcal{F}}$ par la première partie. Maintenant $A = \bigcup_n (A \cap S_n) \in \hat{\mathcal{F}}$ par union dénombrable d'éléments de la tribu $\hat{\mathcal{F}}$.

□ PROPooAMIEooRomnMG

Proposition 14.78 ([1]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Nous considérons un mesurable $M \in \mathcal{F}$ ainsi que

- *la tribu induite $\mathcal{F}_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\}$,*
- *la tribu complétée $\hat{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ dans Ω,*
- *la tribu complétée $\widehat{\mathcal{F}_M}$ de $\mathcal{F}_M$ dans M (où nous avons considéré la mesure restreinte[21] de μ).*
- *la tribu induite $(\hat{\mathcal{F}})_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\}$ de $\hat{\mathcal{F}}$ sur M.*

Alors

$$(\hat{\mathcal{F}})_M = \widehat{\mathcal{F}_M}. \tag{14.186}$$

Démonstration. L'utilisation de la proposition 14.9 nous donne déjà les expressions alternatives

$$(\hat{\mathcal{F}})_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\} = \{A \subset M \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\} \tag{14.187}$$

et

$$\mathcal{F}_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\} = \{A \subset M \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\}. \tag{14.188}$$

Pour prouver $(\hat{\mathcal{F}})_M = \widehat{\mathcal{F}_M}$ il faudra faire deux inclusions, et nous avons l'embarras du choix.

(1) **Première : $\widehat{\mathcal{F}_M} \subset \{M \cap A \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\}$** Un élément de $\widehat{\mathcal{F}_M}$ est de la forme $B \cup N$ où $B \in \mathcal{F}_M$ et où N est négligeable[22] dans M. Vu que $B \in \mathcal{F}_M$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $B = A \cap M$. Vu que B et N sont dans M nous pouvons « factoriser » l'intersection :

$$B \cup N = M \cap (A \cup N) \tag{14.189}$$

avec N négligeable dans M et donc également négligeable dans Ω. Donc $A \cup N \in \hat{\mathcal{F}}$.

[21] Ce n'est pas ce qu'il se passe dans le cas de S^1 par rapport à $\mathbb{C}$, voir la proposition 18.73(3) bien que S^1 soit un borélien de $\mathbb{C}$.

[22] Pour rappel, une partie est négligeable quand elle est incluse à une partie de mesure nulle.

(2) **Deuxième : $\{M \cap A$ tel que $A \in \hat{\mathcal{F}}\} \subset \widehat{\mathcal{F}_M}$**

Soit $A \in \hat{\mathcal{F}}$. Nous avons une partie négligeable N de Ω et un élément $B \in \mathcal{F}$ tels que $A = B \cup N$. Nous avons la décomposition

$$M \cap (B \cup N) = (M \cap B) \cup (M \cap N). \tag{14.190}$$

EQooWWQEooDRlnLN

Il s'agit maintenant de nous assurer que cette décomposition implique que $M \cap (B \cup N) \in \widehat{\mathcal{F}_M}$.

Soit $N_1 \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(N_1) = 0$ et $N \subset N_1$. Puisque $M \cap N_1 \in \mathcal{F}$ (intersections dans une tribu), nous pouvons écrire

$$M \cap N \subset M \cap N_1 \tag{14.191}$$

avec $\mu(M \cap N_1) = 0$. Cela pour dire que $M \cap N$ est négligeable dans M. La décomposition (14.190) est donc bien une union d'un élément de $\mathcal{F}_M$ avec un négligeable de M, et donc bien un élément de $\widehat{\mathcal{F}_M}$.

□

14.79.
La principale application de la proposition 14.78 est le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^n)$ et M est un borélien B de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, la proposition explique que la tribu de Lebesgue sur B (complétée depuis les boréliens de la topologie induite) est donnée directement par l'intersection entre B et la tribu de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Donc sans devoir passer par la topologie induite, les boréliens et la completion :

$$\mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R}^n)_M = \widehat{\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^n)}_M. \tag{14.192}$$

Exemple dans la proposition 18.71 qui donne une structure d'espace mesuré dans S^1 à partir de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.

14.5.2 Prolongement

Le théorème suivant est parfois nommé théorème d'extension de Carathéodory, par exemple sur Wikipédia. Le théorème de Carathéodory en étant un des ingrédients principaux, on comprend.

ThoLCQoojiFfZ

Théorème 14.80 (Prolongement de Hahn[491])**.**
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties d'un ensemble S et μ une mesure sur $(S, \mathcal{A})$. Soit $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. Alors

(1) La mesure μ se prolonge en une mesure m sur $\mathcal{F}$.

(2) Si μ est σ-finie alors le prolongement est unique et m est σ-finie.

(3) Si μ est finie, alors m l'est aussi.

Démonstration. La proposition 14.17 nous donne une mesure extérieure μ^* sur S dont la restriction à $\mathcal{A}$ est μ. Si $\mathcal{M}$ est la tribu des parties μ^*-mesurables de S alors le théorème de Carathéodory 14.71 nous dit que $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est un espace mesuré.

(1) $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ Cette partie est une adaptation de ce qui a déjà été fait dans la preuve de la proposition 14.42. Soit $A \in \mathcal{A}$ et $X \in S$; nous devons prouver la relation de la définition 14.40. Comme μ^* est une mesure extérieure nous avons automatiquement

$$\mu^*(X) \leqslant \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{14.193}$$

Il reste à prouver l'inégalité inverse. Soit une suite B_k d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $X \subset \bigcup_k B_k$; nous avons alors

$$\mu^*(X \cap A) \leqslant \mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \cap A\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k \cap A) = \sum_k \mu(B_k \cap A) \tag{14.194}$$

où nous avons utilisé la définition 14.10(3) ainsi que le lemme 14.15. De la même façon,

$$\mu^*(X \cap A^c) \leqslant \sum_k \mu(B_k \cap A^c). \tag{14.195}$$

Mettant les deux bouts ensemble, en remarquant que $B_k\cap A\in\mathcal{A}$ et donc que $\mu^*(B_k\cap A)=\mu(B_k\cap A)$,

$$\mu^*(X\cap A)+\mu^*(X\cap A^c)\leqslant\sum_k\mu(B_k\cap A)+\mu(B_k\cap A^c)=\sum_k\mu(B_k).\tag{14.196}$$

La somme $\mu^*(X\cap A)+\mu^*(X\cap A^c)$ est donc inférieure à chacun des éléments de l'ensemble sur lequel on prend l'infimum pour définir[23] $\mu^*(X)$, donc

$$\mu^*(X\cap A)+\mu^*(X\cap A^c)\leqslant\mu^*(X).\tag{14.197}$$

A fortiori nous avons $\sigma(\mathcal{A})\subset\mathcal{M}$ et donc $(S,\sigma(\mathcal{A}),\mu^*)$ est un espace mesuré. Cela prouve l'existence d'une mesure prolongeant μ à $\sigma(\mathcal{A})$.

(1) **Unicité**

Nous supposons à présent que μ est σ-finie. Soient m_1 et m_2 deux mesures prolongeant μ et définies sur une tribu contenant $\mathcal{A}$. Nous posons

$$\mathcal{C}=\{A\in\mathcal{A}\text{ tel que }\mu(A)<\infty\}.\tag{14.198}$$

Dans l'optique d'utiliser le théorème d'unicité des mesures 14.34, nous prouvons que $\sigma(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{C})$. Vu que μ est σ-finie, il existe une suite croissante (S_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $S=\bigcup_n S_n$ et $\mu(S_n)<\infty$. Alors si $A\in\mathcal{A}$ nous avons $A=\bigcup_n(A\cap S_n)$, et donc $A\in\sigma(\mathcal{C})$. Donc $\mathcal{A}\subset\sigma(\mathcal{C})$. Mais étant donné que $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ nous avons aussi $\sigma(\mathcal{C})\subset\sigma(\mathcal{A})$. Au final $\sigma(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{C})$.

Les mesures m_1 et m_2 sont des mesures sur $\sigma(\mathcal{C})$ coïncidant sur $\mathcal{C}$ (parce que $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$). De plus la classe $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et contient une suite croissante dont l'union est S (parce que μ est σ-finie).

Le théorème 14.34 nous dit alors que m_1 et m_2 coïncident sur $\sigma(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{A})$.

(2) **Extension finie et σ-finie**

Enfin si μ est σ-finie il existe $S_n\in\mathcal{A}$ avec $\mu(S_n)<\infty$ et $\bigcup_n S_n=S$. Ces ensembles vérifient tout autant $m(S_n)=\mu(S_n)<\infty$ pour tout prolongement m de μ.

Idem si μ est finie, tout prolongement est fini.

□
ExKCEoolsZrL

Exemple 14.81 ([491])**.**
Soit $\mathcal{A}$, l'algèbre de parties de $\mathbb{R}$ formée par les réunions finies d'intervalles de la forme $]-\infty,a[$, $[a,b[$ et $[b,+\infty[$ avec $-\infty<a\leqslant b<+\infty$. Notons que les singletons ne font pas partie de $\mathcal{A}$ parce que $[a,a[=\varnothing$. Nous posons

$$\mu(A)=\begin{cases}0&\text{si }A=\varnothing\\\infty&\text{sinon.}\end{cases}\tag{14.199}$$

Cela donne une mesure (non σ-finie) sur $(\mathbb{R},\mathcal{A})$.

Nous allons prouver que la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ est la tribu des boréliens et que μ accepte (au moins) deux prolongements distincts à $\sigma(\mathcal{A})$.

D'abord nous avons

$$]a,b[=\big(]-\infty,a[\cup[b,+\infty[\big)\cap[a,b[,\tag{14.200}$$

donc toutes les boules ouvertes appartiennent à $\sigma(\mathcal{A})$. Ces dernières comprenant une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$ (par la proposition 7.188), tous les ouverts de $\mathbb{R}$ sont dans $\sigma(\mathcal{A})$. Par conséquent $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\subset(\mathbb{R}^d)$. Mais en même temps tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont des boréliens, donc $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})=\sigma(\mathcal{A})$ parce que la fermeture en tant qu'algèbre de parties est plus petite que la fermeture en tant que tribu.

La mesure de comptage prolonge μ parce qu'à part l'ensemble vide, tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont infinis. Notons que les singletons sont dans $\sigma(\mathcal{A})$, donc la mesure de comptage prend d'autres valeurs que 0 et $+\infty$.

Par ailleurs la mesure

$$\mu'(A)=\begin{cases}0&\text{si }A=\varnothing\\+\infty&\text{sinon}\end{cases}\tag{14.201}$$

est également une mesure prolongeant μ à $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$.

La mesure de comptage et μ' sont deux prolongements distincts de μ. △

[23] Définition 14.20.

Exemple 14.82 ([491]).
Nous montrons maintenant une mesure non σ-finie qui se prolonge en deux mesures distinctes, toutes deux σ-finies.

Nous considérons la même algèbre $\mathcal{A}$ de parties que celle donnée dans l'exemple 14.81, mais cette fois vue sur $\mathbb{Q}$ uniquement. La mesure de comptage m sur $(\mathbb{Q},\mathcal{A})$ n'est pas σ-finie.

Puisque les singletons sont des boréliens, nous avons $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, ce qui fait que $(\mathbb{Q},\sigma(\mathcal{A}),m)$ est un prolongement σ-fini de m. L'espace mesuré $(\mathbb{Q},\sigma(\mathcal{A}),2m)$ est également σ-fini et est un prolongement distinct de $(\mathbb{Q},\mathcal{A},m)$. △

PROPooORDCooJEsjzR

Proposition 14.83.
Soient des espaces mesurés $(S_1,\mathcal{F}_1,\mu_1)$ et $(S_2,\mathcal{F}_2,\mu_2)$ ainsi qu'une application $\varphi\colon S_1\to S_2$ avec les hypothèses suivantes :

(1) φ est une bijection,

(2) φ est mesurable d'inverse mesurable,

(3) si $\mu_1(A)=0$ alors $\mu_2\big(\varphi(A)\big)=0$,

(4) si $\mu_2(A)=0$ alors $\mu_1\big(\varphi^{-1}(A)\big)=0$.

Alors

$$\hat{\mathcal{F}}_2=\varphi(\hat{\mathcal{F}}_1). \tag{14.202}$$

Démonstration. Nous prouvons que $\hat{\mathcal{F}}_2\subset\varphi(\hat{\mathcal{F}}_1)$. Vu la symétrie des hypothèses, l'inclusion inverse se fera de même.

Soit $A\in\hat{\mathcal{F}}_2$. Nous avons $A=B\cup N$ avec $B\in\mathcal{F}_2$ et N, une partie μ_2-négligeable. Nous considérons $N_1\in\mathcal{F}_2$ tel que $\mu_2(N_1)=0$ et $N\subset N_1$. Notre but est maintenant de prouver que $\varphi^{-1}(B\cup N)\in\hat{\mathcal{F}}_1$.

Comme φ est une bijection, nous avons

$$\varphi^{-1}(B\cup N)=\varphi^{-1}(B)\cup\varphi^{-1}(N). \tag{14.203}$$

Là-dedans, $\varphi^{-1}(B)\in\mathcal{F}_1$ parce que φ est borélienne. Il nous reste à voir que $\varphi^{-1}(N)$ est μ_1-négligeable. Puisque $N\subset N_1$, nous avons $\varphi^{-1}(N)\subset\varphi^{-1}(N_1)$ où $\varphi^{-1}(N_1)\in\mathcal{F}_1$.

Par construction, $\mu_2(N_1)=0$ et par hypothèse, $\mu_1\big(\varphi^{-1}(N_1)\big)=0$.

Au total,

$$\varphi^{-1}(B\cup N)=\underbrace{\varphi^{-1}(B)}_{\in\mathcal{F}_1}\cup\underbrace{\varphi^{-1}(N)}_{\mu_1\text{-négligeable}}\in\hat{\mathcal{F}}_1. \tag{14.204}$$

□

14.5.3 Mesure image

Le produit d'une mesure par une fonction est défini par la propriété 14.212.

PropJCJQooAdqrGA

Proposition-Définition 14.84 (Mesure image[488]).
Soient $(S_1,\mathcal{F}_1)$ et $(S_2,\mathcal{F}_2)$ des espaces mesurables. Soit $\varphi\colon S_1\to S_2$ une application mesurable. Si m_1 est une mesure positive sur S_1 alors l'application définie par

$$m_2(A_2)=m_1\big(\varphi^{-1}(A_2)\big) \tag{14.205}$$

est une mesure positive sur $(S_2,\mathcal{F}_2)$.

*La mesure m_2 ainsi définie est la **mesure image** de m_1 par l'application φ. Elle est notée $\varphi(m_1)$.*

Démonstration. Il y a deux choses à vérifier pour avoir une mesure positive[24]. D'abord pour l'ensemble vide :

$$m_2(\varnothing)=m_1\big(\varphi^{-1}(\varnothing)\big)=m_1(\varnothing)=0. \tag{14.206}$$

[24] Définition 14.18

Ensuite pour l'additivité. Soient A_n dans $\mathcal{F}_2$ des parties deux à deux disjointes et telles que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_2$. Alors nous avons

$$m_2\big(\bigcup_n A_n\big) = m_1\Big(\varphi^{-1}\big(\bigcup_n A_n\big)\Big) \tag{14.207a}$$
$$= m_1\big(\bigcup_n \varphi^{-1}(A_n)\big) \tag{14.207b}$$
$$= \sum_n m_1\big(\varphi(A_n)\big) \tag{14.207c}$$
$$= \sum_n m_2(A_n). \tag{14.207d}$$

□

Lemme 14.85.
Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi que deux mesures μ et ν sur $(S_1, \mathcal{F}_1)$. Si $\varphi\colon S_1 \to S_2$ est mesurable et si $\mu \leqslant \nu$ alors $\varphi(\mu) \leqslant \varphi(\nu)$.

Démonstration. Soit B mesurable dans $(S_2, \mathcal{F}_2)$ (c'est-à-dire $B \in \mathcal{F}_2$). Alors

$$\varphi(\mu)(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) \leqslant \nu\big(\varphi^{-1}(B)\big) = \varphi(\nu)(B). \tag{14.208}$$

□

Il est naturel de se demander comment il faut intégrer par rapport à une mesure image. La réponse sera dans le théorème 14.219.

14.5.4 Régularité d'une mesure

Certaines mesures ont de la compatibilité avec la topologie. Nous allons étudier ça.

LEMooCGKXooYWjRwk

Lemme 14.86 ([502]).
Soit un espace topologique métrique (Ω, d). Nous considérons sa tribu des boréliens[25] $\mathcal{B}or(\Omega)$ ainsi qu'une mesure finie μ sur $\big(\Omega, \mathcal{B}or(\Omega)\big)$.

Soit un borélien A de Ω et $\epsilon > 0$.

Il existe un fermé F et un ouvert V de Ω tels que

(1) $F \subset A \subset V$

(2) $\mu(V \setminus F) < \epsilon$.

Démonstration. Soit la famille $\mathcal{D}$ des parties D de Ω qui vérifient la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert V de Ω tels que $F \subset D \subset V$ et $\mu(V \setminus F) < \epsilon$.

Nous allons prouver que $\mathcal{D}$ est une tribu qui contient tous les ouverts.

(1) **$\mathcal{D}$ contient les ouverts** Soit un ouvert D. Nous posons

$$F_n = \{x \in \Omega \text{ tel que } d(x, D^c) \geqslant 2^{-n}\}. \tag{14.209}$$

(1a) **F_n est fermé**
Le lemme 7.201 montre que le complémentaire F_n^c est ouvert. Donc F_n est fermé.

(1b) $D \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ Si $x \in D$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset D$ (parce que D est ouvert). Donc $d(x, V^c) \geqslant \delta$. Donc $x \in F_n$ pour $2^{-n} < \delta$.

(1c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset D$ Si $x \in F_n$, nous avons $d(x, D^c) > 0$, c'est-à-dire que x n'est pas dans D^c. Autrement dit, $x \in D$.

(1d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = D$ Nous avons donc l'égalité

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n. \tag{14.210}$$

[25] Définition 14.50.

Vu que $F_n \subset F_{n+1}$, le lemme 14.24(1) nous indique que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k\Big) = \mu(D). \tag{14.211}$$

Étant donné que la mesure est finie, nous pouvons écrire cela sous la forme

$$\mu(D) - \mu(F_n) \to 0. \tag{14.212}$$

Pour chaque n nous avons l'encadrement

$$F_n \subset D \subset D \tag{14.213}$$

où F_n et D sont ouverts. Lorsque ϵ est donné, il suffit de prendre n assez grand pour avoir $\mu(D\setminus F_n) < \epsilon$ pour avoir un encadrement de D par un fermé et un ouvert (D lui-même) dont la différence des mesures est plus petite que ϵ.

Tout cela pour dire que $D \in \mathcal{D}$.

(2) **$\mathcal{D}$ est une tribu** Il faut vérifier les trois points de la définition 14.1.

(2a) $\Omega \in \mathcal{D}$ Nous venons de voir que les ouverts sont dans $\mathcal{D}$. Or Ω est un ouvert.

(2b) $D \in \mathcal{D}$ **implique** $D^c \in \mathcal{D}$ Soit F fermé et V ouvert tels que $F \subset D \subset V$. Nous avons aussi

$$V^c \subset D^c \subset F^c \tag{14.214}$$

où V^c est fermé et F^c est ouvert. De plus $F^c \setminus V^c = V \setminus F$ et donc

$$\mu(F^c \setminus V^c) = \mu(V \setminus F). \tag{14.215}$$

Nous pouvons donc choisir F et V pour avoir $\mu(F^c \setminus V^c) < \epsilon$.

(2c) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i \in \mathcal{D}$ Soient $D_i \in \mathcal{D}$. Pour chaque n nous posons

$$F_n \subset D_n \subset V_n \tag{14.216}$$

en choisissant V_n et F_n de telle sorte que $\mu(V_n \setminus F_n) < 2^{-n}\epsilon$.

Nous posons

$$Y_N = \bigcup_{n=0}^{N} F_n, \tag{14.217}$$

et

$$Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n. \tag{14.218}$$

Chacun des Y_N est fermé en tant qu'union finie de fermés (lemme 7.6(2)). Mais Y ne l'est pas spécialement[26]. Le lemme 14.24 nous dit cependant que $\mu(Y) = \lim_{N\to\infty} \mu(Y_N)$.

Nous posons

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n \tag{14.219}$$

ainsi que

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n. \tag{14.220}$$

La partie V est ouverte dans Ω comme union d'ouverts (c'est dans le définition d'une topologie). Nous avons, pour tout N, l'encadrement

$$Y_N = \bigcup_{n=0}^{N} F_n \subset Y \subset D \subset V. \tag{14.221}$$

EQooOALEooLAHpVi

Nous prouvons à présent que $\lim_{N\to\infty} \mu(V \setminus Y_N) = 0$, de telle sorte que l'encadrement (14.221) dise que $D \in \mathcal{D}$.

[26] Par exemple $A_n = [1/n, 2]$ sont des fermés dont l'union est $]0, 2]$ qui n'est pas fermé.

D'abord nous avons

$$V \setminus Y \subset \bigcup_n (V_n \setminus F_n) \tag{14.222}$$

parce que si $x \in V \setminus Y$, alors $x \in V_i$ pour un certain i, mais vu que x n'est pas dans Y, il n'est dans aucun des F_n donc en particulier pas dans F_i et $x \in V_n \setminus F_i$.

Un peu de calcul :

$$\begin{aligned}
\mu(V) - \mu(Y) &= \mu(V \setminus Y) && \text{(14.223a)}\\
&\leqslant \mu\Big(\bigcup_n (V_n \setminus F_n)\Big) && \text{(14.223b)}\\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mu(V_n \setminus F_n) && \text{(14.223c)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\epsilon && \text{(14.223d)}\\
&= 2\epsilon. && \text{(14.223e)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (14.223a), c'est le lemme 14.23.
- Pour (14.223b), c'est (14.222).
- Pour (14.223c), c'est le lemme 14.23(4).
- Pour (14.223e), c'est la série géométrique (10.471).

Nous choisissons maintenant N assez grand pour que $\mu(Y) - \mu(Y_N) < \epsilon$. Nous avons alors l'encadrement

$$Y_N \subset Y \subset D \subset V \tag{14.224}$$

avec

$$\mu(V \setminus Y_N) = \mu(V) - \mu(Y_N) = \underbrace{\mu(V) - \mu(Y)}_{\leqslant 2\epsilon} + \mu(Y) - \mu(Y_N) \leqslant 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon. \tag{14.225}$$

Nous avons donc montré que $\mathcal{D}$ était une tribu contenant les ouverts. Donc $\mathcal{D}$ contient tous les boréliens. □

Lemme 14.87 ([502]).
Soit un espace topologique métrique (Ω, d). Nous considérons sa tribu des boréliens $\mathcal{B}or(\Omega)$ ainsi qu'une mesure μ sur $\big(\Omega, \mathcal{B}or(\Omega)\big)$.

Soient un ouvert $W \subset \Omega$ tel que $\mu(W) < \infty$ et un borélien A tel que $A \subset W$. Soit aussi $\epsilon > 0$.

Il existe un fermé F et un ouvert V tels que

(1) $\mu(V) < \infty$,

(2) $\mu(V \setminus F) < \epsilon$,

(3) et $F \subset A \subset V$.

Démonstration. Vu que la mesure de W est finie, nous considérons la mesure finie

$$\begin{aligned}
\nu\colon \mathcal{B}\text{or}(\Omega) &\to [0, \mu(W)]\\
B &\mapsto \mu(B \cap W).
\end{aligned} \tag{14.226}$$

La partie A étant borélienne ; par le lemme 14.86, nous avons un fermé F et un ouvert V_1 ouvert tels que

$$F \subset A \subset V_1 \tag{14.227}$$

et $\nu(V_1 \setminus F) < \epsilon$. Nous posons $V = V_1 \cap W$; vu que $A \subset W$ et $A \subset V_1$ nous avons aussi $A \subset V_1 \cap W$ et donc l'encadrement

$$F \subset A \subset V \subset W. \tag{14.228}$$

En ce qui concerne la mesure :

$$\mu(V \setminus F) = \mu(V) - \mu(F) = \mu(V \cap W) - \mu(F \cap W) = \nu(B) - \nu(F) < \epsilon. \tag{14.229}$$

□

ThoPKGEooVrpsGU

Théorème 14.88 ([488]).
Soit X un espace métrique et m une mesure positive bornée sur $\big(X, \mathcal{B}or(X)\big)$. Alors si B est un borélien,

(1) Régularité extérieure : $m(B) = \inf\{m(\Omega) \text{où } \Omega \text{ est un ouvert contenant } B\}$

(2) Régularité intérieure : $m(B) = \sup\{m(F) \text{où } F \text{ est un fermé, } F \subset B\}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des $B \in \mathcal{B}\text{or}(X)$ tels que pour tout $\epsilon > 0$, il existe Ω_ϵ ouvert et F_ϵ fermé tels que $F_\epsilon \subset B \subset \Omega_\epsilon$ et $m(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon$. Nous allons montrer que $\mathcal{F}$

- est une tribu
- contient les ouverts
- est inclus dans la tribu borélienne (ça c'est dans la définition de $\mathcal{F}$).

De ces trois points nous déduirons que $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{or}(X)$.

(1) **$\mathcal{F}$ contient les ouverts** Soit Ω un ouvert de X. Alors Ω^c est fermé et $d(x, \Omega^c) = 0$ si et seulement si $x \in \Omega^c$ par la proposition 7.353. Nous pouvons donc écrire

$$\Omega^c = \bigcap_{n \geqslant 1} \{x \in X \text{ tel que } d(x, \Omega^c) < \frac{1}{n}\}. \tag{14.230}$$

En passant au complémentaire et en posant $F_n = \{x \in X \text{ tel que } d(x, \Omega^c) \geqslant \frac{1}{n}\}$ nous avons

$$\Omega = \bigcup_{n \geqslant 1} F_n. \tag{14.231}$$

Chacun des F_n est fermé parce que F_n est l'image réciproque du fermé $[\frac{1}{n}, \infty[$ par l'application $x \mapsto d(x, \Omega^c)$ qui est continue. De plus les F_n forment une suite croissante, donc le lemme 14.24 nous assure que $m(\Omega) = \lim_{n\to\infty} m(F_n)$. Et le lemme 14.23 que $m(\Omega \setminus F_n) = m(\Omega) - m(F_n)$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors $n_\epsilon \geqslant 1$ tel que

$$m(\Omega \setminus F_n) = m(\Omega) - m(F_n) \leqslant \epsilon. \tag{14.232}$$

Bref si Ω est ouvert nous considérons $\Omega_\epsilon = \Omega$ et $F_\epsilon = F_{n_\epsilon}$ et nous avons

$$F_\epsilon \subset \Omega \subset \Omega_\epsilon \tag{14.233}$$

avec $m(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ contient les ouverts.

(2) **$\mathcal{F}$ est une tribu** Il y a à vérifier les trois conditions de la définition 14.1.

(2a) **Les ensembles faciles** Les ensembles X et $\varnothing$ sont dans $\mathcal{F}$ parce qu'ils sont ouverts et fermés.

(2b) **Complémentaire** Soit $B \in \mathcal{F}$, soit $\epsilon > 0$ et les ensembles F_ϵ et Ω_ϵ qui vont avec. Alors en passant au complémentaire nous avons

$$\Omega_\epsilon^c \subset B^c \subset F_\epsilon^c \tag{14.234}$$

De plus

$$F_\epsilon^c \setminus \Omega_\epsilon^c = F_\epsilon^c \cap (\Omega_\epsilon^c)^c = F_\epsilon^c \cap \Omega_\epsilon = \Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon. \tag{14.235}$$

Par conséquent

$$m(F_\epsilon^c \setminus \Omega_\epsilon^c) = m(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon. \tag{14.236}$$

Cela montre que $B^c \in \mathcal{F}$.

(2c) **Union dénombrable** Soient (B_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ et $\epsilon > 0$. Pour chaque n, le lemme 14.86 nous permet de choisir un ouvert Ω_n et un fermé F_n tels que $F_n \subset B_n \subset \Omega_n$ et

$$m(\Omega_n \setminus F_n) \leqslant \frac{\epsilon}{2^{n+2}}. \tag{14.237}$$

Puisque $\Omega_n \setminus B_n \subset \Omega_n \setminus F_n$ nous avons aussi

$$m(\Omega_n \setminus B_n) \leqslant m(\Omega_n \setminus F_n) \leqslant \frac{\epsilon}{2^{n+2}}. \tag{14.238}$$

Nous posons $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1}\Omega_n$ (un ouvert) et $B = \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$ ainsi que $A = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ (qui n'est pas spécialement fermé).

Le but est de majorer $m(\Omega \setminus F)$ où F est un fermé qui est encore à déterminer. Calculons déjà ceci :

$$\begin{aligned}
\Omega \setminus B &= \bigcup_n \Omega_n \cap \big(\bigcup_k B_k\big)^c && (14.239a)\\
&= \Big(\bigcup_n \Omega_n\Big) \cap \Big(\bigcap_k B_k^c\Big) && (14.239b)\\
&= \bigcup_n \Big(\Omega_n \cap \big(\bigcap_k B_k^c\big)\Big) && (14.239c)\\
&\subset \bigcup_n \big(\Omega_n \cap B_n^c\big) && (14.239d)\\
&= \bigcup_n (\Omega_n \setminus B_n). && (14.239e)
\end{aligned}$$

Justifications.

- Pour (14.239c). Pour toute suite d'ensembles on a $(\bigcup_k A_k)^x = \bigcap_k A_k^c$.
- Pour (14.239d). Si $x \in \Omega_n \cap (\bigcap_k B_k^c)$ pour un certain n, alors en particulier $x \in \bigcap_k B_k^c$ et $x \in B_n^c$. Donc $x \in \Omega_n \cap B_n^c$.
- Pour (14.239e), notez que l'union n'est pas spécialement disjointe.

Par conséquent,

$$m(\Omega \setminus B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(\Omega_n \setminus B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+2}} = \frac{\epsilon}{4}. \tag{14.240}$$

De la même façon nous avons

$$B \setminus A = \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_n\big)^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus F_n. \tag{14.241}$$

Nous avons alors le inégalités de mesures

$$\begin{aligned}
m(B \setminus A) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n \setminus F_n) && (14.242a)\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(\Omega_n \setminus F_n) && (14.242b)\\
&\leqslant \frac{\epsilon}{4}. && (14.242c)
\end{aligned}$$

C'est vraiment dommage que A ne soit pas en général un fermé, sinon il répondrait à la question. Nous posons $F_1' = F_1$ et $F_n' = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$. En tant qu'unions finies de fermés, les F_n' sont des fermés (lemme 7.6(2)). De plus la suite (F_n') est croissante et l'union est A. Par le lemme 14.24(1) nous avons

$$m(A) = m\big(\bigcup_n F_n'\big) = \lim_{n\to\infty} m(F_n'). \tag{14.243}$$

Il existe donc n_ϵ tel que

$$m(A) - m(F_{n_\epsilon}') \leqslant \epsilon \tag{14.244}$$

Nous posons $F = F_{n_\epsilon}'$. Comme $F \subset A$ nous avons aussi $m(A \setminus F) = m(A) - m(F) \leqslant \epsilon$. Et en plus $F \subset A \subset B \subset \Omega$, ce qui donne bien la propriété voulue $F \subset B \subset \Omega$. Il reste à nous assurer de $m(\Omega \setminus F)$. Nous avons d'abord

$$m(B \setminus F) = m\big((B \setminus A) \cup (A \setminus F)\big) = m(B \setminus A) + m(A \setminus F) \leqslant \frac{5\epsilon}{4}. \tag{14.245}$$

Et enfin :

$$m(\Omega \setminus F) = m\big((\Omega \setminus B) \cup (B \setminus F)\big) = m(\Omega \setminus B) + m(B \setminus F) \leqslant \frac{6\epsilon}{4}. \tag{14.246}$$

Et donc à redéfinition près de ϵ, c'est d'accord.

Il est donc établi que $\mathcal{F}$ est une tribu. Qui plus est, l'ensemble $\mathcal{F}$ est une tribu incluse aux boréliens et contenant les ouverts. Ergo $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{or}(X)$.

(3) **Régularité extérieure** Soit B un borélien et $\epsilon > 0$. Alors il existe F_ϵ fermé et Ω_ϵ ouvert tels que $F_\epsilon \subset B \subset \Omega_\epsilon$ et $m(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon$. Vu que $B \subset \Omega_\epsilon$ pour tout ϵ, nous avons aussi

$$m(B) \leqslant \inf_\epsilon m(\Omega_\epsilon). \tag{14.247}$$

Mais comme $m(\Omega_\epsilon) \geqslant m(B)$ pour tout ϵ, nous avons en réalité $m(B) = \inf_\epsilon m(\Omega_\epsilon)$.

Soit maintenant un ouvert Ω tel que $B \subset \Omega$. Nous devons prouver l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que $m(\Omega_\epsilon) \leqslant m(\Omega)$. Cela permettra de conclure que l'infimum sur tous les ouverts contenant B est égal à l'infimum sur les ouverts de la forme Ω_ϵ.

Nous posons $m(\Omega) = m(B) + \delta$ et avec $\epsilon \leqslant \delta$ nous avons

$$m(\Omega_\epsilon \setminus B) \leqslant m(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon \tag{14.248}$$

et donc aussi

$$m(\Omega_\epsilon) \leqslant m(B) + \epsilon \leqslant m(B) + \delta = m(\Omega). \tag{14.249}$$

(4) **Régularité intérieure** Elle se fait de même.

□

DefFMTEooMjbWKK

Définition 14.89.
Soit X un espace topologique et m une mesure positive sur $\big(X, \mathcal{B}or(X)\big)$.

ItemTTPTooStDcpw

*(1) m est une **mesure de Borel** si elle est finie sur tout compact.*

*(2) m est **régulière extérieurement** si $\forall B \in \mathcal{B}or(X)$,*

$$m(B) = \inf\{m(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ est ouvert et } B \subset \Omega\} \tag{14.250}$$

*(3) m est **régulière intérieurement** si $\forall B \in \mathcal{B}or(X)$,*

$$m(B) = \sup\{m(K) \text{ tel que } K \text{ est compact et } K \subset B\} \tag{14.251}$$

*(4) m est une mesure **régulière** si elle est régulière dans les deux sens.*

*(5) m est une **mesure de Radon** si elle est de Borel et régulière.*

PropNCASooBnbFrc

Proposition 14.90.
Soit X un espace localement compact[27] et σ-compact[28] Alors toute mesure de Borel sur $\big(X, \mathcal{B}or(X)\big)$ est de Radon.

Démonstration. Nous avons une suite exhaustive[29] de compacts X_k tels que

$$X = \bigcup_{k\geqslant 1} X_k = \bigcup_{k\geqslant 1} \text{Int}(X_k). \tag{14.252}$$

(1) **Régularité intérieure** Soit B, un borélien de X ; nous avons $B = \bigcup_{k\geqslant 1}(B \cap X_k)$ et comme cette union est croissante,

$$m(B) = \lim_{k\to\infty} m(B \cap X_k) \tag{14.253}$$

par le lemme 14.24(1). Dans la suite, il va y avoir beaucoup de considérations sur les topologies induites. Nous nommons τ_k la topologie de X_k induite depuis celle de X. Il ne faudra pas confondre les expressions « un compact *de* X_k » et « un compact *dans* X_k ». La première parle d'un compact pour la topologie τ_k. La seconde parle d'un compact pour la topologie de X, inclus dans X_k.

Si $a < m(B)$ alors il existe $k \geqslant 1$ tel que $a < m(B \cap X_k)$, c'est-à-dire

$$a < m(B \cap X_k) \leqslant m(B). \tag{14.254}$$

[27] Définition 7.181.
[28] Définition 7.115.
[29] Définition 7.359.

Mais (X_k, m) est un espace mesuré borné parce que m est de Borel et X_k est compact. Par conséquent la (restriction de la) mesure m est régulière sur l'espace mesuré $\big(X_k, \mathcal{B}\text{or}(X_k)\big)$ par le théorème 14.88. De plus l'ensemble $B \cap X_k$ est un borélien de (X_k, τ_k) parce que

$$B \cap X_k \in \mathcal{B}\text{or}(X)_{X_k} = \mathcal{B}\text{or}(X_k) \tag{14.255}$$

où nous avons utilisé la propriété de compatibilité entre topologie induite et tribu des boréliens du théorème 14.57. Il existe donc un fermé F_ϵ de (X_k, τ_k) tel que

$$\begin{cases} F_\epsilon \subset B \cap X_k & \text{(14.256a)} \\ m(B \cap X_k) \leqslant m(F_\epsilon) + \epsilon. & \text{(14.256b)} \end{cases}$$

En mettant bout à bout les inégalités nous avons trouvé

$$a < m(B \cap X_k) \leqslant m(F_\epsilon) + \epsilon. \tag{14.257}$$ EQooXRESooGsGJFQ

L'ensemble F_ϵ est un compact de (X, τ_X). En effet X_k étant fermé de (X, τ_X), le lemme 7.28 nous dit que F_ϵ est un fermé de (X, τ_X). Mais X_k étant compact, F_ϵ est un fermé inclus dans un compact, il est donc compact (lemme 7.121).

Enfin nous prouvons la régularité intérieure de la mesure m, c'est-à-dire que

$$m(B) = \sup\{m(K) \text{ tel que } K \text{ est compact dans } B\} \tag{14.258}$$

en vérifiant les deux conditions de la définition 1.579. D'abord $m(B) \geqslant \{m(K) \text{ tel que } \ldots\}$ parce que $m(B) \geqslant m(K)$ pour tout $K \subset B$. Ensuite prenons $\epsilon > 0$, et considérons l'inégalité (14.257) avec $a = m(B) - \epsilon$. Alors nous avons

$$m(B) - 2\epsilon < m(F_\epsilon). \tag{14.259}$$

Cela prouve que $m(B) - 2\epsilon$ n'est pas un majorant de $\{m(K) \text{ tel que } \ldots\}$.

(2) **Régularité extérieure**

Soit un borélien B de X. Si $m(B) = \infty$ alors tous les ouverts contenant B ont mesure infinie et $m(B)$ en est évidemment l'infimum. Nous supposons donc que $m(B) < \infty$.

Nous notons τ_k la topologie induite de X sur $\text{Int}(X_k)$. Nous posons $B_k = B \cap \text{Int}(X_k)$. L'espace $\big(\text{Int}(X_k), m\big)$ est un espace mesuré borné et $B_k \in \mathcal{B}\text{or}\Big(\text{Int}(X_k)\Big)$. Il existe donc un ouvert Ω_k de $\big(\text{Int}(X_k), \tau_k\big)$ tel que $B_k \subset \Omega_k$ et

$$m(\Omega_k \setminus B_k) \leqslant \frac{\epsilon}{2^k}. \tag{14.260}$$

De plus $\text{Int}(X_k)$ est un ouvert de (X, τ_X), donc en réalité Ω_k est un ouvert de X. Nous posons

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \tag{14.261}$$

qui est encore un ouvert de (X, τ_X).

Il est temps de voir que Ω vérifie $m(\Omega \setminus B) \leqslant \epsilon$. Pour cela,

$$\begin{aligned} \Omega \setminus B &= \big(\bigcup_k \Omega_k\big) \cap \big(\bigcup_l B_l\big)^c & \text{(14.262a)} \\ &= \big(\bigcup_k \Omega_k\big) \cap \big(\bigcap B_l^c\big) & \text{(14.262b)} \\ &=\subset \bigcup_k (\Omega_k \cap B_k^c) & \text{(14.262c)} \\ &= \bigcup_k (\Omega_k \setminus B_k), & \text{(14.262d)} \end{aligned}$$

ce qui donne au niveau des mesures :

$$m(\Omega \setminus B) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(\Omega_k \setminus B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon. \tag{14.263}$$

□ RemooOAGCooRHpjxd

Remarque 14.91.
Exprimé sur $\mathbb{R}^N$, la proposition 14.90 s'exprime en disant que toute mesure de Borel sur $\mathbb{R}^N$ est régulière. Typiquement, l'espace X dont il est question est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

14.5.5 Théorème de récurrence

Soient X un espace mesurable, μ une mesure finie sur X et $\phi\colon X \to X$ une application mesurable[30] préservant la mesure, c'est-à-dire que pour tout ensemble mesurable $A \subset X$,

$$\mu\big(\phi^{-1}(A)\big) = \mu(A). \tag{14.264}$$

Si $A \subset X$ est un ensemble mesurable, un point $x \in A$ est dit **récurrent** par rapport à A si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $k \geqslant p$ tel que $\phi^k(x) \in A$.

ThoYnLNEL

Théorème 14.92 (Théorème de récurrence de Poincaré.)**.**
Si A est mesurable dans X, alors presque tous les points de A sont récurrents par rapport à A.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$ et l'ensemble

$$U_p = \bigcup_{k=p}^{\infty} \phi^{-k}(A) \tag{14.265}$$

des points qui repasseront encore dans A après p itérations de ϕ. C'est un ensemble mesurable en tant que union d'ensembles mesurables (pour rappel, les tribus sont stables par union dénombrable, comme demandé à la définition 14.1), et nous avons donc

$$\mu(U_p) \leqslant \mu(X) < \infty. \tag{14.266}$$

De plus $U_p = \phi^{-p}(U_0)$, donc $\mu(U_p) = \mu(U_0)$. Vu que $U_p \subset U_0$, nous avons

$$\mu(U_0 \setminus U_p) = 0. \tag{14.267}$$

Étant donné que $A \subset U_0$ nous avons a fortiori que

$$\{x \in A \text{ tel que } x \notin U_p\} \subset U_0 \setminus U_p, \tag{14.268}$$

et donc

$$\mu\{x \in A \text{ tel que } x \notin U_p\} = 0. \tag{14.269}$$

Cela signifie exactement que l'ensemble des points x de A tels que aucun des $\phi^k(x)$ avec $k \geqslant p$ n'est dans A est de mesure nulle. □

14.6 Mesurabilité des fonctions à valeurs réelles

Nous allons parler de la mesurabilité de fonctions

$$f\colon (S, \mathcal{F}) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{14.270}$$

où $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

normooGAAJooUPCbzG

14.93.
Nous convenons que $0 \times \pm\infty = 0$ parce que nous voulons qu'une droite (qui est un rectangle dont une mesure est 0 et l'autre ∞) soit de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$.

Les produits et sommes $\pm\infty \pm \pm\infty$ et $\pm\infty \times \pm\infty$ sont ceux que l'on croit. Sauf bien entendu $+\infty - \infty$ et $1/0$ qui ne sont toujours pas définis.

LEMooBLOLooAdNViv

Lemme 14.94.
L'ensemble B est un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$ si et seulement si il existe un borélien B_0 de $\mathbb{R}$ tel que B soit B_0 ou $B_0 \cup \{+\infty\}$ ou $B_0 \cup \{-\infty\}$ ou $B_0 \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Démonstration. Comme la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ est la topologie induite de celle sur $\bar{\mathbb{R}}$, la tribu induite l'est aussi par le théorème 14.56. Donc si B est un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$, l'ensemble $B \cap \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. □

LemooCRVJooQosHPq

Lemme 14.95 ([488])**.**
Si $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des intervalles du type

$$]\alpha, \beta[, \quad [-\infty, \beta[, \quad]\alpha, +\infty] \tag{14.271}$$

avec $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ alors $\sigma(\mathcal{S}_0) = \mathcal{B}or(\bar{\mathbb{R}})$.

[30] Définition 14.44.

Démonstration. Les intervalles $]\alpha,\beta[$ engendrent la topologie de $\mathbb{R}$[31], donc $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{S}_0)$. De plus le lemme 14.3 nous autorise à dire que

$$\bigcap_{n\geqslant 1} [n,+\infty] = \{+\infty\} \in \sigma(\mathcal{S}_0). \tag{14.272}$$

Par conséquent tous les ensembles énumérés dans le lemme 14.94 font partie de $\sigma(\mathcal{S}_0)$. Cela implique que $\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}}) \subset \sigma(\mathcal{S}_0)$.

Pour l'inclusion inverse, $\sigma(\mathcal{S}_0)$ est engendré par des parties qui font partie de $\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$, donc $\sigma(\mathcal{S}_0) \subset \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$. □

14.6.1 Fonctions à valeurs réelles sur un espace mesurable

THOooWHFLooKYGsOm

Théorème 14.96.
Soient un espace mesurable $(S,\mathcal{F})$ et une fonction $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

ITEMooHAMHooYLqUhVi

(1) La fonction f est mesurable.

ITEMooHAMHooYLqUhVii

(2) L'ensemble $\{f < a\}$ est dans $\mathcal{F}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

ITEMooHAMHooYLqUhViii

(3) L'ensemble $\{f \leqslant a\}$ est dans $\mathcal{F}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

Démonstration. Plusieurs implications à prouver.

(1) **(1)⇒(2)** Puisque f est mesurable et que $[-\infty,a[\in \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$, nous avons $f^{-1}\big([-\infty,a[\big) \in \mathcal{F}$.

(2) **(2)⇒(1)** Nous posons $\mathcal{A} = \{[-\infty,a[\text{ tel que } a \in \mathbb{R}\}$.
Nous avons $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_0$ (le $\mathcal{S}_0$ du lemme 14.95). Et de plus,

$$]\alpha,\beta[= [-\infty,\beta[\setminus [-\infty,\alpha] = [-\infty,\beta[\setminus \bigcap_{n\geqslant 1} [-\infty,\alpha+\frac{1}{n}[. \tag{14.273}$$

Donc $]\alpha,\beta[\in \sigma(\mathcal{A})$.
Et aussi :

$$]\alpha,+\infty] = \bar{\mathbb{R}} \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [-\infty,\alpha+\frac{1}{n}[, \tag{14.274}$$

ce qui donne $]\alpha,+\infty] \in \sigma(\mathcal{A})$.
Au final, $\mathcal{S}_0 \subset \sigma(\mathcal{A})$ et donc $\sigma(\mathcal{S}_0) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Le lemme 14.95 nous dit que $\sigma(\mathcal{S}_0) = \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$. Nous avons donc bien $\sigma(\mathcal{S}_0) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$.
Par ailleurs, nous savons que $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}$ parce que les éléments de $\mathcal{A}$ sont de la forme $\{f < a\}$. Cela donne $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big) = \mathcal{F}$. Mais $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big)$ peut aussi s'exprimer par le lemme de transport 14.48 : $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{A})\big)$. En combinant les deux,

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{A})\big) = \mathcal{F}, \tag{14.275}$$

et en remplaçant $\sigma(\mathcal{A})$ par $\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$ nous avons ce que nous voulions :

$$f^{-1}\big(\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \in \mathcal{F}, \tag{14.276}$$

ce qui signifie que f est mesurable.

(3) **(3)⇒(2)** Nous avons

$$\{f < a\} = \bigcup_{n\geqslant 1} \{f \leqslant a - \frac{1}{n}\}. \tag{14.277}$$

donc ceci est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$. Et $\{f < a\}$ est dans $\mathcal{F}$.

(4) **(1)⇒(3)** Nous avons

$$\{f \leqslant a\} = \{f < a\} \cup f^{-1}\big([-\infty,a]\big). \tag{14.278}$$

Le premier ensemble est dans $\mathcal{F}$ par (2). Ensuite $[-\infty,a]$ est un fermé de $\bar{\mathbb{R}}$ et donc un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$. Son image réciproque est donc un élément de $\mathcal{F}$ parce que f est mesurable. Au final nous avons bien $\{f \leqslant a\} \in \mathcal{F}$.

[31] Parce toutes les boules sont des intervalles de ce type et que les boules forment une base de topologie, proposition 7.188.

□
LemFOlheqw

Lemme 14.97 ([503]).
Une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $f^{-1}(I)$ est mesurable pour tout I de la forme $]a,\infty[$.

Démonstration. Nous devons prouver que $f^{-1}(A)$ est mesurable dans X pour tout borélien A de $\mathbb{R}$. Nous posons

$$S = \{A \subset \mathbb{R} \text{ tel que } f^{-1}(A) \text{ est mesurable dans } X\} \tag{14.279}$$

et nous prouvons que c'est une tribu. D'abord $f^{-1}(\mathbb{R}) = X$, et X est mesurable, donc $\mathbb{R} \in S$. Ensuite si $A \in S$ alors $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$. En tant que complémentaire d'un mesurable de X, l'ensemble $f^{-1}(A)^c$ est mesurable dans X. Et enfin si $A_n \in S$ alors $f^{-1}(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n f^{-1}(A_n)$ qui est encore mesurable dans X en tant qu'union de mesurables.

Donc S est une tribu qui contient tous les ensembles de la forme $]a,\infty]$. Le lemme 14.52 conclut que S contient tous les boréliens de $\mathbb{R}$. □
LEMooMYUFooKqdDNc

Lemme 14.98.
Soit $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$. Les parties $\{x \geqslant \lambda\}$, $\{x > \lambda\}$, $\{x \leqslant \lambda\}$ et $\{x < \lambda\}$ sont des boréliens de $\bar{\mathbb{R}}$.
LEMooAITEooMjHxvh

Lemme 14.99.
Soit une application mesurable $f\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to \big(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \mathcal{B}or\big)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; nous définissons

$$\begin{aligned} f_\lambda\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \min\big(f(\omega), \lambda\big). \end{aligned} \tag{14.280}$$

Alors f_λ est mesurable

Démonstration. Soit A mesurable (i.e. borélien) dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Nous devons montrer que $f_\lambda^{-1}(A)$ est mesurable. Pour cela nous écrivons

$$A = \Big(A \cap \{x > \lambda\}\Big) \cup \Big(A \cap \{x \leqslant \lambda\}\Big). \tag{14.281}$$

Par définition f_λ ne prend jamais de valeurs plus grandes que λ, donc $f_\lambda^{-1}\big(A \cap \{x > \lambda\}\big) = \varnothing$. D'autre part, $f_\lambda^{-1}\big(A \cap \{x \leqslant \lambda\}\big) = f^{-1}\big(A \cap \{x \leqslant \lambda\}\big)$.

Étant donné que A et $\{x \leqslant \lambda\}$ sont boréliens[32], l'intersection $A \cap \{x \leqslant \lambda\}$ est borélienne, et donc

$$f_\lambda^{-1}(A) = f^{-1}\big(A \cap \{x \leqslant \lambda\}\big) \in \mathcal{A}. \tag{14.282}$$

□
LemIGKvbNR

Lemme 14.100 ([503]).
Soit $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables[33]. Alors $\sup_n f_n$ est mesurable.

Démonstration. Nous avons

$$(\sup f_n)^{-1}\big(]a,\infty]\big) = \{x \in X \text{ tel que } (\sup f_n)(x) > a\} \tag{14.283a}$$
$$= \bigcup_n \{x \in X \text{ tel que } f_n(x) > a\} \tag{14.283b}$$
$$= \bigcup_n f_n^{-1}\big(]a,\infty]\big). \tag{14.283c}$$

Étant donné que f_n est mesurable et que $]a,\infty]$ est mesurable, chacun des $f_n^{-1}\big(]a,\infty]\big)$ est mesurable dans X. L'ensemble $(\sup f_n)^{-1}\big(]a,\infty]\big)$ est donc une union dénombrable de parties mesurables. Il est donc mesurable.

Le lemme 14.97 conclut que $\sup f_n$ est mesurable. □
PropFYPEOIJ

Proposition 14.101.
Si $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ est une suite de fonctions mesurables et positives, alors la fonction[34] $\sum_n f_n$ est mesurable.

[32] Lemme 14.98.
[33] Ici X est un espace mesuré et $\mathbb{R}$ est muni des boréliens.
[34] Définition 12.389 pour la série de fonctions.

Démonstration. Nous considérons les fonctions $s_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x)$ qui valent éventuellement ∞ en certains points. Nous avons

$$\sum_n f_n(x) = \sup_k s_k(x), \tag{14.284}$$

donc le lemme 14.100 nous donne la mesurabilité de la somme de f_n. □

ooUDHFooJjKscR

Définition 14.102.
Soit $(S, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une ***partition mesurable dénombrable*** *de S est une suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ de parties de S telles que*

(1) $S_n \in \mathcal{F}$ pour tout n,

(2) $S_n \cap S_k = \varnothing$ si $n \neq k$,

(3) $S = \bigcup_{n\geqslant 1} S_n$.

LEMooXAPQooPpZUmP

Lemme 14.103 (Lemme de recollement)**.**
Soit (S_n) une partition mesurable dénombrable de l'espace mesurable $(S, \mathcal{F})$. Soit $(S', \mathcal{F}')$ un autre espace mesurable et des fonctions mesurables

$$f_n : (S_n, \mathcal{F}_{S_n}) \to (S', \mathcal{F}') \tag{14.285}$$

où $\mathcal{F}_{S_n}$ est la tribu induite[35]*. Alors la fonction*

$$\begin{aligned} f : (S, \mathcal{F}) &\to (S', \mathcal{F}') \\ x &\mapsto f_n(x) \text{ si } x \in S_n \end{aligned} \tag{14.286}$$

est mesurable.

Démonstration. Soit $A' \in \mathcal{F}'$; nous devons prouver que $f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$. Nous savons que

EqooGKFFooEwTdtg

$$f^{-1}(A') = \bigcup_{n\geqslant 1} f_n^{-1}(A'), \tag{14.287}$$

qui est une union dénombrable d'éléments $f_n^{-1}(A') \in \mathcal{F}_{S_n}$.

Puisque $S_n \in \mathcal{F}$ nous avons $\mathcal{F}_{S_n} \subset \mathcal{F}$ parce qu'un élément de $\mathcal{F}_{S_n}$ est de la forme $S_n \cap B$ avec $B \in \mathcal{F}$. Ainsi, pour chaque n nous avons

$$f_n^{-1}(A') \in \mathcal{F}_{S_n} \subset \mathcal{F}. \tag{14.288}$$

Au final l'égalité (14.287) écrit $f^{-1}(A')$ comme une union d'éléments de $\mathcal{F}$ et est donc un élément de $\mathcal{F}$. □

PROPooODDVooEEmmTX

Proposition 14.104.
Soit $(S, \mathcal{F})$ un espace mesurable et des applications mesurables $f, g : S \to \bar{\mathbb{R}}$. Alors les fonctions suivantes sont mesurables :

(1) λf pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) $f + g$ si elle existe.

(3) $1/f$ si elle existe.

(4) fg.

Démonstration. Commençons par clarifier « si elle existe ». La fonction $f + g$ n'existe pas au point $x \in S$ si $f(x) = +\infty$ et $g(x) = -\infty$. La fonction $1/f$ n'existe pas au point $x \in S$ si $f(x) = 0$. Voir le point 14.93.

(1) **La partie où $f + g$ existe est mesurable** La partie de S sur laquelle $f + g$ existe est

$$\{x \in S \text{ tel que } \big(f(x), g(x)\big) \neq (+\infty, -\infty), \big(f(x), g(x)\big) \neq (-\infty, +\infty)\}. \tag{14.289}$$

Nous avons

$$\{(f, g) = (+\infty, -\infty)\} = \{f = \infty\} \cap \{g = -\infty\} \tag{14.290}$$

qui est un ensemble mesurable parce que, par exemple,

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n\geqslant 1} [n, +\infty]. \tag{14.291}$$

Le cas $(-\infty, +\infty)$ est identique, et au final la partie de S sur laquelle $f + g$ n'existe pas est mesurable. Par complémentarité la partie sur laquelle $f + g$ existe est également mesurable[36].

[35] Définition 14.8.

[36] Parfois on a envie de dire que l'affirmation « A est mesurable » ne passe pas le test de Popper.

(2) **Idem pour la partie sur laquelle $1/f$ existe** Idem.

(3) **Mesurabilité de λf** Si $\lambda = 0$, nous avons une fonction constante dont la mesurabilité est évidente[37]. Nous supposons $\lambda > 0$. Alors

$$\{\lambda f < a\} = \{f < a/\lambda\} \in \mathcal{F}. \tag{14.292}$$

Pour $\lambda < 0$ nous avons de la même manière

$$\{\lambda f < a\} = \{f > a/\lambda\} \in \mathcal{F}. \tag{14.293}$$

Ce dernier point est suffisant pour que λf soit mesurable par le théorème 14.96(3) et par complémentarité.

(4) **Mesurabilité de $f + g$** Soit $a \in \mathbb{R}$; le théorème 14.96 nous demande d'avoir envie de prouver que $\{f + g < a\} \in \mathcal{F}$. Nous avons

$$f(x) + g(x) < a \tag{14.294}$$

si et seulement si

$$f(x) < a - g(x) \tag{14.295}$$

si et seulement si

$$\exists q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } f(x) < q < a - g(x). \tag{14.296}$$

Donc

$$\{f + g < a\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big(\{f < q\} \cap \{g < a - q\} \Big), \tag{14.297}$$

qui est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$. Donc $\{f + g < a\} \in \mathcal{F}$ et $f + g$ est mesurable.

Note qu'en toute rigueur il faudrait « $\cap$là où $f + g$ est définie » un peu partout, mais cela ne change rien parce que l'intersection de deux parties mesurables est mesurable.

(5) **Mesurabilité de $1/f$** Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a > 0$ alors

$$\{1/f < a\} = \{f < 0\} \cup \{f > \frac{1}{a}\} \in \mathcal{F}. \tag{14.298}$$

et si $a < 0$ alors

$$\{1/f < a\} = \{f < 0\} \cap \{f > \frac{1}{a}\} \in \mathcal{F}. \tag{14.299}$$

(6) **Mesurabilité de fg** Nous allons la prouver en plusieurs fois.

(6a) **Si f est mesurable alors f^2 est mesurable** Si $a \leqslant 0$ alors $\{f^2 < a\} = \varnothing$. Si $a > 0$ nous avons

$$\{f^2 < a\} = \{-\sqrt{a} < f < \sqrt{a}\} \in \mathcal{F}. \tag{14.300}$$

(6b) **$f\mathbb{1}_A$ est mesurable** Soit $A \in \mathcal{F}$, et prouvons que $f\mathbb{1}_A$ est mesurable. Par définition,

$$(f\mathbb{1}_A)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \tag{14.301}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} f_1 \colon A^c &\to \bar{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned} \tag{14.302}$$

et

$$\begin{aligned} f_2 \colon A &\to \bar{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned} \tag{14.303}$$

Alors nous avons

$$(\mathbb{1}_A f)(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A^c \\ f_2(x) & \text{si } x \in A. \end{cases} \tag{14.304}$$

Les ensembles A et A^c forment une partition mesurable dénombrable de S. La fonction f_1 est mesurable ; pour prouver que f_2 est mesurable, nous l'écrivons $f_2 = f \circ j_A$ où $j_A \colon A \to S$ est l'injection canonique. L'application

$$j_A \colon (A, \mathcal{F}_A) \to (S, \mathcal{F}) \tag{14.305}$$

[37] Prenez quand même le temps d'y penser.

est mesurable parce que si $B \in \mathcal{F}$ alors $j_A^{-1}(B) = A \cap B \in \mathcal{F}_A$. D'autre part l'application

$$f\colon (S,\mathcal{F}) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{14.306}$$

est mesurable par hypothèse. La composée $f_2 = f \circ j_A$ est alors mesurable par la proposition 14.45. Le lemme de recollement 14.103 nous donne alors la mesurabilité de $f\mathbb{1}_A$.

(6c) **Le produit fg est mesurable** Nous posons

$$F = \{x \in S \text{ tel que } |f(x)| < +\infty, |g(x)| < \infty\}. \tag{14.307}$$

En tant qu'intersection de deux ensembles mesurables, F est mesurable. Par la partie précédente, les applications $f_1 = f\mathbb{1}_F$ et $g_1 = g\mathbb{1}_F$ sont mesurables. L'application $f_1 + g_1\colon S \to \mathbb{R}$ est encore mesurable. Par conséquent l'application

$$f_1 g_1 = \frac{1}{2}\big((f_1+g_1)^2 - f_1^2 - g_1^2\big) \tag{14.308}$$

est mesurable.

Voyons maintenant ce qui se passe en dehors de F. Nous allons utiliser le lemme de recollement sur la fonction

$$(fg)(x) = \begin{cases} (f_1g_1)(x) & \text{si } x \in F \\ -\infty & \text{si } x \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{V} \\ +\infty & \text{si } x \in \mathcal{W} \end{cases} \tag{14.309}$$

où $F, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ forment une partition mesurable dénombrable[38] de S. Pour le sport nous montrons que $\mathcal{U}$ est mesurable :

$$\mathcal{U} = \big(\{f = -\infty\} \cap \{g > 0\}\big) \tag{14.310a}$$
$$\cup \big(\{f = +\infty\} \cap \{g < 0\}\big) \tag{14.310b}$$
$$\cup \big(\{g = -\infty\} \cap \{f > 0\}\big) \tag{14.310c}$$
$$\cup \big(\{g = +\infty\} \cap \{f < 0\}\big). \tag{14.310d}$$

□

ooABKWooPbfSOZ

Proposition 14.105.
Si $f_n\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions mesurables, alors les fonctions $\inf_n f_n$ et $\sup_n f_n$ sont mesurables.

Démonstration. Nous avons les découpages

$$\{\inf_n f_n < a\} = \bigcup_n \{f_n < a\} \in \mathcal{F} \tag{14.311}$$

et

$$\{\sup_n f_n \leqslant a\} = \bigcap_n \{f_n \leqslant a\} \in \mathcal{F}. \tag{14.312}$$

EQooNYKVooDQiQXM

Le théorème 14.96 permet de conclure. □

Note : pour (14.312) nous ne pouvions pas utiliser les inégalités strictes parce que $\{\sup_n f_n < a\}$ n'est pas spécialement égal à $\bigcap_n \{f_n < a\}$.

LEMooMGUOooMGwknZ

Lemme 14.106.
Soient des fonctions mesurables $f_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \end{aligned} \tag{14.313}$$

est mesurable.

14.107.
La proposition 14.105 nous permet de définir les parties positives et négatives de f par $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$. Ce sont des applications mesurables. Nous avons les décompositions

$$f = f^+ - f^- \tag{14.314a}$$
$$|f| = f^+ + f^-. \tag{14.314b}$$

[38] Définition 14.102.

COROooNXYUooEcvDlP

Corolaire 14.108.
Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable alors les applications f^+, f^- et $|f|$ sont mesurables en tant qu'applications $S \to \bar{\mathbb{R}}^+$.

Démonstration. Nous faisons la preuve pour f^+. Nous savons que $f^+\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable par la proposition 14.105. Nous considérons l'injection canonique $j\colon \bar{\mathbb{R}}^+ \to \bar{\mathbb{R}}$ et

$$\begin{aligned} f_1^+\colon S &\to \bar{\mathbb{R}}^+ \\ x &\mapsto f^+(x). \end{aligned} \tag{14.315}$$

Alors $f_1^+ = j \circ f^+$ est mesurable. Et c'est bien cela que nous voulions.

□

Note : f^+ et f_1^+ sont exactement les mêmes fonctions. Elles ne diffèrent que par la tribu que nous considérons sur l'espace d'arrivée. Nous allons à partir de maintenant les noter toutes deux f^+.

Remarque 14.109.
L'application $|f|$ peut être mesurable sans que f le soit. Soit en effet une partie $A \notin \mathcal{F}$, et posons

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ -1 & \text{si } x \in A^c. \end{cases} \tag{14.316}$$

Alors $f^{-1}(\{1\}) = A$ n'est pas mesurable alors que $|f|(x) = 1$ pour tout x.

Il est temps d'aller relire les définitions 9.43.

PropooMFIBooJzaleK

Proposition 14.110.
Si les fonctions $f_n\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ sont mesurables alors les fonctions $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ sont mesurables.

Démonstration. Par le lemme 9.45 nous écrivons $\limsup_n f_n(x) = \inf_{n\geqslant 1} \sup_{k\geqslant n} f_k(x)$. Pour chaque k nous considérons la fonction $g_k = \sup_{n\geqslant k} f_n$. Par la proposition 14.105, les fonctions g_k sont mesurables. En utilisant encore la même proposition, $\inf_{n\geqslant 1} g_k$ est encore mesurable. □

PropooDXBGooSFqrai

Proposition 14.111 ([504]).
Si $f_n\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions mesurables dont la limite ponctuelle existe, alors la limite est mesurable.

Démonstration. Si la limite existe, elle est égale à la limite supérieure par le lemme 9.46. Or la limite supérieure est mesurable par la proposition 14.110. □

14.6.2 Fonction étagée

DefBPCxdel

Définition 14.112 ([505]).
Soit $(S, \mathcal{F})$ un espace mesurable et une fonction $f\colon S \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}or(\bar{\mathbb{R}})\big)$. Il serait dommage de confondre les trois concepts suivants.

- *Une **fonction simple** est une fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs.*
- *Une **fonction étagée** est une fonction simple qui est elle-même une fonction mesurable.*
- *Une **fonction en escalier** est une fonction étagée dont les valeurs sont constantes sur des intervalles : ce sont donc des fonctions constantes par morceaux.*

Dans les trois cas, la fonction f peut être écrite comme somme de fonctions caractéristiques :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}(x) \tag{14.317}$$

où $A_j = f^{-1}(\alpha_j)$. Ce qui change est la nature des A_j.

- Si f est simple, les A_j sont quelconques.
- Si f est étagée, les A_i peuvent être choisis mesurables parce que $\{\alpha_i\}$ est un borélien, ce qui fait de $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$ un choix mesurable.

- Si f est en escalier, les A_i sont des intervalles.

DEFooKWQLooBRGore

Définition 14.113.
*La **forme canonique** d'une fonction simple f est la suivante. Soit $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,l}$ les valeurs distinctes prises par f et $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$. La forme canonique de f est alors*

$$f = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}. \tag{14.318}$$

LEMooNWLTooCDuRQI

Lemme 14.114.
Si f est une fonction simple dont la représentation canonique est

$$f = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \tag{14.319}$$

alors

(1) *les A_i sont disjoints,*

(2) *l'union est égale à tout l'ensemble : $S = \bigcup_i A_i$.*

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 14.115
Le lemme 14.116 et le théorème 14.118 disent la même chose alors que la preuve du théorème 14.118 est beaucoup plus compliquée. La démonstration du lemme serait fausse ?

M'est avis que ce que le théorème donne en plus est la convergence uniforme en cas de fonction bornée. La suite (14.320) ne va pas converger uniformément.

Si vous avez une idée, écrivez-moi.

LemYFoWqmS

Lemme 14.116 (Limite croissante de fonctions étagées[1])**.**
Soit $f : (S, \mathcal{F}) \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction positive mesurable. Il existe une suite $f_n : S \to \mathbb{R}$ de fonctions étagées positives telles que $f_n \to f$ ponctuellement et $f_n \leqslant f$.

Démonstration. Nous considérons (q_n) une suite parcourant tous les rationnels positifs[39] avec $q_0 = 0$ pour être sûr. Pour $n \in \mathbb{N}$ nous définissons la fonction

EqooXQYIooSSJwtM

$$f_n(x) = \max\{q_i \text{ tel que } i \leqslant n,\ q_i \leqslant f(x)\}. \tag{14.320}$$

L'ensemble sur lequel le maximum est pris n'est pas vide parce que $q_0 = 0$. La fonction f_n est simple parce qu'elle ne prend que n valeurs différentes. Nous avons aussi, par construction, $f_n(x) \leqslant f(x)$. Et aussi pour tout $x \in S$, $f_n(x) \to f(x)$, parce que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

En ce qui concerne le fait que f_n soit mesurable, nous notons $\{r_0, \dots, r_n\}$ l'ensemble des $\{q_0, \dots, q_n\}$ classés dans l'ordre croissant. Nous posons en plus $r_{n+1} = +\infty$. Nous avons alors

$$f_n^{-1}(r_k) = \{x \in S \text{ tel que } f(x) \geqslant r_k, f(x) < r_{k+1}\} = \{f \geqslant r_k\} \cap \{f < r_{k+1}\}. \tag{14.321}$$

En tant qu'intersection de deux ensembles mesurables, le théorème 14.96 dit que $f_n^{-1}(r_k)$ est mesurable. □

Remarque 14.117.
Pour avoir $f_n < |f|$ nous pouvons poser

$$f_n(x) = \begin{cases} \max\{q_i \text{ tel que } i \leqslant n,\ q_i \leqslant f(x)\} & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ \min\{q_i \text{ tel que } i \leqslant n,\ q_i \geqslant f(x)\} & \text{si } f(x) < 0. \end{cases} \tag{14.322}$$

THOooXHIVooKUddLi

Théorème 14.118 (Théorème fondamental d'approximation, thème 24[502, 506])**.**
Soit un espace mesurable $(S, \mathcal{A})$.

(1) *Soit une fonction mesurable $f : S \to [0, +\infty]$. Alors il existe une suite croissante de fonctions $\varphi_n : S \to [0, +\infty[$ étagées[40] positives dont la limite ponctuelle est f.*

(2) *Si de plus f est bornée, la convergence est uniforme.*

(3) *Idem pour f à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.*

[39] Nous rappelons que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$ par la proposition 9.16.
[40] Définition 14.112.

Démonstration. Nous découpons l'intervalle $[0,n]$ en plusieurs morceaux.

$$I_{n,k}=\begin{cases}[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[& \text{si } 0\leqslant k\leqslant n2^n-1\\ [n,\infty] & \text{si } k=n2^n.\end{cases}\tag{14.323}$$

Nous posons $S_{n,k}=f^{-1}(I_{n,k})$. Ce sont des ensembles mesurables parce que f est mesurable. Et de plus, pour chaque n, la suite $(S_{n,k})_{k\geqslant 0}$ est une partition mesurable finie de S. Nous posons

$$\varphi_n=\sum_{k=0}^{n2^n}\frac{k}{2^n}\mathbb{1}_{S_{n,k}}.\tag{14.324}$$

C'est-à-dire que sur chaque $S_{n,k}$ nous approximons f par le bas. La fonction φ_n est étagée et positive : $0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant f(x)$ par construction.

(1) **Croissance** Nous allons voir que $\varphi_n\leqslant\varphi_{n+1}$. Soit $k\neq n2^n$. Si $x\in S_{n,k}$ alors $\varphi_n(x)=\frac{k}{2^n}$ et nous avons aussi la décomposition

$$S_{n,k}=S_{n+1,2k}\cup S_{n+1,2k+1}.\tag{14.325}$$

Si $x\in S_{n+1,2k}$ alors $\varphi_{n+1}(x)=\frac{2k}{2^{n+1}}=\frac{k}{2^n}=\varphi_n(x)$. Et si $x\in S_{n+1,2k+1}$ alors

$$\varphi_{n+1}(x)=\frac{2k+1}{2^{n+1}}=\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}>\varphi_n(x).\tag{14.326}$$

Il reste à traiter le cas $x\in\{f\geqslant n\}$. Dans ce cas nous avons $\varphi_n(x)=n$. Il y a encore deux cas à traiter :

$$\{f\geqslant n\}=\{f\in[n,n+1[\}\cup\{f\in[n+1,\infty]\}.\tag{14.327}$$

Pour plus de simplicité dans les notations, nous notons $\bar{n}=n2^n$, c'est-à-dire que $I_{n,\bar{n}}$ est le $I_{n,k}$ avec le k le plus grand possible. Nous avons

$$I_{n,\bar{n}}=[n,n+1[\cup[n+1,\infty].\tag{14.328}$$

Le premier élément se décompose en $I_{n+1,k}$ avec $k<\bar{n}+1$ (nous préciserons plus tard exactement les valeurs de k) tandis que le second est $[n+1,\infty]=I_{n+1,\overline{n+1}}$.

Pour $x\in S_{n+1,\overline{n+1}}$ nous avons

$$\varphi_{n+1}(x)=\frac{(n+1)2^{n+1}}{2^{n+1}}=n+1>\varphi_n(x).\tag{14.329}$$

Si au contraire $f(x)\in[n,n+1[$ nous devons précisément voir quels sont les k qui font en sorte que $I_{n+1,k}$ recouvre $[n,n+1[$. Le plus petit k est donné par $\frac{k}{2^{n+1}}=n$, c'est-à-dire $k=n2^{n+1}$ et le plus grand k est donné par $\frac{k}{2^{n+1}}<n+1$, c'est-à-dire $k=2^{n+1}(n+1)-1$. Donc si $f(x)\in[n,n+1[$ alors $x\in S_{n+1,k}$ avec

$$n2^{n+1}\leqslant k\leqslant(n+1)2^{n+1}-1\tag{14.330}$$

Dans ce cas

$$\varphi_{n+1}(x)=\frac{k}{2^{n+1}}\geqslant\frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}}=n=\varphi_n(x).\tag{14.331}$$

(2) **Convergence ponctuelle** Si $f(x)<\infty$ alors il existe[41] $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $f(x)<n_0$. Pour $n\geqslant n_0$ nous avons $f(x)<n$ et donc $\varphi_n(x)$ se calcule à partir d'un des intervalles de taille $1/2^n$:

$$\varphi_n(x)=\frac{k}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{k+1}{2^n}.\tag{14.332}$$

Donc

$$|\varphi_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{2^n},\tag{14.333}$$

ce qui signifie que $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$.

Si $f(x)=+\infty$ alors $f(x)>n$ pour tout n. Et alors $\varphi_n(x)=n$ pour tout n, ce qui donne bien $\varphi_n(x)\to\infty$.

[41] Le vrai snob citera ici le lemme 1.553.

(3) **Convergence uniforme** Soit f bornée : $0 \leqslant f(x) < M$ pour tout $x \in S$. Soit aussi $\epsilon > 0$. Nous prenons $n_0 > M$ tel que $\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$ nous avons

$$0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^{n_0}} \leqslant \epsilon. \tag{14.334}$$

Notez qu'il n'y a pas de valeurs absolues parce que nous savons déjà que la limite est croissante.

□

ThofrestemesurablesXYYX

Théorème 14.119 (Doob[487]).
Soit une application mesurable[42] $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$. *Une application* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *est* $\mathcal{A}_X$*-mesurable si et seulement si il existe une fonction borélienne* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ *telle que* $Y = f(X)$.

Démonstration. En séparant Y par coordonnées, et en séparant, pour chacune, les parties positives et négatives, nous supposons que Y est à valeurs réelles positives. Le théorème 14.118 dit qu'il existe une suite croissante d'applications $\mathcal{A}_X$-mesurables et étagées $\varphi_n : \Omega \to [0, \infty[$ telles que $\varphi_n \to Y$ ponctuellement.

Vu que φ_n est étagée, il existe des $\mathcal{A}_X$-mesurables $A_{nk} \subset \Omega$ tels que $\varphi_n = \sum_{k=0}^{s_n} a_{ak} \mathbb{1}_{A_{nk}}$ avec $a_{nk} > 0$. Par la définition 14.6 de la tribu engendrée par une application, il existe un borélien $B_{nk} \subset \mathbb{R}$ tel que $A_{nk} = X^{-1}(B_{nk})$. Avec ça nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \sum_{k=0}^{s_n} a_{nk} \mathbb{1}_{A_{nk}} && \text{(14.335a)}\\
&= \sum_{k} a_{nk} \mathbb{1}_{X^{-1}(B_{nk})} && \text{(14.335b)}\\
&= \sum_{k} a_{nk} (\mathbb{1}_{B_{nk}} \circ X) && \text{(14.335c)}\\
&= \left(\sum_{k} a_{nk} \mathbb{1}_{B_{nk}} \right) \circ X. && \text{(14.335d)}
\end{aligned}$$

Nous posons

$$\begin{aligned}
f_n &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\\
f_n &= \sum_{k=0}^{s_n} a_{nk} \mathbb{1}_{B_{nk}}.
\end{aligned} \tag{14.336}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, il n'y a que deux possibilités. Soit $x \in X(\Omega)$, soit non. Si x n'est pas dans $X(\Omega)$, alors il n'est dans aucun des B_{nk} et nous avons $f_n(x) = 0$ pour tout n. Si $x \in X(\Omega)$, alors il existe $\omega \in \Omega$ tel que $x = X(\omega)$. Dans ce cas

$$f_n(x) = f_n\big(X(\omega)\big) = \varphi_n(\omega), \tag{14.337}$$

qui est croissante en n. De plus si $x = X(\omega)$, nous avons

$$f_n(x) = \varphi_n(\omega) \to Y(\omega). \tag{14.338}$$

Nous avons donc montré que pour tout x, $n \mapsto f_n(x)$ est convergente :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin X(\Omega)\\ Y(\omega) & \text{si } x = X(\omega). \end{cases} \tag{14.339}$$

Nous notons $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, et nous avons

$$Y(\omega) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \Big((f_n \circ X)(\omega) \Big) = \lim_{n\to\infty} f_n\big(X(\omega)\big) = f\big(X(\omega)\big) = (f \circ X)(\omega). \tag{14.340}$$

Nous avons donc bien trouvé une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f \circ X$. □

14.6.3 Fonctions réelles à variables réelles

Nous nous focalisons à présent sur le cas des fonctions

$$f : \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big). \tag{14.341}$$

[42] Elle est notée X parce que l'application usuelle de ce théorème est en théorie des variables aléatoires.

NORMooNFOMooYnaflN

14.120 ([1])**.**
Anticipons un peu pour expliquer pourquoi ce que nous allons faire maintenant est suffisant pour ce que nous avons en tête[43]. Toutes les fonctions mesurables

$$f\colon \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{14.342}$$

seront a fortiori mesurables au sens de

$$f\colon \big(\mathbb{R}, \mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R})\big) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{14.343}$$

où $\mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R})$ est la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la tribu complétée de celle des boréliens (définition 14.143).

14.121.
Nous allons maintenant donner quelques conditions pour que des fonctions soient mesurables au sens de la tribu des boréliens sur l'espace d'arrivée et de départ. Ces résultats seront donc immédiatement applicables à la théorie de l'intégration où nous considérons la tribu de Lebesgue sur l'espace de départ.

Autrement dit, les résultats présentés ici sont un peu plus forts que ce dont nous avons réellement besoin … ou alors ce sont les hypothèses que nous allons poser en théorie de l'intégration, qui seront un peu plus fortes que nécessaires. C'est une question de point de vue.

CoroojJYDVooCrXVun

Corolaire 14.122.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors toute application monotone $f\colon I \to \mathbb{R}$ est borélienne.

Démonstration. Puisque f est monotone, l'ensemble $\{f < a\}$ est un intervalle. Or tous les intervalles sont boréliens, donc f est mesurable par le théorème 14.96. □

Définition 14.123.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est ***monotone par morceaux*** *si il existe une suite strictement croissante de points $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans I telle que f ait la propriété sur chacun des ouverts $]x_j, x_{j+1}[$.*

Remarque 14.124.
Quelques remarques.

(1) Dans cette définition, les points sont numérotés par $\mathbb{Z}$ et non par $\mathbb{N}$ parce que nous nous laissons la liberté d'avoir une infinité de points de chacun des deux côtés.

(2) La notion de C^1 par morceaux sera la définition 20.37. Attention : ce ne sera pas la même.

PropooLNBHooBHAWiD

Proposition 14.125.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. Si f est continue ou monotone par morceaux sur I alors elle y est borélienne.

Démonstration. L'ensemble $\{]x_j, x_{j+1}[\}_{j\in\mathbb{Z}} \cup \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ forme une partition mesurable dénombrable de I (les singletons sont des boréliens). À une belle redéfinition près de la numérotation (deux fois $\mathbb{Z}$ va dans $\mathbb{N}$), nous les appelons $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et nous définissons les fonctions f_k comme étant les restrictions de f aux intervalles I_k.

Toute fonction sur un singleton est mesurable. Toute fonction continue sur un ouvert est mesurable (théorème 14.56). Toute fonction monotone sur un ouvert est mesurable (corolaire 14.122).

Le lemme de recollement 14.103 donne alors la mesurabilité de f. □

14.126.
Toutes les fonctions que nous pouvons écrire explicitement sont mesurables … en tout cas toutes celles que l'on trouve en pratique. En effet nous avons déjà toutes les fonctions continues par morceaux via la proposition 14.125 et ensuite toutes les limites par la proposition 14.111. Cela donne les séries, les dérivées, les primitives, etc.

14.7 Tribu produit

14.7.1 Produit d'espaces mesurables

DefTribProfGfYTuR

Définition 14.127 (Tribu produit)**.**
Si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus sur deux ensembles Ω_1 et Ω_2, nous définissons la ***tribu produit*** *$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$*

[43] Pour rappel, nous avons en tête de définir une théorie de la mesure afin d'y définir des intégrales. En particulier nous allons étudier l'intégrale de Lebesgue et en ce qui concerne $\mathbb{R}^n$, nous aurons la tribu de Lebesgue.

comme étant la tribu engendrée par

$$\{X \times Y \text{ tel que } X \in \mathcal{A}_1, Y \in \mathcal{A}_2\}. \tag{14.344}$$

Ces ensembles sont appelés ***rectangles*** *de* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

PropLJJWooKqWlTr

Proposition 14.128 ([507]).
Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ *et* $(S_2, \mathcal{F}_2)$. *Si* $\mathcal{C}_i$ *est une classe de parties de* S_i *avec* $\mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{C}_i)$ *et* $S_i \in \mathcal{C}_i$. *Alors*

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2). \tag{14.345}$$

Démonstration. Nous notons p_1 et p_2 les projections de $S_1 \times S_2$ vers S_1 et S_2. Nous commençons par prouver que

eqSGPBooLpQHfq
$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma\big(p_1^{-1}(\mathcal{F}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{F}_2)\big). \tag{14.346}$$

En effet cette union est dans $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ parce que ce sont tous des produits de la forme $A_1 \times S_2$ et $S_1 \times A_2$ où $A_i \in \mathcal{F}_i$. Inversement, tous les produits de la forme $A_1 \times A_2$ sont dans la tribu engendrée par l'union parce que

$$A_1 \times A_2 = (A_1 \times S_2) \cap (S_1 \times A_2). \tag{14.347}$$

Par conséquent, la partie $p_1^{-1}(\mathcal{F}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{F}_2)$ engendre tous les produits qui engendrent la tribu $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. L'égalité (14.346) est donc correcte.

Si $C_1 \in \mathcal{C}_1$ alors

$$p_1^{-1}(C_1) = C_1 \times S_2 \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \tag{14.348}$$

et donc $p_1^{-1}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$. En utilisant le lemme de transport 14.48 nous avons alors

EqDQLYooVOLqMZ
$$p_1^{-1}(\mathcal{F}_1) = p_1^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C}_1)\big) = \sigma\big(p_1^{-1}(\mathcal{C}_1)\big) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) \tag{14.349}$$

et de la même façon,

EqMTRCooVHNTHJ
$$p_2^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2). \tag{14.350}$$

Vu les relations (14.349), (14.350) et (14.346) nous avons

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma\big(p_1^{-1}(\mathcal{F}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{F}_2)\big) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2). \tag{14.351}$$

Réciproquement, si $C_1 \in \mathcal{C}_1$ et $C_2 \in \mathcal{C}_2$ alors

$$C_1 \times C_2 = (C_1 \times S_2) \cap (S_1 \times C_2) = p_1^{-1}(C_1) \cap p_2^{-1}(C_2) \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2. \tag{14.352}$$

□

PROPooSKIEooCpLVQT

Proposition 14.129 ([1, 77]).
Soient des espaces mesurables[44] $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, 2)$. *Nous considérons des applications mesurables* $f_i \colon \Omega \to \Omega_i$. *Alors l'application* $(f_1, f_2) \colon \Omega \to \Omega_1 \times \Omega_2$ *est mesurable pour la tribu produit*[45].

Démonstration. Nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{B \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \text{ tel que } (f_1, f_2)^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}, \tag{14.353}$$

et nous allons prouver que $\mathcal{D}$ est une tribu contenant les parties de la forme $A_1 \times A_2$.

(1) **$\mathcal{D}$ est une tribu** Il faut vérifier la définition 14.1. D'abord $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{D}$ parce que

$$\{(f_1, f_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2\} = \Omega \in \mathcal{F}. \tag{14.354}$$

Ensuite si $B \in \mathcal{D}$, nous avons

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2)^{-1}(B^c) &= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } (f_1, f_2)(\omega) \in B^c\} && \text{(14.355a)}\\
&= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } (f_1, f_2)(\omega) \in B\}^c && \text{(14.355b)}\\
&\in \mathcal{F}^c && \text{(14.355c)}\\
&= \mathcal{F}. && \text{(14.355d)}
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } (f_1, f_2)(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$. Enfin si $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont des éléments de $\mathcal{D}$, nous avons

$$(f_1, f_2)^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (f_1, f_2)^{-1}(B_i) \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F} = \mathcal{F}. \tag{14.356}$$

[44] Définition 14.1.
[45] Définition 14.127.

(2) $A_1 \times A_2 \in \mathcal{D}$ Soient $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Nous prouvons que $A_1 \times A_2 \in \mathcal{D}$. Pour cela,

$$\begin{aligned}(f_1, f_2)^{-1}(A_1 \times A_2) &= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f_1(\omega) \in A_1, f_2(\omega) \in A_2\} && (14.357a)\\ &= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f_1(\omega) \in A_1\} \cap \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f_2(\omega) \in A_2\} && (14.357b)\\ &= f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2) && (14.357c)\\ &\in \mathcal{F} \cap \mathcal{F} && (14.357d)\\ &\subset \mathcal{F}. && (14.357e)\end{aligned}$$

(3) **Conclusion** La partie $\mathcal{D}$ est une tribu contenant les ensembles de la forme $A_1 \times A_2$. La définition 14.127 de la tribu produit dit alors que $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{D}$.

□

14.7.2 Le cas des boréliens

Si X_1 et X_2 sont des espaces topologiques et si nous notons $\mathcal{O}_i$ l'ensemble de leurs ouverts, par définition $\mathcal{B}\text{or}(X_i) = \sigma(\mathcal{O}_i)$. De plus par la proposition 14.128 nous savons que

$$\sigma(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) = \mathcal{B}\text{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\text{or}(X_2). \tag{14.358}$$

EqOHMSooRSLrDk
LemDEDQooJyzXgC

Lemme 14.130.
Si $(X_i, \mathcal{O}_i)$ sont des espaces topologiques, alors

$$\mathcal{B}or(X_1) \otimes \mathcal{B}or(X_2) \subset \mathcal{B}or(X_1 \times X_2) \tag{14.359}$$

Démonstration. Si $A_i \in \mathcal{O}_i$ alors $A_1 \times A_2$ est un ouvert de $X_1 \times X_2$ (voir la définition 7.63). Par conséquent, $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ est contenu dans l'ensemble des ouverts de $X_1 \times X_2$ ou encore

$$\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{B}\text{or}(X_1 \times X_2), \tag{14.360}$$

et donc

$$\sigma(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \sigma\big(\mathcal{B}\text{or}(X_1 \times X_2)\big) \tag{14.361}$$

finalement, par (14.358)

$$\mathcal{B}\text{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\text{or}(X_2) \subset \mathcal{B}\text{or}(X_1 \times X_2). \tag{14.362}$$

□

Il n'y a en général pas égalité, mais nous allons immédiatement voir que dans (presque) tous les cas raisonnables, les boréliens sur un produit sont le produit des boréliens.

PropNAAJooBPbjkX

Proposition 14.131 ([507]).
Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques séparables. Alors

$$\mathcal{B}or(X_1 \times X_2) = \mathcal{B}or(X_1) \otimes \mathcal{B}or(X_2). \tag{14.363}$$

Démonstration. Nous savons par le lemme 7.302 que tout ouvert de $X_1 \times X_2$ est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$. Donc tout ouvert de $X_1 \times X_2$ est dans $\mathcal{B}\text{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\text{or}(X_2)$. Par conséquent

$$\mathcal{B}\text{or}(X_1 \times X_2) \subset \mathcal{B}\text{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\text{or}(X_2). \tag{14.364}$$

L'inclusion inverse étant déjà acquise par le lemme 14.130, nous avons l'égalité. □

CorWOOOooHcoEEF

Proposition 14.132.
Les boréliens sur $\mathbb{R}^N$ sont ceux qu'on croit.

(1) $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}or(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})$

(2) $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^{N+1}) = \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})$

Démonstration. Cela n'est rien d'autre que la proposition 14.131. □

Proposition 14.133.
Soit un espace mesurable $(S, \mathcal{F})$ et des applications $f_k : S \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, N)$. Alors l'application

$$\begin{aligned} f : (S, \mathcal{F}) &\to (\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N))\\ x &\mapsto \big(f_1(x), \dots, f_N(x)\big)\end{aligned} \tag{14.365}$$

est mesurable si et seulement si chacun des f_i est mesurable.

Démonstration. Division en deux.

(1) **Condition nécessaire** Nous supposons que les f_i sont mesurables. Nous avons

$$f^{-1}\Big(\prod_{k=1}^{N}]a_k,b_k[\Big) = \{x\in S \text{ tel que } f_1(x)\in]a_1,b_1[,\cdots f_N(x)\in]a_N,b_N[\} \tag{14.366a}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{N} f_k^{-1}\big(]a_k,b_k[\big). \tag{14.366b}$$

Cela est une intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ et est donc un élément de $\mathcal{F}$. Mais les pavés ouverts engendrent $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^N)$ parce qu'ils sont une base dénombrable de la topologie (proposition 14.51). Le théorème 14.49 nous assure alors que f est mesurable parce que l'image inverse d'une base de la tribu est mesurable.

(2) **Condition suffisante** Si f est mesurable alors en particulier

$$f_k^{-1}\big(]a,b[\big) = f^{-1}\big(\mathbb{R}\times\ldots\times]a,b[\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}\big)\in\mathcal{F}. \tag{14.367}$$

Pour cela nous avons utilisé la proposition 14.132 qui nous indique que le produit dans la parenthèse est un borélien de $\mathbb{R}^N$ en tant que produit de boréliens de $\mathbb{R}$.

Encore une fois f_k^{-1} tombe dans $\mathcal{F}$ pour une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$ et est donc mesurable.

□

14.8 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

SecZTFooXlkwk

Nous notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des intervalles[46] de $\mathbb{R}$.

Proposition 14.134.
L'ensemble des réunions finies d'éléments de $\mathcal{S}$ est une algèbre de parties de $\mathbb{R}$ que nous allons noter $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Démonstration. Nous devons vérifier la définition 14.13. Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont des intervalles et font donc partie de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Si $A\in\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ se décompose en union d'intervalles de la forme (a_k,b_k) avec $k=1,\ldots,n$ (ici nous mettons des parenthèses au lieu de crochets parce qu'à priori nous ne savons pas). Alors

$$A^c = \bigcup_{k=0}^{n}(b_k,a_{k+1}) \tag{14.368}$$

où nous avons posé $b_0=-\infty$ et $a_{n+1}=+\infty$. Ici encore les parenthèses sont soit fermées soit ouvertes en fonction de ce qu'étaient celles dans la décomposition de A. Quoi qu'il en soit, cette décomposition de A^c montre que $A^c\in\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Enfin si $A,B\in\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ alors $A\cup B\in\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. □

Lemme 14.135.
Tout élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ admet une décomposition minimale unique en réunion finie d'intervalles. Cette décomposition est formée d'intervalles deux à deux disjoints.

Démonstration. Nous allons montrer que si $A\in\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, alors la décomposition minimale consiste en les composantes connexes[47] de A. Pour cela nous rappelons que la proposition 9.54 dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si elle est un intervalle. D'abord cela nous dit immédiatement que les composantes connexes de A forment une décomposition de A en intervalles. Nous devons prouver qu'elle est minimale.

Soit $\{C_k\}_{k=1,\ldots,n}$ les composantes connexes de A. Aucun connexe de $\mathbb{R}$ contenu dans A ne peut intersecter plus d'un des C_k, et par conséquent nous ne pouvons pas décomposer A en moins de n intervalles.

Pour l'unicité, soit $\{I_k\}_{k=1,\ldots,n}$ un ensemble de n intervalles tels que $\bigcup_{k=1}^{n}I_k=A$. Chacun des I_k intersecte un et un seul des C_k. En effet si $x\in I_k\cap C_i$ et $y\in I_k\cap C_j$, alors $[x,y]\subset I_k$ parce que I_k est un intervalle. Mais C_i étant le plus grand connexe contenant x, $[x,y]\subset C_i$ et de la même façon, $[x,y]\subset C_j$.

[46] Définition 1.27.
[47] Définition 7.104.

Par conséquent C_i et C_j sont tous deux la composante connexe de x et y. Nous en déduisons que $C_i = C_j$, c'est-à-dire $i = j$.

Par ailleurs nous avons $I_k \cap I_l = \varnothing$ dès que $k \neq l$ parce que sinon l'ensemble $I_k \cup I_l$ serait connexe et la décomposition des $\{I_k\}_{k=1,\dots,n}$ ne serait pas minimale : en remplaçant I_k et I_l par $I_k \cup I_l$ on aurait eu une décomposition contenant moins d'éléments. Donc à renumérotation près nous pouvons supposer que I_k intersecte C_l si et seulement si $k = l$.

Dans ce cas nous devons avoir $I_k = C_k$, sinon les éléments de $C_k \setminus I_k$ ne seraient pas dans $\bigcup_{i=1}^n I_i$. □

Définition 14.136 (longueur d'intervalle[491])**.**
Si I est un intervalle d'extrémités a et b avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ alors nous définissons la ***longueur*** *de I par*

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & si\ -\infty < a \leqslant b < +\infty \\ \infty & si\ a\ ou\ b\ est\ infini \end{cases} \tag{14.369}$$

Si $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ et si sa décomposition minimale est $A = \bigcup_{k=1}^n I_k$, alors on définit

$$\ell(A) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k). \tag{14.370}$$

Le lemme suivant nous indique que nous pouvons calculer la longueur d'un élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ sans savoir la décomposition minimale, pourvu que l'on connaisse une décomposition disjointe.

LemIUQooEzHun

Lemme 14.137 ([491])**.**
Si

$$B = \bigcup_{r=1}^{p} J_r \tag{14.371}$$

est une décomposition de $B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ en intervalles deux à deux disjoints alors

$$\ell(B) = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r). \tag{14.372}$$

Démonstration. Nous prouvons dans un premier temps le résultat dans le cas où $B = I$ est un intervalle. Soit I un intervalle et une décomposition en intervalles disjoints $I = \bigcup_{r=1}^p J_r$. Nous montrons qu'alors $\ell(I) = \sum_{r=1}^p \ell(J_r)$. Nous verrons ensuite comment passer au cas où B est un élément générique de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

(1) **Si $B = I$ est un intervalle infini**

Si I est infini alors un des J_r soit l'être et donc $\sum_{r=1}^p \ell(J_r) = \infty = \ell(I)$.

(2) **Si $B = I$ est un intervalle ininfini**

Pour chaque $r = 1, \dots, p$ nous notons a_r et b_r les extrémités de J_r. Vu que les J_r sont connexes et disjoints, si $a_k \leqslant a_l$ alors $b_k \leqslant a_l$, sinon l'ensemble (non vide) $]a_l, b_k[$ serait dans l'intersection $I_k \cap I_l$ qui, elle, est vide. Plus généralement, si $x \in J_k$ et $y \in J_l$ avec $x < y$ alors pour tout $x' \in J_k$ et tout $y' \in J_l$ nous avons $x' < y'$. Vu qu'il y a un nombre fini d'ensembles J_r, nous pouvons les classer dans l'ordre croissant :

$$a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_{p-1} \leqslant a_p \leqslant b_p. \tag{14.373}$$

Vu que les J_r sont disjoints et que leur union est connexe nous avons en réalité

$$a = a_1 \leqslant b_1 = a_2 \leqslant b_2 = a_3 \leqslant \dots \leqslant b_{p-1} = a_p \leqslant b_p, \tag{14.374}$$

donc une somme télescopique donne

$$\ell(I) = b - a = \sum_{r=1}^{p} (b_r - a_r) = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r). \tag{14.375}$$

(3) **Si B n'est pas un intervalle** Soit $\{I_k\}_{k=1,\dots,n}$ la décomposition minimale de B. Alors

$$\spadesuit = \ell(B) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{n} \ell\Big(\bigcup_{r=1}^{p} (I_k \cap J_r) \Big). \tag{14.376}$$

Mais I_k est un intervalle et s'écrit comme union disjointe $I_k = \bigcup_{r=1}^{p}(I_k \cap J_r)$, donc par la première partie

$$\spadesuit = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\ell(I_k \cap J_r) = \sum_{r=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}\ell(I_k \cap J_r). \tag{14.377}$$

Ici J_r est un intervalle qui se décompose en $J_r = \bigcup_{k=1}^{n}(I_k \cap J_r)$, donc nous pouvons encore utiliser la première partie :

$$\spadesuit = \sum_{r=1}^{p}\ell(J_r), \tag{14.378}$$

ce qu'il fallait.

□
LemPIOooRLkbo

Lemme 14.138.
Si $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ avec $A \subset B$ alors $\ell(A) \leqslant \ell(B)$.

Démonstration. Nous avons évidemment $B = A \cup B \setminus A$. Notons que $B \setminus A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ par le lemme 14.15. Si $\{I_k\}$ est une décomposition disjointe de A et $\{J_i\}$ une de $B \setminus A$ alors $\{I_k\} \cup \{J_i\}$ est une décomposition disjointe de $A \cup B \setminus A$ et le lemme 14.137 nous dit que

$$\ell(B) = \ell(A \cup B \setminus A) = \ell(A) + \ell(B \setminus A). \tag{14.379}$$

Par conséquent $\ell(B) \geqslant \ell(A)$. □
LemUMVooZJgMu

Lemme 14.139.
Si I est un intervalle et si il se décompose en

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \tag{14.380}$$

où les I_n sont des intervalles disjoints, alors

$$\ell(I) = \sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n). \tag{14.381}$$

Démonstration. Nous allons encore diviser la preuve en deux parties suivant que I soit de longueur finie ou pas.

(1) **Si I est de longueur finie**

Soient a et b les extrémités de I : $-\infty < a \leqslant b < +\infty$. Pour tout $N \geqslant 1$ nous avons

$$\sum_{n=1}^{N}\ell(I_n) = \ell\Big(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\Big) \leqslant \ell(I). \tag{14.382}$$

La première égalité est le lemme dans le cas d'une union finie 14.137. L'inégalité est le lemme 14.138. Cela étant vrai pour tout N, à la limite $N \to \infty$ nous conservons l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) \leqslant \ell(I). \tag{14.383}$$

Nous devons encore voir l'inégalité inverse. Pour cela nous supposons que $a < b$. Sinon $\ell(I) = 0$ et tous les I_n doivent être vide sauf un qui contiendra seulement $\{a\}$ (si I le contient).

Soit $\epsilon > 0$ avec $\epsilon < b - a$ et l'intervalle

$$[a + \frac{\epsilon}{4}, b - \frac{\epsilon}{4}] = [a', b'] \subset I. \tag{14.384}$$

Si les a_n et le b_n sont le extrémités des I_n alors

$$[a', b'] \subset I = \bigcup_{n\geqslant 1} I_n \subset \bigcup_{n\geqslant 1}]a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}[= \bigcup_{n\geqslant 1}]a'_n, b'_n[\tag{14.385}$$

où nous avons posé $a'_n = a_n - \epsilon/2^{n+2}$ et $b'_n = b_n + \epsilon/2^{n+2}$. Nous avons donc recouvert le compact[48] $[a', b']$ par des ouverts. Nous pouvons donc en extraire un sous-recouvrement fini (c'est la définition de la compacité), c'est-à-dire une partie finie F de $\mathbb{N}$ telle que

$$[a', b'] \subset \bigcup_{n\in F}]a'_n, b'_n[. \tag{14.386}$$

Le lemme 14.138 nous dit alors que

$$\heartsuit = b' - a' \leqslant \ell\Big(\bigcup_{n\in F}]a'_n, b'_n[\Big) \leqslant \sum_{n\in F} (b'_n - a'_n). \tag{14.387}$$

La seconde inégalité se prouve en recopiant[49] la preuve de 14.16. Nous continuons le calcul :

$$\heartsuit \leqslant \sum_{n\in F} (b_n - a_n) + \sum_{n\in F} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n\in F} (b_n - a_n) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{14.388}$$

Mais $b' - a' = (b - a) - \frac{\epsilon}{2}$, donc

$$b - a - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \sum_{n\in F} (b_n - a_n) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{14.389}$$

D'où nous déduisons que

$$\ell(I) = b - a \leqslant \sum_{n\in F} (b_n - a_n) + \epsilon \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) + \epsilon = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) + \epsilon. \tag{14.390}$$

Cela étant valable pour tout ϵ nous déduisons que

$$\ell(I) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n). \tag{14.391}$$

(2) **Si I est de longueur infinie**

Étant donné que I est un intervalle de longueur infinie, il doit au moins contenir un ensemble du type $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$; donc pour tout $M > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que

$$\ell\big(I \cap [-N, N]\big) \geqslant M. \tag{14.392}$$

Mais $I \cap [-N, N]$ est un intervalle et

$$I \cap [-N, N] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \cap [-N, N] \tag{14.393}$$

qui est une union disjointe. Par conséquent,

$$M \leqslant \ell\big(I \cap [-N, N]\big) = \sum_n \ell\big(I_n \cap [-N, N]\big) \leqslant \sum_n \ell(I_n). \tag{14.394}$$

Cela étant vrai pour tout $M > 0$, nous concluons que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) = \infty. \tag{14.395}$$

□

Remarque 14.140.
Pour la preuve de 14.139 nous ne pouvons pas classer les I_n en ordre croissant comme nous l'avons fait dans la preuve de 14.137. En effet si $I = [0, 1]$ et que nous recouvrons $[0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1]$ par une infinité d'intervalles chacun, nous ne pouvons plus les classer par ordre croissant.

PropULFoodgXrR

Proposition 14.141 ([491]).
La fonction ℓ ainsi définie est une mesure σ-finie sur l'algèbre de parties $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

[48] Lemme 9.20.

[49] Nous ne pouvons pas invoquer directement le lemme 14.16 parce que nous n'avons pas encore prouvé que ℓ était une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mathcal{S}})$.

Démonstration. Le fait que ℓ soit σ-finie provient par exemple du fait que $\ell\big(]-n,n[\big)=2n$ tandis que $\bigcup_n]-n,n[=\mathbb{R}$.

Nous devons à présent prouver que ℓ est additive. Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des éléments disjoints de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, avec leurs décomposition minimales

$$A_i=\bigcup_{k=1}^{n} I_k^{(i)}. \tag{14.396}$$

Pour chaque $i\in\mathbb{N}$, le lemme 14.139 nous indique que

$$\ell(A_i)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\ell(I_k^{(i)}). \tag{14.397}$$

L'ensemble $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable et nous pouvons considérer la décomposition

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i=\bigcup_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}I_k^{(i)}. \tag{14.398}$$

Cette décomposition n'est pas spécialement minimale[50] mais elle est disjointe. Le lemme 14.139 donne

$$\ell\Big(\bigcup_i A_i\Big)=\sum_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\ell(I_k^{(i)})=\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\ell(I_k^{(i)})\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\ell(A_i). \tag{14.399}$$

La décomposition de la somme sur $\mathbb{N}^2$ en deux sommes sur $\mathbb{N}$ est faite en vertu de la proposition 10.144. □

14.8.1 Mesure et tribu de Lebesgue

ThoDESooEyDOe

Théorème 14.142.
Il existe une unique mesure λ sur $\big(\mathbb{R},\mathcal{B}or(\mathbb{R})\big)$ telle que

$$\lambda\big(]a,b[\big)=b-a \tag{14.400}$$

pour tout $a\leqslant b$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. L'existence provient du théorème de prolongement de Hahn 14.80 : la mesure ℓ sur $(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$ se prolonge à $\sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})=\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$.

Nous ne pouvons pas prouver l'unicité en invoquant la partie unicité de Hahn (c'est tentant parce que ℓ est σ-finie) parce que dans ce théorème nous ne fixons la valeur de λ que sur une toute petite partie de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. Nous allons cependant voir que cette petite partie suffit à garantir l'unicité.

La classe

$$\mathcal{D}=\{]a,b[\text{ tel que }-\infty<a\leqslant b<+\infty\} \tag{14.401}$$

est stable par intersection finie et engendre la tribu borélienne. En effet $\mathcal{D}$ contient toutes les boules et donc une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$ (proposition 7.188). Donc tous les ouverts de $\mathbb{R}$ sont dans $\sigma(\mathcal{D})$ et $\sigma(\mathcal{D})=\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$. Nous pouvons donc dire grâce au théorème 14.34 qu'il y a unicité de la mesure sur $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$ lorsque les valeurs sur $\mathcal{D}$ sont fixées. □

DefooYZSQooSOcyYN

Définition 14.143.
*La mesure de l'espace mesuré $\big(\mathbb{R},\mathcal{B}or(\mathbb{R}),\lambda\big)$ donné par le théorème 14.142 est la **mesure de Lebesgue** sur $\big(\mathbb{R},\mathcal{B}or(\mathbb{R})\big)$.*

*Nous définissons aussi la **tribu de Lebesgue** par la proposition 14.77 : $\big(\mathbb{R},\mathcal{L}eb(\mathbb{R}),\lambda\big)$ est l'espace mesuré complété de $\big(\mathbb{R},\mathcal{B}or(\mathbb{R}),\lambda\big)$.*

Remarque 14.144.
Il n'est pas évident que la tribu de Lebesgue soit plus grande que celle des boréliens, ni que la tribu des parties soit plus grande que celle de Lebesgue. Nous mentionnons cependant les faits suivants.

(1) Il existe des ensembles mesurables non-boréliens, et cela ne nécessite pas l'axiome du choix. Un argument classique de cardinalité est donné dans [489]. La construction la plus explicite que j'aie trouvée est dans [508], mais ça a l'air de demander des connaissances précises sur les ordinaux.

[50] A_1 pourrait contenir $[0,1]$ et A_2 contenir $]1,2]$.

(2) Vu que l'ensemble de Cantor C est mesurable de mesure nulle (proposition 14.163), tout sous-ensemble de Cantor est mesurable de mesure nulle parce que la tribu de Lebesgue est complète par définition. Le cardinal de $\mathcal{P}(C)$ est strictement supérieur à la puissance du continu, alors que le cardinal de l'ensemble des boréliens est au plus égal à la puissance du continu. Donc il existe des non boréliens contenus dans Cantor ; de tels non boréliens sont alors mesurables au sens de Lebesgue.

(3) Si nous admettons l'axiome du choix alors il existe des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue. Nous en verrons un dans l'exemple 14.157.

Exemple 14.145 (Un ouvert contenant tous les rationnels et de mesure arbitrairement petite)**.**
Il est possible de construire un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ et de mesure de Lebesgue plus petite que ϵ. Pour cela si (q_i) est une énumération des rationnels, il suffit de prendre

$$\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(q_n, \frac{\epsilon}{2^{n+1}}). \tag{14.402}$$

Cela est un ouvert comme union d'ouverts, ça contient tous les rationnels, et sa mesure se majore. En effet le théorème 14.142 donne $\lambda\big(B(q_n, \frac{\epsilon}{2^n})\big) = \frac{\epsilon}{2^n}$. Vu que ces boules ne sont à priori pas disjointes, le lemme 14.23 donne

$$\lambda(\mathcal{O}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \tag{14.403}$$

par (10.471) avec $q = \frac{1}{2}$.

Par complémentarité, nous pouvons construire un ensemble fermé de mesure non nulle et ne contenant aucun rationnel. Et même un fermé dans $[0, 1]$, de mesure $1 - \epsilon$ ne contenant aucun rationnel.

Cela peut surprendre parce qu'il existe des tonnes de suites d'irrationnels qui convergent vers des rationnels[51], et il semble difficile de créer un ensemble contenant beaucoup d'irrationnels tout en préservant la propriété de fermeture vis-à-vis des suites convergentes. △

Exemple 14.146 (Mesure finie, non borné)**.**
Il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui sont de mesure finie sans être bornés. Par exemple en posant

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(n, \frac{1}{2^n}). \tag{14.404}$$

La partie A n'est pas bornée parce que que $\mathbb{N} \subset A$. Mais en termes de mesure,

$$\lambda(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty \tag{14.405}$$

en vertu de la somme de la série géométrique, proposition 10.172. △

14.8.2 Propriétés de la mesure de Lebesgue

Proposition 14.147.
Tout ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est mesurable de mesure nulle.

Démonstration. Un point de $\mathbb{R}$ est un intervalle de mesure nulle. Si D est dénombrable, il est union disjointes et dénombrable de points. Le lemme 14.139 nous dit alors que sa mesure est $\lambda(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\{a_i\}) = 0$. □

Remarque 14.148.
Il existe cependant des ensembles non dénombrables et tout de même de mesure nulle. Par exemple l'ensemble de Cantor (voir la proposition 14.163).

PropooOACLooLMIUuY

Proposition 14.149.
La mesure de Lebesgue est invariante par translation, c'est-à-dire que si A est mesurable alors $\lambda(A) = \lambda(A + \alpha)$ pour tout réel α.

Démonstration. Nous commençons par les intervalles ouverts :

$$\lambda\big(]a, b[+ \alpha\big) = \lambda\big(]a + \alpha, b + \alpha[\big) = (b + \alpha) - (a + \alpha) = b - a = \lambda\big(]a, b[\big). \tag{14.406}$$

[51] Si $q \in \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors la suite $(q + r/10^k)_k$ est une suite d'irrationnels convergente vers le rationnel q.

D'après ce qui est dit dans l'exemple 14.36, la mesure de Lebesgue sur les boréliens est invariante par translation.

Si A est mesurable alors il existe un borélien B et un ensemble négligeable N tels que $A = B \cup N$ par la caractérisation 14.132b de la complétion. Alors $A + \alpha = B + \alpha \cup N + \alpha$ et $N + \alpha$ est encore un ensemble négligeable. Donc $\lambda(A + \alpha) = \alpha(B + \alpha) = \lambda(B)$. □

La mesure ℓ définie sur l'algèbre de parties $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ (voir proposition 14.141). La proposition 14.17 nous donne donc une mesure extérieure par

EqJGXoogdKqb
$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_n \ell(A_n); A_n \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}, X \subset \bigcup_n A_n\}. \tag{14.407}$$

La proposition suivante montre que cette mesure extérieure peut être exprimée seulement avec des intervalles ouverts.

PropTNOooDcfwn

Proposition 14.150.
Nous avons

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_{n\geqslant 1} \ell(I_n); I_n \text{ sont des intervalles ouverts et } X \subset \bigcup_n I_n\}. \tag{14.408}$$

Démonstration. Nous savons que dans la définition (14.407), chacun des A_n est une réunion disjointe d'intervalles (pas spécialement ouverts) deux à deux disjoints ; donc

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_n \ell(I_n); I_n \in \mathcal{S}, X \subset \bigcup_n I_n\}. \tag{14.409}$$

Soit $\epsilon > 0$. Si $A \subset \bigcup_n I_n$, pour chaque $n \geqslant 1$ nous considérons un intervalle ouvert J_n tel que $I_n \subset J_n$ et $\ell(I_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \leqslant \ell(J_n)$. Faisant cela pour chacun des découpages de X en intervalles nous trouvons

$$\lambda^*(X) \leqslant \inf\{\sum_n \ell(J_n) \ J_n \text{ est ouvert et } X \subset \bigcup_n J_n\} + \epsilon. \tag{14.410}$$

Étant donné que ϵ est arbitraire nous avons l'égalité. □

PropMXIoojpKvd

Proposition 14.151 ([491])**.**
Si $X \subset \mathbb{R}$ est tel que $\lambda^*(X) < \infty$ alors

ItemGJUoozrDILi

(1) Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ouvert Ω_ϵ tel que

$$\begin{cases} X \subset \Omega_\epsilon & \text{(14.411a)} \\ \lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \lambda^*(X) + \epsilon. & \text{(14.411b)} \end{cases}$$

ItemGJUoozrDILii

(2) Il existe une intersection dénombrable d'ouverts G telle que

$$\begin{cases} X \subset G & \text{(14.412a)} \\ \lambda(G) = \lambda^*(X). & \text{(14.412b)} \end{cases}$$

Démonstration. Pour (1), la proposition 14.150 nous a déjà dit que

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_n \ell(I_n) \ I_n \text{ est un intervalle ouvert}, X \subset \bigcup_n I_n\}, \tag{14.413}$$

donc si $\epsilon > 0$, il existe des intervalles ouverts I_n tels que

$$\begin{cases} X \subset \bigcup_n I_n & \text{(14.414a)} \\ \sum_n \ell(I_n) \leqslant \lambda^*(X) + \epsilon. & \text{(14.414b)} \end{cases}$$

Si nous posons $\Omega_\epsilon = \bigcup_n I_n$, alors nous avons bien

$$\begin{cases} X \subset \Omega_\epsilon & \text{(14.415a)} \\ \lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \sum_n \ell(I_n) \leqslant \lambda^*(X) + \epsilon. & \text{(14.415b)} \end{cases}$$

En ce qui concerne (2), pour chaque $k \geqslant 1$ nous considérons l'ensemble $\Omega_{1/k}$ obtenu comme précédemment avec $\epsilon = 1/k$ et nous posons $G = \bigcap_{k\geqslant 1} \Omega_{1/k}$. Cela est une intersection dénombrable d'ouverts vérifiant $X \subset G$ (parce que $X \subset \Omega_{1/k}$ pour tout k) et donc $\lambda^*(X) \leqslant \lambda^*(G) = \lambda(G)$. De plus pour tout k nous avons

$$\lambda(G) \leqslant (\Omega_{1/k}) \leqslant \lambda^*(X) + \frac{1}{k} \tag{14.416}$$

pour tout k. En faisant $k \to \infty$ nous avons

$$\lambda(G) \leqslant \lambda^*(X). \tag{14.417}$$

Au final

$$\lambda(G) \leqslant \lambda^*(X) \leqslant \lambda(G), \tag{14.418}$$

d'où l'égalité. □

Corolaire 14.152.
Une partie $N \subset \mathbb{R}$ est négligeable[52] *si et seulement si $\lambda^*(N) = 0$.*

Démonstration. Nous savons que si N est négligeable il existe un borélien Y tel que $N \subset Y$ avec $\lambda(Y) = 0$. Par conséquent[53]

$$\lambda^*(N) \leqslant \lambda^*(Y) = \lambda(Y) = 0. \tag{14.419}$$

Pour l'implication inverse nous supposons que $\lambda^*(N) = 0$ et nous prenons l'ensemble G défini par la proposition 14.151(2) : c'est un borélien contenant N et tel que $\lambda(G) = \lambda^*(N) = 0$. L'ensemble N est donc négligeable. □

ThoHFXooONFRN

Théorème 14.153 (Régularité extérieure de la mesure de Lebesgue)**.**
Pour tout mesurable $A \subset \mathbb{R}$ nous avons

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(\Omega); \Omega \text{ ouvert contenant } A\}. \tag{14.420}$$

Démonstration. Nous commençons par le cas où B est un borélien.

(1) **Si B borélien, $\lambda(B) < \infty$**

Soit $\epsilon > 0$; par la proposition 14.151(1) il existe un ouvert Ω_ϵ contenant B tel que $\lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \lambda^*(B) + \epsilon$. Vu qu'ici B est borélien, $\lambda^*(B) = \lambda(B)$ et nous concluons que pour tout ϵ il existe un ouvert Ω_ϵ tel que

$$\begin{cases} B \subset \Omega_\epsilon & \text{(14.421a)} \\ \lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \lambda(B) + \epsilon, & \text{(14.421b)} \end{cases}$$

et donc

$$\lambda(B) = \inf\{\lambda(\Omega);\ \Omega \text{ ouvert contenant } B\ \}. \tag{14.422}$$

(2) **Si B borélien, $\lambda(B) = +\infty$**

Dans ce cas l'infimum est pris uniquement sur des ouverts Ω tels que $\lambda(\Omega) = \infty$.

(3) **Si A est mesurable non borélien**

Nous passons maintenant au cas où A est mesurable sans être borélien. Il s'écrit donc $A = B \cup N$ avec B borélien et N négligeable par la proposition 14.69, et par définition $\lambda(A) = \lambda(B)$. Si Y est un borélien tel que $N \subset Y$ et $\lambda(Y) = 0$ alors

$$\begin{aligned}
\lambda(A) = \lambda(B) &= \inf\{\lambda(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ ouvert}, B \subset \Omega\} && \text{(14.423a)} \\
&\leqslant \inf\{\lambda(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ ouvert}, B \cup N \subset \Omega\} && \text{(14.423b)} \\
&\leqslant \inf_{\Omega', Y'}\{\lambda(\Omega' \cup Y') \text{ tel que } \Omega', Y' \text{ ouverts}, B \subset \Omega', Y \subset Y'\} && \text{(14.423c)} \\
&\leqslant \inf_{\Omega', Y'}\{\lambda(\Omega') + \lambda(Y') \text{ tel que } \Omega', Y' \text{ ouverts}, B \subset \Omega', Y \subset Y'\} && \text{(14.423d)} \\
&\leqslant \inf_{\Omega'}\{\lambda(\Omega') \text{ tel que } \Omega' \text{ ouvert}, B \subset \Omega\} && \text{(14.423e)} \\
&= \lambda(B). && \text{(14.423f)}
\end{aligned}$$

subeqMTHoopkSKOi subeqMTHoopkSKOii subeqMTHoopkSKOiii subeqMTHoopkSKOiv subeqMTHoopkSKOv

Justifications :

[52] Définition 14.66.
[53] Au péril d'être lourd nous rappelons que λ^* est défini sur toutes les parties de $\mathbb{R}$.

- (14.423a) Le cas borélien déjà fait.
- (14.423b) Les ouverts Ω tels que $B\cup N\subset\Omega$ vérifient a fortiori $B\subset\Omega$; nous avons donc agrandit l'ensemble sur lequel l'infimum est pris.
- (14.423c) Parmi les ouverts Ω qui recouvrent $B\cup N$, il y a ceux de la forme $\Omega'\cup Y'$ où Ω' recouvre B et Y' est un ouvert contenant Y. Donc nous avons rétréci l'ensemble sur lequel l'infimum est pris et par conséquent agrandit l'infimum.
- (14.423d) Mesure d'une union majorée par la somme des mesures.
- (14.423e) Vu que Y est borélien, $\lambda(Y)=\inf_{Y'\text{ ouvert}}\{\lambda(Y')\text{ tel que }Y\subset Y'\}=0$. Donc pour tout Ω' et tout $\epsilon>0$, nous pouvons trouver un Y' vérifiant les conditions tel que $\lambda(\Omega')+\lambda(Y')\leqslant\lambda(\Omega')+\epsilon$.

Toutes les inégalités sont des égalités en en particulier (14.423b) donne

$$\lambda(A)=\inf\{\lambda(\Omega)\text{ tel que }\ \Omega\text{ ouvert}, B\cup N\subset\Omega\},\tag{14.424}$$

ce qu'il fallait.

□

PropEZNoofLkVb

Proposition 14.154 ([491]).
Si A est mesurable dans $\mathbb{R}$ et si $\epsilon>0$ alors il existe un ouvert Ω_ϵ et un fermé F_ϵ tels que

subeqHNEooaNqDu

$$\begin{cases} F_\epsilon\subset A\subset\Omega_\epsilon & (14.425a)\\ \lambda(\Omega_\epsilon\setminus F_\epsilon)\leqslant\epsilon. & (14.425b)\end{cases}$$

Démonstration. Nous commençons par le cas où A est un borélien, que nous noterons B.

(1) **Première étape**

Montrons qu'il existe un ouvert U_ϵ tel que

$$\begin{cases} B\subset U_\epsilon & (14.426a)\\ \lambda(U_\epsilon\setminus B)\leqslant\frac{\epsilon}{2}. & (14.426b)\end{cases}$$

Si $\lambda(B)<\infty$ alors le théorème 14.153 nous donne un ouvert U_ϵ tel que $B\subset U_\epsilon$ et $\lambda(U_\epsilon)\leqslant\lambda(B)+\frac{\epsilon}{2}$. Nous avons alors

$$\lambda(\Omega_\epsilon\setminus B)=\lambda(\Omega_\epsilon)-\lambda(B)\leqslant\frac{\epsilon}{2}.\tag{14.427}$$

Si par contre $\lambda(B)=\infty$, nous posons $B_n=B\cap[-n,n]$ et $\epsilon_n=\epsilon/2^{n+1}$. Pour chaque n nous avons un ouvert Ω_n tel que

$$\begin{cases} B_n\subset\Omega_n & (14.428a)\\ \lambda(\Omega_n\setminus B_n)\leqslant\frac{\epsilon}{2^{n+1}} & (14.428b)\end{cases}$$

Par conséquent en posant $\Omega=\bigcup_{n\geqslant1}\Omega_n$ nous avons[54]

$$\begin{cases} B\subset\Omega & (14.429a)\\ \lambda(\Omega\setminus B)\leqslant\lambda\big(\bigcup_n(\Omega_n\setminus B_n)\big)\leqslant\sum_{n\geqslant1}\lambda(\Omega_n\setminus B_n)=\frac{\epsilon}{2}. & (14.429b)\end{cases}$$

La première étape est terminée.

(2) **Deuxième étape**

Nous prouvons à présent qu'il existe un ouvert Ω_ϵ et un fermé F_ϵ tels que

$$\begin{cases} F_\epsilon\subset B\subset\Omega_\epsilon & (14.430a)\\ \lambda(\Omega_\epsilon\setminus B)\leqslant\frac{\epsilon}{2} & (14.430b)\\ \lambda(B\setminus F_\epsilon)\leqslant\frac{\epsilon}{2}. & (14.430c)\end{cases}$$

[54] Nous utilisons la petite relation ensembliste $\big(\bigcup_n A_n\big)\setminus\big(\bigcup_n B_n\big)\subset\bigcup_n(A_n\setminus B_n)$.

L'ouvert Ω_ϵ, nous l'avons déjà de l'étape précédente. Pour le fermé, nous appliquons la première étape au borélien B^c ; ce qui nous trouvons est un ouvert G_ϵ tel que

$$\begin{cases} B^c \subset G_\epsilon & (14.431a)\\ \lambda(G_\epsilon \setminus B^c) \leqslant \frac{\epsilon}{2}. & (14.431b)\end{cases}$$

En posant $F_\epsilon = G_\epsilon^c$ nous avons un fermé tel que $F_\epsilon \subset B$ et

$$\lambda(B \setminus F_\epsilon) = \lambda(F_\epsilon^c \setminus B^c) = \lambda(G_\epsilon \setminus B^c) \leqslant \frac{\epsilon}{2}. \tag{14.432}$$

(3) **Dernière étape**

Les ensembles F_ϵ et Ω_ϵ trouvés à la deuxième étape donnent bien les relations (14.425). En effet $\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon = (\Omega_\epsilon \setminus B) \cup (B \setminus F_\epsilon)$, donc

$$\lambda(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \lambda(\Omega_\epsilon \setminus B) + \lambda(B \setminus F_\epsilon) = \epsilon. \tag{14.433}$$

Nous passons au cas où $A = B \cup N$ est mesurable. Nous commençons par prendre les Ω_ϵ et F_ϵ qui correspondent à B :

$$\begin{cases} F_\epsilon \subset B \subset \Omega_\epsilon & (14.434a)\\ \lambda(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon. & (14.434b)\end{cases}$$

Soit Y un borélien tel que $N \subset Y$ et $\lambda(Y) = 0$ puis un ouvert Y' tel que $\lambda(Y') \leqslant \epsilon$ et $Y \subset Y'$. L'existence d'un tel Y' est assurée par la proposition 14.153 appliquée à Y. Nous vérifions que les ensembles F_ϵ et $\Omega_\epsilon \cup Y'$ fonctionnent. En effet $\Omega_\epsilon \cup Y' \setminus F_\epsilon \subset (\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \cup Y'$, donc

$$\begin{cases} F_\epsilon \subset B \cup N \subset \Omega_\epsilon \cup Y' & (14.435a)\\ \lambda\big((\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon)\big) \leqslant \lambda(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) + \lambda(Y') \leqslant 2\epsilon. & (14.435b)\end{cases}$$

Donc en réalité il faut choisir $\Omega_{\epsilon/2}$, $F_{\epsilon/2}$ et $\lambda(Y') \leqslant \epsilon/2$. □

THOooJNMCooPMvCDq

Théorème 14.155 (Régularité intérieure de la mesure de Lebesgue)**.**
Si A est mesurable dans $\mathbb{R}$ alors

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K); K \text{ compact contenu dans } A\}. \tag{14.436}$$

Démonstration. Par la proposition 14.154 nous avons

$$\lambda(A) = \sup_{F \text{ fermé dans } A} \lambda(F). \tag{14.437}$$

EqTPEooUHThH

Pour un tel F nous posons $K_n = F \cap [-n, n]$ qui est compact[55] et contenu dans B. De plus le lemme 14.24(2) nous dit que

$$\lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) \tag{14.438}$$

Donc tous les $\lambda(F)$ peuvent être arbitrairement approchés par un $\lambda(K)$ avec K compact dans A, et le supremum (14.437) n'est pas affecté en nous restreignant à prendre des compacts contenus dans B :

$$\lambda(A) = \sup_{F \text{ fermé dans } A} \lambda(F) = \sup_{K \text{ compact dans } A} \lambda(K). \tag{14.439}$$

□

14.8.3 Fonctions mesurables

Lemme 14.156.
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\lambda(f \neq 0) > 0$. Alors il existe une partie mesurable M et $m > 0$ tels que $\lambda(M) > 0$ et $f(x) > m$ pour tout $x \in M$.

[55] parce que fermé et borné, théorème de Borel-Lebesgue 9.24.

Démonstration. Nous notons

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) > 0\}, \tag{14.440}$$

et nous supposons que $\lambda(D) > 0$ pour fixer les idées (si ce n'est pas le cas, nous prenons pour D la partie où f est strictement négative).

Nous posons

$$A_1 = [1, \infty[\tag{14.441a}$$

$$A_n = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}[. \tag{14.441b}$$

Ces parties A_n sont disjointes ; donc les parties

$$D_n = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \in A_n\} \tag{14.442}$$

sont également disjointes. Vu que $\bigcup_n A_n =]0, \infty[$, nous avons $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Vu que

$$\lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(D_n) > 0, \tag{14.443}$$

il existe au moins un N tel que $\lambda(D_N) > 0$. Pour $x \in D_N$ nous avons

$$f(x) \in A_N = [\frac{1}{N}, \frac{1}{N-1}[. \tag{14.444}$$

Donc pour $x \in D_N$ nous avons $f(x) > \frac{1}{N}$. □

14.8.4 Ensemble de Vitali (non mesurable)

EXooCZCFooRPgKjj

Exemple 14.157 (Un ensemble non mesurable au sens de Lebesgue[509])**.**
Nous considérons l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$; chaque classe intersecte l'intervalle $[0, 1]$. Grâce à l'axiome du choix (voir 1.14) nous pouvons construire un ensemble V contenant un représentant dans $[0, 1]$ de chaque classe. Un tel ensemble est un **ensemble de Vitali**. Nous allons prouver que V n'est pas mesurable.

Supposons que V soit mesurable. Alors tous les ensembles de la forme $V + q$ ($q \in \mathbb{Q}$) sont mesurables et ont même mesure par la proposition 14.149. Nous posons

$$A = \bigcup_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ -1\leqslant q\leqslant 1}} (V + q) \subset [-1, 2]. \tag{14.445}$$

Cela est une union disjointe d'ensembles mesurables. Donc

$$\lambda(A) = \sum_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ -1\leqslant q\leqslant 1}} \lambda(V + q). \tag{14.446}$$

Vu que $A \subset [-1, 2]$ nous avons $\lambda(A) \leqslant 3$ et donc tous les termes de la somme doivent être nuls. Nous avons donc $\lambda(A) = 0$.

Prouvons toutefois que $[0, 1] \subset A$, ce qui serait une contradiction. Soit $x \in [0, 1]$; il est dans une des classes de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ et donc il existe $v \in V$ tel que $x - v \in \mathbb{Q}$. De plus $x, v \in [0, 1]$, donc

$$-1 \leqslant x - v \leqslant 1. \tag{14.447}$$

Cela fait que $x \in V + (x - v) \subset A$. Nous avons donc $x \in A$ et donc $[0, 1] \subset A$. En conséquence de quoi nous aurions $\lambda(A) \geqslant 1$. △

14.8.5 Ensemble de Cantor

Nous considérons la fonction donnant l'écriture décimale des nombres définie en (10.495).

DefIYDooVIDJs

Définition 14.158 (Ensemble de Cantor)**.**
Soit $K_0 = [0, 1[$ et les ensembles K_n définis par la récurrence

$$K_{n+1} = \big(\frac{1}{3}K_n\big) \cup \big(\frac{1}{3}(K_n + 2)\big). \tag{14.448}$$

L'ensemble

$$K = \bigcap_{n\geqslant 0} K_n \tag{14.449}$$

*est l'**ensemble triadique de Cantor**.*

Les principales propriétés de l'ensemble de Cantor sont qu'il est non dénombrable (proposition 14.162) et borélien de mesure nulle (proposition 14.163).

14.159.
L'idée de base pour prouver que l'ensemble K est non dénombrable est que ses éléments sont les nombres qui s'écrivent en base 3 sans utiliser le chiffre 1. En prenant un nombre sans 1 écrit en base 3, en changeant tous les 2 en 1 et en lisant le résultat en base 2, nous obtenons tous les nombres possibles en base 2 et donc une quantité non dénombrable. L'idée est donc simple et astucieuse. La mise en musique est un peu plus délicate parce qu'il faut faire attention aux queues de suites ; c'est pour cela que nous avons construit l'ensemble de Cantor en partant de $[0,1[$ et non de $[0,1]$.

Le lemme suivant dit précisément ce que nous entendons en disant que les éléments de l'ensemble de Cantor sont les nombres qui s'écrivent en base 3 sans utiliser le chiffre 1. Nous rappelons que $\mathbb{D}_3$ est l'ensemble des suites constituées de 0, 1 et 2, et qui ne se terminent pas par une suite infinie de 2, voir 10.179 pour une définition précise.

LemAZGoosKzEm

Lemme 14.160 ([1])**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{D}_3$ (définition 10.179) ; nous avons $\varphi_3(x) \in K_n$ si et seulement si $x_1, \dots, x_n \in \{0,2\}$.

Démonstration. Nous procédons par récurrence en commençant avec $n = 1$. Si $x_1 = 1$ alors

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[. \tag{14.450}$$

Notons que $\varphi_3(x) = \frac{2}{3}$ est impossible parce que ça demanderait une queue de suite de 2. Par conséquent $\varphi_3(x) = [0,1[\backslash[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[= K_1$.

Nous passons à la récurrence.

(1) **Sens direct**

Nous supposons que $x_1, \dots, x_{n+1} \in \{0,2\}$ et nous montrons que $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$. Nous considérons deux cas suivant que x_1 vaut 0 ou 1. Pour comprendre pourquoi nous divisons les cas suivant la valeur de x_1 et non de x_n, faire un dessin de comment K_n se transforme en K_{n+1} et remarquer dans K_2, les deux premiers segments ne sont pas une division du premier segment de K_1, mais bien une copie des *deux* segments de K_1.

Écrivons encore $\varphi_3(x)$:

$$\varphi_3(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k}{3^k} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}. \tag{14.451}$$

(1a) **Si $x_1 = 0$** Alors nous avons

$$3\varphi_3(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{3^k} = \varphi_3(x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \tag{14.452}$$

Vu que par hypothèse $x_2, \dots, x_{n+1}$ sont dans $\{0,2\}$ nous avons $3\varphi_3(x) \in K_n$ par hypothèse de récurrence. Cela implique que $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$.

(1b) **Si $x_1 = 2$** Alors

$$\varphi_3(x) = \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}, \tag{14.453}$$

et

$$3\varphi_3(x) - 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{3^k} = \varphi(x_2, \dots, x_{n+1}, \dots), \tag{14.454}$$

et donc là nous avons $3\varphi_3(x) - 2 \in K_n$, ce qui implique encore $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$.

(2) **Sens réciproque**

Nous devons maintenant prouver que $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$ implique $x_1, \dots, x_{n+1} \in \{0,2\}$. Par le même calcul que précédemment nous avons soit

$$3\varphi_3(x) = \varphi_3(x_2, \dots, x_{n+1}, \dots), \tag{14.455}$$

si $x_1 = 0$, soit

$$3\varphi_3(x) - 2 = \varphi_3(x_2, \dots, x_{n+1}, \dots), \tag{14.456}$$

si $x_1 = 2$. Dans les deux cas, si $x_l = 1$ pour un certain $2 \leqslant l \leqslant n+1$, alors l'hypothèse de récurrence donne que ces éléments ne sont pas dans K_n et donc $\varphi_3(x)$ pas dans K_{n+1}.

□
CorSEDooJmeXt

Corolaire 14.161 ([1]).
En posant $\mathbb{E} = \{x \in \mathbb{D}_3$ tel que $x_i \neq 1 \forall i\}$ nous avons $K = \varphi_3(\mathbb{E})$. Et plus précisément, $\varphi_3 : \mathbb{E} \to K$ est une bijection.

Démonstration. Nous divisons la preuve en trois étapes.

(1) **Image contenue dans K** Si $x \in \mathbb{E}$ et $n \in \mathbb{N}$ nous avons $x_1, \dots, x_n \in \{0, 2\}$ et donc $\varphi_3(x) \in K_n$ par la proposition 14.160. Donc

$$\varphi_3(x) \in \bigcap_{n \geqslant 1} K_n = K. \tag{14.457}$$

(2) **Injective** L'application $\varphi_3 : \mathbb{E} \to K$ est injective parce qu'elle est déjà injective depuis $\mathbb{D}_3$.

(3) **Surjective** Soit $p \in K \subset [0, 1[$. Vu que $\varphi_3 : \mathbb{D}_3 \to [0, 1[$ est surjective (théorème 10.182), il existe $x \in \mathbb{D}_3$ tel que $\varphi_3(x) = p$. Pour tout n nous avons $\varphi_3(x) \in K_n$ et donc $x_1, \dots, x_n \in \{0, 2\}$ et donc au final $x \in \mathbb{E}$.

□
PropTPPooDySbm

Proposition 14.162 ([1]).
L'ensemble de Cantor est non dénombrable.

Démonstration. Nous avons prouvé à la proposition 10.183 que l'ensemble $\mathbb{D}_2$ n'était pas dénombrable. Nous allons à présent prouver que l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{D}_2 &\to K \\ c &\mapsto \varphi_3(c \text{ en remplaçant les 1 par des 2}) \end{aligned} \tag{14.458}$$

est une bijection. Le fait que ψ soit injective est une conséquence du fait que ce soit la composition de deux applications injectives (le remplacement et φ_3). Il faut par contre montrer que l'image est égale à K, en notant qu'il n'est pas évident à priori que l'image soit contenue dans K.

L'opération qui consiste à remplacer les 1 par des 2 est une bijection $\mathbb{D}_2 \to \mathbb{E}$. Le corolaire 14.161 nous dit aussi que $\varphi_3 : \mathbb{E} \to K$ est une bijection. En tant que composée de bijections, ψ est une bijection.

Étant en bijection avec $\mathbb{D}_2$ qui n'est pas dénombrable par la proposition 10.183, l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable. □
PropBEWooXZdKN

Proposition 14.163 (Ensemble de Cantor).
L'ensemble de Cantor[56] est borélien, non dénombrable et de mesure nulle.

Démonstration. Nous reprenons les notations de la définition 14.158. Le fait que l'ensemble de Cantor soit non dénombrable a été prouvé dans la proposition 14.162.

L'ensemble de Cantor étant une intersection dénombrable de boréliens, il est borélien par le lemme 14.3. Vu que $K_n \subset [0, 1[$ nous avons $\frac{1}{3}K_n \leqslant \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}(K_n + 2) \geqslant \frac{2}{3}$, donc K_n est une union disjointe de 2^n intervalles de mesure $2/3^n$. Nous avons donc

$$\lambda(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n. \tag{14.459}$$

L'ensemble de Cantor étant contenu dans chacun des K_n, sa mesure est plus petite que la mesure de chacun des K_n (lemme 14.23) et donc $\lambda(K) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout n ; ergo $\lambda(K) = 0$. □

14.8.6 Mesure positive sans intervalle

Vu que la mesure de Lebesgue est basée sur la mesure des intervalles et quelques extensions, nous sommes en droit de croire qu'une partie de mesure strictement positive de $\mathbb{R}$ doit toujours contenir un intervalle, éventuellement à partie de mesure nulle près. Eh bien non.

[56] Définition 14.158

EXooVZVIooXZvDaE

Exemple 14.164 ([510]).
Soient une énumération (q_i) de $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ et une suite (r_i) telle que $\sum_{i=0}^{\infty} r_i < \frac{1}{2}$. Quitte à prendre r_i plus petit, supposons de plus que $B(q_i, r_i) \subset [0,1]$.

Nous posons $J_n = B(q_n, r_n/2)$, $J = \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$ et

$$B = [0,1] \setminus J. \tag{14.460}$$

Les parties J_i ne sont pas disjointes, donc, en notant λ la mesure de Lebesgue,

$$0 < \lambda(J) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(J_i) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{14.461}$$

Mais, par définition, l'union $[0,1] = B \cup J$ est disjointe, donc

$$1 = \lambda\big([0,1]\big) = \lambda(J) + \lambda(B). \tag{14.462}$$

Nous en déduisons que

$$\frac{1}{2} \leqslant \lambda(B) \leqslant 1. \tag{14.463}$$

Je plaide que cette partie B ne contient non seulement aucun intervalle, mais qu'il est impossible de le compléter par une partie de mesure nulle pour obtenir un intervalle.

Soit un intervalle I dans $[0,1]$. Il existe $q_i \in I$ et donc[57]

$$J_i \subset B \setminus I. \tag{14.464}$$

Donc il n'existe pas de parties de mesure nulle qui, ajoutée à B, contiendrait I. △

Vous voulez un truc dingue à propos de la partie J de l'exemple 14.164 ? Le théorème 14.155 nous dit qu'il existe dans J des compacts de mesure arbitrairement proches de $\lambda(J)$. Il existe donc des compacts non seulement de mesure strictement positive mais même de mesure assez grande, tout en étant infiniment découpés.

14.9 Intégrale par rapport à une mesure

14.165.
Nous n'en avons pas encore terminé avec la théorie de la mesure, mais nous devons quand même définir les intégrales et voir quelques propriétés avant de continuer avec la mesure parce que la définition de la mesure sur un espace mesurable produit[58] passe par une intégrale.

NORMooFZEDooIxSgLe

14.166.
En théorie de l'intégration, la convention est la suivante : pour une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$, nous considérons sur X la tribu des ensembles mesurables au sens de Lebesgue sur X, *tout en gardant celle des boréliens sur l'ensemble d'arrivée*. C'est-à-dire qu'en théorie de l'intégration, c'est

$$f\colon \big(X, \mathcal{L}\mathrm{eb}(X)\big) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R})\big). \tag{14.465}$$

En particulier, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sera mesurable si pour tout borélien A de $\mathbb{R}^m$ l'ensemble $f^{-1}(A)$ est Lebesgue-mesurable dans $\mathbb{R}^n$.

Étant donné qu'il est franchement difficile de créer des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue, il est franchement difficile de créer des fonctions non mesurables à valeurs réelles. L'hypothèse de mesurabilité est donc toujours satisfaite dans les cas pratiques.

Voir aussi le point 14.120, et les résultats qui suivent.

14.9.1 Définition pour les fonctions à valeurs positives

Voir le thème 30.

Une mesure μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ permet de définir une fonctionnelle linéaire sur l'ensemble des fonctions mesurables $\Omega \to \mathbb{R}$. Cette fonctionnelle linéaire est l'intégrale que nous allons définir à présent.

[57] C'est ici que nous utilisons le fait que r_i est choisi pour que $B(q_i, r_i)$ ne déborde pas de $[0,1]$. Sinon il aurait fallu chipoter et prendre seulement une partie de la boule.

[58] Théorème 14.246.

DefTVOooleEst

Définition 14.167.
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré ainsi que $Y \in \mathcal{A}$. Notre but est de définir

$$\int_Y f d\mu \tag{14.466}$$

*que nous nommons **intégrales de** f sur Y pour la mesure μ.*

ITEMooQVEAooZhRtUG
(1) ***Fonction étagée*** *Si $f : \Omega \to [0, \infty[$ est une fonction étagée[59], et si sa forme canonique[60] est $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors nous définissons*

$$\int_Y f d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(Y \cap A_i). \tag{14.467}$$

EqooGAFMooZLziPs

ITEMooQGKEooZVhHHq
(2) ***Fonction mesurable à valeurs positives*** *Pour une fonction $\mathcal{A}$-mesurable $f : \Omega \to [0, \infty]$ nous définissons l'intégrale de f sur Y par*

$$\int_Y f d\mu = \sup \left\{ \int_Y \psi d\mu \text{ où } \psi \text{ est une fonction étagée finie telle que } 0 \leqslant \psi \leqslant f \right\}. \tag{14.468}$$

EqDefintYfdmu

CORooZPLOooXgbtDs

Corolaire 14.168 ([1]).
Si $f : Z \to [0, \infty]$ sur $Z \subset \Omega$ et si $\mu(Z) = 0$, alors

$$\int_Z f = 0. \tag{14.469}$$

Démonstration. Notons d'abord que si A est une partie mesurable de Z, alors $\mu(A) = 0$ par le lemme 14.19. Si f ne prend que des valeurs finies, tous les termes de (14.467) sont nuls.

Si une fonction prends des valeurs infinies, la partie (1) de la définition n'est pas applicable. La partie (2) demande alors de prendre un supremum sur des fonctions qui rentrent dans la partie (1).

Si ψ est une fonction étagée finie sur Z, alors $\int_Z \psi = 0$ parce que tous les termes de (14.467) sont nuls. □

Remarque 14.169 (Pourquoi se limiter aux fonctions positives)**.**
Toute fonction mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$ est intégrable (l'intégrale vaut éventuellement $+\infty$). Au moment où une fonction commence à prendre des valeurs positives et négatives, nous demandons à pouvoir intégrer séparément les parties positives et négatives. C'est pour cela que nous disons qu'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ est intégrable si $|f|$ l'est.

14.170.
Le nombre $\int_0^\infty f$ est défini directement par (14.468) complètement indépendamment d'une éventuelle limite $\lim_{x\to\infty} \int_0^x f$. Cette limite sera traitée dans le lemme 14.262.

NORMooXTGBooKDnAhZ

14.171.
Si la fonction n'est pas mesurable ? Alors nous n'avons pas défini son intégrale. Supposons la plus simple des fonctions non mesurables sur Ω : la fonction indicatrice d'une partie non mesurable :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.470}$$

où $A \subset \Omega$ n'est pas mesurable[61].

Nous supposons que l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est complet (définition 14.68). Vu que A n'est pas mesurable, il n'est pas contenu dans une partie négligeable (parce que l'espace est complet), et nous voulons que l'intégrale ne soit pas nulle ; sinon on se demande bien à quoi sert une intégrale.

Toute fonction étagée minorant f est forcément nulle en dehors de A. Dès que B est une partie mesurable de mesure non nulle dans A, le complémentaire de B dans A est encore non mesurable, et nous voulons encore que l'intégrale de f sur ce complémentaire soit non nulle.

Mais comme A n'est pas mesurable et que $\mathbb{1}_A$ n'est le supremum d'aucune suite de fonctions mesurables (lemme 14.100), bien que le supremum qui définirait l'intégrale de f existe (toute partie de $\mathbb{R}$ a un supremum), il est sans espoir que ce supremum ait un sens que l'on puisse interpréter en tant que mesure de f.

[59] Définition 14.112.
[60] Définition 14.113. C'est le fait d'utiliser la forme canonique qui nous épargne de devoir prouver que la formule (14.467) ne dépend pas de choix.
[61] Ça existe, par exemple 14.157.

LEMooHAUGooWITETb

Lemme 14.172.
L'intégrale d'une fonction positive nulle presque partout est nulle.

Démonstration. Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, et une fonction mesurable $f\colon \Omega \to [0,\infty]$. Nous posons

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\}. \tag{14.471}$$

L'hypothèse est que $\mu(\Omega_+) = 0$. Nous devons prouver que $\int_\Omega f d\mu = 0$. Vu que f est positive, nous utilisons la définition 14.467. Soit une fonction étagée positive ψ minorant f. Nous la décomposons en

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mathbb{1}_{A_k} \tag{14.472}$$

où les A_k sont mesurables et $\psi_k \in [0,\infty[$. Nous allons prouver que $\psi_i \mu(A_k) = 0$ pour tout k, en séparant trois cas.

(1) **Si $A_k \cap \Omega_+ = \varnothing$** Soit $x \in A_k$. Nous avons

$$0 = \psi(x) = \sum_k \psi_k \mathbb{1}_{A_k}(x) = \psi_k. \tag{14.473}$$

Donc $\psi_k = 0$.

(2) **Si $A_k \subset \Omega_+$** Alors, par le lemme 14.23, $\mu(A_k) \leqslant \mu(\Omega_+) = 0$ et donc $\psi_k \mu(A_k) = 0$.

(3) **Si $A_k \cap \Omega_+ \neq A_k$** Soit $x \in A_k \setminus \Omega_+$. Nous avons

$$\psi_k = \psi(x) \leqslant f(x) = 0, \tag{14.474}$$

et donc encore $\psi_k = 0$.

Nous avons donc prouvé que pour toute fonction étagée positive minorant f,

$$\int_\Omega \psi d\mu = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mu(A_k) = 0. \tag{14.475}$$

Le supremum est donc nul. □

14.9.2 Premières propriétés

14.173.
Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesurable, et si Y est un élément de $\mathcal{A}$, nous avons l'espace mesurable $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ donné par

- $\mathcal{A}_y = \{B \cap Y \text{ tel que } B \in \mathcal{A}\}$,
- $\mu_Y = \mu$.

Et là, nous arrivons à un problème de notations parce que $\int_Y f d\mu$ peut désigner l'intégrale de f sur Y dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ou l'intégrale de f sur Y dans $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$.

Heureusement, nous allons tout de suite montrer que ces deux choses sont identiques.

Lemme 14.174.
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi que $Y \in \mathcal{A}$. Nous considérons une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ qui est $\mathcal{A}$-mesurable et intégrable sur Y.

Alors, avec des notations que j'espère être claires,

(1) f est $\mathcal{A}_Y$-mesurable,

(2) f est $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$-intégrable,

(3) nous avons l'égalité

$$\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} f|_Y = \int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} f. \tag{14.476}$$

Démonstration. Nous considérons les deux ensembles suivants :

$$S_1 = \{\psi \text{ étagées sur } Y \text{ et majorées par } f|_Y\} \tag{14.477a}$$
$$S_2 = \{\psi \text{ étagées sur } \Omega \text{ et majorées par } f\}. \tag{14.477b}$$

Nous considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} s\colon S_1 &\to S_2 \\ s(\psi)(x) &= \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in Y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{14.478}$$

L'application s est une bijection.

Pour $\psi \in S_1$ nous avons

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mathbb{1}_{A_k}|_Y \tag{14.479}$$

avec $A_k \in \mathcal{A}_Y \subset \mathcal{A}$ et $\mathbb{1}_{A_k}|_Y \colon Y \to \{0,1\}$. Nous avons aussi

$$s(\psi) = \sum_{k} \psi_k \mathbb{1}_{A_k} \tag{14.480}$$

avec $\mathbb{1}_{A_k} \colon \Omega \to \{0,1\}$.

En ce qui concerne les intégrales de ces fonctions étagées, nous avons

$$\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} \psi = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mu_Y(A_k \cap Y) \tag{14.481a}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mu(A_k) \tag{14.481b}$$
$$= \int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} s(\psi). \tag{14.481c}$$

SUBEQooGWYGooQuucEo

Justifications. Pour passer à (14.481b) nous avons utilisé d'abord que $A_k \subset Y$ et ensuite que $\mu_Y(A_k) = \mu(A_k)$.

Nous sommes maintenant prêts à prouver l'égalité du lemme. Nous avons ceci :

$$\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} f|_Y = \sup\{\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} \psi \text{ tel que } \psi \in S_1\} \tag{14.482a}$$
$$= \sup\{\int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} s(\psi) \text{ tel que } \psi \in S_1\} \tag{14.482b}$$
$$= \sup\{\int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} \varphi \text{ tel que } \varphi \in S_2\} \tag{14.482c}$$
$$= \int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} f. \tag{14.482d}$$

□

LemooPJLNooVKrBhN

Lemme 14.175.
Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et si $B \in \mathcal{A}$ alors

$$\mu(B) = \int_B 1 d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_B. \tag{14.483}$$

Démonstration. La fonction caractéristique d'une partie mesurable est une fonction étagée dont la forme canonique est $\mathbb{1}_B = 1 \cdot \mathbb{1}_B + 0 \times \mathbb{1}_{B^c}$. Son intégrale est donc

$$\int \mathbb{1}_B d\mu = 1 \times \mu(B) + 0 \times \mu(B^c) = \mu(B) \tag{14.484}$$

parce que $0 \times \mu(B^c) = 0$, même si $\mu(B^c) = \infty$, comme nous l'avons convenu en 14.93. □

PROPooGTMVooPHcrRl

Proposition 14.176 ([1]).
Soient une fonction $f\colon (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}^+$ et une fonction g intégrable sur Ω telle que $f \leqslant g$. Alors f est intégrable.

Démonstration. Une fonction étagée qui minore f minore également g. Donc l'ensemble sur lequel il faut faire le supremum pour définir $\int_\Omega f$ est inclus dans celui pour $\int_\Omega g$. Le second supremum étant fini, le premier l'est également. □

LEMooSPOFooBxDEAV

Lemme 14.177.
Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ et $Y \in \mathcal{A}$. Nous avons :

$$\int_Y f d\mu = \int_\Omega f \mathbb{1}_Y d\mu. \tag{14.485}$$

EQooSBDKooPTDEcr

Démonstration. En plusieurs parties, selon la généralité.

(1) **Si f est étagée** Nous posons $f = \sum_{k=1}^n f_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec $f_k \in \mathbb{R}^+$. Dans ce cas,

$$f\mathbb{1}_Y = \sum_k f_k \mathbb{1}_{A_k \cap Y} \tag{14.486}$$

est encore une fonction étagée. Donc nous avons d'une part

$$\int_\Omega f\mathbb{1}_Y = \int_\Omega \sum_k f_k \mathbb{1}_{A_k \cap Y} = \sum_k f_k \mu(A_k \cap Y), \tag{14.487}$$

et d'autre part,

$$\int_Y f d\mu = \sum_k f_k \mu(Y \cap A_k), \tag{14.488}$$

(2) **Si f est à valeurs positives** Nous posons

$$S_1 = \{\psi \text{ étagées sur } \Omega \text{ tel que } 0 \leqslant \psi \leqslant f\mathbb{1}_Y\} \tag{14.489}$$

et

$$S_2 = \{\psi\mathbb{1}_Y \text{ tel que } \psi \text{ étagée avec } 0 \leqslant \psi \leqslant f\}. \tag{14.490}$$

Nous prouvons que $S_1 = S_2$.

Si $\psi \in S_1$, alors

$$0 \leqslant \psi \leqslant f\mathbb{1}_Y \leqslant f. \tag{14.491}$$

De plus comme $\psi = 0$ hors de Y nous avons $\psi = \psi\mathbb{1}_Y$.

Pour l'autre inclusion, soit $0 \leqslant \psi \leqslant f$ pour une fonction étagée ψ et montrons que $\psi\mathbb{1}_Y \in S_1$. L'application $\psi\mathbb{1}_Y$ est étagée sur Ω et vérifie

$$0 \leqslant \psi\mathbb{1}_Y \leqslant f\mathbb{1}_Y \tag{14.492}$$

parce que $\psi \leqslant f$.

(3) **L'égalité à prouver** Dans l'égalité 14.485 à prouver, le membre de droite est, d'après la définition 14.468,

$$\int_\Omega f\mathbb{1}_Y = \sup\{\int \psi \text{ tel que } \psi \in S_1\}. \tag{14.493}$$

Il nous reste donc à prouver que $\int_Y f$ se calcule de la même façon avec les éléments de S_2. D'abord nous copions la définition :

$$\int_Y f = \sup\{\int_Y \psi \text{ tel que } 0 \leqslant \psi \leqslant f\}. \tag{14.494}$$

Ensuite nous réfléchissons un peu. Si $0 \leqslant \psi \leqslant f$ avec $\psi = \sum_k \psi_k \mathbb{1}_{A_k}$, alors

$$\int_Y \psi = \sum_k \mu(A_k \cap Y)\psi_k = \int_Y \psi\mathbb{1}_Y = \int_\Omega \psi\mathbb{1}_Y. \tag{14.495}$$

La dernière égalité est la partie déjà faite, à propos des fonctions étagées. Nous avons donc bien

$$\int_Y f = \sup\{\int_Y s \text{ tel que } s \in S_2\}. \tag{14.496}$$

□

14.9.3 Propriétés plus avancées

14.9.3.1 Convergence monotone

Le théorème suivant est très utile parce que le théorème fondamental d'approximation 14.118 donne les fonctions étagées qu'il faut.

ThoRRDooFUvEAN

Théorème 14.178 (Théorème de la convergence monotone ou de Beppo-Levi[511])**.**
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. Alors la limite ponctuelle $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe, est mesurable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n d\mu, \tag{14.497}$$

EqFHqCmLV

cette intégrable valant éventuellement ∞.

Démonstration. La limite ponctuelle de la suite est la fonction à valeurs dans $[0, \infty]$ donnée par

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{14.498}$$

Ces limites existent parce que pour chaque x la suite $f_n(x)$ est une suite numérique croissante. Nous notons

$$I_0 = \int_\Omega f d\mu. \tag{14.499}$$

Nous posons par ailleurs

$$I_n = \int_\Omega f_n. \tag{14.500}$$

Cela est une suite numérique croissante qui a par conséquent une limite que nous notons $I = \lim_{n\to\infty} I_n$. Notre objectif est de montrer que $I = I_0$. D'abord par croissance de la suite, pour tous n nous avons $I_n \leqslant I_0$, par conséquent $I \leqslant I_0$.

Nous prouvons maintenant l'inégalité dans l'autre sens en nous servant de la définition (14.468). Soit une fonction étagée h telle que $h \leqslant f$, et une constante $0 < C < 1$. Nous considérons les ensembles

$$E_n = \{x \in \Omega \text{ tel que } f_n(x) \geqslant Ch(x)\}. \tag{14.501}$$

Ces ensembles vérifient les propriétés $E_n \subset E_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$. Pour chaque n nous avons les inégalités

$$\int_\Omega f_n \geqslant \int_{E_n} f_n \geqslant C \int_{E_n} h. \tag{14.502}$$

Si nous prenons la limite $n \to \infty$ dans ces inégalités,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \geqslant C \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} h = C \int_\Omega h. \tag{14.503}$$

Par conséquent $\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant C \int_\Omega h$. Mais étant donné que cette inégalité est valable pour tout C entre 0 et 1, nous pouvons l'écrire sans le C :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \geqslant \int_\Omega h. \tag{14.504}$$

EqzAKFaU

Par définition, l'intégrale de f est donné par le supremum des intégrales de h où h est une fonction simple dominée par f. En prenant le supremum sur h dans l'équation (14.504) nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \geqslant \int_\Omega f, \tag{14.505}$$

ce qu'il nous fallait. □

Remarque 14.179.
La proposition 14.118 ainsi que le lemme 14.116 montrent qu'une fonction mesurable peut-être écrite comme limite croissante de fonctions simples. Cela permet de démontrer des théorèmes en commençant par prouver sur les fonctions simples et en utilisant Beppo-Levi pour généraliser.

Remarque 14.180.
Une des raisons de demander la positivité des fonctions f_n est de n'avoir pas d'ambiguïté à parler d'intégrales qui valent ∞. Si par exemple nous prenons $\Omega = [0,1]$ et que nous considérons

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.506}$$

Ce sont des fonctions intégrables, mais la limite étant la fonction $1/x$, l'égalité (14.497) est une égalité entre deux intégrales valant ∞.

CorNKXwhdz

Corolaire 14.181 (Inversion de somme et intégrales)**.**
Si (u_n) est une suite de fonctions mesurables positives ou nulles, alors

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int u_i = \int \sum_{i=0}^{\infty} u_i. \tag{14.507}$$

Démonstration. Nous considérons la suite des sommes partielles de (u_n) : $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)$. Le théorème de la convergence monotone (théorème 14.178) implique que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{14.508}$$

Nous remplaçons maintenant f_n par sa valeur en termes des u_i et dans le membre de gauche nous permutons l'intégrale avec la somme finie :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \int u_i = \int \sum_{i=0}^{\infty} u_n, \tag{14.509}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

14.9.3.2 Lemme de Fatou

LemFatouUOQqyk

Lemme 14.182 (Lemme de Fatou)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n \colon \Omega \to [0,\infty]$ une suite de fonctions mesurables. Alors la fonction $f(x) = \liminf f_n(x)$ est mesurable et

$$\int_\Omega \liminf f_n d\mu \leqslant \liminf \int_\Omega f_n d\mu. \tag{14.510}$$

Démonstration. Nous posons

$$g_n(x) = \inf_{i\geqslant n} f_i(x). \tag{14.511}$$

Cela est une suite croissance de fonctions positives mesurables telles que, par définition,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf f_n(x). \tag{14.512}$$

Nous pouvons y appliquer le théorème de la convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n(x) = \int \liminf f_n(x). \tag{14.513}$$

Par ailleurs, pour chaque $i \geqslant n$ nous avons

$$\int g_n \leqslant \int f_i, \tag{14.514}$$

en passant à l'infimum nous avons

$$\int g_n \leqslant \inf_{i\geqslant n} \int f_i, \tag{14.515}$$

et en passant à la limite nous avons

$$\int \liminf f_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf_{i\geqslant n} \int f_i = \liminf_{i\to\infty} \inf f_i. \tag{14.516}$$

□

L'inégalité donnée dans ce lemme n'est en général pas une égalité, comme le montre l'exemple suivant :

$$f_i = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,1]} & \text{si } i \text{ est pair} \\ \mathbb{1}_{[1,2]} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases} \tag{14.517}$$

Nous avons évidemment $g_n(x) = 0$ tandis que $\int_{[0,2]} f_i = 1$ pour tout i.

ThoooCZCXooVvNcFD

Théorème 14.183 ([491]).
Soient f, g des fonctions étagées positives[62] *sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Alors si $\alpha \in [0, \infty]$ nous avons*

(1)

$$\int_\Omega (\alpha f) d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu. \tag{14.518}$$

ITEMooBLEVooDznQTY

(2)

$$\int_\Omega (f + g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu. \tag{14.519}$$

ITEMooOJRAooQkoQyD

(3) Si $a_k \in \mathbb{R}^+$ et si les f_k sont étagées positives,

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n a_k f_k \right) = \sum_{k=1}^n a_k \left(\int_\Omega f_k d\mu \right). \tag{14.520}$$

Démonstration. En ce qui concerne le produit par un nombre, tout repose sur le fait que

$$(\alpha f)^{-1}(\alpha a_i) = f^{-1}(a_i), \tag{14.521}$$

ce qui fait que si la représentation canonique de f est $f = \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors la représentation canonique de αf est $\alpha f = \sum_i (\alpha a_i) \mathbb{1}_{A_i}$. Donc

$$\int_\Omega \alpha f d\mu = \sum_i \alpha a_i \mu(A_i) = \alpha \sum_i a_i \mu(A_i) = \alpha \int_\Omega f d\mu. \tag{14.522}$$

Pour la somme c'est plus lourd. Soient les formes canoniques

$$f = \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i} \tag{14.523a}$$

$$g = \sum_j b_j \mathbb{1}_{B_j}. \tag{14.523b}$$

Vu que l'union des B_j est Ω nous avons l'union disjointe $A_i = \bigcup_j A_i \cap B_j$ et donc $\mu(A_i) = \sum_j \mu(A_i \cap B_j)$. Nous avons donc pour les intégrales :

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_i a_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) \tag{14.524a}$$

$$\int_\Omega g d\mu = \sum_k b_k \sum_l \mu(B_k \cap A_l). \tag{14.524b}$$

Pour la somme :

$$\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu = \sum_{k,l} (a_k + b_l) \mu(A_k \cap B_l). \tag{14.525}$$

Nous devons maintenant évaluer $\int_\Omega (f+g) d\mu$. Pour cela nous remarquons que si $c \in (f+g)(\Omega)$ (l'ensemble des valeurs atteintes pas $f + g$), alors nous notons

$$I_c = \{(k, l) \text{ tel que } a_k + b_l = c\} \tag{14.526}$$

et nous avons

$$\{f + g = c\} = \bigcup_{(k,l) \in I_c} (A_k \cap B_l), \tag{14.527}$$

[62] Pour le cas plus général, voir 14.193.

et comme cette union est disjointe, nous pouvons faire la somme des mesures :

$$\mu(f+g=c)=\sum_{(k,l)\in I_c}\mu(A_k\cap B_l). \tag{14.528}$$

Cela nous permet de faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+g)d\mu &= \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} c\mu(f+g=c) && (14.529a)\\ &= \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} c\sum_{(k,l)\in I_c}\mu(A_k\cap B_l) && (14.529b)\\ &= \sum_{c\in(f+g)(\Omega)}\sum_{(k,l)\in I_c}(a_k+b_l)\mu(A_k\cap B_l) && (14.529c)\end{aligned}$$

Dans cette double somme, tous les couples (k,l) sont tirés une et une seule fois parce qu'ils sont tous dans un et un seul des I_c, donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+g)d\mu &= \sum_{c\in(f+g)(\Omega)}\sum_{(k,l)\in I_c}(a_k+b_l)\mu(A_k\cap B_l) && (14.530a)\\ &= \sum_{(k,l)}(a_k+b_l)\mu(A_k\cap B_l) && (14.530b)\\ &= \int_\Omega f d\mu+\int_\Omega g d\mu. && (14.530c)\end{aligned}$$

□

Remarque 14.184.
Si $f=\sum_k a_k\mathbb{1}_{A_k}$ n'est pas une décomposition canonique, il n'en reste pas moins que chacun des $\mathbb{1}_{A_k}$ est la forme canonique de lui-même. Donc le théorème 14.183 s'applique et nous avons quand même

$$\int_\Omega f d\mu=\sum_k a_k\mu(A_k). \tag{14.531}$$

PROPooOVDEooDJvOau

Proposition 14.185.
Soient deux fonctions mesurables $f,g\colon\Omega\to[0,+\infty]$. Alors

$$\int_\Omega (f+g)=\int_\Omega f+\int_\Omega g. \tag{14.532}$$

Démonstration. Soient des suites $f_n\to f$ et $g_n\to g$ fournies par le théorème fondamental d'approximation 14.118. Par le théorème de la convergence monotone 14.178 nous avons d'une part

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (f_n+g_n)=\int_\Omega (f+g), \tag{14.533}$$

et par le théorème 14.183 nous avons d'autre part

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (f_n+g_n)=\lim_{n\to\infty}\Big(\int f_n+\int g_n\Big)=\int f+\int g \tag{14.534}$$

où nous avons encore utilisé la convergence monotone.

En égalant les deux, nous avons notre résultat. □

14.9.4 Fonctions à valeurs réelles

L'intégrale d'une fonction à valeurs dans $[0,+\infty]$ étant faite, nous passons aux fonctions à valeurs dans $[-\infty,+\infty]$.

PROPooDEYBCXooFXEZCY

Proposition 14.186 ([1]).
Soit une fonction mesurable $f\colon\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$. Nous considérons les deux fonctions suivantes à valeurs dans $[0,+\infty]$:

$$f^+(x)=\begin{cases}0 & si\ f(x)<0\\ f(x) & si\ f(x)\geqslant 0.\end{cases} \tag{14.535a}$$

$$f^-(x)=\begin{cases}0 & si\ f(x)>0\\ -f(x) & si\ f(x)\leqslant 0.\end{cases} \tag{14.535b}$$

Nous avons $\int_\Omega |f| < \infty$ si et seulement si $\int_\Omega f^+ < \infty$ et $\int_\Omega f^- < \infty$.

Démonstration. Vu que f est mesurable, les fonctions f^+ et f^- sont également mesurables et nous avons l'égalité

$$|f| = f^+ + f^-. \tag{14.536}$$

La proposition 14.185 nous dit alors que

$$\int_\Omega |f| = \int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^-. \tag{14.537}$$

Dans cette égalité, tous les nombres sont dans $[0, \infty]$. Le membre de gauche vaut $+\infty$ si et seulement si au moins un des deux de droite vaut $+\infty$. □

NORMooRDHAooKRniYt

14.187 (Intégrable, qui existe, etc.[512])**.**
Plusieurs définitions à ne pas confondre.

(1) Si

$$\min\left(\int_\Omega f^+, \int_\Omega f^-\right) < \infty, \tag{14.538}$$

EQooCUTSooBRpBvt

alors nous disons que $\int_\Omega f$ **existe**, et nous posons

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- \tag{14.539}$$

EQooOGFDooUSfCDg

où les intégrales de droite sont définies par 14.167. Une intégrale qui existe peut très bien valoir $+\infty$ ou $-\infty$.

(2) Si $\int_\Omega |f| < \infty$, alors nous disons que f est **intégrable**.

D'après ces définitions, en prenant fonction constante $f(x) = 1$, nous avons :

- $\int_{\mathbb{R}} 1dx$ existe parce que sa partie négative est identiquement nulle, de telle sorte que $\int_{\mathbb{R}} f^- = 0 < \infty$.
- La fonction f n'est pas intégrable parce que $\int_{\mathbb{R}} |1|dx = \infty$.

Nous verrons comment donner un sens à $\int_\Omega f$ dans certains cas où f n'est pas intégrable sur Ω dans la section 14.16.3 sur les intégrales impropres.

Nous définissons aussi

$$\mu(f) = \int_\Omega f \tag{14.540}$$

si f est une fonction mesurable sur Ω.

LEMooMWKTooIKomSw

Lemme 14.188.
Pour $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nous avons $\int_\Omega |f| < \infty$ si et seulement si $\int_\Omega f$ existe et est finie.

Démonstration. Deux sens.

(1) $\Rightarrow$ La proposition 14.186 dit que si $\int_\Omega |f| < \infty$, alors $\int_\Omega f^+ < \infty$ et $\int_\Omega f^- < \infty$. La condition (14.538) est alors remplie et l'intégrale $\int_\Omega f$ existe. Et comme les deux bouts sont finis, la définition (14.539) dit que $\int_\Omega f < \infty$.

(2) $\Leftarrow$ Vu que $\int_\Omega f$ existe, au moins un des deux parmi $\int_\Omega f^+$ et $\int_\Omega f^-$ est finie. Comme la différence entre les deux est finie (définition (14.539)), nous déduisons que les deux sont finies. La proposition 14.186 dit alors que $\int_\Omega |f| < \infty$.

□

PROPooDOMBooIVNzlZ

Proposition 14.189.
Soit une fonction f sur l'espace mesuré Ω. Si $\int_\Omega |f| < \infty$, alors

$$\left|\int_\Omega f\right| \leqslant \int_\Omega |f| < \infty. \tag{14.541}$$

Démonstration. La proposition 14.186 dit immédiatement que $\int_\Omega f^+ < \infty$ et $\int_\Omega f^- < \infty$. Calcul :

$$\begin{aligned}
|\int_\Omega f| &= |\int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-| && (14.542a)\\
&\leqslant |\int_\Omega f^+| + |\int_\Omega f^-| && \text{lem. 1.114(4)} \quad (14.542b)\\
&= \int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^- && (14.542c)\\
&= \int_\Omega (f^+ + f^-) && (14.542d)\\
&= \int_\Omega |f|. && (14.542e)
\end{aligned}$$

□

Remarque 14.190.
Dans $\mathbb{R}^d$, quasiment toutes les fonctions et ensembles sont mesurables. En effet la construction d'ensembles non mesurables demande obligatoirement l'utilisation de l'axiome du choix ; de tels ensembles doivent être construits « exprès pour ». Il y a très peu de chances pour que vous tombiez sur un ensemble non mesurable de $\mathbb{R}^d$ sans que vous ne vous en rendiez compte.

Il y en a un en l'exemple 14.157.

Remarque 14.191.
« Mesurable » ne signifie pas « intégrable ». Par exemple la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \bar{\mathbb{R}} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{si } \omega \neq 0 \\ \infty & \text{si } \omega = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{14.543}$$

est mesurable, mais non intégrable.

14.9.5 Additivité de l'intégrale

LemPfHgal

Lemme 14.192.
Soit une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Si g est intégrable, alors f est intégrable.

Démonstration. La fonction g est manifestement à valeurs réelles positives. La proposition 14.176 nous dit alors que $|f|$ est intégrable. Ensuite c'est au tour de la proposition 14.186 de conclure à l'intégrabilité de f. □

PROPooFIYEooCpdmwZ

Proposition 14.193.
Soient deux fonctions intégrables sur $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors $f + g$ est intégrable et

$$\int_S (f+g)d\mu = \int_S f d\mu + \int_S g d\mu. \tag{14.544}$$

Démonstration. En plusieurs étapes suivant la généralité de f et g.

(1) **Si f et g sont étagées et positives** C'est le théorème 14.183(2) déjà prouvé.

(2) **Si f et g sont à valeurs positives** Le théorème fondamental d'approximation 14.118 nous permet de considérer des suites croissantes de fonctions étagées positives (f_k) et (g_k) qui vérifient $f_k \to f$ et $g_k \to g$.

Pour chaque k nous avons

$$\int_S (f_k + g_k)d\mu = \int_S f_k d\mu + \int_S g_k d\mu. \tag{14.545}$$

EQooXXYOooUhkOJL

De plus, la suite $k \mapsto f_k + g_k$ est une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers $f + g$. Le théorème de la convergence monotone 14.178 nous permet donc de passer à la limite dans (14.545) et de permuter toutes les limites avec toutes les intégrales, des deux côtés.

(3) **f et g à valeurs réelles** Il faut diviser le domaine en de nombreuses régions suivant les signes de f, g et $f + g$.

□

Nous prouvons à présent l'additivité de l'intégrale pour des unions finie. Une version pour les unions dénombrables sera donnée dans les propositions 14.210 et 14.211.

PropOPSCooVpzaBt

Proposition 14.194 (σ-additivité finie)**.**
Soient des parties $A, B \subset \Omega$ disjointes dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Alors les intégrales $\int_A f$ et $\int_B f$ existent si et seulement si l'intégrale $\int_{A\cup B} f$. Dans ce cas nous avons :

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f. \tag{14.546}$$

Démonstration. Vu que A et B sont disjoints, $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$. En utilisant alors le lemme 14.177 et la proposition 14.193 nous avons le calcul

$$\int_{A\cup B} f = \int_\Omega f\mathbb{1}_{A\cup B} = \int_\Omega f\mathbb{1}_A + \int_\Omega f\mathbb{1}_B = \int_A f + \int_B f. \tag{14.547}$$

□

14.9.6 Fonctions à valeurs vectorielles (dimension finie)

Nous voulons intégrer des fonctions du type

$$f\colon \Omega \to V \tag{14.548}$$

où Ω et V sont des espaces vectoriels. Nous expliquons à présent plus précisément le cadre.

NORMooTQBIooBaScjt

14.195.
Nous considérons à présent un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ de dimension finie, et un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Attention à ne pas confondre espace de départ et espace d'arrivée. Vu que V est un espace topologique, nous avons bien entendu les boréliens de V, et pour peut que nous ayons une mesure sur V (qui qui n'est pas compliqué à créer à partir de celle canonique de $\mathbb{R}^n$ et un isomorphisme), nous avons déjà une définition de $\int_V f d\mu$ lorsque $f\colon V \to \mathbb{R}$.

Ici nous nous proposons non d'intégrer $f\colon V \to \mathbb{R}$ mais bien $f\colon (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to V$ où V est un espace vectoriel normé.

Le lemme suivant est le point de départ pour définir les intégrales de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Pour les fonctions à valeurs dans un espace de dimension infinie (par exemple de Banach), il existe des choses, mais c'est un peu plus compliqué.

LEMooCVHDooLJASAs

Lemme 14.196 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel V réel de dimension finie, muni de la norme N. Soient une base $\{e_i\}$ de V, et une fonction $f\colon (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to V$ telle que la norme $N(f)\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ soit intégrable. Nous notons f_i les composantes de f : $f(x) = \sum_i f_i(x)e_i$.

Alors pour chaque i,

(1) la fonction $|f_i|\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ est intégrable,

(2) la fonction $f_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable.

Démonstration. Si V était un espace muni d'un produit scalaire, et si la base $\{e_i\}$ était orthonormée, ce serait facile parce que la norme majore toutes les composantes. Hélas, ce n'est pas spécialement le cas. La base $\{e_i\}$ n'est pas spécialement orthonormée et même la norme N ne dérive pas spécialement d'un produit scalaire.

Nous allons utiliser l'équivalence de toutes les normes en dimension finie (théorème 10.61) pour nous ramener au cas d'une norme euclidienne.

Nous considérons sur V la norme « euclidienne » construite sur la base $\{e_i\}$: $\|\sum_i v_i e_i\| = \sum_i |v_i|^2$. Par équivalence des normes nous avons des nombres non nuls λ_1 et λ_2 tels que

$$N(v) \leqslant \lambda_1 \|v\|, \tag{14.549}$$

et

$$\|v\| \leqslant \lambda_2 N(v) \tag{14.550}$$

pour tout $v \in V$. Pour un i fixé nous avons alors les majorations

$$N\big(f_i(x)e_i\big) \leqslant \lambda_1 \|f_i(x)e_i\| \leqslant \lambda_1 \|f(x)\| \leqslant \lambda_1\lambda_2 N\big(f(x)\big). \tag{14.551}$$

En posant $N_i = N(e_i)$ nous avons la majoration[63]

$$|f_i(x)| \leqslant \frac{\lambda_1\lambda_2}{N(e_i)} N\big(f(x)\big). \tag{14.552}$$

L'application

$$\begin{aligned} |f_i| \colon \Omega &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto |f_i(x)| \end{aligned} \tag{14.553}$$

est donc une fonction à valeurs réelles positives, majorée par une fonction intégrable (la fonction $x \mapsto N\big(f(x)\big)$). Elle est donc intégrable par le lemme 14.192.

La fonction f_i elle-même est alors intégrable par la proposition 14.186. □

Notons que ce lemme est en réalité très simple si V est un espace vectoriel normé dont la norme découle d'un produit scalaire, comme c'est le cas pour $\mathbb{C}$. D'ailleurs, il ne faut pas se voiler la face : le cas d'intégrales de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sera dans le Frido le cas de loin le plus courant. À ce propos, nous n'avons pas encore défini ce que nous voulons noter $\int_\Omega f d\mu$ lorsque f est une fonction à valeurs vectorielles. Comblons vite ce manque …

PROPooOFSMooLhqOsc

Proposition-Définition 14.197 ([1]).
Soit une fonction $f \colon \Omega \to V$ où V est un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit une base $\{e_i\}$ de V. Si la fonction $\|f\| \colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ est intégrable, alors

(1) toutes les composantes $f_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$ sont intégrables,

(2) le vecteur

$$\sum_i \Big(\int_\Omega f_i\Big) e_i \tag{14.554}$$

EQooQCKMooZCbvbq

ne dépend pas de la base choisie.

*Dans ce cas, la fonction f est dite **intégrable** et nous définissons*

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_i \Big(\int_\Omega f_i\Big) e_i. \tag{14.555}$$

Démonstration. Le fait que les composantes soient intégrables est le lemme 14.196. Soient deux bases de V, $\{e_i\}$ et $\{s_\alpha\}$, liées conformément à (4.227) par la relation $s_\alpha = \sum_i Q_{i\alpha} e_i$ pour une certaine matrice inversible Q. Nous avons pour tout $x \in \Omega$:

$$f(x) = \sum_i f_i(x) e_i = \sum_\alpha f_\alpha(x) s_\alpha \tag{14.556}$$

avec $f_\alpha(x) = \sum_i f_i(x) Q^{-1}_{\alpha i}$ par la proposition 4.122.

Notons pour être pointilleux que les ensembles $\{e_i\}$ et $\{s_\alpha\}$ ne sont pas indexés par le même ensemble, de telle sorte que f_i ne peut pas être confondu avec f_α, même lorsqu'on attribue des valeurs à i et à α.

Comme combinaisons linéaires des fonctions f_i qui sont intégrables, les fonctions f_α sont intégrables (proposition 14.193). En écrivant $\int_\Omega f$ par rapport à la base $\{s_\alpha\}$ nous trouvons :

$$\sum_\alpha \Big(\int f_\alpha\Big) s_\alpha = \sum_\alpha \Big(\int \sum_i f_i(x) Q^{-1}_{\alpha i} dx\Big) \sum_j Q_{j\alpha} e_j \tag{14.557a}$$

$$= \sum_j \int \sum_{\alpha i} f_i(x) Q^{-1}_{\alpha i} Q_{j\alpha} dx e_j \tag{14.557b}$$

$$= \sum_j \int f_j(x) dx e_j \tag{14.557c}$$

$$= \sum_j \Big(\int f_j\Big) e_j \tag{14.557d}$$

où nous avons permuté des sommes finies et des intégrales des fonctions f_i, à valeurs dans $\mathbb{R}$ en vertu de la proposition 14.193 □

[63] Vous notez l'utilisation de la condition (3) de la définition 7.212 de la norme pour « convertir » la norme N en valeur absolue.

La proposition suivante est, pour les intégrales à valeurs vectorielles, analogue à la proposition 14.186.
PROPooNSCPooCMkrZl

Proposition 14.198.
Soit une fonction mesurable $f\colon \Omega \to (V, \|.\|)$. Soit une base $\{e_i\}$ de V et la décomposition $f = \sum_i f_i e_i$.

Nous avons équivalence entre
ITEMooYLADooCXKEds

(1) $\int_\Omega \|f\| < \infty$
ITEMooLEYEooQTGwmt

(2) $\int_\Omega |f_i| < \infty$
ITEMooYDDAooMKwDIR

(3) $\int_\Omega f_i^+ < \infty$ *et* $\int_\Omega f_i^- < \infty$.

Démonstration. L'équivalence entre les points (2) et (3) est la proposition 14.186. Nous démontrons l'équivalence entre (1) et (2).

Vu que toutes les normes sont équivalentes sur V, nous considérons en particulier la norme associée à la base $\{e_i\}$ donnée par

$$N(x) = \sum_i |x_i|. \tag{14.558}$$

Il existe des constantes λ_1 et λ_2 telles que

$$\lambda_1\big(\sum_i |f_i(x)|\big) \leqslant \|f(x)\| \leqslant \lambda_2\big(\sum_i |f_i(x)|\big) \tag{14.559}$$

pour tout $x \in \Omega$.

La première inégalité dit que si $\int_\Omega \|f\| < \infty$, alors $\lambda_1\big(\sum_i \int_\Omega |f - i|\big) < \infty$. Et vu que chacun des termes est positif, ils sont tous finis.

La seconde inégalité donne l'implication réciproque. □

14.9.7 Quelques propriétés

Le lemme suivant nous aide à détecter des fonctions presque partout nulles.
Lemfobnwt

Lemme 14.199.
Soit f une fonction mesurable positive ou nulle telle que

$$\int_\Omega f d\mu = 0. \tag{14.560}$$

Alors $f = 0$ μ-presque partout.

Démonstration. L'ensemble des points $x \in \Omega$ tels que $f(x) \neq 0$ peut s'écrire comme une union dénombrable disjointe :

$$\{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \tag{14.561}$$

avec

$$E_0 = \{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) > 1\} \tag{14.562a}$$

$$E_i = \{x \in \Omega \text{ tel que } \frac{1}{i+1} \leqslant f(x) < \frac{1}{i}\}. \tag{14.562b}$$

Si un des ensembles E_i est de mesure non nulle, alors nous pouvons considérer la fonction simple $h(x) = \frac{1}{i+1}\mathbb{1}_{E_i}$ dont l'intégrale sur Ω est strictement positive. Par conséquent le supremum de la définition (14.468) est strictement positif.

Nous savons donc que $\mu(E_i) = 0$ pour tout i. Étant donné que la mesure d'une union disjointe dénombrable est égale à la somme des mesures, nous avons

$$\mu\{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\} = 0, \tag{14.563}$$

ce qui signifie que f est nulle μ-presque partout. □
CorjLYiSm

Corolaire 14.200.
Soit f une fonction mesurable sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que

$$\int_\Omega f \mathbb{1}_{f>0} d\mu = 0. \tag{14.564}$$

Alors $f \leqslant 0$ presque partout.

Démonstration. Nous avons l'égalité d'ensembles

$$\{f\mathbb{1}_{f>0} \neq 0\} = \{\mathbb{1}_{f>0} \neq 0\}. \tag{14.565}$$

Mais lemme 14.199 implique que $f\mathbb{1}_{f>0}$ est nulle presque partout, c'est-à-dire que la mesure de l'ensemble du membre de gauche est nulle par conséquent

$$\mu\{\mathbb{1}_{f>0} \neq 0\} = 0. \tag{14.566}$$

Cela signifie que la fonction f est presque partout négative ou nulle. □

LEMooLXVGooUDuQzc

Lemme 14.201 ([1])**.**
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi qu'une partie $X \in \mathcal{A}$ telle que $\mu(X) > 0$. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifie $f > 0$ sur X, alors

$$\int_X f > 0. \tag{14.567}$$

Démonstration. Nous posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \{x \in x \text{ tel que } \frac{1}{n} \geqslant f(x) > \frac{1}{n+1}\}, \tag{14.568}$$

$$A_0 = \{x \in X \text{ tel que } f(x) > 1\}. \tag{14.569}$$

Nous avons l'union disjointe $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, et donc $\mu(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$. Nous en déduisons qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_i) > 0$. Nous posons alors

$$\begin{aligned} \psi : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A_i \\ 1/2i & \text{si } x \in A_i. \end{cases} \end{aligned} \tag{14.570}$$

Cette fonction ψ est étagée et vérifie $0 \leqslant \psi \leqslant f$. Comme l'intégrale de f sur X est le supremum des intégrales de ce type de fonctions, nous avons

$$\int_X f d\mu \geqslant \int_X \psi d\mu = \frac{1}{2i}\mu(A_i) > 0. \tag{14.571}$$

□

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 14.202
Je n'ai pas vérifié le lemme suivant. Écrivez-moi si vous avez une démonstration.

LEMooVZXFooZAQWKY

Lemme 14.203.
Si $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et si $\int_A f d\mu = 0$, alors $\mu(A) = 0$

14.9.8 Permuter limite et intégrale

14.9.8.1 Convergence uniforme

PropbhKnth

Proposition 14.204 (Permuter limite et intégrale)**.**
Soit $f_n \to f$ uniformément sur un ensemble mesuré A de mesure finie. Alors si les fonctions f_n et f sont intégrables sur A, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{14.572}$$

Démonstration. Notons f la limite de la suite (f_n). Pour tout n nous avons les majorations

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| \leqslant \int_A |f_n - f| d\mu \tag{14.573a}$$

$$\leqslant \int_A \|f_n - f\|_\infty d\mu \tag{14.573b}$$

$$= \mu(A)\|f_n - f\|_\infty \tag{14.573c}$$

où $\mu(A)$ est la mesure de A. Le résultat découle maintenant du fait que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. □

Il existe un résultat considérablement plus intéressant que cette proposition. En effet, l'intégrabilité de f n'est pas nécessaire. Cette hypothèse peut être remplacée soit par l'uniforme convergence de la suite (théorème 14.205), soit par le fait que les normes des f_n sont uniformément bornées (théorème de la convergence dominée de Lebesgue 14.207).

ThoUnifCvIntRiem

Théorème 14.205 ([513])**.**
La limite uniforme d'une suite de fonctions intégrables sur un borné est intégrable, et on peut permuter la limite et l'intégrale.

Plus précisément, soit A un ensemble de μ-mesure finie et $f_n\colon A\to\mathbb{R}$ des fonctions intégrables sur A. Si la limite $f_n\to f$ est uniforme, alors f est intégrable sur A et nous pouvons inverser la limite et l'intégrale :

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n=\int_A\lim_{n\to\infty}f_n. \tag{14.574}$$

Démonstration. Soit $\epsilon>0$ et n tel que $\|f_n-f\|_\infty\leqslant\epsilon$ (ici la norme uniforme est prise sur A). Étant donné que f_n est intégrable sur A, il existe une fonction simple φ_n qui minore f_n telle que

$$\left|\int_A\varphi_n-\int_A f_n\right|<\epsilon. \tag{14.575}$$

La fonction $\varphi_n+\epsilon$ est une fonction simple qui majore la fonction f. Si ψ est une fonction simple qui minore f, alors

$$\int_A\psi\leqslant\int_A\varphi_n+\epsilon\leqslant\int_A f_n+\epsilon\mu(A). \tag{14.576}$$

Par conséquent le supremum qui définit $\int_A f$ existe, ce qui montre que f est intégrable. Le fait qu'on puisse inverser la limite et l'intégrale est maintenant une conséquence de la proposition 14.204. □

Remarque 14.206.
L'hypothèse sur le fait que A soit de mesure finie est importante. Il n'est pas vrai qu'une suite uniformément convergente de fonctions intégrables est intégrables. En effet nous avons par exemple la suite

$$f_n(x)=\begin{cases}1/x & \text{si } x<n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{14.577}$$

qui converge uniformément vers $f(x)=1/x$ sur $A=[1,\infty[$. Le limite n'est cependant guerre intégrable sur A.

14.9.8.2 Convergence dominée de Lebesgue

ThoConvDomLebVdhsTf

Théorème 14.207 (Convergence dominée de Lebesgue)**.**
Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Nous supposons que

(1) Pour chaque n nous avons $f_n\in L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$,

(2) $f_n\to f$ simplement presque partout sur Ω,

(3) Il existe une fonction $g\in L^1(\Omega)$ telle que

$$|f_n(x)|\leqslant g(x) \tag{14.578}$$

pour presque[64] tout $x\in\Omega$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Alors

(1) f est intégrable[65],

(2) $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n=\int_\Omega f$,

(3) $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|f_n-f|=0$.

[64] Si il n'y avait pas le « presque » ici, ce théorème serait à peu près inutilisable en probabilité ou en théorie des espaces L^p, comme dans la démonstration du théorème de Fischer-Riesz 27.56 par exemple.

[65] C'est-à-dire que $\int_\Omega|f|<\infty$, voir le vocabulaire en 14.187.

Démonstration. La fonction limite f est intégrable parce que $|f| \leqslant g$ et g est intégrable[66]. Par hypothèse nous avons

$$-g(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g(x). \tag{14.579}$$

En particulier la fonction $g_n = f_n + g$ est positive et mesurable si bien que le lemme de Fatou 14.182 implique

$$\int_\Omega \liminf g_n \leqslant \liminf \int_\Omega g_n. \tag{14.580}$$

Évidemment nous avons $\liminf g_n = f + g$, de telle sorte que

$$\int f + \int g \leqslant \liminf \int g_n = \liminf \int f_n + \int g, \tag{14.581}$$

et le nombre $\int g$ étant fini, nous pouvons le retrancher des deux côtés de l'inégalité :

$$\int f \leqslant \liminf \int f_n. \tag{14.582}$$

EQooXGKRooDqUDlG

Afin d'obtenir une minoration de $\int f$ nous récrivons (14.582) pour la suite de fonctions $k_n = -f_n \to k = -f$:

$$\int k \leqslant \liminf \int k_n. \tag{14.583}$$

En utilisant le lemme 9.48, nous obtenons

$$-\int f \leqslant \liminf \int -f_n = -\limsup \int f_n, \tag{14.584}$$

et donc

$$\limsup \int f_n \leqslant \int f. \tag{14.585}$$

En combinant avec (14.582), nous avons la suite d'inégalités

$$\limsup \int f_n \leqslant \int f \leqslant \liminf \int f_n. \tag{14.586}$$

La limite supérieure étant plus grande ou égale à la limite inférieure, les trois quantités sont égales.

Nous prouvons maintenant le troisième point. Soit la suite de fonctions

$$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \tag{14.587}$$

qui tend ponctuellement vers zéro. De plus

$$h_n(x) \leqslant |f_n(x)| + |f(x)| \leqslant 2g(x), \tag{14.588}$$

ce qui prouve que les h_n majorés par une fonction intégrable. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(x)dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{14.589}$$

□

Remarque 14.208.
Lorsque nous travaillons sur des problèmes de probabilités, la fonction g peut être une constante parce que les constantes sont intégrables sur un espace de probabilité.

CorCvAbsNormwEZdRc

Corolaire 14.209.
Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite numérique absolument convergente. Alors elle est convergente. Il en est de même pour les séries de fonctions si on considère la convergence ponctuelle.

Démonstration. L'hypothèse est la convergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{N}} |a_i| dm(i)$ où dm est la mesure de comptage. Étant donné que $|a_i| \leqslant |a_i|$, la fonction a_i (fonction de i) peut jouer le rôle de g dans le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 14.207). □

[66] Par le lemme 14.192

14.9.9 Additivité de l'intégrale de Lebesgue

Les propositions 14.210 et 14.211 démontrent la même chose. La différence est la méthode utilisée pour permuter une somme et une intégrale. Dans le premier cas, nous utilisons la convergence monotone (et sommes obligés de séparer le cas où f est positive), alors que dans le second cas, nous utilisons la convergence dominée de Lebesgue, et nous ne devons pas faire de séparation d'après la positivité de f.

PROPooTFOAooJBwmCV

Proposition 14.210 (σ-additivité dénombrable[1])**.**
Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des parties mesurables disjointes de $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et si $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ est intégrable sur $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ alors les intégrales $\int_{A_i}f d\mu$ existent et

$$\int_{\bigcup_i A_i} f d\mu = \sum_{i=0}^{\infty}\int_{A_i} f d\mu. \tag{14.590}$$

Démonstration. En deux cas d'après la positivité de f.

(1) **Si f est positive** Nous posons $f_N = f\mathbb{1}_{\bigcup_{i=0}^{N}A_i}$. Cette suite de fonctions vérifie la limite

$$\lim_{N\to\infty} f_N = f\mathbb{1}_{\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i}. \tag{14.591}$$

De plus, pour chaque N nous avons

$$\int_\Omega f_N = \int_\Omega f\mathbb{1}_{\bigcup_i A_i} = \int_{\bigcup_i A_i} f = \sum_{i=0}^{N}\int_{A_i} f \tag{14.592}$$

Justifications :

- La proposition 14.177 pour l'introduction de la fonction caractéristique de $\bigcup_i A_i$
- La proposition 14.194 qui traite le cas de la sous-additivité finie pour la dernière égalité.

La suite $(f_N)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables[67] et positives. Donc le théorème de la convergence monotone 14.178 s'applique et

$$\sum_{i=0}^{\infty}\int_{A_i} f = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N}\int_{A_i} f = \lim_{N\to\infty}\int_{\bigcup_{i=0}^{N}A_i} f = \lim_{N\to\infty}\int_\Omega f_N \tag{14.593a}$$

$$= \int_\Omega \lim_{N\to\infty} f_N = \int_\Omega f\mathbb{1}_{\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i} = \int_{\bigcup_i A_i} f d\mu. \tag{14.593b}$$

(2) **Si f est à valeurs réelles** Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $f = f_+ - f_-$ où f_+ et f_- sont intégrables. Nous avons alors

$$\int_{\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i} f d\mu = \int_{\bigcup_i A_i} f_+ - \int_{\bigcup_i A_i} f_- \tag{14.594a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} f_+ - \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} f_- \tag{14.594b}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int_{A_k} f_+ - \int_{A_k} f_-\Big) \tag{14.594c}$$

SUBEQooMTZPooLqMHKP

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} f. \tag{14.594d}$$

SUBEQooVZNMooRmFoLq

Justifications :

- Pour (14.594c), c'est l'associativité de la somme, proposition 10.159.
- Pour (14.594d), c'est la proposition 14.193.

□

[67] La fonction f elle-même est mesurable ; c'est inclus dans la définition de « intégrable ».

PROPooDWYNooWKJmEV

Proposition 14.211 (σ-additivité[514]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Nous considérons des parties disjointes $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de Ω telles que $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \Omega$. Si $f \in L^1(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu. \tag{14.595}$$

Démonstration. Nous posons $\Omega_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ ainsi que $f_n = f\mathbb{1}_{\Omega_n}$. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$ nous avons EQSooBREOooWzviS

$$\sum_{k=0}^{N} \int_{A_k} f d\mu = \int_{\bigcup_{k=0}^{N} A_k} f \tag{14.596a}$$ EQooCVVVooTIJNmz

$$= \int_{\Omega_N} f \tag{14.596b}$$

$$= \int_\Omega f_N. \tag{14.596c}$$ SUBEQooJZLQooKlOoes

Justifications :

- Pour (14.596a), c'est la proposition 14.194 qui traite du cas de sommes finies.
- Pour (14.596c) c'est la proposition 14.210.

L'idée est maintenant de passer à la limite des deux côtés de (14.596). Voici le raisonnement :

- Nous montrons qu'à droite, la limite existe et vaut $\int_\Omega f d\mu$.
- Le fait que la limite du membre de droite existe implique l'existence de la limite du membre de gauche.
- La limite du membre de gauche vaut $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu$.

La limite du membre de droite s'établi avec le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 14.205.

- Nous avons convergence simple $f_n \to f$ parce que $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_i = \Omega$.
- La fonction $g = |f|$ est intégrable sur Ω parce que $f \in L^1(\Omega)$ par hypothèse.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \Omega$ nous avons $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ parce que $|f_n(x)|$ est soit égal à $g(x)$ soit égal à zéro suivant que $x \in \Omega_n$ ou non.

Donc le théorème de la convergence dominée est applicable. La limite du membre de droite de (14.596) existe et vaut :

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega f_N = \int_\Omega f. \tag{14.597}$$

Nous pouvons alors prendre aussi la limite du membre de gauche dans (14.596) et obtenir le résultat attendu. □

14.9.10 Produit d'une mesure par une fonction (mesure à densité)

PropooVXPMooGSkyBo

Proposition-Définition 14.212 (Produit d'une mesure par une fonction[1, 515]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et une fonction mesurable positive $w\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^+$. Alors la formule

$$(w \cdot \mu)(A) = \int_A w d\mu \tag{14.598}$$

*pour tout $A \in \mathcal{F}$ définit une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{F})$ appelée **produit** de la mesure μ par la fonction w. La fonction w est la **densité** de la mesure $w \cdot \mu$ par rapport à la mesure μ.*

Démonstration. D'abord $(w \cdot \mu)(\varnothing) = 0$ parce que le lemme 14.175 donne

$$(w \cdot \mu)(\varnothing) = \int_\Omega w\mathbb{1}_\varnothing d\mu = \int_\Omega 0 d\mu = 0 \times \mu(\Omega) = 0 \tag{14.599}$$

où nous avons (éventuellement) utilisé deux fois la convention $0 \times \infty = 0$.

Ensuite si les ensembles A_i sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{F}$ alors nous avons $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i}$, et donc

$$(w \cdot \mu)(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \int_{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i} w d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A_i} w d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} (w \cdot \mu)(A_i). \tag{14.600}$$

où nous avons utilisé la σ-additivité dénombrable de l'intégrale de la proposition 14.210. □

En particulier nous parlons souvent de mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est alors la construction suivante.

DEFooJNQYooKUcezo

Définition 14.213.
*Si μ est une mesure sur $\mathbb{R}^d$, une fonction $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une **densité** pour μ si pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$ nous avons*

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx \tag{14.601}$$

où dx est la mesure de Lebesgue.

*Si la mesure μ admet une densité, nous disons que c'est une **mesure à densité** par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous disons aussi que μ est **absolument continue**.*

Exemple 14.214.
Toutes les mesures n'admettent pas de densité. Par exemple la mesure de Dirac donnée par

$$\nu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.602}$$

EQooDMFCooVEManF

n'a pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue. △

La mesure ν de l'exemple 14.602 admet, au sens des distributions, la mesure de Dirac δ comme densité, mais c'est une autre histoire qui vous sera contée une autre fois.

PropooJMWAooDzfpmB

Proposition 14.215 ([515])**.**
Soit une fonction mesurable $w\colon (S, \mathcal{F}, \mu) \to \bar{\mathbb{R}}^+$.

(1) Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}^+$ est mesurable, alors $f \cdot (w \cdot \mu) = (fw) \cdot \mu$.

(2) Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable, elle est $w \cdot \mu$-intégrable si et seulement si fw est μ-intégrable. Dans ce cas, nous avons encore $f \cdot (w \cdot \mu) = (fw) \cdot \mu$.

Attention : dans le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors il faut que w soit à valeurs finies dans $\mathbb{R}$ parce que nous n'avons pas défini $\infty \times z$ lorsque $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Nous commençons par prouver le résultat pour la fonction caractéristique de l'ensemble mesurable A. Nous avons : $\mathbb{1}_A \cdot (w \cdot \mu)(B) = \int_B \mathbb{1}_A d(w \cdot \mu)$. Mais par définition, l'intégrale d'une fonction indicatrice est la mesure de l'ensemble indiqué. En passant sur le fait que $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$,

$$\int_B \mathbb{1}_A d(w \cdot \mu) = (w \cdot \mu)(A \cap B) = \int_S \mathbb{1}_{A\cap B} w d\mu = \int_S \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B w d\mu = \int_B \mathbb{1}_A w d\mu = (\mathbb{1}_A w) \cdot \mu(B). \tag{14.603}$$

Supposons maintenant que f soit une fonction étagées qui s'écrit $f = \sum_k a_k \mathbb{1}_{A_k}$ où les A_k sont des ensembles mesurables disjoints. Alors le calcul est le suivant, en utilisant le fait que sur A_k, on a $a_k = f(x)$:

$$\begin{aligned} f \cdot (g \cdot \mu)B &= \int_B f d(g \cdot \mu) && \text{(14.604a)} \\ &= \sum_k a_k (g \cdot \mu)(A_k \cap B) && \text{(14.604b)} \\ &= \sum_k a_k \int_{A_k \cap B} g d\mu && \text{(14.604c)} \\ &= \int_{A_k \cap B} f(x) g(x) d\mu(x) && \text{(14.604d)} \\ &= \sum_k (fg \cdot \mu)(A_k \cap B) && \text{(14.604e)} \\ &= (fg \cdot \mu)(B) && \text{(14.604f)} \end{aligned}$$

parce que les $A_k \cap B$ forment une partition de l'ensemble B (voir le point (2) de la définition 14.18).

Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}^+$ est mesurable, le théorème 14.118 donne une suite croissante f_n de fonctions étagées positives convergeant (ponctuellement) vers f. Vu que la fonction w est positive, nous avons aussi la limite positive et croissante $wf_n \to wf$. Ainsi l'utilisation du théorème de la convergence monotone est justifié dans le calcul suivant :

$$\int_S f d(w \cdot \mu) = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n d(w \cdot \mu) = \lim_{n\to\infty} \int_S (wf_n) d\mu = \int_S wf d\mu. \tag{14.605}$$

Nous passons maintenant au cas général où f est une fonction à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ (avec w finie dans ce dernier cas). Nous avons la chaine d'équivalences

$\Leftrightarrow$ f est $(w \cdot \mu)$ intégrable

$\Leftrightarrow$ $|f|$ est $(w \cdot \mu)$-intégrable

$\Leftrightarrow$ $|f|w$ est μ-intégrable

$\Leftrightarrow$ $|fw|$ est μ-intégrable.

Si cela est le cas, la formule se démontre en se ramenant au cas déjà prouvé des fonctions positives en utilisant les $(fw)^+ = f^+w$, $(fw)^- = f^-w$ etc. □

14.9.11 Mesure et topologie

EXooKQDRooVMWaEC

Exemple 14.216 (Un compact n'est pas toujours de mesure finie)**.**
Soit l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}))$ réel avec ses boréliens et la fonction

$$\begin{aligned} w\colon \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big) &\to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{14.606}$$

Essayons d'étudier la mesure de densité w par rapport à la mesure de Lebesgue.

(1) **w est mesurable** Soit un borélien B de $\bar{\mathbb{R}}$. Si B ne contient pas ∞ alors $w^{-1}(B)$ est un borélien de $\mathbb{R}$ par continuité de l'application restreinte $w\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$. Ici nous avons par exemple appliqué la proposition 14.125 à chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$. Si $+\infty \in B$ alors

$$w^{-1}(B) = w^{-1}\big(B \setminus \{\infty\}\big) \cup w^{-1}(\{\infty\}) = w^{-1}\big(B \setminus \{\infty\}\big) \cup \{0\}, \tag{14.607}$$

qui est borélien par union de boréliens.

(2) **Mesure produit** La proposition 14.212 nous assure alors qu'en posant[68]

$$\mu(B) = \int_B \frac{1}{|x|} d\lambda(x) \tag{14.608}$$

où λ est la mesure de Lebesgue, nous avons une mesure.

(3) **Mesure du singleton**

Pour avoir les idées claires, nous pouvons nous demander la mesure $\mu\big(\{0\}\big)$. Nous cela nous devons calculer

$$\int_{\{0\}} \frac{1}{|x|} d\lambda(x) = \int_{\{0\}} w(x) d\lambda(x) \tag{14.609}$$

où là, l'abus de notation n'est plus possible. Mais quelle que soit la fonction étagée $h = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ considérée,

$$\int_{\{0\}} h(x) d\lambda(x) = \sum_i \alpha_i \lambda\big(A_i \cap \{0\}\big) = 0. \tag{14.610}$$

Attention : ceci n'a rien de particulier à la fonction $x \mapsto 1/|x|$. Lorsqu'une mesure a une densité par rapport à Lebesgue, la mesure d'un singleton sera toujours nulle.

[68] Avec un mini abus de notation : si $0 \in B$, cette notation n'est pas tout à fait correcte.

(4) **Mesure de la boule compacte**

Il n'en reste pas moins que $\mu\big([-1,1]\big)=\infty$.

△

14.217.
En réalité, il n'y a pas de liens forts entre mesure et topologie. Un espace topologique est une chose, et y mettre une mesure en est une autre. Bien entendu, une topologie étant donnée, nous pouvons considérer la tribu des boréliens et y mettre une mesure un peu quelconque. Il n'y a pas de choix canonique.

Notons que même dans l'exemple de compact de mesure infinie 14.216, la mesure introduite n'est pas sans lien avec la topologie de $\mathbb{R}$. En effet pour avoir une mesure à densité par rapport à Lebesgue, nous avons dû prendre une application mesurable par rapport à la tribu des boréliens, laquelle est éminemment liée à la topologie. Il y a donc parfaitement moyen de construire des espaces mesurés tenant compte de la topologie, et ayant des propriétés qui ne sont pas celle attendues.

Quand les choses sont faciles, ça se passe bien. La proposition suivante dit qu'une fonction continue sur un compact y est intégrable ; sauf que pour dire cela de façon précise, il faut un peu bosser parce qu'il y a de écueils à éviter, tels que l'exemple 14.216.

PROPooKFRSooANzglT

Proposition 14.218 ([1])**.**
Soit un espace mesuré $(K,\mathcal{A},\mu)$ et une fonction $f\colon K\to\mathbb{R}$. Nous supposons pas mal de trucs techniques :

(1) La mesure est finie : $\mu(K)<\infty$.

(2) L'ensemble K est par ailleurs un espace topologique compact[69]*.* ITEMooBKYHooWnxUGL

(3) La fonction f est continue pour les topologies de K et de $\mathbb{R}$. ITEMooJCNUooJzIlKI

(4) La fonction f est mesurable pour la tribu $\mathcal{A}$ de K et la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

Alors f est intégrable sur K et $\int_K |f|<\infty$.

L'hypothèse (4) ne se déduit pas nécessairement de l'hypothèse (3). Dans les cas usuels, nous avons bien « continue implique mesurable », mais si $\mathcal{A}$ n'a aucun rapport avec la topologie … hum …

Démonstration. Si nous écrivons $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ avec f^+ et f^- prenant des valeurs positives ou nulles[516], en vertu de la proposition 14.186, si nous devons prouver séparément $\int_K f^+<\infty$ et $\int_K f^-<\infty$. Nous allons donc prouver cette proposition en plusieurs étapes.

(1) **Si f est positive** La fonction f est continue sur K qui est compact (même en tant qu'espace topologique en soi ; il n'est pas nécessaire d'être compact *dans* quelque chose), donc elle a un maximum par le théorème 7.196 nommons M ce maximum. Donc $f\colon K\to[0,M]$. De plus la mesure μ sur K est finie et vérifie disons $\mu(K)=m$.

Soit une fonction étagée $h\colon K\to\mathbb{R}^+$ majorée par f. Nous notons

$$h(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}(x) \tag{14.611}$$

où les A_i sont des éléments de $\mathcal{A}$. Vu que $0\leqslant h(x)\leqslant f(x)\leqslant M$, nous avons[70]

$$\int_K h=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(K\cap A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}M\mu(K\cap A_i)\leqslant M\mu(K)=Mm \tag{14.612}$$

parce que les A_i sont disjoints et vérifient $\bigcup_i A_i=K$ (lemme 14.114).

Donc tous les éléments de l'ensemble sur lequel nous prenons le supremum dans la définition (14.468) sont contenus dans $[0,Mm]$. Le supremum est donc dans $[0,Mm]$ et est alors strictement plus petit que l'infini.

(2) **Si f est positive ou négative** Nous appliquons la première partie séparément à f^+ et f^-. Et nous avons alors que f est intégrable et

$$\int_K|f|=\int_K f^+ +\int_K f^-<\infty. \tag{14.613}$$

[69] Nous ne prétendons pas que la tribu $\mathcal{A}$ soit liée à la topologie de K.
[70] Définition (14.467).

□

THOooVADUooLiRfGK

Théorème 14.219 ([515]).
Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi qu'une application mesurable $\varphi: S_1 \to S_2$. Soit encore μ, une mesure positive sur $(S_1, \mathcal{F}_1)$.

Si $f: S_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable alors,

ItemooKMBIooZpHJSS

(1) f est $\varphi(\mu)$-intégrable si et seulement si $f \circ \varphi$ est μ-intégrable.

ItemooLAPYooUreDEl

(2) dans le cas où f est $\varphi(\mu)$-intégrable, nous avons

EqooSOHXooXSbdoy

$$\int_{S_2} f d\big(\varphi(\mu)\big) = \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. \tag{14.614}$$

Démonstration. L'intégrabilité est la définition 14.186, et demande que $|f|$ soit intégrable. L'égalité (14.614) a un sens si les deux membres sont infinis. Tant que les fonctions considérées sont positives, le point (1) est immédiat. Ce n'est qu'au moment où les fonctions considérées deviennent à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ que l'intégrabilité de $|f|$ commence à jouer parce qu'il faut que f^+ et f^- soient séparément intégrables.

Nous allons prouver la formule (14.614) pour des fonctions de plus en plus générales. Pour la suite nous notons $\mu' = \varphi(\mu)$.

(1) **Pour $f = \mathbb{1}_B$, B mesurable** Soit $B \in \mathcal{F}_2$. Nous avons $\mathbb{1}_B \circ \varphi = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)}$. Donc en utilisant le lemme 14.175 nous avons

$$\int_{S_2} \mathbb{1}_B d\mu' = \mu'(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) = \int_{S_1} \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)} d\mu = \int_{S_1} (\mathbb{1}_B \circ \varphi) d\mu. \tag{14.615}$$

(2) **f est étagée positive**
La fonction f peut être écrite sous la forme

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{B_k} \tag{14.616}$$

avec $B_k \in \mathcal{F}_2$ et $a_k \in \mathbb{R}^+$. Nous avons alors, en utilisant la sous-additivité de l'intégrale du théorème 14.183(3),

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} f d\mu' &= \sum_k a_k \int_{S_2} \mathbb{1}_{B_k} d\mu' && (14.617a)\\
&= \sum_k a_k \int_{S_1} (\mathbb{1}_{B_k} \circ \varphi) d\mu && (14.617b)\\
&= \int_{S_1} \Big(\sum_k a_k \mathbb{1}_{B_k} \Big) \circ \varphi d\mu && (14.617c)\\
&= \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. && (14.617d)
\end{aligned}$$

(3) **f à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$**
Vu que f est mesurable, par le théorème 14.118 il existe une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers f. Soit donc cette suite, $f_n: S_2 \to \mathbb{R}^+$. Les fonctions $f_n \circ \varphi$ sont étagées et positives et nous avons aussi la limite ponctuelle et croissante $f_n \circ \varphi \to f \circ \varphi$ parce que φ est continue. Le théorème de la convergence monotone (théorème 14.178) permet d'écrire ceci :

$$\int_{S_2} f d\mu' = \lim \int_{S_2} f_n d\mu' = \lim \int_{S_1} (f_n \circ \varphi) d\mu = \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. \tag{14.618}$$

(4) **Pour $f: S_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$**
C'est maintenant que l'intégrabilité va jouer. Nous avons $|f| \circ \varphi = |f \circ \varphi|$, donc

$$\int_{S_2} |f| d\mu' = \int_{S_1} |f| \circ \varphi d\mu = \int_{S_1} |f \circ \varphi| d\mu, \tag{14.619}$$

ce qui montre que f est μ'-intégrable si et seulement si $f \circ \varphi$ est μ-intégrable.

De plus si $f = f^+ - f^-$ alors $f^+ \circ \varphi = (f \circ \varphi)^+$, $f^- \circ \varphi = (f \circ \varphi)^-$, et de façon similaire pour les parties imaginaires et réelles.

□

14.10 Mesure à densité

14.10.1 Théorème de Radon-Nikodym

Définition 14.220 ([517]).
*Soient μ et ν deux mesures sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Nous disons que la mesure μ est **dominée** par ν si pour tout ensemble mesurable A, $\nu(A) = 0$ implique $\mu(A) = 0$.*

*Nous disons que la mesure signée[71] ν est **absolument continue** par rapport à la mesure positive μ si pour tout $A \in \mathcal{A}$, nous $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. Dans ce cas nous notons*

$$\nu \ll \mu. \tag{14.620}$$

DEFooRZARooTbtJac

Définition 14.221 ([494]).
*Deux mesures signées μ et ν sur $(\Omega, \mathcal{A})$ sont **mutuellement singulières** si il existe $E, F \in \mathcal{A}$ tels que*

$$\begin{cases} E \cap F = \varnothing & \text{(14.621a)} \\ \mu(A) = \mu(A \cap E) & \text{(14.621b)} \\ \nu(A) = \nu(A \cap F). & \text{(14.621c)} \end{cases}$$

Nous notons ce fait par

$$\mu \perp \nu. \tag{14.622}$$

LEMooDIGPooJqEwGl

Lemme 14.222 ([1]).
Soient deux mesures positives λ et μ. Nous avons $\lambda \perp \mu$ si et seulement si il existe des parties mesurables E', F' telles que

(1) $E' \cup F' = \Omega$

(2) $E' \cap F' = \varnothing$

(3) $\mu(F') = \lambda(E') = 0$.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $\mu \perp \lambda$, c'est-à-dire qu'il existe E, F tels que $E \cap F = \varnothing$, $\mu(A) = \mu(A \cap E)$ et $\lambda(A) = \lambda(A \cap F)$ pour tout mesurables A.

Nous posons $R = \Omega \setminus (E \cup F)$. C'est la partie de Ω sur laquelle ni μ ni λ n'agit. Il suffit de poser $F' = F \cup R$ et $E' = E$ pour avoir ce qu'il faut. Par exemple,

$$\mu(F') = \mu(F \cup R) = \mu\big((F \cup R) \cap E\big) = \mu(\varnothing) = 0. \tag{14.623}$$

, et de même pour les autres vérifications.

(2) $\Leftarrow$ Il suffit de poser $E = E'$ et $F = F'$ et de vérifier. Par exemple, vu que l'union $E \cup F = \Omega$ est disjointe,

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap F) = \mu(A \cap E). \tag{14.624}$$

□
LEMooVOJDooFgbwSE

Lemme 14.223 ([518]).
Soit un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Nous considérons

(1) des mesures positives finies $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

(2) une mesure positive μ

telles que $\lambda_n \perp \mu$ pour tout n. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \perp \mu. \tag{14.625}$$

[71] Définition 14.18.

Démonstration. Nous utilisons la caractérisation du lemme 14.222 pour des mesures mutuellement singulières.

Pour chaque n nous avons des mesurables A_n et B_n tels que $A_n \cup B_n = \Omega$, $A_n \cap B_n = \varnothing$ et $\mu(A_n) = \lambda_n(B_n) = 0$.

Nous posons $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ et $B = \Omega \setminus A$. Nous avons bien entendu $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \varnothing$.

(1) $\lambda_k(B) = 0$ **pour tout** k Pour chaque k nous avons $B \subset B_k$ parce que si $x \in B$, alors en particulier $x \in \Omega \setminus A_k = B_k$. Nous avons donc

$$\Omega \setminus A = B \subset B_k = \Omega \setminus A_k. \tag{14.626}$$

Donc, par croissance de la mesure,

$$\lambda_k(B) = \lambda_k(\Omega \setminus A) \leqslant \lambda_k(\Omega \setminus A_k) = \lambda_k(B_k) = 0. \tag{14.627}$$

(2) $\lambda(B) = 0$ Il s'agit de sommer : $\lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k(B) = 0$.

(3) $\mu(A) = 0$ Nous avons

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0. \tag{14.628}$$

□

LEMooYYIIooCUfGxA

Lemme 14.224 ([1]).
Soient λ et ν des mesures positives σ-finies ainsi qu'une mesure positive μ telle que $\lambda \perp \mu$ et $\nu \perp \mu$. Alors

$$(\lambda + \nu) \perp \mu. \tag{14.629}$$

Démonstration. Nous considérons des mesurables disjoints (X_n) comme dans le lemme 14.20. Pour chaque n nous avons les mesures finies λ_n et ν_n données par

$$\lambda_n(A) = \lambda(A \cap X_n) \tag{14.630a}$$
$$\nu_n(A) = \nu(A \cap X_n). \tag{14.630b}$$

Ces mesures vérifient $\lambda_n \perp \mu$ et $\nu_n \perp \mu$. De plus les (X_n) étant disjoints, nous avons $\lambda(A) = \sum_n \lambda_n(A)$ et $\nu(A) = \sum_n \nu_n(A)$. Nous pouvons donc utiliser le lemme 14.223 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \nu_n) \perp \mu. \tag{14.631}$$

EQooWXCKooGrqShO

Par associativité de la somme (tous les termes sont positifs), pour chaque mesurable A nous avons

$$\sum_n (\lambda_n + \nu_n)(A) = \sum_n \lambda_n(A) + \sum_n \nu_n(A) = \lambda(A) + \nu(A) = (\lambda + \nu)(A). \tag{14.632}$$

Cela pour dire que le membre de gauche de (14.631) est bien $\lambda + \nu$. □

Définition 14.225.
*La mesure μ est **portée** par la partie $E \in \mathcal{A}$ si pour tout $A \in \mathcal{A}$,*

$$\mu(A) = \mu(A \cap E). \tag{14.633}$$

Définition 14.226.
Soit une mesure signée μ et une partie mesurable A.

*(1) La partie A est **négative** si $\mu(A') \leqslant 0$ pour tout A' mesurable dans A.*

*(2) La partie A est **nulle** si $\mu(A') = 0$ pour tout A' mesurable dans A.*

*(3) La partie A est **positive** si $\mu(A') \geqslant 0$ pour tout A' mesurable dans A.*

PROPooBLNXooRRxxVv

Proposition 14.227 ([494]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ où μ est une mesure signée. Si une partie $D \in \mathcal{A}$ vérifie $\mu(D) \leqslant 0$, alors il existe une partie négative $A \subset D$ telle que $\mu(A) \leqslant \mu(D)$.

Démonstration. Nous définissons des parties A_i par récurrence en commençant par poser $A_0 = D$. Ensuite, si A_n est défini, nous posons

$$t_n = \sup\{\mu(B) \text{ tel que } B \subset A_n, B \in \mathcal{A}\}. \tag{14.634}$$

Nous avons $t_n \geqslant \mu(\varnothing) = 0$. Par définition du supremum, il existe B_n mesurable dans A_n vérifiant $\mu(B_n) \geqslant t_n/2 \geqslant 0$. Nous posons alors

$$A_{n+1} = A_n \setminus B_n. \tag{14.635}$$

Enfin nous posons

$$A = D \setminus \bigcup_{n\geqslant 0} B_n. \tag{14.636}$$

Vérifions que A possède les propriétés demandées.

(1) $A \subset D$ Par définition.

(2) $\mu(A) \leqslant \mu(D)$

(2a) **Les B_i sont disjoints** Nous avons

$$B_n \subset A_n = A = D \setminus \bigcup_{n\geqslant 0} B_n, \tag{14.637}$$

et donc $B_n \cap B_k = \varnothing$ pour tout $k < n$. Cela montre que les B_i sont disjoints.

(2b) $\mu(A) \leqslant \mu(D)$ Étant donné que $B_n \subset D$ pour tout n, l'égalité $A = D \setminus \bigcup_{n\geqslant 0} B_n$ peut être écrite

$$D = A \cup \bigcup_{n\geqslant 0} B_n \tag{14.638}$$

où à droite nous avons une union disjointe. Bref, au niveau des mesures nous avons

$$\mu(A) = \mu(D) - \sum_{n\geqslant 0} \mu(B_n) \leqslant \mu(D) \tag{14.639}$$

parce que $\mu(B_n) \geqslant 0$ pour tout n.

(3) $A \subset A_n$ Par définition $A = D \setminus \bigcup_{n\geqslant 0} B_n$ alors que $A_n = D \setminus \bigcup_{n=0}^{n-1} B_n$. Donc en partant de D, pour construire A, on enlève plus de choses que pour construire A_n. Donc $A \subset A_n$.

(4) **A est une partie négative** Supposons que A n'est pas une partie négative : il existe A' mesurable dans A tel que $\mu(A') > 0$. En particulier,

$$A' \subset A \subset A_n. \tag{14.640}$$

La partie A' est donc dans l'ensemble sur lequel on prend le supremum pour construire t_n. En d'autres termes, $t_n \geqslant \mu(A') > 0$, et donc

$$\mu(B_n) \geqslant \frac{t_n}{2} \geqslant \frac{\mu(A')}{2}. \tag{14.641}$$

Et avec tout ça,

$$\mu(A) = \mu(D) - \sum_{n\geqslant 0} \mu(B_n) \leqslant \mu(D) - \sum_{n\geqslant 0} \frac{\mu(A)}{2} = -\infty. \tag{14.642}$$

EQooYNJFooKJCfFT

(5) **Conclusion** Nous avons dit, dans la définition d'une mesure négative que μ ne prenait jamais la valeur $-\infty$. L'inégalité (14.642) est donc une contradiction et nous concluons que A est une partie négative pour μ.

□

LEMooVFEWooOyXcPS

Lemme 14.228 ([494]).
Soient une mesure positive μ et une mesure signée ν. Si $\nu \perp \mu$ et si $\nu \ll \mu$, alors $\nu = 0$

Démonstration. Vu que $\mu \perp \nu$, il existe $E \in \mathcal{A}$ tel que

$$\begin{cases} \mu(A) = \mu(A \cap E) & \text{(14.643a)} \\ \nu(A) = \nu(A \cap E^c) & \text{(14.643b)} \end{cases}$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Soit $A \in \mathcal{A}$. Nous avons $\mu(A \cap E^c) = 0$ parce que $\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$ et $\mu(A \cap E) = \mu(A)$. Étant donné que $\nu \ll \mu$ nous avons aussi $\nu(A \cap E^c) = 0$. Donc

$$\nu(A) = \nu(A \cap E^c) = 0. \tag{14.644}$$

□

LEMooABVVooMvxlRo

Lemme 14.229.
Soient une mesure positive μ ainsi que deux mesures signées ν_1, ν_2 telles que $\nu_1 \perp \mu$ et $\nu_2 \perp \mu$. Alors $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

Démonstration. Nous avons des parties $E_1, F_1, E_2, F_2 \in \mathcal{A}$ telles que

$$\begin{cases} \nu_1(A) = \nu_1(A \cap F_1) & \text{(14.645a)} \\ \mu(A) = \mu(A \cap E_1), & \text{(14.645b)} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \nu_2(A) = \nu_2(A \cap F_2) & \text{(14.646a)} \\ \mu(A) = \mu(A \cap E_2), & \text{(14.646b)} \end{cases}$$

et $E_1 \cap F_1 = \varnothing$ et $E_2 \cap F_2 = \varnothing$. Nous posons $E_0 = E_1 \cap E_2$ et $F_0 = F_1 \cup F_2$, et nous allons prouver que $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$ vérifiant que le couple (E_0, F_0) vérifie les conditions de la définition 14.221.

(1) $E_0 \cap F_0 = \varnothing$ Nous avons :

$$E_0 \cap F_0 = (E_1 \cap E_2) \cap (F_1 \cup F_2) = (E_1 \cap E_2 \cap F_1) \cup (E_1 \cap E_2 \cap F_2) = \varnothing. \tag{14.647}$$

(2) $\mu(A) = \mu(A \cap E_0)$ Nous prouvons maintenant que $\mu(A) = \mu(A \cap E_0)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Nous écrivons d'abord

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) = \mu(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu\big(A \cap (E_1 \setminus E_2)\big), \tag{14.648}$$

EQooTMOKooEulFmx

et, de la même façon,

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_2) = \mu(A \cap E_2 \cap E_1) + \mu\big(A \cap (E_2 \setminus E_1)\big). \tag{14.649}$$

En faisant la différence entre les deux, $0 = \mu\big(A \cap (E_1 \setminus E_2)\big) - \mu\big(A \cap (E_2 \setminus E_1)\big)$, c'est-à-dire

$$\mu\big(A \cap (E_1 \setminus E_2)\big) = \mu\big(A \cap (E_2 \setminus E_1)\big). \tag{14.650}$$

En particulier pour $A = \Omega$ nous avons

$$\mu(E_1 \setminus E_2) = \mu(E_2 \setminus E_1). \tag{14.651}$$

Nous savons, par définition de E_1 que $\mu(A) = \mu(A \cap E_1)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Nous écrivons cette égalité pour $A = (E_2 \setminus E_1)$:

$$\mu(E_1 \setminus E_2) = \mu\big((E_2 \setminus E_1) \cap E_1\big) = \mu(\varnothing) = 0. \tag{14.652}$$

Nous en déduisons que $\mu(E_2 \setminus E_1) = 0$ et donc que $\mu\big(A \cap (E_2 \setminus E_1)\big) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Et enfin nous repartons de (14.648) :

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) = \underbrace{\mu(A \cap E_1 \cap E_2)}_{=\mu(A \cap E_0)} + \underbrace{\mu\big(A \cap (E_1 \setminus E_2)\big)}_{=0}, \tag{14.653}$$

autrement dit, $\mu(A) = \mu(A \cap E_0)$, comme nous devions prouver.

(3) $\nu_i(A) = \nu_i(A \cap F_0)$ Nous allons prouver que pour $i = 1, 2$ nous avons $\nu_i(A) = \nu_i(A \cap F_0)$. Nous commençons par écrire $A \cap F_0$ comme union disjointe en partant de la proposition 1.43 :

$$\begin{aligned} A \cap F_0 &= (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2) && \text{(14.654a)} \\ &= (A \cap F_1) \cup \big((A \cap F_2) \setminus (A \cap F_1)\big). && \text{cf. justif.} \quad \text{(14.654b)} \end{aligned}$$

Justification : pour tout ensembles X et Y nous avons $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$.

Ayant écrit $A \cap F_0$ comme une union disjointe, nous pouvons calculer ν_1 dessus. Nous posons $R = (A \cap F_2) \setminus (A \cap F_1)$, et nous calculons un peu :

$$\nu_1(A \cap F_0) = \nu_1(A \cap F_1) + \nu_1(R) = \nu_1(A) + \nu_1(R \cap F_1) = \nu_1(A) + \nu_1(\varnothing) = \nu_1(A). \tag{14.655}$$

Le même jeu en permutant les rôles de 1 et 2 donne $\nu_2(A \cap F_0) = \nu_2(A)$.

(4) **Conclusion** Nous avons $\nu_1(A) = \nu_1(A \cap F_0)$ et $\nu_2(A) = \nu_2(A \cap F_0)$. En faisant la somme, c'est bon.

□

PROPooIBLHooTMfEJW

Proposition-Définition 14.230 (Décomposition de Hahn[494])**.**
Soit une mesure signée μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Il existe des parties mesurables $N, P \subset \Omega$ telles que

(1) $N \cup P = \Omega$,

(2) $N \cap P = \varnothing$,

(3) N *est négatif pour* μ,

(4) P *est positive pour* μ.

Un tel couple (N, P) est une ***décomposition de Hahn*** *pour μ.*
De plus si (N, P) et (N', P') sont deux décompositions de Hahn pour μ, alors les parties[72] *$N \Delta N'$ et $P \Delta P'$ sont nulles pour μ.*

Démonstration. D'abord l'existence puis l'« unicité ».

Existence

Nous posons d'abord $N_0 = \varnothing$, et nous construisons des parties N_k par récurrence. Nous posons

$$s_n = \inf\{\mu(D) \text{ tel que } D \subset \Omega \setminus N_n, D \in \mathcal{A}\}. \tag{14.656}$$

Notes : il est possible d'avoir $s_n = -\infty$, et comme $D = \varnothing$ fonctionne dans l'infimum, nous avons $s_n \leqslant 0$. Vu que s_n est un infimum et qu'il est négatif, il existe une partie mesurable $D_n \subset \Omega \setminus N_n$ telle que $\mu(D_n) \leqslant \frac{s_n}{2}$. Pour cette partie nous avons

$$\mu(D_n) \leqslant \frac{s_n}{2} \leqslant 0. \tag{14.657}$$

La proposition 14.227 dit qu'il existe une partie mesurable $A_n \subset D_n$ qui est négative pour μ et qui vérifie $\mu(A_n) \leqslant \mu(D_n)$. Nous posons alors, pour notre récurrence :

$$N_{n+1} = N_n \cup A_n. \tag{14.658}$$

Nous posons ensuite

$$\begin{cases} N = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n & \text{(14.659a)} \\ P = \Omega \setminus N, & \text{(14.659b)} \end{cases}$$

et nous prouvons que (N, P) fonctionne. Nous avons immédiatement que $N \cup P = \Omega$ et que $N \cap P = \varnothing$.

(1) N **est négative pour** μ Nous avons, pour tout n que $N_n = \varnothing \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}$. Donc $N_n \subset N$ pour tout $n \geqslant 1$.

Notons aussi que les A_n sont disjoints. En effet

$$A_n \subset D_n \subset \Omega \setminus N_n = \Omega \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}). \tag{14.660}$$

Donc A_n n'intersecte aucun des A_k avec $k < n$.

Nous pouvons maintenant que N est une partie négative. Soit $B \subset N$. Notons que chaque A_n est négatif, donc $\mu(A_n \cap B) \leqslant 0$ parce que, évidemment, $A_n \cap B \subset B$. Étant donné que l'union $N = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n$ est disjointe, nous avons

$$\mu(B) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(B \cap A_n) \leqslant 0. \tag{14.661}$$

Donc $m(B) \leqslant 0$ et nous avons montré que N est une partie négative.

[72] La partie $A \Delta B$ est la différence symétrique (définition 1.47). Dire que $N \Delta N'$ est nulle pour μ signifie que pratiquement tout est dans l'intersection. Nous avons donc unicité de la décomposition à partie nulle près.

(2) P **est positive pour** μ Nous y allons par l'absurde. Supposons avoir $D \subset P$ avec $\mu(D) < 0$. Nous avons déjà vu que $N_n \subset N$, donc $\Omega \setminus N \subset \Omega \setminus N_n$. En ce qui concerne D,

$$D \subset P = \Omega \setminus N \subset \Omega \setminus N_n. \tag{14.662}$$

Donc $s_n \leqslant \mu(D) < 0$. Nous avons alors le calcul

$$\begin{aligned}
\mu(N) &= \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n) && \text{(14.663a)}\\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 0} \mu(D_n) && \text{cf. justif.} \quad \text{(14.663b)}\\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{\mu(D)}{2} && \text{cf.justif.} \quad \text{(14.663c)}\\
&= -\infty. && \text{(14.663d)}
\end{aligned}$$

ITEMooMRFYooZjBiQM

SUBEQooJRGSooDyMQhI

Justifications.

- Pour (14.663b). Nous avons $\mu(A_n) \leqslant \mu(D_n)$ par choix de A_n.
- Pour (14.663c). Parce que[73] $\mu(D_n) \leqslant \frac{s_n}{2} \leqslant \frac{\mu(D)}{2}$.

Vu que μ ne prend pas la valeur $-\infty$, nous avons une contradiction. Nous en déduisons que P est positive pour μ.

« Unicité »

Supposons avoir des couples (N, P) et (N', P'). Nous avons d'abord

$$P \setminus P' = P \cap N' \tag{14.664}$$

parce que si $x \in P \setminus P'$, alors $x \in P$ (ça c'est facile), et $x \in P \setminus P' \subset \Omega \setminus P' = N'$. Dans l'autre sens si $x \in P \cap N'$, alors $x \in N' \subset \Omega \cap P'$. De même nous avons $P' \setminus P = P' \cap N$.

En utilisant la formule (1.23) de la différence symétrique,

$$P \Delta P' = (P \setminus P') \cup (P' \setminus P) = (P \cap N') \cup (P' \cap N). \tag{14.665}$$

EQooUZFVooDqAnPF

Nous trouvons de la même façon

$$N \Delta N' = (P \cap N') \cup (P' \cap N). \tag{14.666}$$

EQooLPBIooTExEkK

En ce qui concerne les mesures, $P \cap N' \subset P$ et P est positif, donc $\mu(P \cap N') \geqslant 0$. Mais $P \cap N' \subset N'$ et N' est négatif, donc $\mu(P \cap N')) \leqslant 0$.

Nous en déduisons que $\mu(P \cap N') = 0$. Pour la même raison, $\mu(P' \cap N) = 0$. Nous déduisons alors de (14.665) et (14.666) que $\mu(P \Delta P') = \mu(N \Delta N') = 0$. □

Lemme 14.231.
Soit une décomposition de Hahn (N, P) pour la mesure signée μ. Nous posons

$$\mu_-(A) = -\mu(A \cap N) \tag{14.667a}$$
$$\mu_+(A) = \mu(A \cap P). \tag{14.667b}$$

Alors

(1) μ_- et μ_+ sont des mesures positives.

(2) μ_- prend ses valeurs dans $[0, \infty[$

Démonstration. Vu que N est négative pour μ, pour toute partie mesurable A, nous avons $\mu(A \cap N) \leqslant 0$ et donc

$$\mu_-(A) = -\mu(A \cap N) \geqslant 0. \tag{14.668}$$

Par ailleurs μ prend ses valeurs dans $]-\infty, \infty]$. De cette façon $-\mu$ ne peut pas descendre jusqu'à $-\infty$. □

[73] Je n'ai vu ce passage correctement justifié nulle part. Voir ma question sur le Wikipédia anglophone[519], qui fait la même « faute » que [494]. Écrivez-moi si vous comprenez leur démarche.

DEFooGICVooKZWLrB

Définition 14.232 (Décomposition de Jordan)**.**
*Soit une mesure signée μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Un couple de mesures positives (μ_-, μ_+) est une **décomposition de Jordan** de μ si il existe une partie mesurable E telle que*

(1) $\mu_-(E) = 0$

(2) $\mu_+(\Omega \setminus E) = 0$

(3) $\mu = \mu_+ - \mu_-$.

LEMooTVFRooAPdbuP

Lemme 14.233 ([1])**.**
Soit une mesure signée μ et une décomposition de Jordan (μ_-, μ_+). Si E est un mesurable vérifiant les conditions de la définition 14.232, alors $(\Omega \setminus E, E)$ est une décomposition de Hahn.

Démonstration. Supposons que $A \subset E$. Alors $\mu_-(A) = 0$ parce que $\mu_-(E) = 0$ et μ_- est une mesure positive. Nous avons alors

$$\mu(A) = \mu_+(A) - \mu_-(A) = \mu_+(A) \geqslant 0. \tag{14.669}$$

Cela prouve que E est une partie positive pour μ. Le même raisonnement montre que $\Omega \setminus E$ est une partie négative pour μ. □

DEFooDYFPooITNRlI

Proposition 14.234 (Décomposition de Jordan[494])**.**
Soit une mesure mesure signée μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

(1) Il existe une unique décomposition de Jordan (μ_-, μ_+) pour μ.

ITEMooDMVXooTXBFnM

(2) Si (N, P) est une décomposition de Hahn, alors la décomposition de Jordan de μ est donnée par

$$\mu_-(A) = -\mu(A \cap N) \tag{14.670a}$$
$$\mu_+(A) = \mu(A \cap P). \tag{14.670b}$$

Démonstration. Nous prouvons l'existence directement en prouvant le point (2). Vérifions les trois points de la définition 14.234. Nous posons $E = P$, et nous vérifions

$$\mu_-(E) = -\mu(E \cap N) = -\mu(E \cap N) = -\mu(\varnothing) = 0. \tag{14.671}$$

, et de même $\mu_+(\Omega \setminus E) = \mu_+(N) = \mu(A \cap N) = 0$. Enfin, vu que $\Omega = N \cup P$ est une union disjointe, nous avons $\mu(A) = \mu(A \cap N) + \mu(A \cap P) = -\mu_-(A) + \mu_+(A)$.

Il nous reste à prouver l'unicité de la décomposition de Jordan. Nous supposons que (μ_-, μ_+) et (ν_-, ν_+) sont des décompositions de Jordan de μ. Nous avons donc des mesurables E et F tels que $\mu = \nu_+ - \nu_- = \mu_+ - \mu_-$ et

$$\begin{cases} \mu_-(E) = 0 & \text{(14.672a)} \\ \mu_+(\Omega \setminus E) = 0 & \text{(14.672b)} \\ \nu_-(F) = 0 & \text{(14.672c)} \\ \nu_+(\Omega \setminus F) = 0. & \text{(14.672d)} \end{cases}$$

Le lemme 14.233 nous indique que $(\Omega \setminus E, E)$ et $(\Omega \setminus F, F)$ sont des décompositions de Hahn pour μ. Aussi, pour prendre des notations plus intuitives, nous posons

$$\begin{aligned} N &= \Omega \setminus E & P &= E \\ N' &= \Omega \setminus F & P' &= F \\ \mu'_- &= \nu_- & \mu'_+ &= \nu_+ \end{aligned} \tag{14.673}$$

La partie unicité de la décomposition de Hahn 14.230 implique que $N \Delta N'$ et $P \Delta P'$ sont des parties nulles pour μ. Étant donné que $N' \setminus N \subset N \Delta N'$, la partie $N' \setminus N$ est également nulle pour μ. Idem pour $N \setminus N'$. Enfin nous avons l'union disjointe

$$N' = (N' \cap N) \cup (N' \setminus N), \tag{14.674}$$

et nous pouvons calculer

$$\begin{aligned}
\mu'_-(A) &= -\mu(A\cap N') && (14.675a)\\
&= -\mu\big((A\cap N')\cap(N'\cap N)\big)-\mu\big((A\cap N')\cap(N'\setminus N)\big) && (14.675b)\\
&= -\mu(A\cap N\cap N')-\mu\big(A\cap(N'\setminus N)\big) && (14.675c)\\
&= -\mu\big(A\cap N\cap N'\big)-\mu\big(A\cap(N\setminus N')\big) && \text{cf. justif} \quad (14.675d)\\
&= -\mu(A\cap N) && \text{cf. justif} \quad (14.675e)\\
&= \mu_-(A). && (14.675f)
\end{aligned}$$

SUBEQooFQVAooNNxDHX
SUBEQooKCMDooWeFCXv

Justifications.

- Pour (14.675d). Nous avons
$$\mu\big(A\cap(N\setminus N')\big)=\mu\big(A\cap(N'\setminus N)\big)=0 \tag{14.676}$$
parce que $N\setminus N'$ et $N'\setminus N$ sont des parties nulles pour μ. Bref le passage (14.675d) consiste à remplacer un truc nul par un autre.
- Pour (14.675e). Nous avons l'union disjointe $N=(N'\cap N)\cup(N\setminus N')$.

Nous avons prouvé que $\mu'_-(A)=\mu_-(A)$, et donc que $\mu'_-=\mu_-$. Nous faisons de même pour $\mu'_+=\mu_+$. □

THOooKSISooPAqZcp

Théorème 14.235 (Radon-Nikodym[494, 1])**.**
Soit un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$. Nous considérons

(1) μ, une mesure positive σ-finie.

(2) ν, une mesure signée[74] ou non telle que $|\nu|$ est σ-finie.

Alors

(1) Il existe un unique couple de mesures signées ν_a,ν_s tel que
$$\begin{cases}\nu=\nu_a+\nu_s & (14.677a)\\ \nu_a\ll\mu & (14.677b)\\ \nu_s\perp\mu. & (14.677c)\end{cases}$$

(2) Il existe une unique (à égalité presque partout près) fonction mesurable et intégrable[75] $f:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ telle que
$$\nu_a(A)=\int_A f\,d\mu \tag{14.678}$$
pour tout $A\in\mathcal{A}$.

(3) Si $\nu\geqslant 0$ alors $\nu_a\geqslant 0$, $\nu_s\geqslant 0$ et $f\geqslant 0$.

Démonstration. Nous commençons par l'unicité.

Unicité des mesures et de la fonction

Séparément.

(1) **Unicité des mesures** Nous supposons avoir deux tels couples (ν_a,ν_s) et (ν'_a,ν'_s). Nous avons donc $\nu_a+\nu_s=\nu$ et $\nu'_a+\nu'_s=\nu$. En faisant la différence,
$$\nu_a-\nu'_a=(\nu-\nu_s)-(\nu-\nu'_s)=\nu'_s-\nu_s. \tag{14.679}$$
D'autre part, vu que $\nu_s\perp\mu$ et $\nu'_s\perp\mu$, le lemme 14.229 donne $\nu'_s-\nu_s\perp\mu$. Enfin $\nu_a\ll\mu$ et $\nu'_a\ll\mu$, donc $\nu_a-\nu'_a\ll\mu$. Au final nous avons
$$\begin{cases}\nu_a-\nu'_a\ll\mu & (14.680a)\\ \nu'_s-\nu_s\perp\mu & (14.680b)\\ \nu_a-\nu'_a=\nu'_s-\nu_s. & (14.680c)\end{cases}$$
Tout cela avec le lemme 14.228 nous donne $\nu_a-\nu'_a=\nu_s-\nu'_s=0$.

[74] Mesure signée, définition 14.18.
[75] Intégrale ne signifie pas L^1. Nous demandons juste que l'intégrale existe, si elle vaut ∞, c'est bon pour nous.

(2) **Unicité de la fonction**

Soient deux fonctions $f,g\colon\Omega\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ vérifiant la contrainte. Pour toute partie $A\in\mathcal{A}$, nous avons

$$\nu(A)=\int_A f d\mu=\int_A g d\mu. \tag{14.681}$$

Nous écrivons cette égalité pour la partie $A=\{f>g\}$:

$$\int_{\{f>g\}}(f-g)d\mu=0. \tag{14.682}$$

Vu que sur la partie $\{f>g\}$ nous avons $f-g>0$, nous avons $\mu\big(\{f>g\}\big)=0$ par le lemme 14.201. Nous trouvons de même que $\mu\big(\{f<g\}\big)=0$. Au final, nous avons $f=g$ presque partout.

———————— Existence, μ positive finie, ν positive et finie ————————

Nous commençons par prouver la partie existence en supposant que μ est finie et que ν est positive et finie. Nous introduisons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{H}=\left\{f\colon\Omega\to\mathbb{R}^+\cup\{\infty\}\text{ tel que }\begin{cases}f\text{est mesurable}\\ \int_A f d\mu\leqslant\nu(A)\text{ pour tout }A\in\mathcal{A}\end{cases}\right\} \tag{14.683}$$

L'ensemble $\mathcal{H}$ n'est pas vide parce que la fonction $f=0$ est dedans (ici nous utilisons l'hypothèse supplémentaire que $\nu\geqslant 0$). Nous notons

$$\alpha=\sup\{\int_\Omega f d\mu\text{ tel que }f\in\mathcal{H}\}. \tag{14.684}$$

Nous avons $0\leqslant\alpha\leqslant\mu(\Omega)<\infty$. En vertu du lemme 1.582 nous pouvons prendre une suite (f_n) dans $\mathcal{H}$ telle que

$$\alpha=\lim n\to\infty\int_\Omega f_n d\mu \tag{14.685}$$

et

$$\int_\Omega f_n d\mu\leqslant\int_\Omega f_{n+1}d\mu. \tag{14.686}$$

(1) **Les fonctions g_n**

Pour chaque $n\geqslant 1$ nous notons

$$\begin{aligned}g_n\colon\Omega&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\max\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}.\end{aligned} \tag{14.687}$$

Nous nous fixons provisoirement un n.

(2) $g_n\in\mathcal{H}$

Pour chaque $x\in\Omega$, il existe un $i\in\{1,\dots,n\}$ tel que $g_n(x)=f_i(x)$. Pour $A\in\mathcal{A}$ nous posons

$$A_1=\{x\in\Omega\text{ tel que }g_n(x)=f_1(x)\} \tag{14.688a}$$
$$A_2=\{x\in\Omega\text{ tel que }g_n(x)=f_2(x)\}\setminus A_1 \tag{14.688b}$$
$$\vdots \tag{14.688c}$$
$$A_{k+1}=\{x\in\Omega\text{ tel que }g_n(x)=f_{k+1}(x)\}\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_k) \tag{14.688d}$$
$$\vdots \tag{14.688e}$$
$$A_n=\{x\in\Omega\text{ tel que }g_n(x)=f_n(x)\}\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_{n-1}) \tag{14.688f}$$

Ces ensembles sont disjoints et $A=\bigcup_{i=1}^n A_n$, de telle sorte que

$$\int_A g_n d\mu=\sum_{i=1}^n\int_{A_i}g_n d\mu \tag{14.689a}$$
$$=\sum_{i=1}^n\int_{A_i}f_i d\mu \tag{14.689b}$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^n\nu(A_i)\text{cf. justif} \tag{14.689c}$$
$$=\nu(A). \tag{14.689d}$$

SUBEQooIULRooCXJmzd

Justification de (14.689c). Vu que $f_i \in \mathcal{H}$, nous avons $\int_{A_i} f_i \leqslant \nu(A_i)$. Bref, nous avons prouvé que $\int_A g_n d\mu \leqslant \nu(A)$, et donc que $g_n \in \mathcal{H}$.

(3) g_n **est mesurable** Les applications f_n sont mesurables, et g_n est définie comme un maximum sur les $f_i(x)$. Donc g_n est mesurable (lemme 14.106). Nous ne fixons plus le n. La suite (g_n) est croissante. Donc la limite $f = \lim_{n\to\infty} g_n$ existe, et elle est mesurable par la proposition 14.110.

(4) $\int_\alpha f d\mu = \alpha$ SPITEMooGLPCooBjBAdm

Le théorème de la convergence monotone 14.178 va plus loin et nous dit que f est intégrable et

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu \leqslant \nu(A). \tag{14.690}$$ EQooBGAOooCdaIID

Nous avons donc encore $f \in \mathcal{H}$ et donc aussi

$$\int_\Omega f d\mu \leqslant \alpha. \tag{14.691}$$

Mais cette inégalité tient aussi dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f d\mu &= \lim \int_\Omega g_n d\mu && (14.692a)\\ &\geqslant \lim \int_\Omega f_n d\mu && (14.692b)\\ &= \alpha. && (14.692c)\end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé que $\int_\Omega f d\mu = \alpha < \infty$, et donc que $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

(5) **Résumé pour l'instant** Nous avons construit une fonction $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\int_A f d\mu \leqslant \nu(A). \tag{14.693}$$

(6) **Les mesures** Nous définissons à présent les applications ν_a et ν_s en espérant qu'elles fonctionneront. D'abord nous posons

$$\nu_a(A) = \int_A f d\mu. \tag{14.694}$$ EQooVKTXooCwZdha

Et ensuite nous posons $\nu_s = \nu - \nu_a$. Il nous reste à prouver que f, ν_a et ν_s satisfont à toutes les conditions.

(7) $\nu_a \ll \mu$

Si $\mu(A) = 0$ nous avons

$$\nu_a(A) = \int_A f d\mu = 0 \tag{14.695}$$

par le lemme 14.203.

(8) ν_s **est positive**

Nous avons

$$\nu_s(A) = \nu(A) - \nu_a(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu \geqslant 0, \tag{14.696}$$

par l'inégalité (14.690).

(9) ν_s **est finie**

Nous savons que ν_a et finie et que $\int_\Omega f d\mu = \alpha < \infty$. Donc ν_s est finie.

(10) $\nu_s \perp \mu$

Nous introduisons la mesure signée $\lambda_n = \nu_s - \frac{1}{n}\mu$, et nous considérons la décomposition de Hahn pour chacun des λ_n (proposition 14.230) : les couples (N_n, P_n). Nous considérons aussi les fonctions $h_n = f + \frac{1}{n}\mathbb{1}_{P_n}$.

(10a) $h_n \in \mathcal{H}$ La fonction h_n est mesurables parce que f et P_n le sont. En termes d'intégrale nous avons

$$\begin{aligned}
\int_A h_n d\mu &= \int_A f d\mu + \frac{1}{n}\mu(A \cap P_n) && (14.697a)\\
&= \nu_a(A) + \nu_s(A \cap P_n) - \lambda_n(A \cap P_n) && \text{cf. justif} \quad (14.697b)\\
&= \nu(A) - \nu_s(A) + \nu_s(A \cap P_n) - \lambda_n(A \cap P_n) && (14.697c)\\
&= \nu(A) - \big(\nu_s(A \cap P_n) + \nu_s(A \cap N_n)\big) + \nu_s(A \cap P_n) && (14.697d)\\
&\quad - \lambda_n(A \cap P_n) && \text{cf. justif.}\\
&= \nu(A) - \nu_s(A \cap N_n) - \lambda_n(A \cap P_n) && (14.697e)\\
&\leqslant \nu(A) && \text{cf. justif.} \quad (14.697f)
\end{aligned}$$

SUBEQooAVCMooXXSXZO SUEQooUJUDooLFrBcR SUBEQooACEXooWCHuag

Justifications.

- Pour (14.697b). La définition (14.694) de ν_a).
- Pour (14.697d). Parce que $P_n \cup N_n = \Omega$ est une union disjointe.
- Pour (14.697f). Parce que ν_s est une mesure positive. Donc $\nu_s(A \cap N_n) \geqslant 0$. Et aussi parce que, par construction, λ_n est positive sur P_n.

Bref, nous avons déjà prouvé que $\int_A h_n d\mu \leqslant \nu(A)$. Cela signifie que $h_n \in \mathcal{H}$.

(10b) $\mu(P_n) = 0$ Nous avons vu en (4) que $\int_\Omega f d\mu = \alpha$. Nous pouvons alors faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\alpha &\geqslant \int_\Omega h_n d\mu && \text{cf.justi.} \quad (14.698a)\\
&= \int_\Omega df\mu + \frac{1}{n}\int_\Omega \mathbb{1}_{P_n} d\mu && (14.698b)\\
&= \alpha + \frac{1}{n}\mu(P_n). && (14.698c)
\end{aligned}$$

SUBEQooUHXDooDJIXSI

Justification pour (14.698a) : parce que $h_n \in \mathcal{H}$ et que α est le supremum.
En soustrayant α des deux côtés, nous avons $0 \geqslant \frac{1}{n}\mu(P_n)$ pour tout n. Comme μ est une mesure positive, nous en déduisons que $\mu(P_n) = 0$.

(10c) **Définition de P** Nous posons $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$.

(10d) $\mu(P) = 0$ Vu que $\mu(P_n) = 0$ pour tout n, nous avons $\mu(P) \leqslant \sum_n \mu(P_n) = 0$.

(10e) $\nu_s(\Omega \setminus P) = 0$
Nous avons $\Omega \setminus P \subset \Omega \setminus P_n = N_n$. Donc pour tout n nous avons

$$\lambda_n(\Omega \setminus P) \leqslant \lambda_n(N_n) = 0. \tag{14.699}$$

En utilisant la définition de λ_n nous avons

$$0 \geqslant \lambda_n(\Omega \setminus P) = \nu_s(\Omega \setminus P) - \frac{1}{n}\mu(\Omega \setminus P), \tag{14.700}$$

et donc, pour tout n,

$$\nu_s(\Omega \setminus P) \leqslant \frac{1}{n}\mu(\Omega \setminus P). \tag{14.701}$$

En faisant $n \to \infty$ nous trouvons $\nu_s(\Omega \setminus P) \leqslant 0$. Et comme ν_s est une mesure positive, nous en déduisons que $\nu_s(\Omega \setminus P) = 0$.

Nous avons fini de prouver que $\nu_s \perp \mu$.

Nous avons donc terminé la première partie de la preuve, c'est-à-dire la partie où nous supposions que μ est finie et ν est positive et finie. Nous passons à présent à un cas un peu plus général.

Existence, μ positive σ-finie, ν positive et σ-finie

Vu que μ et ν sont σ-finie, le lemme 14.20 dit qu'il existe des X_n mesurables tels que $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} X_n$, $\mu(X_n) < \infty$ et$\nu(X_n) < \infty$. Nous supposons de plus que ce X_n sont disjoints[76]

[76] Si ce n'est pas le cas, poser $Y_{n+1} = X_{n+1} \setminus Y_n$.

Nous considérons à présent les mesures finies μ_n et ν_n définies par

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap X_n) \tag{14.702a}$$
$$\nu_n(A) = \nu(A \cap X_n) \tag{14.702b}$$
$$\tag{14.702c}$$

Par la partie déjà faite, nous pouvons faire une décomposition pour chaque n : il existe des mesures $\nu_{n,a}$, $\nu_{n,s}$ et une fonction $f_n \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telles que SUBEQSooLONIooAksRgK

$$\begin{cases} \nu_{n,a}(A) = \int_A f_n d\mu_n & (14.703a) \\ \nu_n = \nu_{n,a} + \nu_{n,s} & (14.703b) \\ \nu_{n,a} \ll \mu_n & (14.703c) \\ \nu_{n,s} \perp \mu_n. & (14.703d) \end{cases}$$

Nous allons directement changer les f_n pour qu'ils soient plus faciles à traiter. Nous posons[77]

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in X_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.704}$$

Pour ces fonctions nous avons, parce que μ_n est nulle en dehors de X_n,

$$\int_A g_n d\mu_n = \int_{A \cap X_n} g_n d\mu_n = \int_{A \cap X_n} f_n d\mu_n = \int_A f_n d\mu_n = \nu_{n,a}(A). \tag{14.705}$$

Autrement dit, les fonctions g_n fonctionnent aussi bien que les fonctions f_n. Pour ne pas alourdir les notations, nous gardons (14.703), mais nous supposons que f_n est nulle en dehors de X_n.

Notez aussi que pour tout $A \in \mathcal{A}$ nous avons l'union disjointe $A = \bigcup A \cap X_n$, de telle sorte que

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A \cap X_n) = \sum_n \mu_n(A), \tag{14.706}$$

et nous pouvons écrire

$$\mu = \sum_{n \geqslant 0} \mu_n. \tag{14.707}$$

Nous posons

$$\begin{cases} f = \sum_{n \geqslant 1} f_n & (14.708a) \\ \nu_a = \sum_{n \geqslant 1} \nu_{n,a} & (14.708b) \\ \nu_s = \sum_{n \geqslant 1} \nu_{s,a}, & (14.708c) \end{cases}$$

et nous prouvons que cela fait l'affaire. Notons que les fonctions f_n sont L^1 ; cela ne signifie pas que f soit L^1, mais nous ne le demandons pas. La fonction f est certainement intégrable parce qu'elle est positive. Au pire $\int_A f d\mu = \infty$ pour certains A. C'est la vie.

Nous devons vérifier les points suivants :

- $\nu_a(A) = \int_A f d\mu$
- $\nu = \nu_a + \nu_s$
- $\nu_a \ll \mu$
- $\nu_s \perp \mu$.

[77] Cette partie est de l'invention personnelle. J'espère que c'est correct. Redoublez de vigilance.

(1) $\int_A df\mu = \nu(A)$ Voici un calcul :

$$\begin{aligned}
\int_A f d\mu &= \int_A \sum_n f_n d\mu && (14.709a)\\
&= \sum_k \int_{A\cap X_k} (\sum_n f_n) d\mu_k && \text{cf. justif.} \quad (14.709b)\\
&= \sum_k \sum_n \int_{A\cap X_k} f_n d\mu_k && \text{cf. justif.} \quad (14.709c)\\
&= \sum_k \int_{A\cap X_k} f_k d\mu_k && \text{cf. justif.} \quad (14.709d)\\
&= \sum_k \nu_{k,a}(A) && (14.709e)\\
&= \nu_a(A). && (14.709f)
\end{aligned}$$

SUBEQooWILAooLqholj SUQEQooMIVJooBVexgH SUBEQooNKQZooUMJeUL

Justifications.

- Pour (14.709b). Les X_k sont disjoints et leur union fait Ω. Nous pouvons donc tranquillement couper l'intégrale en morceaux[78].
- Pour (14.709c). Nous permutons la somme et l'intégrale avec le corolaire 14.181 :
- Pour (14.709d). Vu que $f_n = 0$ sur X_k tant que $k \neq n$, tous les termes de la somme sur n sont nuls sauf le terme $n = k$.

Voilà déjà une belle première vérification de faite.

(2) $\nu = \nu_a + \nu_s$

La proposition 10.161 nous permet de fusionner les sommes :

$$\begin{aligned}
(\nu_a + \nu_s)(A) &= \sum_n \nu_{n,a}(A) + \sum_n \nu_{n,s}(A)\\
&= \sum_n \Big(\nu_{n,a}(A) + \nu_{n,s}(A)\Big) = \sum_n \nu_n(A) = \nu(A).
\end{aligned} \tag{14.710}$$

(3) $\nu_a \ll \mu$

Supposons que $\mu(A) = 0$. Vu que l'union $\Omega = \bigcup_n X_n$ est disjointe, nous avons

$$0 = \mu(A) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(A \cap X_n) = \sum_n \mu_n(A). \tag{14.711}$$

Nous en déduisons que $\mu_n(A) = 0$ pour tout n parce que μ_n est une mesure positive. Étant donné que $\mu_{n,a} \ll \mu_n$, nous avons $\nu_{n,a}(A) = 0$ pour chaque n. En faisant la somme,

$$\nu_a(A) = \sum_n \nu_{n,a}(A) = 0. \tag{14.712}$$

(4) $\nu_s \perp \mu$ Nous décomposons en petites parties.

(4a) $\nu_{n,s} \perp \mu_k$ **pour tout** n **et** k Nous vérifions la définition 14.221 avec $E = X_k$ et $F = X_n$, qui sont disjoints. Nous avons d'une part que $\mu_k(A) = \mu(A \cap X_k)$, et d'autre part que $\mu_k(A \cap X_k) = \mu(A \cap X_k \cap X_k) = \mu(A \cap X_k)$. Donc $\mu_k(A) = \mu_k(A \cap X_k)$.
Et d'autre part[79],

$$\begin{aligned}
\nu_{n,s}(A) &= \nu_n(A) - \nu_{n,a}(A) && (14.713a)\\
&= \nu(A \cap X - n) - \int_A f_n d\mu_n && (14.713b)\\
&= \nu(A \cap X - n) - \int_{A\cap X_n} f_n d\mu_n \qquad f_n = 0 \text{ sur } \Omega \setminus X_n. && (14.713c)\\
&= \nu(A \cap X_n) - \nu_{n,a}(A \cap X_n). && (14.713d)
\end{aligned}$$

Le membre de droite ne change pas si nous prenons $A \cap X_n$ au lieu de A. Donc le membre de gauche non plus. Nous en déduisons que $\nu_{n,s}(A) = \nu_{n,s}(A \cap X_n)$.

[78] Ce découpage est également de l'invention personnelle. Quadruplez de vigilance.
[79] Invention personnelle, octuplez de vigilance.

(4b) $\nu_{n,s} \perp \mu$ Appliquer le lemme 14.223 à $\mu = \sum_n \mu_n$.

(4c) $\nu_s \perp \mu$ Appliquer le lemme 14.223 à $\nu_s = \sum_n \nu_{n,s}$.

Existence, μ positive σ-finie, ν signée, $|\nu|$ σ-finie

Nous sommes enfin dans le cas général. Vu que $|\nu|$ est σ-finie, les deux parties de la décomposition de Jordan[80] (ν_-, ν_+) de ν sont des mesures positives σ-finies. Nous pouvons donc appliquer tout ce que nous venons de voir aux mesures ν_- et ν_+ séparément : nous avons des mesures positives $\nu_{+,a}$, $\nu_{+,s}$, ν_-, a et ν_-, s telles que

$$\begin{cases} \nu_{+,a} + \nu_{+,s} = \nu_+ & (14.714a)\\ \nu_{+,a} \ll \mu & (14.714b)\\ \nu_{+,s} \perp \mu & (14.714c)\\ \nu_{-,a} + \nu_{-,s} = \nu_- & (14.714d)\\ \nu_{-,a} \ll \mu & (14.714e)\\ \nu_{-,s} \perp \mu. & (14.714f) \end{cases}$$

Nous posons alors

$$\nu_a = \nu_{+,a} - \nu_{-,a} \quad (14.715a)$$
$$\nu_s = \nu_{+,s} - \nu_{-,s}, \quad (14.715b)$$

et nous vérifions que toutes les conditions sont respectée. D'abord

$$\nu_a + \nu_s = \nu_{+,a} - \nu_{-,a} + \nu_{+,s} - \nu_{-,s} = \nu_+ - \nu_- = \nu. \quad (14.716)$$

Ensuite si $\nu_{+,a} \ll \mu$ et $\nu_{-,a} \ll \mu$, nous avons $\nu_a = \nu_{+,a} - \nu_{-,a} \ll \mu$ parce que le fait d'être dominée passe à la somme finie[81]. Et enfin, le lemme 14.224 assure que $\nu_a \perp \mu$. □

CorZDkhwS

Corolaire 14.236.
Si μ est une mesure σ-finie dominée par la mesure σ-finie m, alors μ possède une unique fonction de densité.

CorDomDens

Corolaire 14.237.
Soient μ et m, deux mesures positives σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors m domine μ si et seulement si μ possède une densité par rapport à m.

Démonstration. Si μ est dominée par m, alors la décomposition $\mu = \mu + 0$ satisfait le théorème de Radon-Nikodym. Par conséquent il existe une fonction f telle que

$$\mu(A) = \int_A f dm. \quad (14.717)$$

Cette fonction est alors une densité pour μ par rapport à m.

Pour la réciproque, nous supposons que μ a une densité f par rapport à m, et que A est un ensemble de m-mesure nulle :

$$m(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A dm = 0. \quad (14.718)$$

Cela signifie que la fonction $\mathbb{1}_A$ est m-presque partout nulle. La fonction produit $\mathbb{1}_A f$ est également nulle m-presque partout, et par conséquent

$$\mu(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A f dm = 0. \quad (14.719)$$

□

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 14.238
Est-ce que la démonstration de cela ne demande pas la convergence monotone d'une façon ou d'une autre ?

[80] Proposition 14.234.

[81] Je n'ai pas dit que ça ne passait pas aux sommes dénombrables. Je suis prêt à parier que non, mais j'y ai pas vraiment réfléchi.

14.10.2 Mesure complexe

DefGKHLooYjocEt

Définition 14.239 (Mesure complexe[520]).
*Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, une **mesure complexe** est une application $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ telle que*

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) La σ-additivité : si les éléments $A_i \in \mathcal{A}$ sont disjoints, alors $\sum_i \mu(A_i) = \mu(\bigcup_i A_i)$.

Notons que la série $\sum_i \mu(A_i)$ est alors nécessairement absolument convergente. En effet changer l'ordre de la somme ne change pas l'union, et donc ne change pas la valeur de la somme. Si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une permutation,

$$\sum_i \mu(A_{\sigma(i)}) = \mu\Big(\bigcup_i A_{\sigma(i)}\Big) = \mu\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \sum_i \mu(A_i). \tag{14.720}$$

Le théorème 10.125 dit alors que la somme doit être absolument convergente.

ThoZZMGooKhRYaO

Théorème 14.240 (Radon-Nikodym complexe[82]).
Soit μ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et ν une mesure complexe. Alors

(1) Il existe un unique couple de mesures complexes ν_a, ν_s sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tel que

(1a) $\nu = \nu_a + \nu_s$
(1b) $\nu_a \ll \mu$
(1c) $\nu_s \perp \mu$.

(2) Ces mesures satisfont alors $\nu_a \perp \nu_s$.

(3) Il existe une fonction intégrable $h : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\nu_a = h\mu$.

(4) La fonction h est unique à μ-équivalence près.

ItemDIXOooFqOkgGv

(5) Si de plus $\nu \ll \mu$ alors $\nu = h\mu$.

Démonstration. No proof. □

RemSYRMooZPBhbQ

Remarque 14.241.
Le point (5) est souvent utilisé sous la forme

$$\nu(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega) h(\omega) d\mu(\omega) = \int_A h(\omega) d\mu(\omega). \tag{14.721}$$

14.10.3 Théorème d'approximation

ThoAFXXcVa

Théorème 14.242 (Théorème d'approximation, thème 24[502]).
Soit un espace topologique métrique (Ω, d). Nous considérons sa tribu des boréliens $\mathcal{B}or(\Omega)$ ainsi qu'une mesure μ sur $\big(\Omega, \mathcal{B}or(\Omega)\big)$.
Soient un ouvert $W \subset \Omega$ tel que $\mu(W) < \infty$ et un un borélien A tel que $A \subset W$. Soit aussi $\epsilon > 0$.
Il existe un fermé $F \subset W$ et une fonction $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant

(1) $F \subset A \subset W$,

ITEMooOZVJooSViuds

(2) $f|_F = 1$,

ITEMooIEFSooHXYZrK

(3) $f|_{W^c} = 0$

ITEMooSOQVooBbvfgy

(4) $\|f - \mathbb{1}_A\|_{L^1} < \epsilon$

Démonstration. Par le lemme 14.87, il existe un fermé F et un ouvert V tels que

$$F \subset A \subset V \subset W \tag{14.722}$$

et $\mu(V \setminus F) < \epsilon$. Nous posons alors

$$f(x) = \frac{d(x, V^c)}{d(x, V^c) + d(x, F)}. \tag{14.723}$$

[82] L'histoire du nom de ce théorème est intéressante. Lorsque monsieur et madame Rèmederdonnukodym apprirent que leurs amis, les Rèmedelaboulechevelue avaient appelé leur fils Théo, ils décidèrent d'en faire autant. C'est en souvenir de ces circonstances que monsieur Nikodym (prénommé Radon) décida de faire des math.

Le dénominateur de cette expression ne s'annule jamais parce que si $d(x,V^c)=0$, c'est que $x\in V^c$. Mais alors x n'est pas dans V et donc pas dans F non plus. La partie F étant fermée, $d(x,F)>0$ par lemme 7.199. De plus la fonction f est continue par le lemme 7.203.

(1) **Pour (2)** Si $x\in F$, alors $d(x,F)=0$, et f devient

$$f(x)=\frac{d(x,V^c)}{d(x,V^c)}=1 \tag{14.724}$$

(2) **Pour (3)** Si $x\in W^c$, alors $x\in V^c$ et $d(x,V^c)=0$ si bien que $f(x)=0$.

(3) **Pour (4)** Les premiers points montrent que

$$\mathbb{1}_F\leqslant f\leqslant\mathbb{1}_V. \tag{14.725}$$

Mais nous avons aussi, par ailleurs,

$$\mathbb{1}_F\leqslant\mathbb{1}_A\leqslant\mathbb{1}_V. \tag{14.726}$$

Ces deux encadrements, par le lemme 1.562 donnent l'encadrement

$$|f-\mathbb{1}_A|\leqslant\mathbb{1}_V-\mathbb{1}_F. \tag{14.727}$$

En ce qui concernent les intégrales nous avons alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\mathbb{1}_A-f|&\leqslant\int_\Omega(\mathbb{1}_V-\mathbb{1}_F)d\mu &(14.728a)\\ &=\mu(V)-\mu(F) &(14.728b)\\ &<\epsilon. &(14.728c)\end{aligned}$$

SUBEQooVJDXooFtCelQ

Pour (14.728b), c'est le lemme 14.175.

□

14.11 Produit de mesures

Si vous cherchez le produit d'une mesure par une fonction, c'est la définition 14.212.

LemAQmWEmN

Lemme 14.243 (Propriété des sections[503])**.**
Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ des tribus sur les ensembles Ω_1 et Ω_2. Si $A\in\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ alors pour tout $x\in\Omega_1$ et $y\in\Omega_2$, les ensembles

subEqCTtPccK

$$A_1(y)=\{x\in\Omega_1\text{ tel que }(x,y)\in A\} \tag{14.729a}$$
$$A_2(x)=\{y\in\Omega_2\text{ tel que }(x,y)\in A\} \tag{14.729b}$$

sont mesurables.

Démonstration. Soit $y\in\Omega_2$; nous allons prouver le résultat pour $A_1(y)$. Pour cela nous notons

$$S=\{A\in\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2\text{ tel que }\forall y\in\Omega_2,A_1(y)\in\mathcal{A}_1\}, \tag{14.730}$$

et nous allons noter que S est une tribu contenant les rectangles. Par conséquent, S sera égal à $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$.

(1) **Les rectangles**
Considérons le rectangle $A=X\times Y$ et si $y\in\Omega_2$ alors

$$A_1(y)=\{x\in\Omega_1\text{ tel que }(x,y)\in X\times Y\}. \tag{14.731}$$

Donc soit $y\in Y$ alors $A_1(y)=X\in\mathcal{A}_1$, soit $y\notin Y$ et alors $A_1(y)=\varnothing\in\mathcal{A}_1$.

(2) **Tribu : ensemble complet**
Nous avons $\Omega_1\times\Omega_2\in S$ parce que c'est un rectangle.

(3) **Tribu : complémentaire** Soit $A \in S$. Montrons que $A^c \in S$. Nous avons d'abord

$$(A^c)_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A^c\}. \tag{14.732}$$

D'autre part

$$A_1(y)^c = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \notin A\} = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A^c\} = (A^c)_1(y). \tag{14.733}$$

Vu que $\mathcal{A}_1$ est une tribu et que par hypothèse $A_1(y) \in \mathcal{A}_1$, nous avons aussi $A_1(y)^c \in S$, et donc $(A^c)_1(y) \in \mathcal{A}_1$, ce qui prouve que $A^c \in S$.

(4) **Tribu : union dénombrable** Soit une suite $A_n \in S$. Nous avons

$$(\bigcup_n A_n)_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in \bigcup_n A_n\} \tag{14.734a}$$
$$= \bigcup_n \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A_n\} \tag{14.734b}$$
$$= \bigcup_n (A_n)_1(y), \tag{14.734c}$$

et ce dernier ensemble est dans $\mathcal{A}_1$ parce que c'est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}_1$.

Nous avons donc prouvé que S est une tribu contenant les rectangles, donc S contient au moins $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. □

Corolaire 14.244.
Si $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable[83] *sur $X \times Y$ alors pour chaque y dans Ω_2, la fonction*

$$\begin{aligned} f_y\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x,y) \end{aligned} \tag{14.735}$$

est mesurable.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (i.e. un borélien), et $y \in \Omega_2$. Nous avons

$$f_y^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in X \text{ tel que } f(x,y) \in \mathcal{O}\} = A_1(y) \tag{14.736}$$

où

$$A = \{(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \text{ tel que } f(x,y) \in \mathcal{O}\} = f^{-1}(\mathcal{O}). \tag{14.737}$$

Ce dernier est mesurable parce que f l'est. □

ThoCCIsLhO

Théorème 14.245 ([503][84])**.**
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Alors les fonctions[85]

$$x \mapsto \mu_2\big(A_2(x)\big) \tag{14.738a}$$
$$y \mapsto \mu_1\big(A_1(y)\big) \tag{14.738b}$$

sont mesurables et

$$\int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y). \tag{14.739}$$

EqRKXwsQJ

Démonstration. Nous supposons d'abord que μ_1 et μ_2 sont finies et nous notons $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sur lequel le théorème est correct. Nous allons commencer par prouver que $\mathcal{D}$ est un λ-système.

(1) **λ-système : différence ensembliste** Soient $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$. Nous avons

$$(B \setminus A)_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in B \setminus A\} \tag{14.740a}$$
$$= \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in B\} \setminus \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A\} \tag{14.740b}$$
$$= B_1(y) \setminus A_1(y). \tag{14.740c}$$

Vu que $A_1(y) \subset B_1(y)$ et que les mesures sont finies le lemme 14.23 nous donne

$$\mu_1\big((B \setminus A)_1(y)\big) = \mu_1\big(B_1(y)\big) - \mu_1\big(A_1(y)\big), \tag{14.741}$$

[83] Définition 14.44.
[84] Modèle non contractuel : des notations et la définition de λ-système peuvent varier entre la référence et le présent texte.
[85] Voir la notation du lemme 14.729.

et similairement pour $1 \leftrightarrow 2$. Les deux fonctions (de y) à droite étant mesurables, nous avons la mesurabilité de la fonction $y \mapsto \mu_1\big((B \setminus A)_1(y)\big)$.

Prouvons la formule intégrale en nous rappelant que la formule (14.739) est supposée correcte pour A et B séparément :

$$\int_{\Omega_2} \mu_1\big((B \setminus A)_1(y)\big) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_2} \mu_1\big(B_1(y)\big) d\mu_2(y) - \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y) \tag{14.742a}$$

$$= \int_{\Omega_1} \mu_2\big(B_2(x)\big) d\mu_1(x) - \int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big) d\mu_1(x) \tag{14.742b}$$

$$= \int_{\Omega_1} \mu_2\big((B \setminus A)_2(x)\big) d\mu_1(x). \tag{14.742c}$$

(2) **λ-système : limite de suite croissante**

Soit (A_n) une suite croissante dans $\mathcal{D}$; nous posons $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ et $A_0 = \varnothing$ de telle sorte à travailler avec une suite d'ensembles disjoints qui satisfait $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$. Vu que la suite est croissante nous avons $A_{n-1} \subset A_n$ et donc $B_n \in \mathcal{D}$ par le point déjà fait sur la différence ensembliste. Nous avons :

$$(\bigcup_n B_n)_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in \bigcup_n B_n\} \tag{14.743a}$$

$$= \bigcup_n \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in B_n\} \tag{14.743b}$$

$$= \bigcup_n (B_n)_1(y). \tag{14.743c}$$

Par conséquent, par la propriété (2) d'une mesure nous avons

$$\mu_1\big((\bigcup_n B_n)_1(y)\big) = \sum_n \mu_1\big((B_n)_1(y)\big). \tag{14.744}$$

En tant que somme de fonctions positives et mesurables, la fonction

$$y \mapsto \sum_n \mu_1\big((B_n)_1(y)\big) \tag{14.745}$$

est mesurable par la proposition 14.101. Il faut encore vérifier la formule intégrale. Le gros du boulot est de permuter une somme et une intégrale par le corolaire 14.181 :

$$\int_{\Omega_2} \sum_n \mu_1\big((B_n)_1(y)\big) d\mu_2(y) = \sum_n \int_{\Omega_2} \mu_1\big((B_n)_1(y)\big) d\mu_2(y) \tag{14.746a}$$

$$= \sum_n \int_{\Omega_1} \mu_2\big((B_n)_2(x)\big) d\mu_1(x) \tag{14.746b}$$

$$= \int_{\Omega_1} \sum_n \mu_2\big((B_n)_2(x)\big) d\mu_1(x) \tag{14.746c}$$

$$= \int_{\Omega_1} \mu_2\big((\bigcup_n B_n)_1(y)\big) d\mu_1(x). \tag{14.746d}$$

Maintenant que $\mathcal{D}$ est un λ-système contenant les rectangles, le lemme 14.33 dit que la tribu engendrée par $\mathcal{D}$ (c'est-à-dire $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$) est le λ-système $\mathcal{D}$ lui-même.

La preuve est finie dans le cas de mesures finies. Nous commençons maintenant à prouver dans le cas où les mesures μ_1 et μ_2 sont seulement σ-finies. Nous considérons des suites croissantes $\Omega_{i,n} \to \Omega_i$ d'ensembles mesurables et de mesure finie : $\mu_i(\Omega_{i,n}) < \infty$. D'abord remarquons que

$$\mu_2\Big((A \cap \Omega_{1,j} \times E_{2,j})_2(x)\Big) = \mu_2\Big(A_2(x) \cap \Omega_{2,j}\Big) \mathbb{1}_{\Omega_{1,j}}. \tag{14.747}$$ EqNFuBzBF

En effet,

$$\heartsuit = (A \cap \Omega_{1,j} \times E_{2,j})_2(x) \tag{14.748a}$$

$$= \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A \cap \Omega_{1,j} \times E_{2,j}\} \tag{14.748b}$$

$$= \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A \times \Omega_{2,j}\} \cap \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j}\}. \tag{14.748c}$$

Si $y \in \Omega_{1,j}$ alors $\{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j}\} = \Omega_{2,j}$ et dans ce cas

$$\heartsuit = \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A \times \Omega_{2,j}\} \cap \Omega_{2,j} = A_2(x) \cap E_{2,j}. \tag{14.749}$$

Et inversement, si $x \notin \Omega_{1,j}$ alors $\heartsuit = \varnothing$. Dans les deux cas nous avons (14.747).

Les ensembles $A \cap \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j}$ étant de mesure finie, nous pouvons leur appliquer la première partie :

$$\int_{\Omega_1} \mu_2\Big((A \cap \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j})_2(x)\Big) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\Big((A \cap \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j})_1(y)\Big) d\mu_2(u), \tag{14.750}$$

ou encore

$$\int_{\Omega_1} \mu_2\Big(A_2(x) \cap \Omega_{2,j}\Big) \mathbb{1}_{\Omega_{1,j}}(x) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\Big(A_1(y) \cap \Omega_{1,j}\Big) \mathbb{1}_{\Omega_{2,j}}(y) d\mu_2(y). \tag{14.751}$$

Ce que nous avons dans ces intégrales sont (par rapport à j) des suites croissantes de fonction positives ; nous pouvons donc permuter une limite et une intégrale. En sachant que si $k \to \infty$, alors

$$\mathbb{1}_{1,j}(x) \to 1 \tag{14.752a}$$

$$\mu_2\big(A_2(x) \cap \Omega_2, j\big) \to \mu_2\big(A_2(x)\big), \tag{14.752b}$$

nous trouvons le résultat demandé. □

ThoWWAjXzi

Théorème-Définition 14.246 ([521, 522]).
Soient μ_i des mesures σ-finies sur[86] *$(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, 2)$.*

ITEMooMMAAooVnHmzc

(1) Il existe une et une seule mesure, notée $\mu_1 \otimes \mu_2$, sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ telle que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \tag{14.753}$$

EqOIuWLQU

pour tout $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

(2) Cette mesure est donnée par la formule[87]

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y) \tag{14.754}$$

EqDFxuGtH

où $A_1(y)$ et $A_2(x)$ sont définis en (14.729).

*Cette mesure est la **mesure produit** de μ_1 par μ_2.*

(3) La mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$ ainsi définie est σ-finie.

ITEMooUOATooQpdcND

(4) Le produit de mesures est associatif : si μ_1, μ_2 et μ_3 sont des mesures, alors σ-finies, alors

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3). \tag{14.755}$$

Démonstration. La partie « existence » sera divisée en deux parties : l'une pour prouver que les formules (14.754) donnent une mesure et une pour montrer que cette mesure vérifie la condition (14.753).

(1) **Unicité**

L'ensemble des rectangles de $\Omega_1 \times \Omega_2$ engendre la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, est fermé par intersection et contient une suite croissante d'ensembles $P_n \times R_n$ de mesure finie ($\mu(P_n \times R_n) < \infty$) telle que $P_n \times R_n \to \Omega_1 \times \Omega_2$. Cette suite est donnée par le fait que μ_1 et μ_2 sont σ-finies. En effet si (X_n) et (Y_n) sont des recouvrements dénombrables de Ω_1 et Ω_2 par des ensembles de mesure finie, en posant $P_n = \bigcup_{k=1}^n X_k$ et $R_n = \bigcup_{k=1}^n Y_k$ nous avons bien une suite croissante de rectangles qui tendent vers $\Omega_1 \times \Omega_2$. Avec ces rectangles en main, le théorème 14.34 donne l'unicité.

(2) **Les formules définissent une mesure** Le théorème 14.245 dit que ces formules ont un sens et que l'égalité entre les deux intégrales est correcte. Nous prouvons à présent qu'elles déterminent effectivement une mesure sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$.

Pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $\mu(A) \geqslant 0$ parce que μ est donnée par l'intégrale d'une fonction positive.

[86] La tribu produit est la définition 14.127.
[87] Voir les notations du lemme 14.243.

En ce qui concerne la condition d'unions dénombrable disjointe, soient $A^{(i)}$ des éléments disjoints de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$; nous commençons par remarquer que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\right)_2 (x) = \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\} \tag{14.756a}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A^{(i)}\} \tag{14.756b}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_2^{(i)}(x). \tag{14.756c}$$

Par conséquent,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\right) = \int_{\Omega_1} \mu_2\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\right)_2(x)\right) d\mu_1(x) \tag{14.757a}$$

$$= \int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2\big(A_2^{(i)}(x)\big) d\mu_1(x) \tag{14.757b}$$

$$= \int_{\Omega_1} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu_2\big(A_2^{(i)}(x)\big) d\mu_1(x). \tag{14.757c}$$

où nous avons utilisé l'additivité de la mesure μ_2. À ce niveau, il serait commode de permuter la somme et l'intégrale. Pour ce faire nous considérons la suite (croissante) de fonctions

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_2\big(A_2^{(i)}(x)\big). \tag{14.758}$$

Nous pouvons permuter la limite et l'intégrale grâce au théorème de la convergence monotone 14.178 ; ensuite la somme se permute avec l'intégrale en tant que somme finie :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_1} \big(A_2^{(i)}(x)\big) d\mu_1(x) \tag{14.759a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A^{(i)}) \tag{14.759b}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A^{(i)}). \tag{14.759c}$$

(3) **Elles vérifient la condition** Prouvons que les formules (14.754) se réduisent à (14.753) dans le cas des rectangles. Soit donc $A = X_1 \times X_2$ avec $X_i \in \mathcal{A}_i$. Alors

$$A_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in X_1 \times X_2\} \tag{14.760}$$

et

$$\mu_1\big(A_1(y)\big) = \mathbb{1}_{X_2}(y)\mu_1(X_1), \tag{14.761}$$

donc

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y) \tag{14.762a}$$

$$= \int_{\Omega_2} \mu_1(X_1)\mathbb{1}_{X_2}(y) d\mu_2(y) \tag{14.762b}$$

$$= \mu_1(X_1) \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{X_2}(y) d\mu_2(y) \tag{14.762c}$$

$$= \mu_1(X_1)\mu_2(X_2). \tag{14.762d}$$

Pour cela nous avons utilisé le fait que l'intégrale de la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable est la mesure de cet ensemble.

□

DefUMlBCAO

Définition 14.247 (Produit d'espaces mesurés)**.**
*Si $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ sont deux espaces mesurés, l'**espace produit** est l'ensemble $\Omega_1 \times \Omega_2$ muni de la tribu produit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ de la définition 14.127 et de la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ définie par le théorème 14.246.*

Remarque 14.248.
Il n'est pas garanti que la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ soit la tribu la plus adaptée à l'ensemble $S_1 \times S_2$. Dans le cas de $\mathbb{R}^N$, il se fait que c'est le cas : en prenant des produits des boréliens sur $\mathbb{R}$ on obtient bien les boréliens sur $\mathbb{R}^N$, voir proposition 14.132.

14.12 Tribu et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

DEFooSWJNooCSFeTF

Définition 14.249 (Mesure de Lebesgue)**.**
En plusieurs étapes.

(1) *D'abord nous avons la mesure λ_N sur $\mathbb{R}^N$ définie sur*

$$\big(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big) \tag{14.763}$$

comme le produit $\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda$ via la définition 14.247 (et grâce au fait que le produit est associatif, théorème 14.246(4)).

(2) *Ensuite nous nous souvenons du corolaire 14.132 qui donne λ_N comme une mesure sur*

$$\big(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N)\big). \tag{14.764}$$

(3) *Et enfin nous considérons la complétion de la mesure λ_N (théorème 14.69), que nous notons encore λ_N.*

PropSKXGooRFHQst

Proposition 14.250 ([506])**.**
Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une union dénombrable et disjointe de cubes semi-ouverts.

Démonstration. Nous allons même montrer que ces cubes peuvent être choisis sur un quadrillage.

Soit G un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{Q_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$ un découpage de $\mathbb{R}^n$ en cubes semi-ouverts de côté 1 et dont les sommets sont en les coordonnées entières. Ils sont de la forme

$$\prod_{i=1}^{n} [n_i, n_i + 1[\tag{14.765}$$

où les n_i sont des entiers. Ce sont des cubes disjoints. Nous considérons ensuite pour chaque $k > 1$ le découpage $\{Q_i^{(k)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ en cubes de côtés 2^{-k} qui consiste à découper en 2 les côtés des cubes du découpage $Q^{(k-1)}$. Ces cubes forment encore un découpage dénombrable de $\mathbb{R}^n$ en des cubes disjoints. Ils sont de la forme

$$\prod_{i=1}^{n} [\frac{n_i}{2^k}, \frac{n_i + 1}{2^k}[\tag{14.766}$$

où les n_i sont encore entiers. Ensuite nous considérons $\mathcal{E}$ l'union de tous les $Q_i^{(k)}$ contenus dans G.

Montrons que $\mathcal{E} = G$. D'abord $\mathcal{E} \subset G$ parce que $\mathcal{E}$ est une union d'ensembles contenus dans G. Ensuite si $x \in G$, il existe une boule de rayon r autour de x contenue dans G ; alors un des ensembles $Q_i^{(k)}$ avec $2^{-j} < \frac{r}{2}$ est contenue dans $B(x, r)$ et donc dans $\mathcal{E}$.

Bien entendu l'union qui donne $\mathcal{E}$ n'est pas satisfaisante par ce que les $Q_i^{(k+1)}$ sont contenus dans les $Q_i^{(k)}$; les intersections sont donc loin d'être vides.

Nous faisons ceci :

$$R^{(0)} = \{Q_i^{(1)} \text{contenu dans } G\} \tag{14.767a}$$

$$R^{(k+1)} = \{Q_i^{(k+1)} \text{contenus dans } G \text{ et pas dans } R^{(k)}\}. \tag{14.767b}$$

En fin de compte l'union de tous les ensembles contenus dans les $R^{(k)}$ forment encore $\mathbb{R}^n$, mais sont d'intersection vide. □

Les cubes dont il est question dans cette preuve, de côtés 2^{-k} sont souvent appelés des cubes **dyadiques**.

14.12.1 Propriétés d'unicité

CorMPDAooDJRrom

Corolaire 14.251.
La mesure λ_N est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N))$ à satisfaire

$$\mu\Big(\prod_{i=1}^{N}[a_i, b_i]\Big) = \prod_{i=1}^{N}|a_i - b_i| \tag{14.768}$$

Démonstration. Par définition de la mesure produit, λ_N est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\otimes\ldots\otimes\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}))$ à satisfaire la condition. La proposition 14.132 conclut. □

Vu que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés (théorème 9.24), et que tout borné est dans un tel produit d'intervalle, la mesure de Lebesgue est une mesure de Borel (définition 14.89(1)).

THOooTMWHooThsDHj

Théorème 14.252 ([523]).
La mesure de Lebesgue est invariante par translation. Autrement dit si A est mesurable dans $\mathbb{R}^n$ et si $a \in \mathbb{R}^n$ alors $A + a$ est mesurable et

$$\lambda_N(A + a) = \lambda_N(A). \tag{14.769}$$

Démonstration. Nous supposons que A est borélien ; sinon il l'est à ensemble négligeable près. Nous nommons μ la mesure donnée par

$$\mu(A) = \lambda_N(A + a). \tag{14.770}$$

Vu que

$$\mu\Big(\prod_{n=1}^{N}[r_n, s_n[\Big) = \lambda_N\Big(\prod_i[r_n + a_n, s_n + a_n[\Big) = \prod_i |s_n - r_n|. \tag{14.771}$$

Vu qu'il y a unicité de la mesure vérifiant cette propriété (corolaire 14.251), nous avons $\mu = \lambda_N$. □

Pour la suite nous notons Q_0 le cube unité de $\mathbb{R}^N$: $Q_0 = \big([0,1[\big)^N$.

ThoCABFooHbUzWc

Théorème 14.253 ([523]).
Nous notons $Q_0 = \big([0,1[\big)^N$. Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^N$ telle que

(1) μ soit invariante par translation (des boréliens),

(2) $\mu(Q_0) = 1$.

Alors $\mu = \lambda_N$.

Démonstration. Pour simplifier l'écriture nous faisons $N = 2$. Notre but est de prouver que $\mu([0, r[\times[0, r'[) = rr'$ pour tout $r, r' \in \mathbb{R}$.

(1) **Longueur $=1/J$ et $1/K$:** Soient J, K des entiers. Nous pouvons diviser le cube Q_0 en rectangles de côtés

$$Q_0 = \bigcup_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\ 1\leqslant k\leqslant K}} [\frac{j-1}{J}, \frac{j}{J}[\times[\frac{k-1}{K}, \frac{k}{K}[\tag{14.772}$$

où l'union est disjointe. En ce qui concerne la mesure nous commençons par utiliser la sous-additivité :

$$\mu(Q_0) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\ 1\leqslant k\leqslant K}} \mu\left([\frac{j-1}{J}, \frac{j}{J}[\times[\frac{k-1}{K}, \frac{k}{K}[\right). \tag{14.773}$$

Nous utilisons ensuite, sur chacun des termes séparément l'invariance par translation selon les vecteurs $(\frac{j-1}{J}, 0)$ et $(0, \frac{k-1}{K})$:

$$1 = \mu(Q_0) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\ 1\leqslant k\leqslant K}} \mu\left([0, \frac{1}{J}[\times[0, \frac{1}{K}[\right) = JK\mu\left([0, \frac{1}{J}[\times[0, \frac{1}{K}[\right), \tag{14.774}$$

et donc

$$\mu\left([0, \frac{1}{J}[\times[0, \frac{1}{K}[\right) = \frac{1}{J}\times\frac{1}{K}. \tag{14.775}$$

(2) **Longueur L/K**

Soient L, M des entiers et calculons :

$$\mu\left([\frac{0}{J},\frac{L}{J}[\times[\frac{0}{K},\frac{M}{K}[\right)=\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant L-1\\0\leqslant m\leqslant M-1}}\mu\left([\frac{l}{J},\frac{l+1}{J}[\times[\frac{m}{K},\frac{m+1}{K}[\right)\tag{14.776a}$$

$$=LM\mu\left([\frac{0}{J},\frac{1}{J}[\times[\frac{0}{K},\frac{1}{K}[\right)\tag{14.776b}$$

$$=LM\times\frac{1}{J}\times\frac{1}{K}.\tag{14.776c}$$

Nous avons donc, pour tout J, K, L, M :

$$\mu\left([0,\frac{L}{J}[\times[0,\frac{M}{K}[\right)=\frac{L}{J}\times\frac{M}{K},\tag{14.777}$$

c'est-à-dire que pour tout $r, s\in\mathbb{Q}^+$ nous avons

$$\mu\big([0,r[\times[0,s[\big)=rs.\tag{14.778}$$

(3) **Longueur réelle** Nous passons au cas de longueur réelle. Soit $a>0$ et une suite croissante de rationnels $r_n\to a$. Une telle suite existe par la proposition 9.17. L'intervalle $[0,a[$ s'écrit sous la forme d'une union croissante $[0,a[=\bigcup_{n\geqslant 1}[0,r_n[$; le lemme 14.24(1) peut être utilisé et nous avons

$$\mu\big([0,a[\big)=\mu\left(\bigcup_{n\geqslant1}[0,r_n[\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\big([0,r_n[\big)=\lim_{n\to\infty}r_n=a.\tag{14.779}$$

Enfin, si $a, a'\in\mathbb{R}$, l'invariance par translation donne

$$\mu\big([a,a'[\big)=\mu\big([0,a'-a[\big)=a'-a.\tag{14.780}$$

Par unicité de la mesure ayant cette propriété, nous avons $\mu=\lambda_N$. □

CorKGMRooHWOQGP

Corolaire 14.254.
Si μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^N$ invariante par translation et telle que $\mu(Q_0)=C<\infty$ alors $\mu=C\lambda_N$.

Démonstration. Si $C>0$ nous considérons la mesure $\frac{1}{C}\mu$ qui vérifie $(\frac{1}{C}\mu)(Q_0)=1$. En conséquence du théorème 14.253, $\frac{1}{C}\mu=\lambda_N$ et $\mu=C\lambda_N$.

Si au contraire $C=0$ alors nous pouvons paver $\mathbb{R}^N$ avec des cubes Q_i de côté 1 qui ont tous mesure 0. Par conséquent, $\mathbb{R}^N=\bigcup_{i=1}^{\infty}Q_i$, donc $\mu(\mathbb{R}^N)=\sum_i\mu(Q_i)=0$. Par conséquent $\mu=0$ parce que toute partie de $\mathbb{R}^N$ a une mesure au maximum égale à celle de $\mathbb{R}^N$. □

14.12.2 Régularité

Les différentes notions de régularité pour une mesure sont données dans la définition 14.89. Ce sont essentiellement des questions de compatibilité entre la mesure et la topologie.

Proposition 14.255.
La mesure de Lebesgue est une mesure de Radon sur tout ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Démonstration. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^N$. C'est localement compact et σ-compact[88]. Il suffit de prouver que λ_N est de Borel sur V pour que le théorème 14.90 conclue à la régularité de la mesure de Lebesgue.

Soit K un compact de V. Par la proposition 7.127 c'est également un compact de $\mathbb{R}^N$. Par conséquent K est dans un pavé fermé de $\mathbb{R}^N$ du type

$$K\subset\prod_{n=1}^{N}[a_n,b_n]\tag{14.781}$$

et donc en passant par le corolaire 14.251,

$$\lambda_N(K)\leqslant\prod_{i=1}^{N}(b_n-a_n)<\infty.\tag{14.782}$$

Nous avons démontré que λ_N reste fini sur tout compact de V. □

[88] Définition 7.115.

14.13 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

Un lemme qui a l'air de rien, mais qui au final est souvent utilisé ; tellement qu'on l'oublie un peu.

LEMooWKSWooPptdEm

Lemme 14.256 ([1]).
Soit un compact K de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors l'intégrale

$$\int_K f \tag{14.783}$$

existe et est finie.

Démonstration. Vu que f est continue sur le compact K, elle y atteint une borne supérieure[89] que nous nommons M.

Soit R tel que $B(0,R)$ contienne K. La fonction $(M+1)\mathbb{1}_{B(0,R)}$ majore strictement f sur le mesurable $B(0,R)$. L'ensemble sur lequel nous prenons le supremum dans la définition (14.468) de l'intégrale de f est majoré par le nombre fini $(M+1)\mu(K)$. Le supremum existe et est fini (proposition 1.579). □

Le lemme suivant est la contrepartie du côté des intégrales de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue démontrée dans le théorème 14.252.

LEMooGKOGooPLYaUO

Lemme 14.257 (Invariance par translation).
Soient f intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Alors en posant

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^d &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x+a) \end{aligned} \tag{14.784}$$

nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} g d\lambda. \tag{14.785}$$

Nous pouvons aussi écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x+a) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda(x). \tag{14.786}$$

Démonstration. En plusieurs parties, en suivant les niveaux de généralité de la définition 14.167 et 14.187.

(1) **Si f est étagée et positive** Nous supposons que $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\omega[$ est étagée. Nous notons $\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ sa forme canonique. La fonction g est également étagée et sa forme canonique est $g = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}$ où $B_i = A_i - a$. Nous avons alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} g = \sum_i \alpha_i \lambda(B_i) = \sum_i \alpha_i \lambda(A_i) = \int_{\mathbb{R}^n} f \tag{14.787}$$

parce que le théorème 14.252 dit que $\lambda(A_i) = \lambda(B_i)$.

(2) **Si f est mesurable à valeurs positives** Nous posons

$$E = \{\psi \text{ étagée finie telle que } 0 \leqslant \psi \leqslant f\} \tag{14.788}$$

et

$$F = \{\psi \text{ étagée finie telle que } 0 \leqslant \psi \leqslant g\} \tag{14.789}$$

L'application

$$\begin{aligned} s\colon E &\to F \\ \psi &\mapsto \big[x \mapsto \psi(x-a)\big] \end{aligned} \tag{14.790}$$

est une bijection et par la première partie nous avons $\int_{\mathbb{R}^n} s(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup\{\int \psi \text{ tel que } \psi \in E\} \tag{14.791a}$$

$$= \sup\{\int_{\mathbb{R}^n} \psi \text{ tel que } \psi \in F\} \tag{14.791b}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g. \tag{14.791c}$$

(3) **Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$** Alors en posant $f = f^+ + f^-$ et $g = g^+ + g^-$, nous avons $\int_{\mathbb{R}^n} f^+ = \int_{\mathbb{R}^n} g^+$ et $\int_{\mathbb{R}^n} f^- = \int_{\mathbb{R}^n} g^-$.

□

[89] Nous ne nous lasserons jamais de citer le théorème de Weierstrass 7.196.

14.13.1 Quelques limites dans les bornes

14.258.
Si vous voulez savoir que $\lim_{h\to 0}\int_a^{a+h} f = 0$, c'est le corolaire 27.61. La proposition 27.60 est plus générale et dit que dans L^p, il existe δ tel que si $\mu(A) < \delta$, alors $\int_A |f|^p < \epsilon$.

Dans le cas de l'intégrale de Lebesgue définie par 14.167, si f est une fonction sur $\mathbb{R}$ et si λ est la mesure de Lebesgue, nous avons une définition directe de

$$\int_0^\infty f d\lambda. \tag{14.792}$$

Nous sommes cependant en droit de nous demander si nous n'aurions pas également ceci :

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f\lambda = \int_0^\infty f d\lambda. \tag{14.793}$$

EQooDVKKooCiFzmA

Lorsque l'intégrale considérée est celle de Riemann, l'égalité (14.793) est une définition. Ici, ça va être une propriété, voir le lemme 14.262.

14.259.
Tant que nous sommes à parler de limites dans les bornes, nous aurions pu vouloir, pour les séries, suivre le chemin suivant :

- Définir l'intégrale de Lebesgue sur un espace mesuré.
- Prendre au passage le cas particulier $\sum_{k=0}^\infty a_k = \int_{\mathbb{N}} a$ où $a\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ est une fonction mesurable pour la mesure de comptage.
- Démontrer qu'avec ces définitions, $\sum_{k=0}^\infty a_k = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^N a_k$.

Or le dernier point est pris comme définition et son égalité avec l'intégrale pour la mesure de comptage est une propriété[90]. Pourquoi ? Parce que la définition 14.18 de mesure positive demande déjà d'avoir défini les sommes sur $\mathbb{N}$.

LEMooOPKLooGucWjb

Lemme 14.260.
Soit une partie mesurable $A \subset \mathbb{R}^+$ de mesure finie. Alors

$$\lim_{M\to\infty}\lambda\big(A\cap[M,\infty[\big) = 0. \tag{14.794}$$

Démonstration. La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \lambda\big(A\cap[x,\infty[\big) \end{aligned} \tag{14.795}$$

est décroissante et bornée vers le bas par 0. Elle possède dont une limite $\ell \geqslant 0$ (corolaire 9.60). Nous allons prouver que $\ell = 0$ en calculant la limite sur les entiers.

Nous posons $J_k = [k, k+1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$ nous avons :

$$f(n) = \lambda\big(A\cap[n,\infty[\big) \tag{14.796a}$$
$$= \lambda\Big(\bigcup_{k=n}^\infty (A\cap J_k)\Big) \tag{14.796b}$$
$$= \sum_{k=n}^\infty \lambda(A\cap J_k). \tag{14.796c}$$

Mais nous savons par hypothèse sur la mesure de A que

$$\lambda(A) = \sum_{k=0}^\infty \lambda(A\cap J_k) < \infty. \tag{14.797}$$

Donc $f(n)$ est une queue de série convergente. Elle tend donc vers zéro par le lemme 10.122. C'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0. \tag{14.798}$$

Et comme $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe et vaut ℓ, la seule possibilité est $\ell = 0$. □

[90] Proposition 14.266.

LEMooMUHWooZPbMDb

Lemme 14.261.
Soit une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Alors

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^\infty f d\lambda = 0. \tag{14.799}$$

Démonstration. Nous posons

$$F(x) = \int_x^\infty f d\lambda. \tag{14.800}$$

Nous commençons par prouver que c'est une fonction décroissante. En effet,

$$F(x) - F(x+a) = \int_x^\infty f - \int_{x+a}^\infty f = \int_x^{x+a} f + \int_{x+a}^\infty f - \int_{x+a}^\infty = \int_x^{x+a} f \geqslant 0. \tag{14.801}$$

Nous avons utilisé 14.194.

Vu que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, nous avons $F(x) \geqslant 0$ pour tout x. La fonction F est décroissante et bornée vers le bas. Donc elle a une limite :

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \ell \geqslant 0. \tag{14.802}$$

Supposons $\ell > 0$ et posons $0 < \epsilon < \ell$. Soit M tel que pour tout $x > M$ nous ayons

$$\int_x^\infty f > m. \tag{14.803}$$

EQooZVKQooQDxHXp

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$|\int_a^\infty f(t) - \ell\, dt| < \epsilon. \tag{14.804}$$

En vertu de (14.803) nous considérons $a_0 > a$ tel que

$$\int_{a_0}^\infty f = I_0 > m. \tag{14.805}$$

Nous construisons la suite strictement croissante (a_k) de la façon suivante :

$$\int_{a_k}^\infty f = I_k > m \tag{14.806}$$

et

$$|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f - I_k| < \epsilon. \tag{14.807}$$

Donc pour k nous avons

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f \geqslant I_k - \epsilon \geqslant m - \epsilon. \tag{14.808}$$

Mais

$$\int_{a_0}^\infty = \sum_{k=0}^\infty \int_{a_k}^{a_{k+1}} f \geqslant \sum_k (m-\epsilon) = \infty. \tag{14.809}$$

Nous avons une contradiction. □

LEMooKGZDooWiKiHR

Lemme 14.262 ([1])**.**
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable sur $[a,\infty]$ pour la mesure de Lebesgue. Alors la limite

$$\lim_{b\to\infty} \int_{[a,b]} f \tag{14.810}$$

existe et vaut

$$\lim_{b\to\infty} \int_{[a,b]} f = \int_{[a,\infty]} f. \tag{14.811}$$

De même nous avons

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{[a,b]} f = \int_{]-\infty,b]} f \tag{14.812}$$

EQooNRHDooVzAEFD

Démonstration. Vu qu'on a le droit de découper les domaines d'intégration en domaines disjoints, et que l'ajout d'un point ne change rien à la mesure de Lebesgue, nous avons pour tout $b \in [a, \infty[$ que

$$\int_{[a,\infty]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,\infty]} f. \tag{14.813}$$

Nous avons l'intention de prendre la limite $b \to \infty$. Le lemme 14.261 nous assure que la limite de la dernière intégrale existe et vaut zéro. Donc la limite de l'intégrale du milieu existe et vaut celle à gauche.

En ce qui concerne la formule (14.812), nous posons $g(x) = f(-x)$, et nous considérons $-a < b$. Et nous avons, en utilisant la première partie sur la fonction g :

$$\lim_{a\to\infty} \int_{[-a,b]} f = \lim_{a\to\infty} \int_{[-b,a]g} \tag{14.814a}$$

$$= \int_{[-b,\infty[} g \tag{14.814b}$$

$$= \int_{]-\infty,b]} f. \tag{14.814c}$$

□

PROPooSBKEooOlxqRk

Proposition 14.263 ([1])**.**
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f = \int_{\mathbb{R}} f \tag{14.815}$$

au sens où la limite de gauche existe et vaut celle de droite.

14.13.2 Mesure de comptage et série

DEFooILJRooByDzhs

Définition 14.264 (mesure de comptage)**.**
*Soit $(S, \mathcal{F})$ un ensemble mesurable. La **mesure de comptage** sur $(S, \mathcal{F})$ est la mesure définie par*

$$m(A) = \begin{cases} \text{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.816}$$

Cette mesure est utilisée pour voir des séries comme des intégrales sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.

LEMooDTFHooLVsvAw

Lemme 14.265.
Si m est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et si $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, alors le triple $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m\big)$ est un espace mesuré[91] *σ-fini.*

Démonstration. Bien entendu l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est une tribu sur $\mathbb{N}$. Nous devons donc seulement vérifier les conditions de la définition 14.18.

Si A est une partie de $\mathbb{N}$, alors $m(A) \in [0, \infty]$ parce que c'est soit le cardinal de A soit ∞.

Le cardinal de l'ensemble vide est zéro (ça fait partie de la définition du cardinal 1.207).

Soient des parties deux à deux disjointes $\{A_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{N}$. Posons $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Si I est infini dénombrable, alors l'union est infinie : prendre par exemple la partie $S = \{\min(A_i)\}_{i\in I}$ qui est en bijection avec I. Nous avons alors d'une part

$$m\big(\bigcup_i A_i\big) \geqslant m(S) = \infty, \tag{14.817}$$

et d'autre part

$$\sum_{i\in I} m(A_i) \geqslant \sum_{i\in I} 1 = \infty. \tag{14.818}$$

Si par contre I est fini, alors le lemme 1.215(5) dit que

$$m\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \text{Card}\,\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \sum_{i\in I} m(A_i). \tag{14.819}$$

Le fait que notre espace soi σ-fini se voit par exemple en posant $E_n = \{0, \dots, n\}$. Chaque E_n est de mesure finie, et leur union est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \mathbb{N}$. □

[91] Définition 14.18.

PROPooPNQAooDRLcCm

Proposition 14.266 ([1]).
Soit l'espace mesuré $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m\big)$[92]. Nous considérons une application $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ (c'est-à-dire une suite de nombres réels positifs).

(1) L'intégrale $\int_{\mathbb{N}} a\,dm < \infty$ si et seulement si la série aussi : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

(2) Si $\int_{\mathbb{N}} a\,dm$ existe, alors

$$\int_{\mathbb{N}} a\,dm = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{14.820}$$

EQooFIRMooKQEsAn

Démonstration. Nous allons travailler avec la définition 14.167 de l'intégrale et 14.112 pour les fonctions étagées.

(1) **Si l'intégrale est $< \infty$** Nous supposons que $\int_{\mathbb{N}} adm < \infty$. La proposition 14.210 nous permet de découper $\mathbb{N}$ en parties disjointes. Nous choisissons de voir $\mathbb{N} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{i\}$ et donc de considérer l'égalité

$$\int_{\mathbb{N}} adm = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\{i\}} adm. \tag{14.821}$$

Vu que $m\big(\{i\}\big) = 1$ et que a est constante sur $\{i\}$, nous avons $\int_{\{i\}} adm = a_i$, et donc

$$\int_{\mathbb{N}} adm = \sum_{i=0}^{\infty} a_i. \tag{14.822}$$

(2) **Si la somme est $< \infty$** Le terme général a_n tend vers zéro[93]. En particulier, pour chaque $r \in \mathbb{R}$, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de la suite a plus grands que r.

Soit une fonction étagée $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ minorant a. Vu qu'elle est étagée, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes que nous nommons $\{\alpha_i\}$, et les parties $A_i = \psi^{-1}(\alpha_i)$ sont finies parce que ψ minore a.

Avant de faire un petit calcul, posons quelque notations. D'abord $Z = \psi^{-1}(0)$. Nous avons $\mathbb{N} = \bigcup_i A_i \cup Z$. Nous posons aussi $A = \bigcup_i A_i$; c'est le support de ψ.

Nous pouvons maintenant faire un calcul pour l'intégrale de ψ sur $\mathbb{N}$: SUBEQSooPMCHooIdtHqG

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} \psi dm &= \sum_i \alpha_i \operatorname{Card}(A_i) && \text{def. (14.467)} && (14.823a)\\
&= \sum_i \Big(\sum_{k\in A_i} \psi(k) \Big) && && (14.823b)\\
&= \sum_{k\in\bigcup_i A_i} \psi(k) && && (14.823c)\\
&= \sum_{k\in A} \psi(k) + \sum_{k\in Z} \psi(k) && && (14.823d)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi(k). && && (14.823e)
\end{aligned}$$

SUBEQooIJMMooPKLHVk

SUBEQooGOBRooYhAufP

Justifications.

- Pour (14.823b). Pour tout k dans A_i nous avons $\psi(k) = \alpha_i$.
- Pour (14.823c). Les A_i sont disjoints et chacun est fini. La proposition 10.139 fait le boulot.

Étant donné que ψ minore a, nous avons donc montré que

$$\int_{\mathbb{N}} \psi dm = \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi(k) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} a_n. \tag{14.824}$$

Donc l'intégrale de toutes les fonctions étagées minorant a est majorée par la série de a. Donc l'intégrale de a existe et est majorée par cette somme.

[92] La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est donnée en la définition 14.264.
[93] Proposition 10.121.

(3) **Valeur de l'intégrale** Nous supposons encore que la série est finie. Nous avons déjà prouvé que

$$\int_{\mathbb{N}} a dm \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n. \tag{14.825}$$

EQooNCMCooYMaASZ

Nous allons prouver l'inégalité inverse en trouvant une bonne suite de fonctions étagées. Soit, pour chaque $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\psi_N\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R}^+\\ k &\mapsto \begin{cases} a_k & \text{si } k \leqslant N\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{14.826}$$

Cela est une fonction étagée qui minore a. Nous pouvons donc reprendre le calcul (14.823) :

$$\int_{\mathbb{N}} \psi dm = \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_N(k) = \sum_{k=0}^{N} a_k. \tag{14.827}$$

Par définition de la série, nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{N}} \psi_N dm = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \tag{14.828}$$

Donc le supremum des intégrales de fonctions étagées est au moins égal à $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Nous avons prouvé l'inégalité inverse de (14.825), et donc l'égalité (14.820).

□

EXooDMAUooWWVZbq

Exemple 14.267.
L'intervalle $I = [0, 1]$ muni de la tribu de toutes ses parties et de la mesure de comptage est un espace mesuré non σ-fini. △

14.13.3 Théorème de la moyenne

LEMooOXNPooXpTxtx

Lemme 14.268 ([1])**.**
Soit A connexe par arcs[94]*, soit $f\colon A \to \mathbb{R}$ continue ainsi que $\alpha, \beta \in f(A)$ avec $\alpha < \beta$. Pour tout $y \in [\alpha, \beta]$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.*

Démonstration. Soient $a, b \in A$ avec $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. Vu que A est connexe par arcs, il existe une application continue $\gamma\colon [0, 1] \to A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la composée $f \circ \gamma$ dit qu'il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $(f \circ \gamma)(t_0) = y$. Nous avons donc le résultat avec $x = \gamma(t_0)$. □

ThoooEZLGooMChwLT

Théorème 14.269 ([1, 186])**.**
Soit Q un compact connexe par arcs et une fonction continue $f\colon Q \to \mathbb{R}$. Si λ est la mesure de Lebesgue, alors il existe $a \in Q$ tel que

$$f(a) = \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q f d\lambda \tag{14.829}$$

Démonstration. En posant $I = \int_Q f d\lambda$ nous avons immédiatement

$$\min(f)\lambda(Q) \leqslant I \leqslant \max(f)\lambda(Q) \tag{14.830}$$

EqooTYQCooVxdazW

où le minimum et le maximum existent parce que f est continue sur un compact. Si une des deux inégalités est une égalité alors la fonction est constante. En effet supposons que la première inégalité soit une égalité ; si la fonction n'était pas constante, il existerait une boule sur laquelle f serait strictement supérieure à $\min(f)$. En intégrant d'abord sur cette boule et ensuite sur le complémentaire nous obtenons une intégrale plus grande que $\min(f)\lambda(Q)$.

Vu que f est continue sur le compact Q, il existe $\alpha, \beta \in Q$ tels que $f(\alpha) = \min(f)$ et $f(\beta) = \max(f)$. Vu que $\min(f) \leqslant I/\lambda(Q) \leqslant \max(f)$, le lemme 14.268 montre qu'il existe $a \in Q$ tel que $f(a) = I/\lambda(Q)$. Autrement dit,

$$f(a) = \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q f d\lambda. \tag{14.831}$$

□

[94] Définition 9.65.

14.14 Changement de variables dans une intégrale multiple

Dans ce qui suit, U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\phi\colon U\to V$ est un C^1-difféomorphisme. Nous notons $\mathcal{Q}$ l'ensemble des cubes fermés dans U dont les côtés sont parallèles aux axes.

14.14.1 Des lemmes

LemooJYCGooIkkDVn

Lemme 14.270 ([523]).
Soient μ et ν deux mesures de Borel sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^N$. Si $\mu(Q)\leqslant\nu(Q)$ pour tout $Q\in\mathcal{Q}$ alors $\mu(B)\leqslant\nu(B)$ pour tout borélien B.

Démonstration. Si Q est un cube semi-ouvert, c'est-à-dire de la forme

$$Q=\prod_{n=1}^{N}[a_n,a_n+h[\subset U \tag{14.832}$$

alors Q est une réunion croissante de cubes fermés du type $[a_n+\epsilon,a_n+h-\epsilon]$, et donc $\mu(Q)\leqslant\nu(Q)$ par le lemme 14.24(1). La propriété est donc vraie pour les cubes semi-ouverts.

Si Ω est un ouvert, alors il est réunion disjointe dénombrable de cubes semi-ouverts par la proposition 14.250. Donc pour tout ouvert $\Omega\subset U$ nous avons $\mu(\Omega)\leqslant\nu(\Omega)$. En vertu de la proposition 14.90 et de la remarque 14.91, les mesures μ et ν sont régulières, et l'inégalité au niveau des ouverts se répercute en inégalité pour tout boréliens de U :

$$\mu(B)\leqslant\nu(B) \tag{14.833}$$

pour tout $B\in\mathcal{B}\text{or}(U)$. Notons que U étant ouvert dans $\mathbb{R}^N$, les boréliens de U sont exactement les boréliens de $\mathbb{R}^N$ inclus dans U par le corolaire 14.58. □

LemooJCEDooBRyjRg

Lemme 14.271 ([523]).
Soit une application $\theta\colon U\to\mathbb{R}^N$ de classe C^1 où U est ouvert dans $\mathbb{R}^N$. Pour tout $Q\in\mathcal{Q}$ nous avons

$$\lambda_N\big(\theta(Q)\big)\leqslant\sup_{s\in Q}\|d\theta_s\|^N\lambda_N(Q). \tag{14.834}$$

Démonstration. Nous notons h la longueur du côté du cube. Le théorème des accroissements finis 12.340, pour la composante θ_i donne, pour $u,v\in Q$:

EqooFZMAooKWdzxJ

$$\big|\theta_i(u)-\theta_i(v)\big|\leqslant\sup_{s\in Q}\|(d\theta_i)_s\|\|u-v\|\leqslant\sup_{s\in Q}\|(d\theta_i)_s\|h. \tag{14.835}$$

D'autre part nous avons (nous écrivons pour $N=2$ pour être plus court) :

$$d\theta_s(u)=\frac{d}{dt}\Big[\theta_1(s+tu)e_1+\theta_2(s+tu)e_2\Big]_{t=0}=(d\theta_1)_s(u)e_1+(d\theta_2)_s(u)e_2. \tag{14.836}$$

Donc pour chaque i : $\|d\theta_s\|\geqslant\|(d\theta_i)_s\|$, et nous continuons la majoration (14.835) :

$$\big|\theta_i(u)-\theta_i(v)\big|\leqslant\sup_{s\in Q}\|(d\theta_i)_s\|h\leqslant\sup_{s\in Q}\|d\theta_s\|h. \tag{14.837}$$

Les points $\theta(u)$ et $\theta(v)$ sont donc dans un cube de côté $\sup_{s\in Q}\|d\theta_s\|h$, ce qui permet de majorer $\lambda_N\big(\theta(Q)\big)$ par

$$\lambda_N\big(\theta(Q)\big)\leqslant\Big(\sup_{s\in Q}\|d\theta_s\|h\Big)^N=\Big(\sup_{s\in Q}\|d\theta_s\|\Big)^N\lambda_N(Q) \tag{14.838}$$

où le dernier facteur provient de l'égalité $h^N=\lambda_N(Q)$. □

14.14.2 Déterminant et mesure de Lebesgue

Dans la suite, Q_0 désigne le cube unité : $Q_0=\big([0,1[\big)^N$.

ThoBVIJooMkifod

Théorème 14.272 (Interprétation géométrique du déterminant[523]).
Soit une application linéaire $T\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$. Alors pour tout borélien B de $\mathbb{R}^N$,

$$\lambda_N\big(T(B)\big)=|\det(T)|\lambda_N(B). \tag{14.839}$$

Démonstration. Nous considérons la mesure positive μ donnée par $\mu(B) = \lambda_N\big(T(B)\big)$, qui est bien une mesure par la proposition 14.84. Cette mesure est invariante par translation parce que λ_N l'est :

$$\mu(B+a) = \lambda_N\big(T(B)+a\big) = \lambda_N\big(T(B)\big) = \mu(B). \tag{14.840}$$

De plus, $T(Q_0)$ est borné et nous notons $\mu(Q_0) = C$. Nous avons $\mu = C\lambda_N$ par le corolaire 14.254.

(1) $C(T_1T_2) = C(T_1)C(T_2)$ Par définition,

$$C(T_1T_2)\lambda_N(B) = \lambda_N\big((T_1T_2)(B)\big) \tag{14.841a}$$
$$= \lambda_N\big(T_1(T_2B)\big) = C(T_1)\lambda_N\big(T_2(B)\big) = C(T_1)C(T_2)\lambda_N(B). \tag{14.841b}$$

Par conséquent la fonction C est multiplicative :

$$C(T_1T_2) = C(T_1)C(T_2). \tag{14.842}$$

Et en plus, $C(\mathrm{Id}) = 1$.

(2) **Matrice diagonale** En guise de T, nous considérons l'application linéaire diagonale donnée par $De_i = d_ie_i$, ou, sous forme matricielle, $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_N)$ qui fait

$$T(Q_0) = [0, d_1[\times \dots \times [0, d_N[\tag{14.843}$$

La mesure de cela est $|d_1 \cdots d_N|$, ce qui nous donne

$$C(D) = |d_1 \dots d_N| = |\det(D)|. \tag{14.844}$$

(3) **Matrice orthogonale** Nous considérons maintenant $T = U$ où U est une matrice orthogonale ($UU^t = 1$). Une matrice orthogonale est une isométrie[95] qui conserve donc la boule unité : $UB(0,1) = B(0,1)$. Nous avons

$$\lambda_N\big(B(0,1)\big) = \lambda_N\big(UB(0,1)\big) = C(U)\lambda_N\big(B(0,1)\big) \tag{14.845}$$

par conséquent $C(U) = 1$, et 1 est justement le déterminant de U.

(4) **Matrice quelconque** Nous savons par le corolaire 13.41 de la décomposition polaire que toute matrice peut être écrite sous la forme $T = U_1DU_2$ où U_i sont orthogonales et D est diagonale. Donc $C(T) = C(U_1)C(D)C(U_2) = \det(U_1)\det(D)\det(U_2) = \det(U_2DU_2) = \det(T)$ parce que le déterminant est multiplicatif (proposition 8.15(1)).

□

Ce théorème donne une interprétation géométrique du déterminant en tant que facteur de dilatation des volumes lors de l'utilisation d'une application linéaire. Si T est une application linéaire quelconque,

$$\lambda_N\big(T(Q_0)\big) = |\det(T)|\lambda_N(Q_0) = |\det(T)|. \tag{14.846}$$

Le déterminant de T est le volume de l'image du cube unité par l'application T.

De la même façon, en utilisant l'application linéaire $T(x) = ax$ nous avons pour tout borélien B :

$$\lambda_N(aB) = a^N\lambda_N(B). \tag{14.847}$$

Une dilatation d'un facteur a des longueurs provoque une multiplication par a^N des volumes.

LEMooOLSMooCimcIT

Lemme 14.273.
Tout hyperplan[96] *de $\mathbb{R}^n$ est de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Dans le cas d'un hyperplan vectoriel, il s'agit de prendre le théorème 14.272. En posant $B = \mathbb{R}^n$, et en considérant l'application linéaire de projection de $\mathbb{R}^n$ vers l'hyperplan, on a le résultat parce que le déterminant d'une telle application est nul.

Si l'hyperplan n'est pas vectoriel, alors nous utilisons l'invariance par translation[97] et nous nous ramenons au cas vectoriel. □

[95] Proposition 8.44.
[96] Définition 8.304.
[97] Théorème 14.252.

CorTHDQooWMSbJe

Corolaire 14.274 ([506]).
Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une union dénombrable de cubes presque disjoints[98].

Démonstration. Il suffit de prendre les cubes de la proposition 14.250 et de les fermer. Ce que l'on ajoute est de mesure nulle[99]. □

Remarque 14.275.
La proposition 14.250 est une propriété seulement de la topologie de $\mathbb{R}^n$ alors que le corolaire 14.274 fait intervenir la mesure de Lebesgue parce qu'il faut bien dire que les intersections sont de mesure (de Lebesgue) nulle.

14.14.3 Ensembles négligeables

LemWHKJooGPuxEN

Lemme 14.276 ([524]).
L'image d'une partie négligeable de $\mathbb{R}^d$ par une application lipschitzienne est négligeable.

Démonstration. Soit N une partie négligeable de $\mathbb{R}^d$ et une application lipschitzienne $f\colon N \to \mathbb{R}^d$. Soit $Q \subset \mathbb{R}^d$ un cube borné de côté r. Pour tout $x, x' \in N \cap Q$ nous avons

$$\|f(x) - f(x')\| \leqslant C\|x - x'\| \leqslant Cr. \tag{14.848}$$

Donc $f(N \cap Q)$ est dans une boule de rayon Cr. Mais comme toutes les normes sont équivalentes[100] sur $\mathbb{R}^d$ nous pouvons tout aussi bien prendre la norme $\|.\|_1$ au lieu de la norme $\|.\|_2$ (qui est toujours la norme prise implicitement lorsqu'on parle de $\mathbb{R}^n$), de telle sorte que les boules soient des cubes. Quoi qu'il en soit, $f(N \cap Q)$ est contenu dans un cube de côté $2Cr$ et au niveau de la mesure extérieure,

$$m^*\big(f(N \cap Q)\big) \leqslant (2Cr)^d = (2C)^d r^d, \tag{14.849}$$

ou encore

$$m\big(f(N \cap Q)\big) \leqslant (2C)^d m(Q) \tag{14.850}$$

parce que r^d est la mesure du cube Q.

Soit maintenant $\epsilon > 0$; vu que N est négligeable, il existe un ouvert U contenant N et tel que $m(U) < \epsilon$. Ce U est une union presque disjointe de cubes dyadiques (Q_n) par le corolaire 14.274. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
m^*\big(f(N)\big) &= m^*\big(f(\bigcup_n N \cap Q_n)\big) && \text{(14.851a)}\\
&= m^*\big(\bigcup_n f(N \cap Q_n)\big) && \text{(14.851b)}\\
&\leqslant \sum_n m^*(f(N \cap Q_n)) && \text{(14.851c)}\\
&\leqslant \sum_n (2C)^d m(Q_n) && \text{(14.851d)}\\
&= (2C)^d m(U) && \text{(14.851e)}\\
&< (2C)^d \epsilon. && \text{(14.851f)}
\end{aligned}$$

Au final, $m^*\big(f(N)\big) \leqslant (2C)^d\epsilon$. L'ensemble N est donc négligeable parce que le lemme 14.75 le dit : $m^*(N) = 0$. □

Corolaire 14.277.
Un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^N$ est négligeable.

Démonstration. Un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k < N$ est l'image de

$$A = \{t_1 e_1 + \cdots + t_k e_k \text{ tel que } t_i \in \mathbb{R}\} \tag{14.852}$$

par une application linéaire. Ce A est un pavé de mesure de Lebesgue nulle. Donc l'image est négligeable par le lemme 14.276. □

[98] « presque » au sens où les intersections éventuelles sont de mesure de Lebesgue nulle.
[99] Voir le lemme 14.273.
[100] Proposition 10.59

14.14.4 Parties et fonctions mesurables

Pour rappel, la notion d'application de classe C^1 est donnée par la définition 10.297.

PropRDRNooFnZSKt

Proposition 14.278.
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\phi: U \to V$ un C^1-difféomorphisme. Si $E \subset U$ est mesurable, alors $\phi(E)$ est mesurable[101].

Démonstration. Si E est mesurable, il existe un borélien B et un ensemble négligeable N tels que $E = B \cup N$. Vu que ϕ est un homéomorphisme, l'application ϕ^{-1} est borélienne parce que continue (théorème 14.56). Nous avons

$$\phi(B) = (\phi^{-1})^{-1}(B), \tag{14.853}$$

c'est-à-dire que $\phi(B)$ est l'image inverse de B par ϕ^{-1}. L'ensemble $\phi(B)$ est donc borélien.

Il reste à voir que $\phi(N)$ est négligeable. Soit $Q \subset U$ un cube compact. L'application $d\phi: Q \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ est continue et donc bornée (par la remarque 10.305) sur le compact Q. Par les accroissements finis (théorème 10.337), l'application ϕ est donc lipschitzienne sur Q. La partie $\phi(N \cap Q)$ est alors négligeable par le lemme 14.276. Pour conclure,

$$\phi(N) = \bigcup_i \phi(N \cap Q_i) \tag{14.854}$$

où les Q_i sont tous des cubes compacts. Donc $\phi(N)$ est une union dénombrable d'ensembles négligeables ; ergo négligeable lui-même par le lemme 14.67. □

Proposition 14.279.
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\phi: U \to V$ un C^1-difféomorphisme. Si $f: V \to \mathbb{C}$ est mesurable, alors $f \circ \phi: U \to \mathbb{C}$ l'est.

Démonstration. Soit A une partie mesurable de $\mathbb{C}$. Il nous faut prouver que

$$(f \circ \phi)^{-1}(A) = \phi^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) \tag{14.855}$$

soit mesurable. Par hypothèse , $f^{-1}(A)$ est mesurable. Vu que ϕ est un C^1-difféomorphisme, elle et son inverse sont mesurables par la proposition 14.278. Donc l'image du mesurable $f^{-1}(A)$ par ϕ^{-1} est encore mesurable. □

PROPooSEJJooIfGUkW

Proposition 14.280.
Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^∞ et si N est une partie de mesure (de Lebesgue) nulle dans $\mathbb{R}^n$, alors $f(N)$ est également de mesure nulle.

PROPooIESAooBsThho

Proposition 14.281.
Soit une application $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui s'annule une quantité dénombrable de fois. Soit N de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\delta\| < \epsilon$ et tel que la fonction $x \mapsto f(x + \delta)$ ne s'annule pas sur N.

Démonstration. Soient $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ les racines de f. Pour chaque i, nous notons

$$F_i = \{\delta \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_i + \delta \in N\}. \tag{14.856}$$

Chacun de F_i est de mesure nulle, et donc $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ est de mesure nulle. Il suffit de prendre $\delta \in B(0, \epsilon) \setminus \bigcup_i F_i$, et nous avons $x_i + \delta$ hors de N pour tout i. □

14.14.5 Le théorème et sa démonstration

THOooUMIWooZUtUSg

Théorème 14.282 (Changement de variable[524, 523])**.**
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$ ainsi qu'un C^1-difféomorphisme $\phi: U \to V$. Nous notons J_ϕ la fonction

$$\begin{aligned} J_\phi: \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto \det(d\phi_a). \end{aligned} \tag{14.857}$$

Alors :

[101] Ici « mesurable » parle de mesurabilité au sens de la tribu de Lebesgue, c'est-à-dire pas seulement les boréliens.

ItemVWYDooOzwnyfi

(1) *Si $E \subset U$ est borélien, alors $\phi(E)$ est borélien et*

$$\lambda_N\big(\phi(E)\big) = \int_E |J_\phi| d\lambda_N, \tag{14.858}$$

c'est-à-dire $\phi^{-1}(\lambda_N) = |J_\phi| \cdot \lambda_N$.

ITEMooEZUBooGBuDOS

(2) *Si $f\colon V \to [0,+\infty]$ est mesurable alors la fonction*

$$\begin{aligned}(f\circ\phi)\times|J_\phi|\colon U &\to [0,\infty]\\ x &\mapsto (f\circ\phi)(x)|J_\phi(x)|d\lambda_N(x)\end{aligned} \tag{14.859}$$

l'est également et[102]

EqRANEooQsFhbC

$$\int_{\phi(U)} f d\lambda_N = \int_U (f\circ\phi)(x)|J_\phi(x)|d\lambda_N(x). \tag{14.860}$$

ITEMooAJGDooGHKnvj

(3) *Si $f\colon V \to \mathbb{C}$ est mesurable alors elle est intégrable si et seulement si $(f\circ\phi)\times|J_\phi|\colon U\to\mathbb{C}$ est intégrable. Si c'est le cas, alors nous avons encore la formule de changement de variables :*

EQooLYAWooTArAZR

$$\int_V f d\lambda_N = \int_{\phi^{-1}(V)} (f\circ\phi)|J_\phi|d\lambda_N. \tag{14.861}$$

Démonstration. Attention : la preuve va être longue.

(1) Le fait que $\phi(E)$ soit borélien lorsque E l'est est la proposition 14.278. En ce qui concerne la formule annoncée, il faut travailler.

(1a) **Inégalité dans un sens (cubes)** Nous commençons par prouver l'inégalité

EqooQCXXooSjGzks

$$\lambda_N\big(\phi(Q)\big) \leqslant \int_Q |J_\phi(x)|dx \tag{14.862}$$

pour tout $Q \in \mathcal{Q}$. On peut diviser le côté du cube Q en k éléments de longueurs égales. Le cube est alors divisé en k^N petits cubes d'intérieurs disjoints. Nous les nommons Q_i $(i = 1,\dots,k^N)$ Nous avons alors

$$\sum_i \lambda_N(Q_i) = \sum_i \lambda_N\big(\operatorname{Int}(Q_i)\big) = \lambda_N\big(\bigcup_i \operatorname{Int}(Q_i)\big) \leqslant \lambda_N(Q) \leqslant \sum_i \lambda_N(Q_i). \tag{14.863}$$

La dernière inégalité est le fait que les intersections ne sont pas disjointes. Toutes ces inégalités sont en réalité des égalités et en particulier : $\lambda_N(Q) = \sum_i \lambda_N(Q_i)$.
Soit $a \in Q_i$. Posons

$$\begin{aligned}&\theta\colon U \to U\\ &\theta = (d\phi_a)^{-1}\circ\phi\end{aligned} \tag{14.864}$$

Cela appelle deux commentaires. D'abord l'application $d\phi_a\colon U\to V$ est inversible parce que ϕ est un difféomorphisme (lemme 10.324). Ensuite, l'application θ est la composée de $(d\phi_a)$ (qui est linéaire) et de ϕ qui est de classe C^1 ; donc θ est de classe C^1. Donc le lemme 14.271 s'applique. La différentielle de θ n'est pas trop compliquée à écrire parce que nous avons la formule de différentielle d'une composée (théorème 10.317) et le fait que $(d\phi_a)^{-1}$ qui est linéaire et donc sa propre différentielle (lemme 10.313). Nous avons donc $d\theta = (d\phi_a)^{-1}\circ d\phi$, et le lemme donne

$$\lambda_N\left((d\phi_a)^{-1}\phi(a)\right) \leqslant \sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1}\circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i) \tag{14.865}$$

Étant donné que $(d\phi_a)^{-1}$ est une application linéaire, la proposition 14.272 s'applique, et donc

$$\lambda_N\left((d\phi_a)^{-1}\phi(a)\right) = |\det(d\phi_a)^{-1}|\lambda_N\big(\phi(a)\big). \tag{14.866}$$

Le déterminant d'une application réciproque est donné par la proposition 8.15(4) :

$$\det\left((d\phi_a)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(d\phi_a\right)} = \frac{1}{J_\phi(a)}. \tag{14.867}$$

[102] L'intégrabilité d'une fonction est la définition 14.186 qui stipule que l'intégrale de $|f(x)|$ est finie. L'égalité proposée a un sens si les deux membres sont infinis. Il n'y a donc pas d'hypothèses d'intégrabilité obligatoire pour écrire une intégrale lorsque la fonction a des valeurs positives.

Recollant les morceaux,

$$\lambda_N\big(\phi(Q_i)\big)\frac{1}{J_\phi(a)} \leqslant \sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1}\circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i), \tag{14.868}$$

ou encore :

$$\lambda_N\big(\phi(Q_i)\big) \leqslant |J_\phi(a)| \sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1}\circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i). \tag{14.869}$$

Vu que a et s sont proches l'un de l'autre (on peut choisir encore la taille du cube), nous pouvons espérer que $(d\phi_a)^{-1}$ ne soit pas loin d'être l'inverse de $d\phi_s$. Et c'est en effet le cas. Pour s'en assurer, remarquons que l'application

$$d\phi\colon Q_i \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N) \tag{14.870}$$

est continue et même uniformément continue parce que Q_i est compact. De plus la composition de différentielles étant un produit de matrices nous pouvons permuter la limite dans le calcul suivant :

$$\lim_{s\to a}(d\phi_a)^{-1}\circ d\phi_s = (d\phi_a)^{-1}\circ \lim_{s\to a} d\phi_s = \mathbb{1}. \tag{14.871}$$

Donc si $\epsilon>0$ est donné, il existe δ tel que pour tout $s\in B(a,\delta)$, $\|(d\phi_a)^{-1}\circ d\phi_s - \mathbb{1}\| \leqslant \epsilon$. En ce qui concerne les normes, si $\|A-\mathbb{1}\|\leqslant\epsilon$ alors $\|A\|\leqslant\|A-\mathbb{1}\|+\|\mathbb{1}\|\leqslant\epsilon+1$.

Cela étant dit, nous nous souvenons que nous avions découpé U en un nombre fini de cubes Q_i d'égales dimensions ; il suffit de prendre k suffisamment grand pour que la diagonale des cubes sot plus petite que le minimum des δ_i. Avec un tel découpage,

$$\sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1}\circ d\phi_s\| \leqslant 1+\epsilon \tag{14.872}$$

et par conséquent

$$\lambda_N\big(\phi(Q_i)\big) \leqslant (1+\epsilon)^N |J_\phi(a_i)|\lambda_N(Q_i) \tag{14.873}$$

EqooQRMNooZduAkX

où nous avons ajouté un indice i au point a pour nous rappeler que nous avons choisi $a\in Q_i$.

Le théorème de la moyenne 14.269 appliqué à l'intégrale $\int_{Q_i}|J_\phi(t)|d\lambda_N(t)$ donne l'existence d'un $a_i\in Q_i$ tel que

$$|J_\phi(a_i)| = \frac{1}{\lambda_N(Q_i)}\int_{Q_i}|J_\phi|d\lambda_N. \tag{14.874}$$

Ce point a_i vérifie l'inégalité (14.873) comme tout point de Q_i. Nous sommons ces inégalités sur tous les i :

$$\begin{aligned}
\lambda_N\big(\phi(Q)\big) &\leqslant \sum_i \lambda_N\big(\phi(Q_i)\big) && \text{(14.875a)}\\
&\leqslant (1+\epsilon)^N \sum_i \left(\frac{1}{\lambda_N(Q_i)\int_{Q_i}|J_\phi|d\lambda_N}\right)\lambda_N(Q_i) && \text{(14.875b)}\\
&= (1+\epsilon)^N \sum_i \int_{Q_i}|J_\phi|d\lambda_N && \text{(14.875c)}\\
&= (1+\epsilon)^N \int_Q |J_\phi|d\lambda_N && \text{(14.875d)}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\mathbb{1}_Q=\sum_i\mathbb{1}_{Q_i}$ presque partout. En prenant le limite $\epsilon\to0$ nous trouvons

$$\lambda_N\big(\phi(Q)\big) \leqslant \int_Q |J_\phi|d\lambda_N. \tag{14.876}$$

L'inégalité (14.862) est prouvée.

(1b) **Inégalité pour les boréliens**

Soit B un borélien de U. Vu que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$, les mesures de Lebesgue sur U et sur V sont les mêmes que celles sur $\mathbb{R}^N$ par le corolaire 14.58.

Par les définitions 14.212 et 14.84, les applications μ et ν définies par $\mu=\phi^{-1}(\lambda_N)$ et $\nu=|J_\phi|\lambda_N$ sont des mesures positives sur U (de Borel, qui plus est). L'inégalité (14.862) à peine prouvée s'écrit $\mu(Q)\leqslant\nu(Q)$ pour tout cube Q. Le lemme 14.270 nous dit alors que l'inégalité tient pour tout borélien.

(1c) **Inégalité dans l'autre sens**

En utilisant la notation de la mesure image et du produit d'une mesure par une fonction[103], nous pouvons écrire l'inégalité prouvée sous la forme $\phi^{-1}(\lambda_N) \leqslant |J_\phi|\lambda_N$. En inversant les rôles de U et V (et donc de ϕ et ϕ^{-1}) nous avons aussi

$$\phi(\lambda_N) \leqslant |J_{\phi^{-1}}|\lambda_N. \tag{14.877}$$

En y appliquant ϕ^{-1} et le lemme 14.84,

$$\lambda_N \leqslant \phi^{-1}\big(|J_{\phi^{-1}}|\lambda_N\big). \tag{14.878}$$

EqooHJCHooVIabeI

Nous prouvons à présent que $\phi^{-1}\big(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N\big) = \Big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\Big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N)$ en appliquant à un borélien B de U. D'une part

$$\begin{aligned}\phi^{-1}\big(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N\big)(B) &= \big(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N\big)\phi(B) &(14.879a)\\ &= \int_{\phi(B)} |J_{\phi^{-1}}|d\lambda_N, &(14.879b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}\Big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\Big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N)B &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x)\big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big)(x)d\big(\phi^{-1}(\lambda_N)\big)(x) &(14.880a)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B\big(\phi^{-1}(x)\big)\big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big)\big(\phi^{-1}(x)\big)d\lambda_N(x) &(14.880b)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)}|J_{\phi^{-1}}| &(14.880c)\\ &= \int_B |J_{\phi^{-1}}|d\lambda_N. &(14.880d)\end{aligned}$$

ooDKSWooXwQwgO

Justification :

- Pour (14.880b), le théorème 14.219(2).

L'équation (14.878) devient alors

$$\lambda_N \leqslant \Big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\Big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N). \tag{14.881}$$

Nous allons faire le produit de cette mesure par $|J_\phi|$ en nous souvenant que $J_\phi(x) = \det\big(d\phi_x\big)$. Par le lemme 10.324 nous avons aussi $(d\phi_x)^{-1} = d\phi^{-1}_{\phi(x)}$ et donc, par la propriété 8.15(3) du déterminant,

$$J_\phi(x) = \frac{1}{\det\big(d\phi^{-1}_{\phi(x)}\big)} = \frac{1}{J_{\phi^{-1}}\big(\phi(x)\big)}. \tag{14.882}$$

Nous avons

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N \leqslant |J_\phi| \cdot \Big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\Big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N). \tag{14.883}$$

En utilisant la proposition 14.215, il s'agit de multiplier la mesure $\phi^{-1}(\lambda_N)$ par la fonction

$$x \mapsto |J_\phi(x)J_{\phi^{-1}}\big(\phi(x)\big)| = 1. \tag{14.884}$$

Nous avons donc bien

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N \leqslant \phi^{-1}(\lambda_N), \tag{14.885}$$

et donc l'égalité

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N = \phi^{-1}(\lambda_N), \tag{14.886}$$

c'est-à-dire le point (1).

(2) Le fait que la fonction proposée soit mesurable est le fait que la mesurabilité n'est pas affectée par produit et composition (propositions 14.104 et 14.45), et le fait que pour les mêmes raisons, l'application $J_\phi\colon U \to \mathbb{R}$ est également mesurable. En ce qui concerne la formule nous allons la démontrer dans le cas de fonctions de plus en plus générales.

[103] Définition 14.84 et 14.212

(2a) **Pour les fonctions indicatrices** Soit B un borélien de U. Considérons la fonction $f = \mathbb{1}_{\phi(B)}$. Alors

$$\int_V f d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)}(y)\mathbb{1}_V(y)d\lambda_N(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)}d\lambda_N = \lambda_N\big(\phi(B)\big). \tag{14.887}$$

parce que $V = \phi(U)$ et $B \subset U$, donc $\mathbb{1}_{\phi(B)}\mathbb{1}_{\phi(U)} = \mathbb{1}_{\phi(B)}$. D'autre part, pour calculer l'autre membre de (14.860) nous remarquons que $f = \mathbb{1}_{\phi(B)} = \mathbb{1}_B \circ \phi^{-1}$, ce qui donne

$$\int_U f\big(\phi(x)\big)|J_\phi(x)|d\lambda_N(x) = \int_U \mathbb{1}_B|J_\phi|d\lambda_N = \int_B |J_\phi|d\lambda_N. \tag{14.888}$$

L'ensemble B étant borélien, il est extrêmement mesurable, ce qui fait que le point (1) s'applique : les expressions (14.887) et (14.888) sont égales.

(2b) **Pour les fonctions étagées**
Soit $f\colon V \to \mathbb{R}^+$ une fonction étagée :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \tag{14.889}$$

Nous pouvons faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\int_V f d\lambda_N &= \int_V \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i} d\lambda_N && (14.890a)\\
&= \sum_i a_i \int_V \mathbb{1}_{A_i} d\lambda_N && (14.890b)\\
&= \sum_i \int_U (\mathbb{1}_{A_i} \circ \phi)(x)|J_\phi(x)|d\lambda_N(x) && (14.890c)\\
&= \sum_i a_i \int_U \mathbb{1}_{\phi^{-1}(A_i)}|J_\phi(x)|d\lambda_N(x) && (14.890d)\\
&= \int_V \underbrace{\sum_i a_i \mathbb{1}_{\phi^{-1}(A_i)}(x)}_{=(f\circ\phi)(x)} |J_\phi(x)|d\lambda_N(x) && (14.890e)\\
&= \int_V (f \circ \phi)|J_\phi|d\lambda_N. && (14.890f)
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (14.890b) : linéarité de l'intégrale, théorème 14.183(2)[104]
- Pour (14.890c) : le cas des fonctions indicatrices est utilisé pour chaque i entre 1 et n.

(2c) **Fonction mesurable positive** Soit $f\colon V \to [0,\infty]$. Par le théorème fondamental d'approximation 14.118, il existe une suite croissante de fonctions étagées et mesurables $\varphi_n\colon V \to [0,\infty[$ dont la limite ponctuelle est f. Nous avons alors le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\int_V f d\lambda_N &= \lim_{n\to\infty} \int_V \varphi_n d\lambda_N && (14.891a)\\
&= \lim_{n\to\infty} \int_U (\varphi_n \circ \phi)|J_\phi|d\lambda_N && (14.891b)\\
&= \int_U \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ \phi)|J_\phi|d\lambda_N && (14.891c)\\
&= \int_U (f \circ \phi)|J_\phi|d\lambda_N. && (14.891d)
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (14.891a), c'est le théorème de la convergence monotone 14.178.
- Pour (14.891b), c'est le présent théorème pour la fonction étagée φ_n.
- Pour (14.891c), c'est encore la convergence dominée, justifiée par le fait que $\varphi_n \circ \phi$ est également une suite croissante : si $x \in U$ alors $\varphi_{n+1}\big(\phi(x)\big) \geqslant \varphi_n\big(\phi(x)\big)$.

[104] Il est remarquable que nous n'utilisons cette linéarité que pour les fonctions étagées.

- Pour (14.891d), c'est la limite ponctuelle $\varphi_n\big(\phi(x)\big) \to f\big(\phi(x)\big)$.

(3) La partie sur l'intégrabilité repose sur le fait que $|f|\circ\phi = |f\circ\phi|$. Ici $|.|$ est le module et non une valeur absolue. Les faits suivants sont équivalents :

- la fonction $f\colon V \to \mathbb{C}$ est intégrable
- la fonction $|f|\colon V \to \mathbb{R}$ est intégrable.
- la fonction $(|f|\circ\phi)|J_\phi|\colon U \to \mathbb{R}$ est intégrable (par le point (2)).
- la fonction $(f\circ\phi)|J_\phi|\colon U \to \mathbb{R}$ est intégrable.

En ce qui concerne la formule, il s'agit seulement d'appliquer le point (2) aux parties positives, négatives, imaginaires et réelles de f.

□

Notons que la formule peut être écrite sous la forme

EQooQKARooELPCFO
$$\langle f, g\rangle_V = \langle f\circ\phi, (g\circ\phi)|J|\rangle_U, \tag{14.892}$$

qui est plus pratique lorsqu'on parle de produits scalaires. Pour rappel, $\phi\colon U \to C$ est un C^1-difféomorphisme.

14.283.
La formule de changement de variables peut être comprise de la façon suivante. Si ϕ est linéaire alors le facteur $|J_\phi|$ est la mesure de l'image par ϕ d'une portion de $\mathbb{R}^p$ de mesure 1, sinon $|J_\phi|$ est le rapport entre la mesure de l'image d'un élément infinitésimal de volume de $\mathbb{R}^p$ et sa mesure originale.

Soit $\phi(u,v) = g(u,v)e_1 + h(u,v)e_2$ un difféomorphisme dans $\mathbb{R}^2$. Soit (x_0, y_0) l'image par ϕ de (u_0, v_0). On considère le petit rectangle R de sommets (u_0, v_0), $(u_0+\Delta u, v_0)$, $(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)$ et $(u_0, v_0+\Delta v)$. L'image de R n'est pas un rectangle en général, mais peut être bien approximée par le rectangle de sommets (x_0, y_0), $(x_0, y_0) + \phi_u\Delta u$, $(x_0, y_0) + \phi_u\Delta u + \phi_v\Delta v$ et $(x_0, y_0) + \phi_v\Delta v$ et son aire est $\|\phi_u \times \phi_v\|\Delta u\Delta v$. La valeur $|\phi_u \times \phi_v|$ est exactement $|J_\phi|$

14.14.6 Exemples

Énormément d'exemples sont disponibles avec les coordonnées polaires et toutes leurs variations. Cependant les fonctions trigonométriques ne seront vues que plus tard ; les coordonnées polaires, cylindrique et sphériques seront vues en section 18.13 et les exemples d'utilisation pour les intégrales seront dans la section 18.15.

Un exemple avec une exponentielle sera donnée dans l'exemple 15.118.

14.15 Changement d'espace mesuré

PROPooILOEooBiumKD
Proposition 14.284 ([1]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit un ensemble Ω' et une bijection $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$. Nous posons

(1) $\mathcal{A}' = \varphi(\mathcal{A})$,

(2) $\mu'(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big)$ *pour tout* $B \in \mathcal{A}'$.

Soit enfin une fonction mesurable $f\colon \Omega \to X$.
Alors

(1) Le triple $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ est un espace mesuré.

(2) L'application $f\circ\varphi^{-1}\colon \Omega' \to X$ est mesurable.

(3) Nous avons l'égalité

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega'} (f\circ\varphi^{-1}) d\mu'. \tag{14.893}$$

Démonstration. La proposition 14.59 montre déjà que $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ est un espace mesuré.

Soit une partie S mesurable dans X. Alors $f^{-1}(S)$ est mesurable dans Ω par hypothèse sur f, c'est-à-dire que $f^{-1}(S) \in \mathcal{A}$. Ensuite $(\varphi\circ f^{-1})(S)$ est mesurable dans Ω' par hypothèse sur φ. Cela prouve que $f\circ\varphi^{-1}$ est une application mesurable.

Nous avons encore à prouver l'égalité d'intégrale. Par la définition 14.167 nous avons

$$\int_\Omega f d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)\} \tag{14.894}$$

où le supremum est sur tous les n et tous les choix de $A_i \in \mathcal{A}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$ tels que $f|_{A_i} > a_i$. Vu que $\mathcal{A}' = \varphi(\mathcal{A})$, si $A_i \in \mathcal{A}$ et a_i sont choisis, nous avons aussi

$$f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(A_i)} \geqslant a_i \tag{14.895}$$

avec $\varphi(A_i) \in \mathcal{A}'$. Donc pour un choix de $\{(A_i, a_i)\}$ donné,

$$\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mu'\big(\varphi(A_i)\big). \tag{14.896}$$

Au final,

$$\int_\Omega f d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)\} = \sup\{\sum_i a_i \mu'\big(\varphi(A_i)\big)\} = \int_{\varphi(\Omega)} f \circ \varphi^{-1} d\mu'. \tag{14.897}$$

□
REMooOMYYooNFiKOs

Remarque 14.285 (Ce n'est pas la mesure que nous voulons)**.**
La mesure donnée par la proposition 14.284 n'est pas celle que nous voulons d'habitude sur Ω'. Anticipons un peu pour comprendre. Prenons l'exemple de la partie C^2 de $\mathbb{R}$ donnée par

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = x^2, x \in]0, 3[\}. \tag{14.898}$$

(1) La façon correcte de définir la longueur de C est de prendre une limite d'approximations par des morceaux de droites, comme fait à la définition 21.3.

(2) Cette définition de la longueur peut être exprimée sous forme intégrale par le théorème 21.9 qui nous assure que

$$l(C) = \int_0^3 \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^3 \sqrt{1 + 4t^2} dt \neq \mu'(C). \tag{14.899}$$

En effet, $\mu'(C) = \mu\big(\varphi^{-1}(C)\big) = \mu\big(]0, 3[\big) = 3$, alors que pour tout t nous avons $\sqrt{1 + 4t^2} > 1$ et donc $l(C) > 3$.

(3) Donc μ' n'est pas exactement ce que nous aurions pu vouloir appeler la « mesure » de C.

(4) La mesure à considérer sur C doit donc plutôt être quelque chose comme le produit de la mesure μ' par la fonction $\|\varphi'\|$. Mais cela est une autre histoire qui vous sera contée une autre fois.
ITEMooJTKCooYQknqo

(5) Dans le cas de S^1, nous avons $\varphi(x) = e^{ix}$, et $\|\varphi'(x)\| = 1$. Donc la mesure donné ici est probablement bien celle que nous voulons. Peut-être à coefficient $\frac{1}{2\pi}$ près pour avoir une normalisation $\mu'(S^1) = 1$. Cela est également une autre histoire qui vous sera contée une autre fois ; par exemple dans la proposition 18.71.

14.16 Primitives et intégrales

DEFooGLJDooFeZBBC

Définition 14.286.
Si $a < b$ nous posons

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} f. \tag{14.900}$$

Si par contre $a > b$ nous posons $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Un petit cas particulier :

$$\int_{-\infty}^b f(t) dt = \int_{]-\infty,b]} f. \tag{14.901}$$

PropEZFRsMj

Proposition 14.287 (Primitive et intégrale[373]).
Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et continue sur $]a,b[$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} F\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{[a,x]} f(t)dt. \end{aligned} \tag{14.902}$$

est l'unique primitive de f sur $]a,b[$ s'annulant en $x=a$.

Démonstration. Nous devons prouver que F est dérivable et que pour tout $x_0 \in]a,b[$ nous avons $F'(x_0) = f(x_0)$. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha(h) \tag{14.903}$$

avec $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. Cette dernière limite signifie qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $|\alpha(h)| < \epsilon$ pour tout h tel que $|h| < \delta$, c'est-à-dire pour tout $h \in B(0,\delta)$. À partir de maintenant nous ne considérons plus que de tels h.

Notre travail maintenant est de prouver que F est dérivable en x_0, et de montrer que la dérivée est $f(x_0)$. Pour cela,

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \tag{14.904a}$$

$$= \int_0^h f(x_0+t)dt \tag{14.904b}$$

$$= \int_0^h \big[f(x_0)+\alpha(t)\big]dt \tag{14.904c}$$

$$= hf(x_0) + \int_0^h \alpha(t)dt. \tag{14.904d}$$

Nous avons donc montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un δ (défini via la fonction α) tel que $|h| < \delta$ implique

$$\left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \epsilon. \tag{14.905}$$

Cela signifie que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0), \tag{14.906}$$

qui n'est rien d'autre que le fait que F est dérivable en x_0 et que sa dérivée est $f(x_0)$.

Le fait que F s'annule en $x=a$ est par sa définition. L'unicité provient du corolaire 12.224. □

14.16.1 Théorème fondamental du calcul intégral

ThoRWXooTqHGbC

Théorème 14.288 (Théorème fondamental du calcul intégral).
Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I contenant strictement l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \tag{14.907}$$

Démonstration. Nous avons vu par la proposition 14.287 que la fonction

$$\begin{aligned} G\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned} \tag{14.908}$$

était l'unique primitive de f sur $]a,b[$ à s'annuler pour $x=a$. Nous avons évidemment

$$\int_a^b f(t)dt = G(b). \tag{14.909}$$

Si F est une primitive quelconque, il suffit de soustraire sa valeur en $x = a$: $G(x) = F(x) - F(a)$ et donc

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) - F(a), \tag{14.910}$$

comme il fallait le prouver. □

Le théorème fondamental s'écrit souvent sous la forme[105]

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt. \tag{14.911}$$ EqooBBCYooNweVrF

Sous cette forme, il faut penser que nous calculons $f(x)$ en un point pas trop éloigné de a, en sachant $f(a)$ et en intégrant la dérivée entre les deux.

Remarque 14.289.
Le lien entre primitive et intégrale est fondamentalement lié à l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, et non à la construction précise de cette mesure. Mais en même temps, la mesure de Lebesgue est l'unique à être invariante par translation.

Quelque remarques.

(1) Le théorème fondamental du calcul intégral est à utiliser pour calculer des intégrales des fonctions réelles lorsqu'on a des primitives sur un domaine strictement plus large que le domaine sur lequel nous voulons intégrer.

(2) Une version pour les intégrales impropres sera donnée au corolaire 14.300.

(3) Une primitive est forcément une fonction continue parce qu'une primitive est dérivable.

(4) Le théorème fondamental du calcul intégral ne sert pas qu'à calculer des intégrales à partir de primitives. Il sert aussi à démontrer des résultats plus théoriques, comme le théorème 12.398.

(5) En vertu du corolaire 12.224, une fonction ne possède qu'une seule primitive à constante près.

14.16.2 Exemples et applications

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et y admettant des primitives, nous notons

$$\int f(x)dx \tag{14.912}$$

l'ensemble des primitives de f sur I :

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C \text{ tel que } C \in \mathbb{R}\} \tag{14.913}$$

où F est une quelconque primitive de f.

Exemple 14.290.
Une primitive bien connue de $f : x \mapsto x^2$ est la fonction $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}$. Nous écrivons donc

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C. \tag{14.914}$$

Cela est un abus de notation terrible pour dire en réalité

$$\{x \mapsto \frac{x^3}{3} + C \text{ tel que } C \in \mathbb{R}\}. \tag{14.915}$$

△

En termes de notations, nous posons

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a). \tag{14.916}$$ Thfondcalc

[105] Par exemple dans les théorèmes du reste des polynômes de Taylor 15.63 et de Cauchy-Lipschitz 17.39.

Remarque 14.291.
La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la primitive qu'on choisi pour le calculer, car si F_1 et F_2 sont deux primitives de f alors $F_1 = F_2 + C$ et $F_1(b) - F_1(a) = (F_2(b) + C) - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$.

Remarque 14.292.
Si l'intervalle d'intégration est réduit à un seul point alors la valeur de l'intégrale est zéro. Nous le savions déjà, et cela est cohérent avec le théorème fondamental car $\int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0$.

Remarque 14.293.
Toute intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine est nulle.

PROPooJYIAooXLkbMx

Proposition 14.294 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés E et F où F est de dimension finie[106]*. Nous considérons une fonction $f : E \to F$ de classe C^1 ainsi qu'un chemin $\gamma : [0,1] \to E$ de classe C^1 également.*

Alors nous avons l'égalité

$$\int_0^1 (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big) = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big). \tag{14.917}$$

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\to F \\ t &\mapsto (f \circ \gamma)(t). \end{aligned} \tag{14.918}$$

Cette fonction vérifie $g'(t) = (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)$ par le lemme 12.306. Le théorème fondamental du calcul intégral[107] nous permet donc d'écrire

$$\int_0^1 (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt = \int_0^1 g'(t)df = g(1) - g(0). \tag{14.919}$$

Notons que g est continue grâce aux hypothèses de classe C^1 pour γ et f. □

La proposition suivante est la généralisation à $\mathbb{R}$ de la proposition 12.461.

PROPooKIASooGngEDh

Proposition 14.295.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si $f_\alpha(x) = x^\alpha$ alors

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{14.920}$$

Au niveau du domaine, c'est $\mathbb{R}$ auquel il faut enlever $\{0\}$ si $\alpha - 1 < 0$.

Démonstration. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et une suite de rationnels α_i qui converge vers α. Les plus amateurs d'abstraction diront $(\alpha_i) \in \alpha$ en référence à la proposition 1.535.

Nous notons $f_\alpha(x) = x^\alpha$ et $f_i(x) = x^{\alpha_i}$. Par définition nous avons

$$f_i \to f_\alpha \tag{14.921}$$

ponctuellement. De plus en utilisant la proposition 12.461 nous savons que $f'_i(x) = \alpha_i x^{\alpha_i - 1}$. En posant $g(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ nous avons donc

$$f'_i \to g. \tag{14.922}$$

ponctuellement. Mais f'_i est continue pour tout i et g également. Donc la convergence $f_i \to f_\alpha$ est uniforme sur tout compact[108]. Le théorème 12.398 nous permet de permuter limite et dérivée pour avoir $g = f'_\alpha$. □

14.16.3 Intégrales impropres

SecGAVooBOQddU

Définition 14.296 ([373]).
*Une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **localement intégrable** sur un intervalle I si f est intégrable sur tout intervalle compact contenu dans I.*

PropCJAooQhNYkp

Proposition 14.297.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f. \tag{14.923}$$

EqPPMooBQDTYl

[106] Sinon l'intégrale dont nous allons parler n'est pas définie au sens où nous n'en avons pas donné de définition. Voir 14.195.
[107] Théorème 14.288.
[108] Proposition 12.388.

Démonstration. Notons que la valeur de f en b n'a strictement aucune importance parce que l'intégrale de Lebesgue ne dépend pas du choix de la valeur de la fonction en un ensemble de mesure nulle ; et en même temps la limite à gauche de (14.923) ne dépend pas non plus de la valeur de f en b. Bref si f n'est pas définie en b, nous pouvons poser $f(b) = 42$.

Notons de plus que du point de vue de l'intégrale de Lebesgue, $\int_{[a,b]}$ et $\int_{[a,b[}$ sont identiques et valent toutes les deux $\int_a^b$ (lorsque ça existe).

(1) **Si f est positive** Supposons d'abord que f est positive. Alors nous posons $f_n = f\mathbb{1}_{[a,b-\frac{1}{n}]}$. Ponctuellement nous avons la limite croissante $f_n \to f$ et de plus

$$\lim_{x\to b^-} \int_{[a,x]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n. \tag{14.924}$$

Chacun des f_n est intégrable sur $[a,b]$. Le théorème de Beppo-Levi 14.178 implique que f est intégrable sur $[a,b]$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f. \tag{14.925}$$

Cela montre que dans le cas d'une fonction f positive nous avons bien (14.923).

(2) **Si f n'est pas positive** Si f n'est pas positif, alors nous la décomposons en partie positive et négative $f = f^+ - f^-$ et par définition de l'intégrale d'une fonction non positive,

$$\lim_{x\to b^-} \int_{[a,x[} f = \lim \int f^+ - \lim \int f^-. \tag{14.926}$$

□

Il peut cependant arriver que la limite $\lim_{x\to b} \int_a^b f$ existe alors que f n'est pas intégrable sur $[a,b]$. C'est l'ennui des fonctions non positives. Un exemple classique est

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt \tag{14.927}$$

EqMMVooDSpgfz

La définition suivante est motivée par le lemme 14.262.

DEFooINPOooWWObEz

Définition 14.298 ([525]).
Si

$$\lim_{x\to b} \int_a^x f \tag{14.928}$$

existe alors nous disons que l'intégrale est ***convergente*** *en b. Ce procédé de limite est l'intégrale* ***impropre*** *de f sur $[a,b]$.*

Exemple 14.299 (Intégale impropre).
Nous considérons la fonction $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [2n-2, 2n-1[\\ -\frac{1}{n} & \text{si } x \in [2n-1, 2n[. \end{cases} \tag{14.929}$$

Par la divergence de la série harmonique, $\int_0^\infty |f|$ n'existe pas. La fonction f n'est donc pas intégrable au sens de Lebesgue (définition 14.186).

Cependant pour tout n pair nous avons

$$\int_0^n f = 0. \tag{14.930}$$

Du coup pour tout $x \geqslant 0$ nous avons

$$\int_0^x f = \int_{2n}^x f \tag{14.931}$$

où $2n$ est le plus grand nombre pair inférieur à x. Nous avons $|x - 2n| \leqslant 2$ et $|f(x)| \leqslant \frac{1}{n}$ pour $x \in [2n, x]$. Donc

$$\int_{2n}^x f \leqslant \frac{2}{n}. \tag{14.932}$$

Nous avons par conséquent

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f = 0, \tag{14.933}$$

ce qui signifie que l'intégrale de f sur $[0,\infty[$ converge au sens des intégrales impropres. △

L'intégrale (14.927) est une intégrale convergente mais la fonction n'est pas intégrable (parce que pour être intégrale il faut que $|f|$ soit intégrable). Nous pouvons ainsi dire que cette intégrale converge mais n'existe pas.

Le corolaire suivant nous autorise à utiliser le théorème fondamental du calcul intégral 14.288 même dans les cas limites.

CorMUIooXREleR

Corolaire 14.300.
Si f est localement intégrable sur $[a,b]$ et si F est une primitive de f sur tout ouvert de $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a). \tag{14.934}$$

Démonstration. Pour chaque x dans $[a,b[$ nous avons

$$\int_a^x f = F(x) - F(a). \tag{14.935}$$

La proposition 14.297 nous explique que la limite $x \to b^-$ du membre de gauche existe et vaut $\int_a^b f$. Donc également le membre de droite :

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a). \tag{14.936}$$

□

La convergence des intégrales de fonctions $\frac{1}{x^\alpha}$ en 0 et ∞ est une question classique de l'intégration. De plus ces fonctions servent souvent à utiliser une théorème de comparaison (type intégrale dominée de Lebesgue).

PropBKNooPDIPUc

Proposition 14.301.
Deux intégrales remarquables.

(1) Nous avons

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \infty \tag{14.937}$$

si et seulement si $\alpha \geqslant 1$.

ITEMooJFSXooHmgmEj

(2) Nous avons

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} = \infty \tag{14.938}$$

si et seulement si $\alpha \leqslant 1$.

Démonstration. La fonction $\frac{1}{x^\alpha}$ admet la primitive $F(x) = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ sur tout compact de $]0,\infty[$. Le corolaire 14.300 nous permet[109] de dire que $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ vaudra

$$\lim_{x\to 0-^+} \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}. \tag{14.939}$$

Cela est strictement plus petit que ∞ si et seulement si $\alpha < 1$. □

14.17 Théorème de Fubini-Tonelli et de Fubini

Nous rappelons que $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue est un espace mesuré σ-fini, conformément à la définition 14.18.

Le théorème de Fubini-Tonelli parle de fonctions à valeurs réelles positives et non de fonctions à valeurs complexes. Le truc est que ce théorème va servir de base pour construire les autres. Si nous avons une fonction à valeurs complexes, elle se décompose en parties réelles et imaginaires qui elles-mêmes se décomposent en parties positives et négatives. Au final, les preuves pour $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ se ramènent à appliquer quatre fois le théorème pour $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^+$.

[109] Tout ce que nous avons fait avec la borne b de l'intégrale $\int_a^b$ reste valable avec la borne a.

ThoWTMSthY

Théorème 14.302 (Fubini-Tonelli[503]).
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace produit. Soit une fonction $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive (valant éventuellement ∞ à certains endroits) Alors :

ITEMooUTMNooVIBdpP

(1) Les fonction

EQooWLADooQwNhEv

$$F_1 : x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y) \tag{14.940}$$

et

$$F_2 : y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \tag{14.941}$$

sont mesurables.

ITEMooFKQUooCoCOLV

(2) Toutes les intégrales imaginables existent et sont égales :

EqJRVtOGx

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) = \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) \tag{14.942a}$$

$$= \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y) \tag{14.942b}$$

où tous les membres de l'égalité valent éventuellement $+\infty$.

Démonstration. Commençons par prouver le théorème dans le cas d'une fonction caractéristique d'un ensemble mesurable : $f(x,y) = \mathbb{1}_A(x,y)$ pour un certain ensemble $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$. Dans ce cas,

$$F_1(x) = \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A(x,y) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_1(y)}(x) d\mu_2(y) = \mu_2\big(A_1(x)\big), \tag{14.943}$$

et nous avons déjà vu au théorème 14.245 que cette fonction F_1 était alors mesurable. En utilisant maintenant les égalités (14.754) ainsi que le fait que $\mathbb{1}_A(x,y) = \mathbb{1}_{A_2(x)}(y)$ nous avons

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \mathbb{1}_A(x,y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(A) \tag{14.944a}$$

$$= \int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big) d\mu_1(x) \tag{14.944b}$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_2(x)}(y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) \tag{14.944c}$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A(x,y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x). \tag{14.944d}$$

Le théorème étant valable pour les fonctions caractéristiques, il est valable pour les fonctions simples (définition 14.112) par linéarité de l'intégrale.

Si f n'est pas une fonction simple, alors la proposition 14.118 nous donne une suite croissante de fonctions simples et positives convergeant ponctuellement vers f. La partie du théorème sur les fonctions simples dit que pour chaque n l'intégrale

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_n(x,y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) \tag{14.945}$$

peut être décomposée comme il faut en suivant la formule (14.942). Il faut pouvoir permuter la limite et l'intégrale dans chacun des cas. D'abord le théorème de la convergence monotone 14.178 appliqué à l'espace $\Omega_1 \times \Omega_2$ dit que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_n(x,y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y). \tag{14.946}$$

Ensuite, pour chaque $x \in \Omega_1$, les fonctions

$$\sigma_n(y) = \int_{\Omega_1} f_n(x,y) d\mu_1(x) \tag{14.947}$$

forment une suite croissante de fonctions mesurables ; nous leur appliquons encore le théorème de la convergence monotone :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}f_n(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y)=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_2}\sigma_n(y)d\mu_2(y) \tag{14.948a}$$

$$=\int_{\Omega_2}\left[\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1}f_n(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y) \tag{14.948b}$$

$$=\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}f(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y) \tag{14.948c}$$

où nous avons utilisé une seconde fois Beppo-Levi. □

Remarque 14.303.
Les formules (14.942) sont bien, mais ne garantissent en aucun cas que $f\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$: il faut encore que ces intégrales soient finies.

CorTKZKwP

Corolaire 14.304 ([522])**.**
Soient $(\Omega_i,\mathcal{A}_i,\mu_i)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ l'espace produit[110]*. Soit une fonction mesurable $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

ITEMooZRAXooTRDIlZ

(1) $f\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$,

ITEMooJMPLooZKwxQC

(2)

$$\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}|f|d\mu_2\right]d\mu_1<\infty, \tag{14.949}$$

ITEMooLLBCooTRycwG

(3)

$$\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}|f|d\mu_1\right]d\mu_2<\infty. \tag{14.950}$$

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. La notation $|f|$, pour l'instant, dénote donc bien la valeur absolue et non le module.

La fonction $|f|$ est mesurable et positive par hypothèse et par le fait que si f est mesurable, alors $|f|$ l'est également par le corolaire 14.108. Le théorème 14.302(2) nous dit alors que les intégrales suivantes existent et sont égales :

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2}|f|d(\mu_1\otimes\mu_2)=\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}|f(x,y)|d\mu_2(y)\right]d\mu_1(x)=\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}|f(x,y)|d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y). \tag{14.951}$$

EQooAIQGooNtBQuC

Attention : rien ne dit encore que ces intégrales sont finies.

(1) **(1) implique (2) et (3)** Si $f\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$ alors $|f|$ y est également. Cela implique que le membre de gauche de (14.951) est fini. Les deux autres sont alors également finis.

(2) **(2) ou (3) implique (1)** Les expressions à droite de (14.951) sont finies. Donc celle de gauche également. Cele signifie que $|f|\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$. Par conséquent f est également dans $L^1(\Omega_2\times\Omega_2)$.

Nous passons maintenant au cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous décomposons

$$f=f_R+if_I \tag{14.952}$$

où f_R et f_I sont des fonctions réelles. Nous avons

$$\int_\Omega|f|\leqslant\int_\Omega|f_R|+\int_\Omega|f_I|. \tag{14.953}$$

EQooZEOAooIMwKwk

Donc si f_R et f_I sont dans $L^1(\Omega)$, la fonction f le sera aussi. De même,

$$\int_\Omega|f_R|\leqslant\int_\Omega|f|, \tag{14.954}$$

qui donne l'inverse : si $f\in L^1(\Omega)$ alors $f_R,f_I\in L^1(\Omega)$. Bref, f est intégrable sur Ω si et seulement si f_R et f_I le sont.

[110] Définition 14.247.

Supposons que $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors

$$\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f| d\mu_2 \right] d\mu_1 \leqslant \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f_R| \right] + \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f_I| \right] < \infty \tag{14.955a}$$

où nous avons appliqué (1) implique (2) aux fonctions f_R et f_I qui sont dans $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ parce que f y est.

Dans l'autre sens, si

$$\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f| \right] < \infty, \tag{14.956}$$

alors en remplaçant $|f|$ par $|f_R|$ ou par $|f_I|$ nous restons fini. En appliquant alors « (2) implique (1) » nous trouvons que f_R et f_I sont dans $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Et cela implique que $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. □

ThoFubinioYLtPI

Théorème 14.305 (Fubini[522]).
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace produit. Soit

$$f \in L^1\big((\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{C}\big), \tag{14.957}$$

c'est-à-dire une fonction à valeurs mesurable et intégrable sur Ω. Alors :

ITEMooVFGWooZTePQS

(1) Pour presque tout $x \in \Omega_1$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est $L^1(\Omega_2)$.

ITEMooCYMKooUdizni

(2) Si nous posons

$$\varphi_f(x) = \int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y); \tag{14.958}$$

alors $\varphi_f \in L^1(\Omega_1)$.

ItemQMWiolgiii

(3) Nous avons la formule d'inversion d'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_1} \varphi_f d\mu_1 && (14.959a)\\ &= \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) && (14.959b)\\ &= \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y). && (14.959c) \end{aligned}$$

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est à valeurs réelles : $f \in L^1\big((\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2), \mathbb{R}\big)$. Nous décomposons la fonction f en parties positives et négatives : $f = f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- positives ou nulles. Nous avons évidemment

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f^+| \leqslant \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| < \infty. \tag{14.960}$$

Donc f^+ et f^- sont des éléments de $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

(1) **Pour (1)**

Nous posons

$$\varphi_{f^+}(x) = \int_{\Omega_2} f^+(x,y) d\mu_2(y) \tag{14.961}$$

pour tous les $x \in \Omega_1$ pour lesquels cette intégrale est bien définie. Vu que f^+ est positive et mesurable, le théorème de Fubini-Tonelli 14.302(1) s'applique donc pour nous dire que φ_{f^+} est mesurable.

De plus le résultat (14.942) appliqué à f^+ donne

$$\int_{\Omega_1} \varphi_{f^+} d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^+ d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty. \tag{14.962}$$

EQooSETWooRwkCuW

Le fait que le tout soit fini est une conséquence du fait déjà mentionné que $f^+ \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Vu que φ_{f^+} est une fonction positive, l'inégalité (14.962) signifie que $\varphi_{f^+} \in L^1(\Omega_1, \mu_1)$.

En particulier, $\varphi_{f^+}(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \Omega_1$. C'est-à-dire pour presque tout $x \in \Omega_1$:

$$\int_{\Omega_2} f^+(x,y) d\mu_2(y) < \infty, \tag{14.963}$$

et sachant que $f^+ \geqslant 0$ nous avons $f^+(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$ pour presque tout x.

(2) **Pour (2)**

Partout où φ_{f^+} et φ_{f^-} sont finies nous avons

$$\varphi_f = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}, \tag{14.964}$$

et comme cela a lieu presque partout, nous pouvons considérer une partie mesurable $A \subset \Omega_1$ telle que $\mu_1(A) = 0$ et $\varphi_f(x) = \varphi_{f^+}(x) - \varphi_{f^-}(x)$ pour tout x hors de A. Bref, nous posons

$$g(x) = \begin{cases} \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}(x) & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{si } x \in A. \end{cases} \tag{14.965}$$

Cette fonction g est mesurable et $g = \varphi_f$ presque partout. De plus

$$\int_{\Omega_1} |g| d\mu_1 = \int_{A^c} |g| \leqslant \int_{A^c} \varphi_{f^+} + \int_{A^c} \varphi_{f^-} < \infty. \tag{14.966}$$

La dernière inégalité est le fait que $\varphi_{f^\pm}$ sont dans $L^1(\Omega_1)$. Et notons au passage que nous aurions pu laisser toutes les intégrales sur Ω_1 sans faire de précisions sur la distinction entre Ω_1 et A^c parce que la partie de Ω_1 sur laquelle $\varphi_{f^\pm}$ sont infinies est trop petite pour changer la valeur de l'intégrale.

Nous avons donc $g \in L^1(\Omega_1)$, et par conséquent également $\varphi_f \in L^1(\Omega_1)$ parce que ces deux fonctions sont égales presque partout (les classes sont égales).

(3) **Pour (3)**

En utilisant l'équation (14.962) nous avons

$$\int_{\Omega_1} \varphi_f d\mu_1 = \int g d\mu_1 = \int_{\Omega_1} \varphi_{f^+} - \int_{\Omega_1} \varphi_{f^-} \tag{14.967a}$$

$$= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^+ d\mu - \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^- d\mu \tag{14.967b}$$

$$= \int_{\Omega_1 \times \Omega 2} f d\mu. \tag{14.967c}$$

Et toutes ces intégrales sont finies.

Et c'est maintenant que nous considérons le cas complexe. Nous décomposons $f = f_R + if_I$ avec des fonctions réelles f_R et f_I. Comme déjà mentionné autour de (14.953), les fonctions f_R et f_I sont intégrables. Nous leur appliquons le théorème.

Les valeurs de x pour lesquelles $f_R(x, \cdot\,)$ et $f_I(x, \cdot\,)$ ne sont pas dans $L^1(\Omega_2)$ forment un ensemble de mesure nulle, nommons le A. En posant

$$g(x,y) = \begin{cases} f_R(x,y) + if_I(x,y) & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{si } x \in A, \end{cases} \tag{14.968}$$

nous avons que $g(x, \cdot\,)$ est intégrable pour tout $x \in A^c$. Vu que pour ces valeurs de x nous avons $g(x,y) = f(x,y)$ nous en déduisons que pour $x \in A^c$ nous avons aussi $f(x, \cdot\,) \in L^1(\Omega_2)$.

Les autres points se traitent de la même façon[111]. □

NORMooKIRJooPvyPWQ

14.306.

En pratique, il n'est pas toujours évident qu'une fonction soit intégrable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. Pour permuter des intégrales sur une fonction à deux paramètres nous faisons comme suit.

(1) Nous testons l'intégrabilité en chaine de $|f|$, et si c'est bon, le corolaire 14.304 nous donne $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

(2) Nous utilisons le théorème de Fubini 14.305 pour séparer et permuter les intégrales comme des ingénieurs.

Si la fonction $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ satisfait aux hypothèses du théorème de Fubini alors

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x)g(y) dx \otimes dy = \left(\int_{\Omega_1} f(x) dx \right) \left(\int_{\Omega_2} g(y) dy \right). \tag{14.969}$$

EqTJEEsJW

Le théorème de Fubini est souvent utilisé sous cette forme.

[111] Attention : je n'ai pas vérifié explicitement. C'est juste une intuition. Vérifiez et écrivez-moi pour dire si c'est bon ou non.

Exemple 14.307 (Nécessité d'avoir des mesures σ-finies)**.**
Nous montrons que le théorème ne tient pas si une des deux mesures n'est pas σ-finie. Soit $I = [0, 1]$. Nous considérons l'espace mesuré

$$(I, \mathcal{B}\text{or}(I), \lambda) \tag{14.970}$$

où $\mathcal{B}\text{or}(I)$ est la tribu des boréliens sur I et λ est la mesure de Lebesgue (qui est σ-finie). D'autre part nous considérons l'espace mesuré

$$(I, \mathcal{P}(I), m) \tag{14.971}$$

où $\mathcal{P}(I)$ est l'ensemble des parties de I et m est la mesure de comptage. Cette dernière n'est pas σ-finie parce que les seuls ensembles de mesure finie pour la mesure de comptage sont des ensembles finis, or une union dénombrable d'ensemble finis ne peut pas recouvrir l'intervalle I.

Nous allons montrer que dans ce cadre, l'intégrale de la fonction indicatrice de la diagonale sur I^2 ne vérifie pas le théorème de Fubini. Étant donné que $\mathcal{B}\text{or}(I) \subset \mathcal{P}(I)$ nous avons

$$\mathcal{B}\text{or}(I^2) \subset \mathcal{B}\text{or}(I) \otimes \mathcal{P}(I). \tag{14.972}$$

Soit $\Delta = \{(x, x) \text{ tel que } x \in I\}$. La fonction

$$\begin{aligned} g\colon I^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x - y \end{aligned} \tag{14.973}$$

est continue et $\Delta = g^{-1}(\{0\})$ est donc fermé dans I^2. L'ensemble Δ est donc un borélien de I^2 et par conséquent un élément de la tribu $\mathcal{B}\text{or}(I) \otimes \mathcal{P}(I)$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_\Delta$ est alors mesurable pour l'espace mesuré

$$(I \times I, \mathcal{B}\text{or}(I) \otimes \mathcal{P}(I), \lambda \otimes m). \tag{14.974}$$

Pour x fixé nous avons

$$\mathbb{1}_\Delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } y \neq x \end{cases} = \mathbb{1}_{\{x\}}(y), \tag{14.975}$$

et donc

$$A_1 = \int_I \left(\int_I \mathbb{1}_\Delta(x, y) dm(y) \right) d\lambda(x) \tag{14.976a}$$

$$= \int_I \left(\int_I \mathbb{1}_{\{x\}}(y) dm(y) \right) d\lambda(x) \tag{14.976b}$$

$$= \int_I \Big(m(\{x\}) \Big) d\lambda(x) \tag{14.976c}$$

$$= \int_I 1 d\lambda(x) \tag{14.976d}$$

$$= 1. \tag{14.976e}$$

Par contre le support de $\mathbb{1}_\Delta$ étant de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, nous avons

$$\int_I \mathbb{1}_\Delta(x, y) d\lambda(x) = 0 \tag{14.977}$$

et par conséquent

$$A_2 = \int_I \left(\int_I \mathbb{1}_\Delta(x, y) d\lambda(x) \right) dm(y) = 0. \tag{14.978}$$

Nous voyons donc que le théorème de Fubini ne s'applique pas. △
EXooLUFAooGcxFUW

Exemple 14.308.
Nous nous proposons de calculer l'intégrale suivante en utilisant le théorème de Fubini :

$$G = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{14.979}$$

alors que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ n'a pas de primitives parmi les fonctions élémentaires.

Nous allons le faire de deux façons. Une première directe en utilisant le théorème de Fubini sur un domaine non borné, et une seconde en utilisant Fubini sur un domaine borné, et en passant à la limite ensuite.

(1) **Fubini, domaine non borné**

Par symétrie nous pouvons nous contenter de calculer

$$G_+ = \int_0^\infty e^{-x^2} dx. \tag{14.980}$$

L'astuce est de passer par l'intermédiaire

$$\begin{aligned} H &= \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} e^{-(x^2+y^2)} dxdy && \text{(14.981a)}\\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy && \text{(14.981b)}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx \right)^2 && \text{(14.981c)}\\ &= G_+^2 && \text{(14.981d)} \end{aligned}$$

L'intégrale (14.981a) se calcule en passant aux coordonnées polaires et le résultat est $H = \frac{\pi}{4}$. Nous avons alors $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}. \tag{14.982}$$

(2) **Fubini, domaine borné, puis limite** Une variante, qui n'applique pas Fubini sur un domaine non borné. Nous commençons par écrire

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx := \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \tag{14.983}$$

et puis nous faisons le calcul

$$\begin{aligned} I^2 &= \lim_{R\to+\infty} \left((\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx)(\int_{-R}^{+R} e^{-y^2} dy) \right)\\ &= \lim_{R\to+\infty} \left(\iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right) && \text{(14.984)}\\ &= \lim_{R\to+\infty} \left(\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right) \end{aligned}$$

où K est le carré de demi-côté R centré à l'origine et de côtés parallèles aux axes et C_R est le cercle de rayon R centré à l'origine.

La première étape à justifier est simplement l'application de Fubini. Pour le passage de l'intégrale du carré vers le cercle, définissons

$$I_K(r) = \int_{K_r} f, \quad I_C(r) = \int_{C_r} f \tag{14.985}$$

où K_r est la carré de demi-côté r et C_r est le cercle de rayon r. Le demi-côté du carré inscrit à C_r est $\sqrt{2}$, donc pour tout r nous avons

$$I_K(\sqrt{2}r) \geqslant I_C(r) > I_K(r), \tag{14.986}$$

et en prenant la limite, nous avons évidemment

$$\lim_{r\to\infty} I_K(\sqrt{2}r) = \lim_{r\to\infty} I_K(r), \tag{14.987}$$

et donc cette limite est également égale à $\lim_{r\to\infty} I_C(t)$.

Il ne reste qu'à calculer la dernière intégrale sur le cercle en passant aux coordonnées polaires :

$$\int_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R re^{-r^2} dr = \pi(1 - e^{-R^2}). \tag{14.988}$$

La limite donne π, nous en déduisons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{14.989}$$

△

Le théorème de Fubini-Tonelli nous permet également d'inverser des sommes et des séries. En effet une somme n'est rien d'autre qu'une intégrale pour la mesure de comptage :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \int_{\mathbb{N}} a_n dm(n). \tag{14.990}$$

La proposition suivante montre comment il faut faire.

PropInversSumIntFub

Proposition 14.309.
Soient les espaces mesurés $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue ainsi qu'une suite de fonctions positives $f_n \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Nous supposons de plus que la fonction f_n soit intégrable pour tout n et que les résultats forment une suite sommable. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx. \tag{14.991}$$

Démonstration. Nous pouvons la récrire le membre de gauche sous la forme

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(n,x)dx \right) dm(n) \tag{14.992}$$

avec la notation évidente $f(n,x) = f_n(x)$. Prouvons que la fonction $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ainsi définie est une fonction mesurable pour l'espace mesuré

$$\big(\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^d), m \otimes \lambda\big). \tag{14.993}$$

Si $A \subset \mathbb{R}$, nous avons

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} \times f_n^{-1}(A). \tag{14.994}$$

Chacun des ensembles dans l'union appartient à la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^d)$ tandis que les tribus sont stables sous les unions dénombrables. La fonction f est donc mesurable. Comme nous avons supposé que f était positive, le théorème de Fubini-Tonelli s'applique et nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{N}} f(n,x)dm(n) \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx. \tag{14.995}$$

□

ThoFubini

Théorème 14.310 (Fubini)**.**
Soit $(x,y) \mapsto f(x,y) \in \bar{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable sur $B_n \times B_m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ où B_n et B_m sont des ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Alors :

(1) pour tout $x \in B_n$, sauf éventuellement en les points d'un ensemble $G \subset B_n$ de mesure nulle, la fonction $y \in B_m \mapsto f(x,y) \in \bar{\mathbb{R}}$ est intégrable sur B_m

(2) la fonction

$$\begin{aligned} B_n \setminus G &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{B_m} f(x,y)dy \end{aligned} \tag{14.996}$$

est intégrable sur $B_n \setminus G$.

(3) On a

$$\int_{B_n\times B_m} f(x,y)dxdy = \int_{B_n} \left(\int_{B_m} f(x,y)dy \right) dx. \tag{14.997}$$

Notons en particulier que si $f(x,y) = \varphi(x)\phi(y)$, alors $\int_{B_m} \varphi(y)dy$ est une constante qui peut sortir de l'intégrale sur B_n, et donc

$$\int_{B_n\times B_m} \varphi(x)\phi(y)dxdy = \int_{B_n} \varphi(x)dx \int_{B_m} \phi(y)dy. \tag{14.998}$$

EqFubiniFactori

14.17.1 Utiliser Fubini sur $\mathbb{R}^n$

Nous montrons à présent une série de théorème qui disent que sur $\mathbb{R}^n$, nous pouvons intégrer dans l'ordre qu'on veut.

PROPooODWYooWSlHlU

Proposition 14.311 ([1]).
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_{(x_1,\dots,x_{n-1})}(t)t \right] dx_1, \dots, dx_{n-1} \tag{14.999}$$

où, pour $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, nous définissons

$$\begin{aligned} f_{(x_1,\dots,x_{n-1})} \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) \end{aligned} \tag{14.1000}$$

Démonstration. Il s'agit d'une application du théorème de Fubini 14.305(3) avec $\Omega_1 = \mathbb{R}^{n-1}$ et $\Omega_2 = \mathbb{R}$. □

LEMooEDQUooZudeex

Lemme 14.312 ([1]).
Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit une fonction C^∞ à support compact $f \colon U \to \mathbb{R}$. Alors l'application

$$\begin{aligned} g \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & si\ x \notin U \\ f(x) & si\ x \in U \end{cases} \end{aligned} \tag{14.1001}$$

est de classe C^∞.

PROPooCQEIooENbfux

Proposition 14.313 ([1]).
Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit une fonction C^∞ à support compact $f \colon U \to \mathbb{R}$. Alors

$$\int_U \partial_i f = 0. \tag{14.1002}$$

Démonstration. En deux parties très inégales.

(1) **Si $i = n$** Nous considérons l'application du lemme 14.312 :

$$\begin{aligned} g \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin U \\ f(x) & \text{si } x \in U \end{cases} \end{aligned} \tag{14.1003}$$

Elle est de classe C^∞ et vérifie

$$\int_U \partial_n f = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_n g. \tag{14.1004}$$

Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Nous posons

$$\begin{aligned} h \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(a + te_n). \end{aligned} \tag{14.1005}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} (\partial_n g)(a + ue_n) &= \frac{d}{dt} \left[g(a + ue_n + te_n) \right]_{t=0} && (14.1006a) \\ &= \frac{d}{dt} \left[g\big(a + (t+u)e_n\big) \right]_{t=0} && (14.1006b) \\ &= \frac{d}{dt} \left[h(t+u) \right]_{t=0} && (14.1006c) \\ &= h'(u). && (14.1006d) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc déjà calculer une intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\partial_n g)(a + te_n) dt &= \int_{\mathbb{R}} h'(t) dt && (14.1007a) \\ &= \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} h'(t) dt && \text{prop. 14.263} && (14.1007b) \\ &= \lim_{R \to \infty} \Big(h(R) - h(-R) \Big) && \text{tho. 14.288} && (14.1007c) \\ &= 0. && (14.1007d) \end{aligned}$$

La dernière égalité est parce que $h(R) = g(a + Re_t)$ et que g est à support compact.

Nous utilisons la proposition 14.311 pour isoler l'intégrale sur x_n dans $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i g$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_n g = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} (\partial g)(a + te_n) dt \right] da_1 \dots da_{n-1} = 0. \tag{14.1008}$$

(2) **Si $i \neq n$**

Nous considérons l'application $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui permute e_i et e_n. Nous avons $\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \sigma = \int_{\mathbb{R}^n} f$ par le changement de variables, théorème 14.282. Cela nous ramène au cas $i = n$.

□

14.17.2 Absolue continuité et variation bornée

DEFooLZWPooSSRaMv

Définition 14.314 ([526, 527])**.**
*Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **absolument continue** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout suite finie $\{[a_n, b_n]\}_{n \leqslant N}$ de sous-intervalles de I d'intérieurs disjoints,*

$$\sum_{n \geqslant 0} (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n \geqslant 0} |f(a_n) - f(b_n)| < \epsilon. \tag{14.1009}$$

PROPooNZYKooSlwFYK

Proposition 14.315 ([526])**.**
Soient des applications absolument continues f et g sur $[a, b]$. Alors

(1) $f + g$, $f - g$ et fg sont absolument continues.

(2) Si il existe $C > 0$ tel que $|g(x)| \geqslant C$ pour tout $x \in [a, b]$, alors f/g est absolument continue.

PROPooHCCWooHaYitq

Proposition 14.316 ([526])**.**
Si $f \in L^1\big([a, b]\big)$, alors la fonction

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned} \tag{14.1010}$$

est absolument continue.

PROPooUMXIooUhbZvl

Proposition 14.317 ([526])**.**
Une application F sur $[a, b]$ est absolument continue[112] si et seulement si il existe une application f intégrable sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b]$,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt. \tag{14.1011}$$

DEFooLANWooGnVGPV

Définition 14.318 (Variation totale, variation bornée[527, 528])**.**
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ nous définissons

$$\mathcal{P}_n = \{(x_0, \dots, x_n) \text{ tel que } a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n = b\}. \tag{14.1012}$$

et

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n. \tag{14.1013}$$

*Si $P \in \mathcal{P}$, nous notons $l(P)$ le $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathcal{P}_n$. La **variation totale** d'une application application $f : I \to \mathbb{C}$ est le nombre*

$$V_a^b(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{i=0}^{l(P)-1} |f(P_{i+1}) - f(P_i)|. \tag{14.1014}$$

*Nous disons que f est à **variation bornée** sur $[a, b]$ si $V_a^b(f) < \infty$. L'ensemble des fonctions à variation bornée de $[a, b]$ est noté $BV\big([a, b]\big)$.*

PROPooDJTDooMMWMcS

Proposition 14.319 ([527])**.**
Si f est à variation bornée sur $[a, b]$ et si $c \in [a, b]$, alors

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f). \tag{14.1015}$$

[112] Définition 14.314.

PROPooMONZooWVkYWb

Proposition 14.320 ([526]).
Soit f absolument continue sur $[a,b]$. Alors f est à variation bornées sur $[a,b]$.

PROPooVHGNooSDlrrq

Proposition 14.321 ([527]).
À propos de fonctions à variation bornées.

(1) *Une fonction $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si elle est la différence entre deux fonctions monotones sur $[a,b]$.*

(2) *Si $f\in BV\big([a,b]\big)$, alors $f'(x)$ existe pour presque tout $x\in[a,b]$.*

14.17.3 Dérivation dans les bornes

PROPooCPWJooPydIHL

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 14.322
ça m'étonnerais que la proposition suivante soit correcte. Si φ et ψ ont des valeurs dans $\mathbb{R}$, alors les bornes de l'intégrale ne sont pas spécialement dans le domaine de définition de f.

La proposition suivante sera utilisée entre autres pour montrer que sous l'hypothèse d'une densité continue, la loi exponentielle est sans mémoire, proposition 36.156.

PropDerrFnAvecBornesFonctions

Proposition 14.323.
Soit une application continue

$$f\colon[\alpha,\beta]\times[a,b]\to\mathbb{R} \tag{14.1016}$$

telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et soit continue sur $]\alpha,\beta[\times[a,b]$. Soient φ et ψ, des fonctions continues de $[\alpha,\beta]$ dans $\mathbb{R}$ et admettant une dérivée continue sur $]\alpha,\beta[$. Alors la fonction

$$\begin{aligned}F\colon\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,t)dt\end{aligned} \tag{14.1017}$$

admet une dérivée continue sur $]\alpha,\beta[$ et

$$\frac{dF}{dx}=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt+f\big(x,\psi(x)\big)\cdot\frac{d\psi}{dx}-f\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\frac{d\varphi}{dx}. \tag{14.1018}$$

EqFormDerrFnAvecBorneNInt

L'exemple qui suit sera rendu rigoureux par les propositions 29.30 et 29.31.

ExfYXeQg

Exemple 14.324.
Si g est une fonction continue, la fonction suivante est une primitive de g :

$$\int_0^x g(t)dt=\int_0^\infty g(t)\mathbb{1}_{t<x}(t)dt. \tag{14.1019}$$

Nous nous proposons de justifier *de façon un peu heuristique* le fait que ce soit bien une primitive de g en considérant la fonction

$$f(t,x)=g(t)\mathbb{1}_{t<x}(t). \tag{14.1020}$$

Nous posons

$$F(x)=\int_0^\infty f(x,t)dt, \tag{14.1021}$$

et nous calculons F' en permutant la dérivée et l'intégrale[113]. D'abord,

$$f(t,x)=\begin{cases}g(t) & \text{si } t\in[0,x]\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{14.1022}$$

La dérivée de f par rapport à x est donnée par la distribution

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t_0,x_0)=g(t_0)\delta(t_0-x_0). \tag{14.1023}$$

Donc

$$F'(x_0)=\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt=\int_0^\infty g(t)\delta(t-x_0)=g(x_0), \tag{14.1024}$$

comme attendu. △

[113] Ceci n'est pas rigoureux : il faudrait avoir un théorème à propos de distributions qui permet de le faire.

PROPooDOTQooWaMBrO

Proposition 14.325 ([1]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soient des fonctions réelles et mesurables f_n et g sur Ω. Si

(1) $f_n(x) \leqslant g(x)$ *pour presque tout* $x \in \Omega$,

(2) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in \Omega$,

alors $f(x) \leqslant g(x)$ *pour presque tout* $x \in \Omega$.

Démonstration. Notons $Z_n = \{x \in \Omega \text{ tel que } f_n(x) > g(x)\}$. La partie $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ est de mesure nulle par le lemme 14.28. Pour chaque $x \in \Omega \setminus Z$, nous avons $f_n(x) \leqslant g(x)$ et nous pouvons passer à la limite pour obtenir $f(x) \leqslant g(x)$. Cette dernière égalité étant valable sur $\Omega \setminus Z$, elle est valable presque partout. □

PROPooRUSEooFYGLLU

Proposition 14.326 ([1]).
Si f est une fonction intégrable et continue sur un voisinage de a, alors

$$\lim_{n\to\infty} n \int_a^{a+1/n} f = f(a). \tag{14.1025}$$

LEMooLRPJooUuwZRW

Lemme 14.327.
Soit une application mesurable $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Nous posons

$$E = \{x \in [a,b] \text{ tel que } f(x) \neq 0\}, \tag{14.1026}$$

et nous supposons que[114] $\lambda(E) > 0$. *Alors il existe $\epsilon > 0$ et $E_\epsilon \subset E$ tel que*

(1) $\lambda(E_\epsilon) > 0$,

(2) $|f(x)| > \epsilon$ *sur* E_ϵ.

Démonstration. Nous démontrons la contraposée. Pour chaque $\epsilon > 0$, nous posons $A_\epsilon = \{x \in [a,b] \text{ tel que } |f(x)| > \epsilon\}$, et nous supposons que $\lambda(A_\epsilon) = 0$ pour tout ϵ.

Nous en déduisons que $\lambda(E) = 0$. En effet nous avons $E = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq 0}} A_{1/n}$. Nous avons $\lambda(E) = 0$ comme union dénombrable d'ensemble de mesure nulle. □

14.17.4 Permuter limite et dérivée

NORMALooGYUEooKrYjyz

14.328 ([373]).
Voici une preuve alternative du théorème 12.398. Elle utilise des intégrales ; elle demande donc plus de dépendances.

Énoncé Soient une suite de fonctions $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

(1) f_i est de classe C^1 pour tout i,

(2) $f_i \to f$ simplement,

(3) $f_i' \to g$ uniformément sur tout compact.

Alors

(1) f est de classe C^1,

(2) $f' = g$,

(3) $f_i \to f$ uniformément sur tout compact.

[114] Mesure de Lebesgue.

Preuve Nous commençons par considérer $x_0 \in \mathbb{R}$ et un intervalle compact K contenant x_0. Nous montrons que $f'(x_0) = g(x_0)$ en plusieurs étapes.

(1) **Une formule intégrale** Par hypothèse, les fonctions f_i sont continues (en particulier sur un ouvert contenant K), et le théorème fondamental de l'analyse 14.288 donne

$$f_i(x) = f_i(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_i'(t)dt \tag{14.1027}$$

pour tout $x \in K$. Nous avons envie de prendre la limite $i \to \infty$ en permutant la limite avec l'intégrale. Pour cela nous allons utiliser la convergence dominée de Lebesgue.

(2) **Convergence dominée** La convergence uniforme sur tout compact des fonctions continues f_i' vers g donne la continuité de g, théorème 12.381. En particulier g est bornée et donc intégrable sur le compact $[x_0, x]$. Mais il en faut plus pour le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 14.207). Soit $a > 0$; il existe N tel que pour tout $i > n$ nous ayons $\|f_i' - g\| < a$. Avec cela nous avons

$$|f_i'(x)| < |g(x)| + a \tag{14.1028}$$

pour tout $x \in K$. En particulier, la fonction $x \mapsto g(x) + a$ fonctionne pour la convergence dominée et nous pouvons permuter la limite et l'intégrale dans (14.1027).

(3) **Passage à la limite**

En passant à la limite $i \to \infty$ dans (14.1027) nous trouvons

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt. \tag{14.1029}$$

(4) **Premières conclusions**

Il suffit maintenant de prendre la dérivée de (14.1029) au point $x = x_0$ grâce à la proposition 14.287 :

$$f'(x_0) = g(x_0). \tag{14.1030}$$

Cela nous donne l'égalité $f' = g$ parce que x_0 était arbitraire.

De plus g est continue comme limite uniforme des fonctions continues f_i'. Plus précisément, pour voir la continuité de g en x_0, prendre un ouvert borné $B(x_0, r)$ autour de x_0, et ensuite un compact K contenant cet ouvert. La convergence uniforme $f_i' \to g$ sur K implique la convergence uniforme sur $B(x_0, r)$ et donc la continuité sur $B(x_0, r)$ (théorème 12.381).

(5) **$f_i \to f$ uniforme sur tout compact**

Un compact n'étant pas spécialement connexe, nous ne pouvons pas reprendre le travail fait jusqu'ici sans prendre une petite précaution. Soit un compact L. Cette partie de $\mathbb{R}$ étant bornée[115], nous pouvons prendre r assez grand pour que $L \subset \overline{B(0,r)}$. Nous posons $K = \overline{B(0,r)}$ et nous prouvons la convergence uniforme $f_i \to f$ sur K. A fortiori, cela donnera la convergence uniforme sur L.

Prenons la différence entre (14.1029) et (14.1027) :

$$|f(x) - f_i(x)| = \big|f(x_0) - f_i(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t) - f_i'(t)dt\big| \tag{14.1031a}$$

$$\leqslant |f(x_0) - f_i(x_0)| + \Big|\int_{x_0}^{x} |g(t) - f_i'(t)|dt\Big| \tag{14.1031b}$$

$$\leqslant |(f - f_i)(x_0)| + |x - x_0|\|g - f_i'\|_K. \tag{14.1031c}$$

Notez les valeurs absolues autour de l'intégrale dans (14.1031b). Elles sont nécessaires parce que x est dans un voisinage de x_0, sans que nous sachions si $x \geqslant x_0$ ou $x \leqslant x_0$ (ça change le signe de l'intégrale).

Nous avons donc

$$\|f - f_i\| \leqslant |(f - f_i)(x_0)| + \operatorname{diam}(K)\|g - f_i'\| \tag{14.1032}$$

où $\operatorname{diam}(K)$ est le diamètre de K, c'est-à-dire la plus grande distance entre deux éléments de K c'est un nombre fini parce que K est borné. Il majore évidemment $|x - x_0|$. Le membre de droite tend vers zéro si $i \to \infty$ parce que nous avons convergence simple $f_i \to f$ et donc $(f - f_i)(x_0) \to 0$, et parce que nous avons convergence uniforme sur tout compact, donc $\|g - f_i'\| \to 0$.

Nous avons donc bien $\lim_{i\to\infty} \|f - f_i\| = 0$, c'est-à-dire convergence uniforme de (f_i) vers f sur K.

[115] Par le théorème de Borel-Lebesgue 9.24

Chapitre 15

Suites et séries de fonctions

Les généralités sur les suites et séries de fonctions, c'est dans la section 12.35.

15.1 Séries de fonctions

15.1.1 Intégration de séries de fonctions

ThoCciOlZ

Théorème 15.1.
La somme uniforme de fonctions intégrables sur un ensemble de mesure fine est intégrable et on peut permuter la somme et l'intégrale.

En d'autres termes, supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément vers F sur A avec $\mu(A) < \infty$. Si F et f_n sont des fonctions intégrables sur A alors

$$\int_A F(x)d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n(x)d\mu(x). \tag{15.1}$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence du théorème 14.205. En effet nous définissons la suite des sommes partielles

$$F_N = \sum_{n=0}^{N} f_n. \tag{15.2}$$

La limite $\lim_{N\to\infty} F_N = F$ est uniforme. Par conséquent la fonction F est intégrable et

$$\int_A F = \lim_{N\to\infty} \int_A F_N = \lim_{N\to\infty} \int_A \sum_{n=0}^{N} f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_A f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n. \tag{15.3}$$

La première égalité est le théorème 14.205, les autres sont de simples manipulations rhétoriques. □

Le théorème suivant est une paraphrase du théorème de la convergence dominée de Lebesgue 14.207.

ThoockMHn

Théorème 15.2.
Soient des fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{N} f_n$ soit intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ pour chaque N. Nous supposons que la somme converge simplement vers

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{15.4}$$

et qu'il existe une fonction g telle que

$$\left| \sum_{n=0}^{N} f_n \right| < g \tag{15.5}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. Alors

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est intégrable,

(2) on peut permuter somme et intégrale :

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \sum_{n=0}^{N} f_n d\mu = \int_\Omega \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \tag{15.6}$$

(3) *Nous avons la formule*

$$\lim_{N\to\infty}\int_\Omega\left|\sum_{n=0}^{N}f_n-\sum_{n=0}^{\infty}f_n\right|=\lim_{N\to\infty}\int_\Omega\left|\sum_{n=N}^{\infty}f_n\right|=0. \tag{15.7}$$

Démonstration. Nous posons $s_n=\sum_{k=0}^{n}f_n$. Par hypothèse nous avons $s_n\in L^1(\Omega)$, et $s_n\to f$ par définition du symbole $\sum_{n=0}^{\infty}$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue 14.207 s'applique. Point par point en remplaçant f_n par s_n on est bon. □

ThoCSGaPY

Théorème 15.3 ([1])**.**
Soit f_n des fonctions $C^1[a,b]$ telles que

(1) *la série $\sum_n f_n(x_0)$ converge pour un certain $x_0\in[a,b]$,*

(2) *la série des dérivées $\sum_n f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction G.*

Alors

ITEMooNBHUooMvbJoP

(1) *La série $\sum_n f_n$ converge vers une fonction F et*

(2) *La fonction F est dérivable*

ITEMooTYLMooQdSdoK

(3) *La convergence est uniforme sur $[a,b]$.*

(4) *$F'(x)=\sum_n f_n'(x)$.*

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **Théorème fondamental** Posons $s_n=\sum_{k=0}^{n}f_k$ et $d_n=\sum_{k=0}^{n}f_k'$. Pour chaque n nous avons $d_n=s_n'$ et donc, en vertu du théorème fondamental de l'analyse 14.288 nous avons, pour tout $x\in[a,b]$:

$$s_n(x)=\int_{x_0}^{x}s_n'(t)dt+s_n(x_0)=\int_{x_0}^{x}\sum_{k=0}^{n}f_n'(t)dt+s_n(x_0). \tag{15.8}$$

EQooXKRPooMcdCQz

Nous voulons prendre la limite en permutant avec l'intégrale à droite.

(2) **Permuter limite et intégrale**

Nous utilisons le théorème 15.2. Par hypothèse nous avons la convergence uniforme $\sum_n f_n'\xrightarrow{unif}G$. En tant que limite uniforme de fonctions continues (les sommes partielles), la fonction G est continue par 12.382.

La fonction G est continue sur le compact $[a,b]$. Elle est donc majorée, et nous considérons un majorant a.

Soit $\epsilon>0$ et N_ϵ tel que $\|\sum_{k=0}^{n}f_n'-G\|_\infty<\epsilon$ pour tout $n\geqslant N_\epsilon$. Avec ça, les nombres $\|\sum_{k=0}^{n}f_k')\|_\infty$ sont majorés par $a+\epsilon$. Pour chacun des $n<N_\epsilon$, en tant que somme finie de fonctions continues sur un compact, $\|\sum_{k=0}^{n}f_k\|<a_n$ pour certaines bornes a_n.

En posant $M=\max\{a_0,\dots,a_{N_\epsilon},a+\epsilon\}$, nous avons

$$|\sum_{k=0}^{n}f_k'(x)|<M \tag{15.9}$$

pour tout n et pour tout x dans $[a,b]$.

Tout cela pour dire que nous pouvons prendre la limite des deux côtés de (15.8) et la permuter avec l'intégrale.

(3) **La limite** La fonction G étant une limite uniforme de fonctions continues sur le compact $[a,b]$, elle est continue et donc bornée. Donc elle est intégrable sur tout intervalle de $[a,b]$. Nous avons le calcul suivant :

EQooZXHUooXgSDFo

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\int_{x_0}^{x}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}f_k'(t)}_{=G(t)}dt+\lim_{n\to\infty}s_n(x_0) \tag{15.10a}$$

$$=\int_{x_0}^{x}G(t)dt+\sum_{k=0}^{\infty}f_n(x_0)<\infty. \tag{15.10b}$$

Voilà qui prouve le point (1).

(4) **Question de dérivées** Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} H\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{x_0}^{x} G(t)dt. \end{aligned} \tag{15.11}$$

L'application G est continue en tant que limite uniforme de fonctions continues (les sommes partielles des f_k'). Donc la proposition 14.287 dit que H est dérivable (donc continue) et que $H' = G$. Mais ce que dit (15.10), c'est que $F = H + cst$. Donc $F' = H' = G$.

(5) **Pour (3)** Vu que F est continue, la proposition 12.388 dit que la convergence est uniforme sur tout compact ; en particulier sur $[a,b]$.

□

15.1.2 Différentiabilité

LEMooPIWYooZEofkW

Lemme 15.4.
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si la suite (T_n) converge vers T dans $\mathcal{L}(E,F)$, alors pour tout $v \in E$ nous avons

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n\right)(v) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(v). \tag{15.12}$$

LEMooEYARooNExmiw

Lemme 15.5 ([529])**.**
Soit un espace métrique V. Soient un compact K et un ouvert U contenant K. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\{x \in V \text{ tel que } d(x,K) < \delta\} \subset U. \tag{15.13}$$

Démonstration. Pour chaque $x \in K$, nous posons

$$A_x = \{\alpha \geqslant 0 \text{ tel que } B(x,\alpha) \subset U\}. \tag{15.14}$$

Le théorème 7.8 indique que A_x contient toujours des éléments strictement positifs (parce que K est dans U qui est ouvert). Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup\{\alpha \geqslant 0 \text{ tel que } B(x,\alpha) \subset U\}. \end{aligned} \tag{15.15}$$

Nous prouvons que f est continue. Soit $\epsilon > 0$. Soit $y \in B(x,\epsilon)$.

(1) $f(x) - \epsilon \leqslant f(y)$ Nous prouvons que pour tout $\alpha \in A_x$, le nombre $\alpha - \epsilon$ est dans A_y, c'est-à-dire que $B(y, \alpha - \epsilon) \subset U$. Soit $a \in B(y, \alpha - \epsilon)$. Nous avons

$$d(x,a) \leqslant d(x,y) + d(y,a) \leqslant \epsilon + (\alpha - \epsilon) = \alpha. \tag{15.16}$$

Donc $a \in U$.

Cela signifie que pour tout $\alpha \in A_x$, nous avons $\alpha - \epsilon \in A_y$, ou encore que $A_x - \epsilon \subset A_y$. En passant au supremum, $\sup(A_x) - \epsilon \leqslant \sup(A_y)$. Nous avons donc bien $f(x) - \epsilon \leqslant f(y)$.

(2) $f(y) \leqslant \epsilon + f(x)$ Soit $\epsilon' > 0$. Il existe un élément u hors de U tel que $d(x,y) < f(x) + \epsilon'$. Cet élément vérifie donc

$$f(y) \leqslant d(y,u) \leqslant d(y,x) + d(x,u) \leqslant \epsilon + f(x) + \epsilon'. \tag{15.17}$$

Pour tout $\epsilon' > 0$ nous avons $f(y) \leqslant \epsilon + f(x) + \epsilon'$. En prenant la limite $\epsilon' \to 0$ nous trouvons $f(y) \leqslant f(x) + \epsilon$.

(3) **f est continue** Nous avons montré que si $y \in B(x,\epsilon)$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon$. Cela signifie que f est continue en $x \in K$.

(4) **Conclusion** La fonction f est continue sur le compact K. Elle est donc bornée et atteint ses bornes[1]. Soit $\delta = \min\{f(x) \text{ tel que } x \in K\}$. Comme dit plus haut, $f(x) > 0$ pour tout x. Donc $\delta > 0$.

Si $x \in V$ vérifie $d(x,K) < \delta$, alors il existe $y \in K$ tel que $d(x,y) < \delta$. Par minimalité de δ, nous avons $f(y) \geqslant \delta$ et donc $B(y,\delta) \subset U$. En particulier $x \in B(y,\delta) \subset U$.

[1] Théorème de Weierstrass 7.196.

□
PROPooGRXXooWcZyJG

Proposition 15.6 ([529]).
Tout ouvert connexe par arcs d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs de classe C^1.

Démonstration. Soient un espace vectoriel normé V, et un ouvert connexe par arcs U. Nous considérons $x, y \in U$ et un chemin continu $\gamma\colon [0,1] \to U$ joignant x à y.

(1) **Utilisation du lemme** La partie $\gamma\big([0,1]\big)$ est compacte parce qu'elle est l'image par une application continue d'un compact (théorème 7.275). Par le lemme 15.5, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $B\big(\gamma(t), \delta\big) \subset U$.

(2) **Uniforme continuité** L'application γ est continue sur le compact $[0,1]$. Le théorème de Heine 12.80 nous dit que γ est alors uniformément continue : il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t, t' \in [0,1]$ tels que $|t - t'| < \eta$, nous ayons $d\big(\gamma(t), \gamma(t')\big) < \delta$.

(3) **La courbe** Nous considérons une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ telle que $|t_i - t_{i-1}| < \eta$[2]. Nous notons $P_i = \gamma(t_i)$ et $Q_i = \gamma(t_{i+1})$. Soient les applications[3]

$$\begin{aligned} \varphi_i\colon \mathbb{R} &\to V \\ t &\mapsto t^3 Q_i + 3t^2(1-t)Q_i + 3t(1-t)^2 P_i + (1-t)^3 P_i. \end{aligned} \tag{15.18}$$

Nous considérons ensuite les reparamétrisations des φ_i de $[0,1]$ vers $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} \sigma_i\colon \mathbb{R} &\to V \\ t &\mapsto \varphi_i\left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right). \end{aligned} \tag{15.19}$$

Ces applications sont de classe C^1. Enfin nous posons

$$\begin{aligned} \psi\colon [0,1] &\to V \\ t &\mapsto \sigma_i(t) \quad \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}]. \end{aligned} \tag{15.20}$$
EQooIQHHooGspmQJ

(4) **Ce qu'il faut voir** Petite pause pour lister les choses que nous devons vérifier.

- $\psi(0) = \gamma(0)$, $\psi(1) = \gamma(1)$
- ψ est continue.
- ψ est à valeurs dans U.
- ψ est de classe C^1.

On y va…

(5) **$\psi(0)$ et $\psi(1)$** Nous avons

$$\psi(0) = \sigma_0(0) = \varphi_0(0) = P_0 = \gamma(0), \tag{15.21}$$

et, utilisant le fait que $t_n = 1$,

$$\psi(1) = \sigma_{n-1}(1) = \varphi_{n-1}\left(\frac{1 - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}\right) = \varphi_{n-1}(1) = Q_{n-1} = \gamma(t_n) = \gamma(1). \tag{15.22}$$

(6) **ψ est continue** Nous devons vérifier la continuité aux raccords, c'est-à-dire que nous devons prouver $\sigma_i(t_{i+1}) = \sigma_{i+1}(t_i)$. D'une part $\sigma_i(t_{i+1}) = \phi_i(1) = Q_i = \gamma(t_{i+1})$, et d'autre part $\sigma_{i+1}(t_i) = \varphi_{i+1}(0) = P_{i+1} = \gamma(t_{i+1})$. C'est bon.

(7) **À valeurs dans U** Nous devons vérifier que $\varphi_i\big([0,1]\big) \subset U$. Nous avons bien sûr $P_i \in B(P_i, \delta)$, mais nous avons aussi $Q_i \in B(P_i, \delta)$. En effet, $|t_{i+1} - t_i| < \eta$ de telle sorte que $Q_i = \gamma(t_{i+1}) \in B\big(\gamma(t_i), \delta\big) = B(P_i, \delta)$. Le nombre η a été choisi pour ça.

Le nombre δ a été choisi pour avoir également $B(P_i, \delta) \subset U$. Bref, P_i et Q_i sont dans $B(P_i, \delta)$ qui est convexe[4] et contenue dans U. Pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$, le point $\varphi_i(t)$ est une combinaison convexe de P_i et Q_i :

$$t^3 + 3t^2(1-t) + 3t(1-t)^2 + (1-t)^3 = 1. \tag{15.23}$$

Donc $\varphi_i(t) \in B(P_i, \delta) \subset U$.

[2] Êtes-vous capable d'en prouver l'existence ? Prenez un entier $z > \eta$ et $t_k = k/z$. Notez l'utilisation du lemme 1.553 que je me lasserai jamais de citer.

[3] Ce sont des courbes de Bézier d'ordre 3 de points de contrôle P_i, P_i, Q_i et Q_i.

[4] Une boule est convexe, proposition 7.254.

(8) ψ **est de classe C^1** Nous avons $\varphi_i'(t) = 6t(1-t)(Q_i - P_i)$. Donc pour tout i nous avons $\varphi_i'(1) = \varphi'(0) = 0$. En ce qui concerne ψ' nous avons

$$\lim_{t\to t_i^+} \psi'(t) = \psi'(t_i) = 0 \tag{15.24}$$

et

$$\lim_{t\to t_i^-} \psi'(t) = \lim_{t\to 1} \varphi_{i-1}(t) = 0, \tag{15.25}$$

d'où la continuité de ψ'.

Nous en déduisons que ψ est de classe C^1 par le théorème 12.356.

□

Remarque 15.7.
Quelle est la forme de l'image de la courbe C^1 définie en (15.20) ? L'image est une ligne brisée : une suite de segments de droites. Elle fait un angle à chaque raccord. Il est contre-intuitif qu'une ligne faisant des angles puisse être de classe C^1, mais c'est pourtant le cas. Le fait est que ψ' s'annule à chacun de ces raccords, de telle sorte que ψ' est quand même continu.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 15.8
Le théorème 15.9 se démontre ici avec des intégrales. Je suis presque certain qu'on doit pouvoir adapter la démonstration du théorème 12.401 pour ne pas avoir à utiliser d'intégrales.
ThoLDpRmXQ

Théorème 15.9 ([530]).
Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert connexe par arcs. Soit (u_n) une suite de fonctions $u_n\colon \Omega \to F$ telle que

(1) pour tout n, la fonction u_n est de classe C^1 sur Ω,

(2) la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur Ω,

(3) la série des différentielles $\sum_n (du_n)$ converge normalement sur tout compact de Ω.

Alors la somme $u = \sum_n u_n$ est de classe C^1 sur Ω et sa différentielle est donnée par

$$du = \sum_{n=0}^{\infty} du_n. \tag{15.26}$$

Démonstration. Pour chaque n, la fonction $du_n\colon \Omega \to \mathcal{L}(E,F)$ est une fonction continue parce que u_n est de classe C^1. La série convergeant normalement, la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} du_n$ est également continue par la proposition 12.393. La difficulté de ce théorème est donc de prouver que cela est bien la différentielle de la fonction $\sum_n u_n$, c'est-à-dire que

$$d\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} du_n. \tag{15.27}$$

Soient $a, x \in \Omega$. Nous considérerions bien le segment $[a,x]$, mais vu que Ω n'est supposé que connexe par arcs de classe C^1 (la proposition 15.6 pour que l'arc puisse être choisi C^1), nous ne pouvons pas faire mieux pour joindre a à x que choisir un chemin de classe C^1

$$\gamma\colon [0,1] \to \Omega \tag{15.28}$$

tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = x$.

L'astuce est de poser

$$\begin{aligned} f_n\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (du_n)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big), \end{aligned} \tag{15.29}$$

et d'en étudier l'intégrale[5].

[5] Cela revient à étudier l'intégrale de la forme différentielle du_n sur le chemin γ. Voir la définition 20.47 et tout ce qui s'en suit.

(1) **Permuter somme et intégrale** Nous voudrions permuter la somme et l'intégrale dans l'expression $\int_0^1 \sum_i f_i(t)dt$. Pour cela nous commençons par regarder quelques majorations de normes.

D'abord γ est de classe C^1, ce qui fait que γ' est continue. Vu que la norme est une application continue, la fonction $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ est également continue sur le compact $[0,1]$. Elle est donc majorée par une constante que nous nommons M. C'est le théorème de Weierstrass 7.196.

Ensuite nous avons le calcul

$$\|f_i(t)\| = \|(du_i)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\| \leqslant \|(du_i)_{\gamma(t)}\|\|\gamma'(t)\| \leqslant M\|du_i\|_\infty < \infty. \tag{15.30}$$

Justifications :

- Pour la première inégalité. C'est le lemme 10.81.
- Pour la seconde inégalité. Il s'agit de l'inégalité évidente

$$\|du_i\|_\infty = \sup_{x\in\gamma\left([0,1]\right)} \|(du_i)_x\| \tag{15.31}$$

  Notons que la norme $\|.\|_\infty$ ne réfère pas à un supremum sur E, mais seulement sur l'image de γ. Nous aurions pu faire preuve d'un peu de créativité dans les notations.
- L'application du_i est continue sur le compact $\gamma\big([0,1]\big)$. Donc le supremum est fini et atteint.

Maintenant nous posons

$$g_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t). \tag{15.32}$$

Nous avons la majoration

$$\|g_n(t)\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \|f_i(t)\| \leqslant M \sum_{i=0}^{n} \|du_i\|_\infty < \infty. \tag{15.33}$$

Le fait que le tout soit fini est l'hypothèse de convergence normale sur tout compact. Le compact en question est $\gamma\big([0,1]\big)$.

C'est le moment d'utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 14.207. Attention aux notations un peu décalées. Nous avons $g_n \to \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ (convergence simple) et $\|g_n(t)\| \leqslant A$ où A est une constante que nous voyons comme une fonction constante intégrable sur le compact $[0,1]$. Nous permutons la limite et l'intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t)dt = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} g_n)(t)dt \tag{15.34a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)dt \tag{15.34b}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} f_i(t)dt \tag{15.34c}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \int_0^1 f_i(t)dt \tag{15.34d}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 f_i(t)dt. \tag{15.34e}$$

(2) **Accroissements**

Nous pouvons maintenant faire le petit calcul suivant :

$$\sum_n \int_0^1 (du_n)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt = \sum_n \Big(u_n\big(\gamma(1)\big) - u_n\big(\gamma(0)\big)\Big) = \sum_n \big(u_n(x) - u_n(a)\big) = u(x) - u(a) \tag{15.35}$$

où nous avons utilisé le théorème fondamental du calcul intégral sous la forme de la proposition 14.294.

Nous retenons l'égalité

$$u(x) = u(a) + \int_0^1 \sum_n (du_n)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt. \tag{15.36}$$

EQooTXYWooIDxVri

(3) **Remarque** La formule (15.36) n'est pas une forme de formule des accroissements finis qui parlerait d'évaluer une fonction u en x en partant de a et en intégrant du le long d'un chemin joignant a et x.

Ce serait le cas si nous pouvions permuter la somme et la différentielle qui se trouvent dans l'intégrale. Or permuter somme et différentielle est précisément l'objet du théorème que nous sommes en train de prouver.

(4) **Différentielle**

Forts de la formule (15.36), nous calculons $du_a(v)$, c'est-à-dire la différentielle de u au point a appliquée au vecteur $v \in E$. Pour cela, nous savons que Ω est ouvert, donc Ω contient une boule de rayon r autour de a, ce qui nous permet de dire que pour un a donné, le point $a+sv$ est dans Ω pour tout $s \in B(0,\epsilon)$ lorsque ϵ n'est pas trop grand. Pour chacun de ces s, nous considérons un chemin de classe C^1 joignant a à $a+sv$. Ce chemin sera noté

$$\gamma_s\colon [0,1] \to \Omega \tag{15.37}$$

et $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=a+sv$. Nous avons le calcul

$$\begin{aligned}
du_a(v) &= \frac{d}{ds}\Big[u(a+sv)\Big]_{s=0} && (15.38a)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (du_n)_{\gamma_s(t)}\big(\gamma_s'(t)\big)dt\Big]_{s=0} && (15.38b)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (du_n)_{\gamma_s(t)}\big(\gamma_s'(t)\big)dt\Big]_{s=0} && (15.38c)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\sum_n \big(u_n(a+sv)-u_n(a)\big)\Big]_{s=0} && (15.38d)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[(\sum_n u_n)(a+sv)\Big]_{s=0} && (15.38e)\\
&= \sum_n \frac{d}{ds}\Big[u_n(a+sv)\Big]_{s=0} && (15.38f)\\
&= \sum_n (du_n)_a(v) && (15.38g)\\
&= \Big(\sum_n (du_n)_a\Big)(v) && (15.38h)\\
&= \Big(\sum_n du_n\Big)_a(v). && (15.38i)
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour 15.38c. Permuter la somme et l'intégrale comme plus haut.
- Pour 15.38f. Permuter une somme et une dérivée classique des fonctions $\mathbb{R} \to F$ données par $s \mapsto u_n(a+sv)$. Il s'agit d'utiliser le théorème 12.398 sur chaque composantes dans F.
- Pour 15.38i. Chaque du_n est une application $du_n\colon E \to \mathcal{L}(E,F)$. Au fait près que la notation est plus lourde, il s'agit simplement d'une définition de la somme ponctuelle d'une suite de fonctions : $\sum_n f_n(a) = (\sum_n f_n)(a)$. Dans ce cas-ci, le tout est encore un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ que nous appliquons à v.

□

15.2 Séries entières

Dans cette section nous allons parler de séries complexes autant que de séries réelles. L'étude des propriétés à proprement parler complexes des séries entières (holomorphie) sera effectuée dans le chapitre dédié, voir le théorème 26.61 et ses conséquences.

L'unicité du développement (quand il existe) sera la proposition 15.49.

15.2.1 Disque de convergence

DEFooYTYJooFzvKDu

Définition 15.10.
*Une **série de puissance** est une série de la forme*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{15.39}$$

eqseriepuissance

où $z_0 \in \mathbb{C}$ est fixé, (c_k) est une suite complexe fixée, et z est un paramètre complexe. Nous disons que cette série est centrée *en z_0.*

DEFooLGGNooGapMIK

Définition 15.11.
*Une **série entière** est une somme de la forme*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{15.40}$$

avec $a_n, z \in \mathbb{C}$.

Une série entière peut définir une fonction

$$f(z) = \sum_n a_n z^n. \tag{15.41}$$

Le but de cette section est d'étudier des conditions sur la suite (a_n) qui assurent la continuité de f ou la possibilité de dériver ou intégrer la série terme à terme.

DefZWKOZOl

Définition 15.12 (rayon de convergence)**.**
*Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}$. Nous disons que le **rayon de convergence** de (a_n) est le nombre*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in [0, \infty]. \tag{15.42}$$

EQooIBQJooWRfGKX

*Lorsque nous avons une série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x(z - z_0)^n$, nous disons que la boule $B(z_0, R)$ est le **disque de convergence** de la série.*

Notez bien que la définition (15.42) est plutôt une propriété de la suite (a_n) que de la série $\sum_n a_n z^n$.

15.13.
Notez que le disque de convergence proprement dit est ouvert. Donc, pour être correct, on devrait parler de la *frontière* pour parler de la partie $|z| = R$. Toutefois, nous désignerons souvent cette partie en parlant du *bord* du disque.

15.14.
En réalité, il serait plus correct de parler du rayon de convergence de la suite (a_n) parce qu'au moment où on l'étudie, nous ne savons pas encore si la somme existera. Il ne devrait donc pas être autorisé d'écrire « étudions le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$ ».

Le rayon de convergence d'une série ne dépend que des réels $|a_n|$, même si à la base $a_n \in \mathbb{C}$.

15.15.
Sur Wikipédia[531], le rayon de convergence est défini par le supremum des $|z|$ tels que la série $\sum_n a_n z^n$ converge. Je vous invite à vous étonner que cela est équivalent à la définition donnée ici.

Il est dingue que demander que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée soit suffisant pour que la série converge. En réalité ce n'est pas tout à fait le cas ; les séries qui convergent sont celles pour $|z|$ strictement plus petit que le rayon de convergence. Et là ça marche. En effet, si $x < R$, il existe un r tel que $x < r < R$. Nous considérons ϵ donné par $x = \epsilon r$, qui vérifie $\epsilon < 1$ et nous avons

$$a_n x^n = a_n(\epsilon r)^n = (a_n r^n)\epsilon^n \to 0. \tag{15.43}$$

Le critère d'Abel 15.18 va formaliser ça.

REMooYOTEooKvxHSf

Remarque 15.16.
Si pour tout n nous avons $|b_n| \geqslant |a_n|$ alors le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n z^n$ est au moins aussi grand que celui de la série $\sum_n b_n z^n$. Cela y compris lorsque l'un ou l'autre des rayons de convergences est infini.

LEMooVCTNooCQHkzs

Lemme 15.17 ([1])**.**
Le rayon de convergence pour la suite $b_n = a_{n+k}$ est le même que celui pour a_n.

Démonstration. Soit $r > 0$. Nous avons $r^k b_n r^n = a_{n+k} r^{n+k}$. Vu que les k premiers termes d'une suite ne changement pas le fait que la suite soit bornée, la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant k}$ est bornée si et seulement si la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. □

LemmbWnFI

Lemme 15.18 (Critère d'Abel)**.**
Soit $R > 0$ le rayon de convergence de la somme $\sum_n a_n z^n$ et $z \in \mathbb{C}$.

(1) Si $|z| < R$ alors la série converge absolument[6]*.*

(2) Si $|z| > R$ alors la série diverge.

Démonstration. Démonstration en deux parties.

(1) Nous supposons que $|z| < R$. Nous choisissons alors un r tel que $|z| < r < R$. La suite $(a_n r^n)$ est bornée ; il existe un $M > 0$ tel que $|a_n r^n| < M$ pour tout M. Nous pouvons calculer :

$$|a_n z^n| = |a_n| r^n \big(\frac{|z|}{r}\big)^n \leqslant M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \tag{15.44}$$

Vu que $|z| < r$ nous tombons sur la série géométrique (10.469) qui converge. Par le critère de comparaison[7] la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ converge.

(2) Par définition du rayon de convergence, la suite $(a_n z^n)$ n'est donc pas bornée et la série ne peut pas converger à cause de la proposition 10.121.

□

CORooCUDSooTfMvAB

Corolaire 15.19.
Soit une série entière $\sum_n a_n z^n$. Soit un nombre ρ tel que

(1) La série converge pour $|z| < \rho$.

(2) La série diverge pour $|z| > \rho$.

Alors le rayon de convergence est ρ.

Démonstration. Nous notons R le rayon de convergence de la série.

(1) $\underline{R \geqslant \rho}$ Si $R < \rho$, nous prenons r strictement entre R et ρ. Le critère d'Abel 15.18 nous dit, pour $|z| = r$, que la série diverge. Par hypothèse, elle converge ; contradiction.

(2) $\underline{R \leqslant \rho}$ De même si $R > \rho$, alors nous prenons $\rho < r < R$. Le critère d'Abel nous dit que la série diverge pour $|z| = r$. L'hypothèse nous dit le contraire. Nouvelle contradiction.

□

15.20.
Le critère d'Abel parle bien de convergence absolue, et non de convergence normale. Pour chaque t, la série $\sum_k |a_n t^k|$ converge. Si par contre nous posons $u_k(t) = a_k t^k$, nous n'avons à priori pas la convergence normale $\sum_k \|u_k\|_\infty$, même pas si la norme est la norme supremum sur $B(0, R)$[8]. Prenons comme exemple simplement $a_k = 1$ pour tout k. Pour tout $|t| < 1$, la série $\sum_k t^k$ converge absolument (série géométrique), mais nous aurions $\|u_k\|_\infty = 1$ et donc divergence évidente de $\sum_k \|u_k\|_\infty$.

PROPooLNJSooWdieDi

Proposition 15.21 ([1])**.**
Si R est la rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$ et si R_a est celui de $\sum_n |a_n| z^n$, alors

$$R \geqslant R_a. \tag{15.45}$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R_a$. Alors la série $\sum_n |a_n| z^n$ converge absolument[9], c'est-à-dire que la série $\sum_n |a_n z^n|$ converge. La proposition 10.151 dit alors que la série $\sum_n a_n z^n$ converge. Vu que cela est vrai pour tout $z \in B(0, R_a)$, nous en déduisons que $R_a \geqslant R$. □

[6] Définition 10.118.
[7] Lemme 10.165.
[8] Il y aurait par contre bien convergence sur tout compact ? Cher lecteur, dites-moi ce que vous en pensez
[9] Critère d'Abel, lemme 15.18.

15.2.2 Somme et produit de séries

THOooSDQQooIawBOk

Théorème 15.22 (Somme de séries entières[532]).
Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries de rayon de convergences respectivement R_a et R_b.
ITEMooJSIJooUSxIVk

(1) Nous notons R_s le rayon de convergence de $\sum_n (a_n + b_n)z^n$. Nous avons
ITEMooOHZIooAODsVI

(1a) Si $R_a = R_b$, alors $R_s \geqslant R_a$.
ITEMooBHUHooDAVNWJ

(1b) Si $R_a \neq R_b$ alors $R_s = \min\{R_a, R_b\}$.
ITEMooFJCKooZfYzXx

(2) Si $|z| < R_s$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n. \tag{15.46}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1a)** Si $R_a = R_b$, alors nous fixons $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R_a$. Dans ce cas les séries $\sum_k a_k z^k$ et $\sum_k b_k z^k$ (que nous voyons comme bête séries dans $\mathbb{C}$, pas comme fonctions de z) convergent, et la proposition 10.159 nous dit qu'alors la somme converge vers $\sum_k (a_k + b_k)z^k$. Donc z est dans la boule de convergence de $\sum_k (a_k + b_k)z^k$ et donc $R_s \geqslant |z|$. Vu que cela est valable pour tout $|z| < R_a = R_b$, nous avons $R_s \geqslant R_a$.

(2) **Pour (1b)** Nous supposons, pour fixer les idées, que $R_a < R_b$. De la même façon que pour le point (1a), nous trouvons que $R_s \geqslant R_a$. Nous prenons maintenant $z \in \mathbb{C}$ avec $R_a < |z| < R_b$. Alors la série $\sum_k a_k z^k$ converge et la série $\sum_k b_k z^k$ diverge. La proposition 10.159(2) indique alors que $\sum_k (a_k + b_k)z^k$ diverge. Donc $R_s < |z|$. Vu que cela est vrai pour tout $|z| > R_a$, nous avons $R_s \leqslant R_a$ et donc $R_s = R_a$.

Le cas $R_b > R_a$ donne alors un résultat identique : $R_s = R_b$.

(3) **Pour (2)** Lorsque $|z| < R_s = \min R_a, R_b$, les deux séries convergent et la proposition 10.159 indique que la somme converge vers ce qu'il faut.

□
THOooINHDooZxErnp

Théorème 15.23.
Soit une série $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence R.

(1) Si $\lambda \neq 0$ la série $\sum_n (\lambda a_n)z^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum_n a_n z^n$

(2) Si $|z| < R$ nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{15.47}$$
EQooSLBVooVltMid

Démonstration. Fixons $|z| < R$, et appliquons la proposition 10.163(1). Cela prouve que le rayon de convergence de $\sum_k (\lambda a_k)z^k$ est au moins aussi grand que R. La partie 10.163(2) montre que si $|z| > R$, alors la série $\sum_k (\lambda a_k)z^k$ ne converge par.

La formule (15.47) est seulement la formule (10.449). □
LEMooNYAXooKUuQFe

Lemme 15.24 ([1]).
Soient deux suites de nombres complexes (a_n) et (b_n). Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^{n}\big(\sum_{j=0}^{n-l} b_j\big)a_l. \tag{15.48}$$

Démonstration. Le problème est qu'à gauche la borne de la somme sur l dépend de k ; cela nous empêche de permuter les sommes[10]. Qu'à cela ne tienne : nous complétons la somme en introduisant

$$\sigma_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{si } l \leqslant k \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \tag{15.49}$$

[10] Vu que toutes les sommes sont finies, ce ne sont certainement pas les questions de convergence qui nous retiennent.

Nous avons alors

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}a_lb_{k-l}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\sigma_{lk}a_lb_{k-l}=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sigma_{lk}a_lb_{k-l}=\sum_{l=0}^{n}\big(a_l\sum_{k=l}^{n}b_{k-l}\big)\tag{15.50a}$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\big(a_l\sum_{j=0}^{n-l}b_j\big)=\sum_{l=0}^{n}\big(\sum_{j=0}^{n-l}b_j\big)a_l.\tag{15.50b}$$

□
LEMooLPBCooRWuvJB

Lemme 15.25 ([1]).
Si la série $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ a un rayon de convergence R, alors nous avons

$$\big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\big)z=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+1}\tag{15.51}$$
EQooYGEUooUYSLFi

et les rayons de convergence sont égaux à R.

Démonstration. En posant $b_0=0$ et $b_k=a_{k-1}$ (pour $k\geqslant 1$), la somme de droite est la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ qui a le même rayon de convergence que la série des (a_n) par le lemme 15.17. En ce qui concerne l'égalité (15.51), elle se vérifie du fait que toutes les sommes partielles à gauche et à droite sont égales. □
PROPooPKGEooZKyxwo

Proposition 15.26 ([533]).
Soient (a_n) et (b_n) des suites dans $\mathbb{C}$. Nous supposons que $\sum_n a_n$ est absolument convergente[11] *et que $\sum_n b_n$ est convergente.*

Alors en posant

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k},\tag{15.52}$$

la série $\sum_n c_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\big(\sum_i a_i\big)\big(\sum_j b_j\big).\tag{15.53}$$

Démonstration. Nous commençons par quelques notations sur les sommes partielles et leurs limites. Nous posons $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_n$, $B_n=\sum_{k=0}^{n}b_n$ et nous avons, par hypothèse, les convergences $A_n\xrightarrow{\mathbb{C}}A$ et $B_n\xrightarrow{\mathbb{C}}B$.

En ce qui concerne la somme partielle pour les (c_n), en appliquant le lemme 15.24,

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}c_k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}a_lb_{k-l}=\sum_{l=0}^{n}\big(\sum_{j=0}^{n-l}b_j\big)a_l=\sum_{l=0}^{n}a_lB_{n-l}.\tag{15.54}$$

Soit $\epsilon>0$.

(1) **Des indices assez grands** Nous définissons $N_1,N_2\in\mathbb{N}$ de la façon suivante :

- Vu que $B_j\to B$, il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $j\geqslant N_1$, $|B_j-B|\leqslant\epsilon$.
- Vu que $\sum_n a_n$ converge, la proposition 10.121 nous dit que $|a_i|\to 0$ (ce n'est pas ici que nous utilisons la convergence absolue). Il existe donc $N_2\in\mathbb{N}$ tel que $|a_i|\leqslant\epsilon/N_1$ pour tout $i\geqslant N_2$.
- Nous considérons $N\geqslant N_1+N_2$.

(2) **Un majorant** Vu que la série $\sum_n a_n$ converge absolument, la somme $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ est bornée. De même, la suite $j\mapsto|B_j-B|$ est bornée et nous choisissons M assez grand pour majorer les deux en même temps :

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<M\tag{15.55a}$$
SUBEQooBKCVooXnampA

$$|B_j-B|<M\quad\forall j.\tag{15.55b}$$

[11] Définition 10.118.

(3) **Et on calcule un peu** Nous avons assez préparé de notations et de majorations. C'est le moment de prouver que $C_n - A_nB \to 0$. Nous avons

$$|C_n - A_nB| = |\sum_{l=0}^{n} a_k(B_{n-l} - B)| \tag{15.56a}$$
$$\leqslant \sum_{l=0}^{n} |a_l||B_{n-l} - B| \tag{15.56b}$$
$$= \sum_{l=0}^{n-N_1} |a_l||B_{n-l}| + \sum_{l=n-N_1+1}^{n} |a_l||B_{n-l} - B| \tag{15.56c}$$
$$\leqslant \sum_{l=0}^{n-N_1} |a_l|\epsilon + M \sum_{l=n-N_1+1}^{n} |a_l| \tag{15.56d}$$
$$\leqslant \epsilon M + M \sum_{l=n-N_1+1}^{n} \frac{\epsilon}{N_1} \tag{15.56e}$$
$$= 2\epsilon M. \tag{15.56f}$$

Justifications :

- Pour (15.56d). Dans la première somme, $n - l \geqslant n - (n - N_1) = N_1$, donc $|B_{n-l} - B| \leqslant \epsilon$. Dans la seconde somme nous avons seulement majoré $|N_{n-l} - B| \leqslant M$.
- Pour (15.56e). Dans la première somme, il s'agit de la majoration (15.55a). Dans le seconde somme, $l \geqslant n - N_1 + 1 \geqslant N_1 + N_2 - N_1 + 1 \geqslant N_2 + 1$, ce qui implique $|a_l| \leqslant \epsilon/N_1$.
- Pour (15.56f). La somme contient $n - (n - N_1 + 1) + 1 = N_1$ termes. Chaque terme valant ϵ/N_1.

(4) **Conclusion** Nous avons prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $|C_n - A_nB| \leqslant \epsilon$. Nous écrivons maintenant

$$C_n = (C_n - A_nB) + A_nB \tag{15.57}$$

Vu que $C_n - A_nB \to 0$ et que $A_nB \to AB$, la somme des deux suites converge vers[12] $0 + AB = A$ et donc

$$C_n \to AB. \tag{15.58}$$

□

Le théorème suivant donne une formule (dit « produit de Cauchy ») pour le produit de deux séries entières. Nous en donnons une adaptation dans le cas de séries de puissances dans une algèbre normée dans la proposition 10.164.

ThokPTXYC

Théorème-Définition 15.27 (Produit de Cauchy dans $\mathbb{C}$[534])**.**
Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries de rayon de convergences respectivement R_a et R_b. La série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n. \tag{15.59}$$

EqFPGGooDQlXGe

*est le **produit de Cauchy** des séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$.*

Nous notons R_p le rayon de convergence de la série.

ITEMooFOVPooBaVknN

(1) Nous avons l'inégalité $R_p \geqslant \min\{R_a, R_b\}$.

ITEMooHRNZooWviigD

(2) Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right). \tag{15.60}$$

EQooSGXHooHwjQEV

Démonstration. En plusieurs parties.

[12] C'est la proposition 9.29.

(1) **Préambule** Nous allons fixer z, et utiliser la proposition 15.26. Ce que nous appelons a_n là-bas est $a_n z^n$ ici. Idem pour les b_n qui sont $b_n z^n$ et c_n qui devient $c_n z^n$. Vu que z sera fixé, tout cela n'est pas très profond.

Ces substitutions sont très courantes lorsque nous prouvons des résultats sur les séries entières comme corolaires de résultats généraux sur les séries.

(2) **Pour (1)** Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors les séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ sont absolument convergentes par lemme d'Abel 15.18. La proposition 15.26 pour les suites $(a_n z^n)$ et $(b_n z^n)$ fait alors le boulot : en posant

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}, \tag{15.61}$$

la série $\sum_n c_n z^n$ converge et vaut le produit des deux.

La série $\sum_n c_n z^n$ converge sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < \min\{R_a, R_b\}\}$. Donc en posant $r < \min\{R_a, R_b\}$, la suite $(c_n r^n)$ est bornée (dans $\mathbb{C}$) et nous avons que $R_p \geqslant r$ (utilisation très littérale de la définition du rayon de convergence). Donc $R_p \geqslant \min\{R_a, R_b\}$.

(3) **Pour (2)** Le travail est déjà fait.

□

Exemple 15.28.
Montrons un produit de Cauchy dont le rayon de convergence est strictement plus grand que le minimum. D'abord nous considérons

$$A = 1 - z, \tag{15.62}$$

c'est-à-dire $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_{n\geqslant 2} = 0$ avec $R_a = \infty$. Ensuite nous considérons

$$B = \sum_n z^n, \tag{15.63}$$

c'est-à-dire $B = (1 - z)^{-1}$ et $R_b = 1$. Le produit de Cauchy de ces deux séries valant 1, le rayon de convergence est infini.

Notons qu'alors l'égalité (15.60) a lieu dans $B(0, 1)$, mais pas au-delà.

Donc le « produit de Cauchy » de deux séries peut ne pas être égal au produit des deux séries, au sens où il est possible que le produit existe là où une des deux séries n'existe plus. △

Exemple 15.29.
Nous montrons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{15.64}$$

pour $x \in]-1, 1[$.

Étant donné que pour tout r dans $]-1, 1[$ la suite $(n+1)r^n$ est bornée, le rayon de convergence est correct. Pour les x dans ce domaine nous avons

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)} \frac{1}{(1-x)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m \right). \tag{15.65}$$ EqIwbuTk

Nous devons expliciter ce produit de Cauchy en utilisant le théorème 15.27. Pour tout i nous avons $a_i = b_i = 1$. Par conséquent le produit (15.65) devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n. \tag{15.66}$$

△

Nous voulons maintenant faire le produit de Cauchy à plus que deux facteurs. Pour cela nous prouvons d'abord un certain nombre de lemmes traitant de la combinatoire du problème.

Nous posons, pour $n, N \in \mathbb{N}$:

$$V_n(N) = \{x \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } \sum_{i=1}^{N} x_i = n\}. \tag{15.67}$$ EQooJCBSooMSbaCd

LEMooRKEVooDdpuHt

Lemme 15.30.
Nous avons

$$V_n(N+1)=\bigcup_{y=0}^{n}\bigcup_{x\in V_y(N)}(x,n-y). \tag{15.68}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) **Première inclusion** Un élément de $\bigcup_{y=0}^{n}\bigcup_{x\in V_u(N)}(x,n-y)$ est un élément $z\in\mathbb{N}^{N+1}$ de la forme $z=(x,n-y)$ tel que $x\in V_y(N)$. Donc

$$\sum_{i=1}^{N+1}z_i=\sum_{i=1}^{N}x_i+(n-y)=y+n-y=n. \tag{15.69}$$

Donc $z\in V_n(N+1)$.

(1a) **L'autre inclusion** Un élément de $V_n(N+1)$ est de la forme $z=(x,y)$ avec $x\in\mathbb{N}^N$ et $y\in\mathbb{N}$. Posons $t=\sum_{i=1}^{N}x_i$, de telle sorte que $x\in V_t(N)$.
Vu que $z\in V_n(N+1)$ nous avons d'autre part $y=n-\sum_{i=1}^{N}x_i=n-t$.

□

La proposition suivante généralise le produit de Cauchy du théorème 15.27 au cas de plus de deux facteurs. Nous ne pouvons cependant pas considérer 15.27 comme un cas particulier de 15.31, parce que la démonstration va utiliser le cas à deux facteurs.

PROPooJPVVooLqSdSn

Proposition 15.31 (Produit de Cauchy[1])**.**
Soient des nombres complexes a_{ik} tels que les séries entières

$$s_i(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{ik}z^k \tag{15.70}$$

soient convergentes avec un rayon de convergence R_i. Nous posons

$$c_n=\sum_{x\in V_n(N)}\prod_{i=1}^{N}a_{ix_i}, \tag{15.71}$$

et nous appelons R_p le rayon de convergence de la série $\sum_n c_nz^n$.

(1) Nous avons l'inégalité $R_p\geqslant\min\{R_i\}$. ITEMooUVNXooLxlawx

(2) Pour $|z|\leqslant\min\{R_i\}$ nous avons l'égalité

$$\prod_{i=1}^{N}s_i(z)=\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{x\in V_n(N)}\prod_{i=1}^{N}a_{ix_i}\right)z^n. \tag{15.72}$$ EQooHCUGooDRhxzt

Démonstration. Nous prouvons cela par récurrence sur N. D'abord pour $N=1$ nous avons $V_n(1)=\{n\}$. Donc $c_n=\prod_{i=1}^{1}a_{ix_i}=a_{1n}$ et donc la série à droite dans (15.72) est seulement $\sum_{n=0}^{\infty}a_{1n}z^n=s_1(z)$.

Nous supposons le théorème prouvé pour toutes valeurs jusqu'à N et nous prouvons pour $N+1$. Si $|z|<\min\{R_i\}$ alors toutes les séries convergent et en utilisant l'associativité du produit dans $\mathbb{C}$ nous avons :

$$\prod_{i=1}^{N+1}s_i(z)=\left(\prod_{i=1}^{N}s_i(z)\right)s_{N+1}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{x\in V_n(N)}\prod_{i=1}^{N}a_{ix_i}\right)z^ns_{N+1}(z). \tag{15.73}$$

Nous allons maintenant utilliser le produit de Cauchy à deux termes du théorème 15.26. Notez que c'est bien l'utilisation de ce théorème qui nous permet d'obtenir la convegence dans notre pas de récurrence, et non l'hypothèse de réccurence actuelle. Bref, nous posons

$$b_{1k}=\sum_{x\in V_k(N)}\prod_{i=1}^{N}a_{ix_i} \tag{15.74a}$$

$$b_{2k}=a_{N+1,k}. \tag{15.74b}$$

L'utilisation du produit de Cauchy à deux facteurs donne le coefficient de z^n sous la forme suivante (justifications plus bas) :

$$c_n = \sum_{y\in V_n(2)} b_{1y_1}b_{2y_2} \tag{15.75a}$$

$$= \sum_{y\in V_n(2)} \sum_{x\in V_{y_1}(N)} \prod_{i=1}^{N} a_{ix_i}a_{N+1,y_2} \tag{15.75b}$$

$$= \sum_{y=0}^{n} \sum_{x\in V_y(N)} \prod_{i=1}^{N} a_{ix_i}a_{N+1,n-y} \tag{15.75c}$$

SUBEQooFPEMooKpLQBd

$$= \sum_{(x,y)\in V_n(N+1)} \prod_{i=1}^{N} a_{ix_i}a_{N+1,y} \tag{15.75d}$$

SUBEQooHXZRooSdxFTf

$$= \sum_{x\in V_n(N+1)} \prod_{i=1}^{N+1} a_{ix_i}. \tag{15.75e}$$

Justifications :

- Pour (15.75c). L'ensemble $V_n(2)$ n'est pas très compliqué à expliciter :
$$V_n(2) = \{(y, n-y) \text{ tel que } y = 0, \dots, n\}. \tag{15.76}$$
- Pour (15.75d). La somme porte sur les (x,t) avec $x \in \mathbb{N}^N$ et $y \in \mathbb{N}$ tels que (x,y) est dans $V_n(N+1)$, et la justification de l'égalité est le lemme 15.30.

□

15.2.3 Séries entières et polynômes

PROPooEFCNooCAcSIx

Proposition 15.32 ([535]).
Le rayon de convergence de $\sum_n z^n$ est strictement positif si et seulement si il existe $q > 0$ tel que $|a_n| \leqslant q^n$.

Démonstration. Nous notons R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Dans les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $R > 0$, et nous fixons $s \in]0, R[$. Vu que la série $\sum_a ns^n$ est convergente, la proposition 10.121 dit que $|a_n z^n| \to 0$. En particulier la suite $(a_n z^n)$ est bornée, et il existe $M > 1$ qui majore tous les $a_n z^n$. En posant $q = M/s$, nous avons $|a_n| \leqslant M|s^{-n}| \leqslant q^n$.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons maintenant que $|a_n| \leqslant q^n$ pour un certain $q > 0$. Nous savons que si $|z| < 1/q$ la série $\sum_n q^n|z^n|$ converge[13]. Donc le lemme 10.165 dit que $\sum_n |a_n||z|^n$ converge.

□

La proposition suivante sera surtout utile lorsqu'on parlera de dérivée.

PropHDIUooKTbVSX

Proposition 15.33 ([536]).
Quel que soit le nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration. Nous posons

$$E = \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } (a_n r^n) \text{ est borné }\} \tag{15.77a}$$

$$E' = \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } (n^\alpha a_n r^n) \text{ est borné }\} \tag{15.77b}$$

Nous allons prouver que $E = E'$ (et donc leurs supremum seront égaux).

(1) **Si $\alpha > 0$**

Dans ce cas $E' \subset E$ est facile. Nous prouvons l'inclusion dans l'autre sens. Si E est vide, c'est évident. Nous supposons que E n'est pas vide, et nous considérons $r \in E$, et nous montrons que $r \in E'$. Pour cela nous prenons un nombre s tel que $r < s < \sup(E)$. Nous avons

$$n^\alpha a_n r^n = n^\alpha a_n \left(\frac{r}{s}\right)^n s^n = n^\alpha \left(\frac{r}{s}\right)^n a_n s^n. \tag{15.78}$$

[13] Proposition 10.172(1).

Mais $r/s<1$, donc le lemme 12.436 dit que $n^\alpha(r/s)^n\to 0$. Cela est donc borné par une constante M. Donc

$$n^\alpha a_n r^n\leqslant Ma_n s^n. \tag{15.79}$$

Mais la suite $(a_n s^n)$ est bornée. Donc la suite $n^\alpha a_n r^n$ est également bornée, ce qui prouve que $r\in E'$.

(2) **Si $\alpha<0$** Même raisonnement, mais en inversant les rôles de E et E', et en adaptant un peu[14].

□

Remarque 15.34.
Au fond, cette proposition n'est rien d'autre que dire que dans $n^\alpha r^n$, l'effet « convergent » est r^n qui est une décroissance exponentielle tandis que l'effet « divergent » est n^α qui a une croissance seulement polynomiale.
PROPooGQAIooFDTtrc

Proposition 15.35 ([1]).
Si P est un polynôme, alors les séries

$$\sum_n a_n z^n, \tag{15.80a}$$

$$\sum_n P(n)a_n z^n \tag{15.80b}$$

$$\sum_n \frac{a_n}{P(n)}z^n \tag{15.80c}$$

SUBEQooWNLCooBdNnY

ont même rayon de convergence (pourvu que P ne s'annule pas pour 15.80c).

Démonstration. Soient des polynômes P et Q (en supposant que Q ne s'annule pas sur les entiers positifs). Nous notons R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$, nous notons R_P celui de $\sum_n P(n)a_n z^n$, et R_Q celui de $\sum_n a_n/Q(n)z^n$.

(1) $\underline{R=R_P}$ $\overline{R_P\leqslant R}$. ITEMooHZAIooAtbmum Vu que $|P(n)|\to\infty$, à partir d'un certain n nous avons $|P(n)a_n|>|a_n|$. Donc nous avons

L'inégalité dans l'autre sens découle principalement de la proposition 15.33. Les théorèmes 15.23 et 15.22(1a) servent à coller les bouts de polynômes ensemble.

(2) $\underline{R_Q=R}$ $\overline{R_Q=R}$. Nous avons $\sum_n a_n z^= \sum_n Q(n)\frac{a_n}{Q(n)}z^n$. Donc en utilisant le point (1) avec Q nous trouvons

□
LemFVMaSD

Lemme 15.36.
Les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{15.81a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1} \tag{15.81b}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{15.81c}$$

ont même rayon de convergence.

Démonstration. Cas particulier de la proposition 15.35. □

Notons toutefois que nonobstant ce lemme, les séries dont il est question peuvent se comporter différemment sur le bord du disque de convergence. En effet la série

$$\sum\frac{1}{n}z^n \tag{15.82}$$

diverge pour $z=1$ alors que

$$\sum\frac{1}{n(n+1)}z^{n+1} \tag{15.83}$$

converge pour $z=1$.

[14] Je n'ai pas vérifié ; écrivez-moi si ça pose un problème.

LEMooNAWTooHWqKBK

Lemme 15.37 ([537]).
Soit une suite (u_n) de réels strictement positifs. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell, \tag{15.84}$$

alors la suite $(u_n^{1/n})$ a une limite et elle vaut ℓ également.

Démonstration. Nous commençons par supposer que $\ell > 0$; nous ferons le cas $\ell = 0$ après. Soit $\epsilon < \ell$. L'existence de la limite dans l'hypothèse dit qu'il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ nous ayons

EQooDFKNooMQLVrW

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \in B(\ell, \epsilon). \tag{15.85}$$

Écrivons un produit télescopique :

$$\frac{u_n}{u_N} = \prod_{p=N}^{n-1} \frac{u_{p+1}}{u_p}. \tag{15.86}$$

Mais chacun des facteurs du produit est soumis à l'encadrement (15.85), donc

$$(\ell - \epsilon)^{n-N} \leqslant \frac{u_n}{u_N} \leqslant (\ell + \epsilon)^{n-N}, \tag{15.87}$$

et donc, en multipliant par $u_N > 0$ nous avons

$$u_N(\ell - \epsilon)^{n-N} \leqslant u_n \leqslant u_N(\ell + \epsilon)^{n-M}. \tag{15.88}$$

La fonction $t \mapsto t^{1/n}$ est croissante[15] ; nous pouvons l'appliquer aux inégalités sans changer le sens :

$$u_N^{1/n}(\ell - \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} \leqslant u_n^{1/n} \leqslant u_N^{1/n}(\ell + \epsilon)^{\frac{n-N}{n}}. \tag{15.89}$$

Pour rappel, à ce point le N est fixé pour correspondre au $\epsilon < \ell$ que nous avons choisi.

Vu que $1/n \in \mathbb{Q}$ nous invoquons la proposition 12.417 pour dire que $\lim_{n\to\infty} u_N^{1/n} = 1$. De plus $(n - N)/n \to 1$ de telle sorte que

$$(\ell \pm \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} \to \ell \pm \epsilon. \tag{15.90}$$

Nous considérons donc un N' tel que pour tout $n \geqslant N'$ nous ayons

$$\left| u_N^{1/n}(\ell - \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} - (\ell - \epsilon) \right| < \epsilon \tag{15.91a}$$

$$\left| u_N^{1/n}(\ell + \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} - (\ell + \epsilon) \right| < \epsilon. \tag{15.91b}$$

Pour tout $n \geqslant \max(N, N')$ nous avons

$$(\ell - \epsilon) - \epsilon < u_N^{1/n}(\ell - \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} \leqslant u_n^{1/n} \leqslant u_N^{1/n}(\ell + \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} < (\ell + \epsilon) + \epsilon. \tag{15.92}$$

Donc,

$$\ell - 2\epsilon \leqslant u_n^{1/n} \leqslant \ell + 2\epsilon. \tag{15.93}$$

Cela prouve que la limite $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n}$ existe et vaut ℓ.

Et si $\ell = 0$? Dans ce cas, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ nous avons

$$0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} < \epsilon. \tag{15.94}$$

Ensuite il faut recommencer tous les calculs, avec pour seule différence que tous les membres de gauche sont 0. □

LEMooDWNZooXwejrF

Lemme 15.38 (Règle de Cauchy[538, 537]).
Soit une suite (x_n) dans un espace vectoriel normé. Nous posons

$$p = \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^{1/n}. \tag{15.95}$$

Alors :

[15] Proposition 12.427, en notant que les arguments sont tous bien positifs.

ITEMooZZBIooUYrtYL

(1) *Si $p < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est absolument convergente.*

ITEMooQGKNooOFeFRd

(2) *Si $p > 1$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est ne converge pas.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soit $\epsilon > 0$ tel que $p + \epsilon < 1$. Le lemme 9.47 nous dit que l'ensemble

$$S_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|x_n\|^{1/n} \geqslant p + \epsilon\} \tag{15.96}$$

est fini. Quitte à prendre une queue de suite, nous supposons que S_ϵ est vide, c'est-à-dire que $\|x_n\| < (p+\epsilon)^n$ pour tout n. En posant $q = p + \epsilon$, nous voyons que $\|x_n\| < q^n$ avec $q < 1$. La comparaison avec la série géométrique 10.172(1) conclut.

(2) **Pour (2)** Alors en prenant ϵ tel que $p - \epsilon > 1$, nous avons une infinité de termes vérifiant $\|x_n\| > (p-\epsilon)^n > 1$.

□

ThoSerPuissRap

Théorème 15.39 (Formule de Hadamard[539])**.**
Le rayon de convergence[16] *de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est donné par une des deux formules*

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|} \tag{15.97}$$

EqRayCOnvSer

ou

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \tag{15.98}$$

EqAlphaSerPuissAtern

lorsque a_k est non nul à partir d'un certain k.

Si une de ces formules donne $1/R = 0$, alors le rayon de convergence est infini.

Démonstration. En deux, voire quatre parties. Nous allons utiliser le corolaire 15.19, en commençant par supposer que la limite supérieure n'est ni 0 ni ∞.

(1) **Première formule, si $|z| < R$** Posons $L = \limsup_{n\to\infty} \left(|a_n|^{1/n}\right)$. Si $|z| < \frac{1}{L}$, alors

$$\limsup |a_n z^n|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/n}|z| < L\frac{1}{L} = 1 \tag{15.99}$$

donc la règle de Cauchy du lemme 15.38 conclut à la convergence de la série.

(2) **Première formule, si $|z| > R$** C'est exactement le même calcul, mais l'inégalité arrive dans l'autre sens :

$$\limsup |a_n z^n|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/n}|z| > L\frac{1}{L} = 1 \tag{15.100}$$

donc la règle de Cauchy du lemme 15.38 conclut à la divergence de la série.

(3) **Première formule, si la limite est 0** Si $\limsup \sqrt{|a_k|}^{1/k} = 0$, alors toujours le même calcul donne :

$$\limsup |a_n z^n|^{1/n} = 0 \tag{15.101}$$

et donc la série converge pour tout z. D'où le rayon de convergence infini.

(4) **Première formule, si la limite est ∞** Soit $z \in \mathbb{C}$. La partie

$$S = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } |a_n|^{1/n} > 1/|z|\} \tag{15.102}$$

est infinie. Pour chaque $n \in S$, nous avons $|a_n z^n| > 1$. La suite des $a_n z^n$ ne convergeant pas vers zéro (il y a même une infinité de termes plus grands que 1), la série ne peut pas converger (proposition 10.121).

(5) **Seconde formule** Le lemme 15.37 nous ramène au cas de la première formule.

□

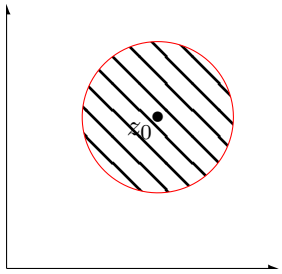


FIGURE 15.1 : À l'intérieur du disque de convergence, la convergence est absolue. En dehors, la série diverge. Sur le cercle proprement dit, tout peut arriver. LabelFigDisqueConv

Notons que le critère d'Abel ne dit rien pour les points tels que $|z-z_0|=R$. Il faut traiter ces points au cas par cas. Et le pire, c'est qu'une série donnée peut converger pour certain des points sur le bord du disque, et diverger en d'autres. Le théorème d'Abel radial (théorème 15.46) nous donnera quelques informations sur le sujet.

Il y a un dessin à la figure 15.1.

Si les suites a_n et b_n sont équivalentes, alors les séries correspondantes auront le même rayon de convergence. Cela ne signifie pas que sur le bord du disque de convergence, elles aient même comportement. Par exemple nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}. \tag{15.103}$$

En même temps, en $z=-1$ la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{\sqrt{n}} \tag{15.104}$$

converge par le critère des séries alternées[17]. Par contre la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}\right)z^n \tag{15.105}$$

ne converge pas pour $z=-1$.

Exemple 15.40.
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et considérons la série $\sum_{n\geqslant 1}a_nz^n$ où a_n est la n-ième décimale de α. Si α est un nombre décimal limité, la suite (a_n) est finie et le rayon de convergence est infini. Sinon, pour tout N il existe un $n>N$ tel que $a_n\neq 0$ et la suite (a_n) ne tend pas vers zéro. Par conséquent la série

$$\sum_n a_nz^n \tag{15.106}$$

diverge pour $z=1$ et le rayon de convergence satisfait $R\leqslant 1$. Nous avons aussi $|a_n|\leqslant 9$, de telle manière à ce que la série soit bornée et par conséquent majorée en module par $9z^n$, ce qui signifie que $R\geqslant 1$.

Nous déduisons alors $R=1$. △ LEMooRIQTooLomsqD

Lemme 15.41.
Nous considérons la série

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n \tag{15.107}$$

sur $[\frac{1}{2},1]$.

(1) Pour tout $x\in[\frac{1}{2},1]$, *nous avons*

$$f(x)=\ln(x). \tag{15.108}$$

(2) Nous avons la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln(2). \tag{15.109}$$

[16]Définition 15.12.
[17]Théorème 10.176.

Démonstration. Nous regardons la série

$$\tilde{f}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n. \tag{15.110}$$

Cette série de puissance converge absolument pour $|y| < 1$ par la proposition 15.35. Nous sommes donc dans le cas d'une série de puissance dont le disque de convergence est centré en 0, et dont le rayon est au moins 1[18].

Par le critère des séries alternées (théorème 10.176), la série $\tilde{f}(y)$ converge pour $y = -1$. Nous sommes donc dans le cadre du théorème 12.392 qui nous permet de dire que pour tout $\epsilon > 0$, la série (15.110) converge uniformément sur $[-1, 1-\epsilon]$.

La fonction $\tilde{f}(y)$ est donc continue sur $[-1, 1-\epsilon]$, et donc en particulier sur $[-1, 0]$. Par ailleurs, la fonction $y(x)$ est continue en $x \neq 0$. En tant que composée de fonctions continues, la fonction $f(x) = \tilde{f}\big(y(x)\big)$ est continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Nous la mettons la série des dérivées sous la forme d'une série de puissances :

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{n-1}. \tag{15.111}$$

Afin d'éviter tout malentendu, nous insistons sur le fait que g est la série des dérivées de la série f. Nous ne savons pas encore si g existe (c'est-à-dire si elle converge), ni si sa somme est la dérivée de f. C'est cela que nous allons tenter d'établir maintenant.

Nous posons à nouveau $y(x) = \frac{x-1}{x}$, et nous savons que la série de puissances $\sum_n y^n$ converge uniformément pour $y \in [-1+\epsilon, 1-\epsilon]$ pour tout $\epsilon > 0$. En repassant aux variables x, pour tout $\epsilon > 0$, nous avons convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n, \tag{15.112}$$

sur le compact $x \in [\frac{1}{2-\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}]$, ou, pour parler plus simplement, sur $x \in [\frac{1}{2}+\epsilon, a]$ pour tout ϵ (petit) et a (grand). Nous avons donc également convergence uniforme de la série des dérivées (15.111) sur le même intervalle. Maintenant, le théorème 15.9 montre que la série des dérivées est bien la dérivée de la série, c'est-à-dire que

$$g(x) = f'(x) \tag{15.113}$$

sur $]\frac{1}{2}, 1]$. Notez que la convergence uniforme *sur tout compact* de la série des dérivées est suffisante.

Une bonne nouvelle est qu'il est possible de sommer explicitement la série $\sum_k y^k$. C'est la proposition 10.172 :

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-y^{n+1}}{1-y} = \frac{1}{1-y}, \tag{15.114}$$

lorsque $|y| < 1$. Du coup, nous avons simplement

$$f'(x) = g(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{n-1} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{n} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{x}\right)}\right) = \frac{1}{x}, \tag{15.115}$$

donc la fonction f a la forme simple $f(x) = \ln(x) + C$. Notez bien le petit jeu de variables de sommation. Au départ $g(x)$ est une somme qui part de 1 avec un exposant $n-1$, et nous la transformons en une somme qui part de 0 avec un exposant n. C'est cela qui nous permet d'appliquer la formule (15.114).

Étant donné que $f(1) = 0$, nous avons

$$f(x) = \ln(x) \tag{15.116}$$

pour tout $x \in [\frac{1}{2}+\epsilon, 1]$. Mais nous avons vu que la fonction f était continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Étant donné que $\ln(x)$ et $f(x)$ sont deux fonctions continues sur $[\frac{1}{2}, 1]$ qui sont égales sur tout compact $[\frac{1}{2}+\epsilon, 1]$, nous déduisons que ces deux fonctions sont en réalité égales sur tout l'entièreté du compact $[\frac{1}{2}, 1]$.

En particulier, en $x = \frac{1}{2}$, nous avons

$$f(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^n = \ln(1/2) = -\ln(2). \tag{15.117}$$

□

[18] Vu que la série des $(1+\epsilon)^n$ diverge, en fait le rayon de convergence de $\tilde{f}$ est exactement égal à 1, mais ce n'est pas indispensable ici.

15.2.4 Critère de comparaison

Voici un critère de comparaison pour les séries entières.

PROPooJCQTooBlinDm

Proposition 15.42 ([1])**.**
Soit R_a le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Si $|b_n| \leqslant |a_n|$ pour tout n, alors le rayon de convergence R_b de $\sum_n b_n z^n$ vérifie $R_b \geqslant R_a$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R_a$. Alors la série $\sum_n |a_n z^n|$ converge par le critère d'Abel 15.18. Vu que $|b_n z^n| \leqslant |a_n z^n$, le critère de comparaison 10.165 dit que $\sum_n |b_n z^n|$ converge. La proposition 15.19 dit alors que $R_b \geqslant |z|$. Comme cela est valable pour tout $|z| < R_a$, nous concluons que $R_b \geqslant R_a$. □

15.2.5 Convergence normale

Théorème 15.43.
Une série entière converge normalement sur tout disque fermé inclus au disque de convergence.

Démonstration. Toute boule fermée incluse à $B(0,R)$ est incluse à la boule $\overline{B(0,r)}$ pour un certain $r < R$. Nous nous concentrons donc sur une telle boule fermée.

Pour chaque n nous posons $u_n(z) = a_n z^n$ que nous voyons comme une fonction sur $\overline{B(0,r)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \overline{B(0,r)}$ nous avons

$$\|u_n\|_\infty \leqslant |a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n. \tag{15.118}$$

Étant donné que $r < R$ la série $\sum_n |a_n| r^n$ converge et la série $\sum_n \|u_n\|$ est convergente. La série $\sum_n a_n z^n$ est alors normalement convergente. □

Exemple 15.44.
Encore une fois nous n'avons pas d'informations sur le comportement au bord. Par exemple la série $\sum_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, mais $\sup_{z \in B(0,1)} |z^n| = 1$ et nous n'avons pas de convergence normale sur la boule fermée. △

La convergence normale n'est donc pas de mise sur tout l'intérieur du disque de convergence. La continuité, par contre est effective sur la boule. En effet si $z_0 \in B(0,R)$ alors il existe un rayon $0 < r < R$ tel que $B(z_0, r) \subset B(0,R)$. Sur $B(z_0,r)$ nous avons convergence normale et donc continuité en z_0.

La différence est que la continuité est une propriété locale tandis que la convergence normale est une propriété globale.

Proposition 15.45.
Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ avec un rayon de convergence R. Si $\sum |a_n| R^n$ converge alors

(1) la série $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{B(0,R)}$,

(2) f est continue sur $\overline{B(0,R)}$.

Démonstration. La conclusion est claire dans l'intérieur du disque de convergence. En ce qui concerne le bord, chacune des sommes partielles est une fonction continue. De plus nous avons $\|u_n\| \leqslant |a_n| R^n$, dont la série converge. Par conséquent nous avons convergence normale sur le disque fermé. □

Le théorème suivant permet de donner, dans le cas de fonctions réelle, des informations sur la convergence en une des deux extrémités de l'intervalle de convergence.

ThoLUXVjs

Théorème 15.46 (Convergence radiale de Abel)**.**
Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ une série réelle de rayon de convergence $0 < R < \infty$.

(1) Si $\sum a_n R^n$ converge, alors f est continue sur $[0,R]$.

(2) Si $\sum_n a_n (-R)^n$ converge, alors f est continue sur $[-R,0]$.

La proposition 15.114 donnera un exemple d'utilisation pour la série de $\ln(1-x)$ (qui n'est pas encore définie à ce moment).

Le résultat suivant permet d'identifier deux séries complexes lorsque leurs valeurs sur $\mathbb{R}$ sont identiques.

PROPooQLWTooCJYcPl

Proposition 15.47.
Soient les séries $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$ convergentes dans $B(0,R)$. Si $f(x) = g(x)$ pour $x \in [0,R[$ alors $a_n = b_n$.

Démonstration. Soit n_0 le plus petit entier tel que $a_{n_0} \neq b_{n_0}$. Pour tout $z \in B(0,R)$ nous avons

$$f(z) - g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n = z^{n_0} \varphi(z) \tag{15.119}$$

où

$$\varphi(z) = \sum_{n \geqslant 0} (a_{n+n_0} - b_{n+n_0}) z^n. \tag{15.120}$$

Par le théorème 15.22 le rayon de convergence de φ est plus grand que R et la fonction φ est continue en 0. Étant donné que $\varphi(0) = a_{n_0} - b_{n_0} \neq 0$ et que φ est continue nous avons un ρ tel que $\varphi \neq 0$ sur $B(0,\rho)$. Or cela n'est pas possible parce que au moins sur la partie réelle de cette dernière boule, φ doit être nulle. □

PropSNMEooVgNqBP

Proposition 15.48 ([540, 1]).
Si la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence R alors

(1) La somme est une fonction holomorphe[19] *dans le disque de convergence.*

ItemUULDooEGRNiA

(2) La somme est différentiable et

$$du_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} z. \tag{15.121}$$

ITEMooHENIooRQCZwA

(3) De plus pour tout $z_0 \in B(0,R)$, on pose[20]

$$S(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \tag{15.122a}$$

$$T(z) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n. \tag{15.122b}$$

Alors nous avons

$$\lim_{z \to z_0} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = T(z_0). \tag{15.123}$$

EqVQDPooOPJCwN

Démonstration. Nous allons prouver, en utilisant le théorème 15.9, que la somme est une fonction différentiable et que la différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire. La proposition 12.337 nous dira alors que la somme est $\mathbb{C}$-dérivable.

Nous posons $u_n(z) = a_n z^n$, qui est une fonction de classe C^1. En ce qui concerne sa différentielle nous considérons $z_0 \in B(0,R)$ et nous avons (si $n = 0$ alors la différentielle est nulle)

$$\begin{aligned}
(du_n)_{z_0}(z) &= \frac{d}{dt}\Big[u_n(z_0 + tz)\Big]_{t=0} && (15.124a)\\
&= \frac{d}{dt}\Big[a_n(z_0 + tz)^n\Big]_{t=0} && (15.124b)\\
&= \frac{d}{dt}\Big[n a_n (z_0^{n-1} tz)\Big]_{t=0} && (15.124c)\\
&= n a_n z_0^{n-1} z. && (15.124d)
\end{aligned}$$

En cours de calcul nous avons développé $(z_0 + tz)^n$ et gardé seulement les termes de degré 1 en t. Il y en a n et ils sont tous égaux à $z_0^{n-1} tz$.

La convergence simple $\sum_n u_n$ est dans les hypothèses. Il reste à prouver que la somme des différentielles converge uniformément sur tout compact autour de z_0 ne débordant pas du disque ouvert de convergence. Soit K un compact autour de z_0. Dans le calcul suivant nous utilisons une première fois la norme uniforme de du_n vu comme fonction de K vers $\mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et une fois la norme opérateur[21] de $(du_n)_{z_0}$ comme application linéaire $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\|du_n\|_k &= \sup_{z_0 \in K} \|(du_n)_{z_0}\| && (15.125a)\\
&= \sup_{z_0 \in K} \sup_{|z|=1} |(du_n)_{z_0}(z)| && (15.125b)\\
&= \sup_{z_0 \in K} \sup_{|z|=1} |n a_n z_0^{n-1} z| && (15.125c)\\
&= \sup_{z_0 \in K} n|a_n||z_0|^{n-1}. && (15.125d)
\end{aligned}$$

[19] Définition 12.331.
[20] Pour rappel, dans tout ce texte, $B(a,r)$ est une boule *ouverte*.
[21] Définition 10.67.

Vu que $z \mapsto |z|^{n-1}$ est une application continue sur le compact K, elle atteint son maximum (théorème 7.196). Nous considérons z_K, un point qui réalise le supremum. Ce nombre est dans le disque de convergence parce que K est un compact autour de z_0.

Nous devons prouver que $\sum_n n|a_n||z_K|^{n-1}$ converge. Vu que $|z_K|$ est une constante (par rapport à n) nous pouvons étudier la convergence en écrivant $|z_K|^n$ au lieu de $|z_K|^{n-1}$.

La suite $(a_n|z_K|^n)$ est une suite bornée. En considérant un majorant M de $\{|a_n|r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons en particulier $|a_n||z_K|^n < M$ pour tout n. Nous considérons de plus r de telle sorte que $K \subset B(0,r) \subset B(0,R)$. En particulier $|z_K| < r$ et nous avons

$$n|a_n||z_K|^n \leqslant n|a_n|r^n \left(\frac{|z_K|}{r}\right)^n \leqslant nM\left(\frac{|z_K|}{r}\right)^n. \tag{15.126}$$

Nous savons que ce qui est dans la parenthèse est plus petit que 1, mais que $\sum_n nx^n$ converge dès que $|x| < 1$. Par conséquent

$$\sum_n \|du_n\|_K \tag{15.127}$$

converge et le théorème 15.9 fonctionne : $du = \sum_{n=1}^{\infty} du_n$ et la somme $\sum_n u_n$ est de classe C^1.

La différentielle de $\sum_n u_n$ s'exprime explicitement par

$$du_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z_0^{n-1} z. \tag{15.128}$$ EqJBFMooMiSABz

Cette forme montre que du_{z_0} est une application $\mathbb{C}$-linéaire et donc la somme est $\mathbb{C}$-dérivable par la proposition 12.337. Ergo holomorphe sur le disque de convergence par définition 12.331.

En ce qui concerne la formule (15.123), elle provient de la formule (12.911) : $f'(z_0)$ est donné par la facteur multiplicatif de du_{z_0}. En l'occurrence la formule (15.128) nous donne

$$f'(z_0) = \sum_{n\geqslant 1} na_n z_0^{n-1}. \tag{15.129}$$

□

15.2.6 Unicité

PROPooVUEYooYemzhe

Proposition 15.49 ([1]).
Soit un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{C}$ de 0. Soit une application $f\colon U \to \mathbb{C}$ pouvant être écrite sous les formes

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \tag{15.130}$$

pour tout $z \in U$. Alors $a_k = b_k$ pour tout k.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour $k = 0$**
Nous avons tout de suite $f(0) = a_0$ et $f(0) = b_0$ et donc $a_0 = b_0$. Celle-là, elle était facile.

(2) **Pour $k = 1$**
D'après la proposition 15.48(3), en posant $T(z) = \sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1}$, nous avons

$$T(z_0) = \lim_{\xi\to z_0} \frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0}. \tag{15.131}$$

Prenons $z_0 = 0$ et posons

$$T_a(z) = \sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1} \tag{15.132a}$$

$$T_b(z) = \sum_{n\geqslant 1} nb_n z^{n-1}. \tag{15.132b}$$

En réalité $T_a = T_b$ parce que $T_a(z)$ et $T_b(z)$ sont tous les deux données par $\lim_{\xi\to z}\big(f(\xi)-f(z)\big)/(\xi-z)$. En particulier $T_a(0) = T_b(0)$, et donc $a_1 = b_1$.

(3) **La récurrence** Nous posons

$$T_{a,k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}, \tag{15.133}$$

et nous allons prouver que si $T_{a,k}$ converge sur U, alors $T_{a,k+1}$ converge sur U et $T_{a,k+1}(z) = \lim_{\xi\to z} \big(T_{a,k}(\xi) - T_{a,k}(z)\big)/(\xi - z)$. Supposons donc que $T_{a,k}$ converge sur U. D'abord nous avons

$$T_{a,k}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k} \tag{15.134a}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^n. \tag{15.134b}$$

SUBEQooCKZXooDhdQra

La proposition 15.48(3) appliqué à la série entière (15.134b) nous indique que

$$\lim_{\xi\to z} \frac{T_{a,k}(\xi) - T_{a,k}(z)}{\xi - z} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^{n-1} \tag{15.135a}$$

SUBEQooPVMNooHIEppZ

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(n+k+1)!}{(n+1)!} a_{n+k+1} z^n \tag{15.135b}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{n!} a_{n+k+1} z^n \tag{15.135c}$$

$$= T_{a,k+1}(z). \tag{15.135d}$$

Tout cela est également valable pour $T_{b,k}$. Et par récurrence nous prouvons que $T_{a,k}(z) = T_{b,k}(z)$ parce qu'à chaque étape, c'est égal au membre de gauche de (15.135a). Nous avons $T_{a,k}(0) = k!a_k$ et $T_{b,k}(0) = k!b_k$, et donc $a_k = b_k$.

□

15.2.7 Dérivation

Les théorèmes de dérivation et d'intégration de séries de fonctions (théorèmes 15.1 et 15.3) fonctionnent bien dans le cas des séries entières. Ils donnent la proposition 15.50 pour la dérivation et 15.55 pour l'intégration.

ProptzOIuG

Proposition 15.50.
Soit la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{15.136}$$

de rayon de convergence R. Alors la fonction f est C^1 sur $]-R,R[$ et se dérive terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{15.137}$$

pour tout $x \in]-R,R[$.

Démonstration. Nous savons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergente que celui de la série f. En particulier cette série des dérivées converge normalement sur tout compact dans $]-R,R[$ et la somme est continue. Le théorème 15.3 conclut. □

Remarque 15.51.
À part lorsqu'on parle de fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la notion de classe C^k s'entend au sens de la différentielle, et non de la dérivée, voir les définitions 10.297. C'est cela qui explique la structure de la démonstration de la proposition 15.48.

CorCBYHooQhgara

Corolaire 15.52 ([540, 1]).
La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur le disque ouvert de convergence.

Démonstration. La proposition 15.48 a démontré en réalité nettement plus : sur le disque ouvert de convergence, la somme est une fonction holomorphe. Il n'est cependant pas possible de conclure ainsi parce que le fait qu'une fonction holomorphe est C^∞ ne sera démontré qu'au coût de nombreux efforts dans le théorème 26.61(3).

(1) **Cas réel** Nous considérons la série entière $\sum_n a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ de rayon de convergence R. Une simple récurrence sur la proposition 15.50 donne le résultat.

(2) **Cas complexe** Attention : le fait d'être de classe C^k est le fait d'être k fois *différentiable*. Rien à voir avec la $\mathbb{C}$-dérivabilité.

En ce qui concerne la différentiabilité nous avons la proposition 15.48 qui dit que dans le disque de convergence, la fonction $u(z) = \sum_n a_n z^n$ a pour différentielle l'application $du\colon \mathbb{C} \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} du\colon \mathbb{C} &\to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ du_{z_0}(z) &= \big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z_0^n\big)z. \end{aligned} \tag{15.138}$$

Nous allons éviter de considérer la différentielle seconde comme une application

$$d^2u\colon \mathbb{C} \to \mathcal{L}\big(\mathbb{C}, \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})\big) \tag{15.139}$$

parce que ça nous mènerait trop loin pour parler de la différentielle k^{e}. Au lieu de cela nous allons considérer l'isomorphisme d'espace vectoriel

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{C} &\to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ z_0 &\mapsto \psi(z_0)z = z_0 z. \end{aligned} \tag{15.140}$$

Dans cette optique nous écrivons :

$$du_{z_0} = \psi\big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z_0^n\big) \tag{15.141}$$

ou encore :

$$(\psi^{-1} \circ d)u(z_0) = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}z_0^n. \tag{15.142}$$

Nous allons prouver par récurrence que l'égalité suivante est vraie (y compris le fait que la somme converge) :

$$(\psi^{-1} \circ d)^k u(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}z_0^n. \tag{15.143}$$

Prouvons d'abord que cette somme converge pour tout k. Nous avons $(n+k)!/n! < (n+k)^k$ et donc il suffit de prouver que la série de coefficients $n^k a_n$ converge. C'est le cas par la proposition 15.33.

Nous pouvons calculer la différentielle de $(\psi^{-1} \circ d)^k u$ en dérivant terme à terme en utilisant (encore) la proposition 15.48(2) :

$$d\big((\psi^{-1} \circ d)^k u\big)_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}na_0^{n-1}z \tag{15.144a}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!}a_{n+k+1}z_0^n z. \tag{15.144b}$$

Nous appliquons ψ^{-1} à cela :

$$(\psi^{-1} \circ d)^{k+1}u(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!}a_{n+k+1}z_0^n. \tag{15.145}$$

(3) **Dérouler à l'envers**

Nous allons maintenant utiliser la proposition 12.299 pour montrer que u est de classe C^k pour tout k. Nous avons démontré que $(\psi^{-1} \circ d)^k u$ était différentiable. Par conséquent, $d\big((\psi^{-1} \circ d)^{k-1}u\big)$ est différentiable et donc $(\psi^{-1} \circ d)^{k-1}$ est de classe C^1. En continuant ainsi, $(\psi^{-1} \circ d)^{k-l}u$ est de classe C^l et u est de classe C^k.

□

Le lemme suivant est encore essentiellement valable dans un espace de Banach (proposition 10.344).
LemPQFDooGUPBvF

Lemme 15.53.
Plusieurs choses sur des séries entières.

(1) *La série entière* $\sum_{n\geqslant 0} z^{nk}$ *a un rayon de convergence* 1 *et converge vers la fonction*

$$\sum_{n\geqslant 0} z^{nk} = \frac{1}{1-z^k}. \tag{15.146}$$

(2) *Lorsque* $|\omega| = 1$*, la série*

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{z^k}{\omega^{k+1}}. \tag{15.147}$$
EqSSHZooLwCBAZ

a un rayon de convergence égal à 1.
ITEMooHFVHooPCgzZV

(3) *Si* $|\omega| = 1$*, la série*

$$\frac{1}{(\omega - z)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+k-1)!}{s!} \frac{z^s}{\omega^{s+k+1}} \tag{15.148}$$

a un rayon de convergence égal à 1.

Démonstration. Les coefficients de la série sont $a_n = 1$ lorsque n est multiple de k et $a_n = 0$ autrement. Donc pour $r = 1$ la suite $r^n a_n$ reste bornée[22]. Cela prouve que le rayon de convergence est au moins 1. Par ailleurs si $r > 1$ alors clairement la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée. Cela prouve le rayon de convergence égal à 1.

Soit donc $z \in B(0,1)$. Nous avons, par le lemme 15.25,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{nk}\right)(1-z^k) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{nk} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n+1)k} \tag{15.149a}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{nk} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n+1)k} \tag{15.149b}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n+1)k} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n+1)k} \tag{15.149c}$$

$$= 1 \tag{15.149d}$$

En ce qui concerne la série (15.147), elle s'obtient facilement :

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} = \frac{1}{\omega} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\omega}\right)^s = \sum_s \omega^{-s-1} z^s. \tag{15.150}$$

La troisième série s'obtient en dérivant la seconde, ce qui est permis dans le disque de convergence par la proposition 15.50. □

Remarque 15.54.
Sur le bord du disque de convergence, la série $\sum_n z^{nk}$ ne converge pas. En effet le rayon étant 1, sur le bord nous avons la série $\sum_n e^{ink\theta}$ dont la norme du terme général ne tend pas vers zéro.

15.2.8 Intégration

PropfeFQWr

Proposition 15.55.
Soit la série entière $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R*.*

(1) *Pour tout segment* $[a,b] \subset]-R,R[$ *nous pouvons intégrer terme à terme :*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx. \tag{15.151}$$

[22] Utilisation directe de la définition 15.12.

(2) *La série entière obtenue en intégrant terme à terme a le même rayon de convergence que celui de la série de départ.*

Démonstration. La première assertion est un cas particulier du théorème général 15.1. Pour le rayon de convergence, le lemme 15.36 fait le travail. □

Vu que le rayon de convergence ne varie pas par la dérivation ou par l'intégration et qu'une série entière est de classe C^∞ sur son disque de convergence, nous pouvons dériver terme à terme autant de fois que nous le voulons sans faire de fautes dans le disque de convergence.

15.3 Séries de Taylor

SECooDWRMooUKSuPh

15.56.
Avant de commencer, une petite formule de dérivation toute simple que nous allons utiliser souvent :

$$(z^k)^{(l)} = \begin{cases} 0 & \text{si } l > k \\ \frac{k!}{(k-l)!} z^{k-l} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.152}$$

EqSOFdwhw

Dans les cas où il est permis de dériver terme à terme, nous avons la formule

$$f^{(p)}(x) = \sum_k a_k (x^k)^{(p)} = \sum_{k=p}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-p)!} x^{k-p} \tag{15.153}$$

EQooTNOMooJZClyE

15.3.1 Série de puissance

DEFooIXGBooPgJTzB

Définition 15.57 ([541]).
Soient des espaces de Banach[23] *E et F. Une **série de puissance** sur E à valeurs dans F est une application de la forme*

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \tag{15.154}$$

où les α_n sont des applications

(1) *n-multilinéaire, c'est-à-dire $\alpha_n \in \mathcal{L}_n(E, F)$ (définition 8.1),*

(2) *symétrique,*

(3) *continue.*

En termes de notations, nous posons

$$\alpha_n(x) = \alpha(x, \dots, x) = \alpha_n x^n. \tag{15.155}$$

Notons toutefois que la dernière notation est particulièrement vicieuse parce que, si E est un espace de Banach, il n'y a pas de sens à multiplier des éléments de E entre eux.

Notons aussi que α_0 est une application 0-multilinéaire, c'est-à-dire juste un élément de F.

DEFooZUYHooDwwRfp

Définition 15.58 ([541]).
*Une série de puissance qui est une somme finie est un **polynôme**.*

15.59.
Nous avons deux définitions de polynômes. Une sur les espaces de Banach qui ne s'applique pas aux anneaux, et une sur les anneaux (1.473) qui ne s'applique pas aux espaces de Banach.

Entre les deux, je vous propose d'espérer que les deux définitions coïncident sur les espaces de Banach qui sont en même temps des anneaux. Typiquement $\mathbb{R}$.

DEFooCAWCooWHLpwl

Définition 15.60 ([1]).
*Soit une série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k(x)$. Le **rayon de convergence** de $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est le nombre*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que la suite } (\alpha_k r^k)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } \mathcal{L}_k(E, F)\}. \tag{15.156}$$

[23] Définition 7.316.

15.3.2 Polynôme de Taylor d'une série entière

Le polynôme de Taylor d'une fonction définie par une série entière s'obtient en tronquant la série. Cela est une assez bonne nouvelle que nous allons démontrer maintenant.

PROPooQLHNooRsBYbe

Proposition 15.61 ([1]).
Soit une série entière[24]

$$f(x) = \sum_k a_k x^k \tag{15.157}$$

de rayon de convergence $R > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction α telle que

EQooSXUJooEjsVek

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \alpha(x)x^n \tag{15.158}$$

et

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0. \tag{15.159}$$

Tout ceci étant convenu que

- *l'égalité (15.158) est uniquement valable sur le disque de convergence,*
- *La fonction α dépend de n.*

Démonstration. Le corolaire 15.52 nous indique que f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et que nous pouvons dériver terme à terme.

En utilisant la formule (15.153) et en l'évaluant en $x = x_0$, tous les termes s'annulent sauf $k = p$:

$$f^{(p)}(0) = p!a_p. \tag{15.160}$$

Le théorème de Taylor 12.471 nous indique alors qu'il existe $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \alpha(x)x^n. \tag{15.161}$$

□

15.3.3 Une majoration pour le reste

LEMooOVPIooAPWFOm

Lemme 15.62.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable $n+1$ fois sur $B(a, R)$. Alors pour tout $x \in B(a, r)$,

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \cdots \int_a^{u_{n-1}} f^{(n)}(u_n)du_n \dots du_1. \tag{15.162}$$

Démonstration. Nous allons intensivement utiliser le théorème fondamental du calcul intégral 14.288 sous la forme de la formule (14.911). Nous avons d'abord

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(u_1)du_1 = \int_a^x \big[f'(a) + \int_a^{u_1} f''(u_2)du_2\big]du_1. \tag{15.163}$$

Toute l'astuce de ce théorème est de continuer à substituer $f^{(k)}(t)$ par $f^{(k)}(a)$ plus une intégrale de a à t de $f^{(k+1)}(u)$. Nous démontrons ainsi par récurrence que

EQooOWJMooHATpMV

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \cdots \int_a^{u_{n-1}} f^{(n)}(u_n)du_n \dots du_1. \tag{15.164}$$

La preuve de cela se fait en substituant

$$f^{(n)}(u_n) = f^{(n)}(a) + \int_a^{u_n} f^{(n+1)}(u_{n+1})du_{n+1} \tag{15.165}$$

et en remarquant (encore par récurrence par exemple) que

$$\int_a^x \cdots \int_a^{u_{n-1}} du_n \dots du_1 = \frac{(x-a)^n}{n!}. \tag{15.166}$$

□

[24] Définition 15.57.

Le théorème suivant donne majoration du reste du polynôme de Taylor. Il est un premier pas dans la démonstration de formules comme

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \tag{15.167}$$

lorsque P_n est un polynôme de Taylor autour d'un point $a \neq x$. Nous ne saurions trop insister sur le fait que de telles formules ne seraient valables que pour une classe relativement restreintes de fonctions.

THOooEUVEooXZJTRL

Théorème 15.63 (Inégalité de Taylor[542])**.**
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable $n+1$ fois et telle que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_n$ sur $B(a,d)$. Alors

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \tag{15.168}$$

où $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ et où P_n sont les polynômes de Taylor autour de $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous pouvons écrire la formule du lemme 15.62 pour $n+1$ au lieu de n ; cela donne

$$f(x) = P_n(x) + \int \cdots, \tag{15.169}$$

et donc

$$|R_n(x)| = |P_n(x) - f(x)| = \int_a^x \ldots \int_a^{u_n} f^{(n+1)}(u_{n+1}) du_{n+1} \cdots du_1 \tag{15.170}$$

En effectuant toutes les intégrales nous trouvons[25]

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}. \tag{15.171}$$

□

Cette formule pour le reste est très bien, mais pour l'exploiter au maximum de ses possibilités, il faudra la notion de convergence de suite de fonctions, et en particulier la notion de série de fonctions, pour pouvoir écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k \tag{15.172}$$

lorsque cela est possible. Nous renvoyons donc aux séries de Taylor, section 15.3, et en particulier aux fonctions analytiques de la sous-section 15.3.4.

15.3.4 Fonctions analytiques

SUBSECooXKHWooEzqGRJ

Fonction analytique : définition 12.464.

Nous avons vu les polynômes de Taylor et déjà noté qu'il n'est pas en général vrai que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$ pour des x même proches du point autour duquel les polynômes de Taylor P_n sont calculés.

Nous allons maintenant étudier la classe des fonctions pour lesquelles la série de Taylor est égale à la fonction de départ. D'abord une proposition montrant que les coefficients de Taylor sont les seuls pour lesquels il est possible d'espérer avoir une telle propriété.

PROPooTRWVooETTtbP

Proposition 15.64 ([543])**.**
Soit une fonction donnée par la série entière

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \tag{15.173}$$

sur la boule de convergence $B(a,R)$ avec $R > 0$ (hypothèse : le rayon de convergence est strictement positif). Alors

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{15.174}$$

[25] Je me demande si je n'ai pas une faute entre n et $n+1$ quelque part. Relisez attentivement et écrivez-moi si vous trouvez une faute.

Démonstration. Par hypothèse, nous avons un rayon de convergence $R > 0$, et le corolaire 15.52 nous indique que f y est de classe C^∞. Et nous pouvons dériver terme à terme par la proposition 15.50. Cela pour dire qu'il nous est autorisé d'utiliser la formule (15.153) pour calculer les dérivées de f au point a. Nous avons d'abord

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-p)!}(x-a)^{n-p}, \tag{15.175}$$

et donc

$$f^{(p)}(a) = c_p p! \tag{15.176}$$

qui donne immédiatement le résultat. □

Proposition 15.65.
Soit l'intervalle $I = B(a,r)$. Si il existe M tel que

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M}{r^n} n! \tag{15.177}$$

pour tout $x \in B(a,r)$. Alors nous avons la convergence simple

$$P_n \to f \tag{15.178}$$

sur $B(a,r)$. Ici, P_n est le polynôme de Taylor d'ordre n pour la fonction f autour du point a.

Démonstration. Vu que nous avons $|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M}{r^n} n!$ pour tout x, nous pouvons poser

$$M_n = \frac{M}{r^n} n! \tag{15.179}$$

dans le théorème 15.63 pour le faire fonctionner. Nous avons alors

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{r^n} n! \frac{1}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} = \frac{M}{n+1}|x-a|\left|\frac{x-a}{r}\right|^n. \tag{15.180}$$

Vu que $x \in B(a,r)$ nous avons $|x-a| < r$ et donc $|(x-a)/r|^n < 1$. Nous pouvons aussi majorer $|x-a|$ par r et écrire

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{rM}{n+1}. \tag{15.181}$$

Nous avons donc bien $\lim_{n\to\infty} R_n(x) \to 0$. □

THOooEAYXooTvVYXN

Théorème 15.66 ([544]).
Soit une fonction analytique[26] *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identiquement nulle. La partie*

$$X = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \neq 0\} \tag{15.182}$$

est discrète[27].

Démonstration. Nous supposons que X n'est pas discret et nous prouvons que $f = 0$. Soit une suite convergente $a_i \to a$ avec $a_i \in X$. Étant donné que f est analytique en a, nous avons

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \tag{15.183}$$

et nous prouvons par induction que $f^{(n)}(a) = 0$.

D'abord $f(a) = 0$ parce que f est continue, et $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_i)$.

Ensuite nous supposons que $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k < n$. Nous avons

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \tag{15.184a}$$

$$= \dots \tag{15.184b}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} \tag{15.184c}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}, \tag{15.184d}$$

[26] Définition 12.464.
[27] Définition 7.26.

parce que chaque étape est une indétermination du type 0/0 sur laquelle nous pouvons utiliser la règle de L'Hôpital[28]. Par continuité de $f^{(n)}$, nous avons prouvé que $\lim_{x\to a} f(x)/(x-a)^n$ existe et vaut

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{15.185}$$

En particulier, nous pouvons calculer cette limite sur la suite de a_i :

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\lim_{i\to\infty}\frac{f(a_i)}{(a_i-a)^n}=0. \tag{15.186}$$

Nous avons donc bien prouvé que $f^{(n)}(a)=0$. □

15.4 Algèbre engendrée par une matrice

Nous allons en dire le strict minimum indispensable pour notre propos. Pour plus de détails, voir [545], et pour nettement plus de détails, [546].

DEFooXPFVooZzPXEK

Définition 15.67.
*Si $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, alors l'**algèbre engendrée** par A est l'intersection de toutes les sous-algèbres de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ contenant A.*

LEMooZGFYooOHvxLy

Lemme 15.68 ([545, 1])**.**
Si le polynôme minimal[29] de A est de degré p, alors la partie $\{\mathbb{1},A,A^2,\dots,A^{p-1}\}$ est une base de $\mathrm{Alg}(A)$.

Démonstration. La partie proposée est libre parce qu'une combinaison linéaire de ses éléments est un polynôme de degré $p-1$ en A. Une annulation d'un tel polynôme serait contraire au fait que le polynôme minimal est de degré p.

Cette partie est génératrice parce que, étant elle-même une sous-algèbre de $\mathbb{M}(n)$ contenant A, elle contient $\mathrm{Alg}(A)$. □

CORooQTUQooDtjljc

Corolaire 15.69 ([1])**.**
L'algèbre $\mathrm{Alg}(A)$ *est commutative.*

Démonstration. Écrire deux combinaisons linéaires d'éléments de la base donnée par le lemme 15.68, et notez que les produits ne font intervenir que des produits de A. □

Une bonne question est de savoir si e^{tA} est dans $\mathrm{Alg}(A)$. Pour le savoir il va falloir d'abord définir l'exponentielle ; rendez-vous donc au lemme 15.72.

15.5 Exponentielle sur une algèbre normée

15.5.1 Définition

Dans ce qui suit, nous considérons une algèbre commutative.

DEFooSFDUooMNsgZY

Proposition-Définition 15.70 (Exponentielle[1])**.**
Soit $(A,\|.\|)$ une algèbre[30] commutative de dimension finie sur $\mathbb{C}$ munie d'une norme d'algèbre. Pour $x\in A$ nous définissons

$$\exp(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}. \tag{15.187}$$

EQooCUVTooGNOrFj

Cette définition a les propriétés suivantes :

(1) C'est bien défini pour tout $x\in A$. C'est-à-dire que pour chaque x, la série (15.187) converge.

(2) Cela donne une application continue $\exp\colon A\to A$.

ITEMooGGVAooVfhGuu

(3) La fonction exp *est différentiable et*

$$(d\exp)_x(y)=\exp(x)y, \tag{15.188}$$

EQooKWBUooLUdBAw

le dernier produit étant la structure d'algèbre sur A.

[28] Proposition 12.219.
[29] Toute matrice a un polynôme minimal par le lemme 8.94.
[30] Définition 1.461.

Démonstration. Pour la différentiabilité de exp, nous voulons utiliser le théorème 15.9. Pour cela nous posons

$$u_k(x) = \frac{x^k}{k!} \tag{15.189}$$

(1) **Convergence simple** Nous prouvons la convergence simple, c'est-à-dire pour chaque x séparément, de la série (15.187) dans deux buts. D'abord de nous assurer que la définition posée de exp a un sens, et ensuite pour commencer à vérifier les hypothèses du théorème 15.9.

Nous montrons que les sommes partielles forment une suite de Cauchy. Nous fixons $x \in A$ et nous posons

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \tag{15.190}$$

Soient $p > q$, deux entiers. Nous avons :

$$\|s_p - s_q\| = \| \sum_{k=q+1}^{p} \frac{x^k}{k!} \| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\|x^k\|}{k!} \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\|x\|^k}{k!} \tag{15.191}$$

EQooYNZNooDaiPhU

où nous avons utilisé le fait que la norme sur A soit une norme d'algèbre.

C'est le moment d'utiliser la série exponentielle donnée dans le lemme 10.173 que nous appliquons avec $t = \|x\|$. La série donnée par les coefficients $a_k = \|x\|^k/k!$ converge et ses sommes partielles forment en particulier une suite de Cauchy. Donc ce que nous avons à droite dans (15.191) peut être rendu arbitrairement petit lorsque p et q sont grands.

(2) **u_k est continue** Il s'agit de remarquer que $(x+h)^k = x^k + hC(x,h)$ où C est une fonction bornée de h (lorsque h est dans un voisinage de $0 \in A$). Donc

$$\|(x+h)^k - x^k\| \leqslant \|h\|\|C(x,h)\| \to 0. \tag{15.192}$$

(3) **Candidat différentielle de u_k** Nous trouvons à présent un candidat à être différentielle de u_k. Pour cela nous faisons le calcul suivant, sans trop nous soucier de la rigueur :

$$(du_k)_x(y) = \frac{d}{dt}\Big[u_k(x+ty)\Big]_{t=0} = k\frac{1}{k!}x^{k-1}y = u_{k-1}(x)y. \tag{15.193}$$

(4) **u_k est différentiable** Nous fixons $x \in A$ et nous posons $T(y) = u_{k-1}(x)y$. Ensuite nous vérifions que cela vérifie la définition de la différentielle : nous devons calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_k(x+h) - u_k(x) - T(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k - kx^{k-1}h}{k!\|h\|} = \clubsuit. \tag{15.194}$$

EQooNPKGooVmEYAV

Vous vous souvenez de la formule pour $(x+h)^k$? Essayez de vous en souvenir. Le premier terme est x^k, et le second est $kx^{k-1}h$. Pour le reste c'est un polynôme dont tous les termes contiennent au moins h^2. Nous avons donc

$$\clubsuit = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 P(x,h)}{k!\|h\|} = 0. \tag{15.195}$$

Nous en concluons que u_k est différentiable et que

$$(du_k)_x(y) = u_{k-1}(x)y. \tag{15.196}$$

(5) **u_k est de classe C^1** Nous devons démontrer que la différentielle est continue ; cela est la continuité de l'application

$$\begin{aligned} du_k \colon A &\to \mathcal{L}(A,A) \\ x &\mapsto (du_k)_x. \end{aligned} \tag{15.197}$$

La topologie sur A est celle de la norme, et celle sur $\mathcal{L}(A,A)$ est celle de la norme opérateur associée à la norme sur A. Nous avons[31] :

$$\lim_{h\to 0} \|(du_k)_{x+h} - (du_k)_x\| = \lim_{h\to 0} \sup_{\|y\|=1} \|u_{k-1}(x+h)y - u_{k-1}(x)y\| \tag{15.198a}$$

$$\leqslant \lim_{h\to 0} \sup_{\|y\|=1} \|u_{k+1}(x+h) - u_{k-1}(x)\|\|y\| \tag{15.198b}$$

$$= \lim_{h\to 0} \|u_{k+1}(x+h) - u_{k-1}(x)\|. \tag{15.198c}$$

Le fait que cette limite vaille zéro est maintenant la continuité de u_{k-1}.

[31] N'oubliez pas de faire à part le cas $k = 0$ parce que ce qui suit n'est correct que pour $k \geqslant 1$.

(6) **Convergence normale sur tout compact**

Soit un compact K de A. Par le théorème de Borel-Lebesgue 9.24, K est fermé et borné. C'est pour ceci que nous avons supposé que A était de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit donc $R > 0$ tel que $\|y\| < R$ pour tout $y \in K$. Nous avons

$$\|du_k\|_K = \sup_{x\in K} \|(du_k)_x\| = \sup_{x\in K} \frac{\|x^{k-1}\|}{(k-1)!} \leqslant \sup_{x\in K} \frac{\|x\|^{k-1}}{(k-1)!} \leqslant \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{15.199}$$

Mais la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!}$ converge. Nous avons donc la convergence normale demandée.

(7) **Conclusion**

Le théorème 15.9 conclut que l'exponentielle est de classe C^1 et que sa différentielle est donnée par la formule

$$(d\exp)_x(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (du_k)_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (du_k)_x(y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)y = \exp(x)y. \tag{15.200}$$

Notez le jeu d'indices : $du_k = 0$ lorsque $k = 0$ (ce qui permet de faire commencer la somme à 1) et ensuite du_k fait intervenir u_{k-1} (ce qui fait revenir le départ de la somme à $k = 0$).

□

15.71.
Lorsque nous disons que la différentielle de l'exponentielle est l'exponentielle elle-même, nous référons au point 15.70(3) : la différentielle de exp en x est l'opérateur de multiplication par $\exp(x)$.

Nous pouvons comprendre maintenant que exp est même de classe C^∞ parce qu'à chaque différentiation nous tombons sur la même fonction, laquelle est de classe au moins C^1.

Cependant, pour formaliser ça, il faut un peut travailler. Le cauchemar des différentielles successives d'une application $A \to A$ est que les espaces en jeu sont des emboîtements terribles de $\mathcal{L}(A, \mathcal{L}(A, \mathcal{L}(A, A)))$.

Ce qui nous sauve est que l'espace $\mathcal{L}(A, V)$ est un A-module, quel que soit V. En particulier lorsque V est lui-même déjà un emboîtement. Faisons un lemme pour voir comment ça fonctionne.

LEMooCEVGooFVXndZ

Lemme 15.72 ([1]).
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous considérons l'algèbre $\mathrm{Alg}(A)$ engendrée par A[32]. Alors

$$e^{\mathrm{Alg}(A)} \subset \mathrm{Alg}(A). \tag{15.201}$$

Démonstration. Le lemme 15.68 nous dit que $\mathrm{Alg}(A)$ est une algèbre de dimension finie. Elle est commutative par le corolaire 15.69. Donc la proposition 15.70 s'applique. □

15.5.2 Différentielles

LEMooHKQVooQTrHHW

Lemme 15.73 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés E et V tels que V soit un E-module[33]*. Nous supposons les normes soient telles que $\|xv\|_V \leqslant \|x\|_E\|v\|_V$.*

Soit une fonction différentiable $f : E \to V$ telle que la différentielle $df : E \to \mathcal{L}(E, V)$ soit de la forme

$$df_x(y) = yg(x) \tag{15.202}$$

pour une certaine fonction différentiable $g : E \to V$.

Alors f est C^1, et deux fois différentiable telle que

$$\begin{aligned} d^2f &: E \to \mathcal{L}\big(E, \mathcal{L}(E, V)\big) \\ (d^2f)_x(y)z &= z(dg_x)(y) \end{aligned} \tag{15.203}$$

pour tout $x, y, z \in E$.

Démonstration. En plusieurs étapes.

[32] Définition 15.67.
[33] Définition 1.444.

(1) *f est C^1* Nous savons, par hypothèse, que f est différentiable. Il faut montrer que sa différentielle est continue, en remarquant déjà que g est continue parce que différentiable.

Soit $x_k \xrightarrow{E} x$, et calculons $\|df_{x_k} - df_x\|$:

$$\begin{aligned}\|df_{x_k} - df_x\| &= \sup_{\|y\|=1} \|df_{x_k}(y) - df_x(y)\| \\ &= \sup_{\|y\|=1} \|\big(g(x_k) - g(x)\big)y\| \\ &\leqslant \sup_{\|y\|=1} \|g(x_k) - g(x)\|\|y\| \\ &= \|g(x_k) - g(x)\|.\end{aligned} \tag{15.204}$$

Donc nous avons bien $df_{x_k} \xrightarrow{\mathcal{L}(E,V)} df_x$, ce qui signifie la continuité de df. Donc f est de classe C^1.

(2) *f est deux fois différentiable*

Pour montrer que df est différentiable, nous mettons directement dans la définition (10.279) le candidat

$$\begin{aligned}T_x(h)\colon R &\to V \\ T_x(h)z &= z dg_x(y).\end{aligned} \tag{15.205}$$

Nous devons vérifier la limite suivante :

$$\lim_{h \xrightarrow{E} 0} \frac{df_{x+h} - df_x - T_x(h)}{\|h\|} = 0. \tag{15.206}$$ EQooTBCKooRxBCum

Étudions la norme du numérateur :

$$\|df_{x+h} - df_x - T_x(h)\| = \sup_{\|y\|=1} \|df_{x+h}(y) - df_x(y) - T_x(h)y\| \tag{15.207a}$$

$$= \sup_{\|y\|=1} \|yg(x+h) - yg(x) - y dg_x(h)\| \tag{15.207b}$$

$$\leqslant \sup_{\|y\|=1} \|y\|\|g(x+h) - g(x) - dg_x(h)\|. \tag{15.207c}$$

La limite (15.206) se déduit donc de la différentiabilité de g.

Note : la partie démontrant que f est C^1 n'est pas strictement obligatoire parce qu'en vérifiant que f est deux fois différentiable, nous vérifions de facto que df est en particulier continue. □ LEMooTUWQooMCCDcm

Lemme 15.74 ([1])**.**
Soient des algèbres normées A et V telles que V soit un A-module vérifiant $\|xv\| \leqslant \|x\|\|v\|$ pour tout $x \in A$ et $v \in V$. Alors $\mathcal{L}(A,V)$ est un A-module vérifiant $\|x\alpha\| \leqslant \|x\|\|\alpha\|$ pour tout $x \in A$ et $\alpha \in \mathcal{L}(A,V)$.

Démonstration. C'est un simple calcul utilisant la norme opérateur :

$$\|x\alpha\| = \sup_{\|y\|=1} \|(x\alpha)y\| = \sup_{\|y\|=1} \|x\alpha(y)\| \leqslant \sup_{\|y\|=1} \|x\|\|\alpha(y)\| = \|x\| \sup_{\|y\|=1} \|\alpha(y)\| = \|x\|\|\alpha\|. \tag{15.208}$$

□ PROPooTBDAooQouzSk

Proposition 15.75 ([1])**.**
La fonction $\exp\colon A \to A$ *est de classe C^∞ et vérifie, pour tout $k \geqslant 1$ la récurrence*

$$(d^k \exp)_x(y) = y(d^{k-1}\exp)_x. \tag{15.209}$$

Démonstration. La formule proposée fonctionne avec $k = 1$:

$$(d\exp)_x(y) = y\exp(x). \tag{15.210}$$

C'est la relation 15.188.

Nous considérons $k > 1$, nous supposons que exp est de classe C^{k-1} et k fois différentiable. Nous allons prouver que exp est alors de classe C^k et $k+1$ fois différentiable, et que la différentielle de $d^k \exp$ est donné par la formule

$$(d^{k+1}\exp)_x(y) = y(d^k \exp)_x. \tag{15.211}$$

Pour nous mettre au clair avec les espaces en présence, nous supposons que

$$d^{k-1}\exp\colon A\to\mathcal{L}(A,V) \tag{15.212a}$$
$$d^{k}\exp\colon A\to\mathcal{L}\big(A,\mathcal{L}(A,V)\big) \tag{15.212b}$$

pour un certain espace vectoriel normé V, lequel est un de ces terrifiants emboîtement de type $\mathcal{L}\Big(A,\mathcal{L}\big(A,\mathcal{L}(A,A)\big)\Big)$. Il est bien un espace vectoriel normé, et également un A-module parce qu'on peut toujours définir la multiplication d'un élément $v\in V$ par un élément $x\in A$ comme étant la multiplication par x du résultat final de l'évaluation emboîtée, laquelle se termine par un élément de A. Donc tout se met bien.

Quoi qu'il en soit, nous posons

$$T_x(y)=y(d^k\exp)_x \tag{15.213}$$

et nous vérifions ce que cela donne dans la définition de la différentielle. Si nous avons

$$\lim_{h\to 0}\frac{(d^k\exp)_{x+h}-(d^k\exp)_x-T_x(h)}{\|h\|}=0 \tag{15.214}$$

alors nous aurons prouvé tout ce qu'il nous faut.

Le numérateur est une application $A\to\mathcal{L}(A,V)$; nous en écrivons la norme comme il se doit :

$$\|(d^k\exp)_{x+h}-(d^k\exp)_x-T_x(h)\|=\sup_{\|y\|=1}\|(d^k\exp)_{x+h}(y)-(d^k\exp)_x(y)-h(d^k\exp)_xy\| \tag{15.215a}$$
$$=\sup_{\|y\|=1}\|y(d^{k-1}\exp)_{x+h}-y(d^{k-1}\exp)_x-h(d^k\exp)_xy\| \tag{15.215b}$$
$$=\sup_{\|y\|=1}\|y(d^{k-1}\exp)_{x+h}-y(d^{k-1}\exp)_x-hy(d^{k-1}\exp)_x\| \tag{15.215c}$$
$$\leqslant\|(d^{k-1}\exp)_{x+h}-(d^{k-1}\exp)_x-h(d^{k-1}\exp)_x\| \tag{15.215d}$$
$$=\|(d^{k-1}\exp)_{x+h}-(d^{k-1}\exp)_x-(d^k\exp)_x(h)\|. \tag{15.215e}$$

Dans ce calcul nous avons utilisé le lemme 15.74 et $T_x(h)y=h(d^k\exp)_xy$. Maintenant, la limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|(d^{k-1}\exp)_{x+h}-(d^{k-1}\exp)_x-(d^k\exp)_x(h)\|.}{\|h\|} \tag{15.216}$$

n'est rien d'autre que la limite arrivant dans la définition du fait que $d^k\exp$ est la différentielle de $d^{k-1}\exp$. Cette limite est donc zéro comme nous voulions le prouver. □

Le théorème suivant est très important parce qu'il permet de définir l'exponentielle d'une matrice. Et les exponentielles de matrices sont utiles, entre très nombreuses autres choses pour résoudre certaines équations différentielles.

THOooFGTQooZPiVLO

Théorème-Définition 15.76 ([1]).
Soit une algèbre normée A (pas spécialement commutative). La formule

$$\exp(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \tag{15.217}$$

définit une fonction différentiable dont la différentielle est donnée par[34]

$$(d\exp)_x(y)=\sum_{i,j\in\mathbb{N}}\frac{x^iyx^j}{(i+j+1)!} \tag{15.218}$$

EQooFGPPooZKHeXU

15.77.
Nous ne démontrons pas cela ici.

Il s'agit d'une adaptation de la proposition 15.70. Là où il faut faire attention, c'est dans l'équation (15.194) : il n'y a pas k termes $x^{k-1}h$ dans $(x+h)^k$, mais k termes de la forme x^ihx. C'est pour cela que la différentielle n'est pas donnée par $T(y)=u_{k-1}(x)y$, mais bien par la somme (15.218).

M'est avis en réalité que toute la démonstration du théorème 15.170 passe facilement au cas présent.

[34] La fonction exponentielle est, j'en suis quasiment certain, de classe C^∞. Si vous connaissez un moyen pas trop douloureux de prouver cela, faites-le moi savoir.

15.5.3 Exponentielle de matrice

SECooBYQBooZifJsg

Proposition 15.78 ([547]).
Soient des matrices $A, P \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ telle que P soit inversible. Alors[35]

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^{A}P. \tag{15.219}$$

Démonstration. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$ nous avons $(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP$. Ensuite,

$$e^{P^{-1}AP} = \sum_k \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} = \sum_k \frac{P^{-1}A^kP}{k!} = P^{-1}\sum_k \frac{A^k}{k!}P. \tag{15.220}$$

Nous avons utilisé la proposition 10.163 pour sortir P^{-1} à gauche et P à droite de la somme. □

PROPooFLHPooRhLiZE

Proposition 15.79 ([547]).
L'exponentielle de matrice vérifie

ITEMooCVALooEfLQCyI

(1) $e^0 = \mathrm{Id}$

ITEMooNGPWooIyPEQt

(2) $A^m e^A = e^A A^m$

ITEMooEOSMooQWjcjA

(3) $\exp(A)^t = \exp(A^t)$

ITEMooROPJooMarenu

(4) Si $AB = BA$ alors $Ae^B = e^BA$ et $e^Ae^B = e^Be^A$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Juste substituer $A = 0$ dans la définition. Tous les termes tombent sauf le premier. Il faut utiliser le fait que $A^0 = \mathrm{Id}$.

(2) **Pour (2)** Il faut utiliser la proposition 10.163 pour écrire

$$A^m \sum_k \frac{A^k}{k!} = \sum_k \frac{A^mA^k}{k!} = \sum_k \frac{A^kA^m}{k!} = \sum_k \frac{A^k}{k!}A^m. \tag{15.221}$$

EQooLUUVooCtUtIC

(3) **Pour (3)** Pour chaque k nous avons l'égalité $(A^k)^t = (A^t)^k$. En utilisant encore le coup de la queue de suite qui converge vers zéro,

$$\| \sum_{k=0}^{N} \frac{(A^t)^k}{k!} - (e^A)^t \| = \| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(A^t)^k}{k!} \| \to 0. \tag{15.222}$$

(4) **Pour (4)** Pour prouver $Ae^B = e^BA$, c'est le même genre de manipulations que (15.221).

Maintenant, vu que A et e^B commutent, l'égalité à peine prouvée montre que e^A et e^B commutent.

□

PROPooKDKDooCUpGzE

Proposition 15.80 ([547]).
Soient $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ ainsi que $s, t \in \mathbb{C}$. Alors

$$e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}. \tag{15.223}$$

Démonstration. Nous calculons le produit $e^{sA}e^{tA}$ par le produit de Cauchy de la proposition 10.164 :

$$\clubsuit = \left(\sum_k \frac{t^k}{k!}A^k \right) \left(\sum_l \frac{s^l}{l!}A^l \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{m!} \frac{s^{n-m}}{(n-m)!}A^n. \tag{15.224}$$

À ce point, nous multiplions et divisons par $n!$ et nous réarrangeons la somme de la façon suivante :

$$\clubsuit = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}t^m s^{n-m}. \tag{15.225}$$

Nous reconnaissons la somme sur m comme étant un binôme de Newton[36] pour $(t+s)^n$. Nous avons donc finalement

$$\clubsuit = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big((t+s)A\big)^n}{n!} = e^{(t+s)A}. \tag{15.226}$$

□

[35] La définition de l'exponentielle de matrice est 15.70 où la convergence de la somme est celle de la norme opérateur 10.67.
[36] Proposition 1.387.

La proposition suivante dit que les exponentielles de matrices sont inversibles. Elle ne dit pas que toutes les matrices inversibles sont des exponentielles. Ce sera la proposition 15.150.

PROPooRERRooMutKcg

Proposition 15.81 ([547]).
Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$, alors e^A est inversible et

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}. \tag{15.227}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $s = 1$ et $t = -1$ dans la proposition 15.80 et nous avons

$$e^A e^{-A} = e^0 = \mathbb{1}. \tag{15.228}$$

Cela prouve que e^A est inversible et que son inverse est e^{-A}. □

PROPooSDNNooQtHkhA

Proposition 15.82 ([547, 1]).
Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{C})\\ t &\mapsto e^{tA}.\end{aligned} \tag{15.229}$$

Nous avons la formule de dérivation

$$\varphi'(t) = Ae^{tA}. \tag{15.230}$$

Démonstration. L'application φ est une fonction composée de

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})\\ t &\mapsto tA\end{aligned} \tag{15.231}$$

et

$$\begin{aligned}\exp\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})\\ A &\mapsto e^A.\end{aligned} \tag{15.232}$$

Et nous avons $\varphi = \exp \circ f$. Il y a un choix difficile à faire. Soit nous travaillons dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et nous allons devoir invoquer le théorème 15.76, soit nous travaillons dans l'algèbre $\mathrm{Alg}(A)$ engendrée par A (définition 15.67) qui est une algèbre commutative[37] qui nous permet de n'utiliser que 15.188, qui est quand même plus basique.

Coup de théâtre, nous prenons la seconde solution et nous réécrivons les fonctions f et exp de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathrm{Alg}(A)\\ t &\mapsto e^{tA}\end{aligned} \tag{15.233}$$

se décompose en

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R} &\to \mathrm{Alg}(A)\\ t &\mapsto tA\end{aligned} \tag{15.234}$$

et

$$\begin{aligned}\exp\colon \mathrm{Alg}(A) &\to \mathrm{Alg}(A)\\ A &\mapsto \exp(A).\end{aligned} \tag{15.235}$$

Le fait que ces applications soient bien définies est le lemme 15.72 qui assure que les espaces d'arrivée sont bien dans $\mathrm{Alg}(A)$. Et c'est parti pour le calcul :

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= d\varphi_u(1) && \text{SUBEQooFDPQooBzTDXF (15.236a)}\\ &= d\exp_{f(u)}\big(df_u(1)\big) && \text{SUBEQooVOFWooDoTQGy (15.236b)}\\ &= \exp\big(f(u)\big)df_u(1) && \text{SUBEQooCILLooHsFDQE (15.236c)}\\ &= e^{uA}A && \text{SUBEQooBMAQooNtbzBI (15.236d)}\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour 15.236a. Pour la dérivée, nous utilisons le corolaire 12.278.
- Pour 15.236b. La règle de la différentielle en chaine du théorème 10.316.
- Pour 15.236c. La formule (15.188).

[37] Corolaire 15.69.

- Pour 15.236d. Parce que $f(u) = uA$ et que $df_u(1) = A$.

□

Le théorème suivant montre que le produit d'exponentielle de matrices suit la règle usuelle tant que les matrices commutent. Cela est cependant plutôt l'exception que la règle. À priori nous avons $e^A e^B \neq e^{A+B}$.

THOooXCPEooYGyLOp

Théorème 15.83 ([547]).
Soient $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Alors

$$e^{A+B} = e^A e^B. \tag{15.237}$$

Démonstration. Vu que A et B commutent nous avons $Ae^{tB} = e^{tB}A$ (proposition 15.79(4)). Ensuite nous posons

$$g(t) = e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA}. \tag{15.238}$$

Nous calculons la dérivée de g en utilisant la règle de Leibniz et la proposition 15.82 :

$$\begin{aligned} g'(t) = &(A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} \\ &+ e^{t(A+B)}(-B)e^{-tB}e^{-tA} \\ &+ e^{t(A+B)}e^{-tB}(-A)e^{-tA}. \end{aligned} \tag{15.239}$$

Vu que A, B et $A+B$ commutent, nous pouvons réarranger les facteurs en

$$\begin{aligned} g'(t) = &(A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} \\ &- Be^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} \\ &- Ae^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA}. \end{aligned} \tag{15.240}$$

Enfin, cela fait

$$g'(t) = (A + B - B - A)e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} = 0. \tag{15.241}$$

Donc g est constante et nous avons

$$e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} = g(0) = \mathbb{1}. \tag{15.242}$$

En multipliant à droite par $e^{tA}e^{tB}$ nous trouvons

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \tag{15.243}$$

comme annoncé. □

NORMooMYHYooEKbUlP

15.84.
Pour tout anneau normé A où cela a un sens, nous définissons

$$\begin{aligned} \phi\colon A &\to A \\ a &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}a^k \end{aligned} \tag{15.244}$$

PROPooCVIAooTovqVg

Proposition 15.85 ([1]).
À propos de la fonction ϕ[38].

ITEMooKNRIooJxHXDq

(1) Si $r \in \mathbb{R}^+$, alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}r^k \tag{15.245}$$

converge.

ITEMooUYJVooMYnesX

(2) Dans le cas de $A = \mathbb{C}$, nous avons

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}z^k = \frac{1 - e^{-z}}{z}. \tag{15.246}$$

Démonstration. Pour (1), c'est le critère des séries alternées 10.176 qui marche parce que $r^k/k! \to 0$.

Pour (2) … Si vous avez une idée, écrivez-moi. □

[38] De 15.84.

15.6 Exponentielle et logarithme dans les réels

Pour avoir une vue synthétique du plan, voir le thème 50.

15.6.1 L'équation différentielle

Pour la suite nous notons y une solution de l'équation $y' = y$, $y(0) = 1$, et nous allons en donner des propriétés indépendamment de l'existence, donnée par le théorème 15.88.

PropTLECooEiLbPP

Proposition 15.86.
Quelques propriétés de y (si elle existe) :

(1) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $y(x)y(-x) = 1$.*

(2) *$y(x) > 0$ pour tout x.*

(3) *y est strictement croissante.*

Démonstration. Nous posons $\varphi(x) = y(x)y(-x)$ et nous dérivons :

$$\varphi'(x) = y'(x)y(-x) - y(x)y'(-x) = 0. \tag{15.247}$$

Donc φ est constante[39]. Vu que $\varphi(0) = 1$ nous avons automatiquement $y(x)y(-x) = 1$ pour tout x.

Les deux autres allégations sont simples : si $y(x_0) < 0$ alors il existe $t \in]0, x_0[$ tel que $y(t) = 0$, ce qui est impossible parce que $y(t)y(-t) = 1$. La stricte croissance de y s'ensuit. □

PROPooGGUIooExVHPM

Proposition 15.87.
Quelques formules pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

ITEMooMPSUooWQpVQJ

(1) $y(a + b) = y(a)y(b)$

(2) $y(na) = y(a)^n$

(3) $y\left(\frac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{y(a)}$.

Démonstration. Nous posons $h(x) = y(a + b - x)y(x)$ et nous avons encore $h'(x) = 0$ dont nous déduisons que h est constante. De plus

$$h(0) = y(a + b)y(0) = y(a + b) \tag{15.248}$$

et

$$h(b) = y(a)y(b). \tag{15.249}$$

Vu que h est constante, ces deux expressions sont égales : $y(a + b) = y(a)y(b)$.

Forts de cette relation, une récurrence donne $y(na) = y(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus

$$y(a) = y\left(\frac{a}{n} \times n\right) = y\left(\frac{a}{n}\right)^n, \tag{15.250}$$

ce qui donne $y(a) = y(a/n)^n$ ou encore $y(a/n) = \sqrt[n]{y(a)}$.

Enfin pour les négatifs, si $n \in \mathbb{N}$,

$$y(-na) = \frac{1}{y(na)} = \frac{1}{y(a)^n} = y(a)^{-n}. \tag{15.251}$$

Et de la même façon,

$$y\left(-\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{y\left(\frac{a}{n}\right)} = \sqrt[n]{\frac{1}{y(a)}} = \sqrt[-n]{y(a)}. \tag{15.252}$$

□

[39] Proposition 12.209.

15.6.2 Existence

Jusqu'ici nous avons donné des propriétés d'une éventuelle fonction y qui vérifierait l'équation différentielle. Il est temps de montrer qu'une telle fonction existe.

ThoKRYAooAcnTut

Théorème 15.88.
La série entière

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{15.253}$$

EqEIGZooKWSvPS

définit une fonction dérivable solution de

$$\begin{cases} y' = y & \text{(15.254a)} \\ y(0) = 1. & \text{(15.254b)} \end{cases}$$

EQooSEIHooNmQKiC

Démonstration. La formule de Hadamard (théorème 15.39) donne le rayon de convergence de la série (15.253) par

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0. \tag{15.255}$$

Donc nous avons un rayon de convergence infini. La fonction y est définie sur $\mathbb{R}$ et la proposition 15.50 nous dit que y est dérivable. Nous pouvons aussi dériver terme à terme :

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = y(x). \tag{15.256}$$

Notez le petit jeu d'indice de départ de k. Dans un premier temps, nous remarquons que $k = 0$ donne un terme nul et nous le supprimons, et dans un second temps nous effectuons la simplification des factorielles (qui ne fonctionne pas avec $k = 0$). □

15.89.
Nous savons que la fonction y existe parce qu'une solution de l'équation différentielle $y' = y$, $y(0) = 1$ est donnée par la fameuse série (théorème 15.88). À part cela, ce qui a été fait avec cette équation différentielle ne permet pas de prouver l'existence de y. Donc, du point de vue de « définir l'exponentielle par son équation différentielle », c'est pas encore gagné. Notons au passage que le nombre e n'est pas encore bien défini via l'équation différentielle.

15.6.3 Le nombre de Neper e

Nous savons par le théorème 15.88 que $x \mapsto \exp(x)$ est une solution de l'équation différentielle exponentielle (avec la bonne condition initiale). Or une telle solution est unique par la proposition 12.456.

Définition 15.90 (Le nombre de Neper)**.**
Nous notons e le nombre $\exp(1)$.

PropCELWooLBSYmS

Proposition 15.91.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\exp(x) = e^x. \tag{15.257}$$

EQooBFIHooKopcmf

Démonstration. Soit y vérifiant la fameuse équation différentielle. Nous savons que $y = \exp$ parce que c'est l'unique solution (proposition 12.456). Nous avons :

$$y(x) = y(1)^x. \tag{15.258}$$

Si $q \in \mathbb{Q}$ alors $q = a/b$ et

$$y(q) = y\left(\frac{a}{b}\right) = y\left(a \times \frac{1}{b}\right) = y\left(\frac{1}{b}\right)^a = \left(\sqrt[b]{y(1)}\right)^a = y(1)^{a/b} = y(1)^q. \tag{15.259}$$

Le résultat est prouvé pour les rationnels.

En ce qui concerne un élément général $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto y(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto e^x$ également (proposition 12.421). Ces deux fonctions étant égales sur $\mathbb{Q}$, elles sont égales sur $\mathbb{R}$ par la proposition 7.158). □

PROPooIKJBooLOipUM

Proposition 15.92.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = \lambda y & \text{(15.260a)} \\ y(0) = 1 & \text{(15.260b)} \end{cases}$$

a une unique solution donnée par

$$y(t) = \exp(\lambda t) = e^{\lambda t} \tag{15.261}$$

Une conséquence des propositions 15.91 et 12.416 est que EqLOIUooHxnEDn

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \tag{15.262a}$$
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \tag{15.262b}$$

et en particulier,

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to]0, \infty[\\ x &\mapsto e^x \end{aligned} \tag{15.263}$$

est une bijection.

LEMooXFAXooLVbebl

Lemme 15.93.
Nous avons l'encadrement $2.5 < e < 2.8$.

Démonstration. Vu que tous les termes de la série exponentielle sont strictement positifs, nous avons

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} > \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 2.5. \tag{15.264}$$

Pour la majoration, nous notons que $k! > 2^k$ à partir de $k = 4$. Donc nous gardons les termes $k = 0, 1, 2, 3$ sous la forme $1/k!$ et nous remplaçons les autres par $1/2^n$:

$$e < \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \tag{15.265}$$

Nous pouvons calculer explicitement la somme en utilisant la série géométrique de la proposition 10.172(3) :

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{8}. \tag{15.266}$$

En remettant tout ensemble,

$$e < 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} < 2.8. \tag{15.267}$$

□

PROPooFRKUooZyhHIC

Proposition 15.94 ([548])**.**
Le nombre e est irrationnel.

Démonstration. En vertu de la proposition 15.91, nous avons $e^x = \exp(x)$ pour tout réel x. En particulier pour $x = 1$,

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{15.268}$$

Supposons que $e = p/q$ pour certains $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 0$ (notez que ça signifie $q \geqslant 1$).

Nous avons

$$q!e = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}. \tag{15.269}$$

Dans le membre de gauche,

$$q!e = q!\frac{p}{q} = (q-1)!p \in \mathbb{N}. \tag{15.270}$$

Dans la première somme du membre de droite, vu que $q \geqslant k$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}. \tag{15.271}$$

Nous devons donc avoir $\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$. Nous allons maintenant prouver que ce n'est pas le cas. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q!}{(q+k)!} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{l=q+1}^{q+k} l} && \text{(15.272a)}\\
&= \frac{1}{q+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\prod_{l=q+1}^{q+k} l} && \text{(15.272b)}\\
&= \frac{1}{q+1}\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\prod_{l=q+2}^{q+k} l}\right] && \text{(15.272c)}\\
&< \frac{1}{q+1}\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{(q+k)-(q+2)+1}}\right] && \text{(15.272d)}\\
&= \frac{1}{q+1}\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{k-1}}\right] && \text{(15.272e)}\\
&= \frac{1}{q+1}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{k}}\right] && \text{(15.272f)}\\
&= \frac{1}{q+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{k}}. && \text{(15.272g)}
\end{aligned}$$

C'est le moment d'utiliser la série géométrique de la proposition 10.172(2). Vu que $q \geqslant 1$ nous avons $1/(q+1) < 1$ et la somme fonctionne :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q!}{(q+k)!} < \frac{1}{q+1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}\right) = \frac{1}{q}. \tag{15.273}$$

Nous avons donc

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q!}{(q+k)!} < \frac{1}{q} < 1. \tag{15.274}$$

Donc ce terme n'est pas un nombre entier, ce que nous avions énoncé. □

15.6.4 Application réciproque : logarithme

DEFooELGOooGiZQjt

Proposition-Définition 15.95.
L'application $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ *est une bijection. L'application réciproque*

$$\ln\colon]0,\infty[\to \mathbb{R} \tag{15.275}$$

est le ***logarithme****.*

Démonstration. Le fonction exponentielle est dérivable, toujours strictement positive, donc strictement croissante. Les limites en $\pm\infty$ sont 0 et $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 nous dit que c'est une bijection. En effet, l'injectivité est la stricte croissance. En ce qui concerne la surjection, soit $y \in]0,\infty[$. Vu que la limite en $-\infty$ est zéro, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) < y$ pour tout $x < A$, et de la même façon, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) > y$ pour tout $x > B$. Si $a < A$ et $b > B$ alors $\exp(a) < y$ et $\exp(b) > y$, donc y est dans l'image de $[a,b]$ par l'exponentielle. □

LEMooCYGTooEjXEUu

Lemme 15.96 ([1])**.**
Le logarithme est une fonction continue.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de la bijection 12.53(4), et de la continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, qui est une partie du théorème 15.88. □

PROPooPDJLooXphpEM

Proposition 15.97 (Dérivée du logarithme)**.**
Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ nous avons

$$\ln'(s) = \frac{1}{s}. \tag{15.276}$$

Démonstration. L'application $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ est une bijection continue dérivable[40]. La proposition 12.202 s'applique donc et pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\ln'\big(\exp(x)\big) = \frac{1}{\exp'(x)}. \tag{15.277}$$

Le théorème 15.88 nous indique que $\exp'(x) = \exp(x)$. Donc pour tout x nous avons $\ln'\big(\exp(x)\big) = \frac{1}{\exp(x)}$. Vu que x est arbitraire et que exp est surjective sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $s \in]0,\infty[$ nous avons

$$\ln'(s) = \frac{1}{s}. \tag{15.278}$$

□

PROPooLAOWooEYvXmI

Proposition 15.98 ([1])**.**
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour $a > 0$ nous avons

$$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x), \tag{15.279}$$

et

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \tag{15.280}$$

EQooJVMUooVpUKyo

et

$$\ln(a^x) = x\ln(a) \tag{15.281}$$

EQooEJQSooWCczXy

et

$$a^x = e^{x\ln(a)}. \tag{15.282}$$

Démonstration. Nous avons, par la proposition 12.422,

$$e^{-\ln(x)} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}. \tag{15.283}$$

En prenant le logarithme des deux côtés nous trouvons

$$-\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right). \tag{15.284}$$

Nous pouvons continuer avec la suivante.

Par définition, $\ln(xy)$ est donné par $\exp\big(\ln(xy)\big) = xy$. Mais nous avons aussi, par la proposition 12.422 :

$$e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} = xy. \tag{15.285}$$

Nous avons donc démontré (15.280).

La relation (15.281) de démontre d'abord pour $x \in \mathbb{N}$, puis pour $x \in \mathbb{Q}$ et enfin pour $x \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$ alors la relation (15.280) donne immédiatement

$$\ln(a^n) = n\ln(a). \tag{15.286}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Si $m, n \in \mathbb{N}$, le nombre $a^{n/m}$ est par définition le $x > 0$ tel que

$$x^m = a^n. \tag{15.287}$$

En prenant le logarithme des deux côtés : $\ln(x^m) = \ln(a^n)$ et en utilisant la relation déjà démontrée pour $\mathbb{N}$ nous trouvons $m\ln(x) = n\ln(a)$ et donc

$$\ln(a^{m/n}) = \ln(x) = \frac{m}{n}\ln(a). \tag{15.288}$$

[40] Dérivable (et donc continue) par le théorème 15.88. Bijection par la proposition 15.95.

La relation est donc démontré pour $\ln(a^q)$ avec $q \in \mathbb{Q}^+$.

Nous passons à $q = -m/n \in \mathbb{Q}^-$, c'est-à-dire toujours $m, n \in \mathbb{N}$. Nous avons, en utilisant la proposition 15.98,

$$\ln(a^{-q}) = \ln(\frac{1}{a^q}) = -\ln(a^q) = -q\ln(a). \tag{15.289}$$

Enfin si $x \in \mathbb{R}$ nous considérons une suite de rationnels $x_k \to x$. Pour chaque k nous avons

$$\ln(a^{x_k}) = x_k \ln(a). \tag{15.290}$$

Nous prenons la limite des deux côtés. À droite nous avons tout de suite $x\ln(a)$, et à gauche, par continuité de la fonction ln (lemme 15.96) et de la fonction puissance (définition 12.421) nous trouvons $\ln(a^x)$. □

LemPEYJooEZlueU

Lemme 15.99.
Si $a, b \in]0, \infty[$ alors

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \tag{15.291}$$

et

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b). \tag{15.292}$$

EqOOZGooQWkGlA

Démonstration. Nous posons $f(x) = \ln(ax)$ qui est une fonction dérivable[41]. Alors $f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$. Cette fonction f est donc une primitive de $\frac{1}{x}$ et il existe une constante K telle que

$$f(x) = \ln(x) + K. \tag{15.293}$$

Vu que $\ln(1) = 0$ nous avons $K = f(1) = \ln(a)$. Donc

$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a). \tag{15.294}$$

En ce qui concerne la seconde formule à démontrer, nous avons

$$\ln(1) = \ln\left(\frac{1}{b}b\right) = \ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b). \tag{15.295}$$

Étant donné que $\ln(1) = 0$ nous en déduisons la formule (15.292). □

15.100.
La formule (15.281) en particulier est pratique pour réexprimer des fonctions puissances compliquées en écrivant

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}. \tag{15.296}$$

EQooYEWCooKyravP

Cela aide à calculer la dérivée de $x \mapsto a^x$.

Notons que certains prennent (15.296) comme définition de la fonction puissance.

15.6.5 Approximations numériques de e

Nous donnons maintenant quelques approximations numériques de e, particulièrement inefficaces.

Lemme 15.101.
Nous avons

$$2 < e < 3. \tag{15.297}$$

Démonstration. Nous savons que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. La fonction y est strictement croissante (et donc sa dérivée aussi). Nous avons donc $y'(x) > 1$ pour tout $x \in]0, 1]$, et donc

$$y(1) > 1 + 1 \times 1 = 2. \tag{15.298}$$

Sachant que $2 > y'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$ nous pouvons refaire le coup de l'approximation affine, cette fois en majorant :

$$y(1) < 1 + 2 \times 1 = 3. \tag{15.299}$$

□

[41] Dérivée du logarithme, proposition 15.97.

De la même façon nous savons que

$$y(\frac{1}{n}) > 1 + \frac{1}{n} \tag{15.300}$$

parce que y' est minoré par 1 sur $]0, \frac{1}{n}[$. Avec cela nous avons aussi la majoration

$$y(\frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{n} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}. \tag{15.301}$$

Et enfin nous pouvons donner l'encadrement, valable pour tout n :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < y(1) < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n. \tag{15.302}$$

Pour $n = 10$ nous trouvons

$$2.50 < e < 2.83. \tag{15.303}$$

Bien que ce soit à mon avis humainement pas possible à faire à la main nous avons, pour $n = 100$:

$$2.70 < e < 2.7317 \tag{15.304}$$

Cela reste un encadrement très modeste.

Une méthode plus efficace consiste à calculer directement le développement de définition

$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{15.305}$$

```sage
def u(k):
    """
    return the kth term in the expansion of 'e'
    """
    return 1/factorial(k)

def sum_u(n):
    """
    return the sum of the 'n' first terms, that is with
    k froim 0 to n-1.
    """
    L=[  u(k) for k in range(0,n)  ]
    return sum(L)

s = sum_u(5)         # This is a fraction
print(s)
print( numerical_approx(s)  )
```

tex/sage/sageSnip013.sage

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 15.102
Comment trouver, avec cette méthode, un encadrement pour e ?

Ce petit programme, avec 5 termes donne $e \simeq 65/24 \simeq 2.708$. Avouez que c'est déjà bien mieux.

15.6.6 Résumé des propriétés de l'exponentielle

ThoRWOZooYJOGgR

Théorème 15.103.
Les choses que nous savons sur l'exponentielle :

ITEMooEIKKooLNoaRD

(1) Il y a unicité de la solution à l'équation différentielle [subeqBKJNooJQtbBD]

$$\begin{cases} y' = y & \text{(15.306a)} \\ y(0) = 1. & \text{(15.306b)} \end{cases}$$

(2) *L'équation différentielle* (15.306) *possède une solution donnée par la série entière*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{15.307}$$

EqUARSooKXnQxu

(3) *Cette solution est une bijection* $y\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$.

ItemYTLTooSnfhOu

(4) *La fonction* y *ainsi définie est de classe* C^∞.

(5) *Elle est également donnée par la formule*

$$\exp(x) = e^x \tag{15.308}$$

où e *est défini par* $e = \exp(1)$.

(6) *Elle vérifie*

$$e^{a+b} = e^a e^b \tag{15.309}$$

EQooVFXUooBfwjJY

Nous nommons **exponentielle** cette fonction.

Démonstration. Point par point.

(1) C'est la proposition 12.456.

(2) C'est le théorème 15.88.

(3) Le rayon de convergence de la série (15.307) est infini (théorème 15.88) ; elle est donc définie sur $\mathbb{R}$. Le fait que ce soit une bijection est dû au fait qu'elle est strictement croissante (proposition 15.86) ainsi qu'aux limites (15.262).

(4) Vu que $y = y'$, y est dérivable. Mais comme y' est alors égale à une fonction dérivable, y' est dérivable. En dérivant l'égalité $y' = y$ nous obtenons $y'' = y'$ et le jeu continue.

(5) C'est la proposition 15.91.

(6) C'est la proposition 15.87(1).

□

ExooLRHCooMYLQTU

Exemple 15.104 (Un endomorphisme sans polynôme annulateur[323])**.**
l'exponentielle permet de donner un exemple d'un endomorphisme n'ayant pas de polynôme annulateur[42] : l'endomorphisme de dérivation

$$\begin{aligned} D\colon C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned} \tag{15.310}$$

n'a pas de polynôme annulateur. En effet supposons que $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ en soit un, et considérons les fonctions $f_\lambda\colon t \mapsto e^{\lambda t}$. Nous avons

$$0 = P(D)f_\lambda = \sum_k a_k D^k(f_\lambda) = \sum_k a_k \lambda^k f_\lambda = P(\lambda) f_\lambda. \tag{15.311}$$

Par conséquent λ est une racine de P pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Cela implique que $P = 0$.

D'ailleurs si on y pense bien, cet exemple n'est qu'un habillage de l'exemple 8.97. △

ExZLMooMzYqfK

Proposition 15.105.
Quelques propriétés du logarithme.

(1) *Le logarithme est une application dérivable et strictement croissante.*

(2) *Le logarithme est la primitive de* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *qui s'annule en* $x = 1$.

[42] En dimension finie, le lemme 8.94 dit qu'il y en a toujours un.

Démonstration. Elle est donc bijective, d'inverse continue et dérivable par le théorème 12.53 et la proposition 12.202.

La dérivée de la fonction logarithme peut être calculée en utilisant la formule (12.529), mais aussi de façon plus piettone en écrivant l'expression suivante, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln\big(\exp(x)\big) = x, \tag{15.312}$$

que nous pouvons dériver en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\ln'\big(\exp(x)\big)\exp'(x) = 1. \tag{15.313}$$

Mais $\exp'(x) = \exp(x)$, donc

$$\ln'(y) = \frac{1}{y} \tag{15.314}$$

pour tout y dans l'image de exp, c'est-à-dire pour tout y dans l'ensemble de définition de ln.

Par ailleurs, $\exp(0) = 1$ donc

$$\ln(1) = \ln\big(\exp(0)\big) = 0. \tag{15.315}$$

En ce qui concerne l'unicité d'une primitive s'annulant en $x = 1$, c'est le corolaire 12.224. □

15.6.7 Dérivée de la fonction puissance

EXooGMRIooUucRez

Exemple 15.106.
Soit la fonction $f(x, y) = x^y$, définie en 12.421. Nous allons en calculer les dérivées partielles au point $(1, 2)$. Notons que f n'est pas définie pour $x < 0$, mais que cela n'a pas d'importance parce que nous pouvons nous restreindre à un voisinage du point $(1, 2)$. La première dérivée partielle est facile :

$$\partial_x f(1, 2) = (yx^{y-1})_{(x,y)=(1,2)} = 2.$$

Pour la seconde, il faut utiliser les propriétés de l'exponentielle et du logarithme. D'abord le logarithme est par définition l'application réciproque de l'exponentielle (définition 15.95), donc

$$x^y = \exp\big(\ln(x^y)\big). \tag{15.316}$$

Ensuite nous calculons en utilisant la proposition 15.98 :

$$\partial_y f(1, 2) = \partial_y \left(e^{y \ln x}\right)_{(x,y)=(1,2)} = \left(\ln x e^{y \ln x}\right)_{(x,y)=(1,2)} = \ln(1)e^{2\ln(1)}. \tag{15.317}$$

△

Cet exemple est facilement généralisable aux fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$. Voici une proposition qui dit comment faire.

PROPooKUULooKSEULJ

Proposition 15.107 ([1]).
Soit une fonction dérivable $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a > 0$. Nous avons

$$(a^u)' = u' \ln(a) a^u. \tag{15.318}$$

Si de plus $u(x) > 0$ pour tout x, nous avons

$$(u^a)' = au'u^{a-1}. \tag{15.319}$$

Démonstration. Nous considérons la fonction $f(x) = a^{u(x)}$. Vu que $f(x) > 0$ pour tout x, nous pouvons en prendre le logarithme et écrire l'égalité, valable pour tout x :

$$f(x) = e^{\ln(a^{u(x)})} = \exp\big(u(x)\ln(a)\big). \tag{15.320}$$

Sachant la dérivée de l'exponentielle, cela n'est rien d'autre que la dérivée d'une fonction composée :

$$f'(x) = \ln(a)u'(x)e^{u(x)\ln(a)}. \tag{15.321}$$

Pour l'autre, nous posons

$$g(x) = u(x)^a, \tag{15.322}$$

qui peut encore s'écrire sous la forme

$$g(x) = e^{a \ln\left(u(x)\right)}. \tag{15.323}$$

Ici encore, c'est la dérivée de fonctions composées qui donne le résultat. □

15.6.8 Dérivée du logarithme

LEMooTGCBooJdkLpg

Lemme 15.108.
Si $u\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ *est dérivable alors* $\ln(u)' = \frac{u'}{u}$.

Démonstration. Cela est une conséquence du théorème de dérivation des fonctions composées : si $g(x) = \ln(u(x))$ alors

$$g'(x) = \ln'\big(u(x)\big)u'(x) = \frac{1}{u(x)}u'(x). \tag{15.324}$$

□

15.6.9 Taylor pour l'exponentielle

PROPooQBRGooAhGrvP

Proposition 15.109 (Développement de l'exponentielle)**.**
Pour tout entier n*, il existe une fonction* $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{t\to 0}\alpha(t) = 0$ *et*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + x^n\alpha(x). \tag{15.325}$$

Démonstration. Il s'agit de la proposition 15.61 appliquée à la série entière (15.70). □

15.6.10 Analycité

Vu que $\exp(x)$ est défini par une série entière (définition 15.70) et vu la proposition 15.64, il n'est pas étonnant que exp soit analytique. Traitons ce cas.

Exemple 15.110 (Analycité de l'exponentielle)**.**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. Nous démontrons que exp est analytique sur $B(a,R)$. Si $f(x) = e^x$, alors $f^{(n)}(x) = e^x$ pour tout n (équation (15.254a)). Nous avons donc

$$|f^{(n)}(x)| < e^{a+R} \tag{15.326}$$

pour tout $x \in B(a,R)$. Nous partons de l'expression (15.63) du reste :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leqslant \frac{e^{a+R}}{(n+1)!}R^{n+1}. \tag{15.327}$$

Mais nous avons la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \tag{15.328}$$

pour tout R.

Donc avec les polynômes de Taylor P_n calculés en a, nous avons $P_n \to \exp$ simplement sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons donc développer la fonction exponentielle autour de n'importe quel point, et avoir convergence des polynômes vers l'exponentielle sur tout $\mathbb{R}$. Vous accepterez cependant que si a et x sont éloignés, la convergence $P_n(x) \to \exp(x)$ peut être extrêmement lente. △

15.6.11 Autres propriétés et petits calculs

Lemme 15.111.
Si les suites (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes*[43] *et si* (v_n) *admet une limite* l *différente de* 1*, alors les suites* $(\ln u_n)$ *et* $(\ln v_n)$ *sont équivalentes.*

Démonstration. En effet si $u_n = v_n\alpha(n)$ alors en utilisant la formule du lemme 15.99,

$$\ln(u_n) = \ln(v_n) + \ln\big(\alpha(n)\big) = \ln(v_n)\left(1 + \frac{\ln\big(\alpha(n)\big)}{\ln(v_n)}\right), \tag{15.329}$$

et comme $\alpha(n) \to 1$, la parenthèse tend vers 1. □

[43] Définition 9.33.

15.6.12 Taylor pour le logarithme

Vu que $\ln(0)$ n'existe pas, il n'est pas question de développer ln autour de $x = 0$. À la place, nous allons le développer autour de $x = 1$ et plus précisément nous allons étudier Taylor pour la fonction $f(x) = \ln(1+x)$. Les résultats seront résumés dans la proposition 15.114.

PROPooWCUEooJudkCV

Proposition 15.112 ([1]).
Soit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon]-1,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x). \end{aligned} \tag{15.330}$$

Pour tout n, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \alpha(x)x^n \tag{15.331}$$

pour tout x dans le domaine de f.

Notez la somme qui part de $k = 1$ et non $k = 0$.

Démonstration. Nous utilisons la formule de Taylor-Young (proposition 12.487). La première dérivée de f se calcule en utilisant le lemme 15.108 :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}. \tag{15.332}$$

Pour les dérivées suivantes, c'est juste du calcul et nous pouvons prouver par récurrence que

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!(-1)^{k+1}}{(1+x)^k}. \tag{15.333}$$

EQooKEAOooGmTLJF

En ce qui concerne l'évaluation en zéro :

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ (k-1)!(-1)^{k+1} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.334}$$

Du fait que $f^{(0)}(0) = \ln(1) = 0$, la somme commence à $k = 1$ et non $k = 0$. Nous avons

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \alpha(x)x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \alpha(x)x^n. \tag{15.335}$$

□

Nous étudions les polynômes de la série de Taylor pour

$$\begin{aligned} f\colon]-1,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x). \end{aligned} \tag{15.336}$$

Les dérivées successives de f ont déjà été calculées en (15.333). Nous développons autour de $x = 0$. Donc $f(0) = \ln(1) = 0$ et pour les autres,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!. \tag{15.337}$$

Pour les polynômes de Taylor, nous avons

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{15.338}$$

où vous noterez la somme qui part de $k = 1$ et non de $k = 0$. Nous avons aussi la série de Taylor de f donnée par

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k. \tag{15.339}$$

EQooTAREooKfpTPo

La somme est une limite ponctuelle, là où elle existe.

Jusqu'à présent, la seule certitude à props de T est que $T(0) = f(0) = 0$. Pour le reste :

- Rien ne dit que $T(x)$ existe pour d'autres x que $x = 1$.

- Et même si $T(x)$ existait pour d'autres x (c'est-à-dire si le rayon de convergence de (15.339) était strictement plus grand que zéro), rien n'assurerait que la valeur serait celle de f.
- Et même si $T(x)$ convergeait vers f sur son disque de convergence, ce ne serait pas encore assez pour dire que f est analytique, parce que l'analycité demande que les séries de Taylor autour de *chaque* point converge vers f. Or ici nous ne parlons encore que de T qui est la série autour de $x = 0$.

LEMooWMGGooRpAxBa

Lemme 15.113.
La série de Taylor de $x \mapsto \ln(1+x)$ autour de $x = 0$ converge sur $]-1, 1]$. Elle ne converge pas pour $x = -1$.

Démonstration. En ce qui concerne le rayon de convergence de T, nous utilisons la formule de Hadamard[44] avec

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \tag{15.340}$$

Ce que nous trouvons est

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1. \tag{15.341}$$

Le rayon de convergence de T est donc 1. Nous avons donc que $P_n \to T$ sur $]-1, 1[$, et peut-être que $P_n \to T$ en $x = \pm 1$.

Pour $x = -1$. L'intuition nous dit que ce serait $\ln(0)$ qui n'est pas défini. C'est le cas parce que

$$P_n(-1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{15.342}$$

La limite $n \to \infty$ diverge. Donc T n'est pas définie en $x = -1$.

Pour $x = 1$ par contre,

$$P_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \tag{15.343}$$

Le critère des séries alternées[45] nous donne la convergence de cette série. □

Nous savons maintenant que la série de Taylor T converge sur $]-1, 1]$, et que $T(0) = f(0) = \ln(1) = 0$. Le premier gros morceau intéressant vient maintenant : nous allons prouver que $T(x)$ converge vers ce que nous croyons, c'est-à-dire $\ln(1 + x)$ en personne.

PROPooKPBIooJdNsqX

Proposition 15.114.
Pour tout $x \in]-1, 1]$ nous avons

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{15.344}$$

EqweEZnV

De plus nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2). \tag{15.345}$$

EqKUQmQZ

Démonstration. Il s'agit d'utiliser l'expression du reste fourni par le théorème 12.474. Pour tout $x \in]-1, \infty[$, il existe un $c \in]0, x[$ (le c dépend de x) tel que

$$P_n(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}. \tag{15.346}$$

Cela est parce que f est de classe C^∞. Calculons un peu :

$$P_n(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{15.347a}$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{15.347b}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+c}\right)^{n+1}. \tag{15.347c}$$

[44] Théorème 15.39.
[45] Théorème 10.176.

Lorsque $x > 1$, il n'y a aucune garantie sur la convergence de cela pour $n \to \infty$. Pour rappel, $c \in]0, x[$. Si par contre $x \in]-1, 1[$, alors nous savons que

$$\left| \frac{x}{1+c} \right| < 1, \tag{15.348}$$

et donc convergence $P_n(x) - f(x) \to 0$.

Jusqu'ici nous avons prouvé que pour la série de Taylor converge vers $\ln(1+x)$ pour $x \in]-1, 1[$. Nous avons également vu que la série converge pour $x = 1$. Donc la fonction

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{15.349}$$

est continue sur $]-1, 1]$ et égale à $\ln(x+1)$ sur $]-1, 1[$. Vu que $f : x \mapsto \ln(x+1)$ est continue sur $]-1, \infty[$, nous avons également $g(1) = f(1) = \ln(2)$.

Ceci nous mène au dernier point de notre proposition : $g(1) = \ln(2)$ s'écrit précisément

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2). \tag{15.350}$$

□

15.115.
La formule (15.345) peut sembler très chouette pour trouver des approximations de $\ln(2)$. Le problème est qu'elle ne donne aucune idée de l'erreur commise en tronquant la série.

Vous pouvez, certes, écrire ceci :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} \simeq 0.78. \tag{15.351}$$

Hélas, ce calcul n'a aucune valeur pour affirmer que $\ln(2)$ doit être proche de 0.78. Ni même pour affirmer que $\ln(2) < 1$.

Avoir des valeurs numériques de $\ln(2)$ (c'est-à-dire que « chiffres corrects devant ou derrière la virgule ») demande d'avoir un encadrement. Cela doit donc se faire avec des formules de séries avec reste ; les formules exactes qui demandent de sommer jusqu'à l'inifini sont inutiles pour avoir des approximations numériques.

Dans le cas de $\ln(2)$, une approximation numérique sera donnée à l'aide de Taylor avec reste intégrale dans la proposition 20.151.

Lemme 15.116.
Soit la fonction[46]

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \tag{15.352}$$

(1) Elle admet un prolongement de classe C^∞ sur $]-1, \infty[$.

(2) $f(0) = 1$.

La seconde condition étant évidemment avec un abus de notation entre f et son prolongement, parce que f n'est pas définie en zéro.

Démonstration. La difficulté étant de voir que f a un prolongement en zéro et qu'elle y est de classe C^∞.

La proposition 15.114 nous donne l'égalité

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{15.353}$$

pour tout $x \in]-1, 1]$; en particulier pour $x = 0$. Nous faisons le petit calcul suivant : SUBEQooRLQOooEzNFDp

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \tag{15.354a}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1} \tag{15.354b}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+1} x^{n}. \tag{15.354c}$$

[46] Pour la définition du logarithme, c'est la définition 15.95.

Ce calcul n'est pas valable pour $x = 0$, mais ça ne nous empèche pas de poser

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n, \tag{15.355}$$

qui, lui, est bien définie en zéro. Le rayon de convergence de la série T est égal à 1, de telle sorte que

$$T\colon]-1,1[\to \mathbb{R} \tag{15.356}$$

de classe C^∞, et est égale à f sur $]-1,1[\setminus \{0\}$.

La série T est donc le prolongement demandé. En ce qui concerne $f(0)$, c'est un abus pour écrire $T(0)$ qui vaut immédiatement 1. □

Notons qu'un calcul de limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \tag{15.357}$$

donnait la valeur $f(0) = 1$. Donc prolonger avec $f(0) = 1$ était la seule possibilité pour avoir une fonction continue. De là à dire que le prolongement ainsi créé est de classe C^∞, c'est une autre histoire, qui est résolue par les séries entières.

15.6.13 Développements et calcul de limites

Lors d'un calcul de limite, développer une partie d'une expression peut être utile.

Exemple 15.117.
À calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}. \tag{15.358}$$

Cela est une indétermination de type $\frac{0}{0}$. Le développement limité du numérateur[47] nous donne une fonction $\alpha(x)$ telle que $\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$ et

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\alpha(x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + x\alpha(x). \tag{15.359}$$

Sur le membre de droite la limite est facile à calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \Big(1 - \frac{x}{2} + x\alpha(x)\Big) = 1. \tag{15.360}$$

△

15.6.14 Une petite intégrale

EXooNIOZooWxciAC

Exemple 15.118.
Soit V la région trapézoïdale de sommets $(0,-1)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, comme à la figure 15.2(a). Calculons ensemble l'intégrale double

$$\int_V e^{\frac{x+y}{x-y}}\, dV,$$

avec le changement de variable[48] $\psi(x,y) = (x+y, x-y)$. C'est-à-dire que nous considérons les nouvelles variables

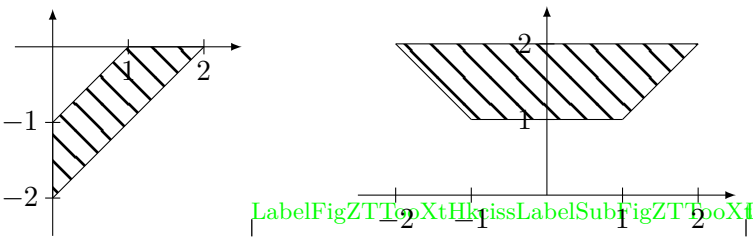
$$\begin{cases} u = x + y & \text{(15.361a)} \\ v = x - y. & \text{(15.361b)} \end{cases}$$

Il faut remarquer d'abord que le changement de variable proposé est dans le mauvais sens. On écrit alors $\phi(u,v) = \psi^{-1}(u,v) = \big((u+v)/2, (u-v)/2\big)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} & \text{(15.362a)} \\ y = \dfrac{u-v}{2}. & \text{(15.362b)} \end{cases}$$

La région qui correspond à V est U, le trapèze de sommets $(-1,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$ et $(-2,2)$, qu'on voit sur la figure 15.2(b) et qu'on décrit par

$$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leqslant v \leqslant 2,\ -v \leqslant u \leqslant v\}.$$



(a) La région V (b) La région $U = \phi^{-1}(V)$

FIGURE 15.2 : Avant et après le changement de variables LabelFigZTTooXtHkci

Le déterminant de la matrice jacobienne de ψ^{-1} est $J_{\psi^{-1}}$,

$$J_{\psi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. \tag{15.363}$$

On a alors, en utilisant le fait que $F(x) = ae^{x/a}$ est une primitive de $f(x) = e^{x/a}$ (proposition 15.88) ainsi que le théorème fondamental de l'analyse (théorème 14.288),

$$\int_V e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dV = \int_U e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}\,dV = \int_1^2\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{3}{4}(e-e^{-1}).$$

△

15.7 Vitesses des puissances, de l'exponentielle et du logarithme

15.7.1 Un peu de théorie

Voici une série de résultats qui lient les vitesses des polynômes, du logarithme et de l'exponentielle. LEMooNYFVooXjFShk

Lemme 15.119.
Si P est un polynôme et si $a > 0$, alors

$$\lim_{x\to\infty} e^{-ax}P(x) = 0 \tag{15.364}$$

Démonstration. Nous prouvons par récurrence que pour tout n, nous avons $e^{-ax}x^n \to 0$. D'abord nous écrivons[49]

$$f(x) = e^{-ax}x = \frac{x}{e^{ax}}, \tag{15.365}$$

et ensuite la règle de L'Hôpital 12.220 nous donne

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{ae^{ax}} = 0. \tag{15.366}$$

En ce qui concerne la récurrence, c'est encore la règle de L'Hôpital :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{ax}} = \frac{n}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^{ax}} = 0. \tag{15.367}$$

□ PROPooKVIFooGdKpfP

Proposition 15.120.
Nous avons : ITEMooCDSQooSIctbz

(1) Pour tout $\alpha > 0$, il existe N tel que $\ln(n) \leqslant n^\alpha$ pour tout $n \geqslant N$. ITEMooZMAWooTbDNAd

(2) Pour tout $p > 0$ et tout $\alpha > 0$, il existe N tel que

$$\ln(n)^p < n^\alpha \tag{15.368}$$

pour tout $n \geqslant N$.

[47] Proposition 15.112.
[48] Théorème 14.282.
[49] En utilisant 12.422(3).

ITEMooBLNOooZQNTfd

(3) *Pour tout $n \geqslant 1$ nous avons la limite*

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0. \tag{15.369}$$

ITEMooMLNMooAyJTox

(4) *Nous avons*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1. \tag{15.370}$$

ITEMooIQEKooBionsK

(5) *L'exponentielle croit plus vite que tout polynôme, et plus vite que logarithme :*

EqExpDecrtPlusVite

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}(\ln x)^n x^\alpha = 0 \tag{15.371}$$

pour tout n et pour tout α.

ITEMooDUQWooNvAvmR

(6) *Pour tout $n > 0$, nous avons la limite*

$$\lim_{x\to 0^+} x^n e^{1/x} = \infty. \tag{15.372}$$

Le point (1) et sa généralisation (2) nous font dire que le logarithme croît moins vite que n'importe quel polynôme.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** En effet, nous avons, par la règle de l'Hospital (proposition 12.219),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \alpha x^\alpha = \infty \tag{15.373}$$

quand $\alpha > 0$. La dérivée du logarithme est dans la proposition 15.105.

(2) **Pour (2)** Il faut prendre le N qui convient à l'item (1) pour $n^{\alpha/p}$. Ainsi nous avons $\ln(n) < n^{\alpha/p}$ et donc $\ln(n)^p \leqslant n^\alpha$.

(3) **Pour (3)** Lorsque $x \neq 0$ nous avons

$$x^n \ln(x) = \frac{\ln(x)}{1/x^n}, \tag{15.374}$$

qui est un cas $\frac{\infty}{\infty}$. Nous nous en remettons à la règle de l'Hospital 12.220. D'abord nous nous assurons de la limite des dérivées :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{n}\frac{x^{n+1}}{x} = 0. \tag{15.375}$$

La règle de l'Hospital conclut à l'existence de la limite demandée et à son égalité à 0.

(4) **Pour (4)** En effet, par la règle de l'Hospital 12.219,

EqGICpOX

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{-1}{1-x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1 \tag{15.376}$$

(5) **Pour (5)** Notons $f_1(x) = e^{-x/2}(\ln x)^n$ et $f_2(x) = e^{-x/2}x^\alpha$. Le lemme 15.119 donne tout de suite $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$.

En ce qui concerne f_1, l'item (2) nous indique que nous avons

$$f_1(x) = e^{-x/2}(\ln x)^n \leqslant e^{-x/2}x \tag{15.377}$$

dès que x est assez grand. Le lemme 15.119 nous dit alors que $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$.

Enfin, nous avons

$$e^{-x}(\ln x)^n x^\alpha = f_1(x)f_2(x) \tag{15.378}$$

et donc la limite demandée.

(6) **Pour (6)** Nous passons au logarithme :

$$\ln(x^n e^{1/x}) = \ln(x^n) + \ln(e^{1/x}) = n\ln(x) + \frac{1}{x} = \frac{nx\ln(x)+1}{x}. \tag{15.379}$$

Grâce à la limite déjà prouvée en (3), le numérateur tend vers 1 lorsque $x \to 0^+$. Donc le tout tend vers $+\infty$. Au final,

$$\lim_{x\to 0^+} x^n e^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^n e^{1/x})} = \infty. \tag{15.380}$$

□

EXooQNCJooFpnvnf

Exemple 15.121.
Le lemme 12.436 a déjà prouvé la limite

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n \tag{15.381}$$

pour tout $\alpha > 0$ et $a < 1$.

L'utilisation de propriétés de l'exponentielle nous permet de donner une nouvelle preuve, plus courte[50].

Le théorème 15.103 et la proposition 15.98 nous permettent de passer à l'exponentielle. Pour chaque n nous avons :

$$n^\alpha a^n = e^{\alpha\ln(n)+n\ln(a)}. \tag{15.382}$$

EqLKLQooLUWgm

Ce qui est dans l'exponentielle est

$$\alpha\ln(n) + n\ln(a) = n\big(\alpha\frac{\ln(n)}{n} + \ln(a)\big). \tag{15.383}$$

Dans la parenthèse, $\ln(a) < 0$ et $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$. Donc ce qui est dans l'exponentielle (15.382) tend vers $-\infty$ et au final l'expression demandée tend vers zéro. △

Remarque 15.122.
Vous ne pouvez pas à priori considérer l'exemple 15.121 comme une preuve alternative au lemme 12.436, parce que vous n'êtes pas sûr que dans toute la théorie permettant de définir l'exponentielle (en particulier la convergence de $\sum_k x^k/k!$), le lemme n'est pas utilisé[51].

PROPooXIROooAprBJh

Proposition 15.123 ([1]).
Soient $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n r^n \to 0$. Alors pour tout polynôme P nous avons

$$P(n)a_n r^n \to 0. \tag{15.384}$$

De même si $a_n r^n \to \infty$, alors pour tout polynôme nous avons[52]

$$\frac{a_n}{P(n)} r^n \to \infty. \tag{15.385}$$

PROPooQJHCooDdpgMv

Proposition 15.124 ([1]).
Si $0 < q < 1$ et si $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un polynôme, alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k)q^k < \infty. \tag{15.386}$$

15.7.2 Fonction de Riemann

LEMooVBQVooDXeDqA

Lemme 15.125.
*La **fonction de Riemann***

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \tag{15.387}$$

est de classe C^∞ sur $]1,\infty[$.

[50] C'est toujours facile de prétendre qu'une preuve est plus courte qu'une autre lorsqu'on utilise en une ligne des très gros théorèmes qui ont mis dix pages à être démontrés.

[51] Faites la vérification et dites-moi si c'est bon.

[52] En ne considérant que la queue de suite assez lointaine pour avoir dépassé toutes les racines de P. D'ailleurs c'est le moment de se rappeler que P a seulement un nombre fini de racines par la proposition 6.110.

Démonstration. Afin de faire le coup du compact, nous étudions la convergence uniforme de la série sur tout compact de $]1,\infty[$. Soit $\epsilon > 0$, et regardons ce qu'il se passe sur un compact dont le minimum[53] est $1+\epsilon$. Dans ce cas, $n^x \geqslant n^{1+\epsilon}$, et donc $f_n(x) = \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$. Étant donné que la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ converge, la fonction de Riemann converge uniformément par le critère de Weierstrass (théorème 12.396). Nous avons donc convergence uniforme de la série sur tout compact de $]1,\infty[$, ce qui fait que ζ est une fonction continue pour $x > 1$ par le théorème 12.394.

Nous allons à présent utiliser le théorème 12.398 pour prouver que la fonction de Riemann est C^1. Il faut donc prouver que la série des dérivées $(n^{-x})' = -\ln(n)n^{-x}$ converge uniformément sur tout compact de $]1,\infty[$.

Nous prenons encore une fois un compact K dont le minimum est $1+\epsilon$. D'abord, nous majorons le logarithme par un x^α : lorsque n est assez grand, nous avons

$$\ln(n)n^{-x} \leqslant n^\alpha n^{-x}; \tag{15.388}$$

la proposition 15.120(1) nous dit que pour tout $\alpha > 0$, il existe un n à partir duquel cette inégalité est valide. Étant donné que $1+\epsilon$ est le minimum du compact, nous pouvons encore majorer en remplaçant x par $1+\epsilon$:

$$\ln(n)n^{-x} \leqslant \frac{1}{n^{1+\epsilon-\alpha}}. \tag{15.389}$$

Afin de pouvoir utiliser le critère de Weierstrass, nous devons nous assurer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon-\alpha}}$ converge. Cela n'est vrai que si $1+\epsilon-\alpha > 1$, mais le choix de α étant encore arbitraire, nous choisissons $0 < \alpha < \epsilon$.

Ainsi, la série des dérivées converge uniformément sur tout compact et nous en déduisons que cette série est bien la dérivée de la fonction de Riemann qui est C^1.

Afin de traiter les dérivées d'ordre supérieur, il faut calculer

$$(n^{-x})^p = (-1)^p\big(\ln(n)\big)^p n^{-x}, \tag{15.390}$$

et remarquer que $\lim_{x\to\infty} x^\alpha/(\ln(x))^p = \infty$. Par conséquent y a encore moyen de remplacer le logarithme par un x^α. Le reste de la preuve est la même. □

Ici se termine la preuve de ce lemme. Nous restons cependant sur notre faim en ce qui concerne la convergence uniforme de la série sur l'ouvert $]1,\infty[$. En effet, nous avons prouvé la convergence uniforme sur tout compact (et cela nous a suffit pour prouver le lemme), mais nous n'avons pas prouvé que la série n'était pas uniformément convergente sur $]1,\infty[$ pour autant.

Nous allons montrer qu'il n'y a pas uniforme convergence en prouvant que si x est assez proche de 1, alors la suite des sommes partielles de $\zeta(x)$ est aussi proche que l'on veut de la suite des sommes partielles de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui, elle, diverge.

Lemme 15.126.
Nous avons

$$\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = \infty \tag{15.391}$$

où la limite est une limite à droite : la limite à gauche n'existe pas.

Démonstration. Soit $M > 0$. Prouvons que $\exists\epsilon$ tel que $\zeta(1+\epsilon) \geqslant M$. D'abord, choisissons un k tel que

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} > M, \tag{15.392}$$

et choisissons un ϵ tel que

$$\max_{n\in\{1,\ldots,k\}} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right| < \alpha. \tag{15.393}$$

Un tel choix de ϵ est possible pour tout α. Maintenant, nous choisissons α de façon à avoir $k\alpha < \sigma$. Avec ça, nous avons

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right) < k\alpha < \sigma. \tag{15.394}$$

En prenant σ tel que $M - \sum_{n=1}^{k}(1/n) < \sigma$, nous trouvons ainsi un ϵ tel que $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} > M$. Cela prouve le lemme. □

[53] Pour rappel, un compact dans $\mathbb{R}$ a *toujours* un minimum.

Armé de ce lemme, il est maintenant aisé de prouver que la série définissant la fonction de Riemann n'est pas uniformément convergente sur $]1,\infty[$. Prenons la $k$ième somme partielle $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k}(1/n^x)$. Pour chaque k, cela est une fonction bornée de x (y compris en $x=1$), donc $\sup_{x\in]1,\infty[} s_k(x) = M_k$. Armé de cette majoration, nous faisons

$$\|s_k - \zeta\|_\infty = \sup_{x\in]1,\infty[}\big(\zeta(x) - s_k(x)\big) > \sup\big(\zeta(x) - M_k\big) = \infty, \tag{15.395}$$

il n'y a donc pas moyen que la limite de $\|\zeta - s_k\|_\infty$ quand $k \to \infty$ soit nulle. Il n'y a donc pas uniforme convergence de ζ sur l'intervalle $]1,\infty[$.

PropBQGBooHxNrrf

Proposition 15.127.
Pour tout polynôme P et pour tout $a > 0$ la fonction $f(x) = P(x)e^{-ax}$ est intégrable[54] *sur $[0,\infty[$.*

Démonstration. Nous avons $f(x) = P(x)e^{-ax/2}e^{-ax/2}$, et par la vitesse comparée des exponentielles et polynômes[55], pour un certain $M > 0$ nous pouvons affirmer que $P(x)e^{-ax/2} < 1$ sur $[M,\infty[$. Dès lors

$$|f(x)| < e^{-ax/2}, \tag{15.396}$$

qui est intégrable. □

EXooAGEOooQdQkrS

Exemple 15.128.
La fonction logarithme (définition 15.95) n'est pas définie pour $x \leqslant 0$. Par conséquent la fonction $f(x) = x\ln(|x|)$ n'est pas définie en $x = 0$. Elle est bien définie pour $x < 0$ et vérifie

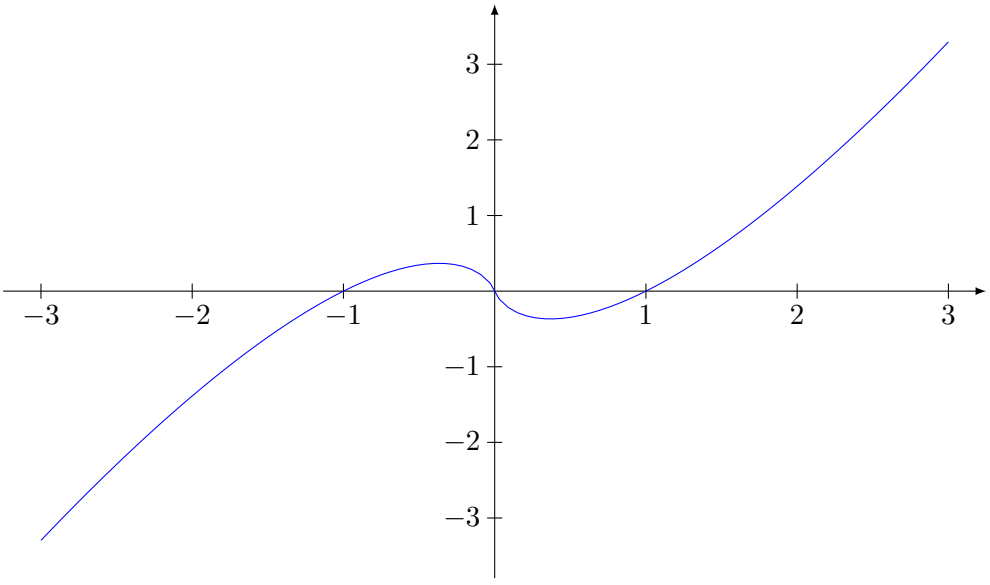
$$\lim_{x\to 0} x\ln(|x|) = 0. \tag{15.397}$$

Nous pouvons donc définir la fonction

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0\\ 0 & \text{si } x = 0.\end{cases}\end{aligned} \tag{15.398}$$

Contrairement à la fonction initiale f, cette fonction $\tilde{f}$ est définie et continue en 0.

Notez que sur le graphe de la fonction $\tilde{f}$, la courbe est bien régulière en $x = 0$.



△

DEFooFJZXooIVrzvk

Définition 15.129.
Soient deux suites (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{R}$. Nous disons que

*(1) $a_n \to \infty$ **plus vite** que (b_n) si $\lim n \to \infty a_n/b_n = \infty$.*

[54] Définition 14.186.
[55] Voir 15.120 et 15.119.

(2) $a_n \to \infty$ ***aussi vite*** *que* (b_n) *si* $\lim n \to \infty a_n/b_n$ *existe et est finie.*

(3) $a_n \to 0$ ***plus vite*** *que* (b_n) *si* $\lim n \to \infty a_n/b_n = 0$.

(4) $a_n \to 0$ ***moins vite*** *que* (b_n) *si* $\lim n \to \infty a_n/b_n = \infty$.

Exemple 15.130.
Deux petits exemples.

(1) Les suites $a_n = n^2$ et $b_n = n$ tendent toutes deux vers ∞, mais (a_n) va plus vite parce que $a_n/b_n = n \to \infty$.

(2) Les suites $a_n = 1/n$ et $b_n = 1/n^2$ tendent toutes deux vers 0, mais (a_n) va moins vite parce que $a_n/b_n = n \to \infty$.

△

15.131.
Je vous laisse cogiter sur l'énoncé suivant : si A est un ensemble de suites tendant toutes vers ∞, alors il existe une suite qui converge vers ∞ plus vite que tous les éléments de A.

Lorsque A est dénombrable, à mon avis, il suffit de prendre $x_n = \left(\max_{i=1,\dots,n}\{a_n^{(i)}, 2\}\right)^2$.

Lorsque A n'est pas dénombrable, je ne suis pas sûr. Écrivez-moi si vous avez une idée.

Lemme 15.132.
Si $a_n \to \infty$*, il existe une suite tendant vers* ∞ *plus vite.*

Démonstration. Il suffit de prendre $b_n = a_n^2$. □

Lemme 15.133.
La suite $a_n = n!$ *tend vers* ∞ *vite que l'exponentielle* $b_n = e^n$.

Démonstration. Nous devons étudier le comportement de $n!/e^n$ lorsque n est grand. Étant donné que $e < 3$ (lemme 15.93), nous avons

$$\frac{n!}{e^n} \geqslant \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4^{n-3}}{3^n} = \frac{5}{3^3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-3}. \tag{15.399}$$

Et comme $4/3 > 1$ nous avons bien $n!/e^n \to \infty$. □

15.7.3 Nombres premiers

Le théorème suivant dit que la somme des inverses des nombres premiers diverge. Cela est à comparer avec la proposition 15.141 qui dit que la somme des inverses des carrés converge.

ThonfVruT

Théorème 15.134.
Soit P*, l'ensemble des nombres premiers. Alors la somme* $\sum_{p\in P} \frac{1}{p}$ *diverge et plus précisément,*

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\in P}} \frac{1}{p} \geqslant \ln(\ln(x)) - \ln(2). \tag{15.400}$$

Démonstration. Nous posons

$$S_x = \{q \leqslant x \text{ avec } q \text{ sans facteurs carrés}\} \tag{15.401}$$

et

$$P_x = \{p \in P \text{ tel que } p \leqslant x\}. \tag{15.402}$$

Si

$$K_x = \{(q, m) \text{ tels que } q \text{ n'a pas de facteurs carrés et } qm^2 \leqslant x\}, \tag{15.403}$$

alors nous avons

$$K_x = \bigcup_{q\in S_x} \bigcup_{m\leqslant\sqrt{x/q}} (q, m). \tag{15.404}$$

Par définition et par le lemme 3.20 nous avons aussi

$$\{n \leqslant x\} = \{qm^2 \text{ tel que } (q, m) \in K_x\}. \tag{15.405}$$

Tout cela pour décomposer la somme

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=\sum_{q\in S_x}\sum_{m\leqslant\sqrt{x/q}}\frac{1}{qm^2}\leqslant\sum_{q\in S_x}\frac{1}{q}\underbrace{\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m^2}}_{=C}. \tag{15.406}$$

Nous avons aussi

$$\prod_{p\in P_x}\left(1+\frac{1}{p}\right)=1+\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}+\sum_{\substack{p,q\in P_x\\p<q}}\frac{1}{pq}+\sum_{\substack{p,q,r\in P_x\\p<q<r}}\frac{1}{pqr}+\dots \tag{15.407a}$$

$$\geqslant 1+\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}+\sum_{\substack{p,q\in P_x\\pq\leqslant x}}\frac{1}{pq}+\sum_{\substack{p,q,r\in P_x\\pqr\leqslant x}}\frac{1}{pqr}+\dots \tag{15.407b}$$

Les sommes sont finies. Les sommes s'étendent sur toutes les façons de prendre des produits de nombres premiers distincts de telle sorte de conserver un produit plus petit que x ; c'est-à-dire que les sommes se résument en une somme sur les éléments de S_x :

$$\exp\left(\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}\right)\geqslant\prod_{p\in P_x}\left(1+\frac{1}{p}\right)\geqslant\sum_{q\in S_x}\frac{1}{q}. \tag{15.408}$$

La première inégalité est simplement le fait que $1+u\leqslant e^u$ si $u\geqslant 0$ (directe de la définition 15.103). Les inégalités suivantes proviennent du fait que le logarithme est une primitive de la fonction inverse (proposition 15.105) :

$$\ln(x)\leqslant\sum_{n\geqslant x}\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}\leqslant\sum_{n\geqslant x}\frac{1}{n}. \tag{15.409}$$

Nous prolongeons ces inégalités avec les inégalités (15.406) et (15.408) :

$$\ln(x)\leqslant\sum_{n\geqslant x}\frac{1}{n}\leqslant C\sum_{q\in S_x}\frac{1}{q}\leqslant C\exp\left(\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}\right). \tag{15.410}$$

En passant au logarithme,

$$\ln\big(\ln(x)\big)\leqslant\ln(C)+\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}. \tag{15.411}$$

Ceci montre la divergence de la série de droite. Nous cherchons maintenant une borne pour C. Pour cela nous écrivons

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n-1)} \tag{15.412a}$$

$$=1+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \tag{15.412b}$$

$$=1+1-\frac{1}{N} \tag{15.412c}$$

$$\leqslant 2. \tag{15.412d}$$

Donc $C\leqslant 2$. □

Ce théorème prend une nouvelle force en considérant le théorème de Müntz 17.7 qui dit qu'alors l'ensemble $\mathrm{Span}\{x^p \text{ tel que } p \text{ est premier}\}$ est dense dans les fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme ou $\|.\|_2$.

15.7.4 Quelques limites

Nous voyons à présent quelques calculs de limite et de développements mettant en scène des logarithmes et exponentielles.

compose1

Exemple 15.135.
Pour trouver le développement de la fonction $f(x) = e^{-2x}$, il suffit d'écrire celui de e^t et de remplacer ensuite t par $-2x$. Le développement à l'ordre 3 de la fonction exponentielle est :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3\alpha(t). \tag{15.413}$$

Le développement de $f(x) = e^{-2x}$ sera donc

$$f(x) = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{6} - 8x^3\alpha(-2x). \tag{15.414}$$

Donc le polynôme de degré 3 partie régulière de g est :

$$1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3, \tag{15.415}$$

et la fonction reste correspondante est :

$$\alpha_g(x) = -8\alpha(-2x). \tag{15.416}$$

△

Exemple 15.136.
Nous savons les développements

$$f(x) = \ln(1 + x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \tag{15.417}$$

et

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{6}. \tag{15.418}$$

Nous obtenons le développement d'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln\big(1 + \sin(x)\big)$ en écrivant

$$\ln\big(1 + \sin(x)\big) \sim \big(x - \frac{x^3}{6}\big) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3. \tag{15.419}$$

EqGXMooWKQkIL

Il s'agit maintenant de trouver les termes qui sont de degré inférieur ou égal à 3.

D'abord

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} \sim x^2 \tag{15.420}$$

Nous avons alors aussi

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^6 \sim x^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \sim x^3. \tag{15.421}$$

En replaçant tout ça dans (15.419) nous trouvons

$$\ln\big(1 + \sin(x)\big) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \tag{15.422}$$

△

ExBCDookjljhjk

Exemple 15.137.
Calculer

$$\lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1 + 4x^2} - 2x. \tag{15.423}$$

EqABCoolkjh

Nous allons effectuer un développement asymptotique de la partie « difficile » de l'expression posant d'abord $x = 1/h$. Si $f(x) = e^{1/x}\sqrt{1 - 4x^2}$ alors

$$g(h) = \frac{1}{|h|}e^h\sqrt{h^2 + 4} = \frac{1}{h}\big(1 + h + h\alpha(h)\big)\big(2 + h\beta(h)\big). \tag{15.424}$$

La première parenthèse est le développement de e^h et la seconde celui de $\sqrt{h^2 + 4}$. Nous nous apprêtons à faire la limite $x \to \infty$ qui correspond à $h \to 0^+$, nous pouvons donc supposer que $h > 0$ et omettre la valeur absolue. En effectuant le produit et en regroupant tous les termes contenant h^2, $\alpha(h)$ ou $\beta(h)$ dans un seul terme $h\gamma(h)$,

$$f(h) = \frac{1}{h}\big(2 + 2h + h\gamma(h)\big) = \frac{2}{h} + 2 + \gamma(h) = 2x + 2 + \gamma(1/x) \tag{15.425}$$

où γ est une fonction vérifiant $\lim_{t\to 0}\gamma(t)=0$.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la limite (15.423) :

$$\lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1+x^2}-2x=\lim_{x\to\infty}\big(2x+2+\gamma(1/x)-2x\big)=2. \tag{15.426}$$

△

DEFooYDZMooXPnGZf

Définition 15.138 ([]).
*Soit $\alpha\in\mathbb{C}$, la **série de Riemann** est*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}. \tag{15.427}$$

15.139.
Quelques trucs à propos de la série de Riemann.

(1) La série de Riemann est très liée aux intégrales impropres de la proposition 14.301.

(2) Nous avons un théorème de (non)-convergence lorsque $\alpha\in\mathbb{R}$: proposition 15.140.

(3) Et un théorème qui traite le cas $\alpha\in\mathbb{C}$: 15.141.

PROPooRACTooLOGyjF

Proposition 15.140 (Série de Riemann[549]).
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

(1) Si $\alpha\leqslant 1$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}=\infty, \tag{15.428}$$

et

$$S_n\sim\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \tag{15.429}$$

EQooUAXMooNLzxLh

(2) Si $\alpha=1$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}=\infty, \tag{15.430}$$

et

$$S_n\sim\ln(n). \tag{15.431}$$

(3) Si $\alpha>0$, alors la série des $1/k^\alpha$ converge et nous avons l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}\leqslant 1+\frac{1}{\alpha-1}. \tag{15.432}$$

Démonstration. Nous posons $f(t)=1/t^\alpha$ et $S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)$. Et maintenant nous faisons plusieurs sous-cas.

(1) $\underline{\alpha\leqslant 0}$ Nous posons $f(t)=t^{-\alpha}$ et $g(t)=t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, de telle sorte que $f(t)=g'(t)$. Vu que f est croissante, nous avons $f(k)\leqslant f(t)\leqslant f(k+1)$ pour tout $t\in[k,k+1]$. Cela donne l'encadrement suivant pour g' :

$$f(k)\leqslant g'(t)\leqslant f(k+1). \tag{15.433}$$

Nous appliquons donc l'inégalité des accroissements finis 12.217 à la fonction g entre k et $k+1$ de la façon suivante :

$$f(k)\leqslant g(k+1)-g(k)\leqslant f(k+1). \tag{15.434}$$

Nous sommons cela pour k entre 1 et n en utilisant la somme téléscopique de la proposition 10.162 :

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqslant g(n+1)-g(1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k+1). \tag{15.435}$$

Nous gardons la première inégalité $S_n\leqslant g(n+1)-g(1)$. Pour la seconde, nous remarquons qu'elle est valable pour tout $n\geqslant 1$; nous l'écrivons pour $n-1$:

$$g(n)-g(1)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}f(k+1)=\sum_{k=2}^{n}f(k)=S_n-f(1). \tag{15.436}$$

D'où l'inégalité $S_n \geqslant g(n+1) - g(1) + f(1)$. Écrivons les deux :

$$g(n) - g(1) + f(1) \leqslant S_n \leqslant g(n+1) - g(1). \tag{15.437}$$

EQooSHNRooQsznHR

Vu que $g(n) \to \infty$, la première inégalité prouve que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{\alpha} = \infty$.

En ce qui concerne l'équivalence de suites, nous divisons tous les membres de 15.437 par $g(n)$:

$$\frac{g(n) - g(1) + f(1)}{g(n)} \leqslant \frac{S_n}{g(n)} \leqslant \frac{g(n+1) - g(1)}{g(n)}. \tag{15.438}$$

Vu que $g(n) \to \infty$ nous avons

$$\frac{g(n) - g(1) + f(1)}{g(n)} \to 1. \tag{15.439}$$

En remplaçant les différentes fonctions par leurs valeurs, nous avons aussi

$$\frac{g(n+1) - g(1)}{g(n)} = \underbrace{\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{n^{1-\alpha}}}_{=(\frac{n+1}{n})^{1-\alpha}\to 1} - \underbrace{\frac{1}{n^{1-\alpha}(1-\alpha)}}_{\to 0} \to 1. \tag{15.440}$$

Nous avons donc bien $S_n/g(n) \to 1$, comme demandé en (15.429).

(2) $\underline{0 < \alpha < 1}$ Nous posons encore $f(t) = t^{-\alpha}$ et $g(t) = t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, et nous avons encore $g'(t) = f(t)$. Cette fois, f est décroissante, et nous avons donc cet encadrement pour $g'(t)$:

$$f(k+1) \leqslant g'(t) \leqslant f(k). \tag{15.441}$$

L'inégalité des accroissements finis donne

$$f(k+1) \leqslant g(k+1) - g(k) \leqslant f(k). \tag{15.442}$$

Nous refaisons la somme téléscopique :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant g(n+1) - g(1) \leqslant S_n. \tag{15.443}$$

Nous gardons la seconde inégalité et écrivons la première avec $n-1$, et nous trouvons l'encadrement

$$g(n+1) - g(1) \leqslant S_n \leqslant g(n) - g(1) + f(1). \tag{15.444}$$

La première inégalité dit que $S_n \to \infty$. En ce qui concerne l'équivalence de suites, nous divisons encore par $g(n)$ et tout va bien.

(3) $\underline{\alpha = 1}$ Cette fois, nous faisons un tout petit peu attention aux domaines. Vu qu'à la fin nous ne sommes intéressés à f que pour les valeurs $k \geq 1$, nous prenons

$$\begin{aligned} f\colon]0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{t} \end{aligned} \tag{15.445}$$

et

$$\begin{aligned} g\colon]0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \ln(t). \end{aligned} \tag{15.446}$$

Nous avons encore $g' = f$ par la proposition 15.97. Ensuite nous faisons comme les autres cas. Nous avons d'abord l'encadrement $f(k+1) \leqslant g'(t) \leqslant f(k)$ pour tout $t \in [k, k+1]$, puis nous utilisons l'inégalité des accroissements finis : $f(k+1) \leqslant g(k+1) - g(k) \leqslant f(k)$. En sommant,

$$\sum_{k+1}^{n} f(k+1) \leqslant g(n+1) - g(1) \leqslant S_n. \tag{15.447}$$

Nous écrivons la première inégalité avec n_1 pour trouver $S_n \leqslant g(n) - g(1) + f(1)$. Et au final,

$$g(n+1) - g(1) \leqslant S_n \leqslant g(n) - g(1) + f(1). \tag{15.448}$$

La première inégalité donne $S_n \to \infty$. Pour l'équivalence de suites, nous disons par $g(n)$ et nous faisons un peu de limites, en tenant compte que[56]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(x+1)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1. \tag{15.449}$$

[56] En utilisant la règle de l'Hospital 12.220.

(4) **Si $\alpha > 1$** Encore $f(t) = t^{-\alpha}$ et $g(t) = t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$. Nous avons l'encadrement $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$. Nous sommes dans le même cas qu'avec $0 < \alpha < 1$ et nous arrivons aux mêmes conclusions :

$$g(n+1) - g(1) \leqslant S_n \leqslant S(n) - g(1) + f(1). \tag{15.450}$$

Cette fois nous avons $g(n) \to 0$, et donc

$$-g(1) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \leqslant f(1) - g(1). \tag{15.451}$$

Vu que S_n est une suite croissante et bornée, elle converge. Nous ne donnons par une valeur précise à la limite, mais l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha - 1} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}. \tag{15.452}$$

□

PROPooFPVZooGnsqrs

Proposition 15.141 (Série de Riemann[550])**.**
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Nous considérons a série de Riemann[57]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}. \tag{15.453}$$

EqSerRiem

En termes de convergence :

(1) Si $\mathrm{Re}(\alpha) > 1$, alors S converge absolument.

(2) Si $\mathrm{Re}(\alpha) < 1$ alors S diverge.

PROPooKXGWooRmSxou

Proposition 15.142 ([1])**.**
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ nous avons

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!} z^m = \frac{1 - e^z}{z}. \tag{15.454}$$

15.8 Trigonométrie hyperbolique

Définition 15.143.
*Les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes :*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{15.455a}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{15.455b}$$

Si vous ne vous rappelez plus la définition de e^x, c'est 15.70.

PROPooUNHHooIksdoJ

Proposition 15.144.
Quelques propriétés algébriques des fonctions trigonométriques hyperboliques.

(1) $\cosh(-x) = \cosh(x)$

(2) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

(3) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

ITEMooSJBDooAiRgjj

(4) $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$

(5) $\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \cosh(x+y)$

ITEMooOJRFooUCUaDl

(6) $\cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y) = \cosh(x-y)$

(7) $\cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y) = \sinh(x+y)$

[57] Voir la proposition 15.138.

(8) $\cosh(x)\sinh(y)-\sinh(x)\cosh(y)=-\sinh(x-y)$.

Démonstration. Si s'agit simplement de remplacer les définitions et d'utiliser les formules concernant les puissances, dont la formule (12.1164). □

PROPooAOOHooXvLfrZ

Proposition 15.145.
Quelques propriétés analytiques des fonctions trigonométriques hyperboliques.

(1) $\cosh'(x)=\sinh(x)$

(2) $\sinh'(x)=\cosh(x)$.

ITEMooZNZLooNMQFWr

(3) $\cosh(x)\geqslant 1$.

Démonstration. Pour les dérivées, il s'agit d'utiliser la dérivation de l'exponentielle, laquelle est facile par le théorème 15.103(1).

Pour (3), nous commençons par les $x\geqslant 0$. D'abord $\cosh(0)=1$. Ensuite $\cosh'(x)=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Vu que $x>0$ nous avons $e^x>e^{-x}>0$. Donc la dérivée de cosh est strictement positive sur $]0,\infty[$. La fonction y est donc partout plus grande que $\cosh(0)=1$.

Pour les $x<0$, nous avons la fait que cosh est paire. □

PROPooQLNYooIIOdvm

Proposition 15.146.
La fonction $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *est bijective.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Injective** Si $\sinh(a)=\sinh(b)$, alors le théorème de Rolle 12.213 affirme qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\sinh'(c)=0$. Mais la proposition 15.145 nous dit que $\sinh'(x)=\cosh(c)\geqslant 1$. Donc impossible.

(2) **Surjective** Nous avons

$$\lim_{x\to-\infty}\sinh(x)=-\infty \tag{15.456}$$

et

$$\lim_{x\to\infty}\sinh(x)=\infty. \tag{15.457}$$

Soit $y\in\mathbb{R}$. Il existe $m<0$ tel que $\sinh(m)<y$ et $M>0$ tel que $\sinh(M)>y$. Le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 nous enseigne qu'il existe $x\in[m,M]$ tel que $\sinh(x)=y$.

□

PROPooWEHGooOBqSHY

Proposition 15.147 ([1])**.**
Soient $a,b\in\mathbb{R}$ *tels que* $a^2-b^2=1$. *Il existe un unique* $(x,\sigma)\in\mathbb{R}\times\{\pm1\}$ *tel que*

SUBEQSooBIYDooIBuduV

$$\begin{cases} a=\sigma\cosh(x) & \text{(15.458a)}\\ b=\sinh(x). & \text{(15.458b)}\end{cases}$$

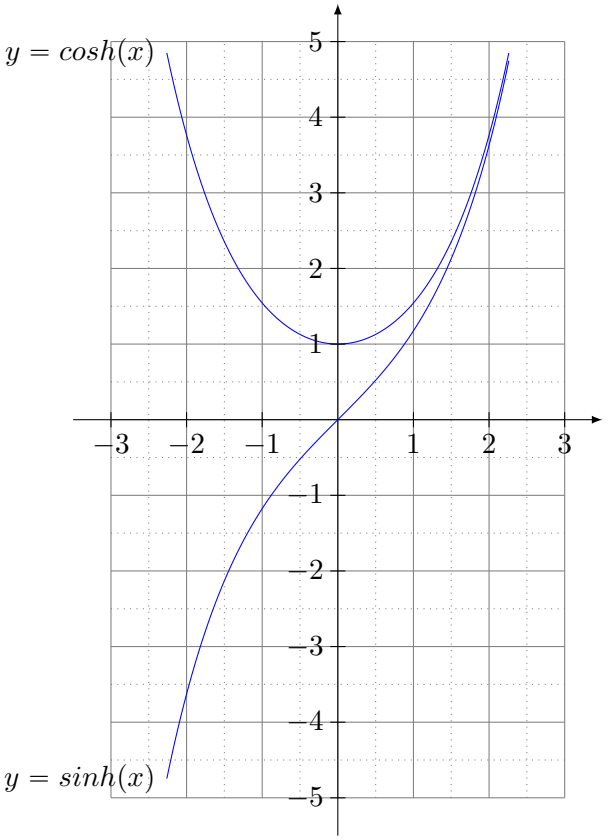
Démonstration. Vu que le sinus hyperbolique est une bijection[58], il existe un unique $x\in\mathbb{R}$ tel que $\sinh(x)=b$. Maintenant un petit calcul :

$$a^2=1+\sinh(x)^2=1+\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}=\cosh(x)^2. \tag{15.459}$$

Vu que $\cosh(x)^2=a^2$, il existe un unique $\sigma\in\{\pm1\}$ tel que $\sigma\cosh(x)=a$. □

Les représentations graphiques sont ceci :

[58] Proposition 15.146.



La **tangente hyperbolique** est donnée par le quotient

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \tag{15.460}$$

15.9 Séries entières de matrices

15.9.1 Différentiabilité

PropAMBXKgV

Proposition 15.148.
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$ de rayon de convergence R et la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{C}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{C}) \\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \end{aligned} \tag{15.461}$$

Alors

(1) La différentielle de f sur $B(0,R)$ est

$$df_A(U) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{k-1} A^l U A^{k-1-l}, \tag{15.462}$$

EqRDVodDa

c'est-à-dire que l'on peut différentier terme à terme. (Ici c'est A qui est dans $B(0,R)$)

(2) La convergence de la somme 15.462 est absolue.

(3) La convergence de la somme 15.462 est normale sur tout compact.

(4) La fonction f est de classe C^1 sur $B(0,R)$, c'est-à-dire que la fonction $A \mapsto df_A$ est continue.

Notons que df_A n'est pas tout à fait une série entière. Cependant, en ce qui concerne les normes, c'est tout comme si ça l'était.

Démonstration. Nous posons $u_k(A) = a_k A^k$, qui est une fonction de classe C^∞ et dont la différentielle est donnée par

$$(du_k)_A(U) = \frac{d}{dt}\Big[u_k(A+tU)\Big]_{t=0} = a_k \frac{d}{dt}\Big[(A+tU)^k\Big]_{t=0}; \tag{15.463}$$

en distribuant le produit nous trouvons tout un tas de termes dont seuls ceux contenant exactement une fois tU ne vont pas s'annuler. Étant donné que U et A ne commutent pas nous avons l'expression un peu moche

$$(du_k)_A(U) = \sum_{l=0}^{k-1} a_k A^l U A^{k-1-l}. \tag{15.464}$$

En ce qui concerne la norme, nous regardons celle de $(du_k)_A$ pour un A fixé ; c'est-à-dire que nous en regardons la norme opérateur :

$$\|(du_k)_A\| = \sup_{\|U\|=1} \| \sum_{l=0}^{k-1} a_k A^l U A^{k-1-l}\| \leqslant \sum_{l=0}^{k-1} |a_k| \|A\|^l \|A\|^{k-1-l} \leqslant k|a_k|\|A\|^{k-1}. \tag{15.465}$$

Pour donner la convergence nous considérons un nombre r tel que $\|A\| < r < R$, de telle sorte que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée par un nombre M et que nous puissions écrire

$$\|(du_k)_A\| \leqslant k|a_k|\|A\|^{k-1} = \frac{k|a_k|\|A\|^k}{\|A\|} = \frac{k|a_k|}{\|A\|} r^k \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^k \leqslant \frac{M}{\|A\|} k \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^k, \tag{15.466}$$

EqTGEwhnL

dont la série converge. Nous avons donc convergence absolue de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (du_k)_A. \tag{15.467}$$

Passons à la convergence normale sur tout compact. Nous nous fixons $r < R$ et nous nous intéressons à la norme de du_k sur $\overline{B(0,r)}$, c'est-à-dire

$$\|du_k\|_\infty = \sup_{x \in \overline{B(0,r)}} \|(du_k)_A\|. \tag{15.468}$$

Vu que $\overline{B(0,r)}$ est compact, ce supremum est un maximum et nous pouvons noter A_k la matrice qui le réalise. Nous réalisons alors les mêmes manipulations que pour (15.466) :

$$\|du_k\|_\infty = \|(du_k)_{A_k}\| \leqslant k|a_k|\|A_k\|^{k-1} \leqslant k|a_k|r^{k-1} = \frac{1}{r}k|a_k|r^k. \tag{15.469}$$

Nous prenons maintenant $r < r_0 < R$ et M, un majorant de $(a_n r_0^n)$, de telle sorte qu'en multipliant et divisant par r_0^k,

$$\|du_k\|_\infty \leqslant \frac{k|a_k|r_0^k}{r}\frac{r^k}{r_0^k} \leqslant \frac{kM}{r}\left(\frac{r}{r_0}\right)^k, \tag{15.470}$$

dont la série converge. Nous avons donc convergence normale sur tout compact. Par voie de ~~fait~~ conséquences nous avons continuité de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (du_k)_A \tag{15.471}$$

et convergence vers df_A par le théorème 15.9. □

PropQIIURAh

Proposition 15.149.
Si le rayon de convergence de la série $u(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ est R, alors

(1) elle converge normalement sur tout compact de $B(0,R)$;

(2) la fonction u y est de classe C^∞.

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} u_k \colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto a_k A^k \end{aligned} \tag{15.472}$$

qui est évidemment une fonction de classe C^∞. Nous étudions la j^{e} différentielle en m, pour $k > j$ (dans une série, nous ne nous intéressons pas aux premiers termes). La j^{e} différentielle appliquée à v_1 appliquée à v_2, etc. s'exprime de la façon suivante :

$$(d^j u_k)_m(v_1, \dots, v_j) = \frac{d}{dt_1} \cdots \frac{d}{dt_j} \Big(u_k(m + t_1 v_1 + \cdots + t_j v_j) \Big)_{t_i=0}. \tag{15.473}$$

Dans le produit $(m + t_1 v_1 + \cdots + t_j v_j)^k$, seuls les termes contenant exactement une fois chacun des t_i ne s'annulera pas après avoir fait la dérivée et évalué en $t_i = 0$. Combien de termes cela fait ? Parmi les k facteurs, il faut en placer j qui ne sont pas m (cela fait $\binom{k}{j}$ possibilités), et puis il faut ordonner ces j termes, cela fait encore $j!$ possibilités. Au final,

$$\|(d^j u_k)_m\| \leqslant |a_k| \binom{k}{j} j! \|m\|^{k-j} = |a_k| P(k) \|m\|^{k-j} \tag{15.474}$$

où $P(k) = \frac{k!}{(k-j)!}$ est un polynôme de degré j.

Afin d'étudier la convergence normale sur tout compact de la série des $d^j u_k$, nous considérons $r < r_0 < R$ et nous allons prouver la convergence normale sur $\overline{B(0,r)}$. Vu que c'est un compact, il existe une matrice $m_k \in \overline{B(0,r)}$ telle que

$$\begin{aligned}
\|d^j u_k\|_\infty &= \|(d^j u_k)_{m_k}\| && \text{(15.475a)}\\
&\leqslant |a_k| P(k) \|m_k\|^{k-j} && \text{(15.475b)}\\
&\leqslant |a_k| P(k) r^{k-j} && \text{(15.475c)}\\
&= \frac{|a_k| P(k)}{r^j} r^k && \text{(15.475d)}\\
&= \frac{|a_k| r_0^k P(k)}{r^j} \left(\frac{r}{r_0} \right)^k && \text{(15.475e)}\\
&\leqslant \frac{M}{r^j} P(k) \left(\frac{r}{r_0} \right)^k && \text{(15.475f)}
\end{aligned}$$

où M est un majorant de $a_n r_0^n$. Vu que $r/r_0 < 1$, la somme sur k converge et nous avons convergence normale sur tout compact de

$$d^j \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} d^j (a_k A^k) \tag{15.476}$$

avec un peu d'abus de notation. □

15.10 Exponentielle de matrices

PropKKdmnkD

Proposition 15.150.
Une matrice complexe est inversible si et seulement si elle est une exponentielle.

Autrement dit :

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = e^{\mathbb{M}(n,\mathbb{C})}. \tag{15.477}$$

Démonstration. Nous avons déjà prouvé dans la proposition 15.81 que toutes les exponentielles étaient inversibles. Ici nous nous concentrons sur la réciproque.

Soit $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$; nous allons donner une matrice $B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ telle que $A = \exp(B)$. D'abord remarquons qu'il suffit de prouver le résultat pour une matrice par classe de similitude. En effet si $A = \exp(B)$ et si M est inversible alors EqqACuGK

$$\begin{aligned}
\exp(MBM^{-1}) &= \sum_k \frac{1}{k!} (MBM^{-1})^k && \text{(15.478a)}\\
&= \sum_k \frac{1}{k!} M B^k M^{-1} && \text{(15.478b)}\\
&= M \exp(B) M^{-1}. && \text{(15.478c)}
\end{aligned}$$

Donc $MAM^{-1} = \exp(MBM^{-1})$. Nous pouvons donc nous contenter de trouver un logarithme pour les blocs de Jordan. Nous supposons donc que $A = (\mathbb{1} + N)$ avec $N^m = 0$. En nous inspirant de (15.344), nous

posons[59]

$$D(t) = tN - \frac{t^2}{2}N^2 + \cdots + (-1)^m \frac{t^{m-1}}{m-1}N^{m-1} \tag{15.479}$$

et nous allons prouver que $e^{D(1)} = \mathbb{1} + N$. Notons que N étant nilpotente, cette somme ainsi que toutes celles qui viennent sont finies. Il n'y a donc pas de problèmes de convergences dans cette preuve (si ce n'est les passages des équations (15.478)).

Nous posons $S(t) = e^{D(t)}$ (la somme est finie), et nous avons

$$S'(t) = D'(t)e^{D(t)} \tag{15.480}$$

Afin d'obtenir une expression qui donne S' en termes de S, nous multiplions par $(\mathbb{1} + tN)$ en remarquant que $(\mathbb{1} + tN)D'(t) = N$ nous avons

$$(\mathbb{1} + tN)S'(t) = NS(t). \tag{15.481}$$

En dérivant à nouveau,

$$(\mathbb{1} + tN)S''(t) = 0. \tag{15.482}$$ EqKjccqP

La matrice $(\mathbb{1} + tN)$ est inversible parce que son noyau est réduit à $\{0\}$. En effet si $(\mathbb{1} + tN)x = 0$, alors $Nx = -\frac{1}{t}x$, ce qui est impossible parce que N est nilpotente. Ce que dit l'équation (15.482) est alors que $S''(t) = 0$. Si nous développons $S(t)$ en puissances de t nous nous arrêtons au terme d'ordre 1 et nous avons

$$S(t) = S(0) + tS'(0) = \mathbb{1} + tD'(0) = 1 + tN. \tag{15.483}$$

En $t = 1$ nous trouvons $S(1) = \mathbb{1} + N$. La matrice $D(1)$ donnée est donc bien un logarithme de $\mathbb{1} + N$. □

15.10.1 Diagonalisabilité d'exponentielle

PropCOMNooIErskN

Proposition 15.151 ([137]).
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique scindé, alors A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.

Démonstration. Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible M telle que $D = M^{-1}AM$ soit diagonale (c'est la définition 8.212). Dans ce cas nous avons aussi $(M^{-1}AM)^k = M^{-1}A^kM$ et donc $M^{-1}e^AM = e^{M^{-1}AM} = e^D$ qui est diagonale.

La partie difficile est donc le contraire.

(1) **Qui est diagonalisable et comment ?** Nous supposons que e^A est diagonalisable et nous écrivons la décomposition de Dunford (théorème 8.262) :

$$A = S + N \tag{15.484}$$

où S est diagonalisable, N est nilpotente, $[S, N] = 0$. Nous avons besoin de prouver que $N = 0$.

Les matrices A est S commutent ; en passant au développement nous en déduisons que A et e^S commutent, puis encore en passant au développement que e^A et e^S commutent. Vu que S est diagonalisable, e^S l'est et par hypothèse e^A est également diagonalisable. Donc e^A et e^{-S} sont simultanément diagonalisables par la proposition 8.220.

Étant donné que A et S commutent, nous avons $e^N = e^{A-S} = e^Ae^{-S}$, et nous en déduisons que e^N est diagonalisable vu que les deux facteurs e^A et e^{-S} sont simultanément diagonalisables.

(2) **Unipotence**

Si r est le degré de nilpotence de N, nous avons

$$e^N - \mathbb{1} = N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{r-1}}{(r-1)!}. \tag{15.485}$$ EqQHjvLZQ

Donc

$$(e^N - \mathbb{1})^k = \left(N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{r-1}}{(r-1)!}\right)^k \tag{15.486}$$

où le membre de droite est un polynôme en N dont le terme de plus bas degré est de degré k. Donc $(e^N - \mathbb{1})$ est nilpotente et e^N est unipotente.

[59] Le logarithme d'un nombre n'est pas encore défini à ce moment, mais cela ne nous empêche pas de poser une définition ici pour une application des réels vers les matrices.

Si M est la matrice qui diagonalise e^N, alors la matrice diagonale $M^{-1}e^NM$ est tout autant unipotente que e^N elle-même. En effet,

$$(M^{-1}e^NM-\mathbb{1})^r=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}M^{-1}(e^N)^kM \tag{15.487a}$$
$$=M^{-1}\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}(e^N)^k\right)M \tag{15.487b}$$
$$=M^{-1}(e^N-\mathbb{1})^rM \tag{15.487c}$$
$$=0. \tag{15.487d}$$

La matrice $M^{-1}e^NM$ est donc une matrice diagonale et unipotente ; donc $M^{-1}e^NM=\mathbb{1}$, ce qui donne immédiatement que $e^N=\mathbb{1}$.

(3) **Polynômes annulateurs**

En reprenant le développement (15.485) sachant que $e^N=\mathbb{1}$, nous savons que

$$N+\frac{N^2}{2}+\cdots+\frac{N^{r-1}}{(r-1)!}=0. \tag{15.488}$$

Dit en termes pompeux (mais non moins porteurs de sens), le polynôme

$$Q(X)=X+\frac{X^2}{2}+\cdots+\frac{X^{r-1}}{(r-1)!} \tag{15.489}$$

est un polynôme annulateur de N.

La proposition 8.98 stipule que le polynôme minimal d'un endomorphisme divise tous les polynômes annulateurs. Dans notre cas, X^r est un polynôme annulateur et donc le polynôme minimal de N est de la forme X^k. Donc il est X^r lui-même.

Nous avons donc $X^r\mid Q$. Mais Q est un polynôme contenant le monôme X donc X^r ne peut diviser Q que si $r=1$. Nous en concluons que X est un polynôme annulateur de N. C'est-à-dire que $N=0$.

(4) **Conclusion**

Vu que Dunford[60] dit que $A=S+N$ et que nous venons de prouver que $N=0$, nous concluons que $A=S$ avec S diagonalisable.

□

15.11 Étude d'asymptote

Lorsqu'une fonction tend vers l'infini pour $x\to\infty$, une question qui peut venir est : à quelle vitesse tend-elle vers l'infini ?

Il est « visible » que la fonction logarithme ne tend pas très vite vers l'infini : certes

$$\lim_{x\to\infty}\ln(x)=+\infty, \tag{15.490}$$

mais par exemple $\ln(100000)\simeq 11.5$ tandis que $e^{100000}\simeq 10^{43429}$. Sans contestations possibles, l'exponentielle croit plus vite que le logarithme.

Soient f et g deux fonctions dont la limite $x\to\infty$ est ∞. Si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \tag{15.491}$$

nous disons que g tend vers ∞ plus vite que f ; si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty \tag{15.492}$$

nous disons que f tend vers ∞ plus vite que g, et si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=a\in\mathbb{R} \tag{15.493}$$

avec $a\neq 0$ alors nous disons que f tend vers l'infini à la même vitesse que $ag(x)$.

[60] Théorème 8.262.

Exemple 15.152.
La fonction $x \mapsto x^2$ tend vers l'infini plus vite que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. △

Dans cette section nous allons nous contenter de déterminer les fonctions qui tendent vers l'infini aussi vite qu'une droite oblique, que nous appellons asymptote et que nous voulons déterminer.

Exemple 15.153.
Déterminer les asymptotes obliques (s'ils existent) de la fonction

$$f(x) = e^{1/x}\sqrt{1+4x^2}. \tag{15.494}$$

Tout d'abord nous remarquons que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Nous sommes donc en présence d'une branche du graphe qui tend vers l'infini. Ensuite,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+4} = 2. \tag{15.495}$$

Donc le graphe de f tend vers l'infini à la même vitesse que le graphe de la fonction $y = 2x$. Nous aurons donc une asymptote oblique de coefficient directeur 2. De façon imagée, nous pouvons penser que le graphe de f et celui de $y = 2x$ sont presque parallèles si x est assez grand. Afin de déterminer l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, il nous reste à voir quelle est la « distance » entre le graphe de f et celui de $y = 2x$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1+4x^2} - 2x. \tag{15.496}$$

Cette limite a été calculée dans l'exemple 15.137 et vaut 2.

Nous concluons que le graphe de la fonction f admet l'asymptote

$$y = 2x + 2. \tag{15.497}$$

△

15.12 Développement en série

15.12.1 Série génératrice d'une suite

Soit u_n une suite telle que le rayon de convergence de

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \tag{15.498}$$

soit strictement positif. Alors la série f est la **série génératrice** de la suite (u_n).

Grâce au théorème 15.50 nous pouvons la dériver terme à terme autour de $z = 0$. En utilisant la petite formule (15.152) nous trouvons

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n=l}^{\infty} u_n \frac{n!}{(n-l)!} z^{n-l}, \tag{15.499}$$

EqNGhVCpP

et donc

$$u_l = \frac{f^{(l)}(0)}{l!}. \tag{15.500}$$

D'où le nom de série génératrice. Cela est évidemment intéressant seulement si nous connaissons une autre forme pour f par ailleurs.

Nous en utiliserons une pour déterminer les partitions d'un nombre en parts fixes, proposition 26.102.

15.12.2 Développement en série et Taylor

DefwmRzKh

Définition 15.154.
*Soit une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Nous disons que f est **développable en série entière** dans un voisinage de z_0 si il existe une série $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \leqslant R$ tel que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{15.501}$$

pour tout $z \in B(z_0, r)$.

Proposition 15.155.
Si V est un ouvert dans $\mathbb{C}$ alors l'ensemble des fonctions $V \to \mathbb{C}$ développables en série entière forme une $\mathbb{C}$-algèbre.

Démonstration. Les séries entières passent aux sommes et aux produits en gardant des rayons de convergence non nuls. □
ThoTGPtDj

Proposition 15.156.
*Si f est développable en série entière à l'origine alors elle est C^∞ sur un voisinage de l'origine et le développement est celui de **Taylor** :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{15.502}$$

pour tout x dans un voisinage de 0.

Démonstration. Si $f(x) = \sum a_n x^n$, nous savons que f est C^1 et que nous pouvons dériver terme à terme (au moins dans un voisinage). De plus le fait de dériver ne change pas le domaine. Par récurrence, la fonction est C^∞ sur le voisinage. En dérivant k fois la série $\sum a_n x^n$ nous trouvons

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}. \tag{15.503}$$

En calculant en $x = 0$ nous trouvons

$$f^{(k)}(0) = k! a_k, \tag{15.504}$$

d'où le terme général

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{15.505}$$

□

Si f est une fonction et si la série

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{15.506}$$

converge, alors cette série est la **série de Taylor** de f.

Remarque 15.157.
La série de Taylor d'une fonction n'est pas liée à sa fonction de façon aussi raide qu'on pourrait le croire. Même dans le cas d'une fonction C^∞ il peut arriver que $T_f(x) \neq f(x)$.

Il peut aussi arriver que f ne soit pas développable en série entière.

Exemple 15.158.
Nous considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{15.507}$$

Nous avons

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{15.508}$$

Note : pour la seconde ligne nous devons faire explicitement le calcul

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} e^{-1/t^2} = 0. \tag{15.509}$$

Plus généralement nous avons $f^{(k)}(0) = 0$, et par conséquent la série de Taylor converge (trivialement) vers la fonction identiquement nulle.

Cette fonction n'est donc pas développable en série entière vu qu'il n'existe aucun voisinage de zéro sur lequel la série de f coïncide avec f. △
ExwobBAW

Exemple 15.159.
Développement de $f(x) = \arctan(x)$. Nous savons que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \tag{15.510}$$

alors que nous connaissons le développement

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \tag{15.511}$$

EqVmuaqT

pour tout $x\in B(0,1)$. Nous avons donc successivement

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}(-x)^n \tag{15.512a}$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}(-1)^n x^{2n} \tag{15.512b}$$

$$\arctan(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+C. \tag{15.512c}$$

Notons que dans la dernière nous avons évité d'écrire la somme depuis $n=0$ (qui serait un terme constant) et nous avons écris explicitement « $+C$ ». Étant donné que $\arctan(0)=0$, nous devons poser $C=0$ et donc

$$\arctan(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{15.513}$$

△

15.12.3 Resommer une série

Nous avons vu comment trouver la série correspondant à une fonction donnée. Un exercice difficile consiste à trouver la fonction qui correspond à une somme donnée.

15.12.3.1 Les sommes du type $\sum_n P(n)x^n$

Pour calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(n)x^n \tag{15.514}$$

où P est un polynôme de degré m nous commençons par écrire

$$P(n)=\alpha_0+\alpha_1(n+1)+\alpha_2(n+1)(n+2)+\cdots+\alpha_m(n+1)\dots(n+m). \tag{15.515}$$

Nous décomposons alors la somme en m sommes de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_k\frac{(n+k)!}{n!}x^n=\alpha_k\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+k}\right)^{(k)}. \tag{15.516}$$

Effectuons par exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+3}=\frac{1}{1-x}-1-x-x^2 \tag{15.517}$$

Notons que dans un usage pratique, ce terme devra être ensuite dérivé trois fois, de telle manière que les termes « correctifs » n'interviennent pas. Cette méthode ne demande donc que de calculer les dérivées successives de $1/(1-x)$.

Exemple 15.160.
Calculons la fonction

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^3x^n. \tag{15.518}$$

D'abord nous écrivons

$$n^3=-1+7(n+1)-6(n+1)(n+2)+(n+1)(n+2)(n+3). \tag{15.519}$$

Nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{1}{(x-1)^2}. \tag{15.520}$$

De la même façon,

$$\sum_n (n+1)(n+2)x^n = \Big(\sum x^{n+2}\Big)'' = \frac{-2}{(x-1)^3} \tag{15.521a}$$

$$\sum_n (n+1)(n+2)(n+3)x^n = \frac{6}{(x-1)^4}. \tag{15.521b}$$

En remettant tout ensemble nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3x^n = -\frac{1}{1-x} + \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{12}{(x-1)^3} + \frac{6}{(x-1)^4}. \tag{15.522}$$

Nous pouvons vérifier ce résultat en traçant les deux courbes et en remarquant qu'elles coïncident.

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.7.1, Release Date: 2011-08-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: n=var('n')
sage: S(x)=sum(  [ n**3*x**n for n in range(0,30)  ]   )
sage: f(x)=-1/(1-x)+7/((x-1)**2)+12/((x-1)**3)+6/( (x-1)**4  )
sage: S(0.1)
0.214906264288980
sage: f(0.1)
0.214906264288981
sage: f.plot(-0.5,0.5)+S.plot(-0.5,0.5)
```

△

15.12.3.2 Les sommes du type $\sum_n x^n/P(n)$

Si $P(n)$ a des racines entières, nous pouvons le décomposer en fractions simples et utiliser la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \tag{15.523}$$

Nous avons par exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=0} \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{15.524a}$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}. \tag{15.524b}$$

Notez le changement de point de départ de la somme au passage.

Autre exemple :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{x^3}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2}\right) \tag{15.525a}$$

$$= -\frac{\ln(x-1)}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}. \tag{15.525b}$$

Si le polynôme possède des racines non entières, les choses se compliquent.

Exemple 15.161.
Calculons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}. \tag{15.526}$$

Si $x \geqslant 0$, en posant $t = \sqrt{x}$ nous trouvons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{15.527}$$

Étudions

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{15.528}$$

Nous avons

$$H'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \sum_{n=0} (t^2)^n = \frac{1}{1-t^2}. \tag{15.529}$$ EqBuPjcM

Une primitive de cette fonction est

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right|. \tag{15.530}$$

En $t = 0$, cette fonction vaut 0 qui est la bonne valeur. Donc nous avons bien

$$H(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right|. \tag{15.531}$$

Notons que ce que l'équation (15.529) nous dit est que $H(t)$ est une primitive de $1/(1-t^2)$. Il faut choisir la bonne primitive en fixant une valeur.

Nous avons donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| \tag{15.532}$$

pour $x > 0$. Nous devons encore trouver ce que cela vaut pour $x < 0$.

Nous posons successivement $X = -x$ puis $g(X) = f(-X)$. Ce que nous devons calculer est

$$g(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{15.533}$$

Si nous posons

$$h(t) = \sum \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}, \tag{15.534}$$

alors

$$h'(t) = \sum (-1)^n t^{2n} = \sum (-t^2)^n = \frac{1}{1+t^2}, \tag{15.535}$$

par conséquent $h(t) = \arctan(t)$ (cela avait déjà été déduit à l'envers dans l'exemple 15.159).

Au final

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| & \text{si } x > 0 \\ \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{15.536}$$ EqIHlDjG

Notons qu'elle est continue en zéro à gauche et à droite.

△

Exemple 15.162.
Nous considérons l'exemple suivant :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3n+2}. \tag{15.537}$$

Nous posons $t = \sqrt[3]{x}$, et nous substituons :

$$\frac{x^n}{3n+2} = \frac{t^{3n}}{3n+2} = \frac{1}{t^2} \frac{t^{3n+2}}{3n+2}. \tag{15.538}$$

Nous devons étudier la fonction

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n+2}}{3n+2} \tag{15.539}$$

Nous avons

$$g'(t) = \sum_{n=0} t^{3n+1} = t \sum_{n=0} t^{3n} = \frac{t}{1-t^3}. \tag{15.540}$$

Notons que $g(0) = 0$. △

Exemple 15.163.
Calculer le nombre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \tag{15.541}$$

EqgUyKYe

Nous aurions envie de dire que cela est $f(-1)$ pour la fonction f donnée en (15.536). Le problème est que le rayon de convergence de f étant 1, rien n'est garanti quand au fait que la fonction y soit continue en $x=-1$. En particulier nous devons justifier le fait que

$$\lim_{x\to -1} \sum_n \frac{x^n}{2n+1} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt{-x}} \arctan(\sqrt{-x}). \tag{15.542}$$

Ce qui nous sauve est le critère d'Abel radial (théorème 15.46). En effet la série

$$\sum \frac{r^n}{2n+1} \tag{15.543}$$

EqAFrXRB

étant convergente avec $r=-1$, la série correspondante est continue sur $[-1,0]$. Nous pouvons donc calculer la série (15.541) en posant $x=-1$ dans (15.536) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \tag{15.544}$$

Note : la série (15.543) ne converge pas avec $r=1$. La fonction f n'est pas continue en $x=1$. △

ExGxzLlP

Exemple 15.164.
Nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{15.545}$$

En effet si nous désignons par f la somme à gauche, nous trouvons que $f=g'$ avec

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n. \tag{15.546}$$

Nous savons par ailleurs que $g(x)=1/(1-x)$. Par conséquent

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{15.547}$$

△

15.12.3.3 Sage, primitives et logarithme complexe

ooOPWYooDDSZWx

15.165.
Attention : Sage pourrait nous induire en erreur si nous n'y prenions pas garde. En effet ce que vous ne savez pas mais que Sage sait, c'est que

$$\ln(-1) = i\pi. \tag{15.548}$$

Par conséquent Sage se permet de donner des primitives sans valeurs absolues dans le logarithme :

```
sage: f(x)=1/x
sage: f.integrate(x)
x |--> log(x)
```

La primitive à laquelle on s'attend d'habitude est $\ln(|x|)$. Ici la réponse est correcte parce que si x est négatif nous avons

$$\ln(x) = \ln\big((-1)|x|\big) = \ln(-1) + \ln(|x|). \tag{15.549}$$

Cette fonction est donc décalée de la primitive usuelle seulement de la constante $\ln(-1)$.

Un exemple plus élaboré :

```
sage: h(x)=1/(1-x**2)
sage: H=h.integrate(x)
sage: H
x |--> -1/2*log(x - 1) + 1/2*log(x + 1)
sage: H(0)
-1/2*I*pi
```

Exemple 15.166.
Encore une fois il faut faire attention en demandant la primitive à Sage :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.7.1, Release Date: 2011-08-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x)=x/(1-x**3)
sage: F=f.integrate(x)
sage: F(0)
-1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3))
```

Cette fois la primitive proposée diffère de celle qu'on cherche de la constante complexe

$$-\frac{\pi}{3}i. \tag{15.550}$$

Mais il y a pire si nous voulons tracer. Nous voudrions définir la fonction $F_2(x) = F(x) - F(0)$. Mathématiquement c'est bien de cette fonction que nous parlons, mais :

```
sage: F2(x)=F(x)-F(0)
sage: F2(x)
1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*(2*x + 1)*sqrt(3)) +
    +1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3)) - 1/3*log(x - 1) + 1/6*log(x^2 + x + 1)
sage: F2.plot(x,-0.1,0.1)
verbose 0 (4101: plot.py, generate_plot_points)
        WARNING: When plotting, failed to evaluate function at 200 points.
verbose 0 (4101: plot.py, generate_plot_points)
        Last error message: 'unable to simplify to float approximation'
```

Il refuse de tracer. Pourquoi ? La partie complexe de l'expression de F_2 est mathématiquement nulle, mais elle est en deux parties :

$$\frac{\pi}{3} + \text{la partie imaginaire de} - \frac{1}{3}\ln(x-1). \tag{15.551}$$

Lorsque Sage tente de tracer, il donne à x un certain nombre de valeurs et calcule une *valeur approchée* de $\ln(x-1)$. Cette dernière ne se simplifie pas avec le nombre *exact* $\pi/3$. Sage reste donc avec une partie imaginaire qu'il ne peut pas tracer.

Notez la nuance :

```
sage: ln(-0.1)
-2.30258509299405 + 3.14159265358979*I
sage: ln(-1/10)
I*pi + log(1/10)
```

Du coup nous avons aussi

```
sage: F2(-0.1)
1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(0.266666666666667*sqrt(3))
    + 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3)) - 0.0474885065133152 - 1.04719755119660*I
```

△

15.12.3.4 Nombres de Bell

Ici nous montrerions bien le théorème 15.188 sur les nombres de Bell parce que c'est essentiellement un résultat sur les séries entières et leurs manipulations. Hélas, il demande un tout petit peu d'équation différentielle (presque rien). Donc il est postposé jusqu'en page 1422.

15.13 Séries entières de matrices

secEVnZXgf

Nous nous proposons d'étudier des séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{15.552}$$

où A est une matrice. L'essentiel de la théorie va rester. Nous considérons une norme algébrique (définition 10.78), c'est-à-dire $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

15.13.1 Rayon de convergence

La notion de rayon de convergence de cette série reste la même : c'est la définition 15.12 qui ne dépend que des coefficients a_k et pas du tout de ce qu'on met à côté dans la somme. Évidemment il faudra montrer que dans le cas des matrices, le nom « rayon de convergence » n'est pas usurpé.

PropFIPooSSmJDQ

Proposition 15.167.
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$ de rayon de convergence R et $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\|A\| < R$. Alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{15.553}$$

converge absolument, c'est-à-dire que $\sum_k \|a_k A^k\| < \infty$.

Démonstration. Nous avons les majorations

$$\|a_n A^n\| \leqslant |a_n| \|A^n\| \leqslant |a_n| \|A\|^n. \tag{15.554}$$

Par hypothèse $\|A\| < R$ et R est un supremum, donc il existe r tel que $\|A\| < r < R$ avec $(a_n r^n)$ borné. Nommons M un majorant de la suite $(a_n r^n)$. Alors nous avons

$$\|a_n A^n\| \leqslant |a_n| r^n \frac{\|A\|^n}{r^n} \leqslant M \left(\frac{\|A\|}{r} \right)^n. \tag{15.555}$$

La série du membre de droite converge parce que c'est une série géométrique de raison plus petite que 1, proposition 10.172. □

15.13.2 Convergence et rayon spectral

Le concept de rayon spectral permet aussi de donner des informations sur la convergence de séries de matrices. Pour rappel le rayon spectral d'une matrice est le maximum du module de ses valeurs propres (définition 10.79). Le rayon spectral de la matrice A est noté $\rho(A)$.

La proposition suivante sera redémontrée indépendamment dans le théorème 15.169.

PROPooDJFLooBqqEPT

Proposition 15.168 ([137]).
Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ est telle que $\rho(A) < 1$, alors $A^n \to 0$.

Démonstration. Nous nous plaçons dans une base des espaces caractéristiques[61] de A, c'est-à-dire que nous supposons que la matrice A a la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{1} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \mathbb{1} + N_s \end{pmatrix} \tag{15.556}$$

EqWMykgLo

où les λ_i sont les valeurs propres de A et les N_i sont nilpotentes. En effet nous savons que l'espace caractéristique F_{λ_i} est l'espace de nilpolence de $A - \lambda_i \mathbb{1}$. Si nous notons A_i la restriction de A à cet espace, la matrice $N_i = A_i - \lambda_i \mathbb{1}$ est nilpotente. Du coup $A_i = \lambda_I \mathbb{1} + N_i$ et nous avons bien la décomposition (15.556).

Nous avons donc $A^n \to 0$ si et seulement si $(N_i + \lambda_i \mathbb{1})^n \to 0$ pour tout i. Soit donc N nilpotente et $\lambda < 1$ (parce que nous savons que toutes les valeurs propres de A sont inférieures à un). Nous avons

$$(\lambda \mathbb{1} + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k. \tag{15.557}$$

Nous voyons que le nombre de termes dans la somme ne dépend pas de n. De plus pour chacun de termes, la puissance de N ne dépend pas non plus de n. Le terme

$$\binom{n}{k} \lambda^{n-k} \leqslant P(n) \lambda^{n-k} \tag{15.558}$$

où P est un polynôme tend vers zéro lorsque n devient grand parce que c'est un cas polynôme fois exponentielle. □

[61] Voir le théorème 8.261

THOooMNLGooKETwhh

Théorème 15.169 (Série de Von Neumann, thème 41[445]).
Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les affirmations suivantes sont équivalentes.

ITEMooCGLSooZsMXSt

(1) $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$

ITEMooYBGEooXAzVbD

(2) $\rho(A) < 1$

ITEMooEJSQooTqkBbo

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ *converge.*

Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, nous avons aussi

- $\mathbb{1} - A$ *est inversible,*
- $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (\mathbb{1} - A)^{-1}$

Démonstration. Nous supposons qu'une norme est donnée sur $\mathbb{K}^n$ et nous considérons sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ la topologie associée à la norme subordonnée[62]. Nous subdivisons la preuves en différentes implications.

(1) **(1) implique (2)** Si $\rho(A) \geqslant 1$, en combinant la proposition 12.116 avec la proposition 12.118, nous avons

$$\|A^m\| \geqslant \big(\rho(A)\big)^m \geqslant 1 \tag{15.559}$$

Mais la limite $A^k \xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{K})} 0$ signifie la limite $\|A^k\| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$. Le fait que tous les éléments de la suite soient plus grand que 1 empêche cette limite.

(2) **(2) implique (1)**
Vu que $\rho(A) < 1$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \epsilon < 1$. Par le lemme 12.117 il existe une norme N sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ telle que $N(A) \leqslant \rho(A) + \epsilon < 1$. Notons que cette norme N dépend de A et de ϵ.

Avec cette norme nous avons

$$N(A^k) \leqslant N(A)^k \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{15.560}$$

Cela signifie que $A^k \xrightarrow{N} 0$. L'équivalence entre toutes les normes sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ donne alors la convergence $A^k \xrightarrow{\|.\|} 0$.

Pour une preuve alternative de cette implication, voir la proposition 15.168.

(3) **(3) implique (1)**
La convergence d'une série implique que la norme du terme général converge vers zéro par la proposition 10.121. Nous avons donc $\|A^k\| \to 0$, ce qui signifie $A^k \to 0$, et donc $\rho(A) < 1$ parce que (1) implique (2).

(4) $\rho(A) < 1$ **implique** $\mathbb{1} - A$ **est inversible**
Si μ est une valeur propre de $\mathbb{1} - A$ alors

$$\det\big((\mathbb{1} - A) - \mu\mathbb{1}\big) = \det\big(A - (1-\mu)\mathbb{1}\big), \tag{15.561}$$

donc $1 - \mu$ est une valeur propre de A. Donc les valeurs propres de $\mathbb{1} - A$ sont les nombres $1 - \lambda_i$ où les λ sont les valeurs propres de A. Par hypothèse, nous avons $\lambda_i < 1$ pour tout i, donc les valeurs propres de $\mathbb{1} - A$ sont toutes non nulles. Donc $\mathbb{1} - A$ est inversible (pas de noyau).

(5) **Le reste** Nous montrons à présent que si $\rho(A) < 1$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge vers $\mathbb{1} - A$. Pour cela nous savons déjà que $\mathbb{1} - A$ est inversible. Nous posons

$$B_m = \mathbb{1} + A + \ldots + A^m, \tag{15.562}$$

ce qui donne immédiatement $AB_m = A + A^2 + \ldots + A^{m+1}$. Nous avons donc

$$(\mathbb{1} - A)B_m = \mathbb{1} - A^{m+1}. \tag{15.563}$$

Nous savons que $\lim_{m\to 0} A^m = 0$, donc

$$(\mathbb{1} - A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \lim_{k\to\infty}(\mathbb{1} - A)B_k = \lim_{k\to\infty}(\mathbb{1} - A^{k+1}) = \mathbb{1}. \tag{15.564}$$

Notez au passage que nous avons permuté la somme avec le produit matriciel (voir 10.6.3).

□

[62] Si on parle de convergence d'une suite, c'est qu'il y a une topologie quelque part.

15.13.3 Exponentielle et logarithme de matrice

subsecXNcaQfZ

La définition de l'exponentielle dans le cas des matrices est celle sur les algèbres normées non commutatives, 15.76.

PropXFfOiOb

Proposition 15.170.
L'application

$$\begin{aligned}\exp\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})\\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\end{aligned} \tag{15.565}$$

est une application de classe C^∞. Sa différentielle en zéro est l'identité : $(d\exp)_0 = \mathrm{Id}$.

Démonstration. En ce qui concerne la continuité, nous savons que le rayon de convergence de la suite $\frac{1}{k!}$ est infini ; la proposition 15.149 conclut.

Pour la différentielle, c'est la proposition 15.148 qui nous permet d'écrire

$$d\exp_0(U) = \frac{d}{dt}\Big[\exp(tU)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kU^k}{k!}\Big]_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{kt^{k-1}U^k}{k!}\Big|_{t=0} = U \tag{15.566}$$

parce que seul le terme $k=1$ n'est pas nul. □

Nous avons vu par la proposition 15.150 que toute matrice complexe inversible a un logarithme. Nous allons maintenant parler de logarithme de matrices réelles avec une condition sur la norme. La formule ci-dessous montre explicitement que le logarithme est réel.

$$\begin{aligned}\ln\colon \{A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \text{ tel que } \|A-\mathbb{1}\|<1\} &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})\\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(A-\mathbb{1})^{k+1}}{k+1}.\end{aligned} \tag{15.567}$$

LemQZIQxaB

Lemme 15.171.
Si $\|m\|<1$ dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, alors nous posons

$$\ln(\mathbb{1}+m) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{m^{k+1}}{k+1}. \tag{15.568}$$

EqIKgMabb

Cette fonction a les propriétés suivantes.

(1) Elle est de classe C^∞.

(2) Elle est un bon logarithme au sens où

$$e^{\ln(\mathbb{1}+m)} = \mathbb{1}+m. \tag{15.569}$$

(3) Elle vérifie l'approximation

$$\ln(1+m) = m+\sigma(m) \tag{15.570}$$

où σ a la propriété que

$$\lim_{k\to\infty} k\sigma\left(\frac{m}{k}\right) = 0. \tag{15.571}$$

Démonstration. Le rayon de convergence de la suite $a_k = \frac{(-1)^k}{k+1}$ est 1. Donc l'application donnée est C^∞ sur $B(0,1)$ par le théorème 15.149.

D'après la formule (15.568) nous avons

$$\sigma(m) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{m^{l+1}}{l+1}. \tag{15.572}$$

Nous avons alors

$$k\sigma(\frac{m}{k}) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{m^{l+1}}{k^l(l+1)}, \tag{15.573}$$

et donc

$$\|k\sigma(\frac{m}{k})\| \leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\|m\|^{l+1}}{k^l(l+1)} \leqslant \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\|m\|^{l+1}}{l+1} \overset{k\to\infty}{\to} 0 \tag{15.574}$$

Cela prouve la dernière assertion. □

Proposition 15.172.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A \in \mathrm{End}(V)$. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathrm{End}(V) \\ t &\mapsto e^{tA}. \end{aligned} \tag{15.575}$$

Cette fonction vérifie

$$f'(t) = \big(e^{tA}\big)' = Ae^{tA}. \tag{15.576}$$

Démonstration. Si nous posons $f_k(t) = \frac{t^k A^k}{k!}$ alors la fonction f est la somme : $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$. Nous allons permuter la somme et la dérivation à l'aide du théorème 15.9. Vu que

$$f_k'(t) = \frac{kt^{k-1}A^k}{k!}, \tag{15.577}$$

la suite des dérivées converge normalement sur $\mathbb{R}$, nous pouvons dériver terme à terme pour obtenir

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!}\Big)' = \sum_{k=0}^{\infty} kt^{k-1}\frac{A^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1}\frac{A^k}{k!} = A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{tA}. \tag{15.578}$$

Notez le jeu au niveau du point départ de la somme : elle passe de 0 à 1 parce que le terme zéro est nul, mais la simplification $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$ n'a pas de sens pour $k = 0$. □

LemQEARooLRXEef

Lemme 15.173 ([551]).
Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ où V est un espace vectoriel réel de dimension finie. Si nous notons λ_i $(i = 1, \dots, r)$ les valeurs propres distinctes de A alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\|e^{tA}\| \leqslant P\big(|t|\big)\sum_{i=1}^{r} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_i)}. \tag{15.579}$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique de A se note, d'après le corolaire 12.112 de la façon suivante :

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i} \tag{15.580}$$

où m_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i. Le lemme des noyaux 8.90 nous dit qu'en posant

$$V_i = \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i} \tag{15.581}$$

nous avons $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$. Nous nommons $p_i\colon V \to V$ la projection canonique de E sur V_i ainsi que x_i la composante de $x \in V$ dans l'espace caractéristique V_i et nous posons $A_i = p_i \circ A$. Les espaces caractéristiques sont stables par A (lemme 8.258), donc $(Ax_i)_i = Ax_i$. Par conséquent $\sum_i A_i p_i = A$ parce que

$$\big(\sum_i p_i A p_i\big)(x) = \sum_i (Ax_i)_i = \sum_i Ax_i = A\sum_i x_i = Ax. \tag{15.582}$$

En ce qui concerne les puissances de A nous avons de même

$$A_i^n x_i = A_i \underbrace{A_i^{n-1}x_i}_{\in V_i} = AA_i^{n-1}x_i = A^n x_i, \tag{15.583}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{r} A_i^n p_i = A^n. \tag{15.584}$$

En particulier,

$$e^{tA} = \sum_i e^{tA_i}p_i. \tag{15.585}$$

EqPVIooGxwFBH

C'est de cette exponentielle de matrice que nous devons étudier la norme.

La décomposition de Dunford du théorème 8.262 est toujours un bon plan pour traiter avec les exponentielles : nous avons $A = s + n$ avec

$$s = \sum_k \lambda_k p_k, \quad n = \sum_k (A - \lambda_k \mathbb{1})p_k. \tag{15.586}$$

Nous montrons que la décomposition de Dunford de p_iA est $p_iA = p_is + p_in$. Nous avons

$$p_is = \sum_k \lambda_k p_i p_k = \lambda_i p_i \tag{15.587}$$

qui est bien diagonalisable. De plus les espaces caractéristiques sont stables par n, donc p_in est nilpotent. Enfin ils commutent :

$$[p_is, p_in] = \lambda_i(p_in - p_inp_i). \tag{15.588}$$

EqNJIooDxKlxn

Vu que n préserve les espaces caractéristiques, lorsque $v \in V_k$ avec $k \neq i$ nous avons $p_inp_iv = 0$ et $p_inv = 0$. Mais si $v \in V_i$ alors

$$p_inp_iv = p_inv = nv \tag{15.589}$$

et $p_inv = nv$, donc les opérateurs p_in et p_inp_i sont égaux et (15.588) donne bien zéro. En ce qui concerne l'exponentielle de A_i nous avons

$$e^{p_iA} = e^{p_is}e^{p_in} = e^{\lambda_ip_i}\exp\big((A - \lambda_i\mathbb{1})p_i\big). \tag{15.590}$$

Nous pouvons maintenant sérieusement nous attaquer à la norme de e^{tA} de l'équation (15.585). D'abord nous avons $\|p_i\| = 1$ parce que l'opérateur p_i est l'identité sur au moins un vecteur (en fait tout ceux de l'espace caractéristique V_i). En utilisant les propriétés de la norme opérateur[63], nous trouvons dans un premier temps[64] :

$$\|e^{tA}\| \leqslant \sum_{i=1}^{r}\|e^{tA_i}\| \leqslant \sum_{i=1}^{r}|e^{t\lambda_i}|\underbrace{\sum_{k=0}^{m_i}\frac{|t|^k}{k!}\|A - \lambda_i\mathbb{1}_i\|^k}_{=P_i(|t|}} \tag{15.591}$$

où $\mathbb{1}_i$ est l'opérateur identité sur V_i. Petit détail dans le calcul :

$$\|e^{\lambda_ip_i}\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^l}{k!}\|p_i\|^l = e^{\lambda_i}. \tag{15.592}$$

Notons que tous les termes de $P_i(|t|)$ et $P_i\big(|t|\big)$ sont positifs, de telle sorte que nous pouvons majorer en ajoutant des termes partout. À la place d'avoir $P_i(|t|)$ comme coefficient de $|e^{t\lambda_i}|$ nous majorons en mettant $\sum_{j=1}^{r}P_j(|t|)$ comme coefficient :

$$\|e^{tA}\| \leqslant \sum_{i=1}^{r}|e^{t\lambda_i}|P_i\big(|t|\big) = \sum_{i=1}^{r}|e^{t\lambda_i}|\sum_{j=1}^{r}P_j\big(|t|\big) = P\big(|t|\big)\sum_{i=1}^{r}e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)}. \tag{15.593}$$

L'arrivée de la partie réelle est une égalité usuelle pour les nombres complexes : $|e^{a+bi}| = e^a|e^{bi}| = e^a$. □

15.13.4 Calcul effectif de l'exponentielle d'une matrice

SUBSECooGAHVooBRUFub

Nous reprenons l'exemple de [552]. Soit A une matrice dont le polynôme minimum s'écrit

$$P(X) = (X-1)^2(X-2). \tag{15.594}$$

Par le théorème 8.90 de décomposition des noyaux nous avons

$$E = \ker(A-1)^2 \oplus \ker(A-2). \tag{15.595}$$

En suivant les notations de ce théorème nous avons $P_1(X) = (X-1)^2$, $P_2(X) = X-2$ et

$$Q_1(X) = X - 2 \tag{15.596a}$$
$$Q_2(X) = (X-1)^2. \tag{15.596b}$$

En posant

$$\begin{aligned} R_1(X) &= -X \\ R_2(X) &= 1, \end{aligned} \tag{15.597}$$

nous avons une solution de Bezout :

$$R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1. \tag{15.598}$$

[63] Surtout le fait que ce soit une norme d'algèbre, lemme 10.84.
[64] Si les valeurs propres de A sont λ_i, celles de tA sont $t\lambda_i$.

Conformément au théorème 8.90(3), le projecteur p_i sur $\ker\big(P_i(A)\big)$ est $(R_iQ_i)(A)$:

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathtt{proj}_{\ker(A-1)^2} = -A(A-2) \\ p_2 &= \mathtt{proj}_{\ker(A-2)} = (A-1)^2 \end{aligned} \tag{15.599}$$

Passons maintenant au calcul de l'exponentielle[65]. Nous avons évidemment

$$e^A = e^Ap_1 + e^Ap_2. \tag{15.600}$$ EQooVIOWooACVAoZ

Afin de nous adapter au projecteurs que nous avons en main, nous écrivons $A = \mathbb{1}+(A-\mathbb{1})$ et nous utilisons la proposition 15.79(4) :

$$e^A = e^{\mathbb{1}+(A-\mathbb{1})} = e^{\mathbb{1}}e^{A-\mathbb{1}} = ee^{A-1}. \tag{15.601}$$

Pour tout x, nous avons $(A-\mathbb{1})^kp_1(x) = 0$ dès que $k \geqslant 2$. Donc nous avons

$$e^Ap_1(x) = ee^{A-1}p_1(x) = e\sum_k \frac{(A-\mathbb{1})^k}{k!}p_1(x) = ep_1(x) + e(A-\mathbb{1})p_1(x) = eAp_1(x). \tag{15.602}$$

En ce qui concerne p_2 nous faisons de même en partant de $e^A = e^{2\mathbb{1}}e^{A-2\mathbb{1}}$:

$$e^Ap_2(x) = e^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A-\mathbb{1})^k}{k!}p_2(x) = e^2p_2(x). \tag{15.603}$$

En recollant les morceaux avec (15.600),

$$e^A(x) = eAp_1(x) + e^2p_2(x) = -eA^2(A-2)x + e^2(A-1)^2x. \tag{15.604}$$

Au final nous avons prouvé que

$$e^A = -eA^2(A-2) + e^2(A-1)^2. \tag{15.605}$$ PROPooFXPZooKUEarD

Proposition 15.174 ([1])**.**
Soit un espace de Banach réel E. Nous considérons l'espace vectoriel $\mathrm{End}(E)$ *muni de la norme opérateur.*

(1) La partie $\mathrm{GL}(E)$ *des opérateurs inversibles est ouverte.*

(2) L'opérateur d'inversion

$$\begin{aligned} i\colon \mathrm{GL}(E) &\to \mathrm{GL}(E) \\ f &\mapsto f^{-1} \end{aligned} \tag{15.606}$$

est analytique.

Démonstration. La partie $\mathrm{GL}(E)$ est formée des opérateurs inversibles qui sont continus et dont l'inverse est continu. Or un opérateur est continu si et seulement si il est borné (proposition 10.85).

Donc $\mathrm{GL}(E)$ est une intersection de deux ouverts de $\mathrm{End}(E)$: les opérateurs linéaires continus et les opérateurs linéaires inversibles. Donc $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert.

Vu que $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert et contenu dans Ω, une application analytique sur Ω est analytique sur $\mathrm{GL}(E)$. □

15.14 Lemme de Borel

15.14.1 Fonctions plateaux, Urysohn, partition de l'unité

subsecOSYAooXXCVjv

Une fonction plateau sur $\mathbb{R}$ est donnée dans le lemme d'Urysohn 15.183. Sur $\mathbb{R}^n$, il y a le lemme d'Urysohn 27.87.

Vous voulez une fonction de classe C^∞ nulle sur un ouvert, mais qui n'est pas nulle partout ? En voici une.

LEMooFLUSooKaZRRY

Lemme 15.175.
La fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.607}$$

est de classe C^∞.

[65] Définition 15.76. Thème 50

Démonstration. Pour tout polynôme P nous avons la limite[66]

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{P(x)} = 0. \tag{15.608}$$

De là, en écrivant les dérivées successives de φ, il est facile de voir qu'elles sont continues en $x = 0$. □

Une variation sur le même thème est l'existence de fonctions infiniment dérivables à support compact, c'est-à-dire des fonctions dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

LEMooLHIFooWpbauN

Lemme 15.176 ([1])**.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{-1/(1-x^2)}}{(1-x^2)^n} = 0. \tag{15.609}$$

Démonstration. D'abord le lemme 15.119 nous indique que

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0. \tag{15.610}$$

Nous prouvons ensuite que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^n} = 0. \tag{15.611}$$

Pour cela nous considérons $\epsilon > 0$. Soit $M > 0$ tel que $x^n e^{-x} < \epsilon$ pour tout $x > M$. Nous considérons δ tel que $0 < x < \delta$ implique $1/x > M$.

Pour de tels x, nous avons $e^{-1/x}/x^n < \epsilon$.

Nous montrons enfin que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{-1/(1-x^2)}}{(1-x^2)} = 0. \tag{15.612}$$

Pour cela, soit $\epsilon > 0$. Soit δ tel que $0 < x < \delta$ implique $e^{-1/x}/x^n < \epsilon$. Soit δ' tel que $1 < x < 1+\delta'$ implique $1 - x^2 < \delta$. Avec ça, nous avons

$$1 < x < 1 + \delta' \Rightarrow \frac{e^{-1/(1-x^2)}}{(1-x^2)^n} < \epsilon. \tag{15.613}$$

□

PROPooAHLKooMFMgFq

Proposition 15.177.
La fonction $\xi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\xi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-\|x\|^2)} & \text{si } x \in B(0,1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.614}$$

EqOBYNEMu

est de classe C^∞ et à support compact.

Démonstration. Le fait que le support soit compact est le fait qu'un support est toujours fermé (c'est dans la définition) et que le support de ξ est borné, contenu dans $B(0,1)$. Le vrai travail est de montrer que cette fonction est de classe C^∞.

Nous commençons par voir en dimension 1. C'est-à-dire la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{15.615}$$

Le lemme 15.176 dit que f est continue. En ce qui concerne les dérivées de f, vous pouvez montrer par récurrence que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{P_n(x)}{(x^2-1)} f(x) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{15.616}$$

où P_n est un polynôme. Le lemme 15.176 (encore lui) nous indique que $f^{(n)}$ est continue.

Pour que ξ soit de classe C^∞, il suffit maintenant d'invoquer la proposition 7.289 qui dit que la norme est une application de classe C^∞. □

[66] Voir la proposition 15.120(3).

COROooHHZXooXmwGmC

Corolaire 15.178.
Il existe une fonction $\xi \in \mathscr{D}\big(B(0,R)\big)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \xi(x)dx = 1$.

Démonstration. Prenez la fonction de la proposition 15.177. Si $R < 1$, faites une redéfinition $\xi_2 = \xi(\lambda x)$ pour que le support soit dans $B(0,R)$. Ensuite, si l'intégrale n'est pas 1, encore une redéfinition $\xi_3 = \mu\xi_2$. □

LEMooRVSIooKcpWoK

Lemme 15.179 ([186]).
Soit $m > 0$. Il existe une application $\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\psi_m(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x > m \\ positive & si\ x \in [0,m]. \end{cases} \tag{15.617}$$

Démonstration. La proposition 15.177 dit que l'application

$$\begin{aligned} \xi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{15.618}$$

est de classe C^∞ à support compact. Nous posons $M = \int_{\mathbb{R}} \xi$ et

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{x} \xi(t)dt. \end{aligned} \tag{15.619}$$

Notez que l'intégrale n'est en réalité qu'entre -1 et x parce que ξ est nulle en-dehors de $|x| < 1$. Nous avons donc $f(x) = 0$ pour tout $x < -1$. Vu que $\int_1^a \xi$ est nulle pour tout $a > 1$, nous avons aussi $f(x) = f(1) = 1$ pour tout $x > 1$.

L'application f est non nulle entre -1 et 1, vaut 0 à gauche et 1 à droite. Il reste à adapter pour construire ψ_m. On pose

$$\psi_m(x) = 1 - (f \circ \mu)(x) \tag{15.620}$$

où $\mu(x) = ax + b$. Les paramètres a et b sont fixés pour avoir $\mu(0) = -1$ et $\mu(m) = 1$. Ce n'est pas très compliqué à résoudre, et le résultat est que l'application recherchée est

$$\psi_m(x) = 1 - f\big(\frac{2}{m}x - 1\big). \tag{15.621}$$

□

LEMooFFPVooDKGUAp

Lemme 15.180 ([287]).
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

(1) $0 \leqslant f \leqslant 1$,

(2) $f = 0$ *sur* $]-\infty, a]$,

(3) $f = 1$ *sur* $[b, \infty[$.

Démonstration. C'est une variation sur le thème de la fonction du lemme 15.179 ; il s'agit de la retourner, dilater et décaler. Posez successivement $f_1(x) = \psi_m(-x)$, $f_2(x) = f_1\big(mx/(b-a)\big)$ et $f_3(x) = f_2(x-a)$ et je crois que le compte est bon. La fonction f_3 est celle que nous cherchons. □

PROPooAZJZooTYWjzb

Proposition 15.181.
Soient $a < b < c < d$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs positives telle que

(1) $f(x) = 1$ *si* $x \in [b,c]$

(2) $\operatorname{supp}(f) \subset [a,d]$.

Démonstration. Nous considérons la fonction ψ_m du lemme 15.179, et nous considérons les fonctions

$$f_1(x) = \psi_{d-c}(x-c) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < c \\ 0 & \text{si } x > d \\ \text{positive} & \text{si } x \in [c,d]. \end{cases} \tag{15.622a}$$

$$f_2(x) = \psi(b-a)(b-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > b \\ \text{positive} & \text{si } x \in [a,b]. \end{cases}, \tag{15.622b}$$

et finalement la fonction suivante répond à la question des fonctions plateaux sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = f_1(x)f_2(x). \tag{15.623}$$ EqIHAFooXjfcll

□

Il ne faudrait pas croire pour autant que tout est toujours rose au pays des fonctions C^∞ à support compact.

Proposition 15.182.
Si ϕ est une fonction C^∞ non nulle à support compact sur $\mathbb{R}$, alors ϕ'/ϕ n'est pas bornée.

Plus présisément, nous posons $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \phi(x) \neq 0\}$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} f\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \phi'(x)/\phi(x) \end{aligned} \tag{15.624}$$

n'est pas bornée.

Démonstration. Quitte à décaller et à multiplier, nous supposons que $\phi(0) = 1$. Sinon vous considérez x_0 tel que $\phi(x_0) = y_0 \neq 0$ et vous adaptez tout le reste de la démonstration à vos frais.

Vu que ϕ est continue, la partie $Z = \{x \geqslant 0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \phi(x) = 0\}$ est fermée. Elle est également bornée vers le bas par 0. Donc elle possède un minimum que nous nommons a :

$$a = \min\{x \geqslant 0 \text{ tel que } \phi(x) = 0\}. \tag{15.625}$$

Les valeurs de ϕ qui vons nous intéresser sont :

$$\phi(x) = \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in [0,a[\\ = 0 & \text{si } x = a. \end{cases} \tag{15.626}$$

Enfin, nous posons

$$M = \sup\{\phi'(x)/\phi(x)\}_{x\in[0,a[}. \tag{15.627}$$

Nous supposons que $M < \infty$[67].

Nous posons

$$\begin{aligned} F\colon [0,a[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}dt. \end{aligned} \tag{15.628}$$

Vu que ϕ est de classe C^∞ et que x est dans $[0,a[$ sur lequel ϕ ne s'annule pas, cette intégrale n'a rien d'exceptionnel.

Nous pouvons majorer F de la façon suivantes :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}dt \leqslant \int_0^x M dt = Mx < Ma. \tag{15.629}$$

La proposition 14.287 lie primitive et intégrale ; celle de $\phi'(x)/\phi(x)$ est $\ln\big(\phi(x)\big)$ nous avons donc

$$F(x) = \ln(\phi(x)) - \ln(\phi(0)) = \ln\big(\phi(x)\big). \tag{15.630}$$ EQooCEVKooLgXiaj

Mais vu que $\lim_{x\to a}\phi(x) = 0$, nous avons $\lim_{x\to a} F(x) = \infty$, d'où la contradiction. □

Notez que l'expression 15.630 montre que $\phi'(x)/\phi(x)$ tend vers $-\infty$, ce qui est logique : la dérivée est négative alors que ϕ reste positive. Ce que dit la proposition est qu'une fonction C^∞ à support compact tend plus vite vers zéro que sa dérivée.

[67] Vous pouvez ne pas supposer cela et voir le reste de la preuve comme une démonstration que $M = \infty$. Ici nous allons faire par l'absurde et montrer une contradiction en supposant que $M < \infty$.

15.14.2 Lemme de Urysohn

Le lemme d'Urysohn comprend de nombreuses variantes plus ou moins générales[68]. En voici une parmi les plus simples.

LEMooECTNooKagaRU

Lemme 15.183 (Lemme d'Urysohn)**.**
Soient un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}$ et un compact K inclus dans $\mathcal{U}$. Il existe une fonction $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ de classe C^∞ telle que

(1) $f(x) = 1$ *pour* $x \in K$,

(2) $\text{supp}(f) \subset \mathcal{U}$.

Démonstration. Vu que K est compact, il est borné (théorème 9.24). Nous posons $b = \min(K)$ et $c = \max(K)$. En particulier b et c sont des éléments de K et donc de $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, il existe des boules centrées en b et c contenues dans $\mathcal{U}$. Soit r le rayon de telles boules :

$$B(b,r) \subset \mathcal{U} \tag{15.631a}$$
$$B(c,r) \subset \mathcal{U}. \tag{15.631b}$$

Nous posons $a = b - r \in \mathcal{U}$ et $d = c + r \in \mathcal{U}$. Nous considérons à présent la fonction plateau f de la proposition 15.181. Elle est de classe C^∞ et vérifie $f(x) = 1$ pour $x \in [b,c] = K$ ainsi que $f(x) = 0$ hors de $[a,d] \subset \mathcal{U}$. □

15.184.
Notons que la fonction du lemme d'Urysohn 15.183 n'épouse pas spécialement très bien la forme de K. Si par exemple $K = [0,1] \cup [10,11]$, la fonction f sera égale à 1 au moins sur $[0,11]$.

LEMooGZXYooZqFzyc

Lemme 15.185 ([1])**.**
Si une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est intégrable, et si $s \in \mathbb{R}$ alors l'application

$$\begin{aligned} f_s\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{s^n} f(x/s) \end{aligned} \tag{15.632}$$

est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_s = \int_{\mathbb{R}^n} f. \tag{15.633}$$

Démonstration. Il s'agit d'appliquer le théorème 14.282(2) au changement de variable $\phi(x) = x/s$. Nous avons $f_s = \frac{1}{s^n} f \circ \phi$, et

$$(d\phi)_a v = \frac{1}{s} v, \tag{15.634}$$

de telle sorte que le déterminant de $d\phi$ soit une constante et vaille $\det(d\phi) = 1/s^n$. Enfin ϕ est une bijection de $\mathbb{R}^n$. Nous avons tous les ingrédients pour faire le changement de variables :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_s(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \phi)(x) \frac{1}{s^n} dx = \int_{\phi(\mathbb{R}^n)} f(xdx). \tag{15.635}$$

□

Pour une fonction plateau sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, voir le lemme d'Urysohn, proposition 27.87.

15.14.3 Le lemme de Borel

LemRENlIEL

Lemme 15.186 (Lemme de Borel[128])**.**
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(k)}(0) = a_k$ pour tout $k \geqslant 0$.

Démonstration. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ et telle que $\text{supp}(\varphi) \subset]-1,1[$.

Nous commençons par considérer une suite de réels strictement positifs (λ_k) dont nous fixerons une valeur précise plus tard, et nous posons

$$f_k(x) = \varphi(\lambda_k x) \frac{a_k}{k!} x^k. \tag{15.636}$$

[68] Pour une version sur $\mathbb{R}^n$, voir la proposition 27.87.

Nous allons étudier la convergence et les propriétés de $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$.

Calculons (formellement) la m^{e} dérivée de f_k :

$$f_k^{(m)}(x) = \frac{a_k}{k!} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \lambda_k^{m-l} \varphi^{(m-l)}(\lambda_k x)(x^k)^{(l)} \tag{15.637a}$$

$$= a_k \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \lambda_k^{m-l} \varphi^{(m-l)}(\lambda_k x) \frac{x^{k-l}}{(k-l)!}. \tag{15.637b}$$

Notons que nous travaillons à m fixé et que nous ne nous intéressons qu'aux termes avec k assez grand ; nous pouvons donc supposer $k \geqslant m$. De toutes façons pour $\sum_{k=0}^{m} f_k$, on a la classe C^∞, et la permutation de la somme avec tout ce qu'on veut. Vu que φ est continue à support compact nous pouvons poser

$$M_m = \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \|\varphi^j\|_\infty = \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(j)}(x)|. \tag{15.638}$$

Nous continuons en nous fixant un $x \in \mathbb{R}$ et un $k \geqslant m$.

Si $|x| > \frac{1}{\lambda_k}$, alors $\varphi^{(m)}(\lambda_k x) = 0$ parce que $\lambda_k x$ est strictement hors du support de φ qui est $]-1, 1[$. Donc pour $|x| > \frac{1}{\lambda_k}$.

Si par contre $|x| \leqslant \frac{1}{\lambda_k}$, nous avons les majorations

$$|f_k^{(m)}(x)| \leqslant |a_k| \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} |\lambda_k|^{m-l} \underbrace{\varphi^{(m-l)}(\lambda_k x)}_{\leqslant M_m} \frac{1}{(k-l)!} \underbrace{|x|^{k-l}}_{\leqslant (1/\lambda_k)^{k-l}} \tag{15.639a}$$

$$\leqslant |a_k| M_m |\lambda_k|^{m-k} \frac{1}{(k-m)!} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \tag{15.639b}$$

$$\leqslant \frac{|a_k| M_m |\lambda_k|^{m-k} 2^m}{(k-m)!} \tag{15.639c}$$

$$= \frac{|a_k| M_m 2^m}{(k-m)! |\lambda_k|^{k-m}} \tag{15.639d}$$

EqQSPUaun

où pour faire disparaitre la somme de coefficients binomiaux, nous avons remarqué que $\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l}$ est le nombre total de termes dans le développement de $(a+b)^m$, c'est-à-dire 2^m. Nous voulons, pour m fixé, étudier la convergence de la somme de cela. Notons que le 2^m n'a en particulier strictement aucune importance parce qu'on travaille à m fixé.

Nous fixons maintenant la valeur des λ_k :

$$\lambda_k = \max\{|a_k|, 1\}. \tag{15.640}$$

Avec cela, en nous souvenant que nous n'étudions que les termes $k > m$, le dénominateur de (15.639d) est réellement croissant en k, donc nous avons la majoration

$$|f_k^{(m)}(x)| \leqslant \frac{M_m 2^m}{(k-m)!}. \tag{15.641}$$

Au final nous avons

$$\|f_k^{(m)}\|_\infty \leqslant \frac{2^m M_m}{(k-m)!}. \tag{15.642}$$

Et la somme de cela converge sans difficultés. Donc la série

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(x) \tag{15.643}$$

converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons alors permuter la somme et la dérivation par le théorème 15.3. Donc

$$u^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)} \tag{15.644}$$

est continue. En particulier, pour évaluer en zéro, on peut faire

$$u^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(0). \tag{15.645}$$

Nous avons

$$f_k(x) = \varphi(\lambda_k x)\frac{a_k}{k!}x^k. \tag{15.646}$$

Pour calculer la dérivée en zéro, il suffit de la calculer sur un voisinage sur lequel $\varphi(\lambda_k x)$ est la constante 1 ; un tel voisinage existe pour tout k. À ce moment le calcul est classique :

$$f_k^{(m)}(x) = \begin{cases} a_k & \text{si } k = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.647}$$

Finalement nous avons bien

$$u^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(0) = a_k. \tag{15.648}$$

□

Remarque 15.187.
Pour prouver le lemme de Borel, la première chose qui passe par la tête est la fonction toute simple

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}x^k. \tag{15.649}$$

Évidemment si on calcule les dérivées successives de cette fonction, nous trouvons les bons résultats. Le problème est la convergence. Rien qu'en prenant $a_k = k!k^k$, la série ne converge pour aucun x positif. L'idée de multiplier chacun de f_k par une fonction plateau sur un petit intervalle autour de zéro a plusieurs avantages. D'abord on conserve les dérivées correctes parce qu'on ne touche pas à la valeur des f_k sur un petit voisinage. Ensuite cela ne modifie pas la continuité ; et enfin en multipliant par $\varphi(\lambda_k x)$, ça calme méchamment les divergences parce que $\lambda_k x$ passe vite au dessus de 1 (et donc en dehors du support de φ) si λ_k est grand. D'où le fait qu'il soit normal que les λ_k soient de l'ordre des a_k.

15.15 Nombres de Bell

ThoYFAzwSg

Théorème 15.188 (Nombres de Bell[128])**.**
Soient $n \geqslant 1$ et B_n le nombre de partitions distinctes de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ avec la convention que $B_0 = 0$. Alors

(1) La série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}x^n \tag{15.650}$$

EqYCMGBmP

a un rayon de convergence $R > 0$ et sa somme est donnée par

$$f(x) = e^{e^x - 1} \tag{15.651}$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

(2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}. \tag{15.652}$$

(3) Le rayon de convergence de la série (15.650) est en réalité infini : $R = \infty$.

Démonstration. (1) Soient $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Nous notons E_k l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, n+1\}$ pour lesquelles le « paquet » contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$. Calculons le cardinal de E_k.

Pour construire un élément de E_k, il faut d'abord prendre le nombre $n+1$ et lui adjoindre k éléments choisis dans $\{1, \dots, n\}$, ce qui donne $\binom{n}{k}$ possibilités. Ensuite il faut trouver une partition des $(n+1)-(k+1) = n-k$ éléments restants, ce qui fait B_{n-k} possibilités. Donc

$$\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k}B_{n-k}. \tag{15.653}$$

L'intérêt des ensembles E_k est que $\{E_0,\dots,E_n\}$ est une partition de l'ensemble des partitions de $\{1,\dots,n+1\}$, c'est-à-dire que $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\text{Card}(E_k)$, ce qui va nous donner une relation de récurrence pour les B_n :

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\text{Card}(E_k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{n-l}B_l=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}B_l. \tag{15.654}$$

où nous avons utilisé un petit changement de variables $l=n-k$. Afin d'étudier la convergence de la série (15.650), nous allons montrer par récurrence que pour tout n, $B_n<n!$. D'abord pour $n=0$ c'est bon : $B_1=1$ parce que la seule partition de $\{1\}$ est $\{1\}$. Supposons que l'inégalité soit vraie pour une certaine valeur k, et montrons qu'elle est vraie pour la valeur $k+1$.

$$B_{k+1}=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}B_l\leqslant\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}l!=\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}l!=n!\sum_{l=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{(n-l)!}}_{\leqslant 1}\leqslant n!(n+1)=(n+1)! \tag{15.655}$$

où nous avons utilisé le coefficient binomial : $\binom{n}{l}=\frac{n!}{l!(n-l)!}$.

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ nous avons

$$0\leqslant\frac{B_n}{n!}|x^n|\leqslant|x|^n, \tag{15.656}$$

et donc la série a un rayon de convergence au moins aussi grand que celui de la série géométrique, c'est-à-dire que 1. Donc $R\geqslant 1$. Nous nommons R ce rayon de convergence.

(2) Soit $x\in\,]-R,R[$. Pour une telle valeur de x à l'intérieur du disque de convergence, la proposition 15.50 nous permet de dériver terme à terme la série[69]

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k=1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}x^{k+1}, \tag{15.657}$$

pour obtenir

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}(k+1)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{k+1}}{k!}x^k \tag{15.658a}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}B_l\right)\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{B_l}{l!(l-k)!}\right)x^k. \tag{15.658b}$$

En cette expression, nous reconnaissons un produit de Cauchy (proposition 15.27) avec $a_l=\frac{B_l}{l!}$ et $b_n=\frac{1}{n!}$. Vu que ce sont deux séries ayant un rayon de convergence plus grand que zéro, le produit a encore un rayon de convergence plus grand que zéro et nous pouvons prendre le produit des séries :

$$f'(x)=\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{l!}x^l\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\right)=f(x)e^x. \tag{15.659}$$

Étudions l'équation différentielle $y'=ye^x$. D'abord par un argument en lacet de chaussure[70], une solution est de classe C^∞. Ensuite si une solution est non nulle, elle est de signe constant. En effet si $y(x_0)<0$ et $y(x_1)=0$ (on choisit x_1 minimum pour cette propriété parmi les nombres plus grands que x_0) alors il existe[71] un $t\in\,]x_0,x_1[$ tel que $y'(t)>0$, ce qui donnerait $y(t)>0$, ce qui contredirait la minimalité de x_1.

Nous prétendons[72] que cette équation différentielle a un espace de solutions de dimension 1. En effet, si $y'=ye^x$ et $g'=ge^x$ alors en posant $\varphi=y/g$ nous obtenons tout de suite $\varphi'=0$, ce qui signifie que φ est constante, ou encore que y et g sont multiples l'un de l'autre.

Si nous en trouvons une non nulle par n'importe quel moyen, c'est bon. Une solution étant dérivable est continue, donc l'équation $f'=fe^x$ nous indique que f' est continue. Une solution non nulle va automatiquement accepter un petit voisinage sur lequel la manipulation suivante a un sens :

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=e^x, \tag{15.660}$$

[69] C'est ici qu'on utilise la convention $B_0=0$ et ça aura une influence sur le choix de la constante K plus bas.
[70] Genre ce qui est fait pour prouver 15.103(4).
[71] Théorème de Rolle 12.213.
[72] Ou alors on utilise le théorème 32.19 avec $M(x)=e^x$ dans les cas $n=1$ et $I=\,]-R,R[$.

donc $\ln\big(|f(x)|\big) = e^x + C$ et $f(x) = Ke^{e^x}$ pour une certaine constante. Il est vite vérifié que cette fonction est une solution de l'équation différentielle $y'(x) = y(x)e^x$ et par unicité, toutes les solutions sont de cette forme. Autrement dit, l'espace des solutions est l'espace vectoriel $\text{Span}\{x \mapsto e^{e^x}\}$. Étant donné que $f(0) = 0$, nous devons choisir $K = \frac{1}{e}$ et donc

$$f(x) = \frac{1}{e}e^{e^x} = e^{e^x-1}. \tag{15.661}$$

(3) Nous commençons par écrire la fonction f comme une série de puissance. La partie simple du calcul : pour $x \in]-R, R[$, nous avons

$$e^{e^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(kx)^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^l}{k!}\frac{x^l}{l!}. \tag{15.662}$$ EqQDjgiDN

Notons que cela n'est pas une série de puissance en x parce qu'il y a la double somme. Nous allons inverser les sommes au moyen du théorème de Fubini sous la forme du corolaire 14.304. Pour cela nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ (k,l) &\mapsto \frac{(kx)^l}{k!l!} \end{aligned} \tag{15.663}$$

et nous mettons la mesure de comptage[73] sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$. Nous commençons donc à vérifier l'intégrabilité variable par variable de $|a|$: SubEqsPHsBhk

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} |a(k,l)| dm(l) \right) dm(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(k|x|)^l}{l!} \tag{15.664a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{k|x|}. \tag{15.664b}$$

Nous devons montrer que cette dernière somme va bien. Pour cela nous posons $u_k = \frac{e^{k|x|}}{k!}$ et nous remarquons que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \to 0$. Donc la double intégrale (15.664) converge, ergo $a \in L^1(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, ce qui nous permet d'utiliser le théorème de Fubini 14.305 pour inverser les ~~sommes~~ ~~intégrales~~ sommes dans l'équation (15.662) :

$$\frac{1}{e}e^{e^x} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{l!}(kx)^l = \sum_{l=0} \frac{1}{e}\frac{1}{l!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^l}{k!}\right)x^l. \tag{15.665}$$

Cela est un développement en série entière pour la fonction $\frac{1}{e}e^{e^x}$, dont nous savions déjà le développement (15.650) ; par unicité du développement[74] nous pouvons identifier les coefficients :

$$B_l = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^l}{k!}. \tag{15.666}$$

(4) Le développement (15.662) étant en réalité valable pour tout x et tous les calculs subséquents l'étant aussi, le développement

$$e^{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \tag{15.667}$$

est en fait valable pour tout x, ce qui donne à la série entière un rayon de convergence infini.

□

15.16 Applications analytique entre espaces de Banach

15.16.1 Applications analytiques

DEFooAIHMooKbWsBt

Définition 15.189 ([541]).
*Soient deux espaces de Banach E et F. Une application $f\colon E \to F$ définie sur un voisinage de $x_0 \in E$ est **analytique** en x_0 si il existe un voisinage U de x_0 sur lequel nous avons*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k \tag{15.668}$$ EQooWATIooCCmlbT

avec les conditions

[73] Nous passons outre les avertissements et menaces de Arnaud Girand.
[74] Proposition 15.49.

(1) *Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, l'application α_k est une forme k-multilinéaire, continue et symétrique*

(2) *La notation $\alpha_k x^k = \alpha_k(x, \dots, x)$.*

(3) *Pour chaque $x \in U$, nous avons*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\alpha_k\| \|x - x_0\|^k < \infty \tag{15.669}$$

EQooQYBGooKyoNHA

où $\|\alpha_k\|$ est la norme de α_k en tant qu'application k-multilinéaire, définition 10.105.

15.190.
Notez que la condition (15.669) n'est pas la convergence absolue de $\sum_n \alpha_n(x)$ qui aurait été la condition $\sum_n \|\alpha_n(x)\|_F < \infty$ ni la convergence normale qui aurait été $\sum_n \|\alpha_n\| < \infty$.

PROPooHCYXooHlUEuV

Proposition 15.191 (Critère d'Abel[1])**.**
Soit une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k(x)$ de rayon de convergence R.

ITEMooVAOTooELMOlK

(1) *Si $\|x\| < R$ alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\| \|x\|^n < \infty. \tag{15.670}$$

Autrement dit : une série entière est analytique à l'intérieur de son disque de convergence.

ITEMooEEVMooVeiHyY

(2) *Si $\|x\| > R$ alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\| \|x\|^n = \infty. \tag{15.671}$$

Autrement dit : une série entière n'est pas analytique à l'extérieur de son disque de convergence.

Démonstration. Nous considérons un $r \in \mathbb{R}$ satisfaisant $\|x\| < r < R$, et nous considérons un majorant M pour $\|\alpha_n\| r^n$. Nous avons alors

$$\|\alpha_n\| \|x\|^n = \|\alpha_n\| r^n \left(\frac{\|x\|}{r} \right)^n \leqslant M \left(\frac{\|x\|}{r} \right)^r. \tag{15.672}$$

Donc la suite $\|\alpha_n\| \|x\|$ est majorée par la suite $M(\|x\|/r)^r$ dont la série est convergente en tant que série géométrique (proposition 10.172(3)).

Si $\|x\| > R$ alors la suite $\|\alpha_k\| \|x\|^r$ n'est pas bornée. En tant que série de termes positifs non bornés nous avons $\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\| \|x\|^n = \infty$. □

LEMooZDPSooXxPkYs

Lemme 15.192 ([1])**.**
Soit une application $f : E \to F$ analytique sur $\overline{B(x_0, R)}$ s'écrivant sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0) \tag{15.673}$$

avec $a_k(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda_k} a_\alpha x^\alpha$.

Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$ nous ayons

$$|a_\alpha| < \frac{\epsilon}{C} R^{-k}. \tag{15.674}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons $x \in B(x_0, R)$, en choisissant de telle sorte à avoir $\|x - x_0\| = R$. Nous avons donc, par définition d'une application analytique :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \|x - x_0\|^k = \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| R^k < \infty. \tag{15.675}$$

Par la proposition 10.121, il existe alors N tel que si $k \geqslant N$ alors $\|a_k\| R^k < \epsilon$. Vu que $\max_{\alpha \in \Lambda_k} |a_\alpha|$ est une norme (lemme 10.106) et que toutes les normes sont équivalentes, il existe $C' > 0$ tel que $C|a_\alpha| R^k < \epsilon$ et donc en posant $C = 1/C'$ nous avons bien

$$|a_\alpha| < C \epsilon R^{-k}. \tag{15.676}$$

□

PROPooMGWOooTeCDRk

Proposition 15.193 ([1]).
Toute application linéaire est analytique.

Démonstration. Si $f\colon E \to F$ est linéaire, alors $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)$ avec $\alpha_k(x) = 0$ pour $k \neq 1$ et $\alpha_1(x) = f(x)$. □

THOooNBNFooMsAorH

Théorème 15.194 ([541]).
Soient des espaces de Banach E et F sur $\mathbb{C}$. Soient des applications $\alpha_n \in \mathcal{L}(E, F)$. Nous supposons que $\{\alpha_n(x)\}$ est borné. Nous posons $z = tx$ avec $|t| < 1$. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z) \tag{15.677}$$

converge absolument.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\|\alpha_n(x)\| < K$ pour tout n. Alors nous avons

$$\|\alpha_n(z)\| = \|\alpha_n(tz, \dots, tz)\| = \|t^n \alpha_n(z, \dots, z)\| \leqslant |t|^n K. \tag{15.678}$$

Vu que $|t| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} K|t|^n$ converge (proposition 10.172(1)). Donc la série $\sum_k \|\alpha_n(z)\|$ converge par le critère de comparaison[75] □

NORMooQDCKooXHtrHQ

15.195.
Dans la suite, nous devons faire appel à quelques astuces de notations. Si $\alpha \in \mathcal{L}_n$, nous notons $\alpha(x)$ pour $\alpha(x, \dots, x)$.

Si $\alpha \in \mathcal{L}_{k+n}(E, F)$ est symétrique, alors nous notons αx^n l'élément de $\mathcal{L}_k(E, F)$ donné par

$$(y_1, \dots, y_k) \mapsto \alpha(x, \dots, x, y_1, \dots, y_n). \tag{15.679}$$

Notons au passage que l'ordre n'est pas important parce que α est symétrique.

THOooHSXLooMCzTTD

Théorème 15.196 ([541, 77]).
Soient des espaces de Banach E et F. Nous supposons que la série de puissance

$$\begin{aligned} f\colon E &\to F \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \end{aligned} \tag{15.680}$$

ait un rayon de convergence $r_0 > 0$.

Nous posons[76]

$$b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} a_{n+k} (x_1 - x_0)^n \in \mathcal{L}_k(E, F), \tag{15.681}$$

EQooXVAIooOXGaQz

Alors :

ITEMooWBTAooGrKzpo

(1) f est analytique[77] *en tout point de $B(x_0, r)$,*

ITEMooOPLBooTZZOOx

(2) Pour tout $x \in B(x_1, r_1)$ nous avons

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_1)^k. \tag{15.682}$$

ITEMooNTPIooXpKePf

(3) La série

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_1)^k \tag{15.683}$$

a un rayon de convergence $r_1 \geqslant r_0 - \|x_1 - x_0\|$.

Démonstration. En plusieurs parties.

[75] Lemme 10.165(2).
[76] Voir la notation expliquée en 15.195.
[77] Définition 15.189.

(1) **Pour (1)** C'est le critère d'Abel 15.191(1).

(2) **Pour (2)** Soit $x_1 \in B(x_0, r)$. Notons $h = x_1 - x_0$, de telle sorte que $x - x_0 = (x - x_1) + h$. En appliquant la multilinéarité de α_n, nous voyons que le binôme de Newton 1.387 fonctionne aussi bien :

$$\alpha_n\big((x - x_1) + h\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_n\big(h^{n-k}, (x - x_1)^k\big). \tag{15.684}$$

Nous pouvons permuter les deux sommes avec le lemme 10.158 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\big((x - x_1) + h\big) && (15.685a)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_n\big(h^{n-k}, (x - x_1)^k\big) && (15.685b)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \alpha_n\big(h^{n-k}, (x - x_1)^k\big) && (15.685c)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \alpha_n(h^{n-k}) \right) (x - x_1)^k. && (15.685d) \end{aligned}$$

Donc en posant $\beta_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \alpha_n(h^{n-k})$ nous avons bien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x - x_1). \tag{15.686}$$

La formule (15.681) est maintenant juste un décalage de la somme.

(3) **Pour (3)** Vu que $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$, la fonction f est analytique sur $B(x_1, r_1)$. Vu que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x - x_1), \tag{15.687}$$

la partie $B(x_1, r_1)$ soit être dans le rayon de convergence des β_k par le lemme d'Abel 15.191(2).

□

LEMooVGUFooSmJHhl

Lemme 15.197 ([1]).
Si $f\colon E \to F$ est analytique sur $B(a, r)$, alors

$$\begin{aligned} g\colon B(a + h, r) &\to F \\ x &\mapsto f(x + h) \end{aligned} \tag{15.688}$$

est analytique sur $B(a + h)$

PROPooFEMWooDwAYyO

Proposition 15.198 ([1]).
Soient un espace de Banach E ainsi que $a \in E$. L'application

$$x \mapsto x + a \tag{15.689}$$

est analytique.

15.16.2 Opérateur d'inversion

PROPooSGVWooQupJxn

Proposition 15.199 ([553]).
Soit un espace de Banach réel E. Nous considérons l'espace vectoriel $\mathrm{End}(E)$ muni de la norme opérateur.

(1) La partie Ω des opérateurs inversibles[78] *est ouverte.*

(2) L'opérateur d'inversion

$$\begin{aligned} i\colon \Omega &\to \Omega \\ f &\mapsto f^{-1} \end{aligned} \tag{15.690}$$

est analytique[79]

Note : pour prouver ça, il faudra surement considérer une adaptation aux opérateurs du théorème 15.169.

[78] En dimension finie, Ω est $\mathrm{GL}(E)$, mais en dimension infinie, la partie $\mathrm{GL}(E)$ contient seulement les opérateurs inversibles continu d'inverse continu. Voir la définition 10.312.

[79] Application analytique entre espaces de Banach : définition 15.189.

15.16.3 Famille sommable

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 15.200
Je suis presque certain que dans la proposition 15.201, la famille $(a_\alpha x^\alpha)$ est même absolument sommable. Mais je ne suis pas capable de le prouver. C'est peut-être prouvé au passage dans la preuve de la proposition 15.203.

PROPooFXVEooCeiwMB

Proposition 15.201 ([1, 477]).
Soit un espace de Banach F et une une application $f\colon \mathbb{R}^n \to F$ analytique en x que nous décomposons en

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \tag{15.691}$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous posons

$$\Lambda_k = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } \sum_i \alpha_i = k\}, \tag{15.692}$$

et $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$. En écrivant a_k sous la forme[80]

$$a_k(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda_k} a_\alpha x^\alpha, \tag{15.693}$$

l'ensemble $(a_\alpha x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est une famille sommable[81] *dont la somme vaut*

$$S = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \tag{15.694}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons un $N > 0$ tel que

$$\| \sum_{k=p}^{\infty} a_k(x) \| < \epsilon \tag{15.695}$$

EQooOVPIooKdvoJO

pour tout $p \geqslant N$. Nous supposons que N est également assez grand pour que

$$\sum_{k=p}^{\infty} \|a_k\| \|x\|^k < \epsilon \tag{15.696}$$

EQooZTKGooFeKFXO

pour tout $p \geqslant N$. Nous posons $I_0 = \bigcup_{k\leqslant N} \Lambda_k$ et nous considérons une partie finie K telle que $I_0 \subset K \subset \Lambda$. Nous posons

$$M = \max\{|\alpha| \text{ tel que } \alpha \in K\}. \tag{15.697}$$

Notez que $M \geqslant N$. Nous décomposons la somme sur $\alpha \in K$ en

$$\sum_{\alpha\in K} a_\alpha x^\alpha = \sum_{k\leqslant N} \sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha + \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha. \tag{15.698}$$

Notez que pour $k \leqslant N$ nous avons $K \cap \Lambda_k = \Lambda_k$, donc

$$\sum_{k\leqslant N} \sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha = \sum_{k=0}^{N} a_k(x). \tag{15.699}$$

[80] Voir le lemme 10.101.
[81] Définition 10.128.

C'est le moment d'un peu calculer : SUBEQSooUJGQooXuWdDr

$$\| \sum_{\alpha\in K} a_\alpha x^\alpha - S\| = \| \sum_{k=0}^{N} a_k(x) + \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha - S\| \tag{15.700a}$$

$$= \| \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha - \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(x)\| \tag{15.700b}$$

$$= \| \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha - \sum_{k=N+1}^{M} a_k(x) - \sum_{k=M+1}^{\infty} a_k(x)\| \tag{15.700c}$$

$$\leqslant \| \sum_{k=N+1}^{M} \Big(\sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha - a_k(x)\Big)\| + \| \sum_{k=M+1}^{\infty} a_k(x)\| \tag{15.700d}$$

$$\leqslant \| \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha\in \Lambda_k\setminus K} a_\alpha x^\alpha\| + \epsilon. \tag{15.700e}$$

Notez que pour majorer le second terme nous avons utilisé $M \geqslant N$ et (15.695).

Encore un calcul :

$$\| \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha\in\Lambda_k\setminus K} a_\alpha x^\alpha\| \leqslant \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha\in\Lambda_k} \|a_\alpha x^\alpha\| \tag{15.701a}$$

$$\leqslant \sum_{k=N+1}^{M} \|a_k\| \big(|x_1| + \ldots + |x_n|\big)^k \qquad \text{lem. 10.101(2)} \tag{15.701b}$$

$$\leqslant \sqrt{n} \sum_{k=N+1}^{M} \|a_k\| \|x\|^k \qquad \text{prop. 10.59(1).} \tag{15.701c}$$

$$\leqslant \sqrt{n}\epsilon \qquad \text{par (15.696).} \tag{15.701d}$$

Avec ça nous continuons (15.700) :

$$\| \sum_{\alpha\in K} a_\alpha x^\alpha - S\| \leqslant \epsilon(\sqrt{n}+1). \tag{15.702}$$

Donc la famille $(a_\alpha x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est sommable. □

LEMooYSDEooOEiXvl

Lemme 15.202 ([1, 554])**.**
Soit un espace de Banach F et une application $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ analytique sur $B(0,R)$ que nous décomposons en

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \tag{15.703}$$

pour chaque $x \in B(0,R)$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous posons

$$\Lambda_k = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } \sum_i \alpha_i = k\}, \tag{15.704}$$

et $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$. Nous écrivons a_k sous la forme[82]

$$a_k(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} a_{k,\alpha} x^\alpha. \tag{15.705}$$

Pour ρ assez petit, l'application

$$\begin{aligned} v\colon \mathbb{N}\times\Lambda\times B(0,r) &\to \mathbb{R} \\ (k,\alpha,x) &\mapsto a_{k,\alpha}x^\alpha \end{aligned} \tag{15.706}$$

est dans $L^1\big(\mathbb{N}\times\Lambda\times B(0,\rho)\big)$.

Démonstration. En plusieurs étapes.

[82] Voir le lemme 10.101.

(1) **La fonction u**

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} u\colon \mathbb{N}\times\Lambda &\to \mathbb{R} \\ k,\alpha &\mapsto a_{k,\alpha}x^\alpha. \end{aligned} \tag{15.707}$$

Notez que si $|\alpha|\neq k$ alors $a_{k,\alpha}=0$. En utilisant la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et Λ, nous avons

$$f(x)=\int_{\mathbb{N}}\left(\int_\Lambda u(k,\alpha)d\alpha\right)dk. \tag{15.708}$$

(2) $u\in L^1(\mathbb{N}\times\Lambda)$ Nous utilisons le bon vieux truc de 14.306 pour montrer que $u\in L^1(\mathbb{N}\times\Lambda)$. D'abord nous avons

$$\begin{aligned} \int_\Lambda |u(k,\alpha)|d\alpha &= \sum_{\alpha\in\Lambda}\|a_{k,\alpha}x^\alpha\| && (15.709a)\\ &= \sum_{\alpha\in\Lambda}\|a_{k,\alpha}x^\alpha\| && \text{pcq. } a_{k,\alpha}=0 \text{ si } \alpha\notin\Lambda_k \quad (15.709b)\\ &\leqslant \sum_{\alpha\in\Lambda_k}\|a_{k,\alpha}\||x|^\alpha && (15.709c)\\ &\leqslant C^k\|a_k\|\|x\|^k && \text{lem. 10.101(2).} \quad (15.709d) \end{aligned}$$

À partir de maintenant nous nous restreignons à $x\in B(0,R/C)$ de telle sorte à avoir $C\|x\|<R$ et donc de pouvoir profiter de la borne 15.669.

Nous avons

$$\int_{\mathbb{N}}\left(\int_\Lambda |u(k,\alpha)|d\alpha\right)dk\leqslant\int_{\mathbb{N}}\|a_k\|\big(C\|x\|\big)^k dk=\sum_{k=0}^{\infty}\|a_k\|r^k<\infty. \tag{15.710}$$

EQooLCYMooGVECbX

Le corolaire 14.304 implique maintenant que $u\in L^1(\mathbb{N}\times\Lambda)$.

(3) **La fonction v** Nous considérons $\rho=R/C$ et nous continuons. Nous avons

$$\int_{\mathbb{N}\times\Lambda}|v(x,k,\alpha)|dkd\alpha\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|a_k\|r^k. \tag{15.711}$$

Cette majoration tient pour tout $x\in B(0,\rho)$. Nous avons donc

$$\int_{B(0,\rho)}\left(\int_{\mathbb{N}\times\Lambda}|v(x,k,\alpha)|d(k\times\alpha)\right)dx<0. \tag{15.712}$$

Et voilà que $v\in L^1\big(B(0,\rho)\times(\mathbb{N}\times\Lambda)\big)$.

□

La proposition suivante est dédiée à la petite fugue BWV 578.

PROPooZMXDooHLRvCd

Proposition 15.203 ([1, 554])**.**
Soit un espace de Banach F et une une application $f\colon\mathbb{R}^n\to F$ analytique sur $B(0,R)$ que nous décomposons en

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x). \tag{15.713}$$

pour chaque $x\in B(0,R)$. Pour chaque $k\in\mathbb{N}$ nous posons

$$\Lambda_k=\{\alpha\in\mathbb{N}^n \text{ tel que } \sum_i\alpha_i=k\}, \tag{15.714}$$

et $\Lambda=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Lambda_k$. Nous écrivons a_k sous la forme[83]

$$a_k(x)=\sum_{\alpha\in\Lambda_k}a_{k,\alpha}x^\alpha, \tag{15.715}$$

[83] Voir le lemme 10.101.

Nous posons

$$\Gamma_l = \{\alpha \in \Lambda \text{ tel que } \alpha_1 = l\}. \tag{15.716}$$

Alors il existe une boule $B(0,r)$ sur laquelle

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha\in\Gamma_l} a_\alpha x^\alpha. \tag{15.717}$$

Si $R = \infty$ alors $r = \infty$ aussi.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **La fonction u** Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} u\colon \mathbb{N}\times\Lambda &\to \mathbb{R} \\ k,\alpha &\mapsto a_{k,\alpha}x^\alpha. \end{aligned} \tag{15.718}$$

Nous avons vu dans le lemme 15.202 que si on se restreint à $x \in B(0,\rho)$ nous avons $u \in L^1(\mathbb{N}\times\Lambda)$.

(2) **Une partition de $\mathbb{N}\times\Lambda$** Nous avons l'ensemble $\Gamma_l = \{\alpha \in \Lambda \text{ tel que } \alpha_1 = l\}$ et l'union disjointe $\Lambda = \bigcup_{l=0}^{\infty} \Gamma_l$. Donc

$$\mathbb{N}\times\Lambda = \bigcup_{l=0}^{\infty} \mathbb{N}\times\Gamma_l. \tag{15.719}$$

Par σ-additivité de l'intégrale, $\int_{\mathbb{N}\times\Lambda} u = \sum_l \int_{\mathbb{N}\times\Gamma_l} u$. De plus la fonction u étant dans L^1 nous pouvons faire l'intégrale sur $\mathbb{N}\times\Gamma_l$ en intégrant d'abord sur Γ_l et ensuite sur $\mathbb{N}$. Tout cela pour justifier ce calcul :

$$f(x) = \int_{\mathbb{N}\times\Lambda} u(k,\alpha)dkd\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\mathbb{N}\times\Gamma_l} u(k,\alpha)d(k\otimes\alpha) \tag{15.720a}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\Gamma_l} \left(\int_{\mathbb{N}} u(k,\alpha)dk \right) d\alpha \tag{15.720b}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha\in\Gamma_l} \sum_{k=0}^{\infty} u(k,\alpha). \tag{15.720c}$$

Vu que $u(k,\alpha) \neq 0$ uniquement lorsque $k = |\alpha|$, la somme sur k se restreint au seul terme $k = |\alpha|$. Nous continuons donc le calcul

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha\in\Gamma_l} u(|\alpha|,\alpha) \tag{15.721a}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l\in\Gamma_l} a_\alpha x^\alpha. \tag{15.721b}$$

□

15.16.4 Intégrale par rapport à une des variables

PROPooBHKJooUZUKnc

Proposition 15.204 ([1, 555])**.**
Soit une application analytique[84]

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ (t,\lambda) &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha\in\Lambda_k^{(m+1)}} a_{k,\alpha}(t,\lambda)^\alpha \end{aligned} \tag{15.722}$$

que nous supposons être analytique sur un voisinage de $(0,0)$. Nous avons :

[84] Définition 15.189.

ITEMooMWMSooRoXLgL

(1) *L'application*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ (t,\lambda) &\mapsto \int_0^t f(s,\lambda)ds \end{aligned} \tag{15.723}$$

est analytique sur un voisinage de $(0,0)$.

ITEMooSRHFooAjKHFg

(2) *En posant*

$$\begin{aligned} \theta\colon \Lambda &\to \{0,1\} \\ \alpha &\mapsto \begin{cases} 0 & si\ \alpha_1 = 0 \\ 1 & sinon\ , \end{cases} \end{aligned} \tag{15.724}$$

nous avons

$$g(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\Lambda_k}\theta(\alpha)\frac{a_{k-1,(\alpha_1-1,\alpha')}}{\alpha_1+1}(t,\lambda)^\alpha. \tag{15.725}$$

ITEMooACJMooQHkdPY

(3) *Il existe* $0<q<1$ *et un polynôme* P *de degré* $m-1$ *tel que*

$$|b_k(t,\lambda)| \leqslant P(k)q^{-k}. \tag{15.726}$$

Le point (3) n'est pas très utile, mais il introduit des techniques qui pourraient servir plus tard.

Démonstration. Nous supposons que f est analytique sur $\overline{B(0,R_t)}\times\overline{B(0,R_\lambda)}$, et qu'elle se présente sous la forme[85]

$$f(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\Lambda_k}a_{k,\alpha}(t,\lambda)^\alpha. \tag{15.727}$$

(1) **Permuter somme et intégrale** Notre premier objectif est de permuter la somme et l'intégrale dans

$$g(t,\lambda) = \int_0^t\sum_{k=0}^{\infty}a_k(s,\lambda)ds. \tag{15.728}$$

Pour cela nous utilisons la convergence dominée de Lebesgue (théorème 14.207) en fixant $\lambda\in B(0,\rho)$ et en posant

$$f_k(t) = a_k(t,\lambda) \tag{15.729}$$

et

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty}|f_k(t)|. \tag{15.730}$$

(1a) $h(t)<\infty$ Nous avons $f_k(t) = a_k(t,\lambda)$ et donc $|f_k(t)|\leqslant\|a_k\|\|(t,\lambda)\|^k$. En sommant,

$$\sum_{k=0}^{\infty}|f_k(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|a_k\|\|(t,\lambda)\|^k < \infty. \tag{15.731}$$

(1b) $|f_k(t)|\leqslant|h(t)|$ Parce que $|h(t)|$ est la somme de plein de termes positifs, dont $|f_k(t)|$.

(1c) $h\in L^1\big([0,t]\big)$ Nous allons prouver que h est continue comme somme uniformément convergente de fonctions continues (théorème 12.394). Pour tout $t\in B(0,R_t)$ nous avons

$$|f_k(t)| \leqslant \|a_k\|\|(R_t,R_\lambda)\|^k. \tag{15.732}$$

Donc en posant $M_k = \|a_k\|\|(R_t,R_\lambda)\|^k$, nous avons $\sum_{k=0}^{\infty}M_k<\infty$ et $|f_k(t)|\leqslant M_k$ pour tout t et tout k. Le critère de Weierstrass 12.396 nous dit que la série converge uniformément. Donc h est continue. Donc elle est dans $L^1\big([0,t]\big)$ en tant que fonction continue sur un compact.

Nous utilisons le théorème de la convergence dominée :

$$g(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t a_k(s)ds \tag{15.733}$$

[85] Lemme 10.101.

(2) **Intégration et un peu de calcul** L'intégration n'est pas très compliquée à effectuer. En termes de notations, si $\alpha \in \Lambda$ est un multiindice, nous notons $\alpha' = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Voici un peu de calcul :

$$\int_0^t a_k(s)ds = \int_0^t \sum_{\alpha\in\Lambda_k} a_{k,\alpha}(s,\lambda)^\alpha \tag{15.734a}$$

$$= \sum_{\alpha\in\Lambda_k} \frac{a_{k,\alpha}}{\alpha_1+1}(t,\lambda)^{(\alpha_1+1,\alpha')}. \tag{15.734b}$$

En posant

$$\begin{aligned}\theta\colon \Lambda &\to \{0,1\}\\ \alpha &\mapsto \begin{cases}1 & \text{si } \alpha_1 > 0\\ 0 & \text{si } \alpha_1 = 0,\end{cases}\end{aligned} \tag{15.735}$$

nous avons

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_k} \frac{a_{k,\alpha}}{\alpha_1+1}(t,\lambda)^{(\alpha_1+1,\alpha')} = \sum_{\beta\in\Lambda_{k+1}} \theta(\beta)\frac{a_{k,(\beta_1-1,\beta')}}{\beta_1}(t,\lambda)^\beta. \tag{15.736}$$

Nous posons donc, pour $k \geqslant 1$:

$$b_k(t,\lambda) = \sum_{\beta\in\Lambda_k} \theta(\beta)\frac{a_{k-1,(\beta_1-1,\beta')}}{\beta_1}(t,\lambda)^\beta, \tag{15.737}$$

et pour $k = 0$ nous posons $b_0(t,\lambda) = 0$ (ce qui est cohérent avec $\theta(\beta) = 0$ dans ce cas). Au final voici une belle forme pour $g(t,\lambda)$:

$$g(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t,\lambda). \tag{15.738}$$

Cela prouve déjà le point (2), mais nous n'avons pas encore prouvé que g est analytique.

(3) **Pour (1) : g est analytique**

Nous devons prouver que $\sum_{k=0}^{\infty} \|b_k\|\|(t,\lambda)\|^k < \infty$. Pour cela, nous allons nous souvenir que l'ensemble des applications k-multilinéaires a les normes de la définition 10.105 et du lemme 10.106. Nous utilisons deux fois l'équivalence entre ces deux normes[86] :

$$\|b_k\| \leqslant C_1 \max_{\alpha\in\Lambda_k} \left|\theta(\alpha)\frac{a_{k-1,(\alpha_1-1,\alpha')}}{\alpha_1+1}\right| \tag{15.739a}$$

$$\leqslant C_1 \max_{\alpha\in\Lambda_k} |a_{k-1,(\alpha_1-1,\alpha')}| \tag{15.739b}$$

$$\leqslant C_1C_2\|a_{k-1}\|. \tag{15.739c}$$

Nous avons alors

$$\|b_k\|\|(t,\lambda)\|^k \leqslant C_1C_2\|a_{k-1}\|\|(t,\lambda)\|^k = C\|(t,\lambda)\|\|a_{k-1}\|\|(t,\lambda)\|^k, \tag{15.740}$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|b_k\|\|(t,\lambda)\|^k \leqslant C_1C_2\sum_{k=1}^{\infty} \|a_{k-1}\|\|(t,\lambda)\|^k \qquad b_0 = 0 \tag{15.741a}$$

$$= \|(t,\lambda)\|C_1C_2\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|\|(t,\lambda)\|^k \tag{15.741b}$$

$$< \infty. \tag{15.741c}$$

Prouver (3) Pour rappel, R_t et R_λ définissent un voisinage de $(0,0)$ sur lequel f est analytique. Voir tout en-haut de la preuve. Nous choisissons (t,λ) de telle sorte que $|t| < R_t$ et $|\lambda| < R_\lambda$. Et nous considérons r_t, r_λ tels que $|t| < r_t < R_t$ et $|\lambda| < r_\lambda < R_\lambda$.

Nous devons majorer la norme de

$$b_k(t,\lambda) = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} \theta(\alpha)\frac{a_{k-1,(\alpha_1+1,\alpha')}}{\alpha_1+1}t^{\alpha_1}\lambda^{\alpha'}. \tag{15.742}$$

EQooJGTDooDhcKFF

[86] Théorème 10.61.

Étant donnée le lemme 15.192,

$$|a_{k-1,(\alpha_1-1,\alpha')}| \leqslant CR_t^{-(\alpha_1-1)}R_\lambda^{|\alpha'|}. \tag{15.743}$$

De plus étant donné notre choix de t et λ nous avons $|t|^{\alpha_1} \leqslant r_t^{\alpha_1}$ et $|\lambda|^{\alpha'} \leqslant |r_\lambda|^{|\alpha'|}$ parce que $|\lambda|^{\alpha'} = \prod |\lambda_i^{\alpha_i'}|$ et que pour chaque i nous avons $|\lambda_i| \leqslant r_\lambda$.

En prenant la valeur absolue de (15.742), en majorant $\theta(\alpha) \leqslant 1$ et $1/(\alpha_1+1) \leqslant 1$ nous avons

$$|b_k(t,\lambda)| \leqslant C\sum_{\alpha\in\Lambda_k} R_t\left(\frac{r_t}{R_t}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{r_\lambda}{R_\lambda}\right)^{|\alpha'|}. \tag{15.744}$$

Nous posons $q = \max(r_t/R_t, r_\lambda/R_\lambda)$, nous avons $0 < q < 1$ et la majoration

$$|b_k(t,\lambda)| \leqslant CR_t\sum_{\alpha\in\Lambda_k} q^{|\alpha|} = R_tCq^k \operatorname{Card}(\Lambda_k). \tag{15.745}$$

EQooDGFQooLviGKd

Ici nous travaillons avec $m+1$ variables, donc quand nous écrivons Λ_k, nous voulons dire $\Lambda_k^{(m+1)}$ et la proposition 1.383 nous donne

$$\operatorname{Card}(\Lambda_k) = \binom{n+1+k-1}{m+1-1} = \binom{m+k}{m} = \frac{(m+k)!}{m!k!} = \frac{1}{m!}\prod_{l=1}^{m}(l+l) = P(k) \tag{15.746}$$

où P est n polynôme de degré $m-1$. En absorbant le facteur R_tC dans une redéfinition de P, la relation (15.745) donne

$$|b_k(t,\lambda)| \leqslant P(kq^k) \tag{15.747}$$

comme demandé. □

15.16.5 Différentielle

LEMooVIINooOUwAUQ

Lemme 15.205 ([541, 469]).
Soient des espaces de Banach E et F ainsi qu'une application analytique

$$\begin{aligned} f\colon F &\to F \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x-x_0). \end{aligned} \tag{15.748}$$

Alors f est différentiable en x_0 et

$$df_{x_0} = \alpha_1. \tag{15.749}$$

Démonstration. Le candidat différentielle est $T(h) = \alpha_1(h)$. Nous testons la définition de la différentielle. D'abord

$$f(x_0+h) - f(x_0) - \alpha_1(h) = \sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n(h). \tag{15.750}$$

Ensuite

$$\frac{\|\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n(h)\|}{\|h\|} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\|\alpha_n\|\|h\|^{n-1} \tag{15.751}$$

Nous savons, de la définition d'une application analytique que si t est assez petit, $\sum_{n=0}^{\infty}\|\alpha_n\|t^n$. Le lemme conclu que $\lim_{h\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}\|\alpha_n\|\|h\|^{n-1} = 0$. □

THOooCESLooZxAzOg

Théorème 15.206 ([541]).
Soient deux espaces de Banach E et F ainsi que des formes $\alpha_n \in \mathcal{L}_n(E,F)$ et $x_0 \in E$. Nous supposons que l'application

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x) \tag{15.752}$$

est analytique sur $B(x_0,r)$.

Alors f est différentiable sur $B(x_0,r)$ et pour tout $x \in B(x_0,r)$ nous avons

$$df_x = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n(x-x_0)^{n-1}. \tag{15.753}$$

Démonstration. Nous savons déjà que f est différentiable en x_0 par le lemme 15.205 que f est différentiable et $df_{x_0} = \alpha_1$.

Si $x_1 \in B(x_0, r)$, nous pouvons aller voir le théorème 15.196 pour développer en

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x - x_1) \tag{15.754}$$

avec les β_k donné par (15.681). Comme précédemment nous avons $df_{x_1} = \beta_1$. Mais

$$\beta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+1}{n}}_{=n+1} \alpha_{n+1}(x_1 - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1}(x_1 - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n (x_1 - x_0)^{n-1}. \tag{15.755}$$

□

PROPooGMWRooPIzwus

Proposition 15.207 ([1]).
Toute application analytique entre espaces de Banach est de classe C^∞.

PROPooXKHBooQvvNmN

Proposition 15.208 (Composition d'applications analytiques[1]).
Soient des espaces de Banach E_1, E_2 et E_3. Soient des applications analytiques $f\colon E_1 \to E_2$ et $g\colon E_2 \to E_3$. Alors la composée $g \circ f\colon E_1 \to E_2$ est analytique.

PROPooKHAYooCxMgep

Proposition 15.209 ([1]).
Soit une application analytique $f\colon V \times W \to E$. Si $v_0 \in V$ est fixé, alors l'application partielle

$$\begin{aligned} f_0\colon W &\to E \\ w &\mapsto f(v_0, w) \end{aligned} \tag{15.756}$$

est analytique.

Démonstration. Par hypothèse il existe $\alpha_k \in \mathcal{L}_k(V \times W, E)$ telles que

$$f(v, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(v, w). \tag{15.757}$$

En posant

$$\begin{aligned} \beta_k\colon W &\to E \\ w &\mapsto \alpha_k(v_0, w), \end{aligned} \tag{15.758}$$

nous avons bien que $\beta_k \in \mathcal{L}_k(W, E)$ est positif et symétrique. Et bien entendu $f_0(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(w)$. □

THOooSZHVooKSEmuI

Théorème 15.210 (Inversion locale, version analytique[541, 556]).
Soient des espaces de Banach X et Y ainsi qu'une application $f\colon X \to Y$ satisfaisant

(1) f est de classe C^1,

(2) f est analytique en x_0,

(3) df_{x_0} est continue[87] et d'inverse continue.

Alors f est localement inversible en x_0 et son inverse est analytique en $f(x_0)$.

15.16.6 Polynômes

DEFooCJGHooXFTsNf

Proposition-Définition 15.211 (Polynômes[1]).
Soient des espaces de Banach E et F. Nous considérons une boule $B(0, r)$ et l'espace $\mathcal{P}_N$ des applications de la forme

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x) \tag{15.759}$$

*avec $a_k \in \mathcal{L}_k(E, F)$[88]. De telles applications sont des **polynômes** entre espaces de Banach.*

Plusieurs choses à propos de $\mathcal{P}_N$.

[87] J'ai un doute sur l'hypothèse. À mon avis c'est df qui est continue en x_0.

[88] Applications k-multilinéaires, définition 8.1.

(1) *Si* $\sum_{k=0}^{N} a_k(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k(x)$ *alors* $a_k = b_k$ *pour tout* k.

(2) *L'application*

$$\begin{aligned} N_1 \colon \mathcal{P}_N &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto \sup_{x \in B(0,r)} \end{aligned} \tag{15.760}$$

est une norme sur $\mathcal{P}_N$.

(3) *L'application*

$$\begin{aligned} N_2 \colon \mathcal{P}_N &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto \max_k \|a_k\| \end{aligned} \tag{15.761}$$

est une norme sur $\mathcal{P}_N$.

(4) *L'application*

$$\begin{aligned} N_3 \colon \mathcal{P}_N &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \|a_i\|^2} \end{aligned} \tag{15.762}$$

est une norme sur $\mathcal{P}_N$

ITEMooVVDSooFzRfrT

(5) *Toute suite de Cauchy dans* $\mathcal{P}_N$ *pour une des normes* N_i *est une suite de Cauchy pour les deux autres normes.*

ITEMooUZQDooNqfNNQ

(6) *Toute suite de Cauchy dans* $\mathcal{P}_N$ *pour une des normes* N_i *est convergente pour n'importe laquelle de ces trois normes.*

15.16.7 Weierstrass et Cauchy-Lipschitz analytique

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 15.212
Tous les résultats de cette section (en particulier le lemme 15.215 et le théorème 15.214) sont de ceux qui demanderaient une bonne relecture. Soyez attentive en lisant la preuve ; il peut encore y avoir pas mal de pièges que je n'aurais pas vus. Si ça peut vous motiver à relire avec un œil critique, sachez que la preuve est entièrement due à ChatGPT.

LEMooVXTLooHYvAWO

Lemme 15.213 ([1]).
Soient des nombres $a_{n,k} \in \mathbb{C}$ *tels que pour chaque* n *nous ayons* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| < \infty$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |a_{n,k}|. \tag{15.763}$$

À mon avis c'est Fubini avec la mesure de comptage. À vous de vérifier et de m'écrire quand vous avez une preuve.

THOooZHXMooICpUZx

Théorème 15.214 ([77]).
Soient des espaces de Banach E *et* F *ainsi qu'un ouvert* $U \subset E$. *Soient :*

(1) *des fonctions analytiques* $f_n \colon U \to F$,

(2) $x_0 \in U$, $r > 0$ *et* $M > 0$

tels que

(1) *Pour tout* n *et pour tout* $x \in B(x_0, r)$, *nous avons*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}(x - x_0). \tag{15.764}$$

ITEMooISLSooIfUEXH

(2) *Pour tout* n *nous avons la majoration*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_{n,k}\| r^k < M < \infty. \tag{15.765}$$

(3) $f_n \to f$ *uniformément sur* $B(x_0, r)$.

Alors :

(1) *Pour chaque* k, *il existe une application* k*-multilinéaire* a_k *telle que* $a_{n,k} \to a_k$.

(2) *La série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \tag{15.766}$$

converge normalement sur $B(x_0, r)$.

(3) *La fonction* f *vaut*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \tag{15.767}$$

(4) f *est analytique en* x_0.

Démonstration. Nous commençons par supposer que $x_0 = 0$. Pour chaque n et N nous posons

$$\begin{aligned} P_{n,N} \colon B(0, r) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{N} a_{n,k}(x). \end{aligned} \tag{15.768}$$

et le reste

$$R_{n,N}(x) = f_n(x) - P_{n,N}(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{n,k}(x). \tag{15.769}$$

(1) **Une majoration pour le reste** Soit $0 < \rho < r$. Nous avons :

$$\sup_n \sup_{\|x\| \leqslant \rho} \|R_{n,N}(x)\| \leqslant \sup_n \sup_{\|x\| \leqslant \rho} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|a_{n,k}\| \|x\|^k \tag{15.770a}$$

$$\leqslant \sup_n \sup_{\|x\| \leqslant \rho} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|a_{n,k}\| \rho^k \tag{15.770b}$$

$$= \sup_n \sum_{k=N+1}^{\infty} \|a_{n,k}\| r^k \left(\frac{\rho}{r}\right)^k. \tag{15.770c}$$

Dans la somme, $k \geqslant N + 1$. Vu que $\rho/r < 1$ nous avons la majoration $(\rho/r)^k \leqslant (\rho/r)^{N+1}$. Nous continuons le calcul

$$\sup_n \sup_{\|x\| \leqslant \rho} \|R_{n,N}(x)\| \leqslant \sup_n \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+1} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|a_{n,k}\| r^k \tag{15.771a}$$

$$\leqslant \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+1} \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} \|a_{n,k}\| r^k \tag{15.771b}$$

$$\leqslant \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+1} M. \tag{15.771c}$$

Au final, pour tout N et pour tout $0 < \rho < r$ nous avons :

$$\sup_n \sup_{\|x\| \leqslant \rho} \|R_{n,N}(x)\| \leqslant \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+1} M. \tag{15.772}$$

(2) **Suites de Cauchy** Soit $\epsilon > 0$. La majoration (15.772) nous permet de choisir N assez grand pour avoir

$$\sup_n \sup_{\|x\| \leqslant \rho} \|R_{n,N}(x)\| \leqslant \epsilon. \tag{15.773}$$

Par ailleurs, nous avons la convergence $f_n \to f$ uniforme sur $\overline{B(0, r)}$; donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme uniforme $\|.\|_{\overline{B(0,r)}}$. Donc il existe N_0 tel que si $p, q \geqslant N_0$ alors

$$\sup_{\|x\| \leqslant \rho} \|f_p(x) - f_q(x)\| < \epsilon. \tag{15.774}$$

Nous avons aussi

$$\|P_{p,N}(x) - P_{q,N}(x)\| \leqslant \|f_p(x) - f_q(x)\| + \|R_{p,N}(x)\| + \|R_{q,N}(x)\| \leqslant 3\epsilon. \tag{15.775}$$

Cela prouve que si N est assez grand, alors la suite $(P_{n,N})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme $\|.\|_{\overline{B(0,\rho)}}$.

Relisez l'énoncé de la définition-proposition 15.211, et en particulier les points (5) et (6). Vu que $P_{n,N} \in \mathcal{P}_N$ pour chaque N et que c'est une suite de Cauchy pour ce qui est appelé N_1 dans 15.211, nous savons que c'est une suite de Cauchy pour n'importe laquelle de ces normes.

Nous avons donc des $a_k \in \mathcal{L}_k$ tels que $a_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{L}_k} a_k$ et en posant $P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x)$ nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \|P_{n,N} - P_N\|_{\overline{B(0,\rho)}} = 0. \tag{15.776}$$

(3) **Convergence normale** Nous vérifions à présent que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ converge normalement. Nous avons

$$\|a_k\|\|x\|^k = \lim_{n\to\infty} \|a_{n,k}\|\|x\|^k \tag{15.777a}$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \|a_{n,k}\|\rho^k \tag{15.777b}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|\|x\|^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \|a_{n,k}\|\rho^k \tag{15.778a}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \|a_{n,k}\|\rho^k \qquad \text{lem. 15.213} \tag{15.778b}$$
$$< M \qquad \text{hyp. (2)} \tag{15.778c}$$
$$< \infty. \tag{15.778d}$$

(4) **Point sur la situation** Nous avons déjà prouvé les points (1) et (2). De plus en posant

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x), \tag{15.779}$$

nous avons bien que g est analytique.

(5) $f = g$ Il nous reste à prouver que l'application g est en réalité la limite f dont on parle dans l'énoncé. Nous devons calculer $\lim_{N\to\infty} \|f(x) - \sum_{k=0}^{N} a_k(x)\|$. Nous avons le calcul suivant :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{N} a_k(x) = \big(f(x) - f_n(x)\big) + \sum_{k=0}^{N} a_{n,k}(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{N} a_k(x) \tag{15.780a}$$
$$= \big(f(x) - f_n(x)\big) + \sum_{k=0}^{N} (a_{n,k} - a_k)(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{n,k}(x) \tag{15.780b}$$

Cette égalité étant valable pour tout n, nous pouvons passer à la limite $n \to \infty$, et il reste

$$f(x) - \sum_{k=0}^{N} a_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{n,k}(x). \tag{15.781}$$

C'est le moment de ressortir (15.772), et de calculer (encore !) :

$$\|f(x) - \sum_{k=0}^{N} a_k(x)\| \leqslant \lim_{n\to 0} \| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{n,k}(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|R_{n,N}(x)\| \leqslant M \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+1} \tag{15.782}$$

Et voilà. Il suffit maintenant de faire $N \to \infty$ des deux côtés pour avoir

$$\|f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\| = 0. \tag{15.783}$$

(6) **Si $x_0 \neq 0$** Appliquer le tout à la limite $g_n \to g$ où $g(x) = f(x - x_0)$ et $g_n(x) = f_n(x - x_0)$. Ensuite appliquer le lemme 15.197.

□
LEMooRRUMooRqDwYr

Lemme 15.215 ([77]).
Soit une application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ analytique sur un voisinage de $(0, 0)$. Nous posons

$$g(t, \lambda) = \int_0^t f(s, \lambda) ds. \tag{15.784}$$

Alors g est analytique sur un voisinage de $(0, 0)$.

Démonstration. Nous notons $\Lambda_k^{(n)}$ l'ensemble des multiindices de longueur n dont la somme des composantes vaut k. Si (t_0, λ_0) est un point où f est analytique. Pour un point (t, λ) dans un voisinage nous avons

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \Lambda_k^{(m+1)}} a_{k,\alpha}\big((t - t_0), (\lambda - \lambda_0)\big)^{\alpha}. \tag{15.785}$$

Nous pouvons réarranger les termes comme montré dans 15.203 :

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \Lambda_k^{(m+1)}} a_{k,\alpha}\big((t - t_0), (\lambda - \lambda_0)\big)^{\alpha} \tag{15.786a}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \Gamma_l} a_{|\alpha|,\alpha}\big((t - t_0), (\lambda - \lambda_0)\big)^{\alpha} \tag{15.786b}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\beta \in \Lambda^{(m)}} a_{|\beta|+1,(l\beta)}(t - t_0)^l (\lambda - \lambda_0)^{\beta}. \tag{15.786c}$$

□

Vous saviez qu'en anglais ce théorème était nommé « Picard–Lindelöf » au lieu de Cauchy-Lipschitz ?
THOooZEBOooQJOSQj

Théorème 15.216 (Cauchy-Lipschitz analytique[77]).
Soient $n, m \in \mathbb{N}$, soit U un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et P un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$. Nous considérons $y_0 \in U$ et une application analytique[89] $f : U \times P \to \mathbb{R}^n$.
Alors

(1) il existe $T > 0$ et un voisinage $W \subset P$ de 0 tel que pour tout $p \in W$ l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(y(t), p\big) & \text{(15.787a)} \\ y(0) = 0 & \text{(15.787b)} \end{cases}$$

possède une unique solution $y_p : [-T, T] \to \mathbb{R}^n$.

(2) L'application

$$\begin{aligned} \sigma : [-T, T] \times W &\to \mathbb{R}^n \\ (t, p) &\mapsto y_p(t) \end{aligned} \tag{15.788}$$

est analytique.

15.16.8 Série de puissance sur $\mathbb{C}$

PROPooBFGJooYVvYaw

Proposition 15.217 ([1]).
Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une série de puissances[90] sur $\mathbb{C}$, alors il existe des $c_k \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{15.789}$$

[89] Définition 15.189.
[90] Définition 15.57.

Démonstration. En effet soit une application $\alpha \in \mathcal{L}_k(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Nous avons $\alpha(z, \dots, z) = z\alpha(1, z, \dots, z)$ et donc par récurrence,

$$\alpha(z, \dots, z) = z^k \alpha(1, \dots, 1). \tag{15.790}$$

En posant $c_k = \alpha_k(1, \dots, 1)$, nous avons

$$f(z) = \sum_k \alpha_k(z, \dots, z) = \sum_k \alpha_k(1, \dots, 1) z^n = \sum_k c_k z^k. \tag{15.791}$$

□

15.16.9 L'opérateur d'inversion est analytique

La proposition suivante indique que si A est un opérateur sur un espace de Banach, alors ce que nous noterions naïvement

$$\sum_k a_k A^k \tag{15.792}$$

est effectivement une série de puissances au sens de la définition 15.57.

L'ensemble $\text{End}^0(E)$ est l'ensemble des endomorphismes bornés de E. De façon équivalente[91], ce sont les endomorphismes continus de E. Je ne suis pas totalement certain que la proposition 15.218 ait besoin de se restreindre à $\text{End}^0(E)$.

PROPooGCLEooBVPHcu

Proposition 15.218 ([1]).
Soit un espace de Banach E. Si $A \in \text{End}^0(E)$ et si $\alpha \in \mathbb{C}$, il existe

$$\alpha \in \mathcal{L}_n\big(\text{End}^0(E), \text{End}^0(E)\big) \tag{15.793}$$

qui est symétrique, continue et telle que

$$\alpha(A, \dots, A) = \lambda A^n \tag{15.794}$$

où $A^n = A \circ \dots \circ A$.

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} \alpha\colon (\text{End}(E)^0)^n &\to \text{End}(E)^0 \\ A_1, \dots, A_n &\mapsto \frac{\lambda}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(1)} \circ \dots \circ A_{\sigma(n)}. \end{aligned} \tag{15.795}$$

Il est vite vu que α est n-linéaire. Et vu que $|S_n| = n!$, nous avons bien $\alpha(A, \dots, A) = A^n$.

Pour prouver que α est continue, nous utilisons la proposition 10.103. Nous avons

$$\|\alpha(A_1, \dots, A_n)\| \leqslant \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \|A_{\sigma(1)} \circ \dots \circ A_{\sigma(n)}\| \tag{15.796a}$$

$$\leqslant \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)}\| \dots \|A_{\sigma(n)}\| \qquad \text{prop. 10.103} \tag{15.796b}$$

$$= \|A_1\| \dots \|A_n\|. \tag{15.796c}$$

Donc en posant $\lambda = 1$ avons l'inégalité (10.291). □

PROPooKZNWooLdjDTP

Proposition 15.219 ([1]).
Soit un espace de Banach E. Soient deux opérateurs $A, T \in \text{End}^0(E)$. Nous avons

$$T \circ \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} (TA^k). \tag{15.797}$$

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \text{GL}^0(E) &\to \text{GL}^0(E) \\ X &\mapsto T \circ X \end{aligned} \tag{15.798}$$

[91] Proposition 10.85.

est continue. Donc

$$\varphi\Big(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}A^k\Big)=\lim_{N\to\infty}\varphi\Big(\sum_{k=0}^{N}A^k\Big) \tag{15.799a}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\varphi(A^k) \tag{15.799b}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(TA^k). \tag{15.799c}$$

□
PROPooPVZBooESAiRv

Proposition 15.220 ([557]).
Soit un espace de Banach E.

(1) L'application

$$\begin{aligned}f\colon B(0,1)&\to \mathrm{End}(E)\\ A&\mapsto\sum_{k=0}^{\infty}A^k\end{aligned} \tag{15.800}$$

où $B(0,1)$ est le boule de rayon 1 pour la norme opérateur est analytique.

(2) Soit $A\in\mathrm{End}(E)$ avec $\|A\|<1$. Alors A est inversible et

$$A^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k. \tag{15.801}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Analytique** Nous posons

$$\begin{aligned}f\colon B(0,1)&\to \mathrm{End}(E)\\ A&\mapsto\sum_{k=0}^{\infty}A^k\end{aligned} \tag{15.802}$$

Vu que $\|A\|<1$, la série converge absolument[92]. Grâce à la proposition 15.218, l'application f est une série de puissances. Le théorème 15.196(1) nous dit alors que f est analytique sur $B(0,1)$.

(2) **Inverse** Nous calculons maintenant $(\mathbb{1}-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ en utilisant la proposition 10.172. Nous avons :

$$(\mathbb{1}-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{1}-A)A^k \tag{15.803a}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\big(A^k-A^{k+1}\big) \tag{15.803b}$$
$$=A^0 \qquad \text{prop. 10.162} \tag{15.803c}$$
$$=\mathbb{1} \tag{15.803d}$$

Cela prouve que $(\mathbb{1}-A)$ est inversible et que son inverse est $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$.

□
PROPooCHTEooWWzSqK

Proposition 15.221 ([557]).
Soit un espace de Banach E. Soit T inversible et continu dans $\mathrm{End}(E)$. *Nous posons*

$$\rho=\frac{1}{\|T^{-1}\|}. \tag{15.804}$$

Pour tout $S\in B\big(0,1/\|T^{-1}\|\big)$, nous avons :

[92] Proposition 10.172(1).

(1) $(T+S)$ *est inversible.*

(2) *La série* $\sum_{k=0}^{\infty}(T^{-1}S)^k$ *converge absolument.*

(3) *Nous avons la formule*

$$(T+S)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-T^{-1}S)^kT. \tag{15.805}$$

(4) *L'application*

$$\begin{aligned} i\colon B(T,\rho)&\to \mathrm{GL}(E)\\ A&\mapsto A^{-1}\end{aligned} \tag{15.806}$$

est analytique[93].

Démonstration. Nous commençons par considérer $T=\mathrm{Id}$. Nous passons maintenant au cas général. Soient un opérateur inversible T ainsi que $S\in B\big(T,1/\|T^{-1}\|\big)$. Nous considérons

$$\phi(S)=\sum_{k=0}^{\infty}(-T^{-1}S)^kT^{-1}. \tag{15.807}$$

(1) **Rayon de convergence** Nous prouvons que cette série a un rayon de convergence $\rho=1/\|T^{-1}\|$. En effet supposons que $S\in B(0,\rho)$. Vu que T est borné (la continuité est dans les hypothèses), nous pouvons utiliser le lemme 10.84 :

$$\|T^{-1}S\|\leqslant\|T^{-1}\|\cdot\|S\|<1. \tag{15.808}$$

Nous avons donc convergence absolue de ϕ sur $B(0,\rho)$. La fonction ϕ est donc analytique sur $B(0,\rho)$.

(2) **Inverse** Vu que $\|-T^{-1}S\|<1$, nous pouvons utiliser la proposition 15.220 : l'opérateur $\mathbb{1}-(-T^{-1}S)$ est inversible et son inverse est $\sum_k(-T^{-1}S)^k$.

(3) **Lien avec** $(T+S)^{-1}$ Petit calcul. Nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_k(-T^{-1}S)^kT^{-1}&=\Big[\sum_k(-T^{-1}S)^k\Big]T^{-1} &(15.809a)\\ &=\Big[\big(\mathbb{1}-(-T^{-1}S)\big)\Big]^{-1}T^{-1} &(15.809b)\\ &=\Big[T(\mathbb{1}+T^{-1}S)\Big]^{-1} &(15.809c)\\ &=(T+S)^{-1}. &(15.809d)\end{aligned}$$

Cela prouve que si $S\in B(0,\rho)$, alors $(T+S)^{-1}=\phi(S)$.

(4) **Analycité de** i Pour $A\in B(T,\rho)$, nous posons $S=A-T$, de telle sorte à avoir $\|S\|<\rho$ et $(T+S)^{-1}=\phi(S)$. Nous avons donc

$$i(A)=\phi(A-T) \tag{15.810}$$

Vu que ϕ est analytique et que $A\mapsto A-T$ est analytique (proposition 15.198), par composition, l'application i est analytique (proposition 15.208).

□

PROPooNRXBooTdEKsu

Proposition 15.222 ([1])**.**
Soit une isométrie $\varphi\colon E\to F$ *entre espaces de Banach. Les applications*

$$\begin{aligned} u\colon \mathrm{GL}(E)&\to \mathrm{GL}(F,E)\\ g&\mapsto g\circ\varphi\end{aligned} \tag{15.811}$$

et

$$\begin{aligned} s\colon \mathcal{L}(E,F)&\to \mathrm{End}(E)\\ f&\mapsto \varphi\circ f.\end{aligned} \tag{15.812}$$

sont analytiques.

[93] Définition 15.57.

PROPooHJETooZHzodH

Proposition 15.223.
Soient deux espaces de Banach isométrique E et F. La partie $\mathrm{GL}(E,F)$ est ouverte dans $\mathcal{L}(E,F)$.

PROPooYJWGooEbbLVw

Proposition 15.224 ([1]).
Soient deux espaces de Banach isométrique E et F. L'opérateur d'inversion

$$\begin{aligned} j\colon \mathrm{GL}(E,F) &\to \mathrm{GL}(F,E) \\ f &\mapsto f^{-1} \end{aligned} \tag{15.813}$$

est analytique.

Démonstration. Nous considérons une isométrie $\varphi\colon F \to E$, et l'application

$$\begin{aligned} s\colon \mathcal{L}(E,F) &\to \mathrm{End}(E) \\ f &\mapsto \varphi \circ f. \end{aligned} \tag{15.814}$$

(1) **φ est linéaire** Vérification immédiate.

(2) **s est une injection** Suppose que $s(f) = s(g)$. Alors pour tout $x \in E$, nous avons $(\varphi \circ f)(x) = (\varphi \circ g)(x)$. Et comme φ est bijective, cela implique $f(x) = g(x)$ et donc que $f = g$.

(3) **φ est surjective** Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Nous avons $f = s(f \circ \varphi^{-1})$.

(4) **s est une isométrie** Nous avons

$$\|s(f)\| = \sum_{\|x\|=1} \|s(f)(x)\| \tag{15.815a}$$
$$= \sup_{\|x\|=1} \|(\varphi \circ f)(x)\| \tag{15.815b}$$
$$= \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| \qquad \varphi \text{ est isométrique} \tag{15.815c}$$
$$= \|f\| \tag{15.815d}$$

Nous avons prouvé que $s\colon \mathcal{L}(E,F) \to \mathrm{End}(E)$ est une bijection isométrique.

L'application s se restreint en $s\colon \mathrm{GL}(E,F) \to \mathrm{GL}(E)$. Pour $f \in \mathrm{GL}(E,F)$, nous avons $j(f) = i\big(s(f)\big)\circ\varphi$. En effet

$$i\big(s(f)\big) \circ \varphi = i\big(\varphi \circ f\big) \circ \varphi = f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = f^{-1}. \tag{15.816}$$

En utilisant l'application u de la proposition 15.222, nous avons alors

$$j = u \circ i \circ s. \tag{15.817}$$

Vu que s, i et u sont analytiques[94], j est analytique. □

PROPooPESTooQmWGRJ

Proposition 15.225 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés X_1, X_2, Y_1, Y_2 ainsi que des applications $f\colon X_1 \to Y_1$ et $g\colon X_2 \to Y_2$ de classe $\mathcal{A}$ (différentiable, C^k ou analytique[95]). Alors l'application

$$\begin{aligned} f \times g\colon X_1 \times X_2 &\to Y_1 \times Y_2 \\ (x,y) &\mapsto \big(f(x), f(y)\big). \end{aligned} \tag{15.818}$$

est dans la classe $\mathcal{A}$.

Démonstration. La proposition 10.333 donne déjà le résultat pour f et g différentiables et C^k. Nous nous concentrons sur l'analytique.

Nous supposons que f et g sont analytiques. Nous avons donc des k-formes symétriques $\alpha_k\colon X_1 \times \ldots \times X_1 \to Y_1$ telles que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x) \tag{15.819}$$

[94] Propositions 15.222 et 15.221.
[95] Définition 15.57.

et des k-formes symétriques $\beta_k\colon X_2 \times \dots X_2 \to Y_2$ telles que

$$g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(y). \tag{15.820}$$

Nous considérons les k-formes symétriques

$$\begin{aligned} \gamma_k\colon (X_1 \times X_2)^k &\to Y_1 \times Y_2 \\ (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) &\mapsto \big(\alpha_k(x_1, \dots, x_k), \beta_k(y_1, \dots, y_k)\big). \end{aligned} \tag{15.821}$$

Pour chaque $N \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\sum_{k=0}^{N} \gamma_k(x, y) = \big(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k(x), \sum_{k=0}^{N} \beta_k(y)\big). \tag{15.822}$$

En prenant la limite $N \to \infty$, la proposition 7.291 donne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(x, y) = \big(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x), \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(y)\big) = (f \times g)(x, y). \tag{15.823}$$

c'est-à-dire que nous avons bien écrit $f \times g$ comme série de formes symétriques. □

Chapitre 16

Représentations et caractères

16.1 Représentations et caractères

Définition 16.1.
Si G est un groupe, l'ensemble des homomorphismes[1] $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ *est un groupe pour la multiplication. Un élément de* $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ *est un* ***caractère abélien****. Le nom « abélien » vient du fait que le caractère prenne ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Nous notons $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.*

Théorème 16.2.
Soit G un groupe abélien fini. Alors G est isomorphe à $\hat{G}$.

L'isomorphisme n'est pas canonique.

Démonstration. Étant donné la structure des groupes abéliens finis donnée par le théorème 5.23, nous commençons par nous concentrer sur $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous allons montrer que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{U}_n = \{\xi \in \mathbb{C} \text{ tel que } \xi^n = 1\}. \tag{16.1}$$

Pour cela nous avons l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) &\to \mathbb{C}^* \\ f &\mapsto f(1). \end{aligned} \tag{16.2}$$

Notons que si $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$, alors $f(k) = f(1)^k$, donc ψ est bien un isomorphisme. Cela nous amène à définir

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{Hom}\Big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +), (\mathbb{C}^*, \cdot)\Big) &\to \mathrm{U}_n \\ f &\mapsto f(1). \end{aligned} \tag{16.3}$$

Remarquons que pour tout $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ on a bien $f(1)^n = 1$. En effet si $[k] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors $f\big([k]\big) = f(1)^k$ et en particulier

$$f(1)^n = f([n]) = f(0) = 1. \tag{16.4}$$

Donc $f(1) \in \mathrm{U}_n$. Le φ est injective parce que si $f(1) = g(1)$ alors $f = g$ du fait que $f(k) = f(1)^k = g(1)^k = g(k)$.

Nous en sommes à avoir prouvé que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) \simeq \mathrm{U}_n$ (introduit au lemme 19.2). Il faudrait encore montrer que $\mathrm{U}_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour cela nous nous rappelons du lemme 19.7 nous ayant raconté que le groupe U_n des racines de l'unité était cyclique et d'ordre n. Il est donc bien isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Passons au cas où

$$G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}. \tag{16.5}$$

Dans ce cas nous montrons que

$$\begin{aligned} \alpha\colon \bigtimes_{i=1}^{k} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) &\to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) \\ \alpha(\chi_1, \ldots, \chi_k)(g_1, \ldots, g_k) &= \chi_1(g_1) \ldots \chi_k(g_k). \end{aligned} \tag{16.6}$$

Ce α est injectif parce qu'en appliquant l'égalité

$$\alpha(\chi_1, \ldots, \chi_k) = \alpha(\chi'_1, \ldots, \chi'_k) \tag{16.7}$$

[1] Voir -1.1.

à l'élément $g = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ alors nous trouvons $\chi_i(1) = \chi'_i(1)$ parce que $\chi_j(0) = 1$. Du coup $\chi_i = \chi'_i$.

L'application α est en plus surjective. En effet si $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$, alors nous définissons

$$\chi_i(g_i) = \chi(0, \dots, g_i, \dots, 0), \tag{16.8}$$

et nous avons alors $\alpha(\chi_1, \dots, \chi_k) = \chi$.

Nous devons encore montrer que α est un homomorphisme[2]. Si $\chi, \chi' \in \bigtimes_{i=1}^{k} \text{Hom}(\mathbb{F}_{d_i}, \mathbb{C}^*)$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha(\chi\chi')(g_1, \dots, g_k) &= (\chi_1\chi'_1)(g_1) \dots (\chi_k\chi'_k)(g_k) && (16.9a)\\
&= \chi_1(g_1) \dots \chi_k(g_k)\chi'_1(g_1) \dots \chi'_k(g_k) && (16.9b)\\
&= \alpha(\chi)(g_1, \dots, g_k)\alpha(\chi')(g_1, \dots, g_k) && (16.9c)\\
&= \big(\alpha(\chi)\alpha(\chi')\big)(g_1, \dots, g_k). && (16.9d)
\end{aligned}$$

Donc $\alpha(\chi\chi') = \alpha(\chi)\alpha(\chi')$. □

THOooLZAHooMerBZs

Théorème 16.3.
Soit G un groupe abélien fini. Les groupes G et $\hat{\hat{G}}$ sont isomorphes et un isomorphisme canonique est donné par $\alpha\colon g \mapsto f_g$ donné par

$$f_g(\chi) = \chi(g). \tag{16.10}$$

Démonstration. D'abord f_g est bien un caractère de $\hat{G}$ parce que

$$f_g(\chi\chi') = (\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g) = f_g(\chi)f_g(\chi'). \tag{16.11}$$

Le fait que α soit un homomorphisme de groupes est direct :

$$f_{gg'}(\chi) = \chi(gg') = \chi(g)\chi(g') = f_g(\chi)f_{g'}(\chi) = (f_g f_{g'})(\chi). \tag{16.12}$$

D'autre part nous savons que G et $\hat{\hat{G}}$ ont le même cardinal. Il suffit donc de prouver l'injectivité de α pour être sûr de la bijectivité. Pour cela nous devons prouver que si $g \neq e$ alors $f_g \neq f_e$. Nous savons que pour tout caractère $\chi \in \hat{G}$, $f_e(\chi) = \chi(e) = 1$. Donc pour tout $g \in G \setminus \{e\}$, nous devons trouver $\chi \in \hat{G}$ tel que $\chi(g) \neq 1$.

En vertu de ce que nous connaissons sur la structure des groupes abéliens finis (théorème 5.23), nous commençons $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et considérons le caractère donné par $\chi([1]) = e^{2i\pi/n}$. Ce χ est un isomorphisme entre G et $\text{U}(n)$; nous n'avons $\chi([k]) = 0$ que si $[k] = [n] = [0]$. Pour rappel dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le neutre est $e = 0$ et non $e = 1$.

Passons au cas général :

$$G \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \tag{16.13}$$

Si $g = (g_1, \dots, g_k)$ est non nul dans G, alors il existe k tel que $g_k \neq 0$ et on prend

$$\chi(g_1, \dots, g_k) = \chi_k(g_k) \tag{16.14}$$

où χ_k est le caractère $\chi_i([1]) = e^{2\pi i/n_k}$. Ce χ est alors un caractère non trivial de G.

□

16.1.1 Crochet de dualité et transformée de Fourier

Si G est un groupe abélien, nous définissons le crochet de dualité entre G et $\hat{G}$ par

$$\begin{aligned}
\langle ., . \rangle\colon G \times \hat{G} &\to \mathbb{C}^*\\
\langle g, \chi \rangle &= \chi(g).
\end{aligned} \tag{16.15}$$

Notons que l'image de ce crochet n'est pas $\mathbb{C}^*$ entier, mais seulement le groupe unitaire $\text{U}(n)$ où n est l'exposant[3] de G.

Si f, g sont des applications de G dans $\mathbb{C}$, alors on leur associe le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} f(s)\overline{g(s)}. \tag{16.16}$$

[2] Voir -1.1
[3] Définition 1.425.

LEMooCSTVooJfhzEU

Lemme 16.4.
Les caractères de G forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^G$ pour ce produit scalaire.

Démonstration. Étant donné que les $\chi(s)$ sont des nombres complexe de module 1, nous avons $\chi(s)\overline{\chi(s)} = 1$ et par conséquent $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Si par contre $\chi \neq \chi'$, alors il existe $s_\in G$ tel que $\chi(s_0) \neq \chi'(s_0)$. Dans ce cas en effectuant un changement de variable $s \to s_0 s$ dans la sommation,

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s\in G} \chi(s)\overline{\chi'(s)} \tag{16.17a}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{s\in G} \chi(s_0 s)\overline{\chi'(s_0 s)} \tag{16.17b}$$

$$= \frac{1}{|G|} \chi(s_0)\overline{\chi'(s_0)} \sum_{s\in G} \chi(s)\overline{\chi'(s)}. \tag{16.17c}$$

Donc nous avons trouvé

$$\langle \chi, \chi' \rangle \big(1 - \chi(s_0)\overline{\chi'(s_0)}\big) = 0. \tag{16.18}$$

Mais vu que $\chi(s_0) \neq \chi'(s_0)$, la parenthèse est non nulle (pour rappel $\chi(s_0)$ est un complexe de module 1) et par conséquent $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$.

Nous déduisons immédiatement que les caractères forment une famille libre parce que si $\sum_i a_i \chi_i = 0$ (la somme est sur tous les caractères), alors en prenant le produit scalaire avec χ_k,

$$\sum_i a_i \langle \chi_k, \chi_i \rangle = 0, \tag{16.19}$$

et donc $a_k = 0$.

Les caractères forment donc un système libre orthonormé. De plus l'espace engendré à la bonne dimension parce que le cardinal de l'ensemble des caractères est la dimension (complexe) de l'espace des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ parce que, en utilisant l'isomorphisme entre G et $\hat{G}$,

$$\operatorname{Card} \hat{G} = \operatorname{Card}(G) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^G. \tag{16.20}$$

□

Du fait que les caractères forment une base orthonormée, nous pouvons écrire, pour toute application $f : G \to \mathbb{C}$,

EqnnsXWC

$$f = \sum_{\chi\in\hat{G}} \langle \chi, f \rangle \chi. \tag{16.21}$$

À une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ nous associons la **transformée de Fourier**

$$\begin{aligned} \hat{f} : \hat{G} &\to \mathbb{C} \\ \chi &\mapsto \langle \chi, f \rangle. \end{aligned} \tag{16.22}$$

Nous avons donc aussi une espèce de formule d'inversion

$$f = \sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi \tag{16.23}$$

qui n'est qu'une réécriture de 16.21.

16.1.2 Groupes non abéliens

Nous avons vu que le groupe des caractères $\hat{G}$ contenait toute l'information sur un groupe abélien. Malheureusement, pour les groupes non abéliens, ça ne va pas suffire, et nous allons introduire la notion de représentations, dont les caractères seront un cas particulier de dimension un.

Proposition 16.5.
Soit G un groupe (pas spécialement abélien). Nous avons

$$\hat{G} \simeq \operatorname{Hom}\big(G/D(G), \mathbb{C}^*\big). \tag{16.24}$$

Démonstration. Ce qui fait fonctionner la preuve est le fait que si $f\colon G\to\mathbb{C}^*$ est un homomorphisme[4], alors f s'annule sur $D(G)$. L'isomorphisme est

$$\begin{aligned}\psi\colon \hat{G}&\to \text{Hom}\big(G/D(G),\mathbb{C}^*\big)\\ \psi(f)[g]&=f(g).\end{aligned}\tag{16.25}$$

Cette application est bien définie parce que si f est un homomorphisme,

$$f(gklk^{-1}l^{-1})=f(g).\tag{16.26}$$

D'autre part ψ est un homomorphisme de groupe parce que

$$\psi(f_1f_2)[g]=(f_1f_2)(g)=f_1(g)f_2(g)=\psi(f_1)[g]\psi(f_2)[g]=\big(\psi(f_1)\psi(f_2)\big)[g].\tag{16.27}$$

Pour l'injectivité de ψ, soit f_1 et f_2 telles que $\psi(f_1)=\psi(f_2)$. Alors pour tout $g\in G$ nous avons

$$\psi(f_1)[g]=\psi(f_2)[g]\tag{16.28}$$

et donc $f_1(g)=f_2(g)$.

Enfin ψ est surjective. En effet, soit $\bar{f}\in\text{Hom}\big(G/D(G),\mathbb{C}^*\big)$. Alors nous obtenons $\psi(f)=\bar{f}$ en posant

$$f(g)=\bar{f}[g].\tag{16.29}$$

Il faut juste vérifier que le f ainsi défini est dans $\hat{G}$, c'est-à-dire que $f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)$. □

Cette proposition nous montre que

$$\hat{G}=\widehat{G/D(G)},\tag{16.30}$$

alors que $G/D(G)$ est abélien ; il n'est donc pas tellement possible que $\hat{G}$ contienne beaucoup d'informations intéressantes sur G.

16.1.3 Représentations linéaires des groupes finis

Si $\dim V=1$, alors $\text{GL}(V)=\mathbb{C}^*$ et les représentation sont les caractères abéliens.

ExKUAyUD

Exemple 16.6.
Considérons le triangle équilatéral A,B,C donné par les points

$$\begin{cases}A=1 & (16.31a)\\ B=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) & (16.31b)\\ C=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}) & (16.31c)\\ & (16.31d)\end{cases}$$

Dans la base (pas orthonormée) $\{A,B\}$ de $\mathbb{R}^2$, ces trois points sont donnés par

$$A=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.\tag{16.32}$$

Le groupe symétrique S_3 agit sur le triangle par permutation des sommets. Vues dans la base $\{A,B\}$, les transpositions correspondent aux matrices

$$\rho(AB)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\tag{16.33a}$$

$$\rho(AC)=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}\tag{16.33b}$$

$$\rho(BC)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}.\tag{16.33c}$$

[4] Voir -1.1.

Cherchons la matrice correspondante à la permutation (A, B, C). Vu que A est envoyé sur B, la première colonne sera[5] $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, et comme B est envoyé sur C, la deuxième colonne sera $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$. Nous avons donc

$$\rho(ABC) = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}. \tag{16.34}$$

Nous vérifions que $\rho(ABC)C = A$:

$$\rho(ABC)C = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 \tag{16.35}$$

Par ailleurs, la permutation (A, B, C) se décompose en $(A, B, C) = (A, C)(A, B)$ et nous pouvons vérifier que

$$\rho(AC)\rho(AB) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix} = \rho(ABC). \tag{16.36}$$

△

Définition 16.7.
Si (V, ρ) et (V', ρ') sont deux représentations du groupe G, alors nous définissons la ***somme directe*** *par $\big(V \oplus V', \rho \oplus \rho'\big)$ donné par*

$$(\rho \oplus \rho')(g) = \begin{pmatrix}\rho(g) & 0\\0 & \rho'(g)\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(V \oplus V'). \tag{16.37}$$

Nous noterons souvent $2V$ pour la représentations $(V, \rho) \oplus (V, \rho)$ et plus généralement l'écriture

$$V = \bigoplus_i k_i W_i \tag{16.38}$$

signifiera la représentation somme de k_i termes de la représentation W_i. Ici encore un abus est commis entre la représentation (ρ_i, W_i) et l'espace W_i.

16.1.4 Module

Nous considérons la $\mathbb{C}$-algèbre $G[\mathbb{C}]$ des combinaisons (formelles) d'éléments de G à coefficients dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathbb{C}[G] = \{\sum_{s\in G} a_s s\} \tag{16.39}$$

avec le produit hérité de la bilinéarité :

$$\sum_{s\in G}\sum_{t\in G} a_s b_t st = \sum_s \sum_t a_s b_{s^{-1}t} t, \tag{16.40}$$

et la somme

$$(\sum_s a_s s) + \sum_t b_t t = \sum_{s\in G}(a_s + b_s)s. \tag{16.41}$$

Le tout est une $\mathbb{C}$-algèbre agissant sur V par

$$\left(\sum_s a_s s\right) v = \sum_{s\in G} a_s \rho(s) v \in V \tag{16.42}$$

Les sous-modules indécomposables seront les représentations irréductibles.

Définition 16.8.
La représentation (V, ρ) du groupe G est ***irréductible*** *si les seuls sous-espaces invariants de V sous $\rho(G)$ sont V et $\{0\}$.*

Exemple 16.9.
La représentation de S_3 sur $\mathbb{R}^2$ donnée par les permutations des sommets d'un triangle équilatéral donnée dans l'exemple 16.6 est irréductible. △

[5] Les colonnes sont les images des vecteurs de base.

La question qui vient est de savoir si une représentation possédant des sous-espaces invariants peut être écrite comme la somme de représentations irréductibles.

PropHeyoAN

Proposition 16.10.
Soit (V,ρ) une représentation linéaire de dimension finie d'un groupe fini[6]*. Si W_1 est un sous-espace stable*[7]*, alors il existe un sous-espace W_2 également stable et tel que $V = W_1 \oplus W_2$.*

Toute représentation linéaire est décomposable en représentations irréductibles.

Démonstration. Soit $P\colon V \to V$ un projecteur sur W_1, c'est-à-dire que $P^2 = P$ et $P(V) = W_1$. Pour construire un tel projecteur, on peut par exemple prendre un supplémentaire de W_1 dans V puis utiliser la décomposition[8]. Nous considérons l'opérateur

$$P_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\circ P\circ\rho(g)^{-1}. \tag{16.43}$$

Prouvons que ce P_G est encore un projecteur. D'abord pour tout $g\in G$ nous avons

$$\rho(g)P_G\rho(g)^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\rho(gs)P\rho(gs)^{-1} = P_G. \tag{16.44}$$

La dernière égalité est un changement de variables dans la somme[9]. Cela signifie que $P_G\rho = \rho P_G$. Nous avons même $P_GP = P$ parce que si $v\in W_1$, alors

$$P_G(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\rho(s)P\underbrace{\rho(s)^{-1}v}_{\in W_1} \tag{16.45a}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{s}\rho(s)\rho(s)^{-1}v \tag{16.45b}$$

$$= v. \tag{16.45c}$$

Avec cela nous pouvons conclure que $P_G^2 = P_G$ parce que

$$P_G\circ P_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g}P_G\rho(g)P\rho(g)^{-1} \tag{16.46a}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g}\rho(g)P_GP\rho(g)^{-1} \tag{16.46b}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g}\rho(g)P\rho(g)^{-1} \tag{16.46c}$$

$$= P_G. \tag{16.46d}$$

Donc P_G est un projecteur, est stable sous les conjugaisons par $\rho(g)$ et commute avec $\rho(g)$. Nous décomposons Id de façon évidente en

$$\mathrm{Id} = P_G + (\mathrm{Id} - P_G). \tag{16.47}$$

Étant donné que l'opérateur P_G commute avec tous les $\rho(g)$, les noyaux de P_G et $\mathrm{Id}-P_G$ sont des sous-espaces invariants. Vu que P_G est un projecteur, nous avons $q(P_G) = 0$ avec $q(X) = X^2 - X$. Pour appliquer le lemme des noyaux (théorème 8.90), nous remarquons que $q(X) = X(X-1)$ et donc

$$V = \ker P_G \oplus \ker(P_G - \mathbb{1}). \tag{16.48}$$

Si nous posons $W_2 = \ker P_G$, il reste à voir que $\ker(P_G - \mathbb{1}) = W_1$. D'abord $W_1 \subset \ker(P_G - \mathrm{Id})$ parce que si $w\in W_1$, ce dernier étant stable,

$$P_Gw = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)P\underbrace{\rho(g)^{-1}w}_{\in W_1} \tag{16.49a}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}w \tag{16.49b}$$

$$= w. \tag{16.49c}$$

[6] La démonstration marche aussi pour les groupes compacts, mais il faudrait des intégrales.

[7] c'est-à-dire si ρ n'est pas irréductible.

[8] Ou encore prendre une base de W_1, l'étendre en une base de V et définir P comme l'annulation des coefficients des vecteurs « complétant » la base.

[9] Et c'est ça qui demande un peu de technique pour écrire la preuve dans le cas d'un groupe compact : il faut une mesure de Haar.

Pour prouver l'inclusion inverse, nous savons que P_G et P sont des projecteurs tels que $P_G P = P$, ce qui signifie que l'image de P_G est incluse à celle de P, c'est-à-dire à W_1. Mais $\text{Image}(P_G) = \ker(\mathbb{1} - P_G)$, donc

$$\ker(\mathbb{1} - P_G) = \text{Image}(P_G) \subset \text{Image}(P) = W_1. \tag{16.50}$$

La représentation ρ se décompose donc en deux sous-représentations (ρ, W_1) et ρ, W_2. Si l'une des deux n'est pas irréductible, le processus peut recommencer. Vu que la dimension de V est finie, toute représentation se décompose en une somme finie de représentation irréductibles. □

16.1.5 Structure hermitienne

Soit (ρ, V) une représentation de G sur un espace vectoriel complexe V. Nous voulons munir V d'un produit scalaire hermitien (définition 8.171) tel que les opérateurs $\rho(g)$ soient tous des isométries. C'est-à-dire que nous voudrions définir $\langle u, v\rangle_G$ de telle sorte à avoir

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle_G = \langle u, v\rangle_G \tag{16.51}$$

pour tout $g \in G$. Nous commençons par considérer un produit hermitien $\langle ., .\rangle$ quelconque et puis nous définissons

$$\langle u, v\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle. \tag{16.52}$$

Nous devons vérifier que c'est un produit. La seule des conditions dont la vérification n'est pas immédiate est celle de positivité. Pour tout $g \in G$ et tout $v \in V$, nous avons $\langle \rho(g)v, \rho(g)v\rangle$ est positif et nul si et seulement si $\rho(g)v = 0$. Étant donné que $\rho(e)v = v$, parmi les termes de la somme

$$\langle u, u\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \rho(g)v, \rho(g)v\rangle, \tag{16.53}$$

au moins un est strictement positif (pourvu que $v \neq 0$) ; les autres sont positifs ou nuls. Par conséquent $\langle v, v\rangle_G = 0$ si et seulement si $v = 0$.

Donc les groupes finis peuvent être vus comme des parties de groupes d'isométrie. De la même façon, en utilisant une mesure de Haar pour faire la moyenne, nous pouvons plonger les groupes compacts dans des groupes unitaires.

16.1.6 Caractères

Définition 16.11.
Soit (V, ρ) une représentation linéaire du groupe G. Le ***caractère*** *de ρ est la fonction*

$$\begin{aligned}\chi_\rho\colon G &\to \mathbb{C}\\ s &\mapsto \text{Tr}\big(\rho(s)\big).\end{aligned} \tag{16.54}$$

Par invariance cyclique de la trace, nous avons

$$\chi_\rho(sts^{-1}) = \chi_\rho(t), \tag{16.55}$$

ce qui fait que le caractère est une fonction constante sur les classes de conjugaison.

D'après sa fiche Wikipédia, le marquis de Sade, passionné de théâtre, faisait des représentations qui avaient du caractère.

Un **caractère irréductible** est un caractère d'une représentation irréductible.

Définition 16.12.
Une application $f\colon G \to \mathbb{C}$ est ***centrale*** *si elle est constante sur les classes de conjugaison.*

Les traces sont des applications centrales.

L'ensemble des fonctions centrales sur un groupe fini (ou tout au moins ayant un nombre fini de classes de conjugaison) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension égale au nombre de classes, et nous pouvons mettre le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G} f(s)\overline{g(s)}. \tag{16.56}$$ EqJrEpVI

C'est une forme hermitienne sur l'espace des fonctions centrales.

16.2 Équivalence de représentations et caractères

Cette section prend des éléments des articles lemme de Schur, caractère d'une représentation, fonction centrale et trace de Wikipédia.

Définition 16.13.
*Nous disons que les deux représentations (V,ρ) et (V',ρ') sont **équivalentes** si il existe une bijection linéaire $f: V\to V'$ telle que*

$$f\circ\rho=\rho'\circ f. \tag{16.57}$$

*Nous disons alors que f **entrelace** ρ et ρ'.*

ThoyftobH

Théorème 16.14 (Théorème de Schur)**.**
Si (V,ρ) et (V',ρ') sont des représentations irréductibles non équivalentes alors la seule application linéaire $f: V\to V'$ entrelaçant ρ et ρ' est la fonction nulle.

En d'autres termes, soit les représentations sont équivalentes (et il y a un isomorphisme), soit il n'y a même pas un homomorphisme.

Démonstration. Soit $f\in\mathcal{L}(V,V')$ telle que $f\circ\rho=\rho'\circ f$. Alors $\ker f$ est un sous-espace stable sous $\rho(G)$, et $\text{Image}(f)$ est un sous-espace de V' stable par $\rho'(G)$. Par irréductibilité, nous avons que $\ker(f)=\{0\}$ ou V. Même chose pour $\text{Image}(f)$. Il y a deux possibilités.

(1) Si $\ker(f)=\{0\}$, alors $\text{Image}(f)\neq\{0\}$ et alors $\text{Image}(f)=V'$. Du coup f est injective et surjective, c'est-à-dire est un isomorphisme.

(2) Si $\ker(f)=V$, alors $f=0$.

□

Corolaire 16.15 (Schur pour les représentations sur $\mathbb{C}$)**.**
Soit (V,ρ) une représentation irréductible, alors l'ensemble

$$\text{End}_G(V,\rho)=\{f\in\text{End}(V)\text{ tel que }\rho\circ f=f\circ\rho\} \tag{16.58}$$

est l'ensemble des homothéties.

Démonstration. Soit $f\in\text{End}_G(V,\rho)$. Vu que l'espace est sur $\mathbb{C}$, l'endomorphisme f a une valeur propre λ. L'opérateur $g=f-\lambda\mathbb{1}$ est aussi un opérateur d'entrelacement de ρ alors que $\ker(g)\neq\{0\}$ par définition de valeur propre. Du coup $\ker(g)=V$, ce qui signifie que f est l'isométrie de rapport λ : $f=\lambda\,\text{Id}$. □

LempUSOlo

Lemme 16.16.
Si (ρ,V) et (ρ',V') sont des représentations équivalentes de caractères χ et χ', alors $\chi=\chi'$.

Démonstration. Si $A: V\to V'$ est un isomorphisme d'espace vectoriel entrelaçant ρ et ρ', c'est-à-dire si pour tout g, $\rho'(g)A=A\rho(g)$, alors $\rho'(g)=A\rho(g)A^{-1}$ et

$$\chi'(g)=\text{Tr}\big(\rho'(g)\big)=\text{Tr}\big(A\rho(g)A^{-1}\big)=\text{Tr}\big(\rho(g)\big) \tag{16.59}$$

parce que la trace est un invariant de similitude (lemme 8.206). □

LemJqIZns

Lemme 16.17.
Si χ est le caractère de la représentation complexe (V,ρ) du groupe fini G, alors pour tout $g\in G$ nous avons $\chi(g^{-1})=\overline{\chi(g)}$.

Démonstration. Par le corolaire 2.15 au théorème de Lagrange, nous avons $g^{|G|}=e$ et donc en tant qu'opérateur, $\rho(g)^{|G|}=\mathbb{1}$. Les valeurs propres de $\rho(g)$ sont donc des racines de l'unité. Si nous notons λ_i ces valeurs propres, alors $\chi(g)=\sum_i\lambda_i$, et en considérant la matrice dans sa base de diagonalisation (lemme de Schur complexe, 12.102), nous voyons que

$$\chi(g^{-1})=\text{Tr}\big(\rho(g)^{-1}\big)=\sum_i\frac{1}{\lambda_i}. \tag{16.60}$$

Mais λ_i étant une racine de l'unité nous avons $\frac{1}{\lambda_i}=\bar{\lambda}_i$, ce qui fait que

$$\chi(g^{-1})=\sum_i\bar{\lambda}_i=\overline{\chi(g)}. \tag{16.61}$$

□

PropJzbfWi

Proposition 16.18.
Soient deux représentations irréductibles complexes (V,ρ) et (V',ρ') du même groupe fini G, et χ et χ' leurs caractères respectifs. Nous avons

(1) $\langle\chi,\chi'\rangle=0$ *si ρ et ρ' ne sont pas équivalentes.*

(2) $\langle\chi,\chi'\rangle=1$ *si les représentations sont équivalentes.*

Démonstration. Nous considérons les bases $\{e_1,\dots,e_n\}$ de V et $\{f_1,\dots,f_m\}$ de V'. Puis nous considérons la matrice $F(k,l)=E_{kl}\in\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ où pour rappel, E_{kl} est la matrice de composantes $(E_{kl})_{ij}=\delta_{ki}\delta_{lj}$. Nous posons

$$F_G(k,l)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\circ F(k,l)\circ\rho'(g)^{-1}. \tag{16.62}$$

En nous permettant de ne pas réécrire les indices k et l de F et F_G, nous montrons que F_G entrelace ρ et ρ' :

$$\begin{aligned}
F_G\circ\rho'(t)&=\frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\rho(s)\circ F\circ\rho'(s^{-1})\circ\rho'(t) && (16.63a)\\
&=\frac{1}{|G|}\sum_{s}\rho(s)F\rho'(s^{-1}t) && (16.63b)\\
&=\frac{1}{|G|}\sum_{k}\rho(tk)F\rho'(k^{-1}) && (16.63c)\\
&=\frac{1}{|G|}\rho(t)\sum_{k}\rho(k)F\rho'(k^{-1}) && (16.63d)\\
&=\rho(t)\circ F_G. && (16.63e)
\end{aligned}$$

Dans ce calcul nous avons effectué le changement de variables $k=(s^{-1}t)^{-1}$ qui donne $s=tk$.

Par ailleurs nous avons

$$\begin{aligned}
\Big(\rho(g)F(k,l)\rho'(g^{-1})\Big)_{ij}&=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\rho(g)_{ir}F(k,l)_{rs}\rho'(g^{-1})_{sj} && (16.64a)\\
&=\sum_{rs}\rho(g)_{ir}\delta_{kr}\delta_{ls}\rho'(g^{-1})_{sj} && (16.64b)\\
&=\rho(g)_{ik}\rho'(g^{-1})_{lj}, && (16.64c)
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$F_G(k,l)_{ij}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)_{ik}\rho'(g^{-1})_{lj}. \tag{16.65}$$ Eqgvpzfz

Si χ et χ' sont les caractères de ρ et ρ', alors nous avons le produit (16.56) qui donne

$$\begin{aligned}
\langle\chi,\chi'\rangle&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\chi'(g)} && (16.66a)\\
&=\frac{1}{|G|}\sum_{g}\chi(g)\chi'(g^{-1}) && \text{lemme 16.17} \quad (16.66b)\\
&=\frac{1}{|G|}\sum_{g}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\rho(g)_{ii}\rho'(g^{-1})_{jj} && (16.66c)\\
&=\sum_{ij}F_G(i,j)_{ij} && \text{par (16.65).} \quad (16.66d)
\end{aligned}$$ sEqKYywTM

Si les représentations ρ et ρ' ne sont pas équivalentes, le fait que F_G en soit un opérateur d'entrelacement implique par le théorème de Schur 16.14 que $F_G=0$ et donc $\langle\chi,\chi'\rangle=0$.

Si au contraire les représentation sont équivalentes, alors le lemme 16.16 nous dit que $\chi=\chi'$ et nous reprenons la définition :

$$\langle\chi,\chi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g}\chi(g)\overline{\chi(g)}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}1=1 \tag{16.67}$$

parce que les nombres $\chi(g)$ sont des racines de l'unité. □

16.2.1 Représentation régulière

DEFooGGPTooExTxWj

Définition 16.19.
*Nous notons λ la **représentation régulière gauche**, agissant sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions $G \to \mathbb{K}$ par*

$$\big(\lambda(g)f\big)(h) = f(g^{-1}h). \tag{16.68}$$

D'autre part nous considérons les fonctions $\delta_g \colon G \to \mathbb{K}$ (ici $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou pire) définie par

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = h \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.69}$$

La représentation régulière agit sur les fonctions δ_s de la façon suivante :

$$\lambda(g)\delta_s = \delta_{gs} \tag{16.70}$$

parce que $\big(\lambda(g)\delta_s\big)(h) = \delta_s(g^{-1}h) = \delta_{gs}(h)$.

LEMooGYIKooRRUxHq

Lemme 16.20.
Le caractère de la représentation régulière gauche est donné par

$$\chi_\lambda = |G|\delta_e. \tag{16.71}$$

EqUuoVNa

Démonstration. Appliquer l'équation (16.71) fonctionne parce que $\chi_\lambda(e)$ est la dimension de l'espace des fonctions sur G, c'est-à-dire $|G|$. Si par contre $g \neq e$, alors $\lambda(g)$ est une matrice de permutation (dans la base des δ_h) et a donc tous ses éléments diagonaux nuls. □

Si ρ est une représentation et si f est une fonction sur le groupe, alors nous considérons l'opérateur

$$\rho_f = \sum_{g\in G} f(g)\rho(g). \tag{16.72}$$

PropEAXkAY

Proposition 16.21 ([558]).
Si (ρ, V) est une représentation irréductible et si f est une fonction centrale sur G, alors l'opérateur ρ_f est une homothétie de V de rapport

$$\frac{1}{\dim V}\sum_{g\in G} f(g)\chi(g) \tag{16.73}$$

où χ est le caractère de ρ.

Démonstration. Nous commençons par voir que ρ_f entrelace ρ. En effet,

$$\begin{aligned}
\rho(t)^{-1}\circ\rho_f\circ\rho(t) &= \sum_g f(g)\rho(t^{-1}gt) && (16.74a)\\
&= \sum_h f(tht^{-1})\rho(h) && \text{chm.var.} h = t^{-1}gt \quad (16.74b)\\
&= \sum_h f(h)\rho(h) && (16.74c)\\
&= \rho_f && (16.74d)
\end{aligned}$$

où en écrivant $f(tht^{-1}) = f(h)$, nous avons utilisé le fait que f était centrale. Étant donné que ρ_f entrelace une représentation irréductible, le lemme de Schur (16.14) nous indique que ρ_f est une homothétie. Soit k le facteur d'homothétie. Alors d'une part $\mathrm{Tr}(\rho_f) = nk$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\rho_f) &= \mathrm{Tr}\big(\sum_g f(g)\rho(g)\big) && (16.75a)\\
&= \sum_g f(g)\,\mathrm{Tr}\big(\rho(g)\big) && (16.75b)\\
&= \sum_g f(g)\chi(g). && (16.75c)
\end{aligned}$$

Du coup effectivement

$$k = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} f(g)\chi(g). \tag{16.76}$$

□

16.2.2 Caractères et représentations : suite et fin

Lemme 16.22.
Un groupe fini n'a (à équivalence près) qu'un nombre fini de représentations irréductibles.

Démonstration. Les caractères irréductibles forment un système orthonormé (proposition 16.18) et donc libre parmi les fonctions centrales. Donc il y a au plus autant de caractères irréductibles que la dimension de l'espace des fonctions centrales ; et ce dernier est de dimension finie donnée par le nombre de classes de conjugaison de G. □

Nous savons que les caractères de deux représentations équivalentes sont égaux. Étant donné qu'il n'existe qu'un nombre fini de représentations irréductibles, il existe un nombre fini de caractères irréductibles. Nous pouvons donc fixer les notations suivantes. Les caractères irréductibles seront notés $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,h}$ et nous noterons (σ_i, W_i) une représentation ayant le caractère φ_i.

Théorème 16.23 ([558]).
Soit (ρ, V) une représentation de G de caractère χ. Alors sa décomposition en représentations irréductibles est donnée par

$$(V, \rho) = \bigoplus_{i=1}^{h} k_i (W_i, \sigma_i) \tag{16.77}$$

avec $k_i = \langle \chi, \varphi_i \rangle$. En particulier, à permutation près des facteurs, la décomposition d'une représentation en représentations irréductibles est unique.

Démonstration. La décomposition de χ en caractères irréductibles est donnée par $\chi = \sum_i k_i \varphi_i$; en prenant le produit de cette égalité avec φ_j et en tenant compte de l'othonormalité des caractères irréductibles,

$$\langle \chi, \varphi_j \rangle = \sum_i k_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = k_j. \tag{16.78}$$

□

Le théorème suivant est ce qui nous permet de dire que l'étude des caractères et l'étude des représentations, c'est la même chose.

ThoWGkfADd

Théorème 16.24.
Soit G un groupe fini[10].

ItemZReOWoHi

(1) Deux représentations sont équivalentes si et seulement si elles ont même caractères.

ItemZReOWoHii

(2) Si χ est le caractère d'une représentation, alors

(2a) $\langle \chi, \chi \rangle \in \mathbb{N}$

(2b) $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ si et seulement si la représentation est irréductible.

Démonstration. Nous démontrons chaque point séparément.

(1) Le fait que deux représentations équivalentes aient même caractère est le lemme 16.16. Nous montrons l'autre sens. Si (ρ, V) et (ρ', V') sont deux représentations irréductibles de décompositions

$$V = \bigoplus_i k_i W_i \tag{16.79a}$$

$$V' = \bigoplus_i k'_i W_i, \tag{16.79b}$$

alors si $\chi = \chi'$, nous avons $k_i = k'_i$ et les représentations sont identiques.

(2) Soit (ρ, V) une représentation ayant χ comme caractère. En posant $k_i = \langle \chi, \varphi_i \rangle$ nous avons la décomposition en représentations irréductibles

$$V = \bigoplus_i k_i W_i, \tag{16.80}$$

et aussi

$$\langle \chi, \chi \rangle = \langle \sum_i k_i \varphi_i, \sum_j k_j \varphi_j \rangle = \sum_i k_i^2 \in \mathbb{N}. \tag{16.81}$$

[10] Nous sommes depuis longtemps dans l'étude des représentations des groupes finis.

Ce nombre est de plus égal à 1 si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls sauf un qui vaudrait 1. Ce cas donne une représentation irréductible.

□

PropYLnxIjk

Proposition 16.25.
Si (λ, R) est la représentation régulière gauche de décomposition en représentations irréductibles

$$R = \bigoplus_i k_i W_i, \tag{16.82}$$

alors

ITEMooLXIJooDxkGJh

(1) $k_i = \dim W_i$,

ItemEXAjTIh

(2) $\sum_i (\dim W_i)^2 = |G|$,

(3) *pour tout* $g \in G$, $\sum_i (\dim W_i)\varphi_i(g) = 0$[11].

(4) *Si* $\{(n_i, \varphi_i)\}$ *est la liste des couples dimension,caractère des représentations irréductibles non équivalentes, alors pour tout* $s \in G \setminus \{e\}$ *nous avons* $\sum_{i=1}^{p} n_i \varphi_i(s) = 0$ *où la somme porte sur les représentations irréductibles non équivalentes.*

Démonstration. Nous notons r le caractère de la représentation régulière gauche. Nous avons

$$k_i = \langle r, \varphi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r(s)\overline{\varphi_i(s)} = \overline{\varphi_i(e)}. \tag{16.83}$$

Mais $\varphi_i(e) = \dim(W_i) \in \mathbb{N}$, donc nous avons bien $k_i = \dim(W_i)$. Le caractère de la représentation régulière peut alors s'exprimer de deux façons :

$$|G|\delta_e = \sum_i (\dim W_i)\varphi_i. \tag{16.84}$$

En évaluant cette égalité en e nous trouvons directement

$$|G| = \sum_i (\dim W_i)^2, \tag{16.85}$$

et en l'évaluant en $s \neq e$, nous trouvons

$$0 = \sum_i (\dim W_i)\varphi_i(s). \tag{16.86}$$

□

fqsdf

Le théorème suivant est valable pour les groupes finis (comme toute cette section).

Thogocemg

Théorème 16.26 ([558]).
Les caractères irréductibles $\chi_1, \dots, \chi_h$ forment une base orthonormée des fonctions centrales sur G.

Démonstration. Nous savons déjà qu'ils forment un système orthonormé. Considérons le sous-espace $H = \text{Span}\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,h}$ de l'espace des fonctions centrales sur G. En vertu de la proposition 4.144, il nous suffit de prouver que $H^\perp = \{0\}$. Soit donc f, une fonction centrale appartenant à $H^\perp$. Pour tout i, nous avons $\langle f, \varphi_i \rangle = 0$ et donc aussi $\langle \bar{f}, \bar{\varphi}_i \rangle = 0$.

Considérant une représentation irréductible (σ, W) de caractère φ, nous savons par la proposition 16.21 que l'opérateur

$$\sigma_{\bar{f}} = \sum_g \bar{f}(g)\varphi(g) \tag{16.87}$$

est une homothétie de rapport $\langle \bar{f}, \bar{\varphi} \rangle / \dim W = 0$. Étant donné que toutes les représentations sont des sommes directes de représentations irréductibles, en réalité l'opérateur $\rho_{\bar{f}}$ est nul pour toute représentation ρ. En particulier pour la représentation régulière,

$$0 = \lambda_{\bar{f}}(\delta_t) = \sum_{g \in G} \bar{f}(g)\lambda(g)(\delta_t) = \sum_g \bar{f}(g)\delta_{ft}. \tag{16.88}$$

[11] Cette propriété est appelée « orthogonalité des colonnes » pour une raison qui apparaîtra au moment de compléter le tableau (16.111).

En écrivant cette égalité avec $t = e$ et puis en appliquant à $k \in G$ nous trouvons

$$0 = \sum_g \bar{f}(g)\delta_g(k) = \bar{f}(k). \tag{16.89}$$

Donc $\bar{f} = 0$ et f est nulle. □

CorbdcVNC

Corolaire 16.27.
Le nombre de représentations irréductibles non équivalentes d'un groupe fini est égal à son nombre de classes de conjugaison.

Démonstration. Le nombre de classes de conjugaison est la dimension de l'espace des fonctions centrales qui elle-même est égale au nombre de caractères irréductibles par le théorème 16.26. Enfin deux caractères irréductibles sont égaux si et seulement si les représentations sous-jacentes sont équivalentes. □

CORooWAGXooByrelO

Corolaire 16.28.
Toutes les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de dimension 1.

Démonstration. Le corolaire 16.27 nous dit qu'il y a autant de représentations unitaires qu'il n'y a de représentations irréductibles (non équivalentes). Mais les classes de conjugaisons sont des singletons (lemme 1.262). Nous avons donc exactement $|G|$ représentations irréductibles lorsque G est abélien.

Mais d'autre part la proposition 16.25(2) donne $\sum_i (\dim W_i)^2 = |G|$ lorsque la somme parcours les représentations irréductibles. Il y a $|G|$ termes à la somme, donc tous les termes doivent être 1. □

16.3 Représentation produit tensoriel

Définition 16.29.
Soient ρ et ϕ, deux représentations d'un groupe G sur des espaces vectoriels V et W. La représentation ***produit tensoriel*** *est la représentation*

$$\begin{aligned} \rho \otimes \phi \colon G &\to \mathrm{GL}(V \otimes W) \\ (\rho \otimes \phi)(g)(v \otimes w) &= \rho(g)v \otimes \phi(g)w. \end{aligned} \tag{16.90}$$

L'espace $V \otimes W$ est le produit tensoriel de V et W, défini en 10.206.

Pour trouver son caractère, nous considérons une base $\{e_i\}$ de V et une base $\{e_\alpha\}$ de W, et la base $\{e_i \otimes e_\alpha\}$ de $V \otimes W$. Donc

$$(\rho \otimes \phi)(g)(e_i \otimes e_\alpha) = \rho(g)e_i \otimes \phi(g)e_\alpha. \tag{16.91}$$

Nous devons savoir quelle est la composante « $e_i \otimes e_\alpha$ » de cette dernière expression, et c'est évidemment

$$\rho(g)_{ii}\rho_{\alpha\alpha}, \tag{16.92}$$

ce qui nous amène à dire que

$$\mathrm{Tr}(\rho \otimes \phi)(g) = \sum_i \sum_\alpha \rho(g)_{ii}\phi(g)_{\alpha\alpha} = \mathrm{Tr}\big(\rho(g)\big)\,\mathrm{Tr}\big(\phi(g)\big), \tag{16.93}$$

c'est-à-dire au final que

$$\chi_{\rho\otimes\phi} = \chi_\rho \chi_\phi. \tag{16.94}$$

EqOTmyfjf

16.4 Exemple sur le groupe symétrique

Soit $G = S_3$, un des premiers groupes finis non abéliens. On en a une représentation de dimension deux en tant que permutation des sommets d'un triangle équilatéral, donnée dans l'exemple 16.6 ; nous notons ρ cette représentation.

Nous y avons aussi la représentation de signature donnée par

$$\begin{aligned} \epsilon \colon S_3 &\to \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \\ \sigma &\mapsto \epsilon(\sigma)\,\mathrm{Id}\,. \end{aligned} \tag{16.95}$$

Et enfin il y a la représentation triviale. Ce sont les trois représentations irréductibles ; pour rappel il y a autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison (corolaire 16.27).

Classe de conjugaison	taille	χ_1	χ_ϵ	χ_ρ
Id	1	1	1	2
(A,B)	3	1	-1	0
(A,B,C)	2	1	1	-1

Nous calculons par exemple le produit scalaire

$$\langle \chi_1, \chi_\epsilon \rangle = \frac{1}{6}\big(1 \cdot \chi_1(\mathrm{Id})\overline{\chi_\epsilon(\mathrm{Id})} + 3 \cdot \chi_1(A,B)\overline{\chi_\epsilon(A,B)} + 2 \cdot \chi_1(A,B,C)\overline{\chi_\epsilon(A,B,C)}\big) \tag{16.96a}$$

$$= 0. \tag{16.96b}$$

D'autre part nous avons aussi

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 1. \tag{16.97}$$

16.5 Table des caractères du groupe symétrique S_4

SecUMIgTmO

Pour la table des caractères de S_4, voir [128]. Et si vous voulez la table des caractères du groupe diédral, vu que ce sont de isométries de $\mathbb{R}^n$, il faudra voir plus bas en la section 18.17.

16.5.1 Calculs à partir de rien ou presque

Nous savons que les classes de conjugaison dans S_4 sont caractérisées par la structure des décompositions en cycles (proposition 1.286). Elles sont données dans l'exemple 1.289.

Nous avons donc 5 classes de conjugaison, et il nous faut donc 5 représentations irréductibles non équivalentes (corolaire 16.27) dont nous allons chercher les caractères.

La première est la représentation triviale de dimension 1 ; nous notons χ_1 son caractère et nous avons la ligne

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1

(16.98)

Ensuite nous avons la signature qui est un morphisme non trivial $\epsilon\colon S_n \to \{-1,1\}$. Nous avons alors la ligne

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1

EqGNRavtl (16.99)

Une troisième représentation pas trop compliquée à trouver est celle

$$\begin{aligned} \rho_p\colon S_4 &\to \mathrm{GL}(4,\mathbb{C}) \\ \rho_p(\sigma)e_i &= e_{\sigma(i)}. \end{aligned} \tag{16.100}$$

Cela n'est pas une représentation irréductible parce que $\mathbb{C}^4$ se décompose en deux sous-espaces stables :

$$D = \mathrm{Span}(1,1,1,1) \tag{16.101a}$$

$$H = \{x \in \mathbb{C}^4 \text{ tel que } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}. \tag{16.101b}$$

La représentation induite sur D est la représentation triviale. Puis sur H, elle induit une autre représentation que nous allons noter ρ_s.

Nous allons à présent déduire le caractère de la représentation ρ_s et prouver qu'elle est irréductible. Il est cependant possible de sauter cette étape en échange d'un certain travail sur les isométries du tétraèdre. Voir la proposition 18.194 et ensuite

Nous avons la décomposition $\rho_p = \rho_1 \oplus \rho_s$ et donc

$$\chi_p = \chi_1 + \chi_s. \tag{16.102}$$

Nous savons déjà χ_1. Le caractère χ_p n'est pas très compliqué parce que $\chi_p(\sigma)$ est une matrice de permutations des vecteurs de base. Donc la matrice $\rho_p(\sigma)$ a un 1 sur la diagonale pour les i tels que $\sigma(i) = i$. Nous avons donc

$$\chi_p(\mathrm{Id}) = 4 \qquad \chi_p(12) = 2 \tag{16.103a}$$

$$\chi_p\big((12)(34)\big) = 0 \qquad \chi_p(123) = 1 \tag{16.103b}$$

$$\chi_p(1234) = 0. \tag{16.103c}$$

Le caractère χ_s peut être calculé par simple soustraction :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_s	3	3	1	0	-1	-1

EqIILZsKfo (16.104)

Avant d'ajouter cette ligne au tableau des représentations irréductibles nous devons savoir si ρ_s en est une. Pour cela, tant que nous avons son caractère nous pouvons utiliser le critère du théorème 16.24 :

$$\langle \chi_s, \chi_s \rangle = \frac{1}{|S_4|} \sum_{\sigma \in S_4} \chi_s(\sigma)^2. \tag{16.105}$$

Nous avons tout de suite $|S_4| = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ et puis

$$24\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 24, \tag{16.106}$$

donc oui, le caractère est irréductible parce que $\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 1$. Et nous pouvons donc ajouter la ligne (16.104) à notre tableau. Par ailleurs, nous notons qu'elle est de dimension 3.

Pour le reste nous savons qu'il y a autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison, de telle sorte qu'il ne manque que deux représentations irréductibles. De plus la proposition 16.25 nous dit que si n_i est la dimension de la i^{e} représentation irréductible, alors

$$|S_4| = \sum_i n_i^2. \tag{16.107}$$

Dans notre situation, si nous nommons n_1 et n_2 les dimensions des deux représentations qui nous manquent, nous avons $24 = n_1^2 + n_2^2 + (1^2 + 1^2 + 3^2)$, c'est-à-dire $n_1^2 + n_2^2 = 13$. Il n'y a pas des tonnes de sommes de deux carrés qui font 13. Il y a $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$, et c'est tout.

Nous recherchons donc encore une représentation de dimension 2 et une de dimension 3. Pour cela nous allons un peu regarder les produits tensoriels qui s'offrent à nous. Pour faire une dimension 3, il faut faire le produit d'une de dimension 1 par une de dimension 3. Là encore le choix est très limité et nous demande d'essayer

$$\rho_W = \rho_s \otimes \rho_\epsilon \tag{16.108}$$

qui agit sur l'espace $V_2 \otimes V_\epsilon$ par

$$\rho_W(g)(v \otimes x) = \rho_s(g)v \otimes \rho_\epsilon(g)x. \tag{16.109}$$

Pour savoir son caractère nous utilisons la petite formule toute simple (16.94) : nous multiplions case par case les tableaux (16.104) et (16.99) :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_W	3	3	-1	0	1	-1

(16.110)

Avant de réellement ajouter cette ligne au tableau, nous devons nous assurer qu'elle est bien irréductible. Nous utilisons le même critère : $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$, donc c'est bon.

Pour trouver le dernier caractère, que nous nommerons χ_u, il ne faut pas beaucoup d'imagination. Il suffit d'utiliser les relations d'orthogonalité du théorème 16.26, en sachant que la dimension est 2 et qu'alors $\chi_u(\text{Id}) = 2$, c'est pas trop compliqué :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	3	-1	0	1	-1
χ_u	2	2	b	c	d	e

EqOKtZYFQ (16.111)

Les relations d'orthogonalité des colonnes de la propriété 16.25 nous permettent de calculer les coefficients manquants. En pratique, il suffit de prendre le produit scalaire de chaque ligne avec la première et d'égaler avec zéro. Nous trouvons $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$, et $e = 2$. Le tableau final est :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	3	-1	0	1	-1
χ_u	2	2	0	-1	0	2

(16.112)

Notons que nous sommes parvenus à remplir la dernière ligne sans rien savoir de la représentation qui va avec. Nous allons cependant donner une interprétation géométrique et fixer cette représentation comme agissant sur le triangle équilatéral en 16.33.

16.5.2 À propos de la représentation ρ_s

Une des représentations trouvées (la représentation ρ_s) peut être vue comme le groupe $\mathrm{Iso}(T)$ des isométries affine du tétraèdre[12] grâce à la proposition 18.194 qui donne un isomorphisme de groupe $S_4 \simeq \mathrm{Iso}(T)$ lorsque T est un tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$.

Nous verrons donc ça plus en détail dans la section 18.10.18.

16.5.3 À propos de la représentation ρ_u

Nous nous penchons à présent sur la représentations ρ_u dont nous ne savons rien à part qu'elle est de dimension 2 et son caractère.

Lemme 16.30.
Nous avons $\rho_u(s) = \mathrm{Id}$ pour tout $s \in V_4$.

Démonstration. Tous les éléments de V_4 sont conjugués (à part l'identité, mais pour elle le résultat est clair), donc il suffit de prouver le résultat pour un élément quelconque.

L'endomorphisme $\rho_u\big((12)(34)\big)$ est un endomorphisme d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$ dont la trace est 2. Imposons donc

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16.113}$$

sous la contrainte $a + d = 2$. La résolution est assez rapide et donne $b = c = 0$, $a = d = 1$.

Vous voulez une démonstration plus technologique ? Oui ? Alors commencez par remarquer que l'opérateur $A = \rho_u\big((12)(34)\big)$ vérifie $A^2 = 1$, donc le polynôme $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A. Il est peut-être minimal ou peut être pas, mais en tout cas le polynôme minimal divise celui-là et donc est soit $X - 1$ soit $X + 1$ soit $X^2 - 1$. Dans les trois cas il est scindé à racines simples, et l'endomorphisme A est diagonalisable par le théorème 8.217(3).

Mais comme $A^2 = 1$, les valeurs propres (ce qui est sur la diagonale) de A ne peuvent être que ± 1. La trace étant 2, les éléments diagonaux ne peuvent être que 1. Et $A = \mathrm{Id}$. □

Le groupe V_4 défini en 5.56 est normal dans S_4, donc le quotient S_4/V_4 est un groupe par le lemme 2.11.

Lemme 16.31.
L'application

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_u \colon S_4/V_4 &\to \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \\ [g] &\mapsto \rho_u(g) \end{aligned} \tag{16.114}$$

est bien définie et donne une représentation irréductible de S_4/V_4.

Démonstration. Montrons que c'est bien défini. Si $s \in V_4$ nous devons prouver que $\rho_u(gs) = \rho_u(g)$. Vu que ρ_u est un homomorphisme (c'est une représentation), et que $\rho_u(s) = \mathrm{Id}$ nous avons directement

$$\rho_u(gs) = \rho_u(g)\rho_u(s) = \rho_u(g). \tag{16.115}$$

Nous devons prouver que la représentation $\tilde{\rho}_u$ est irréductible. Si un sous-espace non trivial $\mathrm{Span}(x)$ était stabilisé par $\tilde{\rho}_u$, il serait également stabilisé par ρ_u. Mais comme ρ_u est irréductible, elle ne stabilise personne. □

Lemme 16.32.
Le groupe S_4/V_4 est un groupe non-abélien, isomorphe à S_3.

Démonstration. Le groupe S_4/V_4 a une représentation irréductible de dimension 2, et n'est donc pas abélien par le corolaire 16.28.

Il contient $|S_4|/|V_4| = 24/4 = 6$ éléments (théorème de Lagrange 2.14). Or $6 = 3 \times 2$, donc le groupe S_4/V_4 est dans le cas non-abélien du théorème 5.25(2). Cette partie parle d'unicité du groupe non-abélien d'ordre 6. Or S_3 est un groupe non-abélien d'ordre 6, donc S_4/V_4 est isomorphe à S_3. □

Attention : il n'est pas correct de dire que S_4/V_4 est un sous-groupe de S_4 juste parce que c'est un quotient de S_4 ; ce n'est en général pas vrai (exemple 2.12).

[12] Définition 12.180.

NORMooQQCYooILyOxc

16.33.
Nous sommes maintenant aptes à identifier la représentation ρ_u. D'abord nous nous rappelons de la représentation $\rho_s : S_4 \to \mathrm{Iso}(T)$ de S_4 sur le tétraèdre. Ensuite si A est un sommet dudit tétraèdre et que $S_3 \subset S_4$ est la partie qui fixe A alors nous avons une représentation

$$\rho_s : S_3 \to \mathrm{Iso}(T) \tag{16.116}$$

qui agit en réalité sur le triangle équilatéral T' opposé au sommet A.

Nous avons finalement la chaine d'homomorphismes de groupes

$$S_4 \xrightarrow{\texttt{proj}} S_4/V_4 \xrightarrow{\simeq} S_3 \xrightarrow{\rho_s} \mathrm{Iso}(T') \tag{16.117}$$

Cela est donc une représentation $S_4 \to \mathrm{Iso}(T')$. Elle est de dimension 2 et est irréductible (elle contient les rotations d'angle $2\pi/3$ qui ne fixent aucune direction). Elle est donc la représentation ρ_u qui est la seule irréductible de dimension 2.

Nous avons donc montré que la représentation ρ_u dont nous ne savions rien est la représentation de S_3 sur un triangle équilatéral obtenue à partir de celle de S_4 sur le tétraèdre, en fixant un point.

Chapitre 17

Encore de l'analyse (et c'est pas fini)

17.1 Densité des polynômes

CorRSczQD

Corolaire 17.1.
Si $X \subset \mathbb{R}$ est compact et de mesure finie[1]*, alors l'ensemble des polynômes est dense dans $\big(C(X,\mathbb{R}), \|.\|_2\big)$.*

Démonstration. Si f est une fonction dans $C(X,\mathbb{R})$ et si $\epsilon \geqslant 0$ est donné alors nous pouvons considérer un polynôme P tel que $\|f-P\|_\infty \leqslant \epsilon$. Dans ce cas nous avons

$$\|f-P\|_2^2 = \int_X |f(x)-P(x)|^2 dx \leqslant \int_X \epsilon^2 dx = \epsilon^2 \mu(X) \tag{17.1}$$

où $\mu(X)$ est la mesure de X (finie par hypothèse). □

17.2 Primitive et intégrale

Nous avons déjà parlé de primitive de fonction continue en la proposition 12.450.

PropHFWNpRb

Proposition 17.2.
Soit I un intervalle borné ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction $h \in C_c^\infty(I)$ admet une primitive dans $C_c^\infty(I)$ si et seulement si $\int_I h = 0$.

Démonstration. Si une primitive H de h est à support compact, alors

$$\int_I h = H(b) - H(a) = 0 - 0 = 0. \tag{17.2}$$

Pas de problèmes dans ce sens.

Supposons maintenant que $\int_I h = 0$. Le fait que h admette une primitive dans $C^\infty(I)$ est évident : toute fonction continue admet une primitive[2]. Soit H une telle primitive et $\tilde{H} = H - H(b)$. Alors $\tilde{H}(b) = 0$ et

$$\tilde{H}(a) = H(a) - H(b) = -\int_I h = 0. \tag{17.3}$$

Nous rappelons que le support d'une fonction est *la fermeture* de l'ensemble des points de non-annulation.

Supposons que le support de h soit inclus dans $[m,M] \subset]a,b[$. En prenant des nombres m' et M' tels que $a < m' < m$ et $M < M' < b$ (nous insistons sur le caractère strict de ces inégalités), la fonction h est nulle sur $[a,m']$ et sur $[M',b]$; la fonction $\tilde{H}$ doit donc y être constante. Mais nous avons déjà vu que $\tilde{H}(a) = \tilde{H}(b) = 0$. Donc l'ensemble des points sur lesquels $\tilde{H}$ n'est pas nul est inclus dans $]m',M'[$ et donc est strictement (des deux côtés) inclus dans I. □

17.2.1 Théorème taubérien de Hardy-Littlewood

Un théorème **taubérien** est un théorème qui compare les modes de convergence d'une série.

Lemme 17.3.
Si f et g sont des fonctions continues, alors $s(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ est également une fonction continue.

[1] Dans $\mathbb{R}$ cette hypothèse est évidemment superflue par rapport à l'hypothèse de compacité ; mais ça suggère des généralisations …

[2] Théorème 12.450.

Démonstration. Soit x_0 et prouvons que s est continue en x_0. Si $f(x_0) \neq g(x_0)$ (supposons $f(x_0) > g(x_0)$ pour fixer les idées), alors nous avons un voisinage de x_0 sur lequel $f > g$ et alors $s = f$ sur ce voisinage et la continuité provient de celle de f.

Si au contraire $f(x_0) = g(x_0) = s(x_0)$ alors si (a_n) est une suite tendant vers x_0, nous prenons N tel que $\big|f(a_n) - f(x_0)\big| \leqslant \epsilon$ pour tout $n > N$ et M tel que $\big|g(a_n) - g(x_0)\big| \leqslant \epsilon$ pour tout $n > M$. Alors pour tout $n > \max\{N, M\}$ nous avons

$$\big|s(a_n) - s(x_0)\big| \leqslant \epsilon, \tag{17.4}$$

d'où la continuité de s en x_0. □

La proposition suivante dit que si une fonction connaît un saut, alors on peut la lisser par une fonction continue.

PropTIeYVw

Proposition 17.4.
Soit f continue sur $[a, x_0[$ et sur $[x_0, b]$ avec $f(x_0^-) < f(x_0)$. En particulier nous supposons que $f(x_0^-)$ existe et est finie. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction continue s telle que sur $[a, b]$ on ait $s \geqslant f$ et

$$\int_a^b (s - f)(x)\, dx \leqslant \epsilon. \tag{17.5}$$

Démonstration. Nous notons A la taille du saut :

$$A = f(x_0) - f(x_0^-). \tag{17.6}$$

Quitte à changer a et b, nous pouvons supposer que

$$f(x) < f(x_0) + \frac{A}{3} \tag{17.7}$$

pour $x \in [a, x_0[$ et

$$f > f(x_0) + \frac{2A}{3} \tag{17.8}$$

pour $x \in [x_0, b]$. C'est le théorème des valeurs intermédiaires qui nous permet de faire ce choix.

Soit $m(x)$ la droite qui joint le point $\big(x_0 - \epsilon, f(x_0 - \epsilon)\big)$ au point $\big(x_0, f(x_0^+)\big)$. Nous posons

$$s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < x_0 - \epsilon \\ \max\{m(x), f(x)\} & \text{si } x_0 - \epsilon \leqslant x \leqslant x_0 \\ f(x) & \text{si } x > x_0. \end{cases} \tag{17.9}$$

En vertu des différents choix effectués, c'est une fonction continue. En effet

$$s(x_0 - \epsilon) = \max\{f(x_0 - \epsilon), f(x_0, \epsilon)\} = f(x_0 - \epsilon) \tag{17.10}$$

et

$$s(x_0) = \max\{m(x_0), f(x_0^+)\} = f(x_0^+) \tag{17.11}$$

parce que $m(x_0) = f(x_0^+)$. En ce qui concerne l'intégrale, si nous posons

$$M = \sup_{x,y \in [a,b]} |f(x) - f(y)|, \tag{17.12}$$

nous avons

$$\int_a^b s - f = \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0} s - f \leqslant \epsilon M. \tag{17.13}$$

□

LemauxrKN

Lemme 17.5.
Pour tout polynôme P, nous avons la formule

$$\lim_{x \to 1^-} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n P(x^n) = \int_0^1 P(x) dx. \tag{17.14}$$

Démonstration. D'abord pour $P = 1$, la formule se réduit à la série géométrique connue (proposition 10.172). Ensuite nous prouvons la formule pour le polynôme $P = X^k$ et la linéarité fera le reste pour les autres polynômes. Nous avons

$$(1-x)\sum_n x^n x^{kn} = (1-x)\sum_n (x^{1+k})^n = \frac{1-x}{1-x^{1+k}} = \frac{1}{1+x+\cdots+x^k}. \tag{17.15}$$

Donc

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_n x^n P(x^n) = \frac{1}{1+k}. \tag{17.16}$$

Par ailleurs, c'est vite vu que

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}. \tag{17.17}$$

□
ThoPdDxgP

Théorème 17.6 (Hardy-Littlewood[559])**.**
Soit (a_n) une suite réelle telle que

(1) $\frac{a_n}{n}$ tend vers une constante,

(2) $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence $\geqslant 1$,

(3) $\lim_{x\to 1^-} F(x) = l$.

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$.

Démonstration. Quitte à prendre la suite $b_0 = a_0 - l$ et $b_n = a_n$, on peut supposer $l = 0$.

Soit Γ l'ensemble des fonctions

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R} \tag{17.18}$$

telles que

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma(x^n)$ converge pour $0 \leqslant x < 1$,

(2) $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geqslant 0} a_n \gamma(x^n) = 0$.

Ce Γ est un espace vectoriel.

(1) **Les polynômes sont dans Γ** Soit $\gamma(t) = t^s$. Pour $0 \leqslant x < 1$ nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{ns} < \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{17.19}$$

Donc la condition de convergence est vérifiée. En ce qui concerne la limite,

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{ns} = \lim_{x\to 1^-} F(x^s) = 0 \tag{17.20}$$

parce que par hypothèse, $\lim_{x\to 1^-} F(x) = 0$.

(2) **Définition de la fonction qui va donner la réponse** Nous considérons la fonction

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{17.21}$$

c'est-à-dire $g = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$. Nous montrons que si $g \in \Gamma$, alors le théorème est terminé. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0 \leqslant x^n < 1/2$ dès que

$$n > -\frac{\ln(2)}{\ln(x)} \tag{17.22}$$

avec une note comme quoi $\ln(x) < 0$, donc la fraction est positive. Nous désignons par N_x la partie entière de ce n adapté à x. L'idée est que la fonction $g(x^n)$ est la fonction indicatrice de $0 \leqslant n \leqslant N_x$, et donc

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n. \tag{17.23}$$

Mais si $x \to 1^-$, alors $N_x \to \infty$, donc

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{N_x} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n g(x^n), \tag{17.24}$$

et cela fait zéro si $g \in \Gamma$.

(3) **Approximation de g par des polynômes** Nous considérons la fonction

$$h(t) = \frac{g(t)-t}{t(1-t)} = \begin{cases} \frac{1}{t-1} & \text{si } t \in [0,1/2[\\ \frac{1}{t} & \text{si } t \in [1/2,1]. \end{cases} \tag{17.25}$$

La seconde égalité est au sens du prolongement par continuité. La fonction h est une fonction non continue qui fait un saut de -2 à 2 en $x = 1/2$. En vertu de la proposition 17.4 (un peu adaptée), nous pouvons considérer deux fonctions continues s_1 et s_2 telles que

$$s_1 \leqslant h \leqslant s_2 \tag{17.26}$$

et

$$\int_0^1 s_2 - s_1 \leqslant \epsilon. \tag{17.27}$$

Notons que l'inégalité $s_1 \leqslant s_2$ doit être stricte sur au moins un petit intervalle autour de $x = 1/2$. Soient P_1 et P_2, deux polynômes tels que $\|P_1 - s_1\|_\infty \leqslant \epsilon$ et $\|P_2 - s_2\|_\infty \leqslant \epsilon$ (ici la norme supremum est prise sur $[0,1]$). C'est le théorème de Stone-Weierstrass (12.446) qui nous permet de le faire.

Nous posons aussi[3]

$$Q_1 = P_1 + \epsilon \tag{17.28a}$$
$$Q_2 = P_2 - \epsilon. \tag{17.28b}$$

Nous avons

$$\int_0^1 Q_1 - Q_2 \leqslant \int_0^1 Q_1 - P_1 + P_1 - P_2 + P_2 - Q_2. \tag{17.29}$$

Pour majorer cela, d'abord $Q_1 - P_1 = P_2 - Q_2 = \epsilon$, ensuite,

$$P_1 - P_2 = P_1 - s_1 + s_1 - s_2 + s_2 - P_2 \tag{17.30}$$

dans lequel nous avons $P_1 - s_1 \leqslant \epsilon$, $s_2 - P_2 \leqslant \epsilon$ et $\int_0^1 s_1 - s_2 \leqslant \epsilon$. Au final, nous posons $q = Q_2 - Q_1$ et nous avons

$$\int_0^1 q \leqslant 5\epsilon. \tag{17.31}$$

Enfin nous posons aussi

$$R_i(x) = x + x(1-x)Q_i. \tag{17.32}$$

Ces polynômes vérifient $R_i(0) = 0$, $R_i(1) = 1$ et

$$R_1 \leqslant g \leqslant R_2 \tag{17.33}$$

parce que

$$Q_1 \leqslant P_1 \leqslant h \leqslant P_2 \leqslant Q_2 \tag{17.34}$$

et

$$t + t(1-t)Q_1 \leqslant \underbrace{t + t(1-t)h(t)}_{g(t)} \leqslant t + t(1-t)Q_2. \tag{17.35}$$

(4) **Preuve que g est dans Γ** D'abord si $0 \leqslant x < 1$, $x^N < \frac{1}{2}$ pour un certain N, et alors $g(x^N) = 0$. Du coup la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N} a_n \tag{17.36}$$

est une somme finie qui converge donc.

[3] À ce niveau, je crois qu'il y a une faute de frappe dans [559].

D'autre part nous prenons M tel que $|a_n| < \frac{M}{n}$ pour tout n. Nous majorons $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n g(x^n)$ en utilisant R_1. Mais vu que R_1 est un polynôme, nous pouvons dire que $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1(x^n)| \leqslant \epsilon$ en prenant $x \in [\lambda, 1[$ et λ assez grand. Nous avons :

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n)\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1(x^n)\right| + \underbrace{\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1(x^n)\right|}_{\leqslant\epsilon} \tag{17.37a}$$

$$\leqslant \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(g - R_1)(x^n) \tag{17.37b}$$

$$\leqslant \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(R_2 - R_1)(x^n) \tag{17.37c}$$

$$\leqslant \epsilon + M\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n}(Q_2 - Q_1)(x^n) \tag{17.37d}$$

SUBEQooAIQWooJADvKs

$$= \epsilon + M\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} q(x^n) \tag{17.37e}$$

$$\leqslant \epsilon + M(1-x)\sum_{n} x^n q(x^n). \tag{17.37f}$$

subeqtZXDyu

Justifications :

- La ligne (17.37d) vient du fait que $R_2 - R_1 = x(1-x)(Q_2 - Q_1)$.
- La ligne (17.37f) provient d'une majoration sauvage de $1/n$ par 1 et de $1 - x^n$ par $1 - x$.

Par le lemme 17.5, nous avons alors

$$\lim_{x\to 1^-} |\sum_n a_n g(x^n)| \leqslant \epsilon + M\int_0^1 q \leqslant 6\epsilon. \tag{17.38}$$

□

17.2.2 Théorème de Müntz

ThoAEYDdHp

Théorème 17.7 (Théorème de Müntz[560, 561, 562])**.**
Soit $C_0\big([0,1]\big)$, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ ou $\|.\|_2$ et une suite (α_n) strictement croissante de nombres positifs. Nous notons ϕ_λ la fonction $x \mapsto x^\lambda$.

Alors

$$\overline{\text{Span}\{1, \phi_{\alpha_n}\}} \tag{17.39}$$

est dense dans $C_0\big([0,1]\big)$ si et seulement si

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = +\infty. \tag{17.40}$$

Nous prouvons le théorème pour la norme $\|.\|_2$.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{R}^+$; nous notons $\Delta_N(m)$ la distance entre ϕ_m et $\text{Span}\{\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}\}$. Cette distance peut être évaluée avec le déterminant de Gram (proposition 8.19)

$$\Delta_N(m)^2 = \frac{G(\phi_m, \phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N})}{G(\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N})}. \tag{17.41}$$

Pour calculer cela, nous avons besoin des produits scalaires[4]

$$\langle \phi_a, \phi_b \rangle = \int_0^1 x^{a+b} dx = \frac{1}{a+b+1}. \tag{17.42}$$

Pour avoir des notations plus compactes, nous notons $\alpha_0 = m$. Donc nous avons à calculer le déterminant

$$G(\phi_m, \phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}) = \det\left(\frac{1}{\alpha_i + \alpha_j + 1}\right) \tag{17.43}$$

[4] C'est ici qu'on se particularise à la norme $\|.\|_2$.

où $i,j=0,\dots,N$. Nous reconnaissons un déterminant de Cauchy (proposition 8.20) en posant, dans $\frac{1}{\alpha_i+\alpha_j+1}$, $a_i=\alpha_i$ et $b_j=\alpha_j+1$. Étant donné que $b_j-b_i=a_j-a_i$, nous avons

$$G(\phi_m,\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})=\frac{\prod_{0\leqslant i<j\leqslant N}(\alpha_j-\alpha_i)^2}{\prod_{i=0}^{N}\prod_{j=0}^{N}(\alpha_i+\alpha_j+1).}\tag{17.44}$$

Nous séparons maintenant les termes où i ou j sont nuls. En ce qui concerne le dénominateur, il faut prendre tous les couples (i,j) avec i et j éventuellement égaux à zéro. Nous décomposons cela en trois paquets. Le premier est $(0,0)$; le second est $(0,i)$ (chaque couple arrive en fait deux fois parce qu'il y a aussi $(i,0)$) ; et le troisième sont les i,j tous deux différents de zéro :

$$(2m+1)\prod_{ij}(\alpha_i+\alpha_j+1)\prod_i(\alpha_i+m+1)^2.\tag{17.45}$$

Notons que dans le produit central, le carré est contenu dans le fait qu'on écrit $\prod_{ij}$ et non $\prod_{i<j}$. Nous avons donc

$$G(\phi_m,\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})=\frac{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2\prod_i(\alpha_i-m)^2}{(2m+1)\prod_{ij}(\alpha_i+\alpha_j+1)\prod_i(\alpha_i+m+1)^2}.\tag{17.46}$$

Le calcul de $G(\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})$ est plus simple[5] :

$$G(\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})=\frac{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2}{\prod_{ij}(\alpha_i+\alpha_j+1)}.\tag{17.47}$$

En divisant l'un par l'autre il ne reste que les facteurs comprenant m et en prenant la racine carrée,

$$\Delta_N(m)=\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\prod_{i=1}^{N}\left|\frac{\alpha_i-m}{\alpha_i+m+1}\right|.\tag{17.48}$$ EqANjuNR

Nous passons maintenant à la preuve proprement dite. Supposons que $V=\text{Span}\{\phi_{\alpha_i},i\in\mathbb{N}\}$ est dense. Si m est un des α_i, il peut évidemment être approché par les ϕ_{α_i}. Mais vue la densité de V, un ϕ_m avec $m\neq\alpha_i$ (pour tout i) alors ϕ_m peut également être arbitrairement approché par les ϕ_{α_i}, c'est-à-dire que

$$\lim_{N\to\infty}\Delta_N(m)=0.\tag{17.49}$$

Nous posons

$$u_n=\ln\left(\frac{\alpha_n-m}{\alpha_n+m+1}\right)\tag{17.50}$$

et nous prouvons que la série $\sum_n u_n$ diverge. En effet nous nous souvenons de la formule $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$, de telle sorte que la N^{e} somme partielle de $\sum_n u_n$ est

$$\ln\left(\frac{\alpha_1-m}{\alpha_1+m+1}\cdot\ldots\cdot\frac{\alpha_N-m}{\alpha_N+m+1}\right)=\ln\left(\sqrt{2m+1}\Delta_N(m)\right),\tag{17.51}$$

qui tend vers $-\infty$ lorsque $N\to\infty$.

Si la suite (α_n) est majorée et plus généralement si nous n'avons pas $\alpha_n\to\infty$, alors évidemment la série $\sum_n\frac{1}{\alpha_n}$ diverge. Nous supposons donc que $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$. Nous avons aussi[6]

$$u_n=\ln\left(\frac{\alpha_n-m}{\alpha_n+m+1}\right)=\ln\left(1-\frac{2m+1}{\alpha_n+m+1}\right)\sim-\frac{2m+1}{\alpha_n}.\tag{17.52}$$

Une justification est donnée à l'équation (15.376). Ce que nous avons surtout est

$$\sum_n u_n\sim-(2m+1)\sum_n\frac{1}{\alpha_n}.\tag{17.53}$$

Étant donné que la série de gauche diverge, celle de droite diverge[7].

Nous prouvons maintenant le sens opposé : nous supposons que la série $\sum_n 1/\alpha_n$ diverge et nous posons

$$V=\text{Span}\{\phi_{\alpha_n}\text{ tel que }n\in\mathbb{N}\}.\tag{17.54}$$

[5] Je crois qu'il y a une faute de frappe dans le dénominateur de [560].

[6] Je crois qu'il y a une faute de signe dans la dernière expression de [561].

[7] Nous utilisons le fait que si $u_n=\sum v_n$ en tant que suites et si $\sum_n u_n$ diverge, alors $\sum_n v_n$ diverge.

Il suffit de prouver que $\phi_m \in \bar{V}$ pour tout m parce qu'un corolaire du théorème de Stone-Weierstrass 17.1 montre que Span$\{\phi_k$ tel que $k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans C pour la norme $\|.\|_2$.

Si $\alpha_n \to \infty$, nous avons :

$$u_n \sim \frac{2m+1}{\alpha_n} \to 0 \tag{17.55}$$

et alors $\Delta_N(m) \to 0$. Dans ce cas nous avons immédiatement $\phi_m \in \bar{V}$.

Si par contre α_n ne tend pas vers l'infini, nous repartons de l'expression (17.48), nous posons $0 < \alpha = \sup_i \alpha_i$ et nous calculons :

$$\sqrt{2m+1}\Delta_N(m) = \prod_{i=1}^{N} \frac{|\alpha_i - m|}{\alpha_i + m + 1} \tag{17.56a}$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i + m}{\alpha_i + m + 1} = \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i + m + 1}\right) \tag{17.56b}$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{\alpha + m + 1}\right) = \left(1 - \frac{1}{\alpha + m + 1}\right)^N. \tag{17.56c}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque $N \to \infty$. □

REMooGPYYooCQJwFa

Remarque 17.8.
Certaines sources[8] citent le théorème de Müntz comme ceci (avec un implicite que $\alpha_i \neq 0$) :

$$\overline{\text{Span}\{1, \phi_{\alpha_i}\}} = C\big([0,1]\big) \Leftrightarrow \sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty. \tag{17.57}$$

EQooPCSZooUDSzwQ

Que penser de la présence explicite du 1 (c'est-à-dire de ϕ_0) ou non dans l'ensemble ?

Première chose : la présence éventuelle de ϕ_0 est la raison pour laquelle nous faisons commencer la somme à $i = 2$ et non $i = 1$. Dans le même ordre d'idée, si Span$\{\phi_{\alpha_i}\}$ est dense, alors en prenant n'importe quelle queue de suite, ça reste dense.

Prouvons donc l'énoncé (17.57). Si Span$\{1, \phi_{\alpha_i}\}$ est dense, alors en posant $\beta_1 = 0$, $\beta_i = \alpha_{i-1}$ notre théorème prouve que $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} = +\infty$, cela est exactement que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$. Dans l'autre sens, si $\sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$, alors nous avons aussi $\sum_{i \geqslant 2} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$ et notre théorème dit que Span$\{\phi_{\alpha_i}\}$ est dense. A fortiori, Span$\{1, \phi_{\alpha_i}\}$ est dense.

Exemple 17.9.
Nous savons depuis le théorème 15.134 que la somme des inverses des nombres premiers diverge. △

17.3 Intégrales convergeant uniformément

17.3.1 Définition et propriété

DEFooSHWAooWtswtp

Définition 17.10.
Soit (Ω, μ) un espace mesuré. Nous disons que l'intégrale

$$\int_\Omega f(x, \omega) d\mu(\omega) \tag{17.58}$$

converge uniformément *en x si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K_ϵ tel que pour tout compact K tel que $K_\epsilon \subset K$ nous avons*

$$\left| \int_{\Omega \setminus K} f(x, \omega) d\mu(\omega) \right| \leqslant \epsilon. \tag{17.59}$$

Le point important est que le choix de K_ϵ ne dépend pas de x.

LemOgQdpJ

Lemme 17.11.
Soit

$$F(x) = \int_\Omega f(x, \omega) d\mu(\omega), \tag{17.60}$$

[8] Dont le rapport du jury 2014

une intégrale uniformément convergente. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous considérons un compact K_k tel que

$$\left| \int_{\Omega \setminus K_k} f(x,\omega) d\mu(\omega) \right| \leqslant \frac{1}{k}. \tag{17.61}$$

Alors la suite de fonctions F_k définie par

$$F_k(x) = \int_{K_k} f(x,\omega) d\mu(\omega) \tag{17.62}$$

converge uniformément vers F.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \big|F_k(x) - F(x)\big| &= \left| \int_{K_k} f(x,\omega) d\mu(\omega) - \int_{\Omega} f(x,\omega) d\mu(\omega) \right| && (17.63a)\\ &= | \int_{\Omega \setminus K_k} f(x,\omega) d\mu(\omega)| && (17.63b)\\ &\leqslant \frac{1}{k}. && (17.63c) \end{aligned}$$

□

17.3.2 Critères de convergence uniforme

Afin de tester l'uniforme convergence d'une intégrale, nous avons le **critère de Weierstrass** :

ThoCritWeiIntUnifCv

Théorème 17.12.
Soit $f(x,t)\colon [\alpha,\beta] \times [a,\infty[\to \mathbb{R}$, une fonction dont la restriction à toute demi-droite $x = c$ est mesurable. Si $|f(x,t)| < \varphi(t)$ et $\int_a^\infty \varphi(t)dt$ existe, alors l'intégrale

$$\int_0^\infty f(x,t)dt \tag{17.64}$$

est uniformément convergente.

Le théorème suivant est le **critère d'Abel** :

ThoAbelIntUnif

Théorème 17.13.
Supposons que $f(x,t) = \varphi(x,t)\psi(x,t)$ où φ et ψ sont bornées et intégrables en t au sens de Riemann sur tout compact $[a,b]$, $b \geqslant a$. Supposons que :

(1) $\left|\int_a^T \varphi(x,t)dt\right| \leqslant M$ *où M est indépendant de T et de x,*

(2) $\psi(x,t) \geqslant 0$,

(3) pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, $\psi(x,t)$ est une fonction décroissante de t,

(4) les fonctions $x \mapsto \psi(x,t)$ convergent uniformément vers 0 lorsque $t \to \infty$.

Alors l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x,t)dt \tag{17.65}$$

est uniformément convergente.

Remarque 17.14.
Étant donné que la fonction sinus est bornée, il est tentant de l'utiliser comme φ dans le critère d'Abel (théorème 17.13). Hélas,

$$\int_0^T \sin(xt)dt = -\frac{1}{x}\big(\cos(xT) - \cos(x)\big), \tag{17.66}$$

qui n'est pas bornée en x. Poser $\varphi(x,t) = \sin(xt)$ *ne fonctionne pas* pour assurer la convergence uniforme sur un intervalle qui contient des x arbitrairement proches de 0. Le critère d'Abel avec $\varphi(x,t) = \sin(xt)$ ne permet que de conclure à l'uniforme convergence *sur tout compact* ne contenant pas 0. C'est toutefois souvent suffisant pour étudier la continuité ou la dérivabilité en se servant coup du compact, voir 17.18.

17.4 Fonctions définies par une intégrale

SecCHwnBDj

Soit (Ω, μ) un espace mesuré. Nous nous demandons dans quel cas l'intégrale

$$F(x) = \int_\Omega f(x, \omega) d\omega \tag{17.67}$$

définit une fonction F continue, dérivable ou autre.

Dans la suite nous allons considérer des fonctions f à valeurs réelles. Quitte à passer aux composantes, nous pouvons considérer des fonctions à valeurs vectorielles. Par contre le fait que x soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^n$ n'est pas spécialement une chose facile à traiter.

17.4.1 Continuité sous l'intégrale

Nous allons présenter deux théorèmes donnant la continuité de F.

(1) Si f est majorée par une fonction ne dépendant pas de x, nous avons le théorème 17.15,

(2) si l'intégrale est uniformément convergente, nous avons le théorème 17.16.

ThoKnuSNd

Théorème 17.15.
Soit (Ω, μ) est un espace mesuré, soit $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ où U est ouvert dans $\mathbb{R}^m$. Nous supposons que

(1) Pour chaque $x \in \mathbb{R}^m$, la fonction $\omega \mapsto f(x, \omega)$ est dans $L^1(\Omega, \mu)$.

(2) Pour chaque $\omega \in \Omega$, la fonction $x \mapsto f(x, \omega)$ est continue en x_0.

ItemNAuYNG

(3) Il existe une fonction $G \in L^1(\Omega)$ telle que

$$|f(x, \omega)| \leqslant G(\omega) \tag{17.68}$$

pour tout $x \in U$.

Alors la fonction

$$\begin{aligned} F : U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_\Omega f(x, \omega) d\mu(\omega) \end{aligned} \tag{17.69}$$

est continue en x_0.

Démonstration. Soit (x_n) une suite convergente vers x_0. Nous considérons la suite de fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(\omega) = f(x_n, \omega). \tag{17.70}$$

sur qui nous pouvons utiliser le théorème de la convergence dominée (théorème 14.207) pour obtenir

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x_n, \omega) d\mu(\omega) \tag{17.71a}$$

$$= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f(x_n, \omega) d\mu(\omega) \tag{17.71b}$$

$$= \int_\Omega f(x_0, \omega) d\mu(\omega) \tag{17.71c}$$

$$= F(x_0). \tag{17.71d}$$

Nous avons utilisé la continuité de $f(., \omega)$. □

Si nous avons un peu de compatibilité entre la topologie et la mesure, alors nous pouvons utiliser l'uniforme convergence d'une intégrale pour obtenir la continuité d'une fonction définie par une intégrale.

ThotexmgE

Théorème 17.16.
Soit (Ω, μ) un espace topologique mesuré tel que tout compact est de mesure finie. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

(1) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x, .)$ est $L^1(\Omega, \mu)$.

(2) Pour chaque $\omega \in \Omega$, la fonction $f(.,\omega)$ est continue en x_0.

(3) L'intégrale

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega) \tag{17.72}$$

est uniformément convergente[9].

Alors la fonction F est continue en x_0.

Démonstration. Nous reprenons les notations du lemme 17.11. Les fonctions

$$F_k(x) = \int_{K_k} f(x,\omega)d\mu(\omega) \tag{17.73}$$

existent parce que les fonctions $f(x,.)$ sont dans $L^1(\Omega)$. Montrons que les fonctions F_k sont continues. Soit une suite $x_k \to x_0$ nous avons

$$\lim_{n\to\infty} F_k(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{K_k} f(x_n,\omega)d\mu(\omega). \tag{17.74}$$

Nous pouvons inverser la limite et l'intégrale en utilisant le théorème de la convergence dominée. Pour cela, la fonction $f(x_n,\omega)$ étant continue sur le compact K_k, elle y est majorée par une constante. Le fait que les compacts soient de mesure finie (hypothèse) implique que les constantes soient intégrables sur K_k. Le théorème de la convergence dominée implique alors que

$$\lim_{n\to\infty} F_k(x_n) = \int_{K_k} \lim_{n\to\infty} f(x_n,\omega)d\mu(\omega) = \int_{K_k} f(x_0,\omega)d\mu(\omega) = F_k(x_0). \tag{17.75}$$

Nous avons utilisé le fait que $f(.,\omega)$ était continue en x_0.

Le lemme 17.11 nous indique alors que la convergence $F_k \to F$ est uniforme. Les fonctions F_k étant continues, la fonction F est continue. □

Pour finir, citons ce résultat concernant les fonctions réelles.

ThoInDerrtCvUniffFContinue

Théorème 17.17.
Nous considérons $F(x) = \int_a^\infty f(x,t)dt$. Si f est continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,\alpha[$ et l'intégrale converge uniformément, alors $F(x)$ est continue.

17.4.2 Le coup du compact

NORMooZWECooHvRgBw

17.18.
Nous avons vu des fonctions définies par toute une série de processus de limite (suites, séries, intégrales). Une des questions centrales est de savoir si la fonction limite est continue, dérivable, intégrable, etc. étant donné que les fonctions sont continues.

Pour cela, nous inventons le concept de *convergence uniforme*. Si la limite (série, intégrale) est uniforme, alors la fonction limite sera continue. Il arrive qu'une limite ne soit pas uniforme sur un intervalle ouvert $]0,1]$, et que nous voulions quand même prouver la continuité sur cet intervalle. C'est à cela que sert la notion de convergence uniforme *sur tout compact*. En effet, la notion de continuité est une notion locale : savoir ce qu'il se passe dans un petit voisinage autour de x est suffisant pour savoir la continuité en x (idem pour sa dérivée).

Si nous avons uniforme convergence sur tout compact de $]0,1]$, mais pas uniforme convergence sur cet intervalle, la limite sera quand même continue sur $]0,1]$. En effet, si $x \in]0,1]$, il existe un ouvert autour de x contenu dans un compact contenu dans $]0,1]$. L'uniforme convergence sur ce compact suffit à prouver la continuité en x.

Déduire la continuité sur un ouvert à partir de l'uniforme convergence sur tout compact de l'ouvert est appelé faire le **coup du compact**.

[9] Définition 17.10.

17.4.3 Dérivabilité sous l'intégrale

Nous traitons à présent de la dérivabilité de la fonction F définie comme intégrale de f. Dans le théorème 17.19 nous traitons de fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour les fonctions définies sur $\mathbb{C}$, voir le théorème 26.73.

ThoMWpRKYp

Théorème 17.19 (Dérivation sous le signe intégral, formule de Leibniz, thème 62[522, 563]).
Soit (Ω, μ) un espace mesuré, un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, et une fonction $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$. Nous supposons qu'il existe A mesurable de mesure nulle dans Ω tels que

ITEMooAFVMooAeCEco

(1) Pour tout $x \in I$, la fonction $\omega \mapsto f(x, \omega)$ soit dans $L^1(\Omega)$.

ITEMooXIZXooGPYFyT

(2) L'application $x \mapsto f(x, \omega)$ est dérivable[10] pour tout $x \in I$ et pour tout $\omega \in \Omega \setminus A$.

ITEMooDTTIooWkldfB

(3) Il existe une fonction $G : \Omega \to \mathbb{R}^+$ intégrable sur Ω telle que

EQooUHQYooHtwfML

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega) \right| \leqslant G(\omega) \tag{17.76}$$

pour tout $x \in I$ et pour tout $\omega \in \Omega \setminus A$.

Alors la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_\Omega f(x, \omega) d\mu(\omega) \end{aligned} \tag{17.77}$$

est dérivable sur I et pour tout $a \in I$ nous avons

$$F'(a) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(a, \omega) d\mu(\omega), \tag{17.78}$$

Démonstration. Soit une suite (x_n) dans I telle que $x_n \neq a$ et $x_n \to a$. Si la limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(a) - F(x_n)}{a - x_n} \tag{17.79}$$

existe et ne dépend pas de la suite choisie, alors la fonction F est dérivable en a et sa dérivée vaut cette limite. Autrement dit, nous nous mettons en devoir d'étudier la limite

EqLIralx

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \frac{f(a, \omega) - f(x_n, \omega)}{a - x_n} d\omega. \tag{17.80}$$

montrer qu'elle existe, ne dépend pas de la suite choisie et vaut $\int_\Omega \partial_x f(a, \omega) d\omega$. On y va.

(1) **La bonne suite de fonctions** D'abord nous posons

EqAFOUbQB

$$g_n(\omega) = \frac{f(x_n, \omega) - f(a, \omega)}{x_n - a}. \tag{17.81}$$

Nous montrons à présent que cette suite vérifie les hypothèses du théorème de la convergence dominée 14.207.

- Chacune des fonctions g_n est dans $L^1(\Omega)$ parce que, a étant fixé, l'élément x_n est dans $I \setminus \{a\}$; le dénominateur n'a donc aucun rôle. L'hypothèse (1) montre que $\omega \mapsto f(x_n, \omega)$ et $\omega \mapsto f(a, \omega)$ sont dans L^1. La somme est donc dans L^1 (proposition 14.193).
- Par l'hypothèse (2), pour chaque ω nous avons une fonction dérivable. Nous pouvons donc passer à la limite :
$$\lim_{n \to \infty} g_n(\omega) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, \omega). \tag{17.82}$$
- En ce qui concerne la majoration de g_n, nous utilisons le théorème des accroissements finis 12.216(2). Pour chaque ω, ce théorème peut être utilisé sur la fonction $x \mapsto f(x, \omega)$ qui est dérivable. Nous avons :
$$\left| \frac{f(x_n, \omega) - f(a, \omega)}{x_n - a} \right| \leqslant \sup_{x \in [a, x_n]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega) \right| \leqslant G(\omega). \tag{17.83}$$
Nous avons utilisé l'hypothèse (3).

[10] La dérivabilité pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'a rien de mystérieux : c'est la dérivée composante par composante. Rien à voir avec la dérivée complexe.

Les hypothèses de la convergence dominée sont satisfaites.

(2) **Convergence dominée** Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 14.207) nous permet alors de calculer la limite (17.80) :

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n(\omega)d\omega=\int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n(\omega)d\omega=\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(a,\omega)d\omega. \tag{17.84}$$

Notons que l'existence de la dernière intégrale fait partie du théorème de la convergence dominée.

Nous avons donc prouvé que la limite de gauche existait et ne dépendait pas de la suite choisie. Donc F est dérivable en a et la dérivée vaut cette limite :

$$F'(a)=\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(a,\omega)d\mu(\omega). \tag{17.85}$$

□

En ce qui concerne les fonctions dans $\mathbb{R}^n$, il y a les propositions 17.24 et 17.25 qui parlent de différentiabilité sous l'intégrale.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 17.20
Attention : l'énoncé et la démonstration de la proposition 17.21 sont de moi. Écrivez-moi pour

- *me dire si ça vous semble correct (ou pas),*
- *me donner un lien vers une source qui énonce et démontre ce résultat.*

PROPooJKXJooLxgEGd

Proposition 17.21 ([1])**.**
Soient un espace mesuré (Ω,μ) ainsi qu'une fonction $f\colon\mathbb{R}^n\times\Omega\to\mathbb{C}$. Si $\omega\in\Omega$ est fixé, nous notons

$$\begin{aligned} f_\omega\colon\mathbb{R}^n&\to\mathbb{C}\\ x&\mapsto f(x,\omega)\end{aligned} \tag{17.86}$$

et si $x\in\mathbb{R}^n$ est fixé, nous notons

$$\begin{aligned} f_x\colon\Omega&\to\mathbb{C}\\ \omega&\mapsto f(x,\omega).\end{aligned} \tag{17.87}$$

Soient $\delta>0$, A de mesure nulle dans Ω et une liste d'indices[11] α tels que

(1) pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, la fonction f_x est dans $L^1(\Omega)$,

(2) la dérivée partielle multiple $\partial^\alpha f_\omega(x)$ existe pour tout $x\in B(a,\delta)$ et pour tout $\omega\in A^c$.

(3) pour toute queue β de la liste d'indice α, il existe une fonction $G_\beta\in L^1(\Omega)$ telle que

$$|(\partial^\beta f_\omega)(x)|\leqslant G_\beta(\omega) \tag{17.88}$$

pour tout $x\in B(a,\delta)$ et $\omega\in A^c$.

Enfin nous posons

$$F(x)=\int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega). \tag{17.89}$$

Alors pour toute queue de suite β de α, nous avons

(1) $(\partial^\beta F)$ existe en a,

(2) nous avons la formule

$$(\partial^\beta F)(x)=\int_\Omega(\partial^\beta f_\omega)(a)d\mu(\omega). \tag{17.90}$$

EQooTDDWooAcLRwX

Démonstration. Nous allons opérer une récurrence sur α. Plus précisément, si $|\alpha|=p$, nous allons ajouter une dérivation à la fois, et dans l'ordre inverse de α. Donc nous commençons par ∂_{α_p}, puis par $(\partial_{p-1},\partial_p)$, etc.

[11] Voir -1.2.

Nous commençons par prouver la formule (17.90) dans le cas de $\beta = (\alpha_p)$. Et pour alléger les notations nous notons $\alpha_p = i$. Nous posons

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} \times \Omega &\to \mathbb{C} \\ (t, \omega) &\mapsto f(a + te_i, \omega).\end{aligned} \tag{17.91}$$

Posons $H(t) = F(a + te_i)$, c'est-à-dire

$$H(t) = \int_\Omega f(a + te_i, \omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega \varphi(t, \omega) d\mu(\omega). \tag{17.92}$$

En utilisant le théorème 17.19 sur la fonction φ nous trouvons

$$H'(0) = \int_\Omega \varphi'(0, \omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, \omega) d\mu(\omega), \tag{17.93}$$

ce qui est la formule demandée dans le cas $\alpha = (i)$.

Pour la récurrence, nous supposons que la formule est démontrée pour $\beta = (\alpha_{p-k}, \dots, \alpha_p)$, et nous montrons qu'elle fonctionne encore pour $\sigma = (i, \beta)$.

Il s'agit simplement de remarquer que la fonction

$$g(x, \omega) = (\partial^\beta f_\omega)(x) \tag{17.94}$$

vérifie encore les conditions du théorème 17.19[12]. □

17.4.4 Dérivation et intégrale

PROBooGVWHooOTNJFe

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 17.22
Si je regarde bien, le théorème 17.23 n'est utilisé nulle part. Je vais donc le supprimer un jour. Si vous l'aimez, vous devriez m'en envoyer une démonstration.

ThoDerSousIntegrale

Théorème 17.23.
Soient A un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un espace mesuré. Soient une fonction $f\colon A \times \Omega \to \mathbb{R}$ et

$$F(x) = \int_\Omega f(x, \omega) d\omega. \tag{17.95}$$

Nous supposons les points suivants.

1. *La fonction f est mesurable.*
2. *Pour chaque $x \in A$, la fonction $\omega \mapsto f(x, \omega)$ est intégrable sur Ω.*
3. *Pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $f(x, \omega)$ est une fonction absolument continue[13] de x.*
4. *La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est localement intégrable, c'est-à-dire que pour tout $[a, b] \subset A$,*

$$\int_a^b \int_\Omega \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega) \right| d\omega \, dx < \infty. \tag{17.96}$$

Alors la fonction F est absolument continue et pour presque tout $x \in A$, la dérivée est donné par

$$\frac{d}{dx} \int_\Omega f(x, \omega) d\omega = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega) d\omega. \tag{17.97}$$

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

17.4.5 Différentiabilité sous l'intégrale

Le théorème suivant est restrictif sur l'ensemble d'intégration (qui doit être compact), mais accepte des fonctions de plusieurs variables, ce qui est un premier pas vers la différentiabilité.

[12] Je n'ai pas fait cette vérification. Écrivez-moi si vous l'avez faite.
[13] Définition 14.314 et proposition 14.317.

PropDerrSSIntegraleDSD

Proposition 17.24 (Dérivation sous l'intégrale)**.**
Supposons $A \subset \mathbb{R}^m$ ouvert et $B \subset \mathbb{R}^n$ compact. Nous considérons une fonction $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$. Si pour un $i \in \{i, \dots, n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe dans $A \times B$ et est continue, alors la fonction

$$F(x) = \int_B f(x,t)dt \tag{17.98}$$

admet une dérivée partielle dans la direction x_i sur A. Cette dérivée partielle y est continue et

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,t)dt, \tag{17.99}$$

pour tout a dans l'ouvert A.

Démonstration. Nous procédons en plusieurs étapes.

(1) **F est dérivable** Nous voulons prouver que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a,t)$ existe. Pour cela nous posons

$$g_l(t) = \frac{f(a_1, \dots, a_i + \epsilon_l, \dots, a_n, t) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n, t)}{\epsilon_l} \tag{17.100}$$

où ϵ_l est une suite de nombres tendant vers zéro. La fonction f est dérivable dans la direction x_i si et seulement si $\lim_{l\to\infty} g_l(t)$ existe et ne dépend pas du choix de la suite. À ce moment, la valeur de la dérivée partielle sera cette limite. Dans notre cas, nous savons que f admet une dérivée partielle dans la direction x_i et donc nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a,t) = \lim_{l\to\infty} g_l(t). \tag{17.101}$$

De la même façon pour F nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{l\to\infty} \int_B g_l(t)dt. \tag{17.102}$$

Sous-entendu : si la limite de droite ne dépend pas de la suite choisie, alors $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ existe et vaut cette limite.

Considérant la continuité de f, le seul point à vérifier pour le théorème de la convergence dominée de Lebesgue est l'existence d'une fonction intégrable de t majorant g_l. Pour cela le théorème de accroissements finis (théorème 12.216) appliqué à la fonction $\epsilon \mapsto f(a_n, \dots, a_i + \epsilon, \dots, a_n)$ nous dit que

$$f(a_1, \dots, a_i + \epsilon_l, \dots, a_n, t) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n, t) = \epsilon_l \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, \theta, \dots, a_n, t) \tag{17.103}$$

pour un certain $\theta \in B(a_i, \epsilon_l)$. Notons que ce θ dépend de t mais pas de l. Vu que $\partial_i f$ est continue par rapport à ses deux variables, si K est un voisinage compact autour de a, il existe $M > 0$ tel que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) \right| < M \tag{17.104}$$ EqMXqviPC

pour tout $x \in K$ et tout $t \in B$. La valeur de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, \theta, \dots, a_n, t)$ est donc bien majorée par rapport à θ et par rapport à t en même temps par une constante qui n'a pas de mal à être intégrée sur le compact B.

Le théorème de la convergence dominée (théorème 14.207) s'applique donc bien et nous avons

$$\lim_{l\to\infty} \int_B g_l(t)dt = \int_B \lim_{l\to\infty} g_l(t) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,t)dt. \tag{17.105}$$

Le membre de droite ne dépendant pas de la suite ϵ_l choisie, le membre de gauche est bien la dérivée de F par rapport à x_i et nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,t)dt. \tag{17.106}$$

Cela prouve la première partie de la proposition.

(2) **La dérivée est continue** Soit K un voisinage compact autour de a et U' un ouvert tel que $a \in U' \subset K$. Nous avons encore la majoration (17.104) sur U' et donc le théorème de continuité sous l'intégrale 17.15 nous indique que la fonction

$$\begin{aligned} U' &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt \end{aligned} \tag{17.107}$$

est continue en a.

□

Une conséquence de la proposition 17.24 est que si elle fonctionne pour tous les i, alors F est différentiable et même de classe C^1, et la différentielle de F s'obtient comme intégrale de la différentielle de f.

PropAOZkDsh

Proposition 17.25.
Supposons $A \subset \mathbb{R}^m$ ouvert et $B \subset \mathbb{R}^n$ compact. Si pour tout $i \in \{i, \dots, n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe dans $A \times B$ et est continue, alors F est de classe C^1 et

$$(dF)_a = \int_B (df_t)_a dt \tag{17.108}$$

où $f_t(x) = f(x,t)$.

Démonstration. En vertu de la proposition 17.24, toutes les dérivées partielles de F sont continues. Cela implique que F est de classe C^1 par le théorème 12.320 et que la différentielle s'écrive en termes des dérivées partielles avec la formule usuelle. Nous avons alors

$$(dF)_a(u) = \sum_k \frac{\partial F}{\partial x_k}(a)u_k \tag{17.109a}$$

$$= \int_B \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a,t)dt \tag{17.109b}$$

$$= \int_B \sum_k \frac{\partial f_t}{\partial x_k}(a)u_k dt \tag{17.109c}$$

$$= \int_B (df_t)_a(u)dt. \tag{17.109d}$$

Ce qui est la formule annoncée. □

Un autre théorème tourne autour du pot, et me semble inutile.

ThoOLAQyRL

Théorème 17.26.
Soit (Ω, μ) un espace mesuré, une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Nous considérons la fonction

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega). \tag{17.110}$$

Pour chaque $k = 1, \dots, n$ nous supposons avoir

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(a) = F'_{|_k}(a) = \int_\Omega \frac{\partial f_{|_k}}{\partial t}(a_k,\omega)d\mu(\omega) \tag{17.111}$$

où $F_{|_k}(t) = F(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$ et $f_{|_k}$ est définie de façon similaire.
Nous supposons de plus que les fonctions $\partial_{x_k} F$ sont continues.
Alors F est de classe C^1 et sa différentielle est donnée par

$$dF_a = \int_\Omega (df_\omega)_a d\omega \tag{17.112}$$

où f_ω est définie par $f_\omega(x) = f(x,\omega)$.

Démonstration. Étant donné que les dérivées partielles de F en a existent et sont continues, le théorème 12.320 dit que F est différentiable et que

$$dF_a(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k}(a)u_k. \tag{17.113}$$

La linéarité de l'intégrale et les hypothèses nous donnent alors

$$\begin{aligned} dF_a(u) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k}(a)u_k && (17.114a)\\ &= \int_\Omega \sum_k \frac{\partial f_{|_k}}{\partial t}(a_k;\omega)u_k d\mu(\omega) && (17.114b)\\ &= \int_\Omega \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a;\omega)u_k d\mu(\omega) && (17.114c)\\ &= \int_\Omega (df_\omega)_a(u)d\mu(\omega), && (17.114d) \end{aligned}$$

et donc $dF_a = \int_\Omega (df_\omega)_a d\mu(\omega)$. □

Notons qu'en passant aux composantes, ce théorème fonctionne tout aussi bien pour des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie plutôt que dans $\mathbb{R}$.

17.5 Théorème d'Hadamard

LemWNBooGPlIwT

Lemme 17.27 (Hadamard[564]).
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^p avec $p \geqslant 1$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ il existe des fonctions $g_1,\dots, g_n$ de classe C^{p-1} telles que

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)g_i(x). \tag{17.115}$$

Démonstration. Puisque f est de classe C^1, le théorème fondamental de l'analyse 14.288 s'applique et

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big[f\big(a + t(x-a)\big)\Big]dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a + t(x-a)\big)(x_i - a_i). \tag{17.116}$$

EqZLTooVKmGln

Plus de détails : la fonction $t \mapsto \frac{d}{dt}\Big[f\big(a+t(x-a)\big)\Big]$ possède comme primitive la fonction $F(t) = f\big(a+t(x-a)\big)$.

Nous posons

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a + t(x-a)\big)dt \tag{17.117}$$

L'intégrale existe parce qu'il s'agit d'une fonction continue sur un compact et donc majorée par une constante. Pour voir que g_i est de classe C^{p-1} nous pouvons calculer $\frac{\partial g_i}{\partial x_k}$ en permutant dérivée et intégrale par la proposition 17.24 :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a + t(x-a)\big)\right)dt = \int_0^1 t\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}\big(a + t(x-a)\big). \tag{17.118}$$

Nous pouvons ainsi permuter $p-1$ dérivées tout en gardant une fonction continue dans l'intégrale. Le théorème 17.15 nous donne alors une fonction continue. Ainsi toutes les fonctions

$$\frac{\partial^{p-1} g_i}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{p-1}}} \tag{17.119}$$

sont continues et g_i est de classe C^{p-1} par le théorème 12.356.

En repartant de (17.116) nous avons alors bien ce qui était annoncé :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x_i - a_i). \tag{17.120}$$

□

CorQBXHooZVKeNG

Corolaire 17.28.
Soit $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tel que $\phi^{(k)}(x_0) = 0$ pour tout $k \leqslant n$. Alors il existe une fonction $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\phi(x) = (x - x_0)^{n+1}\psi(x) \tag{17.121}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En utilisant le lemme de Hadamard 17.27 avec $a = x_0$, $n = 1$ et $f(x_0) = 0$, nous avons une fonction g_1 à support compact telle que

EqTOJGooWZBBRJ

$$\phi(x) = \phi(x_0) + (x - x_0)g_1(x). \tag{17.122}$$

Alors $\phi'(x) = g_1(x) + (x - x_0)g_1'(x)$, ce qui donne immédiatement $g_1(x_0) = 0$ et donc une fonction g_2 telle que $g_1(x) = (x - x_0)g_2(x)$. En injectant dans (17.122) nous avons

$$\phi(x) = (x - x_0)^2 g_2(x). \tag{17.123}$$

Il suffit de continuer ainsi tant que les dérivées de ϕ s'annulent. □

17.6 Deux théorèmes de point fixe

Nous allons voir Picard. Les autres théorème de point fixe que sont Brouwer, Schauder et Markov-Kakutani sont plus bas[14] parce qu'ils utilisent de l'intégration. Voir le thème 65 pour les retrouver.

17.6.1 Points fixes attractifs et répulsifs

DEFooTMZUooMoBDGC

Définition 17.29 ([1]).
*Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $\varphi\colon I \to I$ une application C^1. Soit a un point fixe de φ. Nous disons que a est **attractif** si il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x_0 \in V$ la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a.*

*Le point a est dit **répulsif** si il existe un voisinage[15] V de a tel que pour toute suite de la forme $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, si $u_n \in V$, alors $|x_{n+1} - a| \geqslant |u_n - a|$.*

17.30.
Beaucoup de sources prennent le lemme 17.31 comme définition de point fixe attractif et répulsif. Celle en termes de suites ne demande au moins pas la dérivabilité de f. Elle est donc un tout petit peu plus générale.

LEMooTIRAooQIHLyt

Lemme 17.31 ([565, 566]).
Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$, et une application $\varphi\colon I \to I$ de classe C^1. Soit a un point fixe de φ.

(1) Si $|\varphi'(a)| < 1$ alors a est attractif et la convergence est au moins exponentielle.

(2) Si $|\varphi'(a)| > 1$ alors a est répulsif et la divergence est au moins exponentielle.

Démonstration. Si $|\varphi'(a)| < 1$ alors il existe k tel que $|\varphi'(a)| < k < 1$ et par continuité il existe un voisinage V de a dans lequel $|\varphi'(x)| < k$ pour tout $x \in V$. En utilisant le théorème des accroissements finis[16] nous avons

$$|x_n - a| = \big|\varphi(x_n) - a\big| \leqslant k|x_{n-1} - a| \tag{17.124}$$

et par récurrence

$$|x_n - a| \leqslant k^n |x_0 - a|. \tag{17.125}$$

Pour la seconde partie, nous supposons que $|f'(a)| > 1$. Il existe un voisinage V sur lequel $f' > 1$. La formule des accroissements finis donne une application $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \alpha(h) \tag{17.126}$$

[14] Dans la section 20.5.
[15] Cette partie de la définition est de moi. Je suis loin d'être sûr que c'est une bonne définition. Si vous avez une idée, écrivez-moi. Sinon, tenez-vous en à prendre le lemme 17.31 comme définition.
[16] Proposition 10.293.

et $\alpha(h)/h \to 0$. Nous restreignons V pour que tout $x \in V$ nous ayons $|\alpha(x-a)/|x-a| + |f'(a)| < 1$. Bref. Supposons que $x_n \in V$ avec $x_n \neq a$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) && (17.127a)\\ &= f\big(a + (x_n - a)\big) && (17.127b)\\ &= f(a) + (x_n - a)f'(a) + \alpha(x_n - a). && (17.127c)\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\frac{|x_{n+1} - f(a)|}{|x_n - a|} \leqslant |f'(a)| + \frac{|\alpha(x_n - a)|}{|x_n - a|}. \tag{17.128}$$

Avec toutes les hypothèses que nous avons prises, nous avons

$$\frac{|x_{n+1} - f(a)|}{|x_n - a|} \leqslant 1, \tag{17.129}$$

et donc $|x_{n+1} - f(a)| < |x_n - a|$. □

Remarque 17.32.
Dans le cas $|\varphi'(a)| = 1$, nous ne pouvons rien conclure. Si $\varphi(x) = \sin(x)$ nous avons $\sin(x) < x$ et le point $a = 0$ est attractif. À contrario, si $\varphi(x) = \sinh(x)$ nous avons $|\sinh(x)| > |x|$ et le point $a = 0$ est répulsif.

17.6.2 Picard

DEFooRSLCooAsWisu

Définition 17.33.
*Une application $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ entre deux espaces métriques est une **contraction** si elle est k-**lipschitzienne** pour un certain $0 \leqslant k < 1$, c'est-à-dire si pour tout $x, y \in X$ nous avons*

$$d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leqslant k d_X(x, y). \tag{17.130}$$

ThoEPVkCL

Théorème 17.34 (Picard [567, 568][17].)**.**
Soit X un espace métrique complet et $f\colon X \to X$ une application contractante, de constante de Lipschitz k. Alors f admet un unique point fixe, nommé ξ. Ce dernier est donné par la limite de la suite définie par récurrence

$$\begin{cases} x_0 \in X & (17.131a)\\ x_{n+1} = f(x_n). & (17.131b)\end{cases}$$

De plus nous pouvons majorer l'erreur par

$$\|x_n - x\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|. \tag{17.132}$$

EqKErdim

Soit $r > 0$, $a \in X$ tels que la fonction f laisse la boule $K = \overline{B(a, r)}$ invariante (c'est-à-dire que f se restreint à $f\colon K \to K$). Nous considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = v_0 \in K & (17.133a)\\ u_{n+1} = f(v_n), v_{n+1} \in B(u_n, \epsilon). & (17.133b)\end{cases}$$

Alors le point fixe ξ de f est dans K et la suite (v_n) satisfait l'estimation

$$\|v_n - \xi\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\| + \frac{\epsilon}{1-k}. \tag{17.134}$$

La première inégalité (17.132) donne une estimation de l'erreur calculable en cours de processus ; la seconde donne une estimation de l'erreur calculable avant de commencer.

Démonstration. Nous commençons par l'unicité du point fixe. Si a et b sont des points fixes, alors $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Par conséquent

$$\|f(a) - f(b)\| = \|a - b\|, \tag{17.135}$$

ce qui contredit le fait que f soit une contraction.

En ce qui concerne l'existence, notons que si la suite des x_n converge dans X, alors la limite est un point fixe. En effet en prenant la limite des deux côtés de l'équation $x_{n+1} = f(x_n)$, nous obtenons $\xi = f(\xi)$,

[17] Il me semble qu'à la page 100 de [568], l'hypothèse H1 qui est prouvée ne prouve pas Hn dans le cas $n = 1$. Merci de m'écrire si vous pouvez confirmer ou infirmer. La preuve donnée ici ne contient pas cette « erreur ».

c'est-à-dire que ξ est un point fixe de f. Notons que nous avons utilisé ici la continuité de f, laquelle est une conséquence du fait qu'elle soit lipschitzienne. Nous allons donc porter nos efforts à prouver que la suite est de Cauchy (et donc convergente parce que X est complet). Nous commençons par prouver que $\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant k^n\|x_0-x_1\|$. En effet pour tout n nous avons

$$\|x_{n+1}-x_n\|=\|f(x_n)-f(x_{n-1})\|\leqslant k\|x_n-x_{n-1}\|. \tag{17.136}$$

La relation cherchée s'obtient alors par récurrence. Soient $q>p$. En utilisant une somme télescopique,

$$\|x_q-x_p\|\leqslant\sum_{l=p}^{q-1}\|x_{l+1}-x_l\| \tag{17.137a}$$

$$\leqslant\left(\sum_{l=p}^{q-1}k^l\right)\|x_1-x_0\| \tag{17.137b}$$

$$\leqslant\left(\sum_{l=p}^{\infty}k^l\right)\|x_1-x_0\|. \tag{17.137c}$$

Étant donné que $k<1$, la parenthèse est la queue d'une série qui converge, et donc tend vers zéro lorsque p tend vers l'infini.

En ce qui concerne les inégalités (17.132), nous refaisons une somme télescopique :

$$\|x_{n+p}-x_n\|\leqslant\|x_{n+p}-x_{n+p-1}\|+\cdots+\|x_{n+1}-x_n\| \tag{17.138a}$$

$$\leqslant k^p\|x_n-x_{n-1}\|+k^{p-1}\|x_n-x_{n-1}\|+\cdots+k\|x_n-x_{n-1}\|=k(1+\cdots+k^{p-1})\|x_n-x_{n-1}\| \tag{17.138b}$$

$$\leqslant\frac{k}{1-k}\|x_n-x_{n-1}\|. \tag{17.138c}$$

En prenant la limite $p\to\infty$ nous trouvons

$$\|\xi-x_n\|\leqslant\frac{k}{1-k}\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant\frac{k}{1-k}\|x_1-x_0\|. \tag{17.139}$$ EqlUMVGW

Nous passons maintenant à la seconde partie du théorème en supposant que f se restreigne en une fonction $f\colon K\to K$. D'abord K est encore un espace métrique complet, donc la première partie du théorème s'y applique et f y a un unique point fixe.

Nous allons montrer la relation par récurrence. Tout d'abord pour $n=1$ nous avons

$$\|v_1-\xi\|\leqslant\|v_1-u_1\|+\|u_1-\xi\|\leqslant\epsilon+\frac{k}{1-k}\|u_1-u_0\| \tag{17.140}$$

où nous avons utilisé l'estimation (17.139), qui reste valable en remplaçant x_1 par u_1[18]. Nous pouvons maintenant faire la récurrence :

$$\|v_{n+1}-\xi\|\leqslant\|v_{n+1}-u_{n+1}\|+\|u_{n+1}-\xi\| \tag{17.141a}$$

$$\leqslant\epsilon+k\|v_n-\xi\| \tag{17.141b}$$

$$\leqslant\epsilon+k\left(\frac{k^n}{1-k}\|u_1-u_0\|+\frac{\epsilon}{1-k}\right)=\frac{\epsilon}{1-k}+\frac{k^{n+1}}{1-k}\|u_1-u_0\|. \tag{17.141c}$$

□

Remarque 17.35.
Ce théorème comporte deux parties d'intérêts différents. La première partie est un théorème de point fixe usuel, qui sera utilisé pour prouver l'existence de certaines équations différentielles.

La seconde partie est intéressante d'un point de vue numérique. En effet, ce qu'elle nous enseigne est que si à chaque pas de calcul de la récurrence $x_{n+1}=f(x_n)$ nous commettons une erreur d'ordre de grandeur ϵ, alors le procédé (la suite (v_n)) ne converge plus spécialement vers le point fixe, mais tend vers le point fixe avec une erreur majorée par $\epsilon/(1-k)$.

Remarque 17.36.
Au final l'erreur minimale qu'on peut atteindre est de l'ordre de ϵ. Évidemment si on commet une faute de calcul de l'ordre de ϵ à chaque pas, on ne peut pas espérer mieux.

[18]Elle n'est cependant pas spécialement valable si on remplace x_n par u_n.

remIOHUJm

Remarque 17.37.
Si f elle-même n'est pas contractante, mais si f^p est contractante pour un certain $p \in \mathbb{N}$ alors la conclusion du théorème de Picard reste valide et f a le même unique point fixe que f^p. En effet nommons x le point fixe de f : $f^p(x) = x$. Nous avons alors

$$f^p\big(f(x)\big) = f\big(f^p(x)\big) = f(x), \tag{17.142}$$

ce qui prouve que $f(x)$ est un point fixe de f^p. Par unicité nous avons alors $f(x) = x$, c'est-à-dire que x est également un point fixe de f.

ThoagJPZJ

Théorème 17.38 (Équation de Fredholm)**.**
Soit $K\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, deux fonctions continues. Alors si λ est suffisamment petit, l'équation

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \varphi(x) \tag{17.143}$$

admet une unique solution qui sera de plus continue sur $[a,b]$.

Démonstration. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions continues $[a,b] \to [a,b]$ muni de la norme uniforme. Le lemme 12.384 implique que $\mathcal{F}$ est complet. Nous considérons l'application $\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ donnée par

$$\Phi(f)(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \varphi(x). \tag{17.144}$$

Nous montrons que Φ^p est une application contractante pour un certain p. Pour tout $x \in [a,b]$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty &\leqslant \|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)\| && \text{(17.145a)}\\
&= |\lambda| \Big\| \int_a^b K(x,y)\big(f(y) - g(y)\big) dy \Big\| && \text{(17.145b)}\\
&\leqslant |\lambda| \|K\|_\infty |b-a| \|f-g\|_\infty && \text{(17.145c)}
\end{aligned}$$

Nous choisissons λ assez petit pour avoir $|\lambda|\|K\|_\infty|b-a| < 1$. Dans ce cas, l'application Φ est une contraction. Elle possède donc un unique point fixe par le théorème de Picard 17.34. □

17.7 Théorèmes de point fixes et équations différentielles

17.7.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Nous démontrons ici deux théorèmes de Cauchy-Lipschitz. De nombreuses propriétés annexes seront démontrées dans le chapitre sur les équations différentielles, section 32.8.

Le théorème de Cauchy-Arzella 20.34 sera pour plus tard parce qu'il utilise Schauder 20.33.

ThokUUlgU

Théorème 17.39 (Cauchy-Lipschitz[569, 570])**.**
Nous considérons l'équation différentielle XtiXON

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & \text{(17.146a)}\\ y(t_0) = y_0 & \text{(17.146b)} \end{cases}$$

avec $f\colon U = I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ où I est ouvert dans $\mathbb{R}$ et Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Nous supposons que f est continue sur U et localement lipschitzienne[19] *par rapport à y.*

Alors il existe un intervalle $J \subset I$ sur lequel la solution au problème est unique. De plus toute solution du problème est une restriction de cette solution à une partie de J. La solution sur J (dite « solution maximale ») est de classe C^1.

Démonstration. Nous divisions la preuve en plusieurs étapes (même pas toutes simples).

(1) **Cylindre de sécurité**

Précisons l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ adéquat. Soient V et W les voisinages de t_0 et y_0 sur lesquels f est localement lipschitzienne. Nous considérons les quantités suivantes :

(1a) $M = \sup_{V \times W} f$;

[19] Définition 12.345. Notons que nous ne supposons pas que f soit une contraction.

(1b) $r > 0$ tel que $\overline{B(y_0, r)} \subset V$

(1c) $T > 0$ tel que $\overline{B(t_0, T)} \subset W$ et $T < r/M$.

Nous considérons alors l'ensemble

$$\mathcal{F} = C^0\big(\overline{B(t_0, T)}, \overline{B(y_0, r)}\big) \tag{17.147}$$

que nous munissons de la norme uniforme. Par le lemme 12.384 l'espace $\big(\mathcal{F}, \|.\|_\infty\big)$ est complet.

(2) **Une application $\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$**

Si y est une solution de l'équation différentielle considérée, elle vérifie[20]

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(u, y(u)\big)du. \tag{17.148}$$

Ceci nous incite à considérer l'opérateur $\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ défini par

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(u, y(u)\big)du. \tag{17.149}$$

Pour que l'application Φ soit utile nous devons montrer que pour tout $y \in \mathcal{F}$,

- l'application $\Phi(y)$ est bien définie,
- pour tout $t \in \overline{B(t_0, T)}$ nous avons $\Phi(y)(t) \in \overline{B(y_0, r)}$,
- l'application $\Phi(y)\colon \overline{B(t_0, T)} \to \overline{B(y_0, r)}$ est continue.

Attention : nous ne prétendons pas que Φ elle-même soit continue. C'est parti.

(2a) **$\Phi(y)$ est bien définie**

Il faut montrer que l'intégrale converge. Le calcul de $\Phi(y)(t)$ ne se fait qu'avec $t \in \overline{B(t_0, T)}$. Vu que u prend ses valeurs dans $[t_0, t]$ et que $y \in \mathcal{F}$, le nombre $y(u)$ est toujours dans $\overline{B(y_0, r)}$. Ceci pour dire que dans l'intégrale, la fonction f n'est considérée que sur $[t_0, t] \times \overline{B(y_0, r)} \subset V \times W$. La fonction f est donc uniformément majorable, et l'intégrale ne pose pas de problèmes.

(2b) **$\Phi(y)(t) \in \overline{B(y_0, r)}$**

Prouvons que $\Phi(y)(t) \in \overline{B(y_0, r)}$. Pour cela, notons que

$$|\Phi(y)(t) - y_0| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f\big(u, y(u)\big)|du \leqslant |t - t_0|\|f\|_\infty. \tag{17.150}$$

Étant donné que $t \in \overline{B(t_0, T)}$ nous avons $|t - t_0| \leqslant r/M$ et donc $|\Phi(y)(t) - y_0| \leqslant r$.

(2c) **$\Phi(y)$ est continue**

Nous pourrions invoquer le théorème 17.15, mais nous allons le faire à la main. Soit $s_0 \in B(t_0, T)$ et prouvons que $\Phi(y)$ est continue en s_0. Pour cela nous prenons $s \in B(s_0, \delta)$ et nous calculons :

$$|\Phi(y)(s) - \Phi(y)(s_0)| \leqslant \int_{s_0}^{s} |f\big(u, y(u)\big)|du \leqslant |s_0 - s|\|f\|_\infty. \tag{17.151}$$

C'est le fait que f soit bornée dans le cylindre de sécurité qui fait en sorte que cela tende vers zéro lorsque $s \to s_0$.

L'équation (17.148) signifie que y est un point fixe de Φ. L'espace $\mathcal{F}$ étant complet, le théorème de point fixe de Picard (théorème 17.34) s'applique. Nous allons montrer qu'il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que Φ^p soit contractante. Par conséquent Φ^p aura un unique point fixe qui sera également unique point fixe de Φ par la remarque 17.37.

(3) **Contractante**

Prouvons donc que Φ^p est contractante pour un certain p. Pour cela nous commençons par montrer la formule suivante par récurrence :

$$\big\|\Phi^p(x)(t) - \Phi^p(y)(t)\big\| \leqslant \frac{k^p|t - t_0|^p}{p!}\|x - y\|_\infty \tag{17.152}$$

[20] C'est le théorème fondamental du calcul intégral 14.288.

pour tout $x, y \in \mathcal{F}$, et pour tout $t \in \overline{B(t_0, T)}$. Pour $p = 0$ la formule (17.152) est vérifiée parce que $\|x - y\|_\infty$ est le supremum de $\|x(t) - y(t)\|$ pour $t \in \overline{B(t_0, T)}$. Supposons que la formule soit vraie pour p et calculons pour $p+1$. Pour tout $t \in \overline{B(t_0, T)}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\big\|\Phi^{p+1}(x)(t) - \Phi^{p+1}(y)(t)\big\| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \big\|f\big(u, \Phi^p(x)(u)\big) - f\big(u, \Phi^p(y)(u)\big)\big\| du \right| && \text{(17.153a)}\\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} k\|\Phi^p(x)(u) - \Phi^p(y)(u)\| du \right| && \text{(17.153b)}\\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} k \frac{k^p |t - t_0|}{p!} \|x - y\|_\infty \right| && \text{(17.153c)}\\
&= \frac{k^{p+1}|t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|x - y\|_\infty. && \text{(17.153d)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- (17.153b) parce que f est lipschitzienne.
- (17.153c) par hypothèse de récurrence.

La formule (17.152) est maintenant établie. Nous pouvons maintenant montrer que Φ^p est une contraction pour un certain p. Pour tout $t \in \overline{B(t_0, T)}$ nous avons

$$\|\Phi^p(x)(t) - \Phi^p(y)(t)\| \leqslant \frac{k^p}{p!} |t - t_0|^p \|x - y\|_\infty \leqslant \frac{k^p T^p}{p!} \|x - y\|_\infty \tag{17.154}$$

où nous avons utilisé le fait que $|t - t_0|^p < T^p$. En prenant le supremum sur t des deux côtés il vient

$$\|\Phi^p(x) - \Phi^p(y)\|_\infty \leqslant \frac{k^p T^p}{p!} \|x - y\|_\infty. \tag{17.155}$$

Le membre de droite tend vers zéro lorsque $p \to \infty$ parce que $k^p T^p / p! \to 0$[21]. Nous concluons donc que Φ^p est une contraction pour un certain p.

(4) **Conclusion**

L'unique point fixe de Φ est alors l'unique solution continue de l'équation différentielle (17.146). Par ailleurs l'équation elle-même $y' = f(t, y)$ demande implicitement que y soit dérivable et donc continue. Nous concluons que l'unique point fixe de Φ est l'unique solution de l'équation différentielle donnée. Cette dernière est automatiquement C^1 parce que si y est continue alors $u \mapsto f(u, y(u))$ est continue, c'est-à-dire que y' est continue.

(5) **Unicité**

Nous passons maintenant à la partie « prolongement maximum » du théorème. Soient x_1 et x_2 deux solutions maximales du problème (17.146) sur des intervalles I_1 et I_2 respectivement. Les intervalles I_1 et I_2 contiennent $\overline{B(t_0, T)}$ sur lequel $x_1 = x_2$ par unicité.

Nous allons maintenant montrer que pour tout $t \geqslant t_0$ pour lequel x_1 ou x_2 est défini, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont définis et sont égaux. Le raisonnement sur $t \leqslant t_0$ est similaire.

Supposons que l'ensemble des $t \geqslant t_0$ tels que $x_1 = x_2$ soit ouvert à droite, c'est-à-dire soit de la forme $[t_0, b[$. Dans ce cas, soit x_1, soit x_2 (soit les deux) cesse d'exister en b. En effet si nous avions les fonctions x_i sur $[t_0, b + \epsilon[$ alors l'équation $x_1 = x_2$ définirait un fermé dans $[t_0, b + \epsilon[$. Supposons pour fixer les idées que x_1 cesse d'exister : le domaine de x_1 (parmi les $t \geqslant 0$) est $[t_0, b[$ et sur ce domaine nous avons $x_1 = x_2$. Dans ce cas x_1 pourrait être prolongé en x_2 au-delà de b. Si x_1 et x_2 s'arrêtent d'exister en même temps en b, alors nous avons bien $x_1 = x_2$.

Nous devons donc traiter le cas où $x_1 = x_2$ sur $[t_0, b]$ alors que x_1 et x_2 existent sur $[t_0, b + \epsilon[$ pour un certain ϵ.

Nous pouvons appliquer le théorème d'existence locale au problème

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & \text{(17.156a)}\\ y(b) = x_1(b). & \text{(17.156b)} \end{cases}$$

Il existe un voisinage de b sur lequel la solution est unique. Sur ce voisinage nous devons donc avoir $x_1 = x_2$, ce qui contredit le fait que $x_1 \neq x_2$ en dehors de $[t_0, b]$.

Donc x_1 et x_2 existent et sont égaux sur, au moins $I_1 \cup I_2$.

[21] Parce que les factorielles vont plus vite que les puissances.

□

Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne existence et unicité d'une solution maximale. Cependant cette solution peut ne pas exister partout où les hypothèses sur f sont remplies. En d'autres termes, il peut arriver que f soit Lipschitz jusqu'à t_1, mais que la solution maximale ne soit définie que jusqu'en $t_2 < t_1$. Ce cas fait l'objet du théorème d'explosion en temps fini 32.23.

Sous quelques hypothèses, nous pouvons nous assurer de l'existence d'une solution unique sur tout $\mathbb{R}$.

THOooZIVRooPSWMxg

Théorème 17.40 (Cauchy-Lipschitz global[571, 128])**.**
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ et une fonction continue $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout compact K dans I, il existe $k > 0$ tel que

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leqslant k\|y_1 - y_2\| \tag{17.157}$$

pour tout $t \in K$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$.

EQSooBNREooUTfbMH

Alors le problème

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & \text{(17.158a)} \\ y(t_0) = y_0 & \text{(17.158b)} \end{cases}$$

possède une unique solution $y\colon I \to \mathbb{R}^n$ sur I.

Démonstration. Soit un intervalle compact K dans I et contenant t_0. Nous notons ℓ le diamètre de K. Sur l'espace $E = C^0(K, \mathbb{R}^n)$ nous considérons la topologie uniforme : $(E, \|.\|_\infty)$. C'est un espace complet par le lemme 12.384 (nous utilisons le fait que $\mathbb{R}^n$ soit complet, proposition 1.520). Nous allons utiliser l'application suivante :

$$\Phi\colon E \to E$$

EQooJUTBooILBKoE

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds \tag{17.159}$$

Démontrons quelques faits à propos de Φ.

(1) **Φ est bien définie** Nous devons commencer par prouver que cette application est bien définie. Si $y \in E$ alors f et y sont continues ; l'application $s \mapsto f\big(s, y(s)\big)$ est donc également continue. L'intégrale de cette fonction sur le compact $[t_0, t]$ ne pose alors pas de problèmes. En ce qui concerne la continuité de $\Phi(y)$ sous l'hypothèse que y soit continue,

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(y)(t')\| \leqslant \int_{t}^{t'} \|f(s, y(s))\|ds \leqslant M|t - t'| \tag{17.160}$$

où M est une majoration de $\|s \mapsto f\big(s, y(s)\big)\|_{\infty,K}$.

(2) **Si y est solution alors $\Phi(y) = y$**

Supposons que y soit une solution de l'équation différentielle (17.158). Alors, vu que $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ nous avons :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds = \Phi(y)(t). \tag{17.161}$$

(3) **Si $\Phi(y) = y$ alors y est solution**

Nous avons, pour tout t :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds. \tag{17.162}$$

Le membre de droite est dérivable par rapport à t, et la dérivée est $f\big(t, y(t)\big)$. Donc le membre de gauche est également dérivable et nous avons bien

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big). \tag{17.163}$$

De plus $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} \ldots = y_0$.

Nous sommes encore avec K compact et $E = C^0(K, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme uniforme. Nous allons montrer que Φ est une contraction de E pour une norme bien choisie.

(1) **Une norme sur E** Pour $y \in E$ nous posons

$$\|y\|_k = \max_{t\in K} \big(e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\|\big). \tag{17.164}$$

Ce maximum est bien défini et fini, parce que dedans, la fonction de t est une fonction continue sur le compact K. C'est également une norme parce que si $\|y\|_k = 0$ alors $e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\| = 0$ pour tout t. Étant donné que l'exponentielle ne s'annule pas, $\|y(t)\| = 0$ pour tout t.

(2) **Équivalence de norme** Nous montrons que les normes $\|.\|_k$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes[22] :

$$\|y\|_\infty e^{-k\ell} \leqslant \|y\|_k \leqslant \|y\|_\infty \tag{17.165}$$

EQooSQYWooBTXyDL

pour tout $y \in E$. Pour la première inégalité, $\ell \geqslant |t-t_0|$ pour tout $t \in K$, et $k > 0$, donc

$$\|y(t)\|e^{-k\ell} \leqslant e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\|. \tag{17.166}$$

En prenant le maximum des deux côtés, $\|y\|_\infty e^{-k\ell} \leqslant \|y\|_k$.

En ce qui concerne la seconde inégalité dans (17.165), $k|t-t_0| \geqslant 0$ et donc $e^{-k|t-t_0|} < 1$.

Puisque les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_k$ sont équivalentes, l'espace $(E, \|.\|_k)$ est tout autant complet que $(E, \|.\|_\infty)$. Nous démontrons à présent que Φ est une contraction dans $(E, \|.\|_k)$.

Soient $y, z \in E$. Si $t \geqslant t_0$ nous avons

SUBEQSooEXVYooDkyTuB

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, z(s)\big)\|ds \tag{17.167a}$$

$$\leqslant k\int_{t_0}^{t} \|y(s) - z(s)\|ds. \tag{17.167b}$$

Il convient maintenant de remarquer que

$$\|y(t)\| = e^{-k|t-t_0|}e^{k|t-t_0|}\|y(t)\| \leqslant \|y\|_k e^{k|t-t_0|}. \tag{17.168}$$

Nous pouvons avec ça prolonger les inégalités (17.167) par

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant k\|y-z\|_k \int_{t_0}^{t} e^{k|s-t_0|}ds = k\|y-z\|_k \int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)}ds \tag{17.169}$$

où nous avons utilisé notre supposition $t \geqslant t_0$ pour éliminer les valeurs absolues. L'intégrale peut être calculée explicitement, mais nous en sommes arrivés à un niveau de fainéantise tellement inconcevable que

```
1
2
3  SageMath version 7.3, Release Date: 2016-08-04
4  Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
5  Type "help()" for help.
6
7  sage: var('a,b,k')
8  (a, b, k)
9  sage: f(x)=exp(-k*x)
10 sage: f.integrate(x,a,b)
11 e^(-a*k)/k - e^(-b*k)/k
```

tex/sage/sageSnip014.sage

Au final, si $t \geqslant t_0$,

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \|y-z\|_k\big(e^{k(t-t_0)} - 1\big). \tag{17.170}$$

Si $t \leqslant t_0$, il faut retourner les bornes de l'intégrale avant d'y faire rentrer la norme parce que $\|\int_0^1 f\| \leqslant \int_0^1 \|f\|$, mais ça ne marche pas avec $\|\int_1^0 f\|$. Pour $t \leqslant t_0$ tout le calcul donne

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \|y-z\|_k\big(e^{k(t_0-t)} - 1\big). \tag{17.171}$$

[22] Définition 10.58

Les deux inéquations sont valables a fortiori en mettant des valeurs absolues dans l'exponentielle, de telle sorte que pour tout $t \in K$ nous avons

$$e^{-k|t_0-t|}\|\phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \|y - z\|_k\big(1 - e^{-k|t_0-t|}\big). \tag{17.172}$$

En prenant le supremum sur t,

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_k \leqslant \|y - z\|_k(1 - e^{-k\ell}), \tag{17.173}$$

mais $0 < (1 - e^{e-k\ell}) < 1$, donc Φ est contractante pour la norme $\|.\|_k$. Comme $(E, \|.\|_k)$ est complet, l'application Φ y a un unique point fixe par le théorème de Picard 17.34.

Ce point fixe est donc l'unique solution de l'équation différentielle de départ.

(1) **Existence et unicité sur I** Il nous reste à prouver que la solution que nous avons trouvée existe sur I : jusqu'à présent nous avons démontré l'existence et l'unicité sur n'importe quel compact dans I.

Soit une suite croissante de compacts K_n contenant t_0 (par exemple une suite exhaustive comme celle du lemme 7.359). Nous avons en particulier

$$I = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n. \tag{17.174}$$

(2) **Existence sur I** Soit y_n l'unique solution sur K_n. Il suffit de poser

$$y(t) = y_n(t) \tag{17.175}$$

pour n tel que $t \in K_n$. Cette définition fonctionne parce que si $t \in K_n \cap K_m$, il y a forcément un des deux qui est inclus dans l'autre et le résultat d'unicité sur le plus grand des deux donne $y_n(t) = y_m(t)$.

(3) **Unicité sur I**

Soient y et z des solutions sur I ; puisque I n'est pas spécialement compact, le travail fait plus haut ne permet pas de conclure que $y = z$.

Soit $t \in I$. Alors $t \in K_n$ pour un certain n et y et z sont des solutions sur K_n qui est compact. L'unicité sur K_n donne $y(t) = z(t)$.

□

17.41.
Il y a d'autres moyens de prouver qu'une solution existe globalement sur $\mathbb{R}$. Si f est globalement bornée, le théorème d'explosion en temps fini donne quelques garanties, voir 32.25.

Le théorème suivant donne une version du théorème de Cauchy-Lipschitz lorsque la fonction f dépend d'un paramètre. Ce théorème n'utilise rien de fondamentalement nouveau. Nous le donnons seulement pour montrer que l'on peut choisir l'espace $\mathcal{F}$ de façon un peu maligne pour élargir le résultat. Si vous voulez un théorème de Cauchy-Lipschitz avec paramètre vraiment intéressant, allez voir le théorème 32.40.

THOooDTCWooSPKeYu

Théorème 17.42 (Cauchy-Lipschitz avec paramètre[1, 572])**.**
Soit un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, un connexe ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et un intervalle ouvert Λ de $\mathbb{R}^d$. Soit une fonction $f\colon I \times \Omega \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne en Ω. Soient $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$ et $\lambda_0 \in \Lambda$. Il existe un voisinage compact de (t_0, y_0, λ_0) sur lequel le problème

$$\begin{cases} y'_\lambda(t) = f\big(t, y_\lambda(t), \lambda\big) & \text{(17.176a)} \\ y_\lambda(t_0) = y_0 & \text{(17.176b)} \end{cases}$$

possède une unique solution. De plus $(t, \lambda) \mapsto y_\lambda(t)$ est continue[23].

Idée rapide de la preuve.

[23] Ici, la surprise est que ce soit continu par rapport à λ. Le fait qu'elle le soit par rapport à t est clair depuis le départ, parce que ce n'est finalement rien d'autre que le Cauchy-Lipschitz vieux et connu.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 17.43
Ceci est une idée de la preuve. Je n'ai pas vérifié toutes les étapes. Soyez prudent.

D'abord nous avons un voisinage compact $V\times\overline{B(y_0,r)}\times\Lambda_0$ de (t_0,y_0,λ_0) sur lequel f est bornée. Ensuite nous récrivons l'équation différentielle sous la forme

$$\begin{cases}\frac{\partial y}{\partial t}(t,\lambda)=f\big(t,y(t,\lambda),\lambda\big) & (17.177a)\\ y(t_0,\lambda)=y_0. & (17.177b)\end{cases}$$

pour une fonction $y\colon V\times\Lambda_0\to\mathbb{R}^n$.

Nous posons $\mathcal{F}=C^0\big(V\times\Lambda_0,\mathbb{R}^n\big)$ et nous y définissons l'application

$$\begin{aligned}\Phi\colon\mathcal{F}&\to\mathcal{F}\\ \Phi(y)(t,\lambda)&=y_0+\int_{t_0}^t f\big(s,y(s,\lambda),\lambda\big)ds.\end{aligned}\tag{17.178}$$

Il y a plein de vérifications à faire[572], mais je parie que Φ est bien définie, et qu'une de ses puissances est une contraction de $(\mathcal{F},\|.\|_\infty)$. L'unique point fixe est une solution de notre problème et est dans C^0, donc $(t,\lambda)\mapsto y(t,\lambda)=y_\lambda(t)$ est de classe C^0, c'est-à-dire continue. □

17.44.
Ce théorème marque un peu la limite de ce que l'on peut faire avec la méthode des points fixes dans le cadre de Cauchy-Lipschitz : nous sommes limités à la continuité de la solution parce que les espaces C^p ne sont pas complets[24]. Il n'y a donc pas d'espoir d'adapter la méthode pour prouver que si f est de classe C^p alors $(t,\lambda)\mapsto y_\lambda(t)$ est de classe C^p. On peut, à λ fixé, prouver que $t\mapsto y_\lambda(t)$ est de classe C^p (utiliser une récurrence), mais pas plus.

La régularité C^1 de y par rapport à la condition initiale sera l'objet du théorème 32.36. Ce résultat n'est vraiment pas facile et utilise des ingrédients bien autres qu'un point fixe. Ensuite la régularité C^p par rapport à la condition initiale et par rapport à un paramètre seront presque des cadeaux (proposition 32.38 et 32.40).

EXooJXIGooQtotMc

Exemple 17.45 ([573])**.**
Nous savons que le théorème de Picard permet de trouver le point fixe par itération de la contraction à partir d'un point quelconque. Tentons donc de résoudre

$$\begin{cases}y'(t)=y(t) & (17.179a)\\ y(0)=1 & (17.179b)\end{cases}$$

dont nous savons depuis l'enfance que la solution est l'exponentielle[25]. Partons donc de la fonction constante $y_0=1$, et appliquons la contraction (17.159) :

$$u_1=1+\int_0^1 u_0(s)ds=1+t.\tag{17.180}$$

Ensuite

$$u_2=1+\int_0^t(1+s)ds=1+t+\frac{t^2}{2}.\tag{17.181}$$

Et on voit que les itérations suivantes vont donner l'exponentielle.

Nous sommes évidemment en droit de se dire que nous avons choisi un bon point de départ. Tentons le coup avec une fonction qui n'a rien à voir avec l'exponentielle : $u_0(x)=\sin(x)$.

Le programme suivant permet de faire de belles investigations numériques en partant d'à peu près n'importe quelle fonction :

```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

```

[24] Par exemple, le théorème de Stone-Weierstrass 12.446 nous dit que la limite uniforme de polynômes (de classe C^∞) peut n'être que continue. Voir aussi le thème 37.

[25] Voir par exemple le théorème 15.88.

```
x=var('x')

def Phi(f):
    prim=f.integrate()
    return 1+prim(x)-prim(0)

f=sin(x)

for i in range(1,30):
    print(i,f)
    f=Phi(f)

g=f(x)-exp(x)
plot(g,(x,-10,10)).show()
```

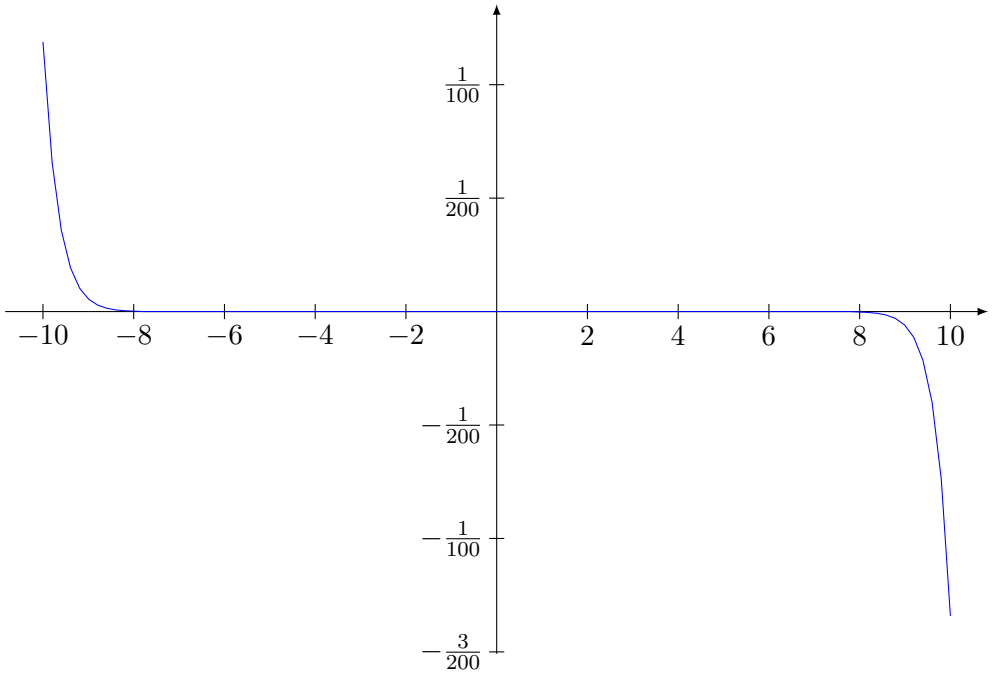
tex/sage/picard_exp.py

Ce programme fait 30 itérations depuis la fonction $\sin(x)$ pour tenter d'approximer $\exp(x)$. Pour donner une idée, après 7 itérations nous avons la fonction suivante :

$$\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - \sin(x) + 1. \tag{17.182}$$

Nous voyons que les coefficients sont des factorielles, mais pas toujours celles correspondantes à la puissance, et qu'il manque certains termes par rapport au développement de l'exponentielle que nous connaissons. Bref, le polynôme qui se met en face de $\sin(x)$ s'adapte tout seul pour compenser.

Et après 30 itérations, ça donne quoi ? Voici un graphe de l'erreur entre $u_{30}(x)$ et $\exp(30)$:



Pour donner une idée, $\exp(10) \simeq 22000$. Donc il y a une faute de 0.01 sur 22000. Pas mal.

△

17.8 Théorèmes d'inversion locale et de la fonction implicite

17.8.1 Mise en situation

Dans un certain nombre de situation, il n'est pas possible de trouver des solutions explicites aux équations qui apparaissent. Néanmoins, l'existence « théorique » d'une telle solution est souvent déjà suffisante. C'est l'objet du théorème de la fonction implicite.

Prenons par exemple la fonction sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1. \tag{17.183}$$

Nous pouvons bien entendu regarder l'ensemble des points donnés par $F(x,y)=0$. C'est le cercle dessiné à la figure 17.1.

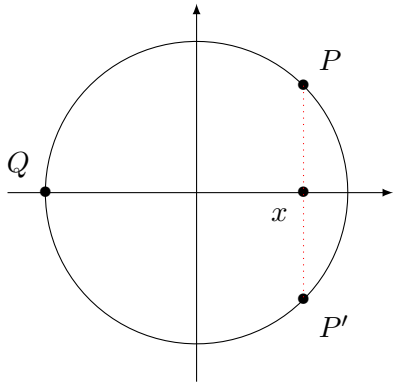


FIGURE 17.1 : Un cercle pour montrer l'intérêt de la fonction implicite. Si on donne x, nous ne pouvons pas savoir si nous parlons de P ou de P'. LabelFigCercleImplicite

Nous ne pouvons pas donner le cercle sous la forme $y=y(x)$ à cause du $\pm$ qui arrive quand on prend la racine carrée. Mais si on se donne le point P, nous pouvons dire que *autour de* P, le cercle est la fonction

$$y(x)=\sqrt{1-x^2}. \tag{17.184}$$

Tandis que autour du point P', le cercle est la fonction

$$y(x)=-\sqrt{1-x^2}. \tag{17.185}$$

Autour de ces deux points, donc, le cercle est donné par une fonction. Il n'est par contre pas possible de donner le cercle autour du point Q sous la forme d'une fonction.

Ce que nous voulons faire, en général, est de voir si l'ensemble des points tels que

$$F(x_1,\dots,x_n,y)=0 \tag{17.186}$$

peut être donné par une fonction $y=y(x_1,\dots,x_n)$. En d'autre termes, est-ce qu'il existe une fonction $y(x_1,\dots,x_n)$ telle que

$$F\big(x_1,\dots,x_n,y(x_1,\dots,x_n)\big)=0. \tag{17.187}$$

Plus généralement, soit une fonction

$$\begin{aligned} F\colon D\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m&\to\mathbb{R}^m\\ (x,y)&\mapsto\big(F_1(x,y),\dots,F_m(x,y)\big) \end{aligned} \tag{17.188}$$

avec $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_m)$. Pour chaque x fixé, on s'intéresse aux solutions du système de m équations $F(x,y)=0$ pour les inconnues y ; en particulier, on voudrait pouvoir écrire $y=\varphi(x)$ vérifiant $F(x,\varphi(x))=0$.

17.8.2 Théorème d'inversion locale

LemGZoqknC

Lemme 17.46 ([405]).
Soit E un espace de Banach (métrique complet) et $\mathcal{O}$ un ouvert de E. Nous considérons une λ-contraction $\varphi\colon\mathcal{O}\to E$. Alors l'application

$$f\colon x\mapsto x+\varphi(x) \tag{17.189}$$

est un homéomorphisme entre $\mathcal{O}$ et un ouvert de E. De plus f^{-1} est lipschitzienne de constante plus petite ou égale à $(1-\lambda)^{-1}$.

Cette proposition utilise le théorème de point fixe de Picard 17.34, et sera utilisée pour démontrer le théorème d'inversion locale 17.47.

Démonstration. Soient $x_1,x_2\in\mathcal{O}$. Nous posons $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$. En vertu de l'inégalité de la proposition 7.213 nous avons [subEqEBJsBfz]

$$\begin{aligned} \big\|f(x_2)-f(x_1)\big\|&=\big\|x_2+\varphi(x_2)-x_1-\varphi(x_1)\big\| && \text{(17.190a)}\\ &\geqslant\Big|\|x_2-x_1\|-\big\|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)\big\|\Big| && \text{(17.190b)}\\ &\geqslant(1-\lambda)\|x_2-x_1\|. && \text{(17.190c)} \end{aligned}$$

À la dernière ligne les valeurs absolues sont enlevées parce que nous savons que ce qui est à l'intérieur est positif. Cela nous dit d'abord que f est injective parce que $f(x_2) = f(x_1)$ implique $x_2 = x_1$. Donc f est inversible sur son image. Nous posons $A = f(\mathcal{O})$ et nous devons prouver que que $f^{-1}\colon A \to \mathcal{O}$ est continue, lipschitzienne de constante majorée par $(1-\lambda)^{-1}$ et que A est ouvert.

Les inéquations (17.190) nous disent que

$$\big\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\big\| \leqslant \frac{\|y_1 - y_2\|}{1-\lambda}, \tag{17.191}$$

c'est-à-dire que

$$f^{-1}\big(B(y,r)\big) \subset B\big(f^{-1}(y), \frac{r}{1-\lambda}\big), \tag{17.192}$$

ce qui signifie que f^{-1} est lipschitzienne de constante souhaitée et donc continue.

Il reste à prouver que $f(\mathcal{O})$ est ouvert. Pour cela nous prenons $y_0 = f(x_0)$ dans $f(\mathcal{O})$ est nous prouvons qu'il existe ϵ tel que $B(y_0,\epsilon)$ soit dans $f(\mathcal{O})$. Il faut donc que pour tout $y \in B(y_0,\epsilon)$, l'équation $f(x) = y$ ait une solution. Nous considérons l'application

$$L_y\colon x \mapsto y - \varphi(x). \tag{17.193}$$

Ce que nous cherchons est un point fixe de L_y parce que si $L_y(x) = x$ alors $y = x + \varphi(x) = f(x)$. Puisque

$$\big\|L_y(x) - L_y(x')\big\| = \big\|\varphi(x) - \varphi(x')\big\| \leqslant \lambda\|x - x'\|, \tag{17.194}$$

l'application L_y est une contraction de constante λ. Par ailleurs x_0 est un point fixe de L_{y_0}, donc en vertu de la caractérisation (12.929) des fonctions lipschitziennes,

$$L_{y_0}\big(\overline{B(x_0,\delta)}\big) \subset \overline{B\big(L_{y_0}(x_0),\lambda\delta\big)} = \overline{B(x_0,\lambda\delta)}. \tag{17.195}$$

Comme pour tout y et x nous avons $L_y(x) = L_{y_0}(x) + y - y_0$,

$$L_y\big(\overline{B(x_0,\delta)}\big) = L_{y_0}\big(\overline{B(x_0,\delta)}\big) + (y-y_0) \subset \overline{B(x_0,\lambda\delta)} + (y-y_0) \subset \overline{B(x_0,\lambda\delta) + \|y-y_0\|}. \tag{17.196}$$

Si $\epsilon < (1-\lambda)\delta$ alors $\lambda\delta + \|y-y_0\| < \delta$. Un tel choix de $\epsilon > 0$ est possible parce que $\lambda < 1$. Pour une telle valeur de ϵ nous avons

$$L_y\big(\overline{B(x_0,\delta)}\big) \subset \overline{B(x_0,\delta)}. \tag{17.197}$$

Par conséquent L_y est une contraction sur l'espace métrique complet $\overline{B(x_0,\delta)}$, ce qui signifie que L_y y possède un point fixe par le théorème de Picard 17.34. □

Nous allons le démontrer dans le cas un peu plus général (mais pas plus cher[26]) des espaces de Banach en tant que conséquence du théorème de point fixe de Picard 17.34.

ThoXWpzqCn

Théorème 17.47 (Inversion locale dans un espace de Banach[574, 405])**.**
Soit une fonction $f \in C^p(E,F)$ avec $p \geqslant 1$ entre deux espaces de Banach. Soit $x_0 \in E$ tel que df_{x_0} soit une bijection bicontinue[27]. Alors il existe un voisinage ouvert V de x_0 et W de $f(x_0)$ tels que

(1) $f\colon V \to W$ soit une bijection,

(2) $f^{-1}\colon W \to V$ soit de classe C^p.

Démonstration. Nous commençons par simplifier un peu le problème. Pour cela, nous considérons la translation $T\colon x \mapsto x + x_0$ et l'application linéaire

$$\begin{aligned} L\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (df_{x_0})^{-1}x \end{aligned} \tag{17.198}$$

qui sont tous deux des difféomorphismes (L en est un par hypothèse d'inversibilité). Quitte à travailler avec la fonction $k = L \circ f \circ T$, nous pouvons supposer que $x_0 = 0$ et que $df_{x_0} = \mathbb{1}$. Pour comprendre cela il faut utiliser deux fois la formule de différentielle de fonction composée de la proposition 12.792 :

$$dk_0(u) = dL_{(f\circ T)(0)}\Big(df_{T(0)}dT_0(u)\Big). \tag{17.199}$$

[26] Sauf la justification de la régularité de l'application $A \mapsto A^{-1}$

[27] En dimension finie, une application linéaire est toujours continue et d'inverse continu.

Puisque L est linéaire, sa différentielle est elle-même, c'est-à-dire $dL_{(f\circ T)(0)} = (df_{x_0})^{-1}$, et par ailleurs $dT_0 = \mathbb{1}$, donc

$$dk_0(u) = (df_{x_0})^{-1}\Big(df_{x_0}(u)\Big) = u, \tag{17.200}$$

ce qui signifie bien que $dk_0 = \mathbb{1}$. Pour tout cela nous avons utilisé en plein le fait que df_{x_0} était inversible.

Nous posons $g = f - \mathbb{1}$, c'est-à-dire $g(x) = f(x) - x$, qui a la propriété $dg_0 = 0$. Étant donné que g est de classe C^1, l'application[28]

$$\begin{aligned} dg\colon E &\to \mathrm{GL}(F) \\ x &\mapsto dg_x \end{aligned} \tag{17.201}$$

est continue. En conséquence, nous avons un voisinage U' de 0 pour lequel

$$\sup_{x\in U'} \|dg_x\| < \frac{1}{2}. \tag{17.202}$$ EqSGTOfvx

Maintenant le théorème des accroissements finis 10.337 (12.340 pour la dimension finie) nous indique que pour tout $x, x' \in U'$ nous avons[29]

$$\|g(x') - g(x)\| \leqslant \sup_{a\in[x,x']} \|dg_a\| \cdot \|x - x'\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x'\|, \tag{17.203}$$

ce qui prouve que g est une contraction au moins sur l'ouvert U'. Nous allons aussi donner une idée de la façon dont f fonctionne : si $x_1, x_2 \in U'$ alors

$$\|x_1 - x_2\| = \|g(x_1) - f(x_1) - g(x_2) + f(x_2)\| \tag{17.204a}$$
$$\leqslant \|g(x_1) - g(x_2)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \tag{17.204b}$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|f(x_1) - f(x_2)\|, \tag{17.204c}$$

ce qui montre que

$$\|x_1 - x_2\| \leqslant 2\|f(x_1) - f(x_2)\|. \tag{17.205}$$

Maintenant que nous savons que g est contractante de constante $\frac{1}{2}$ et que $f = g + \mathbb{1}$ nous pouvons utiliser la proposition 17.46 pour conclure que f est un homéomorphisme sur un ouvert U (partie de U') de E et f^{-1} a une constante de Lipschitz plus petite ou égale à $(1 - \frac{1}{2})^{-1} = 2$.

Nous allons maintenant prouver que f^{-1} est différentiable et que sa différentielle est donnée par $(df^{-1})_{f(x)} = (df_x)^{-1}$.

Soient $a, b \in U$ et $u = b - a$. Étant donné que f est différentiable en a, il existe une fonction $\alpha \in o(\|u\|)$ telle que

$$f(b) - f(a) - df_a(u) = \alpha(u). \tag{17.206}$$

En notant $y_a = f(a)$ et $y_b = f(b)$ et en appliquant $(df_a)^{-1}$ à cette dernière équation,

$$(df_a)^{-1}(y_b - y_a) - u = (df_a)^{-1}\big(\alpha(u)\big). \tag{17.207}$$

Puisque df_a est bornée (et son inverse aussi), le membre de droite est encore une fonction β ayant la propriété $\lim_{u\to 0} \beta(u)/\|u\| = 0$; en réordonnant les termes,

$$b - a = (df_a)^{-1}(y_b - y_a) + \beta(u) \tag{17.208}$$

et donc

$$f^{-1}(y_b) - f^{-1}(y_a) - (df_a)^{-1}(y_b - y_a) = \beta(u), \tag{17.209}$$

ce qui prouve que f^{-1} est différentiable et que $(df^{-1})_{y_a} = (df_a)^{-1}$.

La différentielle df^{-1} est donc obtenue par la chaine

$$df^{-1}\colon f(U) \xrightarrow{f^{-1}} U' \xrightarrow{df} \mathrm{GL}(F) \xrightarrow{\mathrm{Inv}} \mathrm{GL}(F) \tag{17.210}$$

où l'application $\mathrm{Inv}\colon \mathrm{GL}(F) \to \mathrm{GL}(F)$ est l'application $X \mapsto X^{-1}$ qui est de classe C^∞ par le théorème 10.345. D'autre part, par hypothèse df est une application de classe C^{k-1} et donc au minimum C^0

[28] Ici $\mathrm{GL}(F)$ est l'ensemble des applications linéaires, inversibles et continues de F dans lui-même. Ce ne sont pas spécialement des matrices parce que nous n'avons pas d'hypothèses sur la dimension de F, finie ou non.

[29] Ici nous supposons avoir choisi U' convexe afin que tous les $a \in [x, x']$ soient bien dans U' et donc soumis à l'inéquation (17.202), ce qui est toujours possible, il suffit de prendre une boule.

parce que $k \geqslant 1$. Enfin, l'application $f^{-1}\colon f(U) \to U$ est continue (parce que la proposition 17.46 précise que f est un homéomorphisme). Donc toute la chaine est continue et df^{-1} est continue. Cela entraine immédiatement que f^{-1} est C^1 et donc que toute la chaine est C^1.

Par récurrence nous obtenons la chaine

$$df^{-1}\colon f(U) \xrightarrow[C^{k-1}]{f^{-1}} U' \xrightarrow[C^{k-1}]{df} \mathrm{GL}(F) \xrightarrow[C^{\infty}]{\mathrm{Inv}} \mathrm{GL}(F) \tag{17.211}$$

qui prouve que df^{-1} est C^{k-1} et donc que f^{-1} est C^k. La récurrence s'arrête ici parce que df n'est pas mieux que C^{k-1}. □

17.8.3 Théorème de la fonction implicite

Nous énonçons et démontrons le théorème de la fonction implicite dans le cas d'espaces de Banach.

ThoAcaWho

Théorème 17.48 (Théorème de la fonction implicite dans Banach[407])**.**
Soient E, F et G des espaces de Banach et des ouverts $U \subset E$, $V \subset F$. Nous considérons une fonction $f\colon U \times V \to G$ de classe C^r telle que[30]

$$d_y f_{(x_0,y_0)}\colon F \to G \tag{17.212}$$

soit un isomorphisme pour un certain $(x_0, y_0) \in U \times V$.

Alors nous avons des voisinages U_0 de x_0 dans E et W_0 de $f(x_0, y_0)$ dans G et une fonction de classe C^r

$$g\colon U_0 \times W_0 \to V \tag{17.213}$$

telle que

$$f\big(x, g(x, w)\big) = w \tag{17.214}$$

pour tout $(x, w) \in U_0 \times W_0$.

Cette fonction g est unique au sens suivant : il existe un voisinage V_0 de y_0 tel que si $(x, y) \in U_0 \times V_0$ et $w \in W_0$ satisfont à $f(x, y) = w$ alors $y = g(x, w)$. Autrement dit, la fonction $g\colon U_0 \times W_0 \to V_0$ est unique.

Démonstration. Nous commençons par considérer la fonction

$$\begin{aligned} \Phi\colon U \times V &\to E \times G \\ (x, y) &\mapsto \big(x, f(x, y)\big) \end{aligned} \tag{17.215}$$

et sa différentielle

$$d\Phi_{(x_0,y_0)}(u, v) = \frac{d}{dt}\Big[\big(x_0 + tu, f(x_0 + tu, y_0 + tv)\big)\Big]_{t=0} \tag{17.216a}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\Big[x_0 + tu\Big]_{t=0}, \frac{d}{dt}\Big[f(x_0 + tu, y_0 + tv)\Big]_{t=0}\right) \tag{17.216b}$$

$$= \big(u, df_{(x_0,y_0)}(u, v)\big)\,. \tag{17.216c}$$

Nous utilisons alors la proposition 10.343 pour conclure que

$$d\Phi_{(x_0,y_0)}(u, v) = \big(u, (d_1 f)_{(x_0,y_0)}(u) + (d_2 f)_{(x_0,y_0)}(v)\big), \tag{17.217}$$

mais comme par hypothèse $(d_2 f)_{(x_0,y_0)}\colon F \to G$ est un isomorphisme, l'application $d\Phi_{(x_0,y_0)}\colon E \times F \to E \times G$ est également un isomorphisme. Par conséquent le théorème d'inversion locale 17.47 nous indique qu'il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de (x_0, y_0) et $\mathcal{P}$ de $\Phi(x_0, y_0)$ tels que $\Phi\colon \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ soit une bijection et $\Phi^{-1}\colon \mathcal{P} \to \mathcal{O}$ soit de classe C^r. Comme $\mathcal{P}$ est un voisinage de

$$\Phi(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0, y_0)\big), \tag{17.218}$$

nous pouvons par 7.286 le choisir un peu plus petit de telle sorte à avoir $\mathcal{P} = U_0 \times W_0$ où U_0 est un voisinage de x_0 et W_0 un voisinage de $f(x_0, y_0)$. Dans ce cas nous devons obligatoirement aussi restreindre $\mathcal{O}$ à $U_0 \times V_0$ pour un certain voisinage V_0 de y_0. L'application Φ^{-1} a obligatoirement la forme

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\colon U_0 \times W_0 &\to U_0 \times V_0 \\ (x, w) &\mapsto \big(x, g(x, w)\big) \end{aligned} \tag{17.219}$$

EqMHT QrHRn

[30] La notation d_y est la différentielle partielle de la définition 10.342.

pour une certaine fonction $g\colon U_0\times W_0\to V$. Cette fonction g est la fonction cherchée parce qu'en appliquant Φ à (17.219),

$$(x,w)=\Phi\big(x,g(x,w)\big)=\Big(x,f\big(x,g(x,w)\big)\Big),\tag{17.220}$$

qui nous dit que pour tout $x\in U_0$ et tout $w\in W_0$ nous avons

$$f\big(x,g(x,w)\big)=w.\tag{17.221}$$

Si vous avez bien suivi le sens de l'équation (17.219) alors vous avez compris l'unicité. Sinon, considérez $(x,y)\in U_0\times V_0$ et $w\in W_0$ tels que $f(x,y)=w$. Alors $\big(x,f(x,y)\big)=(x,w)$ et

$$\Phi(x,y)=(x,w).\tag{17.222}$$

Mais vu que $\Phi\colon U_0\times V_0\to U_0\times W_0$ est une bijection, cette relation définit de façon univoque l'élément (x,y) de $U_0\times V_0$, qui ne sera autre que $g(x,w)$. □

Le théorème de la fonction implicite s'énonce de la façon suivante pour des espaces de dimension finie.

ThoRYN_jvZrZ

Théorème 17.49 (Théorème de la fonction implicite en dimension finie)**.**
Soit une fonction $F\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ de classe C^k et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ tels que

(1) $F(\alpha,\beta)=0$,

(2) $\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\neq 0$, *c'est-à-dire que $(d_yF)_{(\alpha,\beta)}$ est inversible.*

Alors il existe un voisinage ouvert V de α dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert W de β dans $\mathbb{R}^m$ et une application $\varphi\colon V\to W$ de classe C^k telle que pour tout $x\in V$ on ait

$$F\big(x,\varphi(x)\big)=0.\tag{17.223}$$

De plus si $(x,y)\in V\times W$ satisfait à $F(x,y)=0$, alors $y=\varphi(x)$.

RemPYA_pkTEx

Remarque 17.50.
Notons que cet énoncé est tourné un peu différemment en ce qui concerne le nombre de variables dont dépend la fonction implicite : comparez

$$f\big(x,g(x,w)\big)=w\tag{17.224a}$$
$$F\big(x,\varphi(x)\big)=0.\tag{17.224b}$$

Le deuxième est un cas particulier du premier en posant

$$F(x,y)=f(x,y)-f(x_0,y_0)\tag{17.225}$$

et donc en considérant w comme valant la constante $f(x_0,y_0)$; dans ce cas la fonction g ne dépend plus que de la variable x.

Exemple 17.51.
La remarque 17.50 signifie entre autres que le théorème 17.48 est plus fort que 17.49 parce que le premier permet de choisir la valeur d'arrivée. Parlons de l'exemple classique du cercle et de la fonction $f(x,y)=x^2+y^2$. Nous savons que

$$f(\alpha,\beta)=1.\tag{17.226}$$

Alors le théorème 17.48 nous donne une fonction g telle que

$$f(x,g(x,r))=r\tag{17.227}$$

tant que x est proche de α, que r est proche de 1 et que g donne des valeurs proches de β.

L'énoncé 17.49 nous oblige à travailler avec la fonction $F(x,y)=x^2+y^2-1$, de telle sorte que

$$F(\alpha,\beta)=0,\tag{17.228}$$

et que nous ayons une fonction φ telle que

$$F(x,\varphi(x))=0.\tag{17.229}$$

La fonction φ ne permet donc que de trouver des points sur le cercle de rayon 1. △

17.8.4 Exemple

Le théorème de la fonction implicite a pour objet de donner l'existence de la fonction φ. Maintenant nous pouvons dire beaucoup de choses sur les dérivées de φ en considérant la fonction

$$x \mapsto F\big(x, \varphi(x)\big). \tag{17.230}$$

Par définition de φ, cette fonction est toujours nulle. En particulier, nous pouvons dériver l'équation

$$F\big(x, \varphi(x)\big) = 0, \tag{17.231}$$

et nous trouvons plein de choses.

EXooTLNAooCJHPnq

Exemple 17.52.
Prenons par exemple la fonction[31]

$$F\big((x, y), z\big) = ze^z - x - y, \tag{17.232}$$

Le théorème de la fonction implicite 17.48 nous permet de considérer la fonction $z(x, y)$ vérifiant

$$F\big(x, y, z(x, y)\big) = 0, \tag{17.233}$$

c'est-à-dire telle que

EqDefZImplExemple

$$z(x, y)e^{z(x,y)} - x - y = 0. \tag{17.234}$$

pour tout x et $y \in \mathbb{R}$. Que pouvons dire de la fonction z ?

Nous pouvons facilement trouver $z(0, 0)$ parce que

$$z(0, 0)e^{z(0,0)} = 0, \tag{17.235}$$

donc $z(0, 0) = 0$.

Nous pouvons dire des choses sur les dérivées de $z(x, y)$. Voyons par exemple $(\partial_x z)(x, y)$. Pour trouver cette dérivée, nous dérivons la relation (17.234) par rapport à x. Ce que nous trouvons est

$$(\partial_x z)e^z + ze^z(\partial_x z) - 1 = 0. \tag{17.236}$$

Cette équation peut être résolue par rapport à $\partial_x z$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{e^z(1 + z)}. \tag{17.237}$$

Remarquez que cette équation ne donne pas tout à fait la dérivée de z en fonction de x et y, parce que z apparaît dans l'expression, alors que z est justement la fonction inconnue. En général, c'est la vie, nous ne pouvons pas faire mieux.

Dans certains cas, on peut aller plus loin. Par exemple, nous pouvons calculer cette dérivée au point $(x, y) = (0, 0)$ parce que $z(0, 0)$ est connu :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 1. \tag{17.238}$$

Ceci est pratique pour calculer, par exemple, le développement en Taylor de z autour de $(0, 0)$. △

Exemple 17.53.
Est-ce que l'équation $e^y + xy = 0$ définit au moins localement une fonction $y(x)$? Nous considérons la fonction

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ e^y + xy \end{pmatrix} \tag{17.239}$$

La différentielle de cette application est

$$df_{(0,0)}(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(tu_1, tu_2)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} tu_1 \\ e^{tu_2} + t^2u_1u_2 \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{17.240}$$

L'application f définit donc un difféomorphisme local autour des points (x_0, y_0) et $f(x_0, y_0)$. Soit $(u, 0)$ un point dans le voisinage de $f(x_0, y_0)$. Alors il existe un unique (x, y) tel que

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ e^y + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{17.241}$$

Nous avons automatiquement $x = u$ et $e^y + xy = 0$. Notons toutefois que pour que ce procédé donne effectivement une fonction implicite $y(x)$ nous devons avoir des points de la forme $(u, 0)$ dans le voisinage de $f(x_0, y_0)$. △

[31] Définition de l'exponentielle : 15.70.

17.9 Décomposition polaire (régularité)

NomDJMUooTRUVkS

17.54.
Nous allons montrer que l'application

$$\begin{aligned} f\colon S^{++}(n,\mathbb{R}) &\to S^{++}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto \sqrt{A} \end{aligned} \tag{17.242}$$

est une difféomorphisme.

Cependant $S^{++}(n,\mathbb{R})$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et nous ne savons pas ce qu'est la différentielle d'une application non définie sur un ouvert. Nous allons donc en réalité montrer que l'application racine carrée existe sur un voisinage de chacun des points de $S^{++}(n,\mathbb{R})$. Et comme une union quelconque d'ouverts est un ouvert, la fonction f sera bien définie sur un ouvert de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

LemLBFOooDdNcgy

Lemme 17.55.
L'application

$$\begin{aligned} f\colon S^{++}(n,\mathbb{R}) &\to S^{++}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^2 \end{aligned} \tag{17.243}$$

est un C^∞-difféomorphisme.

Démonstration. Prouvons d'abord que f prend ses valeurs dans $S^{++}(n,\mathbb{R})$. Si $A \in S^{++}(n,\mathbb{R})$ alors par la diagonalisation 8.225 elle s'écrit $A = QDQ^{-1}$ où D est diagonale avec des nombres strictement positifs sur la diagonale. Avec cela, $A^2 = QD^2Q^{-1}$ où D^2 contient encore des nombres strictement positifs sur la diagonale.

L'application f étant essentiellement des polynômes en les entrées de A, elle est de classe C^∞.

Passons à l'étude de la différentielle. Comme mentionné en 17.54 nous allons en réalité voir f sur un ouvert de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ autour de $A \in S^{++}(n,\mathbb{R})$. Par conséquent si $A \in S^{++}(n,\mathbb{R})$,

$$df\colon S^{++}(n,\mathbb{R}) \to \mathcal{L}\big(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}),\mathbb{M}(n,\mathbb{R})\big) \tag{17.244a}$$
$$df_A\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}). \tag{17.244b}$$

Le calcul de df_A est facile. Soit $u \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et faisons le calcul en utilisant la formule du lemme (12.280) :

$$df_A(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(A+tu)\Big]_{t=0} \tag{17.245a}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[A^2 + tAu + tuA + t^2u^2\Big]_{t=0} \tag{17.245b}$$
$$= Au + uA. \tag{17.245c}$$

Nous allons utiliser le théorème d'inversion locale 17.47 à la fonction f. Dans la suite, A est une matrice de $S^{++}(n,\mathbb{R})$.

(1) $\underline{df_A \text{ **est injective**}}$ Soit $M \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ dans le noyau de df_A. En posant $M' = Q^{-1}MQ$ nous avons $M = QM'Q^{-1}$ et on applique df_A à $QM'Q^{-1}$:

$$df_A(QM'Q^{-1}) = Q\big(DM + MD\big)Q^{-1}. \tag{17.246}$$

où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i > 0$. La matrice D est inversible. Nous avons $M' = -DM'D^{-1}$, et en coordonnées,

$$M'_{ij} = -\sum_{kl} D_{ik}M'_{kl}D^{-1}_{lj} \tag{17.247a}$$
$$= -\sum_{kl} \lambda_i\delta_{ik}M'_{kl}\frac{1}{\lambda_j}\delta_{lj} \tag{17.247b}$$
$$= -\frac{\lambda_i}{\lambda_j}M'_{ij}. \tag{17.247c}$$

C'est-à-dire que $M'_{ij} = -\frac{\lambda_i}{\lambda_j}M'_{ij}$ avec $-\frac{\lambda_i}{\lambda_j} < 0$. Cela implique $M' = 0$ et par conséquent $M = 0$.

(2) $\underline{df_A \text{ est surjective}}$ Soit $N \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$; nous cherchons $M \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ tel que $df_A(M) = N$. Nous posons $N' = Q^{-1}NQ$ et $M = QM'Q^{-1}$, ce qui nous donne à résoudre $df_D(M') = N'$. Passons en coordonnées :

$$(DM' + M'D)_{ij} = \sum_k (\delta_{ik}\lambda_i M'_{kj} + M'_{ik}\delta_{kj}\lambda_j) = M'_{ij}(\lambda_i + \lambda_j) \tag{17.248}$$

où $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$. Il suffit donc de prendre la matrice M' donnée par

$$M'_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} N'_{ij} \tag{17.249}$$

pour que $df_A(M') = N'$.

Le théorème d'inversion locale donne un voisinage V de A dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et un voisinage W de A^2 dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ tels que $f\colon V \to W$ soit une bijection et $f^{-1}\colon W \to V$ soit de même régularité, en l'occurrence C^∞. □

Remarque 17.56.
Oui, il y a des matrices non symétriques qui ont une unique racine carrée.

La proposition suivante, qui dépend du théorème d'inversion locale par le lemme 17.55, donne plus de régularité à la décomposition polaire donnée dans le théorème 13.38.

PropWCXAooDuFMjn

Proposition 17.57 (Décomposition polaire : cas réel (suite))**.**
L'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \times S^{++}(n,\mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ (Q,S) &\mapsto SQ \end{aligned} \tag{17.250}$$

est un difféomorphisme de classe C^∞.

Démonstration. Si M est donnée dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ alors la décomposition polaire[32] $M = QS$ est donnée par $S = \sqrt{MM^t}$ et $Q = MS^{-1}$. Autrement dit, si nous considérons la fonction de décomposition polaire

$$f\colon \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \times S^{++}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \tag{17.251}$$

alors

$$f^{-1}(M) = \big(M(\sqrt{MM^t})^{-1}, \sqrt{MM^t}\big). \tag{17.252}$$

Nous avons vu dans le lemme 17.55 que la racine carrée était un C^∞-difféomorphisme. Le reste n'étant que des produits de matrices, la régularité est de mise. □

17.10 Théorème de Von Neumann

Lemme 17.58 ([128])**.**
Soit G, un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{L}_G = \{m \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \text{ tel que } e^{tm} \in G\, \forall t \in \mathbb{R}\}. \tag{17.253}$$

Alors $\mathcal{L}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Si $m \in \mathcal{L}_G$, alors $\lambda m \in \mathcal{L}_G$ par construction. Le point délicat à prouver est le fait que si $a, b \in \mathcal{L}_G$, alors $a + b \in \mathcal{L}_G$. Soit $a \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$; nous savons qu'il existe une fonction $\alpha_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{M}$ telle que

$$e^{ta} = \mathbb{1} + ta + \alpha_a(t) \tag{17.254}$$

et

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t)}{t} = 0. \tag{17.255}$$

Si a et b sont dans $\mathcal{L}_G$, alors $e^{ta}e^{tb} \in G$, mais il n'est pas vrai en général que cela soit égal à $e^{t(a+b)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$e^{a/k}e^{b/k} = \left(\mathbb{1} + \frac{a}{k} + \alpha_a(\frac{1}{k})\right)\left(\mathbb{1} + \frac{b}{k} + \alpha_b(\frac{1}{k})\right) = \mathbb{1} + \frac{a+b}{k} + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \tag{17.256}$$

[32] Proposition 13.38.

où $\beta\colon \mathbb{R}\to\mathbb{M}$ est encore une fonction vérifiant $\beta(t)/t\to 0$. Si k est assez grand, nous avons

$$\left\| \frac{a+b}{k}+\beta(\frac{1}{k}) \right\| <1, \tag{17.257}$$

et nous pouvons profiter du lemme 15.171 pour écrire alors

$$\left(e^{a/k}e^{b/k}\right)^k=e^{k\ln\left(\mathbb{1}+\frac{a+b}{k}+\beta(\frac{1}{k})\right)}. \tag{17.258}$$

Ce qui se trouve dans l'exponentielle est

$$k\left[\frac{a+b}{k}+\alpha(\frac{1}{k})+\sigma\left(\frac{a+b}{k}+\alpha(\frac{1}{k})\right)\right]. \tag{17.259}$$

Les diverses propriétés vues montrent que le tout tend vers $a+b$ lorsque $k\to\infty$. Par conséquent

$$\lim_{k\to\infty}\left(e^{a/k}e^{b/k}\right)^k=e^{a+b}. \tag{17.260}$$

Ce que nous avons prouvé est que pour tout t, $e^{t(a+b)}$ est une limite d'éléments dans G et est donc dans G parce que ce dernier est fermé. □

Comme $\mathcal{L}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, nous pouvons considérer un supplémentaire M.

LemHOsbREC

Lemme 17.59.
Il n'existe pas de suite (m_k) dans $M\setminus\{0\}$ convergeant vers zéro et telle que $e^{m_k}\in G$ pour tout k.

Démonstration. Supposons que nous ayons $m_k\to 0$ dans $M\setminus\{0\}$ avec $e^{m_k}\in G$. Nous considérons les éléments $\epsilon_k=\frac{m_k}{\|m_k\|}$ qui sont sur la sphère unité de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que cette suite converge, et puisque M est fermé, ce sera vers $\epsilon\in M$ avec $\|\epsilon\|=1$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$ nous avons

$$e^{t\epsilon}=\lim_{k\to\infty}e^{t\epsilon_k}. \tag{17.261}$$

En vertu de la décomposition d'un réel en partie entière et décimale, pour tout k nous avons $\lambda_k\in\mathbb{Z}$ et $|\mu_k|\leqslant\frac{1}{2}$ tel que $t/\|m_k\|=\lambda_k+\mu_k$. Avec ça,

$$e^{t\epsilon}=\lim_{k\to\infty}\exp\left(\frac{t}{m_k}m_k\right)=\lim_{k\to\infty}e^{\lambda_k m_k}e^{\mu_k m_k}. \tag{17.262}$$

Pour tout k nous avons $e^{\lambda_k m_k}\in G$. De plus $|\mu_k|$ étant borné et m_k tendant vers zéro nous avons $e^{\mu_k m_k}\to 1$. Au final

$$e^{t\epsilon}=\lim_{k\to\infty}e^{t\epsilon_k}\in G \tag{17.263}$$

Cela signifie que $\epsilon\in\mathcal{L}_G$, ce qui est impossible parce que nous avions déjà dit que $\epsilon\in M\setminus\{0\}$. □

LemGGTtxdF

Lemme 17.60.
L'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{L}_G\times M&\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\\ l,m&\mapsto e^le^m \end{aligned} \tag{17.264}$$

est un difféomorphisme local entre un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et un voisinage de $\mathbb{1}$ dans $\exp\big(\mathbb{M}(n,\mathbb{R})\big)$.

Notons que nous ne disons rien de $e^{\mathbb{M}(n,\mathbb{R})}$. Nous n'allons pas nous embarquer à discuter si ce serait tout $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$[33] ou bien si ça contiendrait ne fut-ce que G.

Démonstration. Le fait que f prenne ses valeurs dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est simplement dû au fait que les exponentielles sont toujours inversibles. Nous considérons ensuite la différentielle : si $u\in\mathcal{L}_G$ et $v\in M$ nous avons

$$df_{(0,0)}(u,v)=\frac{d}{dt}\Big[f\big(t(u,v)\big)\Big]_{t=0}=\frac{d}{dt}\Big[e^{tu}e^{tv}\Big]_{t=0}=u+v. \tag{17.265}$$

L'application df_0 est donc une bijection entre $\mathcal{L}_G\times M$ et $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Le théorème d'inversion locale 17.47 nous assure alors que f est une bijection entre un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathcal{L}_G\times M$ et son image. Mais comme df_0 est une bijection avec $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, l'image en question contient un ouvert autour de $\mathbb{1}$ dans $\exp\big(\mathbb{M}(n,\mathbb{R})\big)$. □

[33] Vu les dimensions y'a tout de même peu de chance.

ThoOBriEoe

Théorème 17.61 (Von Neumann[128, 575, 576]).
Tout sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *est une sous-variété de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit G un tel groupe ; nous devons prouver que c'est localement difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Et si on est pervers, on ne va pas faire localement difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, mais à un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie. Nous allons être pervers.

Étant donné que pour tout $g \in G$, l'application

$$\begin{aligned} L_g\colon G &\to G \\ h &\mapsto gh \end{aligned} \tag{17.266}$$

est de classe C^∞ et d'inverse C^∞, il suffit de prouver le résultat pour un voisinage de $\mathbb{1}$.

Supposons d'abord que $\mathcal{L}_G = \{0\}$. Alors 0 est un point isolé de $\ln(G)$; en effet si ce n'était pas le cas nous aurions un élément m_k de $\ln(G)$ dans chaque boule $B(0,r_k)$. Nous aurions alors $m_k = \ln(a_k)$ avec $a_k \in G$ et donc

$$e^{m_k} = a_k \in G. \tag{17.267}$$

De plus m_k appartient forcément à M parce que $\mathcal{L}_G$ est réduit à zéro. Cela nous donnerait une suite $m_k \to 0$ dans M dont l'exponentielle reste dans G. Or cela est interdit par le lemme 17.59. Donc 0 est un point isolé de $\ln(G)$. L'application ln étant continue[34], nous en déduisons que $\mathbb{1}$ est isolé dans G. Par le difféomorphisme L_g, tous les points de G sont isolés ; ce groupe est donc discret et par voie de conséquence, une variété.

Nous supposons maintenant que $\mathcal{L}_G \neq \{0\}$. Nous savons par la proposition 15.170 que

$$\exp\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \tag{17.268}$$

est une application C^∞ vérifiant $d\exp_0 = \mathrm{Id}$. Nous pouvons donc utiliser le théorème d'inversion locale 17.47 qui nous offre donc l'existence d'un voisinage U de 0 dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ tel que $W = \exp(U)$ soit un ouvert de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et que $\exp\colon U \to W$ soit un difféomorphisme de classe C^∞.

Montrons que quitte à restreindre U (et donc W qui reste par définition l'image de U par exp), nous pouvons avoir $\exp\big(U \cap \mathcal{L}_G\big) = W \cap G$. D'abord $\exp(\mathcal{L}_G) \subset G$ par construction. Nous avons donc $\exp\big(U \cap \mathcal{L}_G\big) \subset W \cap G$. Pour trouver une restriction de U pour laquelle nous avons l'égalité, nous supposons que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ dans U,

$$\exp\colon \mathcal{O} \cap \mathcal{L}_G \to \exp(\mathcal{O}) \cap G \tag{17.269}$$

ne soit pas surjective. Cela donnerait un élément de $\mathcal{O} \cap \complement\mathcal{L}_G$ dont l'image par exp n'est pas dans G. Nous construisons ainsi une suite en considérant une boule $B(0,\frac{1}{k})$ incluse à U et $x_k \in B(0,\frac{1}{k}) \cap \complement\mathcal{L}_G$ vérifiant $e^{x_k} \in G$. D'après le choix des boules, nous avons évidemment $x_k \to 0$.

L'élément e^{x_k} est dans $e^{\mathbb{M}(n,\mathbb{R})}$ et le difféomorphisme du lemme 17.60[35] nous donne $(l_k,m_k) \in \mathcal{L}_G \times M$ tel que $e^{l_k}e^{m_k} = e^{x_k}$. À ce point nous considérons k suffisamment grand pour que e^{x_k} soit dans la partie de l'image de f sur lequel nous avons le difféomorphisme. Plus prosaïquement, nous posons

$$(l_k,m_k) = f^{-1}(e^{x_k}) \tag{17.270}$$

et nous profitons de la continuité pour permuter la limite avec f^{-1} :

$$\lim_{k\to\infty}(l_k,m_k) = f^{-1}\big(\lim_{k\to\infty} e^{x_k}\big) = f^{-1}(\mathbb{1}) = (0,0). \tag{17.271}$$

En particulier $m_k \to 0$ alors que $e^{m_k} = e^{x_k}e^{-l_k} \in G$. La suite m_k viole le lemme 17.59. Nous pouvons donc restreindre U de telle façon à avoir

$$\exp\big(U \cap \mathcal{L}_G\big) = W \cap G. \tag{17.272}$$

Nous avons donc un ouvert de $\mathcal{L}_G$ (l'ouvert $U \cap \mathcal{L}_G$) qui est difféomorphe avec l'ouvert $W \cap G$ de G. Donc G est une variété et accepte $\mathcal{L}_G$ comme carte locale. □

Remarque 17.62.
En termes savants, nous avons surtout montré que si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors l'exponentielle donne un difféomorphisme local entre $\mathfrak{g}$ et G.

[34] Par le lemme 15.171.
[35] Il me semble que l'utilisation de ce lemme manque à l'avant-dernière ligne de la preuve chez [128].

17.11 Recherche d'extrémums

DEFooJMMLooYMZehc

Définition 17.63 ([577]).
*Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction, le point $a \in \mathbb{R}^n$ est un **maximum local** de f si il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, \delta)$, $f(x) \leqslant f(a)$.*

*Je vous laisse deviner la définition d'un **minimum local**.*

*Un **extrémum local** est un point qui est soit un minimum soit un maximum local.*

17.11.1 Extrema à une variable

Définition 17.64.
*Soit $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in A$. Le point a est un **maximum local** de f si il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de a tel que $f(a) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{U} \cap A$. Le point a est un **maximum global** si $f(a) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in A$.*

La proposition basique à utiliser lors de la recherche d'extrémums est la suivante :

PROPooNVKXooXtKkuz

Proposition 17.65.
Soit $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{Int}(A)$. Supposons que f est dérivable en a. Si a est un extrémum local[36]*, alors $f'(a) = 0$.*

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ en $x = 0$: sa dérivée est nulle et pourtant $x = 0$ n'est ni un maximum ni un minimum local.

Cette proposition ne sert donc qu'à sélectionner des *candidats* extrémum. Afin de savoir si ces candidats sont des extrémums, il y a la proposition suivante.

PROPooCXHPooSlRsEJ

Proposition 17.66.
Soit $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^k au voisinage d'un point $a \in \mathrm{Int}\, I$. Supposons que

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0, \tag{17.273}$$

et que

$$f^{(k)}(a) \neq 0. \tag{17.274}$$

Dans ce cas,

(1) Si k est pair, alors a est un point d'extrémum local de f, c'est un minimum si $f^{(k)}(a) > 0$, et un maximum si $f^{(k)}(a) < 0$,

(2) Si k est impair, alors a n'est pas un extrémum local de f.

Note : jusqu'à présent nous n'avons rien dit des extrémums *globaux* de f. Il n'y a pas grand chose à en dire. Si un point d'extrémum global est situé dans l'intérieur du domaine de f, alors il sera extrémum local (a fortiori). Ou alors, le maximum global peut être sur le bord du domaine. C'est ce qui arrive à des fonctions strictement croissantes sur un domaine compact.

Une seule certitude : si une fonction est continue sur un compact, elle possède une minimum et un maximum global par le théorème 9.56.

Soit une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si $f'(a) > 0$, alors la tangente au graphe de f au point $\big(a, f(a)\big)$ sera une droite croissante (coefficient directeur positif). Cela ne veut pas spécialement dire que la fonction elle-même sera croissante, mais en tout cas, cela est un bon indice.

Exemple 17.67.
Si $f(x) = x^2$, il est connu que $f'(x) = 2x$. Nous avons donc que f' est positive si $x \geqslant 0$ et f' est négative si $x < 0$. Cela correspond bien au fait que x^2 est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $]0, \infty[$. △

Sur la figure 17.2, nous avons dessiné la fonction $f(x) = x\cos(x)$ et sa dérivée. Nous voyons que partout où la dérivée est négative, la fonction est décroissante tandis que, inversement, partout où la dérivée est positive, la fonction est croissante.

Les extrémums de la fonction f sont donc placés là où f' change de signe. En effet si $f'(x) < 0$ pour $x < a$ et $f'(x) > 0$ pour $x > a$, la fonction est décroissante jusqu'à a et est ensuite croissante. Cela signifie que la fonction connait un creux en a. Le point a est donc un minimum de la fonction.

Attention cependant. Le fait que $f'(a) = 0$ ne signifie pas automatiquement que f a un maximum ou un minimum en a. Nous avons par exemple tracé sur la figure 17.3 les fonctions x^3 et sa dérivée. Il est à noter que, conformément à ce que l'on pense, certes la dérivée s'annule en $x = 0$, mais elle ne change pas de signe.

[36] Définition 17.63.

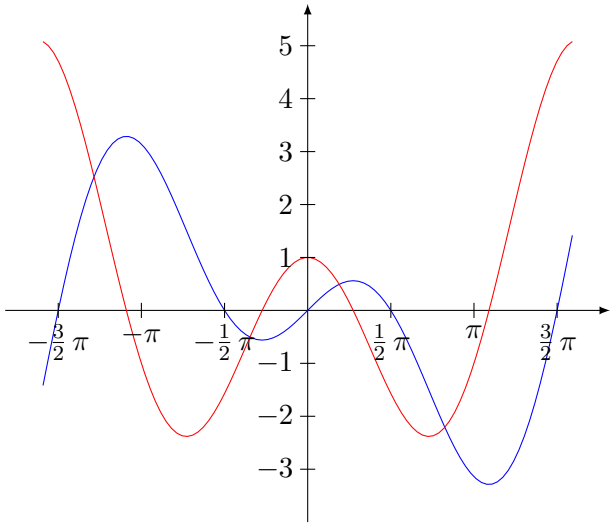


FIGURE 17.2 : La fonction $f(x) = x\cos(x)$ en bleu et sa dérivée en rouge. LabelFigWIRAooTCcpOV

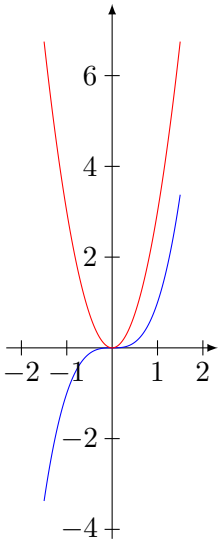


FIGURE 17.3 : La dérivée de x^3 s'annule en $x = 0$, mais ce n'est ni un minimum ni un maximum. LabelFigVBOHoHHKOH

17.11.2 Extrema libre

DEFooYJLZooLkEAYf

Définition 17.68.
*Un point a à l'intérieur du domaine d'une fonction $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un **point critique** de f lorsque $df(a) = 0$.*

Ces points sont analogues aux points où la dérivée d'une fonction sur $\mathbb{R}$ s'annule. Les points critiques de f sont donc les candidats à être des points d'extrémum.

Dans le cas d'une fonction de deux variables, la proposition 12.375 nous permet de voir $(d^2f)_a$ comme étant la matrice

$$d^2f(a) = \begin{pmatrix} \frac{d^2f}{dx^2}(a) & \frac{d^2f}{dx\,dy}(a) \\ \frac{d^2f}{dy\,dx}(a) & \frac{d^2f}{dy^2}(a) \end{pmatrix}. \tag{17.275}$$

Dans le cas d'une fonction C^2, cette matrice est symétrique.

PropUQRooPgJsuz

Proposition 17.69 ([578])**.**
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. Soit une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable en a. Si a est un extrémum local de f, alors a est un point critique de f.

Démonstration. Nous supposons que a est un maximum local (ce sera la même chose si a est un minimum). Soit $r > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in B(a, r)$ (et tel que cette boule reste dans Ω). Soit $u \in \mathbb{R}^n$

assez petit pour que $a \pm u \in B(a,r)$ de sorte que la définition suivante ait un sens :

$$\begin{aligned} g\colon [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a+tu) \end{aligned} \tag{17.276}$$

Cette fonction est différentiable en $t=0$ (composée de fonctions différentiables, théorème 10.316) et a un maximum local en $t=0$. Donc $g'(0)=0$ par la proposition 17.65. Donc

$$0 = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0} = df_a(u). \tag{17.277}$$

□

17.11.3 Extremums et hessienne

PropoExtreRn

Proposition 17.70 ([1, 579, 580]).
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable ainsi que $a \in \Omega$.

ITEMooCBMYooQQMqQL

(1) Si a est un point critique de f et si il existe r tel que $(d^2 f_x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in B(a,r)$ alors f possède un minimum local en a.

ITEMooCVFVooWltGqI

(2) Si a est un point critique[37] de f, et si $d^2 f_a$ est strictement définie positive[38], alors a est un minimum local strict de f,

ItemPropoExtreRn

(3) Si a est un minimum local, alors $(d^2 f)_a$ est semi-définie positive.

Démonstration. Nous subdivisons la preuve.

(1) **(1)**

Soit h tel que $a+h \in B(a,r)$. Nous allons montrer que $f(a) \leqslant f(a+h)$; cela montrera que $x=a$ est un minimum local. Pour cela nous utilisons un développement de Taylor[39] : il existe $c \in]a, a+h[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2 f)_c(h,h) \geqslant f(a) \tag{17.278}$$

parce que, par hypothèse, $(d^2 f)_c$ est définie positive, et parce que $df_a = 0$.

(2) **(2)**

La forme bilinéaire $d^2 f_a$ est strictement définie positive, donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$d^2 f_a(h,h) > \alpha \|h\|^2 \tag{17.279}$$

pour tout h. Nous utilisons encore Taylor : il existe une fonction ϵ telle que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ et

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2 f)_a(h,h) + \|h\|^2 \epsilon(h). \tag{17.280}$$

En tenant compte du fait que $df_a = 0$,

$$f(a+h) > f(a) + \|h\|^2 \big(\frac{1}{2}\alpha + \epsilon(h)\big). \tag{17.281}$$

La limite de ϵ nous dit qu'il existe $r > 0$ tel que $\|\epsilon(h)\| < \frac{1}{2}\alpha$ pour tout $h \in B(0,r)$. Pour ces valeurs de h nous avons

$$f(a+h) > f(a). \tag{17.282}$$

Donc a est un minimum local strict de f.

[37] Définition 17.68.
[38] La fonction f est de classe C^2, donc les dérivées croisées sont égales et $d^2 f$ est symétrique. La définition 8.228 s'applique donc.
[39] Proposition 12.481.

(3) **(3)** Si a est un minimum local, nous savons déjà $df_a = 0$ par la proposition 17.69. Nous écrivons le développement de Taylor de f à l'ordre 2 de la proposition 12.478 :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h\|^2\alpha(\|h\|). \tag{17.283}$$

En prenant h assez petit pour que $a+h$ ne sorte pas de la boule dans laquelle a est un minimum, nous avons $f(a+h) - f(a) > 0$. Donc

$$\frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h\|^2\alpha(\|h\|) > 0 \tag{17.284}$$

Nous divisons cela par $\|h\|^2$ et notons $e_h = h/\|h\|$:

$$\frac{1}{2}(d^2f)_a(e_h,e_h) + \alpha(\|h\|) > 0. \tag{17.285}$$

À la limite $h \to 0$, le premier terme est constant tandis que le deuxième tend vers zéro. À la limite,

$$(d^2f)_a(e_h,e_h) \geqslant 0. \tag{17.286}$$

La caractérisation du lemme 8.232(2) nous dit alors que $(d^2f)_a$ est semi-définie positive.

□

La partie (3) est tout à fait comparable au fait bien connu que, pour une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si le point a est minimum local, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$.

Notons que le point (3) ne parle pas de minimum strict, et donc pas de matrice *strictement* définie positive.

Exemple 17.71 (Proposition 17.70(2) sans point critique)**.**
L'hypothèse de point critique pour l'utilisation de la stricte définition positive de d^2f_a est nécessaire. Soit en effet la fonction

$$f(x) = x^2 + x. \tag{17.287}$$

Elle vérifie $f''(0) = 2$, de telle sorte que sa différentielle seconde en zéro soit strictement définie positive. Le point $x = 0$ n'est cependant même pas un minimum local. Entre autres parce que $f'(0) = 1 \neq 0$. △

La méthode pour chercher les extrémums de f est donc de suivre les points suivants :

(1) Trouver les candidats extrémums en résolvant $\nabla f = (0,0)$,

(2) écrire $d^2f(a)$ pour chacun des candidats

(3) calculer les valeurs propres de $d^2f(a)$, déterminer si la matrice est définie positive ou négative,

(4) conclure.

Une conséquence de la proposition 8.231(3)[40] est que si $\det M < 0$, alors le point a n'est pas un extrémum dans le cas où $M = d^2f(a)$ par le point (3) de la proposition 17.70.

Exemple 17.72.
Soit la fonction $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. C'est une fonction différentiable sans problème. D'abord sa différentielle est

$$df = \big(4x^3 - 4y; 4y^3 - 4x\big), \tag{17.288}$$

et la matrice des dérivées secondes est

$$M = d^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}. \tag{17.289}$$

Nous avons $df = 0$ pour les trois points $(0,0)$, $(1,1)$ et $(1,-1)$.

Pour le point $(0,0)$ nous avons

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17.290}$$

dont les valeurs propres sont 4 et -4. Elle n'est donc ni définie ni semi-définie positive ou négative. La proposition 17.70(2) conclut donc $(0,0)$ n'est pas un extrémum local.

[40] La matrice $d^2f(a)$ est toujours symétrique quand f est de classe C^2.

Au contraire pour les points $(1,1)$ et $(-1,-1)$ nous avons

$$M = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \tag{17.291}$$

dont les valeurs propres sont 16 et 8. La matrice d^2f y est donc définie positive. Ces deux points sont donc extrémums locaux. △

17.11.4 Un peu de recettes de cuisine

(1) Rechercher les points critiques, càd les (x,y) tels que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

En effet, si (x_0,y_0) est un extrémum local de f, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

(2) Déterminer la nature des points critiques : « test » des dérivées secondes :

$$\text{On pose } H(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2$$

(2a) Si $H(x_0,y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0 \implies (x_0,y_0)$ est un minimum local de f.

(2b) Si $H(x_0,y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0 \implies (x_0,y_0)$ est un maximum local de f.

(2c) Si $H(x_0,y_0) < 0 \implies f$ a un point de selle en (x_0,y_0).

(2d) Si $H(x_0,y_0) = 0 \implies$, on ne peut rien conclure.

17.11.5 Extrema liés

Soit f, une fonction sur $\mathbb{R}^n$, et $M \subset \mathbb{R}^n$ une variété de dimension m. Nous voulons savoir quelles sont les plus grandes et plus petites valeurs atteintes par f sur M.

Pour ce faire, nous avons un théorème qui permet de trouver des extrémums *locaux* de f sur la variété. Pour rappel, $a \in M$ est une **extrémum local de f relativement** à l'ensemble M si il existe une boule $B(a,\epsilon)$ telle que $f(a) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in B(a,\epsilon) \cap M$.

ThoRGJosS

Théorème 17.73 (Extremum lié [559]).
Soit A, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et

(1) une fonction (celle à minimiser) $f \in C^1(A,\mathbb{R})$,

(2) des fonctions (les contraintes) $G_1,\dots,G_r \in C^1(A,\mathbb{R})$,

(3) $M = \{x \in A \text{ tel que } G_i(x) = 0\, \forall i\}$,

(4) un extrémum local $a \in M$ de f relativement à M.

Supposons que les gradients $\nabla G_1(a)$, …,$\nabla G_r(a)$ soient linéairement indépendants. Alors $a = (x_1,\dots,x_n)$ est une solution de $\nabla L(a) = 0$ où

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_r) = f(x_1,\dots,x_n) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i G_i(x_1,\dots,x_n). \tag{17.292}$$

Autrement dit, si a est un extrémum lié, alors $\nabla f(a)$ est une combinaisons des $\nabla G_i(a)$, ou encore il existe des λ_i tels que

$$df(a) = \sum_i \lambda_i dG_i(a). \tag{17.293}$$ EqRDsSXyZ

La fonction L est le **lagrangien** du problème et les variables λ_i sont les **multiplicateurs de Lagrange**.

Démonstration. Si $r = n$ alors les vecteurs linéairement indépendantes $\nabla G_i(a)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ et donc évidemment les λ_i existent. Nous supposons donc maintenant que $r < n$. Nous notons $(z_i)_{i=1\dots n}$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$.

La matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial z_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_r}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial z_n}(a) \end{pmatrix} \tag{17.294}$$

est de rang r parce que les lignes sont par hypothèses linéairement indépendantes. Nous nommons $(y_i)_{i=1,\dots,r}$ un choix de r parmi les (z_i) tels que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial y_r} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{17.295}$$

Nous identifions $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ dans lequel $\mathbb{R}^r$ est la partie générée par les $(y_i)_{i=1,\dots,r}$. Les coordonnées sur $\mathbb{R}^s$ seront nommées $(x_j)_{j=1,\dots,s}$, de telle sorte que les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ seront $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r$. Dans ces coordonnées, nous nommons $a = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^s$ et $\beta \in \mathbb{R}^r$.

Si nous notons $G = (G_1, \dots, G_r)$, le théorème de la fonction implicite (théorème 17.48) nous dit qu'il existe un voisinage U' de $\alpha \in \mathbb{R}^n$, un voisinage V' de $\beta \in \mathbb{R}^r$ et une fonction $\varphi\colon U' \to V'$ de classe C^1 telle que si $(x, y) \in U' \times V'$, alors

$$G(x, y) = 0 \tag{17.296}$$

si et seulement si $y = \varphi(x)$. Nous posons maintenant

$$\psi(x) = (x, \varphi(x)) \tag{17.297a}$$
$$h(x) = f\big(\psi(x)\big). \tag{17.297b}$$

Nous avons $\psi(\alpha) = a$ et $\psi(x) \in M$ pour tout $x \in U'$. La fonction h a donc un extrémum local en α et donc les dérivées partielles de h y sont nulles. Cela signifie que

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \tag{17.298}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_k}(a)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\alpha) = 0 \tag{17.299}$$

pour tout $i = 1, \dots, s$. D'autre part pour tout k, la fonction $l_k(x) = G_k\big(x, \varphi(x)\big)$ est constante et vaut zéro ; ses dérivées partielles sont donc nulles :

$$\frac{\partial l}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial G_k}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial G_k}{\partial y_k}(a)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\alpha) = 0 \tag{17.300}$$

pour tout $i = 1, \dots, s$ et $k = 1, \dots, r$.

Les s premières colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r} \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_s} & \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial x_s} & \frac{\partial G_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial y_r} \end{pmatrix} \tag{17.301}$$

s'expriment en termes des r dernières. La matrice est donc au maximum de rang r. Notons que la première ligne est ∇f et les r suivantes sont les ∇G_i. Vu que ces lignes sont des vecteurs liés, il existe $\mu_0, \dots, \mu_r$ tels que

$$\mu_0 \nabla f + \sum_{i=1}^{r} \mu_i \nabla G_i = 0. \tag{17.302}$$

Par hypothèse les ∇G_i sont linéairement indépendants, ce qui nous dit que $\mu_0 \neq 0$. Donc nous avons ce qu'il nous faut :

$$\nabla f(a) = \sum_i \frac{\mu_i}{\mu_0} \nabla G_i(a). \tag{17.303}$$

Notons qu'au vu de l'expression (17.293), le fait que les formes $\{dG_i(a)\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ forment une partie libre dans $(\mathbb{R}^n)^*$ implique que les λ_i sont uniques. □

La proposition suivante est la même que 17.73.

PropfPPUxh

Proposition 17.74.
Soit U, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et des fonctions de classe C^1 $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$. Nous considérons

$$\Gamma = \{x \in U \text{ tel que } g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}. \tag{17.304}$$

Soit a un extrémum de $f|_\Gamma$. Supposons que les formes $dg_1, \dots, dg_r$ soient linéairement indépendantes en a. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$df_a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (dg_i)_a. \tag{17.305}$$

En pratique les candidats extrémums locaux sont tous les points où les gradients ne sont pas linéairement indépendants, plus tous les points donnés par l'équation $\nabla L = 0$. Parmi ces candidats, il faut trouver lesquels sont maximums ou minima, locaux ou globaux.

L'existence d'extrémums locaux se prouve généralement en invoquant de la compacité, et en invoquant le lemme suivant qui permet de réduire le problème à un compact.

LemmeMinSCimpliqueS

Lemme 17.75.
Soit S, une partie de $\mathbb{R}^n$ et C, un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $a \in \operatorname{Int} S$ est un minimum local relatif à $S \cap C$, alors il est un minimum local par rapport à S.

Démonstration. Vu que a est un minimum local relatif à $S \cap C$, il existe un $\epsilon_1 > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, \epsilon_1) \cap S \cap C$, nous avons $f(x) \geqslant f(a)$.

Mais étant donné que C est ouvert, et que $a \in C$, il existe un ϵ_2 tel que $B(a, \epsilon_2) \subset C$. En prenant $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, nous trouvons que $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in B(a, \epsilon) \cap (S \cap C) = B(a, \epsilon) \cap S$. □

17.12 Fonctions convexes

SECooVZWWWQXJRXQi

Définition 17.76 ([581]).
*Une fonction f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite **convexe** lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I et tout λ dans $[0, 1]$ nous avons*

EQooYNAPooFePQZy

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{17.306}$$

Si pour tout $\lambda \in]0, 1[$ et pour tout $x \neq y$ dans I nous avons

EQooEGBSooCevoPR

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\big) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{17.307}$$

*alors nous disons que la fonction f est **strictement convexe** sur I.*

*Une fonction est **concave** si son opposée est convexe.*

17.77 ([581]).
Les différents résultats pour les fonctions convexes s'adaptent généralement sans mal aux fonctions strictement convexes. Une nuance cependant : de même que les fonctions dérivables convexes sont celles qui ont une dérivée croissante, les fonctions dérivables strictement convexes sont celles qui ont une dérivée strictement croissante (proposition 17.83). En revanche, il ne faudrait pas croire que la dérivée seconde d'une fonction dérivable strictement convexe est nécessairement une fonction à valeurs strictement positives (voir théorème 17.84) : la dérivée d'une fonction strictement croissante peut s'annuler occasionnellement, ou plus exactement peut s'annuler sur un ensemble de points d'intérieur vide. Penser à $x \mapsto x^4$ pour un exemple de fonction strictement convexe dont la dérivée seconde s'annule.

17.78.
Demander un $\lambda \in [0, 1]$ est équivalent à demande des $\alpha, \beta \geqslant 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. En effet, si $\alpha + \beta = 1$, alors il suffit de se dire que α est le λ et que $\beta = 1 - \alpha$.

LEMooXUDSooBUMnaZ

Lemme 17.79.
soit une fonction strictement convexe f. Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Nous avons

EQooDKKUooSHLfwy

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \tag{17.308}$$

si et seulement si $u = v$.

Démonstration. Tant que $u \neq v$, la définition (17.307) est une inégalité stricte. Donc si (17.308) est valide, alors $u = v$.

Dans le sens inverse, si $u = v$, alors $\alpha u + \beta v = u$, et $\alpha f(u) + \beta f(v) = f(u)$. □

17.12.1 Inégalité des pentes

Dans l'étude des fonctions convexes nous allons souvent utiliser la fonction **taux d'accroissement** qui est, pour α dans le domaine de convexité de f définie par

$$\begin{aligned}\tau_\alpha\colon I\setminus\{\alpha\}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}.\end{aligned}\tag{17.309}$$

EqRYBazWd

PropMDMGjGO

Proposition 17.80 (Inégalité des pentes[582])**.**
Soit f une fonction convexe sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$. Alors pour tout $a<b<c$ dans I nous avons[41]

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\leqslant\frac{f(c)-f(b)}{c-b}.\tag{17.310}$$

En d'autres termes,

$$\tau_a(b)\leqslant\tau_a(c)\leqslant\tau_b(c),\tag{17.311}$$

c'est-à-dire que τ est croissante en ses deux arguments.

Démonstration. D'abord les inégalités $a<b<c$ impliquent $0<b-a<c-a$ et donc

$$\lambda=\frac{b-a}{c-a}<1.\tag{17.312}$$

L'astuce est de remarquer que $(1-\lambda)a+\lambda c=b$. Donc λ a toutes les bonnes propriétés pour être utilisé dans la définition de la convexité :

$$f\big((1-\lambda)a+\lambda c\big)\leqslant\lambda f(c)+(1-\lambda)f(a),\tag{17.313}$$

c'est-à-dire

$$f(b)-f(a)\leqslant\lambda\big(f(c)-f(a)\big)\tag{17.314}$$

ou encore, en remplaçant λ par sa valeur :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.\tag{17.315}$$

Cela fait déjà une des inégalités à savoir.

D'autre part en partant de $-a>-b<c$ nous posons

$$0<\lambda=\frac{c-b}{c-a}.\tag{17.316}$$

Nous avons à nouveau $b=(1-\lambda)c+\lambda a$ et nous pouvons obtenir la seconde inégalité

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\leqslant\frac{f(c)-f(b)}{c-b}.\tag{17.317}$$

□

Géométriquement, l'inégalité des pentes se comprend facilement : le coefficient angulaire de la corde du graphe augmente. Donc si $x<y<z$, le coefficient moyen entre x et y est plus petit que celui entre x et z qui est plus petit que celui entre y et z.

Donc si le coefficient angulaire moyen entre a et $b+u$ vaut celui entre a et b, ce coefficient ne peut qu'être constant entra a et b : sinon il serait plus grand entre b et $b+u$ et la moyenne sur $a\to b+u$ serait plus grande que sa moyenne sur $a\to b$. Mais avoir un coefficient angulaire constant signifie être une droite.

En résumé, si une fonction est convexe et non strictement convexe, alors son graphe est une droite. C'est en gros cela que la proposition 17.88 clarifiera.

[41] Les inégalités sont strictes si la fonction f est strictement convexe.

17.12.2 Convexité et régularité

LemKLTsHIQ

Lemme 17.81 ([581]).
Une fonction convexe sur un ouvert de $\mathbb{R}$

(1) y admet des dérivées à gauche et à droite en chaque point,

(2) y est continue.

Démonstration. Si A est l'ouvert sur lequel la fonction f est convexe, pour chaque point x de A, il existe une boule $B(x,r) \subset A$. Pour $0 < r' < r$ nous avons aussi $\overline{B(0,r')} \subset A$. Bref, nous pouvons supposer que f est définie et convexe sur un intervalle $I = [a,b]$.

Soit $\alpha \in I$. Nous allons prouver que f est continue en α. Nous considérons τ_α le taux d'accroissement défini par (17.309) ; c'est une fonction croissante comme précisé dans l'inégalité des trois pentes 17.80 et de plus $\tau_\alpha(x)$ est bornée supérieurement par $\tau_\alpha(b)$ pour $x < \alpha$ et inférieurement par $\tau_\alpha(a)$ pour $x > \alpha$. Les limites existent donc et sont finies par la proposition 12.58. Autrement dit les limites

$$\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha^+} \tau_\alpha(x) = \inf_{t>\alpha} \tau_\alpha(t) \tag{17.318a}$$

$$\lim_{x\to\alpha^-} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha^-} \tau_\alpha(x) = \sup_{t<\alpha} \tau_\alpha(t). \tag{17.318b}$$

existent et sont finies, c'est-à-dire que la fonction f admet une dérivée à gauche et à droite.

Pour tout x nous avons les inégalités

$$\tau_\alpha(a) \leqslant \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leqslant \tau_\alpha(b). \tag{17.319}$$

En posant $k = \max\{\tau_\alpha(a), \tau_\alpha(b)\}$ nous avons

$$\big|f(x)-f(\alpha)\big| \leqslant k|x-\alpha|. \tag{17.320}$$

La fonction est donc lipschitzienne et par conséquent continue par la proposition 12.344. □

Remarque 17.82.
Les dérivées à gauche et à droite ne sont à priori pas égales. Penser par exemple à une fonction affine par morceaux dont les pentes augmentent à chaque morceau.

17.12.3 Dérivées d'une fonction convexe

PropYKwTDPX

Proposition 17.83 ([583, 584, 1]).
Une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

ITEMooUTSAooJvhZNm

(1) est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I.

ITEMooLLSIooFwkxtV

(2) est strictement convexe si et seulement si sa dérivée est strictement croissante sur I

Démonstration. Pour la preuve de (1) et (2), nous allons démontrer les énoncés « non stricts » et indiquer ce qu'il faut changer pour obtenir les énoncés « stricts ».

(1) **Sens direct** Nous supposons que f est convexe. Soient $a < b$ dans I et $x \in]a,b[$. D'après l'inégalité des pentes 17.80,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x}. \tag{17.321}$$

EqATDLooIcqdDI

En faisant la limite $x \to a$ nous avons

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{17.322}$$

et la limite $x \to b$ donne

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b). \tag{17.323}$$

Ici les inégalités sont à priori non-strictes, même si f est strictement convexe : même avec des inégalités strictes dans (17.321), le passage à la limite rend l'inégalité non stricte. Quoi qu'il en soit nous avons

$$f'(a) \leqslant f'(b). \tag{17.324}$$

EqQGVMooBpuyNr

(2) **Sens direct : strict** Nous savons déjà que f' est croissante. Si (17.324) était une égalité, alors f' serait constante sur $]a,b[$ parce qu'en prenant c entre a et b nous aurions $f'(a) \leqslant f'(c) \leqslant f'(b)$ avec $f'(a) = f'(b)$. Donc $f'(a) = f'(c)$. Avoir f' constante sur un intervalle est contraire à la stricte convexité.

(3) **Sens réciproque**

Nous supposons que f' est croissante et nous considérons $a < b$ dans I ainsi que $\lambda \in [0,1]$. Nous posons $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, et nous savons que $a \leqslant x \leqslant b$. Le théorème des accroissements finis 12.216 donne $c_1 \in]a,x[$ et $c_2 \in]x,b[$ tels que

$$f'(c_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{17.325}$$

et

$$f'(c_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{17.326}$$

Et en plus $c_1 < c_2$. Vu que f' est croissante nous avons $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$ et donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{17.327}$$

EqSAOCooWAwClO

En remplaçant x par sa valeur en termes de λ, a et b nous avons $x-a = (1-\lambda)(b-a)$ et $b-x = \lambda(b-a)$, et l'inégalité (17.327) nous donne

$$f(x) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \tag{17.328}$$

(4) **Sens réciproque : strict** Si f' est strictement croissante, nous avons $f'(c_1) < f'(c_2)$ et les inégalité suivantes sont strictes, ce qui donne

$$f(x) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \tag{17.329}$$

□

ThoGXjKeYb

Théorème 17.84 ([583]).
Soit une fonction f de classe C^2.

ITEMooIUTQooTkRMoyBP

(1) Est convexe si et seulement si f'' est positive.

ITEMooXUOMooYIoOtv

(2) Si f'' est strictement positive, elle est strictement convexe.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** La fonction est C^2, donc f'' est positive si et seulement si f' est croissante (proposition 12.209) alors que la proposition 17.83 nous jure que f sera convexe si et seulement si f' est croissante.

(2) **Pour (2)** Si f'' est strictement positive, f' sera strictement croissante et donc f strictement convexe (proposition 17.83).

□

REMooVRPQooIybxmp

Remarque 17.85.
Une fonction peut être strictement convexe sans que sa dérivée seconde ne soit toujours strictement positive. En exemple : $x \mapsto x^4$ est strictement convexe alors que sa dérivée seconde s'annule en zéro.

ExPDRooZCtkOz

Exemple 17.86.
Quelques exemples utilisant le théorème 17.84

(1) La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe parce que sa dérivée seconde est la constante (positive) 2.

(2) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (sa dérivée seconde est $2x^{-3}$).

ITEMooRXSBooDBerbx

(3) La fonction exponentielle est strictement convexe par le théorème 17.84.

(4) La fonction ln est concave parce que la dérivée seconde de $-\ln$ est $\frac{1}{x^2}$ qui est strictement positif.

△

Nous en démontrons une en détail ; elle sera utile en analyse fonctionnelle, lors de l'étude des espaces L^p. Voir par exemple le théorème de la projection 27.155.

LEMooSXTXooZOmtKq

Lemme 17.87.
Soient $p > 1$ et la fonction

$$\begin{aligned} f\colon]0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^p \end{aligned} \tag{17.330}$$

est strictement convexe.

Démonstration. La proposition 14.295 nous permet de dire que la fonction f est de classe C^∞ et que la dérivée seconde est donnée par

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2}. \tag{17.331}$$

Cela est strictement positif pour tous les x considérés, le théorème 17.84 conclut. □

17.12.4 Graphe d'une fonction convexe

L'idée principale du graphe d'une fonction convexe est qu'il est toujours au dessus du graphe de ses tangentes (lorsqu'elles existent). Lorsqu'elles n'existent pas, le lemme 17.81 donne des coefficients directeurs de droites qui vont rester en dessous du graphe de la fonction.

PROPooOCOEooEGybmS

Proposition 17.88 ([585]).
Une fonction convexe est strictement convexe si et seulement si il n'existe aucun intervalle de longueur non nulle sur lequel elle coïncide avec une fonction affine.

Démonstration. Si sur l'intervalle (non réduit à un point) $[x,y]$, la fonction convexe f coïncide avec une fonction affine, alors $f(t) = at + b$ et pour $\lambda \in]0,1[$ nous avons

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = a\lambda x + a(1-\lambda)y + b = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{17.332}$$

où nous avons remplacé b par $\lambda b + (1-\lambda)b$. Par conséquent la fonction n'est pas strictement convexe.

Nous supposons maintenant que la fonction convexe f n'est pas strictement convexe sur l'intervalle I. Il existe $x \neq y \in I$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{17.333}$$

Nous posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ et $u \in]x,z[$ pour écrire des inégalités des pentes entre $x < u < z < y$. Plus précisément si nous notons $a \to b$ la pente de a à b, c'est-à-dire $a \to b = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, alors les inégalités des pentes pour $x < u < z$ puis $u < z < y$ donnent

EqooBMEFooMpoEzd

$$x \to z \leqslant u \to z \leqslant z \to y. \tag{17.334}$$

Voyons maintenant qu'en réalité $z \to y = x \to z$. En effet en replaçant

$$f(y) = \frac{f(z) - \lambda f(x)}{1-\lambda} \tag{17.335}$$

et

$$y = \frac{\lambda x}{1-\lambda} \tag{17.336}$$

dans l'expression $z \to y = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ nous obtenons

$$z \to y = \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = x \to z. \tag{17.337}$$

Les inégalités (17.334) sont donc des égalités :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{f(z)-f(u)}{z-u} = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}. \tag{17.338}$$

Nous avons donc montré que le nombre $a = \frac{f(z)-f(u)}{z-u}$ ne dépend pas de u. Nous avons alors

$$f(z) - f(u) = a(z-u) \tag{17.339}$$

ou encore :

$$f(u) = f(z) - a(z-u), \tag{17.340}$$

ce qui signifie que sur $]x,z[$, la fonction f est affine. □

PROPooQPOSooDZlUAJ

Proposition 17.89.
Une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son graphe est au dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct** Soient $x, y \in I$. Nous voulons :

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y - x). \tag{17.341}$$

Étant donné que nous aurons besoin, dans le quotient différentiel de quelque chose comme $f(x+t)-f(x)$ nous écrivons la définition (17.306) de la convexité en inversant les rôles de x et y et en manipulant un peu :

$$f\big(ty + (1-t)x\big) \leqslant tf(y) + (1-t)f(x) \tag{17.342a}$$
$$f\big(x + t(y-x)\big) \leqslant tf(y) + (1-t)f(x) \tag{17.342b}$$
$$f\big(x + t(y-x)\big) - f(x) \leqslant tf(y) - tf(x) \tag{17.342c}$$

Nous divisons par t :

$$\frac{f\big(x + t(y-x)\big) - f(x)}{t} \leqslant f(y) - f(x). \tag{17.343}$$

Le passage à la limite $t \to 0$ donne

$$(y-x)f'(x) \leqslant f(y) - f(x), \tag{17.344}$$

ce qu'il fallait.

(2) **Sens inverse** Pour tout $x, y \in I$ nous supposons avoir

EQooEXXIooHXJnER

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y - x). \tag{17.345}$$

Si nous supposons $x \neq y$ et si nous posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ nous voulons prouver que

$$f(z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{17.346}$$

Pour cela nous écrivons l'inégalité (17.345) avec les couples (x, z) et (y, z) :

$$f(x) \geqslant f(z) + f'(z)'(x - z) \tag{17.347a}$$
$$f(y) \geqslant f(z) + f'(z)'(y - z) \tag{17.347b}$$

En multipliant la première par λ et la seconde par $(1-\lambda)$ et en sommant,

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geqslant \lambda f(z) + \lambda f'(z)(x-z) + (1-\lambda)f(z) + (1-\lambda)f'(z)(y-z) \tag{17.348a}$$
$$= f(z) + f'(z)\big(\lambda(x-z) + (1-\lambda)(y-z)\big) \tag{17.348b}$$
$$= f(z). \tag{17.348c}$$

□

PropNIBooSbXIKO

Proposition 17.90 ([1])**.**
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a \in \mathbb{R}$. Il existe une constante $c_a \in \mathbb{R}$ telle que pour tout x nous ayons

EqSKIooSeAekM

$$f(x) - f(a) \geqslant c_a(x - a). \tag{17.349}$$

Autrement dit, le graphe de la fonction f est toujours au dessus de la droite d'équation

$$y = f(a) + c_a(x - a). \tag{17.350}$$

Démonstration. Les dérivées à gauche et à droite de f données par le lemme 17.81 sont les candidats tout désignés pour être coefficient directeur de la droite que l'on cherche. Nous allons prouver qu'en posant

$$c_a = \inf_{t>a} \tau_a(t), \tag{17.351}$$

la droite $y = f(a) + c_a(x-a)$ répond à la question[42].

Nous devons prouver que le nombre $\Delta_x = f(x) - \big(f(a) + c_a(x-a)\big)$ est positif pour tout x.

[42] En prenant l'autre, $c'_a = \sup_{t<a} \tau_a(t)$, ça fonctionne aussi. En pensant à une fonction affine par morceaux, on remarque qu'en choisissant un nombre entre les deux, nous avons plus facilement une inégalité stricte dans (17.349).

(1) **Si** $x > a$

Nous divisons par $x-a$ et nous devons prouver que $\frac{\Delta_x}{x-a}$ est positif :

$$\frac{\Delta_x}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c_a \tag{17.352a}$$
$$= \tau_a(x) - \inf_{t>a} \tau_a(t) \tag{17.352b}$$
$$\geqslant 0 \tag{17.352c}$$

parce que $t \to \tau_a(t)$ est croissante et que $x > a$.

(2) **Si** $x < a$

Nous divisons par $x-a$ et nous devons prouver que $\frac{\Delta_x}{x-a}$ est négatif :

$$\frac{\Delta_x}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c_a \tag{17.353a}$$
$$= \tau_a(x) - \inf_{t>a} \tau_a(t) \tag{17.353b}$$
$$\leqslant 0 \tag{17.353c}$$

parce que $t \to \tau_a(t)$ est croissante et que $x < a$.

□

PropPEJCgCH

Proposition 17.91 ([1]).
Si g est une fonction convexe, il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n x + b_n). \tag{17.354}$$

Démonstration. Pour $u \in \mathbb{R}$ nous considérons $a(u)$ et $b(u)$ tels que la droite $y(x) = a(u)x + b(u)$ vérifie $y(u) = g(u)$ et $y(x) \leqslant g(x)$ pour tout x. Cela est possible par la proposition 17.90. Il s'agit d'une droite coupant le graphe de g en $x = u$ et restant en dessous. Nous considérons alors (u_n) une suite quelconque dense dans $\mathbb{R}$ (disons les rationnels pour fixer les idées) et nous posons

$$\begin{cases} a_n = a(u_n) & (17.355a)\\ b_n = b(u_n). & (17.355b) \end{cases}$$

Si $q \in \mathbb{Q}$ alors $a_n x + b_n \leqslant g(x)$ pour tout n et $g(q)$ est le supremum qui est atteint pour le n tel que $u_n = q$. Si maintenant x n'est pas dans $\mathbb{Q}$ il faut travailler plus.

Nous prenons $(\tilde{q}_n)$, une sous-suite de (q_n) convergeant vers x et N suffisamment grand pour que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|\tilde{q}_n - x| \leqslant \epsilon$ et $|g(\tilde{q}_n) - g(x)| \leqslant \epsilon$; cela est possible grâce à la continuité de g (lemme 17.81). Ensuite les sous-suites $(\tilde{a}_n)$ et $(\tilde{b}_n)$ sont celles qui correspondent :

$$\tilde{a}_n\tilde{q}_n + \tilde{b}_n = g(\tilde{q}_n). \tag{17.356}$$

Nous considérons la majoration

$$|\tilde{a}_n x + \tilde{b}_n - g(x)| \leqslant |\tilde{a}_n x + \tilde{b}_n - (\tilde{a}_n\tilde{q}_n + \tilde{b}_n)| + \underbrace{|\tilde{a}_n\tilde{q}_n + \tilde{b}_n - g(\tilde{q}_n)|}_{=0} + \underbrace{|g(\tilde{q}_n) - g(x)|}_{\leqslant\epsilon} \tag{17.357a}$$
$$\leqslant |\tilde{a}_n||x - \tilde{q}_n| + \epsilon \tag{17.357b}$$
$$= \epsilon\big(|\tilde{a}_n| + 1\big). \tag{17.357c}$$

Il nous reste à montrer que $|\tilde{a}_n|$ est borné par un nombre ne dépendant pas de n (pour les $n > N$).

Comme la droite de coefficient directeur $\tilde{a}_n$ et passant par le point $\big(\tilde{q}_n, g(\tilde{q}_n)\big)$ reste en dessous du graphe de g, nous avons pour tout n et tout $y \in \mathbb{R}$ l'inégalité

$$g(y) \geqslant \tilde{a}_n(y - \tilde{q}_n) + g(\tilde{q}_n) \in \tilde{a}_n B(y-x,\epsilon) + B\big(g(x),\epsilon\big). \tag{17.358}$$

Si $\tilde{a}_n$ n'est pas borné vers le haut, nous prenons y tel que $B(y-x,\epsilon)$ soit minoré par un nombre k strictement positif et nous obtenons

$$g(y) \geqslant k\tilde{a}_n + l \tag{17.359}$$

avec k et l indépendants de n. Cela donne $g(y) = \infty$. Si au contraire $\tilde{a}_n$ n'est pas borné vers le bas, nous prenons y tel que $B(y-x,\epsilon)$ est majoré par un nombre k strictement négatif. Nous obtenons encore $g(y) = \infty$.

Nous concluons que $|\tilde{a}_n|$ est bornée. □

LemXOUooQsigHs

Lemme 17.92 ([128]).
L'application

$$\begin{aligned}\phi\colon S^{++}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}\\ A &\mapsto \det(A)\end{aligned} \tag{17.360}$$

est ***log-convave****, c'est-à-dire que l'application* $\ln\circ\phi$ *est concave*[43]*. De façon équivalente, si* $A, B \in S^{++}$ *et si* $\alpha+\beta=1$*, alors*

EqSPKooHFZymB
$$\det(\alpha A+\beta B) \geqslant \det(A)^\alpha \det(B)^\beta. \tag{17.361}$$

Ici S^{++} est l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives, définition 8.228.

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **Pseudo-réduction** Le théorème de pseudo-réduction simultanée, corolaire 10.52, appliqué aux matrices A et B nous donne une matrice inversible Q telle que

$$\begin{cases} B = Q^tDQ & \text{(17.362a)}\\ A = Q^tQ & \text{(17.362b)}\end{cases}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}, \tag{17.363}$$

$\lambda_i > 0$. Nous avons alors

$$\det(A)^\alpha \det(B)^\beta = \det(Q)^{2\alpha}\det(Q)^{2\beta}\det(D)^\beta = \det(Q)^2\det(D)^\beta \tag{17.364}$$

(parce que $\alpha+\beta=1$) et

$$\begin{aligned}\det(\alpha A+\beta B) &= \det(\alpha Q^tQ+\beta Q^tDQ) && \text{(17.365a)}\\ &= \det\left(Q^t(\alpha\mathbb{1}+\beta D)Q\right) && \text{(17.365b)}\\ &= \det(Q)^2\det(\alpha\mathbb{1}+\beta D). && \text{(17.365c)}\end{aligned}$$

(2) **Ré-expression** L'inégalité (17.361) qu'il nous faut prouver se réduit donc à

$$\det(\alpha\mathbb{1}+\beta D) \geqslant \det(D)^\beta. \tag{17.366}$$

Vue la forme de D nous avons

$$\det(\alpha\mathbb{1}+\beta D) = \prod_{i=1}^n(\alpha+\beta\lambda_i) \tag{17.367}$$

et

$$\det(D)^\beta = \Big(\prod_{i=1}^n\lambda_i\Big)^\beta. \tag{17.368}$$

Il faut donc prouver que

EqGFLooQElciS
$$\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta\lambda_i) \geqslant \Big(\prod_{i=1}^n\lambda_i\Big)^\beta. \tag{17.369}$$

Cette dernière égalité de produit sera prouvée en passant au logarithme.

(3) **Logarithme** Puisque le logarithme est concave par l'exemple 17.86, nous avons pour chaque i que

$$\ln(\alpha+\beta\lambda_i) \geqslant \alpha\ln(1)+\beta\ln(\lambda_i) = \beta\ln(\lambda_i). \tag{17.370}$$

En sommant cela sur i et en utilisant les propriétés de croissance et de multiplicativité du logarithme nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\ln(\alpha+\beta\lambda_i) &\geqslant \beta\sum_i\ln(\lambda_i) && \text{(17.371a)}\\ \ln\Big(\prod_i(\alpha+\beta\lambda_i)\Big) &\geqslant \ln\Big(\Big(\prod_i\lambda_i\Big)^\beta\Big) && \text{(17.371b)}\\ \prod_i(\alpha+\beta\lambda_i) &\geqslant \Big(\prod_i\lambda_i\Big)^\beta, && \text{(17.371c)}\end{aligned}$$

ce qui est bien (17.369).

[43] La définition 15.95 du logarithme ne fonctionne que pour les réels strictement positifs. C'est le cas du déterminant d'une matrice réelle symétrique strictement définie positive.

□

Rappel de notations : $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$. Voir la remarque 1.543.

LEMooNUDOooVfVPkw

Lemme 17.93 ([1]).
Soit une fonction strictement convexe $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

(1) $f(0,0) = 0$,

(2) $f(tx, ty) = tf(x, y)$ *pour tout t (tant que ça ne déborde pas du domaine)*

(3) $f(1, y) = g(y)$ *pour tout y*

(4) $f(0, y) = f(y, 0)$.

Alors f est convexe.

Démonstration. Nous devons prouver que pour toute paire de points A, B sur le graphe de f, le segment $[A, B]$ est au-dessus du graphe de f. Ledit graphe étant d'ailleurs constitué de droites joignant $(0, 0, 0)$ et les points du graphe de g (situé en $x = 1$).

Nous notons $\mathcal{C}$ le graphe de f.

(1) **Une corde alignée à O** Soient deux points A et B alignés à l'origine O. Un point quelconque de $[A, B]$ (et même de toute la droite) s'écrit

$$\big(tA_x, tA_y, tf(A_x, A_y)\big) = \big(tA_x, tA_y, f(tA_x, tA_y)\big), \tag{17.372}$$

et donc est sur le graphe de f.

(2) **Autre corde** Nous prouvons que $[A, B] \cap \mathcal{C} = \{A, B\}$.

Si A et B sont dans le plan $x = 1$ alors c'est d'accord parce que le graphe de f dans le plan est le même que celui de la fonction strictement convexe g.

Si A et B ne sont pas alignés à O et si ils ne sont pas dans le plan $x = 1$ alors le plan AOB coupe le plan $x = 1$ en une droite.

Nous supposons l'existence d'un point $C \in]A, B[\cap \mathcal{C}$.

Nous considérons la droite (OA) qui est contenue dans ce plan et dans $\mathcal{C}$ (au moins la partie positive) et nous notons A' son intersection avec le plan $x = 1$. Même chose pour B et C qui donnent B' et C'.

Cela nous donne des points A', B' et C' qui sont alignés dans le graphe de f en $x = 1$. Or le graphe de f en $x = 1$ est le graphe de la fonction g qui est strictement convexe et qui ne contient donc pas de points alignés.

Nous en concluons que si $A, B \in \mathcal{C}$ alors $]A, B[$ est soit complètement strictement au-dessus de $\mathcal{C}$ soit complètement strictement en-dessous de $\mathcal{C}$.

Nous prouvons à présent que toutes les cordes sont au-dessus de $\mathcal{C}$. Pour cela, soient $A, B \in]0, \infty[\times]0, \infty[$, deux points non alignés à $O = (0, 0)$. Nous considérons les points A', B' qui sont les intersections entre les droites (AO) et (BO) et la droite $x = 1$ ainsi que le chemin σ qui parcourt le segment $[A, A']$ et le chemin γ qui parcourt le segment $[B, B']$:

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= A, \quad & \gamma(0) &= B, \\ \sigma(1) &= A', \quad & \gamma(1) &= B'. \end{aligned} \tag{17.373}$$

Pour tout u, la seule droite passant par O et par $\sigma(u)$ passe également par A, et pas par B. En conséquence de quoi, pour tout $u_1, u_2 \in [0, 1]$, la droite $\big(\sigma(u_1)\gamma(u_2)\big)$ ne passe pas par $(0, 0)$.

Nous considérons à présent non seulement la corde joignant $\big(A, f(A)\big)$ à $\big(B, f(B)\big)$ et la corde joignant $\big(A', f(A')\big)$ à $\big(B', f(B')\big)$ mais également toutes les cordes intermédiaires (si vous aimez les grands mots, vous pouvez parler d'homotopie) :

$$c(u, t) = t\Big(\sigma(u), f\big(\sigma(u)\big)\Big) + (1 - t)\Big(\gamma(u), f\big(\gamma(u)\big)\Big) \tag{17.374}$$

Pour chaque $u \in [0, 1]$, cela représente une corde entre deux points non alignés à $(0, 0, 0)$ et donc une corde qui est soit strictement au-dessus de $\mathcal{C}$ soit strictement en-dessous (à par les points correspondant à $t = 0$ et $t = 1$ qui, eux, sont sur $\mathcal{C}$).

Soit $t_0 \in]0, 1[$. La courbe $c(u, t_0)$ avec $u \in [0, 1]$ ne touche jamais $\mathcal{C}$. Or le point $c(1, t_0)$ est au-dessus de $\mathcal{C}$, donc le point $c(0, t_0)$ est également au-dessus de $\mathcal{C}$.

Nous en concluons que toutes les cordes entre $(A, f(A))$ et $(B, f(B))$ est située au-dessus de $\mathcal{C}$ et non en-dessous de $\mathcal{C}$. □

17.12.5 Convexité et hessienne

DEFooKCFPooLwKAsS

Définition 17.94.
Soit une partie convexe U de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}$.

*(1) La fonction f est **convexe** si pour tout $x, y \in U$ avec $x \neq y$ et pour tout $\theta \in]0,1[$ nous avons*

$$f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) \leqslant \theta f(x) + (1-\theta)f(y). \tag{17.375}$$

*(2) Elle est **strictement convexe** si nous avons l'inégalité stricte.*

PROPooYNNHooSHLvHp

Proposition 17.95 ([580]).
Soit Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et U convexe dans Ω, et une fonction différentiable $f\colon U \to \mathbb{R}$.

ITEMooRVIVooIayuPS

(1) La fonction f est convexe sur U si et seulement si pour tout $x, y \in U$,

$$f(y) \geqslant f(x) + df_x(y-x). \tag{17.376}$$

ITEMooCWEWooFtNnKl

(2) La fonction f est strictement convexe sur U si et seulement si pour tout $x, y \in U$ avec $x \neq y$,

$$f(y) > f(x) + df_x(y-x). \tag{17.377}$$

Démonstration. Nous avons quatre petites choses à démontrer.

(1) **(1) sens direct** Soit une fonction convexe f. Nous avons :

$$f\big((1-\theta)x + \theta y\big) \leqslant (1-\theta)f(x) + \theta f(y), \tag{17.378}$$

donc

$$f\big(x + \theta(y-x)\big) - f(x) \leqslant \theta\big(f(y) - f(x)\big) \tag{17.379}$$

Puisque $\theta > 0$ nous pouvons diviser par θ sans changer le sens de l'inégalité :

$$\frac{f\big(x + \theta(y-x)\big) - f(x)}{\theta} \leqslant f(y) - f(x). \tag{17.380}$$

EQooAXXFooHWtiJh

Nous prenons la limite $\theta \to 0^+$. Cette limite est égale à a limite simple $\theta \to 0$ et vaut (parce que f est différentiable) :

$$\frac{\partial f}{\partial(y-x)}(x) \leqslant f(y) - f(x), \tag{17.381}$$

et aussi

$$df_x(y-x) \leqslant f(y) - f(x) \tag{17.382}$$

par le lemme 12.280.

(2) **(1) sens inverse** Pour tout $a \neq b$ dans U nous avons

$$f(b) \geqslant f(a) + df_a(b-a). \tag{17.383}$$

EQooEALSooJQszWr

Pour $x \neq y$ dans U et pour $\theta \in]0,1[$ nous écrivons (17.383) pour les couples $\big(\theta x + (1-\theta)y, y\big)$ et $\big(\theta x + (1-\theta)y, x\big)$. Ça donne :

$$f(y) \geqslant f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) + df_{\theta x + (1-\theta)y}\big(\theta(y-x)\big), \tag{17.384}$$

et

$$f(x) \geqslant f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) + df_{\theta x + (1-\theta)y}\big((1-\theta)(x-y)\big). \tag{17.385}$$

La différentielle est linéaire ; en multipliant la première par $(1-\theta)$ et la seconde par θ et en la somme, les termes en df se simplifient et nous trouvons

$$\theta f(x) + (1-\theta)f(y) \geqslant f\big(\theta x + (1-\theta)y\big). \tag{17.386}$$

(3) **(2) sens direct** Nous avons encore l'équation (17.380), avec une inégalité stricte. Par contre, ça ne va pas être suffisant parce que le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes. Nous devons donc être plus malins.

Soient $0 < \theta < \omega < 1$. Nous avons $(1-\theta)x + \theta y \in [x, (1-\omega)x + \omega y]$, donc nous pouvons écrire $(1-\theta)x+\theta y$ sous la forme $(1-s)x + s\big((1-\omega)x+\omega y\big)$. Il se fait que c'est bon pour $s = \theta/\omega$ (et aussi que nous avons $\theta/\omega < 1$). Donc nous avons

$$f\big((1-\theta)x+\theta y\big) = f\Big((1-\frac{\theta}{\omega})x + \frac{\theta}{\omega}\big((1-\omega)x+\omega y\big)\Big) \tag{17.387a}$$

$$< (1-\frac{\theta}{\omega})f(x) + \frac{\theta}{\omega}f\big((1-\omega)x+\omega y\big). \tag{17.387b}$$

Cela nous permet d'écrire

$$\frac{f\big((1-\theta)x+\theta y\big) - f(x)}{\theta} < \frac{f\big((1-\omega)x+\omega y\big)}{\omega} < f(y) - f(x). \tag{17.388}$$

Le seconde inégalité est le pendant de (17.380). Maintenant en passant à la limite pour θ nous conservons une inégalité stricte par rapport à $f(y) - f(x)$:

$$df_x(y-x) < f(y) - f(x). \tag{17.389}$$

□

Avant de lire la proposition suivante, il faut relire la proposition 12.375 et ce qui s'y rapporte. Lire aussi la remarque 17.85 qui indique qu'il n'y a pas de réciproque dans l'énoncé (2).

REMooYCRKooEQNIkC

Remarque 17.96.
Notons que la condition (17.390) n'est pas équivalente à demander $(d^2f)_x(h,h) \geqslant 0$ pour tout h. En effet nous ne demandons la positivité que dans les directions atteignables comme différence de deux éléments de U. La partie U n'est pas spécialement ouverte ; elle pourrait n'être qu'une droite dans $\mathbb{R}^3$. Dans ce cas, demander que f (qui est C^2 sur l'ouvert Ω) soit convexe sur U ne demande que la positivité de $(d^2f)_x$ appliqué à des vecteurs situés sur la droite U.

PROPooBMIRooFkQSAb

Proposition 17.97 ([580]).
Soit une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et un convexe $U \subset \Omega$.

ITEMooZQCAooIFjHOn

(1) La fonction f est convexe sur U si et seulement si

$$(d^2f)_x(y-x, y-x) \geqslant 0 \tag{17.390}$$

EQooIBDCooJYdiBb

pour tout $x, y \in U$.

ITEMooHAGQooYZyhQk

(2) Si pour tout $x \neq y$ dans U nous avons

$$(d^2f)_x(y-x, y-x) > 0 \tag{17.391}$$

alors la fonction f est strictement convexe sur U.

Démonstration. Il y a trois parties à démontrer.

(1) **(1) sens direct**
Soit une fonction convexe f sur U. Soient aussi $x, y \in U$ et $h = y - x$. Nous utilisons ma version préférée de Taylor[44] : celle de la proposition 12.478 :

$$f(x+th) = f(x) + tdf_x(h) + \frac{t^2}{2}(d^2f_x)(h,h) + t^2\|h\|^2\alpha(th) \tag{17.392}$$

avec $\lim_{s\to 0}\alpha(s) = 0$. Le fait que f soit convexe donne

$$0 \leqslant f(x+th) - f(x) - tdf_x(h), \tag{17.393}$$

et donc

$$0 \leqslant \frac{t^2}{2}(d^2f)_x(h,h) + f^2\|h\|^2\alpha(th). \tag{17.394}$$

[44] Si vous présentez ceci au jury d'un concours, vous devriez être capable de raconter ce que signifie d^2f, et pourquoi nous l'utilisons comme une 2-forme.

En multipliant par 2 et en divisant par t^2,

$$0 \leqslant (d^2f)_x(h,h) + 2\|h\|^2\alpha(th). \tag{17.395}$$

En prenant $t \to 0$ nous avons bien $(d^2f)_x(y-x,y-x) \geqslant 0$.

(2) **(1) sens inverse**

Soient $x, y \in U$. Nous écrivons Taylor en version de la proposition 12.479 :

$$f(y) = f(x) + df_x(y-x) + \frac{1}{2}(d^2f)_z(y-x,y-x) \tag{17.396}$$

pour un certain $z \in]x,y[$. En vertu de ce qui a été dit dans la remarque 17.96 nous ne pouvons pas évoquer l'hypothèse (17.390) pour conclure que $(d^2f)_z(y-x,y-x) \geqslant 0$. Il y a deux manières de nous sortir du problème :

- Trouver $s \in U$ tel que $y - x = s - z$.
- Trovuer un $z \in U$ tel que $z - x$ soit un multiple de $y - x$.

La première approche ne fonctionne pas parce que $s = y - x + z$ n'est pas garanti d'être dans U ; par exemple avec $x = 1$, $z = 2$, $y = 3$ et $U = [0,3]$. Dans ce cas $s = 4 \notin U$.

Pour suivre la seconde approche, nous posons $z = \theta x + (1-\theta)y$, donc $z - x = (1-\theta)(y-x)$. Dans ce cas la bilinéarité de $(d^2f)_z$ donne[45]

$$f(y) = f(x) + df_x(y-x) + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\theta)^2}(d^2f)_z(z-x,z-x)}_{\geqslant 0}. \tag{17.397}$$

Nous en déduisons que f est convexe par la proposition 17.95(1).

(3) **(2)**

Le raisonnement que nous venons de faire pour le sens inverse de (1) tient encore, et nous avons

$$f(y) = f(x) + df_x(y-x) + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\theta)^2}(d^2f)_z(z-x,z-x)}_{>0} \tag{17.398}$$

d'où nous déduisons la stricte convexité de f par la proposition 17.95(2).

□

CORooMBQMooWBAIIH

Corolaire 17.98.
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et une fonction deux fois différentiable f sur Ω.

ITEMooUAFTooXfCviI

(1) La fonction f est convexe si et seulement si pour tout x, la matrice hessienne d^2f_x est semi-définie positive.

ITEMooDGISooPlRLOd

(2) Si pour tout x de Ω, la matrice hessienne d^2f_x est strictement définie positive, alors f est strictement convexe.

Démonstration. Nous pouvons voir ce résultat comme une conséquence directe de la proposition 17.97 en posant $U = \Omega$. Nous allons cependant en donner une démonstration directe.

Soit $a \in \Omega$ et posons la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - f(a) - (df)_a(x-a). \end{aligned} \tag{17.399}$$

Nous allons calculer des différentielles de f, et une chose importante à comprendre est que la différentielle de la fonction $x \mapsto df_a(x-a)$ ne fait pas intervenir la différentielle seconde de f ; c'est la différentielle de $a \mapsto df_a(x)$ qui demanderait la différentielle seconde de f. Ici le point a étant donné, df_a est une application linéaire sans histoires. En particulier, $df_a(x-a) = df_a(x) - df_a(a)$.

La fonction g vérifie :

(1) $g(a) = 0$,

[45] Si vous avez bien suivi, la bilinéarité est contenue dans la proposition 12.375.

(2) $dg_x = df_x - df_a$, parce que la différentielle de $x \mapsto df_a(x)$ est $x \mapsto df_a(x)$ en vertu du lemme 10.313.

(3) $dg_a = 0$. Le point a est un point critique de g.

(4) $d^2g_x = d^2f_x$ parce que la différentielle de $x \mapsto df_a$ est nulle.

Ceci étant dit, nous pouvons commencer avec la preuve.

(1) **(1) sens direct**

Nous supposons que f est convexe. Alors $g(x) \geqslant 0$ pour tout x par la caractérisation 17.95(1). Cela signifie que $x = 0$ est un minimum global de g. Par conséquent la proposition 17.70(3) nous dit que la hessienne d^2f_a est semi-définie positive.

(2) **(1) sens inverse**

Nous sommes dans le cas de la proposition 17.70(1). Le point $x = a$ est un minimum local de g, ce qui signifie que $g(x) \geqslant 0$ pour tout x de Ω. Encore une fois la caractérisation 17.95(1) nous permet de conclure.

(3) **(2)**

La fonction g vérifie les conditions de 17.70(2), donc $x = 0$ est un minimum local strict de g. La caractérisation 17.95(2) nous fait conclure que f est strictement convexe.

□

17.99.
Nous rappelons que, avec $p > 1$, la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^p \end{aligned} \tag{17.400}$$

est strictement croissante. La proposition 12.427 est formelle sur ce point.

Lemme 17.100.
Soient un réel a, et $p > 1$. L'équation

$$|x|^p = ax \tag{17.401}$$

possède au plus deux solutions réelles.

Démonstration. En deux parties suivant le signe de a.

(1) **Si $a = 0$** Alors l'équation est $|x|^p = 0$, et l'unique solution est $x = 0$

(2) **Si $a > 0$** Si $x < 0$ alors $ax < 0$ et $|x|^p - ax > |x|^p > 0$. Cela prouve que notre équation n'a pas de solutions $x < 0$ lorsque $a > 0$.

Cherchons donc des solutions avec $x \geqslant 0$. D'abord $|x| = x$ et ensuite, en posant $p = 1 + \delta$ ($\delta > 0$), nous avons la factorisation

$$x^p - ax = x(x^\delta - a) = 0. \tag{17.402}$$

Poser $x = 0$ est clairement une solution. Si $x \neq 0$, nous avons le raisonnement suivant. Les réels formant un corps, c'est un anneau intègre qui vérifie alors la règle du produit nul[46]. Cela pour dire que si $x \neq 0$, alors

$$x^\delta = a. \tag{17.403}$$

La proposition 12.435 nous dit que cela a une unique solution dans les réels positifs.

(3) **Si $a < 0$** Ce cas se traite de façons similaire[47].

□
PROPooLIGIooPrHYlb

Proposition 17.101.
Soit $1 < p < \infty$. La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|^p \end{aligned} \tag{17.404}$$

est strictement convexe.

[46] Voir le lemme 1.336 et la définition 1.335.
[47] Vérifiez par vous-même et écrivez-moi si il y a un problème (personnellement, je n'ai pas vérifié.).

Démonstration. La preuve va se diviser en deux parties. D'abord nous allons utiliser la matrice hessienne pour démontrer le résultat sur l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et ensuite nous allons un peu bricoler pour ajouter 0 au domaine de stricte convexité[48].

(1) **La hessienne** Nous notons

$$f_p(x) = \|x\|^p = \big(\sum_i x_i^2\big)^{p/2}, \tag{17.405}$$

et nous dérivons :

$$\frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) = \frac{p}{2} 2x_i \big(\sum_i x_i^2\big)^{(p-2)/2} = p x_i f_{p-2}(x). \tag{17.406}$$

EQooNZZWooGeAlyj

Cela n'est déjà pas bien défini en $x = 0$ lorsque $p < 2$, mais qu'importe ? Nous dérivons encore en utilisant entre autres la formule (17.406) elle-même avec $p \to p - 2$:

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_i}(x) = p\delta_{ij}\|x\|^{p-2} + p(p-2)x_i x_j \|x\|^{p-4}. \tag{17.407}$$

Nous avons donc la matrice hessienne

$$H_{ij}(x) = p\delta_{ij}\|x\|^{p-2} + p(p-2)x_i x_j \|x\|^{p-4}. \tag{17.408}$$

Pour prouver que cette matrice est strictement définie positive, nous avons le choix entre la proposition 8.231(1) ou le lemme 8.232(1). Nous utilisons le second. Nous avons[49] :

$$\begin{aligned}
y \cdot H(x)y &= \sum_{kl} y_k H(x)_{kl} y_l && \text{(17.409a)}\\
&= p\sum_l y_l^2 \|x\|^{p-2} + p(p-2)\|x\|^{p-4} \sum_{kl} x_k y_k x_l y_l && \text{(17.409b)}\\
&= p\|y\|^2\|x\|^{p-2} + p(p-2)\|x\|^{p-4}(x \cdot y)^2 && \text{(17.409c)}\\
&= p\|x\|^{p-4}\big(\|y\|^2\|x\|^2 + (p-2)(x \cdot y)^2\big) && \text{(17.409d)}\\
&> p\|x\|^{p-4}\big(\|y\|^2\|x\|^2 - (x \cdot y)^2\big) && \text{(17.409e)}\\
&\geqslant 0. && \text{(17.409f)}
\end{aligned}$$

SUBEQooUSZOooCqgWPE
SUBEQooBXQKooZcarVy

Justifications :

- Pour 17.409e. Puisque $p > 1$ nous avons $p - 2 > -1$. Là, l'inégalité est stricte et c'est important.
- Pour 17.409f. C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz du théorème 10.1.

Voilà. La matrice Hessienne est strictement définie positive par le lemme 8.232(1) sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Le corolaire 17.98(1) nous indique que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et pour tout $\theta \in]0,1[$,

$$f_p\big(\theta x + (1-\theta)y\big) < \theta f_p(x) + (1-\theta) f_p(y) \tag{17.410}$$

EQooFXXZooBZhJYY

pourvu que $\theta x + (1-\theta)y \neq 0$ pour tout θ.

(2) **La suite**

Nous devons prouver que l'inéquation (17.410) tient également lorsque $\theta x + (1-\theta)y = 0$ pour une certaine valeur $\theta = \theta_0 \in]0,1[$.

(3) **Les cordes passant par zéro**

Pour ce faire, nous allons montrer que le segment de droite joignant $\big(a, f_p(a)\big)$ à $(b, f_p(b))$ est toujours au-dessus de la courbe $\big(x, f_p(x)\big)$. Nous commençons par $b = 0$. Vu que $p > 1$ et que $\theta \in]0,1[$ nous avons

$$\|\theta a\|^p = |\theta|^p \|a\|^p < \theta \|a\|^p = \theta f_p(a). \tag{17.411}$$

(4) **Les cordes passant au-dessus de zéro**

Dans le cas $b \neq 0$ nous considérons

$$\begin{aligned} l_1 \colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto l_1(x) \end{aligned} \tag{17.412}$$

[48] Si quelqu'un sait comment éviter ce bricolage en deux parties, je suis preneur.
[49] Si vous ne savez pas où placer les indices, voyez la proposition 8.179.

tel que $\big(x, l_1(x)\big)$ soit (le segment) la droite joignant $\big(a, \|a\|^p\big)$ à $\big(b, \|b\|^p\big)$.

Nous considérons aussi, pour $x \in [0,a]$ la fonction l_2 telle que $\big(x, l_2(x)\big)$ soit la droite joignant $(0,0)$ à $\big(a, \|a\|^p\big)$. Nous avons déjà vu que pour $x \in]0,a[$ nous avons $l_1(x) > \|x\|^p$.

Nous avons $l_1(a) = l_2(a) = \|a\|^p$. Donc $l_2(x) - l_1(x)$ ne change pas de signe sur $[0,a]$. Mais comme $l_1(0) > 0 = l_2(0)$ nous avons

$$l_2(x) > l_1(x) \tag{17.413}$$

pour tout $x \in [0,a]$.

Au final, $l_2(x) > l_1(x) > f_p(x)$.

Pour la partie $[b,0]$ nous faisons de même en considérant l_3 de telle sorte que $\big(x, l_3(x)\big)$ soit le segment joignant $(0,0)$ à $\big(b, \|b\|^p\big)$.

□

17.12.6 Quelques inégalités

17.12.6.1 Inégalité de Jensen

PropXIBooLxTkhU

Proposition 17.102 (Inégalité de Jensen)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et des réels x_1,..., x_n. Soient des nombres positifs λ_1,..., λ_n formant une combinaison convexe[50]*. Alors*

$$f\big(\sum_i \lambda_i x_i\big) \leqslant \sum_i \lambda_i f(x_i). \tag{17.414}$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur n, en sachant que $n = 2$ est la définition de la convexité de f. Vu que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1-\lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k x_k}{1-\lambda_n}, \tag{17.415}$$

nous avons

$$f\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\big) \leqslant \lambda_n f(x_n) + (1-\lambda_n) f\big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k x_k}{1-\lambda_n}\big). \tag{17.416}$$

La chose à remarquer est que les nombres $\frac{\lambda_k}{1-\lambda_n}$ avec k allant de 1 à $n-1$ forment eux-mêmes une combinaison convexe. L'hypothèse de récurrence peut donc s'appliquer au second terme du membre de droite :

$$f\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\big) \leqslant \lambda_n f(x_n) + (1-\lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} f(x_k) = \lambda_n f(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k). \tag{17.417}$$

□

17.12.6.2 Inégalité arithmético-géométrique

La proposition suivante dit que la moyenne arithmétique de nombres strictement positifs est supérieure ou égale à la moyenne géométrique.

PropWDPooBtHIAR

Proposition 17.103 (Inégalité arithmético-géométrique[586])**.**
Soient x_1,..., x_n des nombres strictement positifs. Nous posons

$$m_a = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \tag{17.418}$$

et

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \tag{17.419}$$

Alors $m_g \leqslant m_a$ et $m_g = m_a$ si et seulement si $x_i = x_j$ pour tout i,j.

Démonstration. Par hypothèse les nombres m_a et m_g sont tous deux strictement positifs, de telle sorte qu'il est équivalent de prouver $\ln(m_g) \leqslant \ln(m_a)$ ou encore

$$\frac{1}{n}\big(\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)\big) \leqslant \ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right). \tag{17.420}$$

Cela n'est rien d'autre que l'inégalité de Jensen de la proposition 17.102 appliquée à la fonction ln et aux coefficients $\lambda_i = \frac{1}{n}$. □

[50] Définition 11.31.

17.12.6.3 Inégalité de Kantorovitch

PropMNUooFbYkug

Proposition 17.104 (Inégalité de Kantorovitch[587])**.**
Soit A une matrice symétrique strictement définie positive dont les plus grandes et plus petites valeurs propres sont λ_{min} et λ_{max}. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} + \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)^2 \|x\|^4. \tag{17.421}$$

Démonstration. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $\|x\| = 1$. Nous diagonalisons[51] la matrice A par la matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$: $A = PDP^{-1}$ et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ où D est une matrice diagonale formée des valeurs propres de A.

Nous posons $\alpha = \sqrt{\lambda_{min}\lambda_{max}}$ et nous regardons la matrice

$$\frac{1}{\alpha}A + \alpha A^{-1} \tag{17.422}$$

dont les valeurs propres sont

$$\frac{\lambda_i}{\alpha} + \frac{\alpha}{\lambda_i} \tag{17.423}$$

parce que les vecteurs propres de A et de A^{-1} sont les mêmes (ce sont les valeurs de la diagonale de D). Nous allons quelque peu étudier la fonction

$$\theta(x) = \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x}. \tag{17.424}$$

Elle est convexe en tant que somme de deux fonctions convexes. Elle a son minimum en $x = \alpha$ et ce minimum vaut $\theta(\alpha) = 2$. De plus

$$\theta(\lambda_{max}) = \theta(\lambda_{min}) = \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}. \tag{17.425}$$

Une fonction convexe passant deux fois par la même valeur doit forcément être plus petite que cette valeur entre les deux[52] : pour tout $x \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$,

$$\theta(x) \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}. \tag{17.426}$$

Nous sommes maintenant en mesure de nous lancer dans l'inégalité de Kantorovitch.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle} &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\langle Ax, x\rangle}{\alpha} + \alpha\langle A^{-1}x, x\rangle\right) && \text{(17.427a)}\\
&= \frac{1}{2}\langle(\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1})x, x\rangle && \text{(17.427b)}\\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big\|(\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1})x\Big\|\|x\| && \text{(17.427c)}\\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1}\| && \text{(17.427d)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- 17.427a par l'inégalité arithmético-géométrique, proposition 17.103. Nous avons aussi inséré $\alpha\frac{1}{\alpha}$ dans le produit sous la racine.
- 17.427c par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, théorème 10.1.
- 17.427d par la définition de la norme opérateur de la proposition 10.67

La norme opérateur est la plus grande des valeurs propres. Mais les valeurs propres de $A/\alpha + \alpha A^{-1}$ sont de la forme $\theta(\lambda_i)$, et tous les λ_i sont entre λ_{min} et λ_{max}. Donc la plus grande valeur propre de $A/\alpha + \alpha A^{-1}$ est $\theta(x)$ pour un certain $x \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$. Par conséquent

$$\sqrt{\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle} \leqslant \frac{1}{2}\|\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1}\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}. \tag{17.428}$$

□

[51] Théorème spectral 8.225.
[52] Je ne suis pas certain que cette phrase soit claire, non ?

17.12.7 Norme l^p

Si vous êtes seulement intéressés par le cas $p = 1, 2$ ou le cas $p = \infty$, allez voir la proposition 10.56.
PROPooUDFTooQyhAtq

Proposition 17.105.
Pour tout réel $p \geqslant 1$, la formule

$$\|x\|_{L^p} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \tag{17.429}$$

EqDeformeLp

définit une norme[53] *sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Le seul point un peu délicat parmi les propriétés à vérifier de la définition 7.212 est l'inégalité triangulaire. Grâce au lemme 7.214, nous allons seulement montrer que la partie $B = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\|_p \leqslant 1\}$ est convexe.

Soient $x, y \in B$ ainsi que $\lambda \in [0, 1]$. La fonction

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0, \infty[&\to [0, \infty[\\ t &\mapsto t^p \end{aligned} \tag{17.430}$$

est convexe par le lemme 17.87. Nous avons donc le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + (1-\lambda)y\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i + (1-\lambda)y_i|^p && \text{(17.431a)}\\
&\leqslant \sum_i \big(\lambda|x_i| + (1-\lambda)|y_i|\big)^p && \text{(17.431b)}\\
&\leqslant \sum_i \lambda^p|x_i|^p + (1-\lambda)^p|y_i|^p && \text{(17.431c)}\\
&\leqslant \sum_i \lambda|x_i|^p + \sum_i (1-\lambda)|y_i|^p && \text{(17.431d)}\\
&= \lambda\|x\|_p^p + (1-\lambda)\|y\|_p^p && \text{(17.431e)}\\
&\leqslant \lambda + (1-\lambda) && \text{(17.431f)}\\
&= 1. && \text{(17.431g)}
\end{aligned}$$

SUBEQooYETKooSSCgMn
SUBEQooHNZHooKmWdJS
SUBEQooMUPCooJLicEC
SUBEQooEFCHooJmSdVy

Justifications.

- Pour (17.431b). L'inégalité $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.
- Pour (17.431c). La fonction α est convexe.
- Pour (17.431d). Nous avons $\lambda \in [0, 1]$ et $p \geqslant 1$ et donc $\lambda^p \leqslant \lambda$ par 12.428.
- Pour (17.431f). Parce que $x \in B$ implique $\|x\|_p \leqslant 1$ qui implique $\|x\|_p^p \leqslant 1$.

□

17.12.8 Hölder

Notre étude de la fonction puissance permet de démontrer quelques inégalités de Hölder. Voir le thème 25.
THOooPPDPooJxTYIy

Théorème 17.106 ([588]).
Si $1 \leqslant p < \infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons[54]

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_\infty. \tag{17.432}$$

Démonstration. Vu que la fonction $t \mapsto |t|^p$ est croissante pour les t positifs[55], pour chaque i nous avons

$$|x_i| \leqslant \left(\sum_k |x_k|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p. \tag{17.433}$$

[53] Définition 7.212.
[54] Définition de la norme $\|.\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$, proposition 17.105.
[55] Parce que $p \geqslant 1$ et la proposition 12.427.

Cela montre que

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\} \leqslant \|x\|_p. \tag{17.434}$$

D'autre part, pour chaque i nous avons $|x_i| \leqslant \|x\|_\infty$, donc

$$\|x\|_p \leqslant \big(n\|x\|_\infty\big)^{1/p} = n^{1/p}\|x\|_\infty. \tag{17.435}$$

□

Le corolaire suivant donne une façon de majorer une norme ℓ^p par une norme ℓ^q moyennant un facteur. Notons cependant que l'inégalité de Hölder de la proposition 17.111 est plus précise. Ce corolaire est suffisant pour prouver l'équivalence des normes ℓ^p.

CORooEZGHooACHOiB

Corolaire 17.107.
Soient $p \geqslant 1$ et $q \leqslant \infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_q. \tag{17.436}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser les deux inégalités du théorème 17.106. D'abord la seconde avec p, et ensuite la première avec q. □

Si vous cherchez l'inégalité de Hölder dans L^p, c'est la proposition 27.39. Les normes ℓ^p sont définies dans 17.105.

LEMooLGGDooGLGFHj

Lemme 17.108 ([589])**.**
Soient $x, y > 0$ ainsi que $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors

$$xy \leqslant \alpha x^{1/\alpha} + \beta y^{1/\beta}. \tag{17.437}$$

Nous avons

$$xy = \alpha x^{1/\alpha} + \beta y^{1/\beta} \tag{17.438}$$

si et seulement si $x^{1/\alpha} = y^{1/\beta}$.

Démonstration. Nous utilisons le logarithme[56] et ses propriétés (surtout la proposition 15.98). D'abord

$$xy = e^{\ln(xy)} = e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\alpha\frac{\ln(x)}{\alpha}+\beta\frac{\ln(y)}{\beta}} \tag{17.439}$$

Comme l'exponentielle est strictement convexe (exemple 17.86(3)) et vu que $\alpha + \beta = 1$, nous avons

$$xy = e^{\alpha\frac{\ln(x)}{\alpha}+\beta\frac{\ln(y)}{\beta}} \leqslant \alpha e^{\ln(x)/\alpha} + \beta e^{\ln(y)/\beta} = \alpha x^{1/\alpha} + \beta y^{1/\beta}. \tag{17.440}$$

EQooNLQIooAYiEAQ

Cela prouve déjà l'inégalité demandée.

Nous passons au cas d'égalité. Puisque α et β ne sont pas nuls, l'inégalité (17.440) est une égalité si et seulement si[57]

$$\frac{\ln(x)}{\alpha} = \frac{\ln(y)}{\beta}. \tag{17.441}$$

Cela signifie $\ln(x^{1/\alpha}) = \ln(y^{1/\beta})$, qui implique $x^{1/\alpha} = y^{1/\beta}$ parce que le logarithme est une bijection. □

CORooTCBZooAcZxaC

Corolaire 17.109.
Si $p, q > 0$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et si $p > 1$ alors nous avons

$$xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \tag{17.442}$$

EQooWKTSooQwRsLz

pour tout $x, y \geqslant 0$, avec une égalité si et seulement si $x^p = y^q$.

Démonstration. Il suffit de poser $\alpha = 1/p$ et $\beta = 1/q$ et appliquer le lemme 17.108. □

[56] Définition 15.95
[57] Par le lemme 17.79.

THOooYHMJooBlXfpl

Théorème 17.110 (Inégalité de Hölder[589]).
Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ nous avons[58]

$$|x \cdot y| = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q. \tag{17.443}$$

Il y a égalité si et seulement si $x_i y_i$ est de signe constant[59] *et les vecteurs $\sum_i |x_i|^p e_i$ et $\sum_i |y_i|^q e_i$ sont proportionnels.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Le cas des vecteurs nuls** Si x ou y est nul, les inégalités sont évidentes. Donc nous supposons que non.

(2) **Première inégalité** En ce qui concerne la première inégalité,

$$|x \cdot y| = |\sum_i x_i y_i| \leqslant \sum_i |x_i||y_i| \leqslant \sum_i \left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q \right) \tag{17.444}$$

où nous avons utilisé le corolaire 17.109 dans chaque terme de la somme en tenant compte du fait que $|x_i|$ et $|y_i|$ sont positifs.

(3) **Seconde inégalité** Pour la seconde inégalité, nous commençons avec $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Utilisant encore le corolaire 17.109 pour chaque terme, nous avons

$$\sum_i |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p} \underbrace{\sum_i |x_i|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_i |y_i|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q. \tag{17.445}$$

Si maintenant x et y sont arbitraires non nuls dans $\mathbb{R}^n$, nous posons $x' = x/\|x\|_p$ et $y' = y/\|y\|_q$; nous savons déjà que

$$\sum_i |x'_i y'_i| \leqslant 1. \tag{17.446}$$

EQooRRECooNpopuo

En remplaçant x'_i par $x_i/\|x\|_p$ et y'_i par $y_i/\|y\|_q$, l'inégalité (17.446) devient

$$\sum_i \frac{|x_i||y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant 1, \tag{17.447}$$

ce qui signifie

$$\sum_i |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q. \tag{17.448}$$

(4) **Cas d'égalité, dans un sens** Nous notons

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ tel que } \sum_i |x_i y_i| = \|x\|_p \|y\|_q\}. \tag{17.449}$$

(4a) **Multiplications** D'abord si $(x, y) \in \mathcal{D}$, alors $(\mu x, \lambda y) \in \mathcal{D}$ pour tout $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. En effet,

$$\sum_i |(\mu x)_i (\lambda y)_i| = |\mu||\lambda| \sum_i |x_i y_i| = |\mu||\lambda| \|x\|_p \|y\|_q = \|\mu x\|_p \|\lambda y\|_q. \tag{17.450}$$

(4b) **Avec normes égales à 1** Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$ tels que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Nous avons en particulier,

$$1 = \sum_i |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p} \sum_i |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_i |y_i|^q \tag{17.451}$$

EQooDFNWooQSTygU

grâce à l'inégalité (17.442) appliquée à chaque terme. Vu que $\|x\|_p = 1$, nous avons $\sum_i |x_i|^p = 1$, de telle sorte que le membre de droite de (17.451) se réduise à $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

[58] Définition de la norme $\|.\|_p$, proposition 17.105.

[59] Je n'utilie pas cette hypothèse de signe constant. Il doit y avoir une subtilité qui m'a échappée. Soyez prudent en lisant et écrivez-moi si vous trouvez une erreur.

Nous pouvons donc écrire

$$1 = \sum_i |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p}\sum_i |x_i|^p + \frac{1}{q}\sum_i |y_i|^q = 1. \tag{17.452}$$

L'inégalité est donc une égalité :

$$\sum_i |x_i y_i| = \sum_i \left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q \right). \tag{17.453}$$

Mais chaque terme à gauche est en inégalité avec le terme correspondant à droite :

$$|x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q. \tag{17.454}$$

EQooAGFKooUsYrWT

Pour que le tout soit une égalité, il faut que chaque inégalité (17.454) soit une égalité. Pour chaque i, nous avons

$$|x_i y_i| = \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q. \tag{17.455}$$

La condition d'égalité du corolaire 17.109 nous dit alors que $|x_i|^p = |y_i|^q$.

(4c) **Avec normes arbitraires** Soit donc $(x, y) \in \mathcal{D}$. Nous savons qu'en posant $x' = x/\|x\|_p$ et $y' = y/\|y\|_q$ nous avons $(x', y') \in \mathcal{D}$ et donc

$$\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right)^p = \left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \right)^q. \tag{17.456}$$

Cela donne tout de suite

$$|x_i|^p = \frac{\|x\|_p^p}{\|y\|_q^q}|y_i|^q, \tag{17.457}$$

ce qui est bien ce que nous voulions : le vecteur $\sum_i |x_i|^p e_i$ est proportionnel au vecteur $\sum_i |y_i|^q e_i$.

(5) **Cas d'égalité dans l'autre sens**[1] Nous supposons que les vecteurs $\sum_i |x_i|^p e_i$ et $\sum_i |y_i|^q e_i$ sont proportionnels. Nous nommons c^q le facteur de proportionnalité, c'est-à-dire que nous posons

$$|x_i|^p = c^q |y_i|^q. \tag{17.458}$$

Dans ce cas, pour chaque i, les nombres $c|y_i|$ et $|x_i|$ sont dans le cas d'égalité du corolaire 17.109. Nous avons alors

SUBEQSodVULLooPGWUIP

$$\begin{aligned}
\sum_i |x_i y_i| &= \frac{1}{c}\sum_i c|x_i||y_i| && (17.459a)\\
&= \frac{1}{c}\sum_i \left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}\big(c|y_i|\big)^q \right) && (17.459b)\\
&= \frac{1}{c}\sum_i \left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|x_i|^p \right) && (17.459c)\\
&= \frac{1}{c}\sum_i |x_i|^p. && (17.459d)
\end{aligned}$$

Et c'est maintenant que nous subdivisons.

(5a) **Si $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$** Dans ce cas, l'égalité (17.459) se réduisent à

$$\sum_i |x_i y_i| = \frac{1}{c}. \tag{17.460}$$

Mais l'hypothèse sur les normes donne

$$1 = \sum_i |x_i|^p = \sum_i c^q |y_i|^q = c^q \sum_i |y_i|^q = c^q. \tag{17.461}$$

Donc $c = 1$ et nous avons bien

$$\sum_i |x_i y_i| = \frac{1}{c} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q. \tag{17.462}$$

(5b) **Pour des normes arbitraires** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tels que $|x_i|^p = c^q |y_i|^q$. Nous posons comme d'habitude $x' = x/\|x\|_p$ et $y' = y/\|y\|_q$. En utilisant le cas « de norme 1 » nous avons

$$1 = \sum_i |x'_i y'_i| = \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_i |x_i y_i|. \tag{17.463}$$

Donc $\sum_i |x_i y_i| = \|x\|_p \|y\|_q$ comme nous le voulions.

□

La majoration de la proposition suivante sera utile pour les inégalités de Clarkson du lemme 27.146. Pour d'autres inégalités (plus simples) autour des normes $\|.\|_p$, voir le thème 25.

PROPooQZTNooGACMlQ

Proposition 17.111 ([589]).
Si $x \in \mathbb{R}^n$ et si $0 < q < p$, alors

$$\|x\|_q \leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|x\|_p. \tag{17.464}$$

En particulier, si $0 < q < p$, alors

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p. \tag{17.465}$$

Démonstration. Nous posons $P = p/q$ et $Q = P/(P-1)$. Les nombres P et Q sont des exposants conjugués, parce que

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = \frac{q}{p} + \frac{p-q}{p} = 1. \tag{17.466}$$

Nous posons $y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ ainsi que

$$v = \sum_i |x_i|^q e_i, \tag{17.467}$$

et nous écrivons l'inégalité de Hölder de la proposition 17.110 sur les vecteurs v et y :

$$\sum_i |v_i y_i| \leqslant \|v\|_P \|y\|_Q. \tag{17.468}$$

En déballant,

$$\sum_i |x_i|^q \leqslant \left(\sum_i (|x_i|^q)^P \right)^{1/P} \underbrace{\Big(\sum_i 1^Q \Big)^{1/Q}}_{=n} \tag{17.469a}$$

$$= \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{q/p} n^{1/Q} \tag{17.469b}$$

$$= n^{1-q/p} \|x\|_p^q. \tag{17.469c}$$

Cela donne

$$\|x\|_q^q \leqslant n^{1-q/p} \|x\|_p^q. \tag{17.470}$$

En prenant la puissance $1/q$ des deux côtés,

$$\|x\|_q \leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|x\|_p \leqslant \|x\|_p \tag{17.471}$$

parce que $n \geqslant 1$ et $p/q < 1$. □

17.13 Algorithme du gradient à pas optimal

Une idée pour trouver un minimum à une fonction est de prendre un point p au hasard, calculer le gradient $\nabla f(p)$ et suivre la direction $-\nabla f(p)$ tant que ça descend. Une fois qu'on est « dans le creux », recalculer le gradient et continuer ainsi.

Nous allons détailler cet algorithme dans un cas très particulier d'une matrice A symétrique et strictement définie positive.

- Dans la proposition 17.113 nous montrons que résoudre le système linéaire $Ax = -b$ est équivalent à minimiser une certaine fonction.

- La proposition 17.114 donnera une méthode itérative pour trouver ce minimum.

DefQXPooYSygGP

Définition 17.112.
*Si X est un espace vectoriel normé et $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nous disons que f est **coercive** sur le domaine non borné P de X si pour tout $M \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$\{x \in P \text{ tel que } f(x) \leqslant M\} \tag{17.472}$$

est borné.

En langage imagé la coercivité de f s'exprime par la limite

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in P}} f(x) = +\infty. \tag{17.473}$$

Nous rappelons que $S^{++}(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives définies en 8.229.

PROPooYRLDooTwzfWU

Proposition 17.113.
Soit $A \in S^{++}(n,\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle. \end{aligned} \tag{17.474}$$

Alors :

(1) Il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\bar{x} = -b$.

(2) Il existe un unique $x^* \in \mathbb{R}^n$ minimisant f.

(3) Ils sont égaux : $\bar{x} = x^*$.

Démonstration. Une matrice symétrique strictement définie positive est inversible, entre autres parce qu'elle se diagonalise par des matrices orthogonales (qui sont inversibles) et que la matrice diagonalisée est de déterminant non nul : tous les éléments diagonaux sont strictement positifs. Voir le théorème spectral symétrique 8.225.

D'où l'unicité du $\bar{x}$ résolvant le système $Ax = -b$ pour n'importe quel b.

(1) **f est strictement convexe**

La fonction f s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{kl} A_{kl}x_l x_k + \sum_k b_k x_k. \tag{17.475}$$

Elle est de classe C^2 sans problèmes, et il est vite vu que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = A_{ij}$, c'est-à-dire que A est la matrice hessienne de f. Cette matrice étant strictement définie positive par hypothèse, la fonction f est strictement convexe par le corolaire 17.98(2).

(2) **f est coercive** Montrons à présent que f est coercive. Nous avons :

$$|f(x)| = \Big|\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle\Big| \tag{17.476a}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}|\langle Ax, x\rangle| - |\langle b, x\rangle| \tag{17.476b}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\lambda_{min}\|x\|^2 - \|b\|\|x\| \tag{17.476c}$$

Pour la dernière ligne nous avons nommé λ_{min} la plus grande valeur propre de A et utilisé Cauchy-Schwarz pour le second terme. Nous avons donc bien $|f(x)| \to \infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ et la fonction f est coercive.

Soit M une valeur atteinte par f. L'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) \leqslant M\} \tag{17.477}$$

est fermé (parce que f est continue) et borné parce que f est coercive. Cela est donc compact[60] et f atteint un minimum qui sera forcément dedans. Cela est pour l'existence d'un minimum.

Pour l'unicité du minimum nous invoquons la convexité : si $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ sont deux points réalisant le minimum de f, alors

$$f\left(\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2}\right) < \frac{1}{2}f(\bar{x}_1)+\frac{1}{2}f(\bar{x}_2) = f(\bar{x}_1), \tag{17.478}$$

ce qui contredit la minimalité de $f(\bar{x}_1)$.

Nous devons maintenant prouver que $\bar{x}$ vérifie l'équation $A\bar{x} = -b$. Vu que $\bar{x}$ est minimum local de f qui est une fonction de classe C^2, le théorème des minimums locaux 17.69 nous indique que $\bar{x}$ est solution de $\nabla f(x) = 0$. Calculons un peu cela avec la formule

$$df_x(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(x+tu)\Big]_{t=0} = \frac{1}{2}\big(\langle Ax,u\rangle + \langle Au,x\rangle\big) + \langle b,u\rangle = \langle Ax,u\rangle + \langle b,u\rangle = \langle Ax+b,u\rangle. \tag{17.479}$$

Donc demander $df_x(u) = 0$ pour tout u demande $Ax + b = 0$. □

PropSOOooGoMOxG

Proposition 17.114 (Gradient à pas optimal)**.**
Soit $A \in S^{++}(n,\mathbb{R})$ (A est une matrice symétrique strictement définie positive) et $b \in \mathbb{R}^n$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle + \langle b,x\rangle. \end{aligned} \tag{17.480}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous définissons la suite (x_k) par

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k \tag{17.481}$$

où

- $d_k = -(\nabla f)(x_k)$
- *t_k est la valeur minimisant la fonction $t \mapsto f(x_k + td_k)$ sur $\mathbb{R}$.*

Alors pour tout $k \geqslant 0$ nous avons

$$\|x_k - \bar{x}\| \leqslant K\left(\frac{c_2(A)-1}{c_2(A)+1}\right)^k \tag{17.482}$$

où $c_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ est le rapport ente la plus grande et la plus petite valeur propre[61] de la matrice A et $\bar{x}$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ à minimiser f.

Démonstration. Décomposition en plusieurs points.

(1) **Existence de $\bar{x}$** Le fait que $\bar{x}$ existe et soit unique est la proposition 17.113.

(2) **Si $(\nabla f)(x_k) = 0$** D'abord si $\nabla f(x_k) = 0$, c'est que $x_{k+1} = x_k$ et l'algorithme est terminé : la suite est stationnaire. Pour dire que c'est gagné, nous devons prouver que $x_k = \bar{x}$. Pour cela nous écrivons (à partir de maintenant « x_k » est la k^{e} composante de x qui est une variable, et non le x_k de la suite)

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{kl} A_{kl}x_l x_k + \sum_k b_k x_k \tag{17.483}$$

et nous calculons $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ en tenant compte du fait que $\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ki}$. Le résultat est que $(\partial_i f)(a) = (Ax+b)_i$ et donc que

$$(\nabla f)(a) = Aa + b. \tag{17.484}$$

Vu que A est inversible (symétrique définie positive), il existe un unique $a \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie cette relation. Par la proposition 17.113, cet élément est le minimum $\bar{x}$.

Cela pour dire que si $a \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(\nabla f)(a) = 0$ alors $a = \bar{x}$. Nous supposons donc à partir de maintenant que $\nabla f(x_k) \neq 0$ pour tout k.

[60] Théorème 9.24
[61] Cela est certainement très lié au conditionnement de la matrice A, voir la proposition 34.110.

(3) t_k **est bien défini**

Pour $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x_k + td_k) = f(x_k) + \frac{1}{2}t^2\langle Ad_k, d_k\rangle + t\underbrace{\langle Ax_k + b}_{=-d_k}, d_k\rangle = \frac{1}{2}t^2\langle Ad_k, d_k\rangle - t\|d_k\|^2 + f(x_k). \tag{17.485}$$

qui est un polynôme du second degré en t. Le coefficient de t^2 est $\frac{1}{2}\langle Ad_k, d_k\rangle > 0$ parce que $d_k \neq 0$ et A est strictement définie positive. Par conséquent la fonction $t \mapsto f(x_k + td_k)$ admet bien un unique minimum. Nous pouvons même calculer t_k parce que l'on connaît par cœur le sommet d'une parabole :

$$t_k = -\frac{\langle Ax_k + b, d_k\rangle}{\langle Ad_k, d_k\rangle} = \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k\rangle} \tag{17.486}$$

parce que $d_k = -\nabla f(x_k) = -(Ax_k + b)$.

(4) **La valeur de** d_{k+1}

Par définition, $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) = -(Ax_{k+1} + b)$. Mais $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$, donc

$$d_{k+1} = -Ax_k - t_k Ad_k - b = d_k - t_k Ad_k \tag{17.487}$$

parce que $-Ax_k - b = d_k$.

Par ailleurs, $\langle d_{k+1}, d_k\rangle = 0$ parce que

$$\langle d_{k+1}, d_k\rangle = \langle d_k, d_k\rangle - t_k\langle d_k, Ad_k\rangle = \|d_k\|^2 - \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k\rangle}\langle d_k, Ad_k\rangle = 0 \tag{17.488}$$

où nous avons utilisé la valeur (17.486) de t_k.

(5) **Calcul de** $f(x_{k+1})$

Nous repartons de (17.485) où nous substituons la valeur (17.486) de t_k :

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + \frac{1}{2}\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle} - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle} = f(x_k) - \frac{1}{2}\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle}. \tag{17.489}$$

(6) **Encore du calcul ...**

Vu que le produit $\langle Ad_k, d_k\rangle$ arrive tout le temps, nous allons étudier $\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle$. Le truc malin est d'essayer d'exprimer ça en termes de $\bar{x}$ et $\bar{f} = f(\bar{x})$. Pour cela nous calculons $f(\bar{x})$:

$$\bar{f} = f(\bar{x}) = f(-A^{-1}b) = -\frac{1}{2}\langle b, A^{-1}b\rangle. \tag{17.490}$$

Ayant cela en tête nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned}
\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle &= \langle A^{-1}(Ax_k + b), Ax_k + b\rangle && \text{(17.491a)}\\
&= \langle x_k, Ax_k\rangle + \langle A^{-1}b, Ax_k\rangle + \langle b, x_k\rangle + \underbrace{\langle A^{-1}b, b\rangle}_{-2\bar{f}} && \text{(17.491b)}\\
&= \langle x_k, Ax_k\rangle + 2\langle x_k, b\rangle - 2\bar{f} && \text{(17.491c)}\\
&= 2\big(f(x_k) - \bar{f}\big) && \text{(17.491d)}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$ parce que A est symétrique.

(7) **Erreur sur la valeur du minimum**

Nous voulons à présent estimer la différence $f(x_{k+1}) - \bar{f}$. Pour cela nous mettons en facteur $f(x_k) - \bar{f}$ dans $f(x_{k+1} - \bar{f})$; et d'ailleurs c'est pour cela que nous avons calculé $\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle$: parce que ça fait intervenir $f(x_k) - \bar{f}$.

$$\begin{aligned}
f(x_{k+1}) - \bar{f} &= f(x_k) - \frac{1}{2}\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle} - \bar{f} && \text{(17.492a)}\\
&= \big(f(x_k) - \bar{f}\big)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle\big(f(x_k) - \bar{f}\big)}\right) && \text{(17.492b)}\\
&= \big(f(x_k) - \bar{f}\big)\left(1 - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle}\right). && \text{(17.492c)}
\end{aligned}$$

Nous traitons le dénominateur à l'aide de l'inégalité de Kantorovitch 17.104. Nous avons

$$\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k,d_k\rangle\langle A^{-1}d_k,d_k\rangle}\geqslant\frac{\|d_k\|^4}{\frac{1}{4}\left(\sqrt{c_2(A)}+\frac{1}{\sqrt{c_2(A)}}\right)^2\|d_k\|^4}=\frac{4c_2(A)}{(c_2(A)+1)^2}.\tag{17.493}$$

Mettre cela dans (17.492c) est un calcul d'addition de fractions :

$$f(x_{k+1})-\bar{f}\leqslant\big(f(x_k)-\bar{f}\big)\left(\frac{c_2(A)-1}{c_2(A)+1}\right)^2.\tag{17.494}$$

Par récurrence nous avons alors

$$f(x_k)-\bar{f}\leqslant\big(f(x_0)-\bar{f}\big)\left(\frac{c_2(A)-1}{c_2(A)+1}\right)^{2k}.\tag{17.495}$$ eqANKooNPfCFj

Notons qu'il n'y a pas de valeurs absolues parce que $\bar{f}$ étant le minimum de f, les deux côtés de l'inégalité sont automatiquement positifs.

(8) **Erreur sur la position du minimum**

Nous voulons à présent étudier la norme de $x_k-\bar{x}$. Pour cela nous l'écrivons directement avec la définition de f en nous souvenant que $b=-A\bar{x}$:

$$\begin{aligned}f(x_k)-\bar{f}&=\frac{1}{2}\langle Ax_k,x_k\rangle-\langle A\bar{x},x_k\rangle+\frac{1}{2}\langle A\bar{x},\bar{x}\rangle&(17.496a)\\&=\frac{1}{2}\langle Ax_k,x_k\rangle-\frac{1}{2}\langle A\bar{x},x_k\rangle-\frac{1}{2}\langle A\bar{x},x_k\rangle+\frac{1}{2}\langle A\bar{x},\bar{x}\rangle&(17.496b)\\&=\frac{1}{2}\Big(\langle A(x_k-\bar{x}),x_k\rangle+\langle A\bar{x},\bar{x}-x_k\rangle\Big)&(17.496c)\\&=\frac{1}{2}\Big(\langle A(x_k-\bar{x}),(x_k-\bar{x})\rangle\Big)&(17.496d)\end{aligned}$$

où à la dernière ligne nous avons fait $\langle A\bar{x},\bar{x}-x_k\rangle=\langle\bar{x},A(\bar{x}-x_k)\rangle$ en vertu de la symétrie de A.

Les produits de la forme $\langle Ay,y\rangle$ sont majorés par $\lambda_{min}\|y\|^2$ parce que λ_{min} est la plus petite valeur propre de A. Dans notre cas,

$$f(x_k)-\bar{f}\geqslant\frac{1}{2}\lambda_{min}\|x_k-\bar{x}\|^2\tag{17.497}$$ EqVMRooUMXjig

(9) **Conclusion**

En combinant les inéquations (17.497) et (17.495) nous trouvons

$$\frac{1}{2}\lambda_{min}\|x_k-\bar{x}\|^2\leqslant f(x_k)-\bar{f}\leqslant\big(f(x_0)-\bar{f}\big)\left(\frac{c_2(A)-1}{c_2(A)+1}\right)^{2k},\tag{17.498}$$

c'est-à-dire

$$\|x_k-\bar{x}\|\leqslant\sqrt{\frac{2\big(f(x_0)-\bar{f}\big)}{\lambda_{min}+1}}^{2k}.\tag{17.499}$$

□

Notons que lorsque $c_2(A)$ est proche de 1 la méthode converge rapidement. Par contre si $c_2(A)$ est proche de zéro, la méthode converge lentement.

17.14 Formes quadratiques, signature, et lemme de Morse

NORMooHSWKooLtUbRl

17.115.
Soit $(E,\|.\|_E)$ un espace vectoriel réel normé de dimension finie n. L'ensemble des formes quadratiques réelles[62] sur E est vu comme l'ensemble des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$; il sera noté $Q(E)$ et le sous-ensemble des formes quadratiques non dégénérées est $S_n(\mathbb{R})\cap\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ qui sera noté $\Omega(E)$. Nous rappelons que la correspondance est donnée de la façon suivante.

Si $A\in S_n(\mathbb{R})$, la forme quadratique associée est q_A donnée par le produit scalaire $q_A(x)=x\cdot Ax$.

Pour information, le lemme de Morse est le lemme 20.198.

[62] Définition 8.121.

NORMooQZFLooYnILtn

17.116.
Nous noterons encore $Q^+(E)$ les formes quadratiques positives sur E et $Q^{++}(E)$ les formes quadratiques strictement définies positives sur E.

Sur $Q(E)$ nous mettons la norme

$$N(q) = \sup_{\|x\|_E=1} |q(x)|, \tag{17.500}$$

qui du point de vue de $S_n(\mathbb{R})$ est

EqDOgBNAg

$$N(A) = \sup_{\|x\|_E=1} |x^t Ax|. \tag{17.501}$$

Notons que à droite, c'est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$.

Nous savons par le théorème de Sylvester (théorème 8.249) que dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, toute matrice symétrique de signature (p,q) est semblable à la matrice

$$\mathbb{1}_{p,q} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_q & & \\ & \mathbb{1}_p & \\ & & 0_{n-p-q} \end{pmatrix}. \tag{17.502}$$

Donc deux matrices de S_n sont semblables si et seulement si elles ont la même signature (même si elles ne sont pas de rang maximum, cela soit dit au passage). Si nous notons $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques de signature (p,q), alors

$$S_n^{p,q}(\mathbb{R}) = \{P^tAP \text{ tel que } P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\} \tag{17.503}$$

où A est une quelconque ce ces matrices.

Nous voudrions en savoir plus sur ces ensembles. En particulier nous aimerions savoir si la signature est une notion « stable » au sens où ces ensembles seraient ouverts dans S_n. Pour cela nous considérons l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sur S_n définie par

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}) &\to S_n(\mathbb{R}) \\ (P,A) &\mapsto P^tAP \end{aligned} \tag{17.504}$$

faite exprès pour que les orbites de cette action soient les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$.

La proposition suivante montre que lorsque $p+q=n$, c'est-à-dire lorsqu'on parle de matrices de rang maximum, les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ sont ouverts, c'est-à-dire que la signature d'une forme quadratique est une propriété « stable » par petite variations des éléments de matrice. Notons tout de suite que si le rang n'est pas maximum, le théorème de Sylvester dit qu'elle est semblable à une matrice diagonale avec des zéros sur la diagonale ; en modifiant un peu ces zéros, on peut modifier évidemment la signature.

PropNPbnsMd

Proposition 17.117 ([128]).
Soit $(E,\|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors

1. *les formes quadratiques non dégénérées forment un ouvert dans l'ensemble des formes quadratiques,*
2. *les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ avec $p+q=n$ sont ouverts dans $S_n(\mathbb{R})$,* ItemGOhRIiViii
3. *les composantes connexes de $\Omega(E)$ sont les $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ avec $p+q=n$,* ItemGOhRIiViv
4. *les $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ non dégénérés sont connexes par arc.*

Démonstration. Cette preuve est donnée du point de vue des matrices. La différence entre le point (3) et (4) est que dans le premier nous prouvons la connexité de $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ à partir de la connexité de $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$, tandis que dans le second nous prouvons la connexité par arc de $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ à partir de la connexité par arc de $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$. Bien entendu le second implique le premier.

(1) Il s'agit simplement de remarquer que $Q(E) = S_n(\mathbb{R})$, que $\Omega(E) = S_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et que le déterminant est une fonction continue sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

(2) Soit $A_0 \in S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. Le théorème de Sylvester 8.249 nous donne une matrice inversible P telle que $P^tA_0P = \mathbb{1}_{p,q}$. Nous allons montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\mathbb{1}_{p,q}$ contenu dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. À partir de là, l'ensemble $(P^{-1})^t\mathcal{U}P^{-1}$ sera un voisinage de A_0 contenu dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$.

Nous considérons les espaces vectoriels

$$F = \mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_p\} \tag{17.505a}$$
$$G = \mathrm{Span}\{e_{p+1},\dots,e_n\} \tag{17.505b}$$

La norme euclidienne $\|.\|_p$ sur F est équivalente à la norme $|.|_E$ par le théorème 10.61. Donc il existe une constante $k_1 > 0$ telle que pour tout $x \in F$,

$$\|x\|_p \geqslant k_1 \|x\|_E. \tag{17.506}$$

De la même façon sur G, il existe une constante $k_2 > 0$ telle que

$$\|x\|_q \geqslant k_2 \|x\|_E. \tag{17.507}$$

Si nous posons $k = \min\{k_1^2, k_2^2\}$, alors nous avons

$$\forall x \in F, \quad \|x\|_p^2 \geqslant k_1^2 \|x\|_E^2 \geqslant k\|x\|_E^2 \tag{17.508a}$$

$$\forall x \in G, \quad \|x\|_q^2 \geqslant k_2^2 \|x\|_E^2 \geqslant k\|x\|_E^2. \tag{17.508b}$$

Soit une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A - \mathbb{1}_{p,q}) < k$, c'est-à-dire que A est dans un voisinage de $\mathbb{1}_{p,q}$ pour la norme sur $S_n(\mathbb{R})$ donné par (17.501). Si x est non nul dans E, nous avons

$$\left|x^t(A - \mathbb{1}_{p,q})x\right| \leqslant N(\mathbb{1}_{p,q} - A)\|x\|^2 \leqslant k\|x\|^2. \tag{17.509}$$

En déballant la valeur absolue, cela signifie que

$$-k\|x\|_E^2 \leqslant x^t(A - \mathbb{1}_{p,q})x \leqslant k\|x\|^2. \tag{17.510}$$

Si $x \in F$, alors la première inéquation et (17.506) donnent

$$x^t A x \geqslant \|x\|_p^2 - k\|x\|_E^2 > 0 \tag{17.511}$$

Si $x \in G$, alors la seconde inéquation et (17.507) donnent

$$x^t A x \leqslant k\|x\|_E^2 - \|x\|_q^2 < 0. \tag{17.512}$$

Nous avons donc montré que $x \mapsto x^t A x$ est positive sur F et négative sur G, ce qui prouve que A est bien de signature (p, q) et appartient donc à $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. Autrement dit nous avons

$$B(\mathbb{1}_{p,q}, k) \subset S_n^{p,q}(\mathbb{R}). \tag{17.513}$$

(3) Cette partie de la preuve provient essentiellement de [590], et fonctionne pour tous les $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$, même pour ceux qui ne sont pas de rang maximum.

Soit $A \in S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. Nous savons que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ contient exactement deux composantes connexes (proposition 13.26). Vu que l'application

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) &\to S_n \\ P &\mapsto P^t A P \end{aligned} \tag{17.514}$$

est continue, l'image d'un connexe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ par α est connexe (lemme 7.273). En particulier, $\alpha\big(\mathrm{GL}^{\pm}(n, \mathbb{R})\big)$ sont deux connexes et nous savons que $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ a au plus ces deux composantes connexes.

Notre but est maintenant de trouver une intersection entre les parties $\alpha\big(\mathrm{GL}^{+}(n, \mathbb{R})\big)$ et $\alpha\big(\mathrm{GL}^{-}(n, \mathbb{R})\big)$[63]. Soit par le théorème de Sylvester, soit par le théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles 8.225, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ diagonalisant A. En suivant la remarque 8.226, et en notant Q la matrice obtenue à partir de P en changeant le signe de sa première ligne, nous avons

$$\alpha(Q) = Q^t A Q = P^t A P = \alpha(P). \tag{17.515}$$

Or si $P \in \mathrm{GL}^{+}(n, \mathbb{R})$, alors $Q \in \mathrm{GL}^{-}(n, \mathbb{R})$ et inversement. Donc nous avons trouvé une intersection entre $\alpha\big(\mathrm{GL}^{+}(n, \mathbb{R})\big)$ et $\alpha\big(\mathrm{GL}^{-}(n, \mathbb{R})\big)$.

(4) Soient A et B dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Par le théorème de Sylvester, il existe P et Q dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ telles que $A = P^t \mathbb{1}_{p,q} P$ et $B = Q^t \mathbb{1}_{p,q} Q$. Par la remarque 8.226 nous pouvons choisir P et Q dans $\mathrm{GL}^{+}(n, \mathbb{R})$. Ce dernier groupe étant connexe par arc, il existe un chemin

$$\gamma\colon [0, 1] \to \mathrm{GL}^{+}(n, \mathbb{R}) \tag{17.516}$$

tel que $\gamma(0) = P$ et $\gamma(1) = Q$. Alors le chemin

$$s \mapsto \gamma(s)^t \mathbb{1}_{p,q} \gamma(s) \tag{17.517}$$

est un chemin continu dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ joignant A à B.

[63] À ce point, il me semble que [590] fait erreur parce que la matrice $-\mathbb{1}_n$ est de déterminant 1 lorsque n est pair. L'argument donné ici provient de [128]

□

Nous savons déjà de la proposition 17.117 que les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ (pas spécialement de rang maximum) sont ouverts dans $S_n(\mathbb{R})$. Le lemme suivant nous donne une précision à ce sujet, dans le cas des matrices de rang maximum, en disant que la matrice qui donne la similitude entre A_0 et A est localement un C^1-difféomorphisme de A.

LemWLCvLXe

Lemme 17.118.
Soit $A_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n) = S_n \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, une matrice symétrique inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans S_n et une application $\varphi\colon V \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ qui

(1) est de classe C^1,

(2) est telle que pour tout $A \in V$, $\varphi(A)^t A_0 \phi(A) = A$.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to S_n\\ M &\mapsto M^t A_0 M.\end{aligned} \tag{17.518}$$

Étant donné que les composantes de $\varphi(M)$ sont des polynômes en les entrées de M, cette application est de classe C^1 – et même plus. Soit maintenant $H \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et calculons $d\varphi_{\mathbb{1}}(H)$ par la formule (12.715) :

$$d\varphi_{\mathbb{1}}(H) = \frac{d}{dt}\Big[\varphi(\mathbb{1}+tH)\Big]_{t=0} \tag{17.519a}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[(\mathbb{1}+tH^t)A_0(\mathbb{1}+tH)\Big]_{t=0} \tag{17.519b}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[A_0 + tA_0H + tH^tA_0 + t^2H^tA_0H\Big]_{t=0} \tag{17.519c}$$
$$= A_0H + H^tA_0. \tag{17.519d}$$

Donc

$$d\varphi_{\mathbb{1}}(H) = (A_0H) + (A_0H)^t. \tag{17.520}$$

Par conséquent

$$\ker(d\varphi_{\mathbb{1}}) = \{H \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \text{ tel que } A_0H \text{ est antisymétrique}\}, \tag{17.521}$$

et si nous posons

$$F = \{H \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \text{ tel que } A_0H \text{ est symétrique}\} \tag{17.522}$$

nous avons

$$\mathbb{M}(n,\mathbb{R}) = F \oplus \ker(d\varphi_{\mathbb{1}}) \tag{17.523}$$

parce que toute matrice peur être décomposée de façon unique en partir symétrique et antisymétrique. De plus l'application

$$\begin{aligned}f\colon F &\to S_n\\ H &\mapsto A_0H\end{aligned} \tag{17.524}$$

EqGTBusDm

est une bijection linéaire. D'abord $A_0H = 0$ implique $H = 0$ parce que A_0 est inversible, et ensuite si $X \in S_n$, alors $X = A_0A_0^{-1}X$, ce qui prouve que X est l'image par f de $A_0^{-1}X$ et donc que f est surjective.

Maintenant nous considérons la restriction $\psi = \varphi_{|_F}$, $\psi\colon F \to S_n$. Remarquons que $\mathbb{1} \in F$ parce que $A_0 \in S_n$. L'application $d\psi_{\mathbb{1}}$ est une bijection. En effet d'abord

$$d(\varphi_{|_F})_{\mathbb{1}} = (d\varphi_{\mathbb{1}})_{|_F}, \tag{17.525}$$

ce qui prouve que

$$\ker(d\psi_{\mathbb{1}}) = \ker(d\varphi_{\mathbb{1}}) \cap F = \{0\}, \tag{17.526}$$

ce qui prouve que $d\psi_{\mathbb{1}}$ est injective. Pour montrer que $d\psi_{\mathbb{1}}$ est surjective, il suffit de mentionner le fait que $\dim F = \dim S_n$ du fait que l'application (17.524) est une bijection linéaire.

Nous pouvons utiliser le théorème d'inversion locale (théorème 17.47) et conclure qu'il existe un voisinage ouvert U de $\mathbb{1}$ dans F tel que ψ soit un difféomorphisme C^1 entre U et $V = \psi(U)$. Vu que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, nous pouvons prendre $U \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et donc supposer que $U \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Pour tout $A \in V$, il existe une unique $M \in U$ telle que $\psi(M) = A$, c'est-à-dire telle que $A = M^t A_0 M$. Cette matrice M est $\psi^{-1}(A)$ et est une matrice inversible. Bref, nous posons

$$\begin{aligned} \phi\colon V &\to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \psi^{-1}(A), \end{aligned} \tag{17.527}$$

et ce ϕ est de classe C^1 sur V parce que c'est ce que dit le théorème d'inversion locale. Cette application répond à la question parce que V est un voisinage de $\varphi(\mathbb{1}) = A_0$ et pour tout $A \in V$ nous avons

$$\phi(A)^t A_0 \phi(A) = \varphi^{-1}(A)^t A_0 \varphi^{-1}(A) = A. \tag{17.528}$$

□

17.15 Ellipsoïde de John-Loewner

C'est le moment de relire les conventions de notations données en 17.115 et 17.116 ainsi que la définition 8.121 d'une forme quadratique.

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de q est diagonale. Dans cette base, la forme q est donnée par la proposition 8.253 :

$$q(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \tag{17.529}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de q.

Plus généralement nous notons $mat_{\mathcal{B}}(q)$ la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

PropOXWooYrDKpw

Proposition 17.119.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et l'application[64]

$$\begin{aligned} D\colon Q(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto \det\big(mat_{\mathcal{B}}(q)\big). \end{aligned} \tag{17.530}$$

Alors :

(1) *La valeur de D ne dépend pas du choix de la base orthonormée $\mathcal{B}$.*

(2) *La fonction D est donnée par la formule $D(q) = \prod_i \lambda_i$ où les λ_i sont les valeurs propres de q.*

(3) *La fonction D est continue.*

Démonstration. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Nous considérons $\mathcal{B}$ une base de diagonalisation de q :

$$q(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \tag{17.531}$$

où les x_i sont les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$. Par définition, la matrice $mat_{\mathcal{B}}(q)$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de q.

Nous considérons aussi $\mathcal{B}_1$, une autre base orthonormées de $\mathbb{R}^n$. Nous notons $S = mat_{\mathcal{B}_1}(q)$; étant symétrique, cette matrice se diagonalise par une matrice orthogonale : il existe $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ telle que

$$S = P mat_{\mathcal{B}}(q) P^t; \tag{17.532}$$

donc $\det(S) = \det(PP^t) \det\big(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\big) = \lambda_1 \dots \lambda_n$. Ceci prouve en même temps que D ne dépend pas du choix de la base et que sa valeur est le produit des valeurs propres.

Passons à la continuité. L'application déterminant $\det\colon S_n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ est continue car polynôme en les composantes. D'autre part l'application $mat_{\mathcal{B}}\colon Q(\mathbb{R}^n) \to S_n(\mathbb{R})$ est continue par la proposition 8.138. L'application D étant la composée de deux applications continues, elle est continue. □

LEMooLSTOooZiEOdx

Lemme 17.120 (Volume d'un ellipsoïde[128, 1])**.**
Soit une forme quadratique strictement définie positive q sur $\mathbb{R}^n$. Nous considérons l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x) \leqslant r^2\} \tag{17.533}$$

[64] L'ensemble $Q(E)$ est l'ensemble des formes quadratiques sur E.

pour un certain $r > 0$.

Alors le volume de $\mathcal{E}$ est donné par

$$V_q = \frac{V_0 r^n}{\sqrt{D(q)}} \tag{17.534}$$

où V_0 est une constante[65] *et D est l'application de la proposition 17.119.*

Démonstration. Vu que la matrice de q est symétrique, elle est diagonalisable par une matrice orthogonale (théorème 8.225). Autrement dit, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \tag{17.535}$$

EqELBooQLPQUj

où $x_i = \langle e_i, x \rangle$ et les a_i sont tous strictement positifs.

À priori nous devrions calculer

$$\int_{\mathcal{E}} dx, \tag{17.536}$$

mais nous effectuons le changement de variable[66] associé à la matrice qui diagonalise q et nous devons simplement calculer

$$V_q = \int_{\sum_i a_i x_i^2 < r^2} dx \tag{17.537}$$

parce que le jacobien de ce changement de variable est 1 (déterminant d'une matrice orthogonale).

Tout cela pour dire que nous nommons $\mathcal{E}_q$ l'ellipsoïde associée à la forme quadratique q et V_q son volume que nous allons maintenant calculer[67] :

$$V_q = \int_{\sum_i a_i x_i^2 < r^2} dx \tag{17.538}$$

Cette intégrale est écrite de façon plus simple en utilisant le C^1-difféomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathcal{E}_q &\to B(0,1) \\ x &\mapsto \frac{1}{r}\Big(x_1\sqrt{a_1}, \dots, x_n\sqrt{a_n}\Big). \end{aligned} \tag{17.539}$$

Le fait que φ prenne bien ses valeurs dans $B(0,1)$ est un simple calcul : si $x \in \mathcal{E}_q$, alors

$$\sum_i \varphi(x)_i^2 = \frac{1}{r^2} \sum_i a_i x_i^2 = \frac{1}{r^2} q(x) < 1. \tag{17.540}$$

Cela nous permet d'utiliser le théorème de changement de variables 14.282 :

$$V_q = \int_{\sum_i a_i x_i^2 < r^2} dx = \frac{r^n}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} \int_{B(0,1)} dx. \tag{17.541}$$

La dernière intégrale est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et nous la notons V_0. La proposition 17.119 nous permet d'écrire V_q sous la forme

$$V_q = \frac{V_0 r^n}{\sqrt{D(q)}}. \tag{17.542}$$

□

17.121.

Le théorème suivant dit en substance que si K est compact, alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal centré en l'origine et contenant K. Il faut se rendre compte que l'ellipsoïde n'est pas celui que l'on croirait intuitivement parce que la contrainte *centrée en l'origine* est forte. Si $K = \overline{B\big((4,0),1\big)}$, alors l'ellipsoïde donnée n'est pas du tout K lui-même comme on pourrait s'y attendre. Ce serait probablement quelque chose comme la boule centrée en $(0,0)$ et de rayon 5[68].

Ce que l'on voudrait est un ellipsoïde qui soit centré où il faut pour que le volume soit minimal. Nous verrons que c'est possible en la proposition 17.123, mais qu'alors l'unicité est moins évidente (voir la remarque dans [592]). Si vous voulez en entendre parler, vous pouvez lire [593, 594].

[65] C'est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et ce n'est pas tout à fait évident à calculer [591].

[66] Théorème 14.282.

[67] Le volume ne change pas si nous écrivons l'inégalité stricte au lieu de large dans le domaine d'intégration ; nous le faisons pour avoir un domaine ouvert.

[68] Je ne sais pas très bien si il y a moyen de faire mieux. Ce serait sans doute un bon exercice ; faites-moi savoir si vous avez la réponse.

PropJYVooRMaPok

Proposition 17.122 (Ellipsoïde de John-Loewner[128]).
Soit K compact dans $\mathbb{R}^n$ et d'intérieur non vide. Il existe une unique ellipsoïde[69] *(pleine) centrée en l'origine de volume minimal contenant K.*

Démonstration. Nous subdivisons la preuve en plusieurs parties.

(1) **Volume de l'ellipsoïde** Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde centré en l'origine. La proposition 8.314 et son corolaire 8.315 nous indiquent que

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x) \leqslant 1\} \tag{17.543}$$

pour une certaine forme quadratique strictement définie positive q. Le lemme 17.120 nous donne alors le volume de $\mathcal{E}$ par

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}} \tag{17.544}$$

où V_0 est une constante.

(2) **Existence de l'ellipsoïde**

Nous voulons trouver un ellipsoïde contenant K de volume minimal, c'est-à-dire une forme quadratique $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ telle que

- $D(q)$ soit maximal
- $q(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in K$.

Nous considérons l'ensemble des candidats semi-définis positifs.

$$A = \{q \in Q^+ \text{ tel que } q(x) \leqslant 1 \forall x \in K\}. \tag{17.545}$$

Nous allons montrer que A est convexe, compact et non vide dans $Q(\mathbb{R}^n)$; il aura ainsi un maximum de la fonction continue D définie sur $Q(\mathbb{R}^n)$. Nous montrerons ensuite que le maximum est dans Q^{++}. L'unicité sera prouvée à part.

(2a) **Non vide** L'ensemble K est compact et donc borné par $M > 0$. La forme quadratique $q\colon x \mapsto \|x\|^2/M^2$ est dans A parce que si $x \in K$ alors

$$q(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2} \leqslant 1. \tag{17.546}$$

(2b) **Convexe** Soient $q, q' \in A$ et $\lambda \in [0,1]$. Nous avons encore $\lambda q + (1-\lambda)q' \in Q^+$ parce que

$$\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \geqslant 0 \tag{17.547}$$

dès que $q(x) \geqslant 0$ et $q'(x) \geqslant 0$. D'autre part si $x \in K$ nous avons

$$\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1. \tag{17.548}$$

Donc $\lambda q + (1-\lambda)q' \in A$.

(2c) **Fermé**

Pour rappel, la topologie de $Q(\mathbb{R}^n)$ est celle de la norme (8.284). Nous considérons une suite (q_n) dans A convergeant vers $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ et nous allons prouver que $q \in A$, de sorte que la caractérisation séquentielle de la fermeture (proposition 7.154) conclue que A est fermé. En nommant e_x le vecteur unitaire dans la direction x nous avons

$$\big|q(x)\big| = \big|\|x\|^2 q(e_x)\big| \leqslant \|x\|^2 N(q), \tag{17.549}$$

de sorte que notre histoire de suite convergente donne pour tout x :

$$\big|q_n(x) - q(x)\big| \leqslant \|x\|^2 N(q_n - q) \to 0. \tag{17.550}$$

Vu que $q_n(x) \geqslant 0$ pour tout n, nous devons aussi avoir $q(x) \geqslant 0$ et donc $q \in Q^+$ (semi-définie positive). De la même manière si $x \in K$ alors $q_n(x) \leqslant 1$ pour tout n et donc $q(x) \leqslant 1$. Par conséquent $q \in A$ et A est fermé.

[69] Définition 8.312.

(2d) **Borné**

La partie K de $\mathbb{R}^n$ est borné et d'intérieur non vide, donc il existe $a \in K$ et $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset K$. Si par ailleurs $q \in A$ et $x \in \overline{B(0,r)}$ nous avons $a + x \in K$ et donc $q(a+x) \leqslant 1$. De plus $q(-a) = q(a) \leqslant 1$, donc

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q\big(x + a - a\big)} \leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leqslant 2 \tag{17.551}$$

par l'inégalité de Minkowski 10.23. Cela prouve que si $x \in \overline{B(0,r)}$ alors $q(x) \leqslant 4$. Si par contre $x \in \overline{B(0,1)}$ alors $rx \in \overline{B(0,r)}$ et

$$0 \leqslant q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leqslant \frac{4}{r^2}, \tag{17.552}$$

ce qui prouve que $N(q) \leqslant \frac{4}{r^2}$ et que A est borné.

L'ensemble A est compact parce que fermé et borné, théorème de Borel-Lebesgue 9.24. L'application continue $D\colon Q(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ de la proposition 17.119 admet donc un maximum sur le compact A. Soit q_0 ce maximum.

Nous montrons que $q_0 \in Q^{++}(\mathbb{R}^d)$. Nous savons que l'application $f\colon x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ est dans A et que $D(f) > 0$. Vu que q_0 est maximale pour D, nous avons

$$D(q_0) \geqslant D(f) > 0. \tag{17.553}$$

Donc $q_0 \in Q^{++}$.

(3) **Unicité**

Si il existe une autre ellipsoïde de même volume que celle associée à la forme quadratique q_0, nous avons une forme quadratique $q \in Q^{++}$ telle que $q(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in K$. C'est-à-dire que nous avons $q_0, q \in A$ tels que $D(q_0) = D(q)$.

Nous considérons la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ et nous posons $S = mat_{\mathcal{B}_c}(q)$, $S_0 = mat_{\mathcal{B}_c}(q_0)$. Étant donné que A est convexe, $(q_0 + q)/2 \in A$ et nous allons prouver que cet élément de A contredit la maximalité de q_0. En effet

$$D\left(\frac{q+q_0}{2}\right) = \det\left(\frac{S+S_0}{2}\right) \tag{17.554}$$

Nous allons utiliser le lemme 17.92 qui dit que le déterminant est log-concave sous la forme de l'équation (17.361) avec $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

$$D\left(\frac{q+q_0}{2}\right) = \det\left(\frac{S+S_0}{2}\right) > \sqrt{\det(S)}\sqrt{\det(S_0)} = \det(S_0) = D(q_0). \tag{17.555}$$

eqBHJooYEUDPC

Nous avons utilisé le fait que $D(q_0) = D(q)$ qui signifie que $\det(S_0) = \det(S)$. L'inéquation (17.555) contredit la maximalité de $D(q_0)$ et donne donc l'unicité.

□

Dans la proposition suivante nous oublions l'unicité, mais nous démontrons qu'il existe un ellipsoïde de volume minimal parmi les ellipsoïdes centrées où l'on veut et non seulement en zéro. La source de cette proposition est [1], et comme toujours avec cette source, vous devez regarder à la fois l'énoncé et la preuve avec un oeil encore plus prudent que d'habitude.

PROPooVIDPooOGrRJh

Proposition 17.123 ([1]).
Soit un compact d'intérieur non vide K dans $\mathbb{R}^n$. Il existe un ellipsoïde de volume minimal contenant K.

Démonstration. Au lieu de considérer le compact K et de chercher où centrer l'ellipsoïde afin qu'elle puisse contenir K en un volume minimal, nous allons chercher comment translater K pour qu'un ellipsoïde centré en zéro puisse contenir l'image translétée de K en un volume minimal.

Pour $a \in \mathbb{R}^n$, nous notons $\mathcal{E}_a$ la plus petite ellipsoïde centrée en 0 contenant $K + a$ (translation de K par le vecteur a). Elle est bien définie par la proposition 17.122. Notre jeu est maintenant d'étudier la fonction[70]

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^+ \\ a &\mapsto \mathrm{vol}(\mathcal{E}_a). \end{aligned} \tag{17.556}$$

Nous allons montrer que f est continue et qu'elle peut être restreinte à un compact sans risque de rater un minimum.

[70] Notons que cette fonction est bien définie, même sans la partie unicité de 17.122 parce que même si $\mathcal{E}_a$ n'était pas bien définie, son volume, lui, est bien défini.

(1) **À propos de forme quadratique** Nous notons q la forme quadratique de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_0$ et A sa matrice symétrique associée. Si $x \in K + h$ nous avons, pour un certain $k \in K$:

$$\begin{aligned} q(x) &= q(k+h) && (17.557a)\\ &= \langle k+h, A(k+h)\rangle && (17.557b)\\ &= \langle k, Ak\rangle + \langle k, Ahx\rangle + \langle h, Ak\rangle + \langle h, Ah\rangle. && (17.557c)\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $A = A^t$ nous avons aussi $\langle k, Ah\rangle = \langle h, Ak\rangle$ et donc

$$q(x) = 2\langle k, Ah\rangle + q(h). \tag{17.558}$$

En ce qui concerne la norme, pour tout $x \in K + h$ nous avons donc la majoration

$$\begin{aligned} |q(x)| &\leqslant 1 + 2\|k\|\|Ah\| + q(h) && (17.559a)\\ &\leqslant 1 + 2|K|\|Ah\| + q(h) && (17.559b)\end{aligned}$$

où nous avons noté $|K| = \sup_{k\in K}\|k\|$. Vu que $q(x)$ est en fait toujours positif nous pouvons oublier la valeur absolue à gauche et conclure que $K + h$ est contenu dans l'ellipsoïde

$$\mathcal{F}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x) \leqslant 1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\}. \tag{17.560}$$

(2) **Volumes**

Nous avons donc $\text{vol}(\mathcal{E}_h) \leqslant \text{vol}(\mathcal{F}_1)$. En reprenant la formule du lemme 17.120 pour le volume de l'ellipsoïde nous avons la majoration

$$\text{vol}(\mathcal{E}_h) \leqslant \text{vol}(\mathcal{E}_0)\big(1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\big)^n. \tag{17.561}$$

Autrement dit, en ce qui concerne notre fonction f :

$$f(h) \leqslant f(0)\big(1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\big)^n. \tag{17.562}$$ EQooLVZCooJVxVNx

Nous pouvons faire le même raisonnement en partant de $K+h$ et en voyant comment modifier le rayon de $\mathcal{E}_h$ pour que $\mathcal{E}_0$ y rentre. Autrement dit, nous refaisons le raisonnement en posant $K' = K + h$ et en étudiant $K' - h$. Si q_1 est la forme quadratique de $\mathcal{E}_h$ et si A_1 est sa matrice symétrique,

$$\text{vol}(\mathcal{E}_0) \leqslant \text{vol}(\mathcal{E}_h)\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n \tag{17.563}$$

En termes de f :

$$f(0) \leqslant f(h)\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n \tag{17.564}$$ EQooRHWNooDisTvn

(3) **Encadrement**

Les majoration (17.562) et (17.564) nous permettent de créer un encadrement pour $f(h)$. En effet, en écrivant (17.564) et en continuant la majoration en remplaçant $f(h)$ par (17.562), nous obtenons

$$\begin{aligned} f(0) &\leqslant f(h)\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n\\ &\leqslant f(0)\big(1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\big)^n\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n. \end{aligned} \tag{17.565}$$

Vu que nous avons dans l'idée de prendre des h petits (en norme) et que les parenthèses tendent vers 1 lorsque h est petit, nous pouvons supposer qu'elles sont non nulles et allègrement les passer au dénominateur. Nous divisons donc tout par le coefficient de $f(h)$:

$$\frac{f(0)}{\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n} \leqslant f(h) \leqslant f(0)\big(1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\big)^n \tag{17.566}$$

Nous utilisons la règle de l'étau[71] pour conclure que

$$\lim_{h\to 0} \text{vol}(\mathcal{E}_h) = \text{vol}(\mathcal{E}_0). \tag{17.567}$$ EQooCMAQooMkkEVR

(4) **Continuité** Si $a \in \mathbb{R}^n$ nous pouvons appliquer la limite (17.567) pour l'ellipsoïde $\mathcal{E}_a$ au lieu de $\mathcal{E}_0$, c'est-à-dire en partant du compact $K + a$ au lieu de K. Cela donne

$$\lim_{h\to 0} \text{vol}(\mathcal{E}_{a+h}) = \text{vol}(\mathcal{E}_a). \tag{17.568}$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^n$.

[71] Théorème 12.246.

(5) **Compact**

Nous avons en hypothèse que K est d'intérieur non vide. Il existe donc $a \in K$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset K$. Soit l'hyperplan affine H passant par a et perpendiculaire à a. Nous notons $S = H \cap B(a,r)$. Nous avons évidemment $S \subset K$ et donc $S \subset \mathcal{E}_0$. Vu que l'ellipsoïde $\mathcal{E}_0$ est convexe et contient K, tout le cône de base S et de hauteur a est dans $\mathcal{E}_0$.

Sans rentrer dans le détails du calcul du volume de ce cône, son volume tend vers l'infini si a tend vers l'infini[72]

Nous avons donc une majoration

$$\text{vol}(\mathcal{E}_h) \geqslant \text{volume du cône de base } S \text{ et de hauteur } a+h. \tag{17.569}$$

Dès que ce volume est plus grand que $\text{vol}(\mathcal{E}_0)$, il est impossible que $\text{vol}(\mathcal{E}_h) \leqslant \text{vol}(\mathcal{E}_0)$. Soit $R > 0$ tel que pour tout $\|h\| \geqslant R$, le volume du cône soit plus grand que $\text{vol}(\mathcal{E}_0)$. Le minimum de f est certainement dans $B(0,R)$ parce que au moins

$$\text{vol}(\mathcal{E}_0) \in f\big(B(0,R)\big). \tag{17.570}$$

(6) **Minimum**

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \overline{B(0,R)} &\to \mathbb{R}^+ \\ h &\mapsto \text{vol}(\mathcal{E}_h). \end{aligned} \tag{17.571}$$

Elle est continue sur un compact, et le théorème de Weierstrass 7.196 nous dit alors qu'elle atteint son minimum. Il n'y a cependant pas unicité de la valeurs de h pour laquelle $f(h)$ est minimum.

(7) **Envoi**

Soit $s \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(s)$ soit minimal. Cela signifie que parmi tous les ellipsoïdes centrés en zéro et contenant des ensembles de la forme $K+h$, le plus petit est celui qui contient $K+s$. Soit $\mathcal{E}_s$ cet ellipsoïde.

Je prétend que $\mathcal{E}_s - s$ est le plus petit ellipsoïde contenant K, tout centres confondus. En effet, si $\mathcal{F}$ est un ellipsoïde centré en a et contenant K, alors $\mathcal{F}-a$ est un ellipsoïde centré en zéro et contenant $K-a$. Nous avons alors

$$\text{vol}(\mathcal{F}-a) \geqslant \text{vol}(\mathcal{E}_s) = \text{vol}(\mathcal{E}_s - s). \tag{17.572}$$

L'invariance de la mesure par translation est le théorème 14.252.

□

17.16 Prolongement de fonctions

LEMooTUQIooEyTLBa

Lemme 17.124 ([1])**.**
Soient un espace topologique X et un ouvert $V \subset X$. Nous considérons une fonction $\phi \in C_c^0(V,\mathbb{C})$. Alors l'extension

$$\begin{aligned} h\colon X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{17.573}$$

est continue sur X.

LemdCOMQM

Lemme 17.125.
Soit E, un espace vectoriel normé complet et (A_n) une suite emboîtée de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro. Alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ contient exactement un point.

Démonstration. Si l'intersection contenait deux points distincts a et b, alors nous aurions pour tout n la majoration $\text{diam}(A_n) \geqslant \|a-b\|$ qui ne dépend pas de n. Cela contredirait la limite.

Soit une suite (x_n) avec $x_k \in A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est une suite de Cauchy. En effet si $\epsilon > 0$, considérons N tel que $\text{diam}(A_N) < \epsilon$. Dans ce cas dès que $n,m > N$ nous avons $x_n, x_m \in A_N$ et donc $\|x_n - x_m\| \leqslant \epsilon$. La suite x_n converge donc vers un élément dans E.

Nous devons montrer que $x \in A_k$ pour tout k. La queue de suite $(x_n)_{n\geqslant k}$ est une suite de Cauchy dans A_k qui converge donc vers un élément de A_k (ici nous utilisons le fait que A_k est fermé). Par unicité de la limite, cette dernière doit être x. Par conséquent $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

[72] Topologie du complété en un point, j'imagine que vous voyez de quoi il en retourne. Sinon c'est la définition 7.185, et il faut sans doute adapter le lemme 12.87 au cas de $\mathbb{R}^n$ pour tout faire dans les règles.

ThoCaMpKO

Théorème 17.126 ([595]).
Soient X et Y des espaces vectoriels normés. Pour une application linéaire $f\colon X \to Y$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue sur X,

(2) f est continue en un point de X,

(3) f est bornée.

PropTTiRgAq

Proposition 17.127 ([596]).
Soit un espace normé X, un espace de Banach F et une partie dense A de X. Si l'application linéaire

$$f\colon \big(A, \|.\|_X\big) \to F \tag{17.574}$$

est continue[73]*, alors il existe une unique application linéaire continue $\tilde{f}\colon X \to F$ prolongeant f. De plus $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.*

Démonstration. Soient $x \in X$ et $(A_n)_{n\geqslant 0}$ la suite d'ensembles définie par

$$A_n = \{y \in A \text{ tel que } \|x - y\| \leqslant 2^{-n}\}. \tag{17.575}$$

Étant donné que A est dense, ces ensembles sont tous non vides. De plus $\operatorname{diam} A_n \to 0$ parce que si $y, y' \in A_n$ alors

$$\|y - y'\| \leqslant \|y - x\| + \|x - y'\| \leqslant 2^{-n+1}. \tag{17.576}$$

Vu que f est bornée, la suite d'ensembles $f(A_n)$ est une suite emboitée d'ensembles non vides de F. De plus leur diamètre tend vers zéro. En effet si $z, z' \in f(A_n)$, nous posons $z = f(y)$, $z' = f(y')$ et nous avons

$$\|z - z'\| \leqslant \|f(y) - f(x)\| + \|f(x) - f(y')\| \leqslant \|f\|\big(\|y - x\| + \|x - y'\|\big), \tag{17.577}$$

ce qui montre que $\operatorname{diam} f(A_n) \leqslant \|f\|2^{-n+1}$. Notons que nous avons utilisé la linéarité de f. Par le lemme 17.125, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{f(A_n)}$ contient exactement un point. Nous posons

$$S(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{f(A_n)}. \tag{17.578}$$

Nous allons montrer que l'application $x \mapsto S(x)$ ainsi définie est l'application que nous cherchons.

Nous commençons par montrer que pour toute suite $y_k \to x$ avec $y_k \in A$ nous avons

EqBnBZxW

$$f(y_k) \to S(x). \tag{17.579}$$

Pour cela nous considérons $n_0 \in \mathbb{N}$ et k_0 tel que $y_{k_0} \in A_{n_0}$. Avec cela nous avons

$$\|f(y_k) - S(x)\| \leqslant \operatorname{diam}(A_{n_0}) \leqslant \|f\|2^{-n_0+1}. \tag{17.580}$$

Pour montrer que S est linéaire, nous considérons deux suites dans A : $y_k \to x$ et $y'_k \to x'$ ainsi que la somme $y_k + y'k \to x + x'$. Nous écrivons la relation (17.579) pour ces trois suites :

$$f(y_k) \to S(x) \tag{17.581a}$$
$$f(y'_k) \to S(x') \tag{17.581b}$$
$$f(y_k + y'_x) \to S(x + x'). \tag{17.581c}$$

Cependant, étant donné que f est linéaire, pour tout k nous avons $f(y_k + y'_k) = f(y_k) + f(y'_k)$ et par conséquent

$$f(y_k + y'_k) \to S(x) + S(x'). \tag{17.582}$$

Par unicité de la limite, $S(x+x') = S(x)+S(x')$. Le même genre de raisonnement montre que $S(\lambda x) = \lambda S(x)$. L'application S est donc linéaire.

En ce qui concerna la continuité, nous avons

$$\|S(x)\| = \lim \|f(y_k)\| \leqslant \|f\|\|\lim y_k\| = \|f\|\|x\|, \tag{17.583}$$

donc $\|S\| \leqslant \|f\|$, c'est-à-dire que S est borné et donc continue parce que linéaire (théorème 17.126).

Nous montrons maintenant que S prolonge f. Si $x \in A$, alors nous avons $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n) = f(x)$, et donc $S(x) = f(x)$. Cela montre du même coup que $\|f\| \leqslant \|S\|$ et que par conséquent $\|f\| = \|S\|$.

Passons à la partie sur l'unicité. Soient donc S et T deux prolongements continus de f sur X. Soient $x \in X$ et $x_n \to x$ une suite dans A. Par continuité nous avons $T(x_n) \to T(x)$ et $S(x_n) \to S(x)$. Étant donné que par ailleurs pour tout n nous avons $S(x_n) = T(x_n)$, l'unicité de la limite montre que $T(x) = S(x)$. □

[73] Nous avons bien mis sur A la topologie induite de X. Notons que ce n'est pas toujours celle qui est la plus naturelle sur A.

17.16.1 Encore du prolongement

Dans la même veine que la proposition 17.127 nous avons ce résultat.

ThoPVFQMi

Théorème 17.128 ([597]).
Soient E et F, deux espaces métriques complets ainsi que A dense dans E. Si $u\colon A\to F$ est uniformément continue, alors elle se prolonge de façon unique en une fonction continue $\tilde{u}\colon E\to F$. De plus ce prolongement est uniformément continu.

Démonstration. Soit $x\in E\setminus A$ et une suite (x_n) contenue dans A et convergente vers x. Nous voulons définir

$$\tilde{u}(x)=\lim_{n\to\infty}u(x_n) \tag{17.584}$$

mais pour ce faire nous devons prouver que la suite $\big(u(x_n)\big)$ converge dans F et que la limite ne dépend pas de la suite choisie parmi les suites de A qui convergent (dans E) vers x.

Commençons par montrer que $\big(u(x_n)\big)$ est de Cauchy dans F. Pour cela nous prenons $\epsilon>0$ et $\eta>0$ telle que $d_E(a,b)<\eta$ implique $d_F\big(u(a),u(b)\big)<\epsilon$ (uniforme continuité de u). Après, il suffit de choisir N tel que pour tout $n,m>N$ nous ayons $d(x_m,x_n)<\eta$ (parce que x_n est de Cauchy). Avec tout ça nous avons

$$d_F\big(u(x_m),u(x_n)\big)<\epsilon, \tag{17.585}$$

ce qui signifie que $\big(u(x_n)\big)$ est de Cauchy et donc convergente dans F.

Nous voulons montrer maintenant que si (x_n) et (y_n) sont deux suites dans A convergentes vers x alors $\lim_{n\to\infty}u(x_n)=\lim_{n\to\infty}u(y_n)$. Pour cela nous considérons la suite $z=(x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots)$. Nous avons évidemment $z_n\to x$, et donc $u(z_n)$ converge dans F par ce qui a été dit plus haut. Mais $u(x_n)$ et $u(y_n)$ en sont deux sous-suites convergentes. Donc leurs limites sont égales.

Il reste à montrer que ce $\tilde{u}$ est continue et uniformément continue. Pour cela nous utilisons le module de continuité et le lemme 10.357. Étant donné que $\tilde{u}$ prolonge u nous avons

EqFRYqON

$$\omega_{\tilde{u}}(h)\geqslant\omega_u(h). \tag{17.586}$$

Soient $h>0$ et $\epsilon>0$; soient aussi $x,y\in E$ tels que $d(x,y)<h$. Nous prenons des suites $(a_n)\to x$ et $(b_n)\to y$ tout en choisissant n assez grand pour avoir $d_E(a_n,b_n)<h$. Nous avons

$$d_F\big(\tilde{u}(x),\tilde{u}(y)\big)\leqslant d_F\big(\tilde{u}(x),u(a_n)\big)+d\big(u(a_n),u(b_n)\big)+d_F\big(u(b_n),\tilde{u}(y)\big). \tag{17.587}$$

Si n est assez grand, par construction de $\tilde{u}$, le premier et le dernier terme sont plus petits que ϵ. Par définition du module de continuité nous avons d'autre part $d_F\big(u(a_n),u(b_n)\big)\leqslant\omega_u(h)$. Du coup

$$d_F\big(\tilde{u}(x),\tilde{u}(y)\big)\leqslant\omega_u(h)+2\epsilon. \tag{17.588}$$

Si nous prenons le supremum sur les x et y vérifiant $d_E(x,y)<h$, à gauche nous obtenons $\omega_{\tilde{u}}(h)$ tandis que le membre de droite ne dépend pas de x et$y$. Donc pour tout ϵ, nous avons

$$\omega_{\tilde{u}}(h)\leqslant\omega_u(h)+2\epsilon. \tag{17.589}$$

En comparaison avec (17.586), nous trouvons

$$\omega_{\tilde{u}(h)}\leqslant\omega_u(h). \tag{17.590}$$

Les fonctions u et $\tilde{u}$ ayant le même module de continuité, le lemme 10.357 nous enseigne que l'une est uniformément continue si et seulement si l'autre l'est. Vu que u est uniformément continue par hypothèse, le prolongement $\tilde{u}$ est uniformément continu. □

DEFooMHQMooEvLccV

Définition 17.129.
*Un **plongement** de l'espace topologique X dans Y est une application $f\colon X\to Y$ telle que $f\colon X\to f(X)$ soit un homéomorphisme.*

ThoPHllyoB

Théorème 17.130 (Extensiton des isométries).
Soit $\tilde{M}$ un espace métrique complet et une application isométrique

$$f\colon A\to\tilde{M} \tag{17.591}$$

où A est une partie dense d'un espace métrique M (pas spécialement complet). Alors f accepte une unique extension isométrique

$$\tilde{f}\colon M\to\tilde{M} \tag{17.592}$$

Supposons de plus que M soit complet[74]*. Alors $\tilde{f}\colon M \to \tilde{M}$ est une bijection si et seulement si $f(A)$ est dense dans $\tilde{M}$.*

Démonstration. Nous commençons par prouver l'unicité. Soient $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ deux extensions de f et $x \in M$. Si (a_n) est une suite dans A convergeant vers x (possible parce que A est dense dans M), alors nous avons

$$\tilde{f}_1(a_n) = \tilde{f}_2(a_n) \tag{17.593}$$

et donc $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)$ par continuité (une application isométrique est continue (proposition 7.307)).

Nous démontrons à présent l'existence.

(1) **Construction de $\tilde{f}$** Soient $x \in M$ et (a_n) une suite dans A qui converge vers x. Nous définissons

$$\tilde{f}(x) = \lim_{k\to\infty} f(a_k). \tag{17.594}$$ EqHEembqy

Note : nous pouvons prouver que cette définition ne dépend pas du choix de la suite (a_n) convergeant vers x, mais ce serait superflu parce que nous avons déjà prouvé l'unicité de $\tilde{f}$. Par contre nous devons expliquer pourquoi la limite du membre de droite de (17.594) existe dans $\tilde{M}$. D'abord la suite (a_n) est de Cauchy parce qu'elle est convergente (attention : M n'étant pas complet le fait d'être de Cauchy n'implique pas la convergence). Donc, étant donné que f est une isométrie, la suite $\big(f(a_n)\big)$ est de Cauchy dans $\tilde{M}$. Or ce dernier étant complet, la suite des images converge.

Montrons que cette application $\tilde{f}\colon M \to \tilde{M}$ répond à la question.

(2) **$\tilde{f}$ est isométrique**

Soient $a, b \in M$ et des suites dans A convergeant vers eux : $a_n \to a$, $b_n \to b$. Nous avons, par continuité de l'application distance,

$$\begin{aligned}
d\big(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)\big) &= \lim_{k\to\infty} d\big(\tilde{f}(a_k), \tilde{f}(b)\big) && (17.595a)\\
&= \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} d\big(\tilde{f}(a_k), \tilde{f}(b_l)\big) && (17.595b)\\
&= \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} d\big(f(a_k), f(b_l)\big) && (17.595c)\\
&= \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} d\big(a_k, b_l\big) && (17.595d)\\
&= d(a, b). && (17.595e)
\end{aligned}$$

Cela prouve que $\tilde{f}$ est une isométrie.

Pour la suite nous supposons que M est complet. Notons tout de suite que $\tilde{f}$ est injective parce qu'elle est isométrique.

(3) **Bijection implique dense**

Nous supposons que $\tilde{f}\colon M \to \tilde{M}$ est une bijection. Notons que $f\colon A \to \tilde{M}$ a son image dans $\tilde{M}$. Donc $\overline{f(A)} \subset \tilde{M}$.

Étant donné que $\tilde{f}$ a pour image des limites de suites dans $f(A)$, l'image de $\tilde{f}$ est contenue dans $\overline{f(A)}$, c'est-à-dire $\tilde{f}(M) \subset \overline{f(A)}$. Donc si $\tilde{f}$ est surjective, c'est que $\tilde{M} \subset \overline{f(A)}$. Au final nous avons l'égalité $\overline{f(A)} = \tilde{M}$. Cela prouve que si $\tilde{f}$ est bijective, alors $f(A)$ est dense dans $\tilde{M}$.

(4) **Dense implique bijective**

Nous supposons que $\overline{f(A)} = \tilde{M}$ et nous devons prouver que $\tilde{f}$ est surjective. Soient $x \in \tilde{M}$ et $f(a_n)$ une suite dans $f(A)$ qui converge vers x ; une telle suite existe parce que $f(A)$ est dense dans $\tilde{M}$. Cette suite est de Cauchy dans $\tilde{M}$ parce que dans un espace métrique, une suite convergente est de Cauchy. La suite (a_n) est elle-même également de Cauchy parce que

$$d(a_n, a_m) = d\big(f(a_n), f(a_m)\big). \tag{17.596}$$

Étant donné que (a_n) est de Cauchy dans M, elle converge vers un élément que nous nommons $a \in M$. Par continuité de f nous avons alors

$$\tilde{f}(a) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) = x. \tag{17.597}$$

Cela prouve que x est bien dans l'image de $\tilde{f}$ et donc que $\tilde{f}$ est surjective.

□

[74] Il me semble que cette hypothèse manque dans [598].

17.17 Complétion d'un espace métrique

LEMooGJONooVwUgyv

Lemme 17.131 ([599]).
Soient des espaces métriques (X,d) et (Y,ρ). Soit une application isométrique $f\colon X\to Y$.

ITEMooKJJHooAEDflU

(1) Si (x_n) est de Cauchy dans X, alors $\big(f(x_n)\big)$ est de Cauchy dans Y.

ITEMooBGWMooQPfTAz

(2) Si (a_n) et (b_n) sont deux suites de Cauchy dans X ayant la même limite, alors $\big(f(a_n)\big)$ et $\big(f(b_n)\big)$ ont même limite.

Démonstration. Soit $\epsilon>0$. Soit N_ϵ tel que si $p,q\geqslant N_\epsilon$, nous avons $d(x_p,x_q)\leqslant\epsilon$. Pour ce même N_ϵ, vu que f est isométrique,

$$\rho\big(f(x_p),f(x_q)\big)=d(x_p,x_q)\leqslant\epsilon. \tag{17.598}$$

Cela prouve (1). Nous passons à (2).

Supposons $a_n\xrightarrow{X}x$ et $b_n\xrightarrow{X}x$, et nous considérons y_a et y_b les limites $f(a_n)\xrightarrow{Y}y_a$ et $f(b_n)\xrightarrow{Y}y_b$. Nous avons

$$\rho(y_a,y_b)\leqslant\rho\big(y_a,f(a_n)\big)+\underbrace{\rho\big(f(a_n),f(b_n)\big)}_{=d(a_n,b_n)}+\rho\big(f(b_n),y_b\big) \tag{17.599a}$$

$$\leqslant\rho\big(y_a,f(a_n)\big)+d(a_n,x)+d(x,b_n)+\rho\big(f(b_n),y_b\big). \tag{17.599b}$$

À droite, les quatre termes tendent vers zéro lorsque $n\to\infty$. Donc $\rho(y_a,y_b)=0$, et donc $y_a=y_b$. □

LEMooNFIOooZUMhuA

Lemme 17.132 ([599]).
Soient des espaces métriques (X,d) et (Y,ρ) ainsi que D dense dans X. Nous supposons que Y est dense et nous considérons une application isométrique $f\colon D\to Y$.

Alors il existe une unique isométrie $F\colon X\to Y$ qui étend f.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Construction de F** Nous commençons par l'existence. Soit $x\in X$. Étant donné que D est dense dans X, il existe une suite (x_n) dans D telle que $x_n\xrightarrow{X}x$. Nous déduisons du lemme 17.131 que $\big(f(x_n)\big)$ est de Cauchy dans Y, et même que la limite ne dépend pas de la suite (x_n) convergeant vers x. Bref, nous pouvons définir

$$\begin{aligned}F\colon X&\to Y\\ x&\mapsto\lim_{n\to\infty}f(x_n)\end{aligned} \tag{17.600}$$

où (x_n) est n'importe quelle suite dans D qui converge vers x. Si $x\in D$, alors il suffit de prendre la suite constante $x_n=x$ pour obtenir que $F(x)=f(x)$.

(2) **F est une isométrie**

Soient $x,y\in X$ ainsi que deux suites de Cauchy $x_n\xrightarrow{X}x$ et $y_n\xrightarrow{X}y$. Soit $\epsilon>0$. Si n est assez grand,

$$d(x,y)\leqslant d(x,x_n)+d(x_n,y_n)+d(y,y_n) \tag{17.601a}$$

$$\leqslant 2\epsilon+\rho\big(f(x_n),f(y_n)\big)\qquad f\text{ est isom.} \tag{17.601b}$$

$$\leqslant 2\epsilon+\rho\big(f(x_n),F(x)\big)+\rho\big(F(x),F(y)\big)+\rho\big(F(y),f(y_n)\big) \tag{17.601c}$$

$$\leqslant 3\epsilon+\rho\big(F(x),F(y)\big). \tag{17.601d}$$

Donc nous avons l'inégalité

$$d(x,y)\leqslant\rho\big(F(x),F(y)\big). \tag{17.602}$$

En partant maintenant de $\rho\big(F(x),F(y)\big)$ et en effectuant les mêmes majorations, nous trouvons l'inégalité dans l'autre sens : $F\big(F(x),F(y)\big)\leqslant d(x,y)$, de telle sorte que

$$d(x,y)=\rho\big(F(x),F(y)\big), \tag{17.603}$$

ce qui signifie que F est une isométrie.

(3) **Unicité** Soient deux isométries $F\colon X\to Y$ et $F'\colon X\to Y$ telles que $F=F'$ sur D. Nous devons prouver que $F(x)=F'(x)$ pour tout $x\in X$.

Soient donc $x\in X$ ainsi qu'une suite (x_n) dans D telle que $x_n\xrightarrow{X}x$. Nous avons alors

$$\rho\big(F(x),F'(x)\big)\leqslant\rho\big(F(x),F(x_n)\big)+\underbrace{\rho\big(F(x_n),F'(x_n)\big)}_{=0}+\rho\big(F'(x_n),F'(x)\big) \tag{17.604a}$$

$$=d(x,x_n)+d(x_n,x). \tag{17.604b}$$

Donc pour tout n nous avons $\rho\big(F(x),F'(x)\big)\leqslant d(x,x_n)+d(x_n,x)$. En faisant $n\to\infty$ nous trouvons $\rho\big(F(x),F'(x)\big)\leqslant 0$ et donc $\rho\big(F(x),F'(x)\big)=0$.

□

DEFooXHQFooNBIavy

Définition 17.133 ([599]).
*Soit un espace métrique (X,d). Une **complétion** de (X,d) est un triple $(\hat{X},\hat{d},j)$ où*

(1) L'espace $(\hat{X},\hat{d})$ est un espace métrique complet,

(2) L'application $j\colon X\to\hat{X}$ est une isométrie,

(3) La partie $j(X)$ est dense dans $\hat{X}$.

THOooRLYBooCVBjoP

Théorème 17.134 (Unicité de la complétion[599]).
Soient (X,d) un espace métrique ainsi que deux complétions[75] (X_1,d_1,j_1), (X_2,d_2,j_2). Alors les espaces (X_1,d_1) et (X_2,d_2) sont isométriques.

Démonstration. Nous considérons l'application $f=j_2\circ j_1^{-1}\colon j_1(X)\to X_2$. Cette application est isométrique (parce que j_1 et j_2 le sont), l'espace X_2 est complet et $j_1(X)$ est dense dans X_1. Le lemme 17.132 nous permet de considérer une isométrie $F\colon X_1\to X_2$. Nous devons prouver que F est bijective.

L'application F est injective parce qu'elle est isométrique. En ce qui concerne la surjectivité, soit $y\in X_2$. Étant donné que $j_2(X)$ est dense dans X_2, il existe une suite (y_n) dans X_2 telle que $y_n\xrightarrow{X_2}y$. Pour chaque n nous choisissons $x_n\in X$ tel que $j_2(x_n)=y_n$. Nous posons $z_n=j_1(x_n)\in X_1$.

Vu que (y_n) est de Cauchy et que j_1 est isométrique, la suite (z_n) est de Cauchy. Étant donné que X_1 est complet, la suite (z_n) a une limite dans X_1. Nous pouvons donc poser $z=\lim_{n\to\infty}z_n\in X_1$.

Nous prouvons à présent que $F(z)=y$. L'application $F\colon X_1\to X_2$ est isométrique et donc continue ; elle commute donc avec la limite et

$$\lim_{n\to\infty}d_2\big(F(z_n),y\big)=d_2\big(F(z),y\big). \tag{17.605}$$

Mais $j_1(x)\in j_1(X)$, et nous savons que $F=f$ sur $j_1(X)$. Donc

$$F\big(j_1(x_n)\big)=f\big(j_1(x_n)\big)=j_2(x_n). \tag{17.606}$$

Donc nous avons le calcul

$$d_2\big(F(z),y\big)=\lim_{n\to\infty}d_2\big(F(z_n),y\big) \tag{17.607a}$$

$$=\lim_{n\to\infty}d_2\big(F(j_1(x_n)),y\big) \tag{17.607b}$$

$$=\lim_{n\to\infty}d_2\big(j_2(x_n),y\big) \tag{17.607c}$$

$$=\lim_{n\to\infty}d_2(y_n,y) \tag{17.607d}$$

$$=0. \tag{17.607e}$$

Cela prouve que $F(z)=y$ et donc que F est surjective. □

Une conséquence du théorème de prolongement est le théorème suivant qui permet de compléter un espace métrique.

ThoKHTQJXZ

Théorème 17.135 (Complétion d'un espace métrique[600, 598, 599]).
Plus précisément, soit (M,d) un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $\tilde{M}$ muni d'un plongement[76] isométrique $\varphi\colon M\to\tilde{M}$ tel que $\varphi(M)$ soit dense dans $\tilde{M}$.

Ce complété de M est unique au sens suivant. Si $\tilde{M}_1$ et $\tilde{M}_2$ sont deux espaces métriques complets munis de plongements isométriques $f_i\colon M\to\tilde{M}_i$ dont les images sont denses, alors il existe une bijection isométrique $\phi\colon\tilde{M}_1\to\tilde{M}_2$ telle que $\phi\circ f_1=f_2$.

[75] Définition 17.133.
[76] Définition 17.129.

Démonstration. L'unicité est déjà le théorème 17.134. Nous faisons l'existence.

(1) **Existence**

Soit C_M l'ensemble des suites de Cauchy de M. Nous définissons

$$\begin{aligned} f\colon C_M \times C_M &\to \mathbb{R} \\ u, v &\mapsto \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n). \end{aligned} \tag{17.608}$$

Notre première tâche est de nous assurer que cela est bien défini, c'est-à-dire que la limite existe toujours. En effet, si u et v sont des suites de Cauchy dans M, nous avons

$$\begin{aligned} |d(u_n, v_n) - d(u_m, v_m)| &\leqslant |d(u_n, v_n) + d(u_n, v_m)| + |d(u_n, v_m) - d(u_m, v_m)| && (17.609a)\\ &\leqslant d(v_n, v_m) + d(u_n, u_m) && \text{lem. 7.141} \quad (17.609b)\\ &\leqslant 2\epsilon && (17.609c) \end{aligned}$$

dès que m et n sont assez grand. Cela prouve que la suite $n \mapsto d(u_n, v_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Par complétude de $\mathbb{R}$, elle converge[77].

Nous considérons la relation d'équivalence $u \sim v$ si et seulement si $f(u, v) = 0$. Nous posons $\tilde{M} = C_M/\sim$ et nous y mettons la distance

$$d([u], [v]) = f(u, v) \tag{17.610}$$

EqDDLNRNF

et nous devons encore vérifier que cela est bien défini. Prenons $u' \sim u$ et $v' \sim v$. Alors nous avons

$$d(u'_n, v'_n) \leqslant d(u'_n, u_n) + d(u_n, v_n) + d(v_n, v'_n), \tag{17.611}$$

et donc

$$d(u', v') = \lim_{n\to\infty} d(u'_n, v'n) \leqslant \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = d(u, v). \tag{17.612}$$

Le même argument en inversant les primes et les non primes montre l'inégalité inverse. Donc $d(u, v) = d(u', v')$ dans C_M, et donc la distance (17.610) est bien définie sur $\tilde{M}$.

Afin de s'assurer que $\tilde{M}$ répond bien à la question du théorème, il faut encore démontrer les points suivants :

- M se plonge isométriquement dans $\tilde{M}$.
- l'image de M par le plongement est dense dans $\tilde{M}$.
- $\tilde{M}$ est complet.

Nous allons maintenant considérer l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon M &\to \tilde{M} \\ x &\mapsto \text{la classe de la suite constante } x. \end{aligned} \tag{17.613}$$

(1a) **Plongement isométrique** Nous allons montrer que cela est une isométrie bijective et que $\varphi(M)$ est dense dans $\tilde{M}$. Le fait que φ soit bijective entre M et $\varphi(M)$ est évident. C'est une isométrie parce que

$$d\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) = \lim_{n\to\infty} d\big(\varphi(x)_n, \varphi(y)_n\big) = d(x, y). \tag{17.614}$$

(1b) **Densité**

Soit $[u] \in \tilde{M}$. Tous les termes u_n sont des éléments de M. Nous considérons la suite dans $\varphi(M)$ donnée par

$$a_n = \varphi(u_n) \tag{17.615}$$

Chaque a_n est un élément[78] de $\tilde{M}$. Montrons que (a_n) converge dans $\tilde{M}$ vers u. Nous avons

$$\begin{aligned} d(a_n, u) &= \lim_{k\to\infty} d\big((a_n)_k, u_k\big) && (17.616a)\\ &= \lim_{k\to\infty} d(u_n, u_k) && (17.616b)\\ &= d(u_n, \ell) && (17.616c) \end{aligned}$$

en notant ℓ la limite de la suite (u_n). Ici nous avons utilisé le fait que la fonction distance était continue pour l'inverser avec la limite, par le théorème 12.244. Nous avons alors

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, [u]) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, \ell) = 0. \tag{17.617}$$

[77] Ici nous utilisons la complétude de $\mathbb{R}$. Cette dernière doit donc être démontrée indépendamment, ce qui est fait dans le théorème 7.340. De plus nous ne pouvons pas définir $\mathbb{R}$ comme étant le complété de $\mathbb{Q}$ en utilisant ce théorème.

[78] À partir de maintenant nous n'écrivons plus explicitement la classe d'équivalence.

(1c) **Complétude** Nous passons maintenant à la preuve du fait que $\tilde{M}$ est complet. Soit (y_n) une suite de Cauchy dans $\tilde{M}$. Soit $\epsilon > 0$; nous définissons $K(n)$ par

$$d\big((y_n)_k, (y_n)_l\big) < \epsilon \tag{17.618}$$

dès que $k, l \geqslant K(n)$. Cette définition fonctionne parce que pour chaque n, y_n est une suite de Cauchy dans M. Nous posons

$$x_n = (y_n)_{K(n)} \in M \tag{17.619}$$

et nous allons montrer que (x_n) est de Cauchy dans M –donc est un élément de $\tilde{M}$– et que $y_k \to (x_n)$ dans $\tilde{M}$.

Nous commençons par montrer que (x_n) est de Cauchy dans M. Nous avons

$$d(x_n, x_m) = d\big((y_n)_{K(n)}, (y_m)_{K(m)}\big) \tag{17.620a}$$
$$\leqslant d\big((y_n)_{K(n)}, (y_n)_l\big) + d\big((y_n)_l, (y_m)_l\big) + d\big((y_m)_l, (y_m)_{K(m)}\big) \tag{17.620b}$$

Nous choisissons n, m tels que $d(y_n, y_m) < \epsilon$, ce qui nous permet de choisir l de telle façon à avoir $d\big((y_n)_k, (y_m)_k\big) < \epsilon$ pour tout $k \geqslant l$. De plus, quitte à encore augmenter l, nous supposons que $l > K(m)$ et $l > K(m)$. Avec ces choix nous voyons que $d(x_n, x_m) < 3\epsilon$, ce qui signifie que la suite (x_n) est de Cauchy dans M.

En ce qui concerne la convergence $y_n \to (x)$, on a

$$d\big(y_n, (x)\big) = \lim_{k\to\infty} d\big((y_n)_k, (y_k)_{K(k)}\big) \tag{17.621a}$$
$$\leqslant \lim_{k\to\infty} d\big((y_n)_k, (y_n)_l\big) + \lim_{k\to\infty} d\big((y_n)_l, (y_k)_l\big) + \lim_{k\to\infty} d\big((y_k)_l, (y_k)_{K(k)}\big) \tag{17.621b}$$

EqABmqNwo

Nous devons trouver un n tel que si k est suffisamment grand, le tout est majoré par ϵ. Voici nos choix :

- n tel que $d(y_n, y_m) < \epsilon$ dès que $m \geqslant n$,
- $k > n$,
- $k > K(n)$,
- $l > k$,
- $l > K(k)$,
- l suffisamment grand pour que $d\big((y_n)_l, (y_k)_l\big) < \epsilon$.

Avec tous ces choix, les trois termes de (17.621b) sont plus petits que ϵ.

Ceci prouve que $\tilde{M}$ est complet.

Unicité Cette partie de la preuve est encore à écrire. Si vous savez comment faire, écrivez-moi.

□

17.17.1 Principe des zéros isolés

ThoukDPBX

Théorème 17.136 (Principe des zéros isolés [601])**.**
Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Soient une fonction analytique[79] *$f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $a \in \Omega$, un zéro non isolé de f. Alors f est nulle sur un voisinage de a.*

Démonstration. Nous écrivons f sous la forme d'une série entière[80] autour de a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{17.622}$$

EqgryfVl

valable sur une boule $B(a, r)$. Soit c_m le premier coefficient non nul (si il n'existe pas c'est que f est nulle sur tout $B(a, r)$ et alors le théorème est prouvé). Nous avons alors

$$f(z) = c_m (z-a)^m \big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z-a)^k\big) \tag{17.623}$$

[79] Définition 12.464.
[80] Définition de fonction analytique 12.464.

avec $d_k = c_{k+m}/c_m$. Le rayon de convergence de la série $\sum_k d_k(z-a)^k$ est le même que celui de (17.622) parce que la suite $\frac{d_k r^{m+k}}{c_m}$ reste bornée (critère d'Abel, lemme 15.18). Si nous posons

$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(z-a)^k, \tag{17.624}$$

alors g est une fonction continue et $g(a) = 1$. De plus

$$f(z) = c_m(z-a)^m g(z). \tag{17.625}$$

Soit une suite (z_n) de zéros de f qui converge vers a. Étant donné que g est continue, nous devrions avoir $\lim_{k\to\infty} g(z_k) = g(a) = 1$, mais si $f(z_k) = 0$ avec $z_k \neq a$, alors $g(z_k) = 0$. Cela est un paradoxe qui nous permet de conclure que si la suite z_n existe bien, alors f est identiquement nulle sur un voisinage, c'est-à-dire que tous les c_n sont nuls. □

CORooFBXXooZyfUQi

Corolaire 17.137.
Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si f s'annule sur un ouvert (non vide) de Ω, alors f s'annule sur tout Ω.

Démonstration. soit

$$N = \{z \in \Omega \text{ tel que } f = 0 \text{ sur un ouvert autour de } z\}. \tag{17.626}$$

Le fait que N soit ouvert est évident à partir de sa définition. Nous allons montrer que N est également fermé dans Ω, et donc conclure que $N = \Omega$. Soit (z_n) une suite dans N convergente vers $z \in \Omega$. Étant donné que $f(z_n) = 0$ et que f est continue, nous avons

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0, \tag{17.627}$$

ce qui fait de z un zéro non isolé de f. Par conséquent le principe des zéros isolés (théorème 17.136) nous enseigne que f s'annule dans un voisinage autour de z, c'est-à-dire que $z \in N$. L'ensemble N est donc fermé. □

ThoAVBCewB

Théorème 17.138 (Principe du prolongement analytique[1])**.**
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble D de Ω contenant un point d'accumulation dans Ω, alors elles sont égales sur Ω.

Démonstration. Soient deux fonctions analytique $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ égales sur D. Nous considérons la fonction $h = f - g$. Il existe dans D une suite (z_n) qui converge vers $a \in \Omega$ et telle que $f(z_n) = g(z_n)$, c'est-à-dire $h(z_n) = 0$ pour tout n.

Vu que h est continue nous avons aussi $h(a) = 0$. Le point a est donc un zéro non isolé de h. Le théorème 17.136 conclut que $h = 0$ sur Ω. □

17.18 Un petit extra

Ceci provient de notes de TP de l'université libre de Bruxelles autour des années 2000-2001[602].

LEMooXRMAooRADhOM

Lemme 17.139 ([1])**.**
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

ItemExtrai

(1) $f(1) = 1$,

ItemExtraii

(2) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout réels x et y.

Alors $f(q) = q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. Vu que $f(x) + f(y) = f(x+y)$, nous avons, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{p} f(\frac{1}{p}) = f(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{p}) = f(1) = 1. \tag{17.628}$$

Donc $f(1/p) = 1/p$. Nous en déduisons tout de suite que $p(p/q) = pf(1/q) = p/q$. □

Si nous ajoutons l'hypothèse de continuité, nous avons un résultat plus fort.

LEMooYKCUooUiIvPJ

Lemme 17.140 ([1]).
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

(1) $f(1) = 1$,

(2) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *pour tout réels* x *et* y.

(3) f *est continue.*

Alors f est la fonction identité : $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous savons déjà du lemme 17.139 que $f(q) = q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. Soient $x \in \mathbb{R}$, ainsi qu'une suite q_k dans $\mathbb{Q}$ telle que $q_k \xrightarrow{\mathbb{R}} x$. Par continuité, nous avons

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(q_k) = \lim_{k\to\infty} f(q_k) = \lim_{k\to\infty} q_k = x \tag{17.629}$$

parce que $f(q_k) = q_k$ pour tout k. □

Une question naturelle qu'on peut alors se poser est la suivante :

Est-il possible de définir une fonction réelle non continue ayant les propriétés (1) et (2) ?

Nous savons qu'une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie est continue[81], mais qu'en dimension infinie, une application linéaire non continue est possible[82].

Donc une manière de trouver une réponse positive à la question posée plus haut, serait de voir $\mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel de dimension infinie.

Nous nous souvenons que, grâce au lemme de Zorn[83], tout espace vectoriel admet une base[84]. En particulier, l'ensemble des réels vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ admet une base, i.e. $\exists (e_i)_{i\in I}$ des éléments de $\mathbb{R}$ tels que tout réel s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients rationnels de ces e_i, i.e.

$$\forall r \in \mathbb{R}, \exists (\lambda_i)_{i\in I} \text{ des éléments de } \mathbb{Q} \text{ tels que } r = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i. \tag{17.630}$$

C'est avec ça en main que nous allons faire le travail.

Proposition 17.141.
Soient $e_1 = 1$ ainsi qu'un irrationnel e_2. Soit une $\mathbb{Q}$-base complétée $(e_i)_{i\in I}$ avec[85] *de $\mathbb{R}$.*

Nous définissons $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$h(e_1) = e_1 \tag{17.631a}$$
$$h(e_2) = e_3 \tag{17.631b}$$
$$h(e_3) = e_2 \tag{17.631c}$$
$$h(e_i) = e_i \qquad \forall i \in I \setminus \{1,2,3\}, \tag{17.631d}$$

et par $\mathbb{Q}$-linéarité :

$$h(\sum \lambda_i e_i) = \sum \lambda_i \alpha_i \tag{17.632}$$

pour tout $(\lambda_i \in \mathbb{Q})_{i\in I}$.

La fonction h vérifie

ITEMooOXXMooJFSuuN

(1) $h(1) = 1$

(2) h *est $\mathbb{Q}$-linéaire, c'est-à-dire que*

ITEMooAVNMooEsodLR

(2a) $h(x+y) = h(x) + h(y)$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$

ITEMooDEJMooXtvrgi

(2b) $h(\lambda x) = \lambda h(x)$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{Q}$.

ITEMooMHNZooBHQywD

(3) h n'est pas continue (pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$).

[81] Proposition 7.234.
[82] Exemples 10.86 et 10.87.
[83] Lemme 1.37.
[84] Proposition 4.25.
[85] Théorème de la base incomplète 4.26. Attention : nous ne prétendons pas que I est dénombrable. Par contre, par définition d'une base, les sommes sont toujours finies. Tout réel peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie des e_i avec des coefficients rationnels.

Démonstration. En plusieurs points

(1) **Pour (1)** C'est la condition $h(e_1) = e_1$ en nous souvenant que $e_1 = 1$.

(2) **Pour (2a)** Nous décomposons x et y dans la base $\{e_i\}_{i\in I}$. Il existe J_x et J_y finis dans I tels que[86] $x = \sum_{i\in J_x} x_i e_i$, $y = \sum_{i\in J_y} y_i e_i$. Vu que toutes les sommes sont finies, nous n'avons aucun problème à écrire

$$x + y = \sum_{i\in J_x\cup J_y} (x_i + y_i)e_i \tag{17.633}$$

et donc

$$h(x + y) = \sum_i h(x_i + y_i) = \sum_i h(x_i) + \sum_i h(y_i) = h(x) + h(y). \tag{17.634}$$

(3) **Pour (2b)** Même type de vérifications que pour (2a).

(4) **Pour (3)** Si h était continue, elle serait l'identité par le lemme 17.140. Or elle n'est pas l'identité parce que $h(e_2) = e_3$.

□

Donc nous avons trouvé une application $\mathbb{Q}$-linéaire $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas continue.

[86] Les vrais chasseurs de précisions diront que x_i est défini pour $i \in I$, mais uniquement non nul sur J_x.

Chapitre 18

Trigonométrie, isométries

18.1 Trigonométrie

18.1.1 Définitions, périodicité et quelques valeurs remarquables

PROPooZXPVooBjONka

Proposition-Définition 18.1 (Définition du cosinus et du sinus)**.**
La série

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \tag{18.1}$$

définit une fonction $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞*. Nous l'appelons* ***cosinus****.*

La série

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \tag{18.2}$$

EQooCMRFooCTtpge

définit une fonction $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞*. Nous l'appelons* ***sinus****.*

Démonstration. La série entière définissant $\cos(x)$ a pour coefficients

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n!} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \tag{18.3}$$

Nous pouvons la majorer par la série entière donnée par les coefficients

$$b_n = \begin{cases} 1/n! & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n!} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \tag{18.4}$$

Quelle que soit la parité de k nous avons toujours

$$\left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = \frac{1}{k+1}, \tag{18.5}$$

de telle sorte que la formule d'Hadamard (15.98) nous donne $R = \infty$ pour la série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. A fortiori[1] le rayon de convergence pour la série du cosinus est infini.

L'assertion concernant le sinus se démontre de même.

En ce qui concerne le fait que les fonctions sin et cos sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, il faut invoquer le corolaire 15.52. □

LEMooZMJTooJPnyfv

Lemme 18.2 ([1])**.**
Nous avons

SUBEQooTTNNooXzApSM

$$\cos(0) = 1 \tag{18.6a}$$
$$\sin(0) = 0. \tag{18.6b}$$

ainsi que

SUBEQSooFOGNooQrBxYc

$$\cos(-x) = \cos(x) \tag{18.6ca}$$
$$\sin(-x) = -\sin(x) \tag{18.6cb}$$
$$\tag{18.6cc}$$

[1] Remarque 15.16.

Démonstration. Par substitution directe dans les séries. □
LEMooBBCAooHLWmno

Lemme 18.3.
En ce qui concerne la dérivation, nous avons

$$\sin' = \cos \tag{18.4a}$$
$$\cos' = -\sin. \tag{18.4b}$$

Démonstration. Il s'agit de se permettre de dériver terme à terme (proposition 15.50) les séries qui définissent le sinus et le cosinus. □
LEMooAEFPooGSgOkF

Lemme 18.4.
Les fonctions sinus et cosinus vérifient

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \tag{18.5}$$
EQooNYCZooApyyRd

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Posons $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ et dérivons :

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)(-)\sin(x) = 0. \tag{18.6}$$

La fonction f est donc constante par le corolaire 12.221. Nous avons donc pour tout x :

$$f(x) = f(0) = \sin^2(0) + \cos^2(0) = 1. \tag{18.7}$$

Le dernier calcul s'obtient en substituant directement x par zéro dans les séries : $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$. □

18.1.2 Fonction puissance (pour les complexes)

La fonction puissance a déjà fait l'objet de nombreuses définitions et extensions. Voir le thème 52. Nous allons maintenant définir a^z pour $a > 0$ et $z \in \mathbb{C}$.

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. L'exponentielle $\exp(x + yi)$ est déjà définie en 15.70 ; il suffit donc maintenant de définir les notations e^z et a^z pour $z \in \mathbb{C}$.
DEFooRBTDooNLcWGj

Définition 18.5.
Pour le nombre $e \in \mathbb{R}$ et le nombre imaginaire pur iy ($y \in \mathbb{R}$), nous définissons

$$e^{iy} = \exp(iy) \tag{18.8}$$

où exp *est la série usuelle de la définition 15.70. Pour un nombre complexe général $x + yi$ nous définissons*

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}. \tag{18.9}$$

Et enfin, si $a > 0$ et si $z \in \mathbb{C}$ nous définissons

$$a^z = e^{z\ln(a)}, \tag{18.10}$$

la fonction logarithme ici étant celle $\ln\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ *définie par la proposition 15.95.*

Si $z \in \mathbb{C}$ et si $n \in \mathbb{Z}$, la définition de z^n ne pose pas de problème, c'est la définition 1.342.
DefJilXoM

18.6.
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. L'exponentielle $\exp(x + yi)$ est déjà définie en 15.70 ; elle est la fonction donnée par

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \end{aligned} \tag{18.11}$$
PROPooXEYFooIEaPvU

Proposition 18.7.
Le rayon de convergence[2] *de la série exponentielle est infini.*

[2] Définition 15.12.

Démonstration. L'exponentielle est la série de puissance dont les coefficients sont donnés par la suite $(a_k) = 1/k!$. Nous utilisons la formule de Hadamard de la proposition 15.39 :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1/(n+1)!}{1/n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k} = 0. \tag{18.12}$$

Donc $R = \infty$ par la partie de Hadamard qui dit que si on tombe sur $1/R = 0$, alors c'est $R = \infty$. □

PROPooWSDKooJREQGk

Proposition 18.8.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ nous avons

$$\exp(z) = e^z. \tag{18.13}$$

PropdDjisy

Proposition 18.9 ([603])**.**
Quelques propriétés de l'exponentielle.

(1) Le fonction exp *est continue.*

ITEMooRLHCooJTuYKV

(2) Nous avons la formule $e^{z+w} = e^z e^w$ pour tout $z, w \in \mathbb{C}$.

(3) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

ITEMooIFYFooUniuKS

(4) $(\exp(z))^n = \exp(nz)$.

Démonstration. La proposition 18.7 nous enseigne que le rayon de convergence est infini. La fonction ainsi définie est alors continue par la proposition 12.393.

Les séries $\exp(z)$ et $\exp(w)$ ayant un rayon de convergence infini, nous pouvons utiliser le produit de Cauchy (théorème 15.27) :

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{z^i w^j}{i!j!} \right) \tag{18.14a}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{z^i w^{n-i}}{i!(n-i)!} \right) \tag{18.14b}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i w^{n-i} \tag{18.14c}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \tag{18.14d}$$

$$= \exp(z+w). \tag{18.14e}$$

Nous avons utilisé la formule du binôme (proposition 1.387).

Les autres propriétés énoncées sont des corolaires :

$$e^z e^{-z} = e^0 = 1. \tag{18.15}$$

□

D'autres propriétés de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$, entre autres l'holomorphie, sont données dans le théorème 26.108.

LEMooTDGKooWdpUTD

Lemme 18.10 ([1])**.**
Soient $a > 0$, $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$(a^z)^n = a^{nz}. \tag{18.16}$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul utilisant les propositions 18.9(4) et 18.8 :

$$(a^z)^n = \left(e^{z\ln(a)}\right)^n \tag{18.17a}$$

$$= \exp\left(z\ln(a)\right)^n \tag{18.17b}$$

$$= \exp\left(nz\ln(a)\right) \tag{18.17c}$$

$$= e^{nz\ln(a)} \tag{18.17d}$$

$$= a^{nz}. \tag{18.17e}$$

□

18.1.3 Formules de trigonométrie

Le lemme suivant est un premier pas pour le paramétrage du cercle dont nous parlerons dans la proposition 18.62(1).

LEMooHOYZooKQTsXW

Lemme 18.11.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons :

(1)

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \tag{18.18}$$

EQooRVPJooTMwNTU

(2) $|e^{ix}| = 1$.

Démonstration. La définition de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ est la définition 15.70. Cette définition fonctionne parce que $\mathbb{C}$ est une algèbre normée, et que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-module vérifiant l'inégalité $|zz'| \leqslant |z||z'|$ (en l'occurrence, une égalité).

Nous remarquons que i^k vaut 1, i, -1, $-i$. Donc un terme sur deux est imaginaire pur et parmi ceux-là, un sur deux est positif. À bien y regarder, les termes imaginaires purs forment la série du sinus et ceux réels la série du cosinus.

Si vous aimez les formules,

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(y) + i\sin(y). \tag{18.19}$$

Nous avons utilisé le fait que $i^{2n} = (-1)^n$ et $i^{2n+1} = i(-1)^n$. □

NORMooXOVSooEwjecU

18.12 (Formule d'Euler)**.**
En posant $x = \pi$ dans (18.18) nous trouvons la soi-disant géniale formule d'Euler :

$$e^{i\pi} = -1. \tag{18.20}$$

Cette formule fait intervenir les nombres π, e, -1 et i.

En fait non.

Le nombre e n'intervient pas dans la formule d'Euler. Vous vous souvenez de la définition (18.5) ? En fait e^z est juste un abus de notation pour $\exp(z)$.

Lorsque x est réel, nous avons la formule $\exp(x) = e^x$ qui est un théorème tout à fait non trivial liant la fonction exponentielle et la fonction puissance. Il n'y a pas de tel résultat pour z complexe. Dans le cas de z complexe, la formule $\exp(z) = e^z$ est juste une définition de la fonction puissance dans les complexes.

Bref, le nombre e n'intervient pas dans la formule d'Euler.

CORooWZFIooDTCoRo

Corolaire 18.13.
Le complexe conjugué[3] *de e^{ix} est e^{-ix}.*

Démonstration. Vu le lemme 18.11, le complexe conjugué de $z = e^{ix}$ est $\bar{z} = \cos(x) - i\sin(x)$. En utilisant (18.6c) nous avons également

$$\bar{z} = \cos(x) - i\sin(x) = \cos(-x) + i\sin(-x) = e^{-ix}. \tag{18.21}$$

□

LEMooJAWBooJGfZIL

Lemme 18.14.
Nous avons les formules d'addition d'angles[4] SUBEQSooFSSMooHcYwRc

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \tag{18.22a}$$

EQooJYEMooQaQMib

$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) \tag{18.22b}$$

EQooECAUooQzckDv

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \tag{18.22c}$$

EQooCVZAooQfocva

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b). \tag{18.22d}$$

pour tout a, b réels.

[3] Définition 1.610.

[4] Rien ne nous empêche de donner ce nom à ces formules, mais seriez-vous capable de définir précisément le mot « angle » ?

Démonstration. Nous utilisons la formule d'addition dans l'exponentielle, proposition (15.309) et la formule (18.18) avant de séparer les parties réelles et imaginaires :

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i\big(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)\big). \tag{18.23}$$

Cela est également égal à

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b). \tag{18.24}$$

En identifiant les parties réelle et imaginaires, nous obtenons les formules (18.22a) et (18.22c) annoncées.

Pour la formule (18.22c), il suffit de se souvenir que $\sin(-b) = -\sin(b)$ et $\cos(-b) = \cos(b)$ (ces deux égalités sont immédiatement visibles sur les développements en série : l'un a uniquement des puissances paires et l'autre impaires) et d'écrire (18.22a) avec $-b$ au lieu de b. □

CORooQZDQooWjMXTF

Corolaire 18.15.
Les formules suivantes pour les duplications d'angles s'ensuivent :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \tag{18.25a}$$
$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a). \tag{18.25b}$$

SUBEQooLRJDooQuFvux

Démonstration. Poser $b = a$ dans les relations du lemme 18.14. □

PROPooXGABooBAsbsq

Proposition 18.16 (Formules de linéarisation[604])**.**
Il existe des réels $a_{n,k}$ tels que

$$\cos^n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\cos(kx). \tag{18.26}$$

La somme est finie.

LEMooPQWWooMdPWUT

Lemme 18.17.
Un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ est soit dense dans $\mathbb{R}$ soit de la forme $p\mathbb{Z}$ pour un certain réel $p \neq 0$.

Démonstration. Soit A, un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ qui ne soit pas dense. Soit un intervalle $]a,b[$ qui n'intersecte pas A (si vous voulez frimer, vous noterez ici que nous utilisons le fait que les intervalles ouverts forment une base de la topologie de $\mathbb{R}$[5]). Si $d = |b-a|$, l'ensemble A ne contient pas deux éléments séparés par strictement moins de d. Soit p, le plus petit élément strictement positif de A ; nous avons $p \geqslant d$ (parce que $0 \in A$ de toutes façons).

Puisque A est un groupe, nous avons $p\mathbb{Z} \subset A$.

Pour l'inclusion inverse, si $x \in A$ est hors de $p\mathbb{Z}$, il existe un $y \in p\mathbb{Z}$ avec $|x-y| < p$. Et donc le nombre $|x-y|$ est dans A tout en étant plus petit que p. Contradiction. □

PROPooFRVCooKSgYUM

Proposition-Définition 18.18 (Périodicité, le nombre π[605])**.**
Plusieurs choses à propos de la périodicité de la fonction cos*.*

(1) La fonction cos *est périodique*[6]*.*

ITEMooVPMWooBqidZG

(2) Un nombre $T > 0$ est une période si et seulement si $\cos(T) = 1$ et $\sin(T) = 0$.

Nous définissons le nombre $\pi > 0$ comme étant la moitié de la période de la fonction cos *:*

$$2\pi = \min\{T > 0 \text{ tel que } \cos(x+T) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}\}. \tag{18.27}$$

Démonstration. Plusieurs étapes.

(1) **La fonction cosinus n'est pas toujours positive** Supposons d'abord que $\cos(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, la fonction sin est strictement croissante. Mais les deux fonctions sont bornées par 1 du fait de la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. La fonction sin étant croissante et bornée, elle est convergente vers un réel par la proposition 12.58 :

$$\lim_{x\to\infty} \sin(x) = \ell \tag{18.28}$$

pour un certain $\ell > 0$. Avec ça nous avons aussi (pour cause de dérivée) $\lim_{x\to\infty} \sin'(x) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x\to\infty} \cos(x) = 0$. Mais vu que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, nous en déduisons que $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = 1$. Mézalor $\lim_{x\to\infty} \cos'(x) = -1$, ce qui veut dire que la fonction cos n'est pas bornée. Cela est impossible. Nous en déduisons que $\cos(x)$ n'est pas toujours positive.

[5] Proposition 7.142.
[6] Définition 12.206.

(2) **Il existe $T > 0$ tel que $\cos(T) = 1$ et $\sin(T) = 0$** Par ce que nous venons de faire, il existe $r > 0$ tel que $\cos(r) = 0$. Pour cette valeur, nous avons aussi obligatoirement $\sin(r) = \pm 1$. Nous avons aussi, en utilisant les formules (18.22),

$$\cos(2r) = \cos^2(r) - \sin^2(r) = -1 \tag{18.29a}$$
$$\sin(2r) = 2\cos(r)\sin(r) = 0. \tag{18.29b}$$

et par conséquent

$$\cos(4r) = \cos^2(2r) - \sin^2(2r) = 1 \tag{18.30a}$$
$$\sin(4r) = 2\cos(2r)\sin(2r) = 0. \tag{18.30b}$$

Donc $T = 4r$ fonctionne.

(3) **Si T est une période** Nous entrons dans le vif de la preuve. Soit un $T > 0$ tel que $\cos(x + T) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Avec la formule d'addition d'angle dans le cosinus nous cherchons un T tel que

$$\cos(x + T) = \cos(x)\cos(T) - \sin(x)\sin(T) = \cos(x) \tag{18.31}$$

et donc tel que

$$\cos(x)\big(\cos(T) - 1\big) = \sin(x)\sin(T). \tag{18.32}$$ EQooELSAooLNtBnm

Nous dérivons cette équation :

$$-\sin(x)\big(\cos(T) - 1\big) = \cos(x)\sin(T). \tag{18.33}$$ EQooCECFooLpxXaw

Nous multiplions chacune des deux équations (18.32) et (18.33) par $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour obtenir les quatre relations suivantes :

$$\cos^2(x)\big(\cos(T) - 1\big) - \sin(x)\cos(x)\sin(T) = 0 \tag{18.34a}$$ SUBEQooLGQXooIrLMLW
$$-\sin(x)\cos(x)\big(\cos(T) - 1\big) - \cos^2(x)\sin(T) = 0 \tag{18.34b}$$ SUBEQooCHTDooKwvyZF
$$\sin(x)\cos(x)\big(\cos(T) - 1\big) - \sin^2(x)\sin(T) = 0 \tag{18.34c}$$ SUBEQooEWPTooTLCUMf
$$-\sin^2(x)\big(\cos(T) - 1\big) - \sin(x)\cos(x)\sin(T) = 0 \tag{18.34d}$$ SUBEQooGBXTooCFekGJ

En faisant (18.34a) moins (18.34d) nous trouvons $\cos(T) = 1$. Et en sommant (18.34b) avec (18.34c) nous avons $-\sin(T) = 0$.

(4) **Si $T > 0$ est tel que $\sin(T) = 0$ et $\cos(T) = 1$** Alors les formules d'addition d'angle du lemme 18.14 donnent tout de suite

$$\cos(x + T) = \cos(x). \tag{18.35}$$

À ce niveau nous croyons avoir prouvé que cos était périodique et que la période est donnée par

$$\min\{T > 0 \text{ tel que } \sin(T) = 0, \cos(T) = 1\}. \tag{18.36}$$

Or rien n'est moins sûr parce qu'il pourrait arriver que ce minimum n'existe pas, c'est-à-dire que l'infimum soit zéro. Autrement dit, il peut arriver que l'ensemble des périodes soit dense. Plus précisément, soit $P \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des périodes de cos. C'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et le lemme 18.17 nous dit que P est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $p\mathbb{Z}$ pour un $p > 0$.

Si P est dense, soient $t \in \mathbb{R}$ et une suite (t_n) dans P telle que $t_n \to t$. Pour tout x et tout n nous avons

$$\cos(x + t_n) = \cos(x), \tag{18.37}$$

Comme la fonction cosinus est continue, nous pouvons passer à la limite et écrire $\cos(x + t) = \cos(x)$. Cela étant valable pour tout x et pour tout t, la fonction cosinus est constante. Or nous savons que ce n'est pas le cas, donc P n'est pas dense. Donc cosinus est périodique. □ PROPooKNLAooLwQHea

Proposition 18.19.
La fonction sin *est périodique de période* 2π *et*

$$2\pi = \min\{T > 0 \text{ tel que } \sin(T) = 0, \cos(T) = 1\}. \tag{18.38}$$

Démonstration. La proposition 18.18 dit que cos est périodique. Puisque $\sin = -\cos'$ par le lemme 18.3, la fonction sin est également périodique par le lemme 12.208. Si T est une période de cos, alors T est une période de sin.

Mais $\sin' = \cos$, de telle sorte que les périodes de sin sont périodes de cos. Bref, T est une période de sin si et seulement si T est une période de cos. □

18.20.
Notons que tout ceci ne nous donne pas la plus petite indication d'ordre de grandeur de la valeur de π. Cela peut encore être 0.1 autant que 500.

PROPooMWMDooJYIlis

Proposition 18.21 ([605, 1])**.**
Des propriétés à la chaine à propos des sinus, cosinus et de leurs périodes.

ITEMooRJZHooCXcKmM

(1) *Nous avons*
$$2\pi = \min\{x > 0 \text{ tel que } \cos(x) = 1, \sin(x) = 0\}. \tag{18.39}$$
ITEMooTNHMooUtOjNC

(2) *Les fonctions* sin *et* cos *sont périodiques de période* 2π.

ITEMooSPZBooIQLUXh

(3) *Nous avons* $\cos(\pi) = -1$ *et* $\sin(\pi) = 0$.

(4) *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *nous avons*
$$\cos(a + \pi) = -\cos(a) \tag{18.40a}$$
$$\sin(a + \pi) = -\sin(a). \tag{18.40b}$$
ITEMooHDQNooYHVCkg

(5) *Nous avons*
$$\pi = \min\{x > 0 \text{ tel que } \cos(x) = -1, \sin(x) = 0\}. \tag{18.41}$$
ITEMooWFNUooYAybDB

(6) *Nous avons* SUBEQSooBTNPooSvCAHO
$$\begin{cases} \cos(\pi/2) = 0 & (18.42a) \\ \sin(\pi/2) = 1. & (18.42b) \end{cases}$$
ITEMooIRALooBMGOXP

(7) *Nous avons les formules* EQSooRJZGooCFVqbZ
$$\begin{cases} \cos(x + \pi/2) = -\sin(x) & (18.43a) \\ \sin(x + \pi/2) = \cos(x) & (18.43b) \end{cases}$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ITEMooMQQPooGwOdbt

(8) *Nous avons*
$$\frac{\pi}{2} = \min\{x > 0 \text{ tel que } \sin(x) = 1, \cos(x) = 0\}. \tag{18.44}$$

(9) *Nous avons les valeurs*
$$\begin{cases} \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0 & (18.45a) \\ \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1. & (18.45b) \end{cases}$$
ITEMooQKPKooEPeHER

(10) *Nous avons*
$$\frac{\pi}{2} = \min\{x > 0 \text{ tel que } \cos(x) = 0\}. \tag{18.46}$$
ITEMooMEXUooGfSInJ

(11) *Pour tout* $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, *nous avons* $\cos(x) > 0$ *et* $\sin(x) > 0$.

Démonstration. C'est parti.

(1) Le fond de la proposition 18.18 est que toutes les périodes $T > 0$ vérifient $\cos(T) = 1$ et $\sin(T) = 0$. La définition de 2π est que c'est la plus petite période.

(2) En utilisant le fait que l'une est la dérivée de l'autre, si T est une période de cos nous avons
$$\sin(x + T) = -\cos'(x + T) \tag{18.47a}$$
$$= -\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\cos(x + T + \epsilon) - \cos(x + T)}{\epsilon} \tag{18.47b}$$
$$= -\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\cos(x + \epsilon) - \cos(x)}{\epsilon} \tag{18.47c}$$
$$= -\cos'(x) \tag{18.47d}$$
$$= \sin(x). \tag{18.47e}$$
Nous déduisons que toute période de cos est une période de sin. De la même façon, nous pouvons prouver l'autre sens : toute période de sin est une période de cos.

(3) D'un côté nous avons
$$\cos(2\pi) = \cos^2(\pi) - \sin^2(\pi) = 1 \tag{18.48}$$
parce que $\cos(2\pi) = \cos(0) = 1$. Puisque $\cos(\pi)$ et $\sin(\pi)$ sont bornés par -1 et 1, nous devons avoir $\sin(\pi) = 0$ et $\cos(\pi) = \pm 1$.

Mais d'un autre côté, le nombre 2π est le plus petit T vérifiant $\cos(T) = 1$, $\sin(T) = 0$. Donc, avoir $\cos(\pi) = 1$ n'est pas possible. Nous concluons
$$\begin{cases} \cos(\pi) = -1 & \text{(18.49a)} \\ \sin(\pi) = 0. & \text{(18.49b)} \end{cases}$$

(4) Il s'agit d'utiliser les formules d'addition d'angles du lemme 18.14 pour calculer $\cos(a+\pi)$ et $\sin(a+\pi)$ en tenant compte du fait que $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.

(5) Soit $a \in]0, \pi[$ tel que $\cos(a) = -1$ et $\sin(a) = 0$. Alors nous avons
$$\cos(a + \pi) = -\cos(\pi) = 1 \tag{18.50a}$$
$$\sin(a + \pi) = -\sin(\pi) = 0, \tag{18.50b}$$
ce qui donnerait $a + \pi \in]\pi, 2\pi[$ dont le cosinus est 1 et le sinus est zéro. Mais nous savons déjà que 2π est le minimum pour cette propriété.

(6) Nous avons
$$-1 = \cos(\pi) = \cos^2(\pi/2) - \sin^2(\pi/2), \tag{18.51}$$
donc $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin^2(\pi/2) = 1$, ce qui donne $\sin(\pi/2) = \pm 1$.

Nous devons départager le $\pm$. Pour cela nous savons que $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ et que $\sin(0) = 0$, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \epsilon[$ nous avons $0 < \cos(x) < 1$ et $0 < \sin(x) < 1$ (nous avons aussi utilisé le lien entre dérivation et croissance de la proposition 12.209). Nous choisissons ϵ plus petit que $\pi/2$.

Supposons que $\sin(\pi/2) = -1$. Le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 dit qu'il existe $x_0 \in]\epsilon, \pi/2[$ tel que $\sin(x_0) = 0$. Pour cette valeur de x_0 nous devons aussi avoir $\cos(x_0) = \pm 1$. Mais puisque 2π est minimum pour avoir $\cos = 1$ et $\sin = 0$, nous devons avoir $\cos(x_0) = -1$. Alors nous avons aussi
$$\cos(x_0 + \pi) = \cos(x_0)\cos(\pi) - \sin(x_0)\sin(\pi) = -\cos(x_0) = 1 \tag{18.52a}$$
$$\sin(x_0 + \pi) = \cos(x_0)\sin(\pi) + \sin(x_0)\cos(\pi) = \sin(x_0) = 0. \tag{18.52b}$$
Encore une fois par minimalité de 2π, cela ne va pas. Conclusion : $\sin(\pi/2) = 1$.

(7) Il s'agit encore d'utiliser les formules d'addition d'angle en tenant compte des valeurs remarquables $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$.

(8) Supposons $x_0 \in]0, \pi/2[$ tel que $\sin(x_0) = 1$ et $\cos(x_0) = 0$. En utilisant les formules (18.43) nous avons
$$\cos(x_0 + \pi/2) = -1 \tag{18.53a}$$
$$\sin(x_0 + \pi/2) = 0, \tag{18.53b}$$
avec $x_0 + \pi/2 < \pi$. Cela contredirait la minimalité de π.

(9) Il s'agit d'utiliser les formules (18.43) :
$$\cos(\frac{3\pi}{2}) = \cos(\pi + \pi/2) = -\sin(\pi) = 0 \tag{18.54a}$$
$$\sin(\frac{3\pi}{2}) = \sin(\pi + \pi/2) = \cos(\pi) = -1. \tag{18.54b}$$

(10) Si $\cos(x_0) = 0$ alors $\sin(x_0) = -1$ (parce que $\sin(x_0) = 1$ est déjà exclu). Alors $\cos(x_0 + \pi/2) = 1$ et $\sin(x_0 + \pi/2) = 0$, ce qui est également impossible.

(11) La fonction cosinus est continue (proposition 18.1) et $\cos(0) = 1$. Le théorème des valeurs intermédiaires implique que si $\cos(x) \leqslant 0$, alors il existe $t \in]0, x]$ avec $\cos(x) = 0$. Cela n'est pas possible pour $x < \pi/2$, par le point (8).

Le cosinus est positif sur l'intervalle considéré et $\sin'(x) = \cos(x)$. Donc $\sin(0) = 0$ et la dérivée est positive. La proposition 12.209 conclut que sin est strictement croissante et donc, strictement positive.

□
LEMooFESYooBoiuol

Lemme 18.22 (Positivité[1]).
À propos de positivité de la fonction cosinus.

ITEMooIXSDooJyCQyb
(1) $\cos(0) = 1$

ITEMooWJEVooGZykbO
(2) $\cos(x) > 0$ *pour* $x \in [0, \pi/2[$.

ITEMooANEPooLGmYtc
(3) $\cos(\pi/2) = 0$.

ITEMooRDWJooZXWyfv
(4) $\cos(x) < 0$ *pour* $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$

ITEMooFKPAooBNlvPU
(5) $\cos(3\pi/2) = 0$.

ITEMooIDZGooBTDvDF
(6) $\cos(x) > 0$ *pour* $x \in]3\pi/2, 2\pi]$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Pour (1)** C'est déjà fait dans le lemme 18.2.

(2) **Pour (2)** C'est la proposition 18.21(11).

(3) **Pour (3)** C'est la proposition 18.21(6).

(4) **Pas d'annulation entre $\pi/2$ et π** Nous montrons à présent que cos ne s'annule pas entre $\pi/2$ et π. Supposons que $\cos(\frac{\pi}{2} + s) = 0$ avec $s \in]0, \pi/2[$. Comme $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ (lemme 18.4), nous avons

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} + s) = 0 & (18.55a) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + s) = \epsilon & (18.55b) \end{cases}$$

avec $\epsilon = \pm 1$. Utilisant trois fois la proposition 18.21(7) nous trouvons

$$\begin{cases} \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin(x) & (18.56a) \\ \sin(x + \frac{3\pi}{2}) = -\cos(x) & (18.56b) \end{cases}$$

pour tout x. Nous appliquons cela à $x = \frac{\pi}{2} + s$, en nous souvenant que $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ (par 18.21(2)) :

$$\cos(s) = \cos(\frac{\pi}{2} + s + \frac{3\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} + s) = \epsilon \tag{18.57}$$

et

$$\sin(s) = \sin(\frac{\pi}{2} + s + \frac{3\pi}{2}) = -\cos(\frac{\pi}{2} + s) = 0. \tag{18.58}$$

Si $\epsilon = 1$, nous avons une contradiction avec 18.21(1). Si $\epsilon = -1$, nous avons une contradiction avec 18.21(5).

Donc $\cos(x) \neq 0$ pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$.

(5) **$\cos(x) < 0$ sur $]\pi/2, \pi]$** Nous savons que $\cos(\pi) = -1$ (18.21(3)). Étant donné que la fonction cos est continue et qu'elle ne s'annule pas sur $]\pi/2, \pi]$, nous en déduisons qu'elle y est partout strictement négative.

(6) **Pour (4), (5), (6)** Il est directement visible sur le développement de définition que $\cos(-x) = \cos(x)$. Et comme $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, nous avons

$$\cos(\pi + s) = \cos(-\pi - s) = \cos(\pi - s). \tag{18.59}$$

Donc toutes les valeurs (et tous les signes) de $\cos(x)$ sur $[\pi, 2\pi]$ peuvent être déduits de ceux sur $[0, \pi]$.

□
LEMooPARBooTXbbiB

Lemme 18.23.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) *Nous avons* $\cos(x) = \cos(y)$ *si et seulement si*

$$y \in \{x + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{-x + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{18.60}$$

(2) *Nous avons* $\sin(x) = \sin(y)$ *si et seulement si*

$$y \in \{x + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{-x + (2k+1)\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{18.61}$$

PROPooZULQooBKWrcv

Proposition 18.24.
Les nombres $x, y \in \mathbb{R}$ *vérifient* SUBEQSooIHUGooAUchjn

$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(y) & \text{(18.62a)} \\ \sin(x) = \sin(y) & \text{(18.62b)} \end{cases}$$

si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $y = x + 2k\pi$.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Leftarrow$ Si $y = x + 2k\pi$, le résultat est correct parce que la proposition 18.21(2) dit que sin et cos sont périodiques de période 2π.

(2) $\Rightarrow$ Supposons que $x > y$. Nous calculons $\sin(x-y)$ et $\cos(x-y)$ en utilisant les formules du lemme 18.14 et en tenant compte de (18.62). Cela donne $\cos(x-y) = 1$ et $\sin(x-y) = 0$. La proposition 18.18(2) dit alors que $x - y$ est une période de la fonction cos.

Or *la* période de cos est 2π (proposition 18.21(2)). Donc toutes les périodes de cos sont les $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$ (lemme 12.207).

□

CORooTFMAooHDRrqi

Corolaire 18.25.
Des nombres $x, y \in \mathbb{R}$ *vérifient* $e^{ix} = e^{iy}$ *si et seulement si il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $y = x + 2k\pi$.

Démonstration. Le lemme 18.11 donne $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Donc l'équation $e^{ix} = e^{iy}$ revient au système (18.62) dont les solutions sont bien $y = x + 2k\pi$. □

LEMooBIPFooQNiTqZ

Lemme 18.26 ([1])**.**
À propos de croissance et décroissance des fonctions trigonométriques.

(1) *Sur* $]0, \pi[$, *la fonction* cos *est décroissante.*

(2) *Sur* $]-\pi, 0[$, *la fonction* cos *est croissante.*

Démonstration. Nous savons que $\cos' = -\sin$ par le lemme 18.3. La liaison entre dérivée et croissance est la proposition 12.209. Les signes de la fonction cosinus sont dans le lemme 18.22. Les signes de la fonction sinus peuvent être déduits de la proposition 18.21(7).

Vous avez tout en main. □

Tout cela nous permet de calculer quelques valeurs remarquables de cosinus et sinus ainsi que d'écrire le tableau de variations de sinus et cosinus.

LEMooIGNPooPEctJy

Lemme 18.27.
Nous avons les valeurs remarquables

$$\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{18.63}$$

Démonstration. La relation (18.25b) donne

$$0 = \cos(\pi/2) = \cos^2(\pi/4) - \sin^2(\pi/4). \tag{18.64}$$

Donc $\cos^2(\pi/4) = \sin^2(\pi/4)$. Mais puisque $\sin(\pi/4)$ et $\cos(\pi/4)$ sont positifs, ils sont égaux.

Nous avons aussi $\sin^2(\pi/4) + \cos^2(\pi/4) = 1$. Donc le nombre $x = \cos(\pi/4) = \sin(\pi/4)$ vérifie l'équation $2x^2 = 1$, dont l'unique solution positive est $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

LEMooRMHAooDEAPMw

Lemme 18.28.
Nous avons la valeur remarquable

$$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}. \tag{18.65}$$

Démonstration. Il faut utiliser la formule (18.22a) avec $\cos(\pi) = \cos(2\pi/3+\pi/3)$ en sachant que $\cos(\pi) = -1$. Ensuite $\cos(2\pi/3) = \cos(\pi/3 + \pi/3)$. En décomposant ainsi, nous exprimons $-1 = \cos(\pi)$ en termes de $\cos(\pi/3)$ et de $\sin(\pi/3)$. En substituant $\sin^2(\pi/3) = 1 - \cos^2(\pi/3)$ nous trouvons que le nombre $\cos(\pi/3)$ vérifie l'équation

$$4x^3 - 3x + 1 = 0. \tag{18.66}$$

Croyez-le ou non, les solutions de cette équation sont $x = -1$ et $x = 1/2$. Allez. Faisons comme si nous le savions pas. En tout cas, ces deux nombres sont des solutions, et nous avons la factorisation[7]

$$4x^3 - 3x + 1 = (2x - 1)^2(x + 1). \tag{18.67}$$

Donc $1/2$ est de multiplicité 2 et -1 de multiplicité 1. Le théorème 3.118 nous dit qu'il n'y a alors pas d'autres racines que ces deux-là[8].

Nous en déduisons que la valeur de $\cos(\pi/3)$ est soit $1/2$ soit -1. La proposition 18.21(5) nous dit qu'il est impossible que $\cos(\pi/3)$ soit égal à -1 parce que $\pi/3 < \pi$. Donc $\cos(\pi/3) = 1/2$ comme annoncé. □

Remarque 18.29.
Vous avez déjà sans doute vu la démonstration de $\cos(30°) = 1/2$ à partir de la figure 18.4. Il n'est pas possible de l'utiliser parce que cela n'est en réalité pas loin d'être la définition de l'angle entre deux droites.

Si vous voulez savoir la définition de l'angle entre deux droites, il faut passer par la définition 18.151, laquelle se base sur le lemme 18.135 qui, elle-même, se base sur la proposition 18.59.

Bref, à notre niveau, nous sommes encore loin de pouvoir faire des raisonnements trigonométriques sur base de géométrie dans les triangles.

PROPooJFAGooYjRJcb

Proposition 18.30.
Pour tout $x \in [0, \pi/4[$ nous avons $\cos(x) > \sin(x)$.

Démonstration. Nous posons $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. Elle vérifie $f(0) = 1$. En utilisant les dérivées du lemme 18.3, nous trouvons

$$f'(x) = -\big(\sin(x) + \cos(x)\big). \tag{18.68}$$

Mais sur $]0, \pi/2[$ nous avons $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) > 0$ (proposition 18.21(11)). Donc f est strictement décroissante. Elle ne peut donc passer qu'une seule fois par zéro. Le lemme 18.27 nous indique que $f(\pi/4) = 0$. Donc $f(x) > 0$ sur $[0, \pi/4[$. □

PROPooIBYEooClQttq

Proposition 18.31.
Quelques valeurs trigonométriques.

(1) Pour le sinus :

(1a) $\sin(0) = 0$
(1b) $\sin(\pi/6) = 1/2$
(1c) $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
(1d) $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$
(1e) $\sin(\pi/2) = 1$

(2) Pour le cosinus :

(2a) $\cos(0) = 1$
(2b) $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$
(2c) $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
(2d) $\cos(\pi/3) = 1/2$
(2e) $\cos(\pi/2) = 0$

(3) Pour la tangente :

(3a) $\tan(0) = 0$
(3b) $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$
(3c) $\tan(\pi/4) = 1$
(3d) $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$
(3e) $\tan(\pi/2)$ *est non défini.*

Démonstration. Plusieurs ont déjà été faites. Les autres ne seront pas démontrées dans l'ordre énoncé.

(1) $\sin(0) = 0$ Substitution dans la définition (18.2).

(2) $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ C'est le lemme 18.27.

(3) $\sin(\pi/3) = 1/\sqrt{2}$ Nous utilisons la formule $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ avec $x = \pi/3$. Vu que $\cos(\pi/3) = 1/2$ (lemme 18.28), cela donne $\sin^2(\pi/3) = 3/4$. Nous en déduisons que $\sin(\pi/3)$ vaut $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La proposition 18.21(5) nous dit que sin est positive sur $[0, \pi]$. Donc c'est bien la possibilité $\sqrt{3}/2$ qui est la bonne.

[7] Factorisation d'un polynôme en sachant des racines, proposition 3.111.
[8] Nous attirons votre attention sur le fait que cela n'est en aucun cas une trivialité.

(4) $\sin(\pi/6) = 1/2$ **et** $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ Nous partons de l'équation (18.25b) pour écrire

$$\sin(\pi/3) = 2\cos(\pi/6)\sin(\pi/6). \tag{18.69}$$

Nous avons déjà vu que $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. En posant $x = \sin(\pi/6)$ nous avons également $\cos(\pi/6) = \sqrt{1-x^2}$ parce que nous savons que la fonction cosinus est positive sur $[0, \pi/2]$ (proposition 18.21(11)). Nous avons donc l'équation

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2x\sqrt{1-x^2}. \tag{18.70}$$

Nous passons au carré et posons $y = x^2$. Après quelque manipulations,

$$16y^2 - 16y + 3 = 0. \tag{18.71}$$

Cela donne deux possibilités pour y : $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$. Puisque $x > 0$, nous pouvons simplement passer à la racine carrée : $x = \sqrt{3}/2$ ou $x = 1/2$.

Notez que si nous avions posé $x = \cos(\pi/6)$ au lieu de $x = \sin(\pi/6)$, nous aurions obtenu le même résultat. Donc $\sin(\pi/6)$ et $\cos(\pi/6)$ peuvent tous deux avoir les valeurs $\sqrt{3}/2$ ou $1/2$. Cela fait 4 possibilités.

Étant donné que $\sin^2(\pi/6)+\cos^2(\pi/6) = 1$, les deux possibilités avec $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/6)$ sont exclues.

La proposition 18.30 nous dit aussi que $\cos(\pi/6) > \sin(\pi/6)$. Donc $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ et $\sin(\pi/6) = 1/2$.

(5) $\sin(\pi/2) = 1$ C'est dans (18.42).

(6) $\cos(0) = 1$ Substitution dans la définition.

(7) $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ Déjà fait avec le sinus de $\pi/6$.

(8) $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ Lemme 18.27.

(9) $\cos(\pi/3) = 1/2$ Lemme 18.28.

(10) $\cos(\pi/2) = 0$ Dans (18.42).

Toutes les valeurs pour la tangente s'obtiennent maintenant par la définition, en calculant $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. □

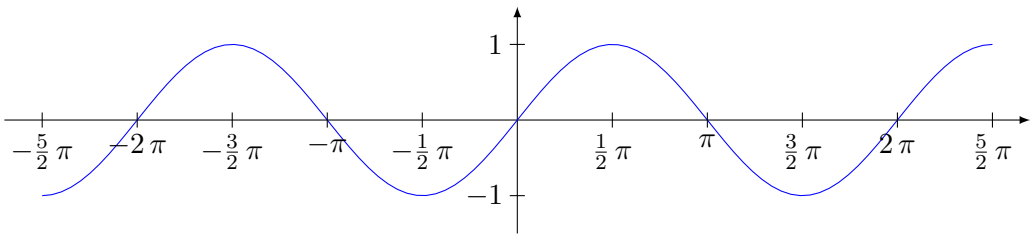
Voici un tableau qui rappelle les valeurs à retenir pour les fonctions sinus, cosinus et tangente.

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	N.D.

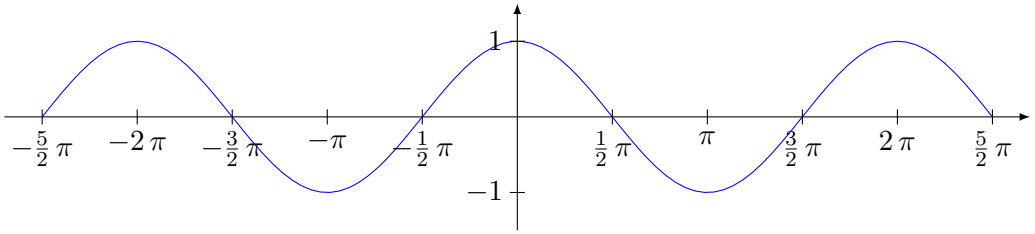
PGooIMQFooTnBdIl (18.72)

où « N.D. » signifie « non défini ».

Rappelons le graphe de la fonction sinus :



celui de la fonction cosinus :



developcosenpisur3

Exemple 18.32.
Développer la fonction cos autour de $x = \frac{\pi}{3}$. Utiliser la valeur remarquable du lemme 18.28. Nous développons autour de $h = 0$ la fonction $\cos(\frac{\pi}{3} + h)$:

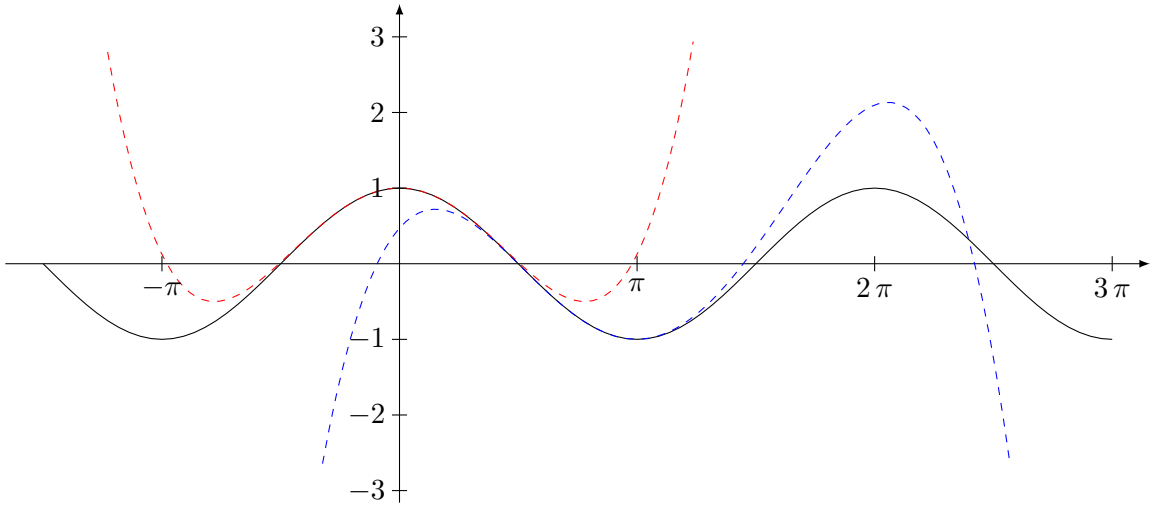
$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) \sim \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + h\cos'(\frac{\pi}{3}) + \frac{h^2}{2}\cos''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2. \tag{18.73}$$

Il est aussi possible d'écrire cela en notant $x = x_0 + h$, c'est-à-dire en remplaçant h par $x - \frac{\pi}{3}$:

$$\cos(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{3})^2. \tag{18.74}$$

△

18.33.
Voici un petit dessin pour donner une idée.



(1) En noir le graphe de $\cos(x)$.

(2) En rouge, le développement de $\cos(x)$ à l'ordre 4 autour de $x = 0$.

(3) En bleu, le développement de $\cos(x)$ à l'ordre 4 autour de $x = 3\pi/4$.

18.2 Trucs et astuces de calcul d'intégrales

SECooKSOFooEVKDLh

Afin d'alléger le texte de calculs parfois un peu longs, nous regroupons ici les intégrales à une variable.

18.2.1 Quelques intégrales « usuelles »

ItemIntegrali

(1) L'intégrale

$$\boxed{I = \int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\big(\ln(x) - \frac{1}{2}\big)} \tag{18.75}$$

se fait par partie en posant

$$\begin{aligned} u &= \ln(x), \quad dv = x\,dx \\ du &= \frac{1}{x}\,dx, \quad v = \frac{x^2}{2}, \end{aligned} \tag{18.76}$$

et ensuite

$$I = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}\big(\ln(x) - \frac{1}{2}\big). \tag{18.77}$$

(2) L'intégrale

$$\boxed{I = \int x\ln(x^2)dx = x^2\ln(x) - \frac{x^2}{2}.} \tag{18.78}$$

En utilisant le fait que $\ln(u^2) = 2\ln(u)$, nous retombons sur une intégrale du type (1) :

$$I = x^2\ln(x) - \frac{x^2}{2}. \tag{18.79}$$

(3) L'intégrale

$$\boxed{I = \int x\ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)(x^2+1) - x^2 - \frac{1}{2}} \tag{18.80}$$ EqTrucIntxlnxsqpun

se traite en posant $v = 1+x^2$ de telle sorte à avoir $dx = \frac{dv}{2x}$ et donc

$$I = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)(x^2+1) - x^2 - \frac{1}{2}. \tag{18.81}$$

(4) L'intégrale

$$I = \int \cos(\theta)\sin(\theta)\ln\left(1 + \frac{1}{\cos^2(\theta)}\right)d\theta \tag{18.82}$$

demande le changement de variable $u = \cos(\theta)$, $d\theta = -\frac{du}{\sin(\theta)}$. Nous tombons sur l'intégrale

$$I = -\int u\ln\left(\frac{1+u^2}{u^2}\right) = -\int u\ln(1+u^2) + \int u\ln(u^2), \tag{18.83}$$

qui sont deux intégrales déjà faites. Nous trouvons

$$I = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin^2(\theta)-1}{\sin^2(\theta)-2}\right)\sin^2(\theta) - \ln\left(\sin^2(\theta)-2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\sin^2(\theta)-1\right) \tag{18.84}$$

(5) L'intégrale

$$\boxed{\int \frac{r^3}{1+r^2}dr = \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(r^2+1).} \tag{18.85}$$

commence par faire la division euclidienne de r^3 par r^2+1 ; ce que nous trouvons est $r^3 = (r^2+1)r - r$. Il reste à intégrer

$$\int \frac{r^3}{1+r^2}dr = \int r\,dr - \int \frac{r}{1+r^2}dr. \tag{18.86}$$

La fonction dans la seconde intégrale est $\frac{r}{1+r^2} = \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}$ où $f(r) = 1+r^2$, et donc $\int \frac{r}{1+r^2} = \frac{1}{2}\ln(1+r^2)$. Au final,

$$I = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}\ln(r^2+1). \tag{18.87}$$

(6) L'intégrale

$$\boxed{I = \int \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = \frac{\sin^2(\theta)}{2}} \tag{18.88}$$ EqTrucIntsxcxdx

se traite par le changement de variable $u = \sin(\theta)$, $du = \cos(\theta)d\theta$, et donc

$$\int \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = \int udu = \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2(\theta)}{2}. \tag{18.89}$$

(7) L'intégrale

$$\boxed{\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(x)} \tag{18.90}$$ EqTrucsIntsqrtAplusu

s'obtient en effectuant le changement de variable $u = \sinh(\xi)$.

(8) L'intégrale

$$\boxed{\int \cos^2(x)\sin^2(x)dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}} \tag{18.91}$$ EqTrucIntcossqsinsq

s'obtient à coups de formules de trigonométrie. D'abord, la formule (18.25b) permet de récrire la fonction à intégrer sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{4}\sin^2(x). \tag{18.92}$$

Ensuite nous utilisons le fait que $\sin^2(t) = (1 - \cos(2t))/2$ pour transformer la formule à intégrer en

$$f(x) = \frac{1 - \cos(4x)}{8}. \tag{18.93}$$

Cela s'intègre facilement en posant $u = 4x$, et le résultat est

$$\int f(x)dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}. \tag{18.94}$$

(9) La fonction

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \tag{18.95}$$

est le **sinus cardinal** de x. Nous allons montrer que

$$\boxed{\int_0^\infty \big|\operatorname{sinc}(x)\big|dx = \infty}. \tag{18.96}$$ EqKNOmLEd

D'abord nous avons

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\big|\sin(t)\big|}{t}dt \geqslant \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\big|\sin(t)\big|}{n\pi}dt, \tag{18.97}$$

mais par périodicité,

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \big|\sin(t)\big|dt = \int_0^\pi \sin(t)dt = 2. \tag{18.98}$$

Par conséquent

$$\int_0^{n\pi} \big|\operatorname{sinc}(t)\big|dt \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \tag{18.99}$$

ce qui diverge lorsque $n \to \infty$.

(10) Les intégrales, pour $\epsilon > 0$,

$$\boxed{\int_0^\infty \cos(kx)e^{-\epsilon x}dx = \frac{\epsilon}{k^2 + \epsilon^2}} \tag{18.100}$$ EQooNCVIooWgbbrH

et

$$\boxed{\int_0^\infty \sin(kx)e^{-\epsilon x}dx = \frac{k}{k^2 + \epsilon^2}} \tag{18.101}$$ EQooSAYUooSatbGc

se calculent deux fois par partie. Nous posons

$$I = \int_0^\infty \cos(kx)e^{-\epsilon x}dx \tag{18.102a}$$

$$J = \int_0^\infty \sin(kx)e^{-\epsilon x}dx. \tag{18.102b}$$

L'intégrale I s'effectue par partie en posant $u = \cos(kx)$ et $v' = e^{-\epsilon x}$. Un peu de calcul montre que

$$I = \frac{1}{\epsilon} - \frac{k}{\epsilon}J. \tag{18.103}$$

Par ailleurs l'intégrale J se fait également par partie pour obtenir

$$J = \frac{k}{\epsilon}I. \tag{18.104}$$

En résolvant pour I et J les deux équations déduites, nous trouvons

$$I = \frac{\epsilon}{k^2 + \epsilon^2} \tag{18.105a}$$

$$J = \frac{k}{k^2 + \epsilon^2}. \tag{18.105b}$$

18.2.2 Reformer un carré au dénominateur

subsecCarreDenoPar

Lorsqu'on a un second degré au dénominateur, le bon plan est de reformer un carré parfait. Par exemple :

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1. \tag{18.106}$$

Ensuite, le changement de variable $t = x + 1$ est pratique parce que cela donne $t^2 + 1$ au dénominateur.

Cherchons

$$I = \int \frac{1 - x}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1 - x}{(x + 1)^2 + 1} dx = \int \frac{1 - (t - 1)}{t^2 + 1} \tag{18.107}$$

où nous avons fait le changement de variable $t = x + 1$, $dt = dx$. L'intégrale se coupe maintenant en deux parties :

$$I = \int \frac{-t}{t^2 + 1} + \int \frac{2}{t^2 + 1}. \tag{18.108}$$

La seconde est dans les formulaires et vaut

$$2 \arctan(t) = 2 \arctan(x + 1), \tag{18.109}$$

tandis que la première est presque de la forme f'/f :

$$\int \frac{t}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(t^1 + 1) = \frac{1}{2} \ln(u^2 + 2u + 2). \tag{18.110}$$

18.2.3 Décomposition en fractions simples

La décomposition en fractions simples décrite en 19.1.3 permet d'intégrer des fractions rationnelles. Elle peut parfois être évitée par la méthode de Rothstein-Trager que nous expliquerons dans 20.15.3.

18.3 Très modeste approximation de π

Nous sommes en droit de vouloir une valeur approchée de π.

LEMooJWSGooExmtDA

Lemme 18.34.
Nous avons l'encadrement

$$2\sqrt{2} < \pi < 4. \tag{18.111}$$

Démonstration. Grace au lemme 18.27 nous savons que la fonction sin passe de 0 à $\sqrt{2}/2$ sur un intervalle de taille $\pi/4$ avec une dérivée majorée par 1. Par conséquent

$$\frac{\pi}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{18.112}$$

et donc[9]

$$\pi > 2\sqrt{2} \simeq 2.82 \tag{18.113}$$

De plus la fonction sin passe de 0 à $\sqrt{2}/2$ sur un intervalle de taille $\pi/4$ avec une dérivée minorée par $\sqrt{2}/2$, donc

$$\frac{\pi}{4} < \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}, \tag{18.114}$$

ce qui donne

$$\pi < 4. \tag{18.115}$$

□

Pour avoir une meilleur approximation de π, nous pouvons remarquer que $\pi \in]2.82, 4[$, et que cet intervalle est suffisamment petit pour ne pas recouvrir l'intervalle correspondant pour 2π. L'équation $\cos(x) = -1$ possède donc une unique solution dans cet intervalle (et cette solution est π). Nous pouvons donc faire une dichotomie pour trouver la valeur de π, pourvu que nous ayons une façon d'évaluer des valeurs de $\cos(x)$ de façon pas trop ridicule.

LEMooIECUooQOGYyN

Lemme 18.35.
Pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

[9] Sérieusement, êtes-vous capables de trouver une approximation de $\sqrt{2}$ en ne vous basant que sur des choses vues jusqu'ici ?

Démonstration. Nous commençons par les valeurs $x > 0$. Considérons la fonction

$$f(x) = x - \sin(x). \tag{18.116}$$

La dérivée de f vaut

$$f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0, \tag{18.117}$$

De plus $f(0) = 0$. Vu que f est croissante, nous avons $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

(1) **Pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$** Nous avons $|x| = x$ et $|\sin(x)| = \sin(x)$, et ce que nous venons de dire à propos de f suffit pour conclure.

(2) **Pour $x \geqslant \pi$** En utilisant l'approximation de π du lemme 18.34, nous avons $\pi > 2\sqrt{2} > 2$ et donc[10]

$$|x| - |\sin(x)| > 2 - 1 = 1 > 0. \tag{18.118}$$

(3) **Pour $x < 0$** Si $x \leqslant 0$, ce que nous venons de faire nous assure que $\sin(-x) \leqslant -x$. Par ailleurs, nous savons déjà par (18.6c) que $\sin(-x) = -\sin(x)$. Nous avons donc

$$|\sin(x)| = \sin(-x) \leqslant -x = |x|. \tag{18.119}$$

□

18.3.1 Les fonctions tangente et arc tangente

Définition 18.36.
*La fonction **tangente** est :*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{18.120}$$

où sin *et* cos *sont de la définition 18.1.*

La fonction tangente n'est pas définie sur les points de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Une interprétation géométrique, qui justifie le nom, est donnée sur la figure 18.1.

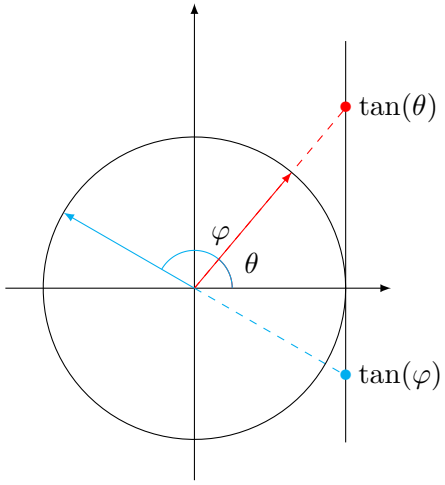


FIGURE 18.1 : Interprétation géométrique de la fonction tangente. La tangente de l'angle θ est positive (et un peu plus grande que 1) tandis que celle de la tangente de l'angle φ est négative.LabelFigTgCercleTrigono

LEMooYAMFooXCLXfr

Lemme 18.37.
La dérivée de la fonction tangente vaut

$$\tan'(x) = \tan^2(x) + 1, \tag{18.121}$$

Démonstration. Il suffit de suivre les règles de calcul comme la dérivation du quotient 12.194(5). □

[10] Ouais ; l'approximation $\pi > 2$ nous suffit. On est large.

PROPooTLHUooPpqupE

Proposition 18.38.
La fonction

$$\begin{aligned}\tan\colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[&\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \tan(x)\end{aligned} \tag{18.122}$$

est une bijection.

Démonstration. Le cosinus ne s'annulant pas sur l'intervalle donné, la fonction est bien définie. Nous avons

$$\lim_{x\to\pi/2^-}\tan(x)=+\infty \tag{18.123}$$

parce que la limite du sinus est 1 est celle du cosinus est zéro par les valeurs positives. Le même raisonnement donne la limite en $-\pi/2$ qui vaut $-\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires[11] dit que la fonction tangente est alors surjective sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs le lemme 18.37 nous donne la dérivée de la tangente sous la forme $\tan'(x)=\tan^2(x)+1$, ce qui nous donne une dérivée partout strictement positive, et donc une fonction strictement croissante et donc injective. □

Le graphe de la fonction tangente est sur la figure 18.2.

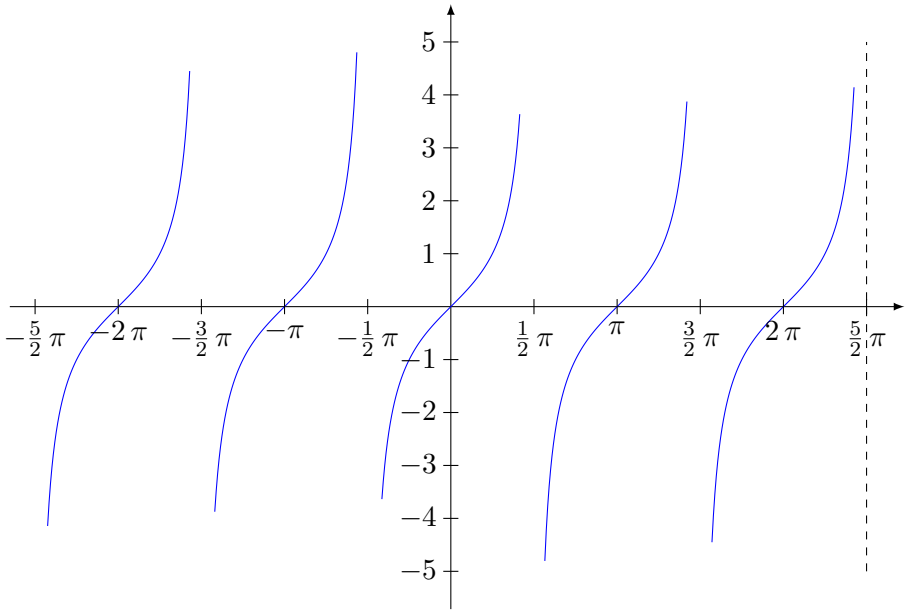


FIGURE 18.2 : Le graphe de la fonction tangente. LabelFigPVJooJDyNAg

En ce qui concerne la bijection réciproque nous avons le théorème suivant.

THOooUSVGooOAnCvC

Théorème 18.39.
La fonction inverse de la tangente,

$$\begin{aligned}\arctan\colon \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan(x)\end{aligned} \tag{18.124}$$

nommée ***arc tangente*** *est*

(1) *impaire et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. ITEMooMNHLooOVhIIb

(2) *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée*

$$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}. \tag{18.125}$$ EQooGCHGooPlwYWt

Démonstration. Il est immédiatement visible sur son développement de définition (18.2) que la fonction sinus est impaire. Une vérification similaire montre que la fonction cosinus est paire. La fonction tangente est alors impaire et sa réciproque l'est tout autant.

[11] Théorème 9.95.

La fonction arc tangente est également dérivable (donc continue) par la proposition 12.202 parce que la fonction tangente l'est. Notons qu'ici nous nous sommes restreint à $]-\pi/2, \pi/2[$. Sinon, le résultat est faux.

La formule proposée pour la dérivée provient également de la proposition 12.202 et de la dérivée de la tangente du lemme 18.37. □

LEMooHRDCooGtnyeQ

Lemme 18.40.
Nous avons les limites

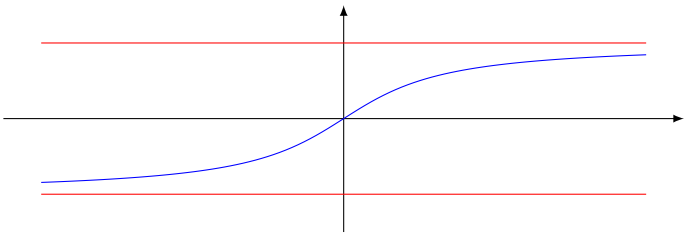
(1) $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$,

(2) $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.

LEMooHJEKooARZMil

Lemme 18.41.
L'application $\arctan\colon \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ *est un homéomorphisme*[12].

Exemple 18.42.
Un homéomorphisme $\phi\colon \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est donné par exemple par la fonction $\phi(t) = \frac{2}{\pi}\arctan(t)$ dont le graphique est donné ci-dessous :



△

LEMooJKIUooEMMOrs

Lemme 18.43.
Nous avons la valeur remarquable

$$\arctan(1/\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}. \tag{18.126}$$

Le nombre $\arctan(x_0)$ se calcule en cherchant l'angle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont la tangente vaut x_0. Nous obtenons le tableau de valeurs suivant :

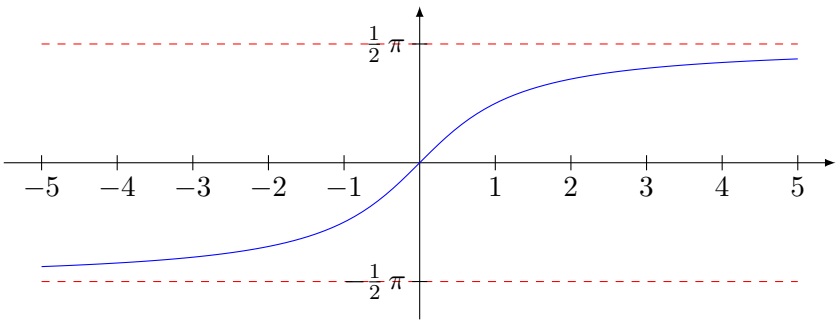
LEMooPQNCooDkEUyw

Lemme 18.44.
Quelques valeurs remarquables de l'arc tangente :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

(18.127)

En ce qui concerne la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$, elle s'obtient « en retournant » la partie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ du graphique de la fonction tangente :



18.3.2 La fonction arc sinus

Nous voulons étudier la fonction

$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} \tag{18.128}$$

[12] Bijection continue, inversion continu définition 7.51.

et sa réciproque éventuelle.

La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas bijective : elle prend une infinité de fois chaque valeur de $J = [-1, 1]$. Pour définir une bijection réciproque de la fonction sinus en utilisant le théorème 12.53, nous devons donc choisir un intervalle à partir duquel la fonction sinus est monotone. Nous choisissons l'intervalle

$$I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \tag{18.129}$$

La fonction

$$\begin{aligned} \sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} \tag{18.130}$$

est une bijection croissante et continue. Nous avons donc le résultat suivant.

Théorème 18.45 (Définition et propriétés de arc sinus)**.**
Nous nommons ***arc sinus*** *la bijection inverse de la fonction* $\sin\colon I \to J$*. La fonction*

$$\begin{aligned} \arcsin\colon [-1, 1] &\to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x &\mapsto \arcsin(x) \end{aligned} \tag{18.131}$$

ainsi définie est

(1) *continue et strictement croissante ;*

(2) *impaire : pour tout* $x \in [-1, 1]$ *nous avons* $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$*.*

Démonstration. Nous prouvons le fait que arcsin est impaire. Un élément de l'ensemble de définition de arcsin est de la forme $y = \sin(x)$ avec $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. La relation (12.100) s'écrit dans notre cas

$$x = \arcsin\big(\sin(x)\big). \tag{18.132}$$ EqVUWooUwVxVp

Nous écrivons d'une part cette équation avec $-x$ au lieu de x :

$$-x = \arcsin\big(\sin(-x)\big) = \arcsin\big(-\sin(x)\big) = \arcsin(-y); \tag{18.133}$$ EqRLYooIwQySz

et d'autre part nous multiplions (18.132) par -1 :

$$-x = -\arcsin\big(\sin(x)\big) = -\arcsin(y). \tag{18.134}$$ EqTGIooDeRYyT

En égalisant les valeurs (18.133) et (18.134) nous trouvons

$$\arcsin(-y) = -\arcsin(y), \tag{18.135}$$

ce qui signifie que arcsin est une fonction impaire. □

Notons que cette preuve repose sur le fait que tout élément de l'ensemble de définition de la fonction arc sinus peut être écrit sous la forme $\sin(x)$ pour un certain x.

Si $x_0 \in [-1, 1]$ est donné, calculer $\arcsin(x_0)$ revient à trouver un angle θ_0 dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour lequel $\sin(\theta_0) = x_0$. Un tel angle sera forcément unique.

Remarque 18.46.
La définition de arc sinus découle du choix de l'intervalle I, qui est une convention. Il aurait été possible de faire un choix différent : pourriez-vous trouver la réciproque de la fonction sinus sur l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$? Le mieux est de l'écrire comme une translatée de arc sinus, en utilisant le fait que sinus est une fonction périodique.

Lemme 18.47.
Nous avons $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$*.*

Démonstration. Pour calculer $\arcsin(1)$, il faut chercher un angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ ayant 1 pour sinus : résoudre $\sin(\theta) = 1$. La solution est $\theta = \frac{\pi}{2}$ et nous avons donc $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. □

À l'aide des valeurs remarquables de la fonction sinus nous obtenons le tableau suivant de valeurs remarquables pour l'arc sinus.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Les autres valeurs remarquables peuvent être déduites du fait que l'arc sinus est une fonction impaire.

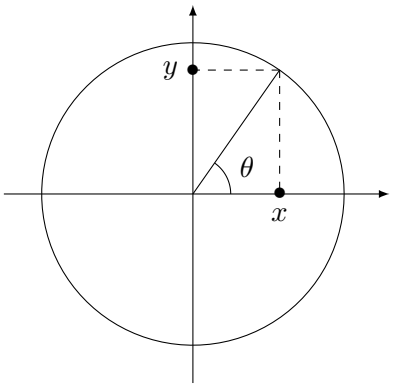
En ce qui concerne la dérivabilité de la fonction arc sinus, en application de la proposition 12.202 elle est dérivable en tout $y = \sin(x)$ tel que $\sin'(x) \neq 0$, c'est-à-dire tel que $\cos(x) \neq 0$. Or $\cos(x) = 0$ pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à $y = \sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$. La fonction arc sinus est donc dérivable sur $]-1,1[$. Nous avons donc la propriété suivante pour la dérivabilité.

Proposition 18.48.
La fonction arc sinus est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. Pour tout $y \in]-1,1[$, la dérivée est donnée par la formule (12.529), qui dans ce cas s'écrit

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos\big(\arcsin(y)\big)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{18.136}$$

La dernière égalité viens du fait que si $x = \arcsin(y)$ alors $y = \sin(x)$ et $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{1-y^2}$.

Pour comprendre la dernière égalité, remarquer que dans le dessin suivant, $\theta = \arcsin(y)$, donc $y = \sin(\theta)$, et $x = \cos(\theta)$.



Notons enfin que le graphe de la fonction arc sinus est donné à la figure 18.3.

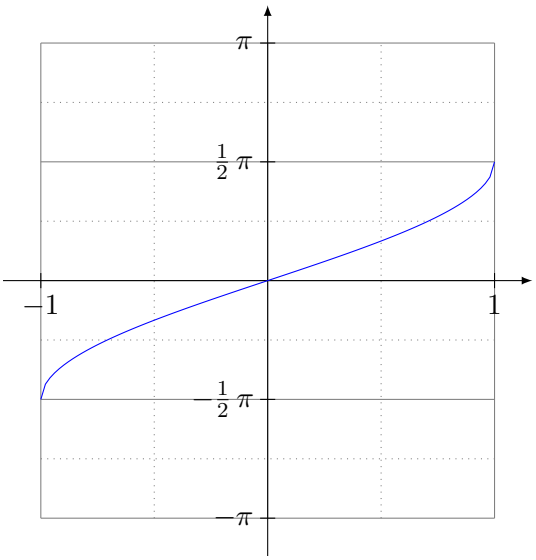


FIGURE 18.3 : Le graphe de la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ LabelFigFGRooDhFkch

18.3.3 La fonction arc cosinus

Nous voulons étudier la fonction

$$\cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1] \tag{18.137}$$

et son éventuelle réciproque. Encore une fois il n'est pas possible d'en prendre la réciproque globale parce que ce n'est pas une bijection ; ne fut-ce que parce qu'elle est périodique (proposition 18.18). Nous choisissons de considérer l'intervalle $[0,\pi]$ sur lequel la fonction cosinus est continue et strictement monotone décroissante.

Nous avons alors le résultat suivant :

PROPooZOZHooSMoYQD

Proposition-Définition 18.49.
Pour définir la fonction arc cosinus.

ITEMooMJWZooNHgQox

(1) La fonction

$$\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1] \tag{18.138}$$

est une bijection continue strictement décroissante.

(2) Sa bijection réciproque est la fonction

$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi] \tag{18.139}$$

nommée ***arc cosinus****.*

(3) La fonction arc cosinus est continue, strictement décroissante.

(4) Elle est dérivable et pour tout $y \in]-1,1[$, sa dérivée est donnée par

$$\arccos'(y) = \frac{1}{-\sin\big(\arccos(y)\big)} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{18.140}$$

Démonstration. La fonction cosinus est continue et même de classe C^∞ par la proposition 18.1. Elle est strictement décroissante parce que sa dérivée $(-\sin)$ y est strictement négative (strictement, à l'intérieur du domaine).

Le fait que arc cosinus soit une bijection continue strictement monotone est dans le théorème de la bijection 12.53. La dérivabilité et la formule sont de la proposition 12.202. □

Pour $y_0 \in [-1,1]$, trouver la valeur de $\arccos(y_0)$ revient à résoudre l'équation $\cos(x_0) = y_0$. Cela nous permet de construire une tableau de valeurs :

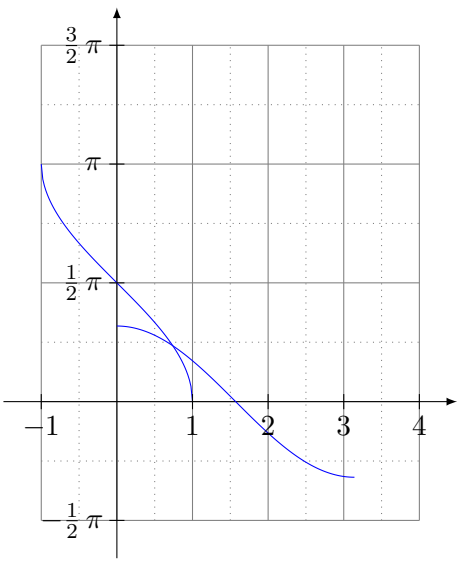
x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0

Remarque 18.50.
Certes la fonction cosinus est paire (vue sur $\mathbb{R}$), mais la fonction arc cosinus ne l'est pas car elle est une bijection entre $[-1,1]$ et $[0,\pi]$.

Exemple 18.51.
Cherchons $\arccos(\frac{1}{2})$. Il faut trouver un angle $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. La solution est $\theta = \frac{\pi}{3}$. Donc $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

Il n'est cependant pas immédiat d'en déduire la valeur de $\arccos(-\frac{1}{2})$. En effet $\theta = \arccos(-\frac{1}{2})$ si et seulement si $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ avec $\theta \in [0,\pi]$. La solution est $\theta = \frac{2\pi}{3}$. △

En ce qui concerne la représentation graphique, il suffit de tracer la fonction cosinus entre 0 et π puis de prendre le symétrique par rapport à la droite $y = x$.



18.3.4 Une meilleure approximation de π

Nous avions laissé le nombre π avec l'approximation assez minable de $2\sqrt{2} < \pi < 4$ en le lemme 18.34. Nous pouvons maintenant faire nettement mieux.

Le lemme 18.43 donne

$$\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6 \tag{18.141}$$

et l'idée est de donner un développement de arctan autour de zéro, de l'évaluer en $1/\sqrt{3}$ et d'égaliser le résultat à $\pi/6$. Tout cela donne lieu à des calculs peut-être fastidieux, mais comme un gars l'a fait dès l'an 1424[606] pour trouver 16 décimales correctes, nous faisons comme si c'était facile.

Pour trouver le développement en série de Taylor (théorème 12.471) de arc tangente autour de $x = 0$, il faut partir de la formule (18.125) et sans doute pas mal calculer et faire une récurrence[13]. Le résultat est :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}, \tag{18.142}$$

valable pour $x \in]-1,1[$. Avec cela nous avons

$$\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \tag{18.143}$$

et donc

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)k}{(2k+1)3^k}. \tag{18.144}$$

Pour donner une idée du fait que ça fonctionne pas mal, voici le calcul pour quelques termes :

```
1
2
3  SageMath version 7.3, Release Date: 2016-08-04
4  Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
5  Type "help()" for help.
6
7  sage: n(taylor(arctan(x),x,0,5)(1/sqrt(3)))*6
8  3.15618147156995
9  sage: n(taylor(arctan(x),x,0,10)(1/sqrt(3)))*6
10 3.14260474566308
11 sage: n(taylor(arctan(x),x,0,20)(1/sqrt(3))*6-pi)
12 -2.14265171338823e-6
13 sage: n(taylor(arctan(x),x,0,58)(1/sqrt(3))*6-pi)
14 8.88178419700125e-16
```

tex/sage/sageSnip012.sage

Calculer 5 termes donne déjà 3.15. Et on est à 10^{-6} de la bonne réponse avec 20 termes. Et avec 58 termes, on n'est à 10^{-16}.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 18.52
Pour bien faire, il faudrait étudier le reste et donner un encadrement.

18.3.5 Angle entre deux vecteurs

DEFooSVDZooPWHwFQ

Proposition-Définition 18.53.
Soient des vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\|Y\|}. \tag{18.145}$$

eqDefAngleVect

Ce réel est appelé ***angle*** *entre X et Y.*

[13] Je n'ai pas fait le calcul, merci de me faire savoir si il y a une astuce.

Démonstration. Si a et b sont des réels, l'inégalité $|a| \leqslant b$ peut se développer en une double inégalité

$$-b \leqslant a \leqslant b. \tag{18.146}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (10.2) devient alors

$$-\|X\|\|Y\| \leqslant X \cdot Y \leqslant \|X\|\|Y\|. \tag{18.147}$$

Si $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, nous en déduisons

$$-1 \leqslant \frac{X \cdot Y}{\|X\|\|Y\|} \leqslant 1. \tag{18.148}$$

Il existe donc par la proposition 18.49 un angle $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\|Y\|}. \tag{18.149}$$

□

18.54.
Certains n'hésitent pas à écrire la formule

$$X \cdot Y = \|X\|\|Y\| \cos(\theta). \tag{18.150}$$ eqPropCosThet

comme une définition du produit scalaire. C'est ce qui arrive lorsqu'on définit les fonctions trigonométriques à partir de relations dans les triangles rectangles.

Nous pouvons prouver simplement que $\sin(30°) = \frac{1}{2}$ et $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en s'inspirant de la figure 18.4.

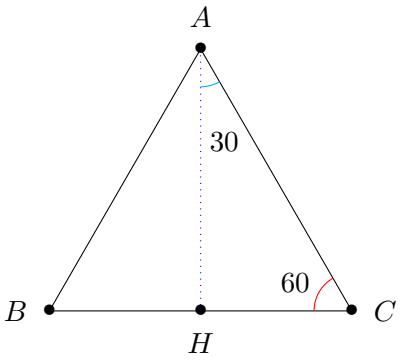


FIGURE 18.4 : Un triangle équilatéral de côté 1. LabelFigGVDJooYzMxLW

18.3.6 Aire du parallélogramme

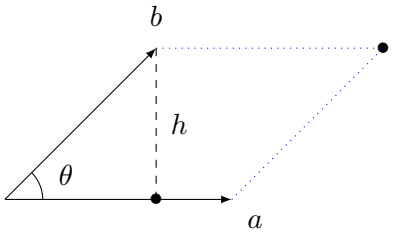


FIGURE 18.5 : Calculer l'aire d'un parallélogramme. LabelFigBNHLooLDxdPA

RemaAireParalProdVect

Remarque 18.55.
Le nombre $\|a\|\|b\| \sin(\theta)$ est l'aire du parallélogramme[14] formé par les vecteurs a et b, comme cela se voit sur la figure 18.5. Un vrai calcul avec une intégrale sera effectué dans la proposition 20.26.

[14] Définition de ce qu'est une aire : 20.21. Preuve dans le cas d'un parallélogramme : 20.26.

PropNormeProdVectoabsint

Proposition 18.56.
Nous avons

$$\|a\times b\| = \|a\|\|b\|\sin(\theta) \tag{18.151}$$

où $\theta\in[0,\pi]$ est l'angle formé par a et b.

Démonstration. En utilisant la décomposition du produit vectoriel[15], nous avons

$$\begin{aligned}\|a\times b\|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (a_2b_3-b_2a_3)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\ &= \|a\|^2\|b\|^2-(a\cdot b)^2 \\ &= \|a\|^2\|b\|^2-\|a\|^2\|b\|^2\cos^2(\theta) \\ &= \|a\|^2\|b\|^2\big(1-\cos^2(\theta)\big) \\ &= \|a\|^2\|b\|^2\sin^2(\theta).\end{aligned} \tag{18.152}$$

D'où le résultat. Nous avons utilisé la formule de la définition (18.53) donnant l'angle en fonction du produit scalaire. □

NORMooWWOKooWzScnZ

18.57.
Si les vecteurs a, b et c ne sont pas coplanaires, alors la valeur absolue du produit mixte (voir équation (10.135)) $a\cdot(b\times c)$ donne le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs a, b et c.

En effet si φ est l'angle entre $b\times c$ et a, alors la hauteur du parallélépipède vaut $\|a\|\cos(\varphi)$ parce que la direction verticale est donnée par $b\times c$, et la hauteur est alors la « composante verticale » de a. Par conséquent, étant donné que $\|b\times c\|$ est l'aire de la base, le volume du parallélépipède vaut[16]

$$V = \|b\times c\|\|a\|\cos(\varphi). \tag{18.153}$$

Or cette formule est le produit scalaire de a par $b\times c$; ce dernier étant donné par le déterminant de la matrice formée des composantes de a, b et c grâce à la formule (10.135).

La valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{18.154}$$

EqDerath

est l'aire du parallélogramme déterminé par les vecteurs $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$. En effet, d'après la remarque 18.55, l'aire de ce parallélogramme est donnée par la norme du produit vectoriel

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_z, \tag{18.155}$$

donc la norme $\|a\times b\|$ est bien donnée par la valeur absolue du déterminant (18.154).

18.4 Paramétrisation du cercle

Nous allons parler de paramértisation du cercle. L'ensemble S^1 sera vu tantôt comme le cercle dans $\mathbb{R}^2$, tantôt comme le cercle dans $\mathbb{C}$. Nous n'allons pas pousser le vice jusqu'à écrire explicitement les isomorphismes lorsque nous passons d'une représentation à l'autre. Parmi les identifications que nous allons faire sans ménagement, il y a l'identification entre les applications

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \big(\cos(t),\sin(t)\big)\end{aligned} \tag{18.156}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi\colon [0,2\pi[&\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{it}.\end{aligned} \tag{18.157}$$

[15] Directement de la définition 10.40.

[16] Le calcul de ce volume mériterait une certaine réflexion, surtout à partir du moment où nous avons décidé de définir les fonctions trigonométriques à partir de leur développement (définition 18.1).

C'est évidemment la formule $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ (lemme 18.11) qui permet de transformer γ en φ et inversement. De plus $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels normés (et aussi donc topologiques).

Nous allons prouver suffisamment de résultats à propos de ces deux applications pour pouvoir dire qu'elles paramétrisent le cercle et écrire des égalités du type

$$\int_{S^1} f = \int_0^{2\pi} f \circ \varphi. \tag{18.158}$$

18.5 Cercle trigonométriques

PROPooWZFGooMVLtFz

Proposition 18.58 ([607]).
Soient des fonctions $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur l'ouvert I de $\mathbb{R}$ telles que $f^2 + g^2 = 1$. Soient $t_0 \in I$ et θ_0 tel que $f(t_0) = \cos(\theta_0)$ et $g(t_0) = \sin(\theta_0)$.

Alors il existe une unique fonction continue $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \theta(t_0) = \theta_0 & \text{(18.159a)} \\ f = \cos\circ\theta & \text{(18.159b)} \\ g = \sin\circ\theta. & \text{(18.159c)} \end{cases}$$

Démonstration. Nous commençons par l'existence, en passant par les nombres complexes. Soit $h\colon I \to \mathbb{C}$ définie par $h = f + ig$. Nous avons $h\bar{h} = 1$ et nous définissons

$$\theta(t) = \theta_0 - i\int_{t_0}^{t} h'(s)\overline{h(s)}ds. \tag{18.160}$$

Cette intégrale existe pour tout t parce que les fonctions f et g étant continues, elles sont bornées sur le compact $[t_0, t]$. De plus θ est une fonction continue parce que c'est une primitive (proposition 14.287)[17].

La dérivée de θ est la fonction $s \mapsto -ih'(s)\overline{h(s)}$.

Utilisant la formule du lemme 18.11 sur la forme trigonométrique des nombres complexes, nous calculons :

$$\frac{d}{dt}\Big[he^{-i\theta}\Big]_{t=0} = e^{-i\theta}(h' - h\theta') = e^{-i\theta}(h' - ih(-i)h'\bar{h}) = 0. \tag{18.161}$$

Par conséquent il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $he^{-i\theta} = c$. Mais $h(t_0) = f(t_0) + ig(t_0) = \cos(\theta_0) + i\sin(\theta_0) = e^{i\theta_0}$, du coup

$$h(t_0)e^{-i\theta(t_0)} = c \tag{18.162}$$

donne immédiatement $c = 1$, ou encore $e^{i\theta(t)} = h(t)$, c'est-à-dire que

$$f + ig = \cos\circ\,\theta + i\sin\circ\,\theta, \tag{18.163}$$

ce qu'il fallait pour l'existence.

Pour l'unicité nous supposons avoir une autre fonction, α qui satisfait aux exigences. Pour tout $t \in I$ nous avons

$$e^{i\theta(t)} = e^{i\alpha(t)}. \tag{18.164}$$

Il existe donc une fonction $n\colon I \to \mathbb{N}$ telle que $\theta(t) = \alpha(t) + 2n(t)\pi$. Par continuité de θ et α, la fonction n doit être constante, mais vu que $\theta(t_0) = \alpha(t_0)$ nous avons $n = 1$. □

18.5.1 Bijection continue

PROPooKSGXooOqGyZj

Proposition 18.59.
L'application

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0, 2\pi[&\to S^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \big(\cos(t), \sin(t)\big) \end{aligned} \tag{18.165}$$

est une bijection continue.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Image** Le fait que l'image de γ soit dans S^1 découle immédiatement du fait que $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

(2) **Continuité** La continuité découle de la continuité des composantes.

[17] En réalité nous appliquons le théorème 10.1 à chacune des parties réelles et imaginaires de la fonction $s \mapsto h'(s)\overline{h(s)}$.

(3) **Injectif** Soient $x_1 < x_2$ tels que $\sin(x_1) = \sin(x_2)$ et $\cos(x_1) = \cos(x_2)$. Supposons pour fixer les idées que $\sin(x_1) > 0$ et $\cos(x_1) > 0$: si ce n'est pas le cas, il faut traiter séparément les 4 possibilités de combinaisons de signes.

Nous avons obligatoirement $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Vu que nous avons supposé que $\sin(x_1) = \sin(x_2)$, le théorème de Rolle 12.213 nous permet de considérer un élément $c \in]x_1, x_2[$ tel que $\sin'(c) = 0$, c'est-à-dire $\cos(c) = 0$. Cela contredirait la proposition 18.21(10) à moins que $x_1 = x_2$.

(4) **Surjectif**

Soient x, y tels que $x^2 + y^2 = 1$. Supposons pour varier les plaisirs[18] que $x < 0$ et $y > 0$. Puisque la fonction cos va de 0 à -1 lorsque x va de $\pi/2$ à π, le théorème des valeurs intermédiaires donne $t \in [\pi/2, \pi]$ tel que $\cos(t) = x$.

En reportant cette valeur de x dans l'égalité $x^2 + y^2 = 1$, nous trouvons $y^2 = 1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$, et donc $\sin(t) = \pm y$. Mais pour $t \in [\pi/2, \pi]$ nous avons $\sin(t) > 0$. Par conséquent $\sin(t) = y$ parce que nous avons également supposé $y > 0$.

□

CORooAKMKooORqcrO

Corolaire 18.60.
Soient $R > 0$ ainsi que le cercle $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|x\| = R\}$ de rayon R. L'application

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0, 2\pi[&\to S \\ t &\mapsto \big(R\cos(t), R\sin(t)\big) \end{aligned} \tag{18.166}$$

est une bijection continue.

EXooJFDPooBZADKs

Exemple 18.61.
L'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon]0, 2\pi[&\to S^1 \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18.167}$$

est continue par la proposition 18.59. Comme $]0, 2\pi[$ est connexe (proposition 9.54) le lemme 7.273 implique que le cercle privé d'un point est connexe. △

La proposition suivante ne va pas jusqu'à dire qu'il y a un C^∞-difféomorphisme entre $[0, 2\pi[$ et S^1. La raison est que n'avons pas défini la notion de différentielle pour des applications définies sur des fermés.

Si vous voulez un C^∞ difféomorphisme, il y a deux possibilités. Soit vous acceptez d'élargir un peu le domaine et vous allez voir les coordonnées polaires du théorème 18.226, soit vous allez étudier la géométrie différentielle, et vous considérez S^1 comme une variété.

PROPooXELTooYKjDav

Proposition 18.62 ([1, 186])**.**
Dans cette proposition, S^1 désigne l'ensemble des nombres complexes de norme 1. Trois affirmations.

ITEMooOHRHooRXvxrL

(1) L'application

$$\begin{aligned} f\colon [0, 2\pi[&\to S^1 \\ x &\mapsto e^{ix} \end{aligned} \tag{18.168}$$

est une bijection continue.

ITEMooPWUWooHsQBDg

(2) La réciproque de

$$\begin{aligned} f\colon [0, 2\pi[&\to S^1 \\ x &\mapsto e^{ix} \end{aligned} \tag{18.169}$$

n'est pas continue en 1.

ITEMooCVAQooLsYspI

(3) L'application

$$\begin{aligned} f\colon]0, 2\pi[&\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto e^{ix} \end{aligned} \tag{18.170}$$

est de classe C^∞.

Démonstration. En plein de points.

[18] Mais les autres cas sont à faire, pour être complet.

(1) **Pour (1)**

Nous savons que

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C}\\ (x,y) &\mapsto x+iy\end{aligned} \tag{18.171}$$

est une bijection isométrique. C'est pour cela que nous allons nous permettre de noter S^1 le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ aussi bien que l'ensemble des nombres complexes de norme 1.

Sur $\mathbb{R}^2$ nous avons l'application

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,2\pi[&\to S^1\subset\mathbb{R}^2\\ t &\mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{18.172}$$

qui est une bijection continue (c'est la proposition 18.59). Et enfin le lemme 18.11 nous donne $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$.

Avec tout ça, l'application $\varphi^{-1}\circ f\colon [0,2\pi[\to S^1$ est une bijection continue. Et comme φ l'est également, f est une bijection continue.

(2) **Pour (2)** Nous vérifions que la définition 7.45(1) n'est pas satisfaite pour f^{-1}. Nous considérons le voisinage $W=[0,\epsilon[$ de 0 dans $[0,2\pi[$ avec $\epsilon<1/2$. Nous allons montrer que tout voisinage V de 1 dans S^1 contient des points z_k tels que $f^{-1}(z_k)\notin W$. Tout voisinage de 1 dans S^1 contient une partie de la forme $B(1,r)\cap S^1$. Posons $z_k=\exp\big(i(2\pi-1/k)\big)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|1-\exp\big(i(2\pi-1/k)\big)\|^2 &= \|1-\cos(2\pi-1/k)-i\sin(2\pi-1/k)\| && \text{lem 18.11} && \text{(18.173a)}\\ &= |1-\cos(2\pi-1/k)|^2+|\sin(2\pi-1/k)|^2 && && \text{(18.173b)}\\ &\to 0. && && \text{(18.173c)}\end{aligned}$$

Donc pour tout r, nous avons $z_k\in B(1,r)\cap S^1$ dès que k est assez grand. Or $f^{-1}(z_k)=2\pi-1/k\notin[0,\epsilon[$ dès que k est assez grand.

(3) **Pour (3)** Nous avons $f(x)=\cos(x)+i\sin(x)$. Les fonctions sin et cos étant de classe C^∞ par la proposition 18.1, la fonction f l'est aussi.

□

La proposition suivante donne les coordonnées polaires sur $\mathbb{C}$. La régularité est l'objet du théorème 18.226 (à part le fait que ce dernier parle de $\mathbb{R}^2$ et non de $\mathbb{C}$).

PROPooRFMKooURhAQJ

Proposition 18.63 (Décomposition polaire des nombres complexes)**.**
Pour tout nombre complexe $z\neq 0$, il existe un unique $\theta\in[0,2\pi[$ tel que

$$z=|z|e^{i\theta}. \tag{18.174}$$

Démonstration. Soit $z\in\mathbb{C}$. Nous considérons $z'=z/|z|$ qui est de norme 1. Donc il existe un unique $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $z'=e^{i\theta}$ (proposition 18.62(1)).

Pour ce θ nous avons $z=|z|e^{i\theta}$. □

Bien entendu, le θ est unique dans $[0,2\pi[$, mais il n'est pas du tout unique dans $\mathbb{R}$.

LEMooOQKNooGZlJHf

Lemme 18.64 ([1])**.**
Pour tout $a,b\in\mathbb{C}$, il existe $t\in[0,2\pi[$ tel que

$$|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos(t). \tag{18.175}$$

Plus précisément, si les formes trigonométriques[19] *de a et b sont $a=|a|e^{i\alpha}$ et $b=|b|e^{i\beta}$, alors*

$$|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos(\alpha-\beta). \tag{18.176}$$

[19] Proposition 18.63.

Démonstration. Nous avons le calcul suivant :

$$|a+b|^2 = (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) \tag{18.177a}$$
$$= |a|^2 + a\bar{b} + b\bar{a} + |b|^2 \tag{18.177b}$$
$$= |a|^2 + |b|^2 + |a||b|\big(e^{i(\alpha-\beta)} + e^{i(\beta-\alpha)}\big) \tag{18.177c}$$
$$= |a^2| + |b|^2 + 2|a||b|\cos(\alpha-\beta). \tag{18.177d}$$

□

CORooONAVooKPhQuI

Corolaire 18.65.
La partie $B = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| > R\}$ est connexe et connexe par arcs[20].

Démonstration. Nous prouvons que B est connexe par arcs ; la connexité découlera du lemme 9.67. Nous considérons les points $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ dans B. Une telle décomposition est toujours possible par la proposition 18.63.

Supposons $\theta_1 < \theta_2$ et $r_1 < r_2$; sinon il faut faire différents cas. Nous relions les points z_1 et z_2 par le chemin continue constitué des deux chemins suivants mis bout à bout. D'abord

$$\begin{aligned}\gamma\colon [\theta_1, \theta_2] &\to B\\ t &\mapsto r_1 e^{it},\end{aligned} \tag{18.178}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}\sigma\colon [r_1, r_2] &\to B\\ u &\mapsto u e^{i\theta_2}.\end{aligned} \tag{18.179}$$

□

18.5.2 Inverse

SUBSECooWFNMooOuZBRN

Nous pouvons écrire un inverse de la fonction φ grâce à la fonction arc tangente introduite au théorème 18.39. La fonction que nous écrivons à présent est la fonction $\arg_{0^-}$ définie par (26.137). Elle n'est pas exactement la fonction argument définie par (26.98).

Nous avons :

$$\varphi^{-1}\colon S^1 \to [0, 2\pi[$$
$$x+iy \mapsto \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x>0, y\geqslant 0\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } (x,y)=(0,1)\\ \pi - \arctan(-y/x) & \text{si } x<0, y\geqslant 0\\ \pi + \arctan(y/x) & \text{si } x<0, y<0\\ 2\pi - \arctan(-y/x) & \text{si } x>0, y<0 \end{cases} \tag{18.180}$$

EQooSAYFooRFVSPc

Chacune des branches est continue parce que la fonction arc tangente l'est. Trois des raccords sont également continus grâce aux limites du lemme 18.40.

L'application φ^{-1} n'est cependant pas continue au point $(1,0)$[21]. C'est l'objet du lemme suivant.

LEMooEQVRooMAffCw

Lemme 18.66.
L'application $\varphi^{-1}\colon S^1 \to [0, 2\pi[$ n'est pas continue en $(1,0)$. Mais elle est continue ailleurs. Autrement dit,

$$\varphi^{-1}\colon S^1 \setminus \{(1,0)\} \to]0, 2\pi[\tag{18.181}$$

est continue.

Démonstration. En effet, φ^{-1} serait continue si l'image de tout ouvert de $[0, 2\pi[$ par φ était ouverte dans S^1 (topologie induite de $\mathbb{C}$). Prenons un petit ouvert $[0, \epsilon[$ (si vous êtes étonnés, c'est que vous n'avez pas bien la topologie induite en tête). Son image contient le point $(1,0)$, mais aucun point (x,y) avec $y<0$.

Montrons que tout voisinage de $(1,0)$ dans $\mathbb{C}$ contient des points $x+iy$ de S^1 avec $y<0$. Un point de S^1 est de la forme $\cos(t) + i\sin(t)$. Nous avons :

$$|\cos(t) + i\sin(t) - 1|^2 = \big(\cos(t)-1\big)^2 + \sin^2(t) = 2\big(1-\cos(t)\big). \tag{18.182}$$

[20] Définition 9.65.

[21] Puisque nous avons considéré $S^1 \subset \mathbb{C}$, nous aurions dû noter « 1 » ce point. Mais vous vous imaginez le clash de notation avec le $1 \in [0, 2\pi[\subset \mathbb{R}$?

Soit $\delta > 0$, et montrons que $B\big((1,0),\delta\big) \cap S^1$ contient des points d'ordonnées négatives. D'abord il existe $\epsilon > 0$ tel que pour $t = 2\pi - \epsilon$,

$$2\big(1 - \cos(t)\big) < \delta. \tag{18.183}$$

Ensuite pour de tels t, nous avons $\sin(t) < 0$. Donc les points de S^1 correspondant à $2\pi - \epsilon$ sont dans $S^1 \cap B\big((1,0),\delta\big)$.

Bref, l'image de $[0,\epsilon[$ n'est pas un ouvert de S^1. □

18.5.3 Cercle trigonométrique

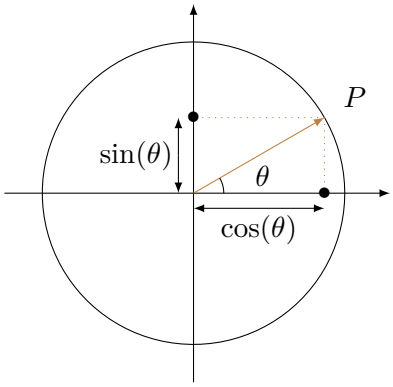


FIGURE 18.6 : Le cercle trigonométrique. LabelFigCercleTrigono

Définition 18.67 ([608]).
Le cercle trigonométrique est le cercle dans $\mathbb{R}^2$ de rayon 1 centré en $(0,0)$ représenté à la figure 18.6. Nous n'hésiterons pas à parler de cercle trigonométrique dans $\mathbb{C}$.

Nous verrons plus tard (proposition 21.13) que la longueur de l'arc de cercle intercepté par un angle θ est égal à θ. Les radians sont donc l'unité d'angle la plus adaptée au calcul de longueurs sur le cercle.

LEMooXISFooRMWUEC

Lemme 18.68.
Soit $R > 0$. Soient le cercle $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|x\| = R\}$ de rayon R ainsi que $t_0 \in \mathbb{R}$. L'application

$$\begin{aligned}\gamma_{t_0}\colon [t_0, t_0 + 2\pi[&\to S\\ x &\mapsto \big(R\cos(x), R\sin(x)\big)\end{aligned} \tag{18.184}$$

est une bijection continue.

Démonstration. Le corolaire 18.60 nous dit que

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0, 2\pi[&\to S\\ x &\mapsto \big(R\cos(x), R\sin(x)\big)\end{aligned} \tag{18.185}$$

est une bijection continue.

D'autre part, l'application

$$\begin{aligned}f\colon [t_0, t_0 + 2\pi[&\to [0, 2\pi[\\ x &\mapsto x - t_0\end{aligned} \tag{18.186}$$

est une bijection continue.

Comme $\gamma_{t_0} = \gamma \circ f$, nous déduisons que γ_{t_0} est une bijection continue. □

18.69.
La proposition 21.13 dira que la longueur d'arc de cercle de rayon R interceptée par un angle θ vaut $R\theta$.

18.5.4 Du point de vue de la tribu, mesure et co.

Nous avons considéré sur S^1 la topologie induite de $\mathbb{C}$. Nous allons y mettre la tribu induite de celle de Lebesgue de $\mathbb{C}$. Mais nous n'allons pas y mettre la *mesure* induite de $\mathbb{C}$; sinon tout serait toujours de mesure nulle.

PROPooQFYHooEajmbW

Proposition 18.70 ([1]).
L'application φ est borélienne d'inverse borélien, c'est-à-dire

$$\mathcal{B}or(S^1) = \varphi\big(\mathcal{B}or([0,2\pi[)\big). \tag{18.187}$$

Démonstration. L'inclusion $\mathcal{B}\text{or}(S^1) \subset \varphi\big(\mathcal{B}\text{or}([0,2\pi[)\big)$ est la plus simple : si $A \in \mathcal{B}\text{or}(S^1)$, alors $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}\text{or}\big([0,2\pi[\big)$ parce que $\varphi\colon [0,2\pi[\to S^1$ est continue et donc borélienne (théorème 14.56).

Pour l'autre inclusion, il faudra procéder par étapes.

(1) **Ouvert ne contenant pas zéro** Si A est un ouvert de $[0,2\pi[$ ne contenant pas 0, il est un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $]0,2\pi[$. Le lemme 18.66 nous indique que son image par φ est ouverte dans S^1. En particulier, $\varphi(A) \in \mathcal{B}\text{or}(S^1)$.

(2) **Ouvert de la forme $[0,\epsilon[$** Nous supposons que ϵ est petit. Disons pour fixer les idées, plus petit que $\pi/2$. Nous avons :

$$\varphi\big([0,\epsilon[\big) = \varphi\big(]0,\epsilon[\big) \cup \varphi\big(\{0\}\big). \tag{18.188}$$

Le premier élément de l'union est un ouvert, et le second, un unique point. L'union est un borélien.

(3) **Ouvert général** Si un ouvert de $[0,2\pi[$ ne contient pas 0, son image est ouverte. Nous nous penchons sur le cas d'un ouvert contenant 0.

Si un ouvert de $[0,2\pi[$ contient 0, alors il contient un ouvert de la forme $[0,\epsilon[$, parce qu'un ouvert contient une boule autour de chacun de ses points (théorème 7.8 couplé au fait que nous sommes dans la topologie induite de $\mathbb{R}$).

Si A est un ouvert contenant zéro, alors

$$A = [0,\epsilon[\cup \big(A \setminus [0,\frac{\epsilon}{2}]\big). \tag{18.189}$$

Nous avons déjà vu que l'image du premier élément de l'union est un borélien. Étant donné que $A \setminus [0,\frac{\epsilon}{2}]$ est un ouvert ne contenant pas zéro, son image est un ouvert. Donc l'image de A est un borélien.

(4) **Pause** Nous avons déjà vu que l'image par φ de tout ouvert de $[0,2\pi[$ était un borélien de S^1. Nous devons en déduire que l'image de tout borélien de $[0,2\pi[$ est un borélien de S^1.

C'est ce que nous faisons maintenant

(5) **Boréliens** Nous utilisons le lemme de transport 14.48 avec l'application φ^{-1} et l'ensemble des ouverts :

$$\varphi\big(\sigma(\mathcal{C})\big) = \sigma\big(\varphi(\mathcal{C})\big) \tag{18.190}$$

où $\mathcal{C}$ est la tribu des ouverts dans $[0,2\pi[$. L'ensemble $\sigma(\mathcal{C})$ est par définition l'ensemble $\mathcal{B}\text{or}\big([0,2\pi[\big)$. D'autre part nous avons vu que l'image d'un ouvert est un borélien : $\varphi(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}\text{or}(S^1)$. Nous avons donc

$$\varphi\big(\mathcal{B}\text{or}([0,2\pi[)\big) = \sigma\big(\varphi(\mathcal{C})\big) \subset \sigma\big(\mathcal{B}\text{or}(S^1)\big) \subset \mathcal{B}\text{or}(S^1). \tag{18.191}$$

La preuve est terminée. □

PROPooHMSCooRIjcJq

Proposition 18.71 (Boréliens sur S^1[1]).
Soit la structure usuelle d'espace mesurable $(\mathbb{C}, \mathcal{B}or(\mathbb{C}))$. Nous considérons

- *la tribu $\mathcal{B}or(\mathbb{C})_{S^1}$ induite de la tribu des boréliens de $\mathbb{C}$ vers S^1,*
- *la tribu $\mathcal{B}or(S^1)$ des boréliens de S^1 construite à partir de la topologie induite de $\mathbb{C}$ vers S^1.*
- *la bijection $\varphi\colon [0,2\pi[\to S^1$,*
- *la mesure de Lebesgue sur $[0,2\pi[$ (induite de celle sur $\mathbb{R}$) et sur $\mathbb{C}$, que nous noterons toutes deux λ.*

Alors

ITEMooSUNEooRhAdep

(1) Nous avons les expressions

$$\mathcal{B}or(\mathbb{C})_{S^1} = \{A \in \mathcal{B}or(\mathbb{C}) \text{ tel que } A \subset S^1\} \tag{18.192a}$$

SUBEQooYZGCooDqXmft

$$= \{A \cap S^1 \text{ tel que } A \in \mathcal{B}or(\mathbb{C})\} \tag{18.192b}$$

ITEMooGYPNooRaZbNW

(2) *Nous avons*

$$\mathcal{B}or(S^1) = \mathcal{B}or(\mathbb{C})_{S^1} = \varphi\Big(\mathcal{B}or\big([0,2\pi[\big)\Big). \tag{18.193}$$

ITEMooFUXKooFQdoaw

(3) *En définissant* $\mu\colon \mathcal{B}or(S^1) \to \mathbb{R}$ *par*

$$\mu(A) = \frac{\lambda\big(\varphi^{-1}(A)\big)}{2\pi}, \tag{18.194}$$

EQooKHZRooSrFMdo

le triplet $\big(S^1, \mathcal{B}or(S^1), \mu\big)$ *est un espace mesuré.*

ITEMooBQLRooOsqesg

(4) *L'espace mesuré* $\big(S^1, \mathcal{B}or(S^1), \mu\big)$ *est fini et*

$$\mu(S^1) = 1. \tag{18.195}$$

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** C'est la proposition 14.9.

(2) **Pour (2)** La première égalité est le lemme 14.54. Le fait que $\mathcal{B}\text{or}(S^1) = \varphi\Big(\mathcal{B}\text{or}\big([0,2\pi[\big)\Big)$ est déjà la proposition 18.70.

(3) **Pour (3)** Nous devons d'abord nous assurer que la formule ait un sens. Cela est chose aisée ; si $A \in \mathcal{B}\text{or}(S^1)$, le point (2) nous indique que $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}\text{or}\big([0,2\pi[\big)$. Ensuite, nous devons vérifier les deux conditions de la définition 14.18 pour avoir un espace mesuré.

En premier lieu,

$$\mu(\varnothing) = \frac{1}{2\pi}\lambda\big(\varphi^{-1}(\varnothing)\big) = \frac{1}{2\pi}\lambda(\varnothing) = 0. \tag{18.196}$$

Et en second lieu, si les $A_i \in \mathcal{B}\text{or}(S^1)$ sont disjoints, les $\varphi^{-1}(A_i)$ sont également disjoints parce que φ^{-1} est une bijection. Donc

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_i A_i\Big) &= \frac{1}{2\pi}\lambda\Big(\bigcup_i \varphi^{-1}(A_i)\Big) && \text{(18.197a)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_i \lambda\big(\varphi^{-1}(A_i)\big) && \text{(18.197b)}\\
&= \sum_i \frac{\lambda\big(\varphi^{-1}(A_i)\big)}{2\pi} && \text{(18.197c)}\\
&= \sum_i \mu(A_i). && \text{(18.197d)}
\end{aligned}$$

D'accord.

(4) **Pour (4)** En ce qui concerne la mesure de S^1 pour μ nous avons simplement

$$\mu(S^1) = \frac{\lambda\big([0,2\pi[\big)}{2\pi} = 1. \tag{18.198}$$

□

Maintenant que $(S^1, \mathcal{B}\text{or}(S^1), \mu)$ est un espace mesuré, nous pouvons compléter la tribu $\mathcal{B}\text{or}(S^1)$ pour la mesure μ.

Définition 18.72.
La ***tribu de Lebesgue*** *sur* S^1 *est la mesure complétée pour*

$$\big(S^1, \mathcal{B}or(S^1), \mu\big) \tag{18.199}$$

où μ *est la mesure définie par la proposition 18.71. Nous notons* $\mathcal{L}eb(S^1)$ *la tribu et encore* μ *la mesure.*

PROPooDLBCooUfQZOa

Proposition 18.73 (Lebesgue sur S^1[1])**.**
Soit la structure d'espace mesuré complet $\big(S^1, \mathcal{L}eb(S^1), \mu\big)$*. Nous considérons*

- *la tribu* $\mathcal{L}eb(\mathbb{C})_{S^1}$ *induite de la tribu des boréliens de* $\mathbb{C}$ *vers* S^1*,*

- *la bijection* $\varphi\colon [0,2\pi[\to S^1$,

Alors

ITEMooQMHDooHEThPf

(1) La tribu $\mathcal{L}eb(\mathbb{C})_{S^1}$ *est la tribu de toutes les parties de* S^1.

ITEMooNIRNooKSeyCa

(2) La tribu $\mathcal{L}eb(S^1)$ *est donnée par*

$$\mathcal{L}eb(S^1) = \varphi\big(\mathcal{L}eb(\mathbb{R})_{[0,2\pi[}\big) = \varphi\big(\mathcal{L}eb([0,2\pi[)\big) \tag{18.200}$$

où $\mathcal{L}eb([0,2\pi[)$ *est la tribu sur* $[0,2\pi[$ *obtenue par complétion de la tribu des boréliens de la topologie induite.*

ITEMooXDBTooYnauyi

(3) Nous avons l'inclusion stricte

$$\mathcal{L}eb(S^1) \subsetneq \mathcal{L}eb(\mathbb{C})_{S^1}. \tag{18.201}$$

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Si $A \subset S^1$, alors A est une partie de S^1 qui est mesurable et de mesure nulle pour $\mathbb{C}$. Donc A est λ-négligeable et par conséquent mesurable.

(2) **Pour (2)** Il s'agit de prouver que

$$\widehat{\mathcal{B}\text{or}(S^1)} = \varphi\big(\widehat{\mathcal{B}\text{or}\big([0,2\pi[\big)}\big). \tag{18.202}$$

Ce n'est rien d'autre que la proposition 14.83. La seconde partie de l'égalité est la proposition 14.78

(3) **Pour (3)** Comme indiqué au point (1), la tribu $\mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{C})_{S^1}$ est la tribu de toutes les parties de S^1 ; l'inclusion est donc évidente. Le point pas tout à fait évident à prouver est l'existence de parties de S^1 à n'être pas dans $\mathcal{L}\text{eb}(S^1)$.

Soit V non mesurable dans $[0,2\pi[$ (prenez quelque chose comme l'ensemble de Vitali de l'exemple 14.157). Puisque, par le point (2),

$$\mathcal{L}\text{eb}(S^1) = \varphi\big(\mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R})_{[0,2\pi[}\big), \tag{18.203}$$

la partie $\varphi^{-1}(V)$ ne peut pas être dans $\mathcal{L}\text{eb}(S^1)$.

□

Si vous en voulez plus à propos de S^1 et la façon dont on passe la structure depuis $[0,2\pi[$, vous pouvez lire la proposition 27.107 qui donne la structure de

$$L^2\big(S^1, \mathcal{L}\text{eb}(S^1), \mu\big) \tag{18.204}$$

qui sera, sans surprise, la même que celle de

$$L^2\big([0,2\pi[, \mathcal{L}\text{eb}\big([0,2\pi[\big), \lambda\big). \tag{18.205}$$

18.6 Exemples trigonométriques

Nous mettons ici quelques exemples concernant les fonctions trigonométriques, qui n'ont pas pu être mis dans les chapitres les plus adaptés, parce que ces derniers sont plus haut dans la table des matières.

EXooSPFDooSluUGV

Exemple 18.74.
Prouvons que la fonction[22] $f(x) = x\sin(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers 0. D'abord, nous coinçons la fonction entre deux fonctions connues :

$$0 \leqslant |x\sin(x)| = |x||\sin(x)| \leqslant |x|. \tag{18.206}$$

Donc $|x\sin(x)|$ est coincé entre $g(x) = 0$ et $h(x) = |x|$. Ces deux fonctions tendent vers 0 lorsque $x \to 0$, et donc $f(x)$ tend vers zéro. △

[22] La définition de la fonction sinus est 18.1.

18.6.1 Quelques équations trigonométriques

La proposition suivante se voit très facilement sur le cercle trigonométrique, mais il faut le démontrer.

PROPooTUUUooVrAGQo

Proposition 18.75 ([1]).
Si $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ vérifie $\cos(\theta_0) = x_0$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(\theta) = x_0$ (d'inconnue θ) est

$$\{\theta_0, 2\pi - \theta_0\}. \tag{18.207}$$

Cet ensemble est un singleton si et seulement si $x_0 = \pm 1$.

Démonstration. Commençons par prouver que θ_0 et $2\pi - \theta_0$ sont des solutions. Le nombre θ_0 est solution par hypothèse. En ce qui concerne $2\pi - \theta_0$, il est possible d'utiliser la formule d'addition d'angle (18.22c) :

EQooUCAOooTQsUUq

$$\cos(2\pi - \theta_0) = \cos(2\pi)\cos(\theta_0) + \sin(2\pi)\sin(\theta_0). \tag{18.208}$$

La proposition 18.21(1) nous indique que $\cos(2\pi) = 1$ et $\sin(2\pi) = 0$. Donc l'égalité (18.208) se réduit à $\cos(2\pi - \theta_0) = \cos(\theta_0)$.

Le lemme 18.4 dit que si $\cos(\theta) = x_0$, alors

$$\sin(\theta) = \pm\sqrt{1 - x_0^2}. \tag{18.209}$$

Nous avons donc soit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \sqrt{1 - x_0^2} \end{pmatrix}, \tag{18.210}$$

soit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -\sqrt{1 - x_0^2} \end{pmatrix}, \tag{18.211}$$

Comme $\theta \mapsto \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$ est une bijection avec S^1 (proposition 18.59), chacune de ces deux possibilités possède une unique solution. L'ensemble des solutions de $\cos(\theta) = x_0$ possède donc au maximum deux éléments.

L'ensemble des solutions possède exactement une solution lorsque les points $\big(x_0, \sqrt{1 - x_0^2}\big)$ et $\big(x_0, -\sqrt{1 - x_0^2}\big)$ sont identiques. C'est le cas, si et seulement si $\sqrt{1 - x_0^2} = 0$, c'est-à-dire, si et seulement si $x_0 = \pm 1$. □

18.6.2 Développements en série

PROPooNPYXooTuwAHP

Proposition 18.76 (Taylor pour cosinus).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$ et

EQooGQOIooIkwbJV

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \alpha(x)x^{2n}. \tag{18.212}$$

En ce qui concerne le sinus, pour tout n nous avons une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$ et

EQooKYJAooRebHgc

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\alpha(x). \tag{18.213}$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser la proposition 15.61, en faisant attention à l'ordre. Le fait est que dans (18.212), nous avons écrit le polynôme de degré $2n + 1$ (et non seulement $2n$), en sachant que le terme d'ordre $2n + 1$ est nul.

C'est pour cela que nous avons pu écrire $\alpha(x)x^{2n+1}$ au lieu de $\alpha(x)x^{2n}$ qui aurait été attendu.

Même raisonnement pour le développement du sinus. □

Remarque 18.77.
Quelques remarques concernant l'ordre du polynôme.

(1) Notons que nous aurions aussi pu écrire le reste sous la forme $\alpha(x)x^{2n}$, mais ça aurait été avec une autre fonction α : celle correspondant au développement à l'ordre $2n$ au lieu de $2n + 1$.

(2) Les développements de sinus et de cosinus ont un terme sur deux qui est nul. C'est pour cela qu'en ayant un polynôme de degré $2p$, nous avons le développement d'ordre $2p + 1$.

(3) Nous aurions pu utiliser les dérivées données dans la proposition 18.3 et les valeurs spéciales (18.6).

Corolaire 18.78.
Il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{t\to 0}\alpha(t)/t=0$ *et*

$$\sin(x)=x+\alpha(x). \tag{18.214}$$

EQooDLGIooXyfmtC

Nous avons la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1. \tag{18.215}$$

Démonstration. Il s'agit de prendre la formule (18.213) avec $n=0$. Cela donne tout de suite (18.214). Pour la limite, on divise par x, ce qui donne (pour tout $x\neq 0$)

$$\frac{\sin(x)}{x}=1+\frac{\alpha(x)}{x}. \tag{18.216}$$

Et justement la fonction α a la propriété que $\lim_{x\to 0}\alpha(x)/x=0$. □

Exemple 18.79.
Cherchons le développement limité à l'ordre 5 de $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Nous utilisons les développements de la proposition 18.76 :

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\alpha_1(x) \tag{18.217a}$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^5\alpha_2(x). \tag{18.217b}$$

Nous calculons alors la division des deux polynômes, en classant les puissances dans l'ordre croissant (c'est le sens inverse de ce qui est fait pour la divisions euclidienne !) :

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{rrrrrrrrr}
x & - & \frac{1}{6}x^3 & + & \frac{1}{120}x^5 & & & & \\
-\big(x & - & \frac{1}{2}x^3 & + & \frac{1}{24}x^5 & & & & \big) \\
\hline
 & & \frac{1}{3}x^3 & - & \frac{1}{30}x^5 & & & & \\
 & -\big(& \frac{1}{3}x^3 & - & \frac{1}{6}x^5 & + & \frac{1}{72}x^7 & & \big) \\
\hline
 & & & & \frac{2}{15}x^5 & - & \frac{1}{72}x^7 & & \\
 & & & -\big(& \frac{2}{15}x^5 & - & \frac{1}{15}x^7 & + & \frac{1}{180}x^9 \big) \\
\hline
 & & & & & & \frac{29}{360}x^7 & - & \frac{1}{180}x^9
\end{array}
&
\begin{array}{l}
1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4 \\
\hline
x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5
\end{array}
\end{array}$$

Nous avons continué la division jusqu'à obtenir un reste de degré plus grand que 5. Le développement à l'ordre 5 de la fonction tangente autour de zéro est alors (proposition 12.495)

$$\tan(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+x^5\alpha(x). \tag{18.218}$$

Notons que, puisque le reste ne nous intéressait pas vraiment, nous aurions pu ne pas calculer les coefficients des termes en x^7 et x^8. La dernière soustraction était également inutile. △

18.7 Isométries de l'espace euclidien

Nous considérons l'espace affine euclidien $A=\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ modelé sur $\mathbb{R}^n$ avec sa métrique usuelle. Un premier grand résultat sera le théorème 8.153 qui dira que les isométries de cet espace sont des applications linéaires.

18.7.1 Structure du groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$

Si vous ne voulez pas savoir ce qu'est un produit semi-direct de groupes, vous pouvez lire seulement le point (1) du théorème suivant, et passer directement à la remarque 18.81.

THOooQJSRooMrqQct

Théorème 18.80.
Un peu de structure sur $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

ITEMooLLUIooIGsknv

(1) L'application

$$\begin{aligned}\psi\colon T(n)\times \mathrm{O}(n)&\to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)\\ (v,\Lambda)&\mapsto \tau_v\circ\Lambda\end{aligned} \tag{18.219}$$

est une bijection. Ici, $T(n)$ *est le groupe des translations de* $\mathbb{R}^n$.

(2) *Un couple* $(v,\Lambda)\in T(n)\times \mathrm{SO}(n)$ *agit sur* $x\in\mathbb{R}^n$ *par*

$$(v,\Lambda)x=\Lambda x+v \tag{18.220}$$

au sens où $\psi(v,\Lambda)x=\Lambda x+v$. ITEMooEWSIooNKzRxB

(3) *En tant que groupes,*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)\simeq T(n)\times_\rho \mathrm{O}(n) \tag{18.221}$$

où ρ *représente l'action adjointe de* $\mathrm{O}(n)$ *sur* $T(n)$ *et* $\times_\rho$ *dénote le produit semi-direct de la définition 2.48.* ITEMooSKUPooBDvNWX

(4) *Une isométrie de* $\mathbb{R}^n$ *est une application affine*[23]. ITEMooQLNPooSyHaps

(5) *La partie linéaire*[24] *d'une isométrie* f *est* $\psi^{-1}(f)_2$.

Démonstration. Point par point.

(1) Prouvons que l'application proposée est injective et surjective. Notons aussi que ce point ne parle pas de structure de groupe, mais seulement d'une bijection en tant qu'ensembles.

(1a) **Injection** Si $\psi(v,\Lambda)=\psi(w,\Lambda')$ alors en appliquant sur $x=0$ nous avons tout de suite $v=w$. Et ensuite $\Lambda=\Lambda'$ est immédiat.

(1b) **Surjection** Une isométrie $g\in\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est une application $g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ telle que $d(x,y)=d\big(g(x),g(y)\big)$. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ cela se traduit par

$$\|x-y\|=\big\|g(x)-g(y)\big\|, \tag{18.222}$$

Comme $x\mapsto\|x\|^2$ est une forme quadratique, elle tombe sous le coup du théorème 8.153, ce qui nous permet de dire que g est affine. Or par définition une application est affine lorsqu'elle est la composée d'une translation et d'une application linéaire.

Donc $g=\tau_v\circ\Lambda$ pour une certaine application linéaire isométrique $\Lambda\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. L'application Λ est donc dans $\mathrm{O}(n)$ par la proposition 8.44(3).

(2) C'est seulement le fait que $(\tau_v\circ\Lambda)x=\tau_v\big(\Lambda x\big)=\Lambda(x)+v$.

(3) Nous allons étudier l'application

$$\psi\colon T(n)\times_\rho O(n)\to\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n). \tag{18.223}$$

(3a) **Le produit semi-direct est bien défini** Il faut montrer que

$$\begin{aligned}\rho\colon O(n)&\to\mathrm{Aut}\big(T(n)\big)\\ \Lambda&\mapsto\mathbf{Ad}(\Lambda)\end{aligned} \tag{18.224}$$

est correcte.

D'abord pour $\Lambda\in O(n)$, nous avons bien $\rho_\Lambda(\tau_v)\in T(n)$ parce qu'en appliquant à $x\in\mathbb{R}^n$,

$$(\Lambda\tau_v\Lambda^{-1})(x)=\Lambda\big(\tau_v(\Lambda^{-1}x)\big)=\Lambda\big(\Lambda^{-1}x+v\big)=x+\Lambda(v)=\tau_{\Lambda(v)}(x). \tag{18.225}$$

Donc $\rho_\Lambda(\tau_v)=\tau_{\Lambda(v)}$.

De plus, $\rho_\Lambda\in\mathrm{Aut}\big(T(n)\big)$ parce que

$$\rho_\Lambda\big(\tau_v\circ\tau_w\big)=\rho_\Lambda(\tau_v)\circ\rho_\Lambda(\tau_w), \tag{18.226}$$

comme on peut aisément vérifier que les deux membres sont égaux à $\tau_{\Lambda(v+w)}$.

(3b) ψ **est une bijection** Cela est déjà vérifié.

(3c) ψ **est un morphisme** Nous avons d'une part

$$\psi\big((v,g)(w,h)\big)=\psi\big(v\rho_g(w),gh\big)=\tau_v\circ g\circ\tau_w\circ g^{-1}\circ g\circ h=\tau_v\circ g\circ\tau_w\circ h. \tag{18.227}$$

Et d'autre part,

$$\psi(v,g)\circ\psi(w,h)=\tau_v\circ g\circ\tau_w\circ h, \tag{18.228}$$

ce qui est la même chose.

[23] Définition 11.13.
[24] Définition 11.14.

(4) Si f est une isométrie de $\mathbb{R}^n$, et si $\psi(f) = (v, \Lambda)$, nous avons

$$f(a + x) = \tau_v\big(\Lambda(a) + \Lambda(x)\big) = \Lambda(a) + \Lambda(x) + v = f(a) + \Lambda(x). \tag{18.229}$$

Donc f est affine et l'application qui serait notée u_M dans (11.42) est $u_M = \Lambda$ pour tout M.

(5) Si $f(x) = \psi(v, \Lambda)x = \Lambda x + v$, nous avons

$$f(a + x) = \psi(v, \Lambda)(a + x) = f(a) + \Lambda(x), \tag{18.230}$$

et donc Λ est bien la partie linéaire de f.

□

REMooLUEZooIwvTqu

Remarque 18.81.
Notons au passage la loi de groupe sur les couples qui est donnée, pour tout $v, v' \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda, \Lambda' \in \mathrm{SO}(n)$, par

$$(v, \Lambda) \cdot (v', \Lambda') = (\Lambda v' + v, \Lambda\Lambda') \tag{18.231}$$

EqDiHcut

comme le montre le calcul suivant :

$$\begin{aligned}(v, \Lambda) \cdot (v', \Lambda')x &= (v, \Lambda)(\Lambda' x + v') && \text{(18.232a)}\\ &= \Lambda\Lambda' x + \Lambda v' + v && \text{(18.232b)}\\ &= (\Lambda v' + v, \Lambda\Lambda')x. && \text{(18.232c)}\end{aligned}$$

PROPooDHYWooXxEXvl

Proposition 18.82 ([609])**.**
Soient $n \geqslant 1$ et R un élément de $\mathrm{O}(n)$ de déterminant -1 tels que $R^2 = \mathrm{Id}$. En posant $C_2 = \{\mathrm{Id}, R\}$ nous avons

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \times_\rho C_2 \tag{18.233}$$

Démonstration. Notons qu'un élément R comme décrit dans l'énoncé existe. Par exemple il y a l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Cela étant dit, nous allons montrer que

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathrm{SO}(n) \times C_2 &\to \mathrm{O}(n)\\ (A, h) &\mapsto Ah.\end{aligned} \tag{18.234}$$

est un isomorphisme.

(1) **Injectif** Soient $A, B \in \mathrm{SO}(n)$ et $h, k \in C_2$ tels que $\psi(A, h) = \psi(B, k)$, c'est-à-dire tels que $Ah = Bk$. Puisque $\det(A) = \det(B) = 1$, nous avons $\det(h) = \det(k)$. Mais comme C_2 contient un élément de déterminant 1 et un élément de déterminant -1, nous avons $h = k$. De là $A = B$.

(2) **Surjectif** Soit $X \in \mathrm{O}(n)$. Si $\det(X) = 1$ alors $X \in \mathrm{SO}(n)$ et $X = \psi(X, \mathbb{1})$. Si par contre $\det(X) = -1$, alors $XR \in \mathrm{SO}(n)$ parce que $\det(XR) = 1$, et nous avons

$$\psi(XR, R) = XR^2 = X. \tag{18.235}$$

(3) **Morphisme** Nous avons

$$\psi\Big((A, h)(B, k)\Big) = \psi\big(A\rho_h(B), hk\big) = A(hBh^{-1})hk = AhBk, \tag{18.236}$$

tandis que

$$\psi(A, h)\psi(B, k) = AhBk, \tag{18.237}$$

qui est la même chose.

□

18.8 Isométries dans $\mathbb{R}^n$

Définition 18.83.
*Un **hyperplan** de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine de dimension $n-1$.*

LEMooPXIOooSlMIIY

Lemme-Définition 18.84.
Si un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ est donné, et si $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique point $y \in \mathbb{R}^n$ tel que

(1) $x - y \perp H$,

(2) Le segment $[x, y]$ coupe H en son milieu.

*La **réflexion** σ_H est l'application $\sigma_H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui à x fait correspondre ce y.*

Démonstration. Il faut vérifier que les conditions données définissent effectivement un unique point de $\mathbb{R}^n$. Soit H_0 le sous-espace vectoriel parallèle à H et une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ de H_0. Nous complétons cette partie en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ avec un vecteur e_n. Si $H = H_0 + v$, quitte à décomposer v en une partie parallèle et une partie perpendiculaire à H, nous avons

$$H = H_0 + \lambda e_n \tag{18.238}$$

pour un certain λ.

Une droite passant par x et perpendiculaire à H est de la forme $t \mapsto x + te_n$. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors l'unique point de cette droite à être dans H est le point tel que $x_n e_n + te_n = \lambda e_n$, c'est-à-dire $t = \lambda - x_n$. L'unique point y sur cette droite à être tel que $[x, y]$ coupe H en son milieu est celui qui correspond à $t = 2(\lambda - x_n)$. □

Lemme 18.85.
Soit un hyperplan vectoriel H_0 de $\mathbb{R}^n$. Nous considérons une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ soit une base de H_0 et $e_n \perp H_0$.

Soit l'hyperplan affine $H = H_0 + \lambda e_n$.

La réflexion de plan H est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x - 2(x_n - \lambda)e_n. \end{aligned} \tag{18.239}$$

EQooRTWLooLPsUpY

Démonstration. En posant $y = x - 2(x_n - \lambda)$, nous avons

$$x - y = 2(x_n - \lambda)e_n \perp H, \tag{18.240}$$

et

$$\frac{x+y}{2} = \frac{2x - 2(x_n - \lambda)e_n}{2} = x - (x_n - \lambda)e_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i + \lambda e_n \in H_0 + \lambda e_n = H. \tag{18.241}$$

Les deux conditions de la définition 18.84 sont donc vérifiées. □

LEMooWYVRooQmWqvM

Lemme 18.86.
Si H_0 est un plan vectoriel, si $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ est une base de H_0, si $e_n \perp H_0$ et si $H = H_0 + \lambda e_n$, alors

$$\sigma_H = \sigma_{H_0} + 2\lambda e_n. \tag{18.242}$$

Démonstration. En posant $\lambda = 0$ dans la formule (18.239), nous avons $\sigma_{H_0}(x) = x - 2x_n e_n$. Nous avons donc

$$\sigma_H(x) = x + 2(\lambda - x_n)e_n = x - 2x_n e_n + 2\lambda e_n = \sigma_{H_0}(x) + 2\lambda e_n. \tag{18.243}$$

□

Le lemme suivant est une généralisation du fait que tous les points de la médiatrice d'un segment sont à égale distance des deux extrémités du segment (très utile lorsqu'on étudie les triangles isocèles).

LEMooDPLYooJKZxiM

Lemme 18.87 ([609]).
Soient deux points distincts $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble $H \subset \mathbb{R}^n$ donné par

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } d(x, x_0) = d(x, y_0)\}. \tag{18.244}$$

Alors

(1) *H est hyperplan.*

(2) *$H \perp y_0 - x_0$*

(3) *H contient le milieu du segment $[x_0, y_0]$.*

Démonstration. Nous savons que

$$d(x, x_0)^2 = \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = \|x\|^2 + \|x_0\|^2 - 2\langle x, x_0 \rangle, \tag{18.245}$$

ou encore

$$\|x_0\|^2 - \|y_0\|^2 = 2\langle x, x_0 - y_0 \rangle. \tag{18.246}$$

En posant $v = y_0 - x_0$ et en considérant la forme linéaire

$$\begin{aligned} \beta \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle x, v \rangle, \end{aligned} \tag{18.247}$$

Nous avons $x \in H$ si et seulement si $\beta(x) = \frac{1}{2}\big(\|y_0\|^2 - \|x_0\|^2\big) = \lambda$. En d'autres termes, $H = \beta^{-1}(\lambda)$. Par la proposition 11.28 la partie H est un sous-espace affine. C'est même un translaté de $\ker(\beta)$, et comme $\ker(\beta)$ est l'espace vectoriel des vecteurs perpendiculaires à v, nous avons $\dim(H) = \dim\big(\ker(\beta)\big) = n - 1$.

Le fait que H contienne le milieu du segment $[x_0, y_0]$ est par définition. □

Pour le lemme suivant, et pour que la récurrence se passe bien nous disons que l'ensemble vide est un espace vectoriel de dimension -1.

LEMooJCDRooGAmlwp

Lemme 18.88 (Cartan-Dieudonné[610, 611])**.**
Soit un espace euclidien E de dimension n.

ITEMooFYEDooIJZBjP

(1) *Si f est une isométrie de E satisfaisant*

$$\dim\big(\mathrm{Fix}(f)\big) = n - k \tag{18.248}$$

alors f peut être écrit comme composition de k réflexions hyperplanes.

ITEMooJTZVooWvyfDD

(2) *Une isométrie de E peut être écrite sous la forme de $\mathrm{rk}(f - \mathrm{Id})$ réflexions, mais pas moins.*

ITEMooUCZWooSbyPwt

(3) *Toute isométrie de E peut être écrite comme composition de $n + 1$ réflexions.*

Démonstration. Les deux parties importantes à démontrer sont les points (1) et la partie « pas moins » de (2). Le reste proviendra de reformulations.

(1) **Pour (1)** Nous faisons une récurrence sur $k \geqslant 0$.

Pour l'initialisation, si $k = 0$ alors $\dim\big(\mathrm{Fix}(f)\big) = n$, c'est-à-dire que f fixe tout $\mathbb{R}^n$, autant dire que f est l'identité, une composition de zéro réflexions.

Pour la récurrence, nous supposons que le lemme est démontré jusqu'à $k \geqslant 0$. Soit donc $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\dim\big(\mathrm{Fix}(f)\big) = n - (k + 1). \tag{18.249}$$

Puisque $k \geqslant 0$, la dimension de $\mathrm{Fix}(f)$ est strictement plus petite que n, donc il existe un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) \neq x_0$. Nous posons

$$H = \{x \in E \text{ tel que } d(x, x_0) = d\big(x, f(x_0)\big)\}. \tag{18.250}$$

Par le lemme 18.87, ce H est l'hyperplan orthogonal à $v = f(x_0) - x_0$ et passant par le milieu du segment $[x_0, f(x_0)]$.

Nous posons $g = \sigma_H \circ f$. Comme $g(x_0) = \sigma_H(f(x_0)) = x_0$, ce x_0 est un point fixe de g. Le fait que $\sigma_H\big(f(x_0)\big) = x_0$ est vraiment la définition de l'hyperplan H.

Nous avons donc

$$x_0 \in \mathrm{Fix}(g) \setminus \mathrm{Fix}(f). \tag{18.251}$$

Mais nous prouvons de plus que $\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Fix}(g)$. En effet si $y \in \mathrm{Fix}(f)$ alors $y \in H$ parce que

$$d(y, x_0) = d\big(f(y), f(x_0)\big) = d\big(y, f(x_0)\big). \tag{18.252}$$

Puisque $y \in H$ nous avons $y \in \mathrm{Fix}(g)$ parce que

$$g(y) = \sigma_H\big(f(y)\big) = \sigma_H(y) = y. \tag{18.253}$$

Tout cela pour dire que l'ensemble $\mathrm{Fix}(g)$ est *strictement* plus grand que $\mathrm{Fix}(f)$. Et comme ce sont des espaces affines, nous pouvons parler de dimension :

$$\dim\big(\mathrm{Fix}(g)\big) > \dim\big(\mathrm{Fix}(f)\big). \tag{18.254}$$

Par hypothèse de récurrence, l'application g peut être écrite comme composition de k réflexions. Donc l'application

$$f = \sigma_H \circ g \tag{18.255}$$

est une composition de $k+1$ réflexions.

(2) **Pour (2), existence**

Ce point est une reformulation du point (1). Le fait est que $\mathrm{Fix}(f) = \ker(f - \mathrm{Id})$ parce que $x \in \mathrm{Fix}(f)$ si et seulement si $f(x) = x$ si et seulement si $(f - \mathrm{Id})x = 0$. Nous utilisons le théorème du rang 4.49 à l'endomorphisme $f - \mathrm{Id}$:

$$\dim\big(\mathrm{Fix}(f)\big) = \dim\big(\ker(f - \mathrm{Id})\big) = \dim(E) - \mathrm{rk}(f - \mathrm{Id}). \tag{18.256}$$

En remplaçant par les valeurs :

$$n - k = n - \mathrm{rk}(f - \mathrm{Id}). \tag{18.257}$$

Or le point (1) donnait f comme composée de $n - k$ réflexions. Donc f est composée de $\mathrm{rk}(f - \mathrm{Id})$ réflexions.

(3) **Pour (2), « pas moins »**

Supposons que $f = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r$ où σ_i est la réflexion de l'hyperplan H_i. Nous devons prouver que $r \geqslant \mathrm{rk}(f - \mathrm{Id})$. Nous avons

$$\bigcap_{i=1}^{r} H_i \subset \ker(f - \mathrm{Id}). \tag{18.258}$$

D'autre part, la proposition 8.307 nous donne $\dim \bigcap_i H_i \geqslant n - r$. Donc

$$n - r \leqslant \dim\big(\bigcap_{i=1}^{r} H_i\big) \leqslant \dim\big(\ker(f - \mathrm{Id})\big) = n - \mathrm{rk}(f - \mathrm{Id}). \tag{18.259}$$

Donc $n - r \leqslant n - \mathrm{rk}(f - \mathrm{Id})$ ou encore

$$r \geqslant \mathrm{rk}(f - \mathrm{Id}). \tag{18.260}$$

(4) **Pour (3)** Le rang de $f - \mathrm{Id}$ vaut au maximum n. Donc f peut être écrite comme composition de $n+1$ réflexions par le point (2).

□

PROPooUSKEooUbNVfs

Proposition 18.89.
Un élément de SO(3) *qui fixe deux vecteurs linéairement indépendants est l'identité.*

Démonstration. Soit un élément $A \in \mathrm{SO}(3)$ et deux vecteurs linéairement indépendants $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que $Av_1 = v_1$ et $Av_2 = v_2$. Puisque v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, le théorème de la base incomplète 4.14 nous permet de considérer $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\{v_1, v_2, v_3\}$ soit une base. Dans cette base, la matrice de A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}. \tag{18.261}$$

Le déterminant de cette matrice est c. Or $\det(A) = 1$ parce qu'elle est dans SO(3). Donc $c = 1$. Le fait que A soit orthogonale implique que la troisième colonne doit être un vecteur de norme 1. Donc $a = b = 0$.

Donc $A = \mathrm{Id}$. □

CORooJCURooSRzSFb

Corolaire 18.90.
Tout élément de SO(3) *peut être écrit comme composée de deux réflexions.*

Démonstration. Un élément de SO(3) est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ parce que si $A \in \mathrm{SO}(3)$ alors[25]

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle. \tag{18.262}$$

Donc si le rang de A est k, alors A est la composée de $3-k$ réflexions par le lemme 18.88.

Si $A = \mathrm{Id}$, c'est bon parce que l'identité est la composée de deux réflexions égales. Nous supposons que A n'est pas l'identité.

Comme discuté dans l'exemple 12.94, l'opérateur A possède trois valeurs propres dans $\mathbb{C}$ dont une réelle, et deux complexes conjuguées. Nous les notons $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \bar{\alpha} \in \mathbb{C}$. Le déterminant de A, qui vaut 1, est le produit de ces trois valeurs propres, c'est-à-dire $\lambda|\alpha|^2$. En particulier $\lambda > 0$.

Si v est un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ, nous avons $\|v\| = \|Av\| = |\lambda|\|v\|$ parce que A est une isométrie. Donc $\lambda = \pm 1$.

Au final, $\lambda = 1$. Cela signifie que A laisse au moins un vecteur invariant. Vu que A n'est pas l'identité, la proposition 18.89 nous indique qu'il n'y a pas d'autres vecteurs de $\mathbb{R}^3$ à être fixé par A. Donc $\dim\big(\mathrm{Fix}(A)\big) = 1$ et le lemme 18.88(1) s'écrit avec $n = 3$, $k = 2$ et implique que A est la composée de deux réflexions. □

LEMooMCVKooKzmlAg

Lemme 18.91.
Soit un hyperplan H et un vecteur v de $\mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\tau_v \circ \sigma_H \circ \tau_v^{-1} = \sigma_{\tau_v(H)}. \tag{18.263}$$

Démonstration. Pour ce faire, nous considérons une base adaptée. Les vecteurs $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ forment une base orthonormée de H_0 et e_n complète en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Soit H_0 l'hyperplan parallèle à H et passant par l'origine ; nous avons, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$H = H_0 + \lambda e_n \tag{18.264}$$

D'un autre côté, le vecteur v peut être décomposé en $v = v_1 + v_2$ où $v_1 \perp H$ et $v_2 /\!\!/ H$. Alors

$$\tau_v(H) = H + v = H + v_2 = H_0 + \lambda e_n + v_2. \tag{18.265}$$

Nous pouvons maintenant utiliser le lemme 18.86 pour exprimer la transformation $\sigma_{\tau_v(H)}$:

$$\sigma_{\tau_v(H)}(x) = \sigma_{H_0}(x) + 2\lambda e_n + 2v_2 \tag{18.266}$$

EQooNYKFooXprXav

Mais d'autre part,

$$(\tau_v \circ \sigma_H \circ \tau_v^{-1})(x) = v + \sigma_H(x - v) = v + \sigma_{H_0}(x - v) + 2\lambda e_n. \tag{18.267}$$

Vue la décomposition de $v = v_1 + v_2$ nous avons $\sigma_{H_0}(v) = -v_1 + v_2$ et donc

$$(\tau_v \circ \sigma_H \circ \tau_v^{-1})(x) = v + \sigma_{H_0}(x) + v_1 - v_2 + 2\lambda e_n = \sigma_{H_0} + 2v_1 + 2\lambda e_n. \tag{18.268}$$

EQooGOHEooALPRFB

Les expressions (18.266) et (18.268) coïncident, d'où l'égalité recherchée. □

PROPooLYCUooRQgGtF

Proposition 18.92.
Soit un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ passant par l'origine. Il existe une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ soit une base orthonormée de H et $e_n \perp H$.

18.8.1 Préserver l'orientation

Le fait qu'une isométrie puisse être décomposé en réflexions est le lemme 18.88.

DEFooUZFHooXVVLBL

Proposition-Définition 18.93 (Isométrie positive et négative[609])**.**
Nous utilisons la bijection $\psi\colon T(n) \times \mathrm{O}(n) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ décrite par le théorème 18.80, et nous définissons

$$\begin{aligned}\epsilon\colon \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) &\to \{\pm 1\}\\ f &\mapsto \det\big(\psi^{-1}(f)_2\big).\end{aligned} \tag{18.269}$$

Cette application ϵ est un morphisme de groupes.

*Nous disons que $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est **positive** ou **préserve l'orientation** si $\epsilon(f) = 1$, et nous notons*

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n) = \epsilon^{-1}(1). \tag{18.270}$$

[25] Opérateur orthogonal, définition 8.41.

LEMooVRELooESIWQl

Lemme 18.94.
La partie $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$ *des isométries positives est un sous-groupe de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

LEMooJABDooOKHwWv

Lemme 18.95 ([609]).
Si H est un hyperplan et si σ_H est la réflexion de cet hyperplan, alors $\epsilon(\sigma_H) = -1$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que H passe par l'origine, de telle sorte que σ_H soit linéaire, et que $\epsilon(\sigma_H) = \det(\sigma_H)$.

Nous choisissons une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ comme dans la proposition 18.92 : $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ est une base de H et $e_n \perp H$. Nous avons alors

$$\sigma_H(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{si } i = 1, \dots, n-1 \\ -e_n & \text{si } i = n. \end{cases} \tag{18.271}$$

Calculons ce déterminant à l'ancienne, en utilisant les définitions 8.14 et 8.9. Nous posons $\mu_i = 1$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $\mu_n = -1$, de telle sorte à avoir $\sigma_H(e_i) = \mu_i e_i$. Nous posons aussi $B = (e_1, \dots, e_n)$. Ensuite c'est parti pour le calcul :

$$\det_B\big(f(B)\big) = \sum_{s\in S_n} \epsilon(s) \prod_{i=1}^{n} e^*_{s(i)}\big(f(e_i)\big) \tag{18.272a}$$

$$= \sum_{s\in S_n} \epsilon(s) \prod_{i=1}^{n} \langle e_{s(i)}, \mu_i e_i\rangle \tag{18.272b}$$

$$= \sum_{s\in S_n} \epsilon(s) \prod_{i=1}^{n} \mu_i \langle e_{s(i)}, e_i\rangle. \tag{18.272c}$$

Vu que la base est orthogonale, $\langle e_{s(i)}, e_i\rangle = \delta_{s(i),i}$ et il ne reste, dans la somme sur S_n, que le terme $s = \mathrm{Id}$ dont la signature est $\epsilon(\mathrm{Id}) = 1$. Donc

$$\det_B\big(f(B)\big) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i = -1. \tag{18.273}$$

Et si H ne passe pas par l'origine ? Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\tau_v(H)$ passe par l'origine (prendre pour v l'opposé de n'importe que élément de H). Le lemme 18.91 nous indique que

$$\sigma_{\tau_v(H)} = \tau_v \circ \sigma_H \circ \tau_v^{-1}. \tag{18.274}$$

Comme ϵ est un morphisme,

$$\epsilon\big(\sigma_{\tau_v(H)}\big) = \epsilon(\tau_v \sigma_H \tau_v^{-1}) = \epsilon(\tau_v)\epsilon(\sigma_H)\epsilon(\tau_v^{-1}) = \epsilon(\sigma_H). \tag{18.275}$$

Nous avons utilisé le fait que $\epsilon(g^{-1}) = \epsilon(g)^{-1}$. Tout ça pour dire que

$$\epsilon(\sigma_H) = \epsilon(\sigma_{\tau_v(H)}) = -1 \tag{18.276}$$

parce que $\tau_v(H)$ passe par l'origine. □

THOooQEWRooYeOIfZ

Théorème 18.96 ([609]).
Une isométrie de $(\mathbb{R}^n, d)$ préserve l'orientation[26] *si et seulement si elle est composition d'un nombre pair de réflexions hyperplanes.*

Démonstration. Le lemme 18.88 nous indique qu'une isométrie f de $\mathbb{R}^n$ peut être décomposée en réflexions hyperplanes. Le lemme 18.95 nous dit que chacune de ces réflexions est négative. Donc si $f = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_r$, alors

$$\epsilon(f) = \epsilon(\sigma_1) \dots \epsilon(\sigma_r) = (-1)^r. \tag{18.277}$$

□

[26] Définition 18.93.

18.9 Groupes finis d'isométries

DEFooCUYLooAlbtzv

Définition 18.97.
*Si X est une partie finie de $\mathbb{R}^n$, le **barycentre** de X est le point*

$$B_X = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} x \tag{18.278}$$

où $|X|$ est le cardinal de X.

Cela est à mettre en relation avec la définition dans le cadre affine 11.30.

LEMooSEZYooYceLIb

Lemme 18.98 ([609]).
Les applications affines de $\mathbb{R}^n$ préservent le barycentre[27] des parties finies.

Démonstration. Soit une partie finie X de $\mathbb{R}^n$ et une application affine $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Nous devons prouver que

$$f(B_X) = B_{f(X)}. \tag{18.279}$$

Nous savons que toute application affine est une composée de translation et d'une application linéaire : $f = \tau_v \circ g$ avec $v \in \mathbb{R}^n$ et $g \in \mathrm{End}(n, \mathbb{R})$. Nous vérifions le résultat séparément pour τ_v et pour g.

D'une part,

$$B_{\tau_v(X)} = \frac{1}{|\tau_v(X)|}\sum_{y\in\tau_v(X)} y = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}(x+v) = B_x + \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} v = B_x + v = \tau_v(B_X). \tag{18.280}$$

Nous avons utilisé le fait que X et $\tau_v(X)$ possèdent le même nombre d'éléments, ainsi que le fait d'avoir une somme de $|X|$ termes tous égaux à v.

D'autre part,

$$B_{g(X)} = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} g(x) = g\Big(\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} x\Big) = g(B_X) \tag{18.281}$$

où nous avons utilisé la linéarité de g dans tous ses retranchements. □

PROPooLAEBooWdcBoe

Proposition 18.99.
Points fixes d'un sous-groupe.

(1) Soit H un sous-groupe fini des isométries de $(\mathbb{R}^n, d)$. Alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(v) = v$ pour tout $f \in H$.

(2) Si H est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d)$ n'acceptant pas de point fixe, alors il est infini.

Démonstration. Le groupe H agit sur $\mathbb{R}^n$, et si $x \in \mathbb{R}^n$ nous pouvons considérer son orbite

$$Hx = \{f(x) \text{ tel que } f \in H\}, \tag{18.282}$$

qui est une partie finie de $\mathbb{R}^n$. Considérons son barycentre $v = B_{Hx}$. Soit $f \in H$. Alors

$$\begin{aligned} f(v) &= f(B_{Hx}) && \text{(18.283a)}\\ &= B_{f(Hx)} && \text{(18.283b)}\\ &= B_{Hx} && \text{(18.283c)}\\ &= v, && \text{(18.283d)} \end{aligned}$$

SUBEQooOQBZooYlIbgN
SUBEQooXWEGooSoezYg

Justifications :

- Pour (18.283b), c'est le lemme 18.98.
- Pour (18.283c), c'est le fait que, $f \in H$ étant donné, l'application $g \mapsto fg$ est une bijection de H, donc

$$f(Hx) = \{(fg)(x) \text{ tel que } h \in H\} = \{g(x) \text{ tel que } g \in H\} = Hx. \tag{18.284}$$

Bref, v est fixé par H.

La seconde affirmation n'est rien d'autre que la contraposée de la première. □

[27] Définition 18.97.

PROPooEUFIooDUIYzi

Proposition 18.100.
À propos de groupes finis d'isométries.

(1) *Tout sous-groupe fini de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *est isomorphe à un sous-groupe fini de* $\mathrm{O}(n)$.

(2) *Tout sous-groupe fini de* $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$ *est isomorphe à un sous-groupe fini de* $\mathrm{SO}(n)$.

Démonstration. Soit H un sous-groupe fini de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$ un élément fixé par H (comme garanti par la proposition 18.99). Nous posons

$$\begin{aligned} \phi\colon H &\to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \tau_v^{-1} \circ f \circ \tau_v. \end{aligned} \tag{18.285}$$

(1) **ϕ est un morphisme** Les opération du type $\phi = \mathbf{Ad}(\tau_v)$ sont toujours des morphismes.

(2) **ϕ consiste à extraire la partie linéaire** Si $f = \tau_w \circ g$ alors

$$\phi(f)(x) = (\tau_{-v} \circ \tau_w \circ g \circ \tau_v)(x) \tag{18.286a}$$
$$= \tau_{w-v}(g(x) + g(v)) \tag{18.286b}$$
$$= g(x) + g(v) - v + w \tag{18.286c}$$

Mais $g(v) + w = f(v)$ et nous savons que $f(v) = v$. Donc il ne reste que $\phi(f)(x) = g(x)$.

(3) **ϕ est injective** Si $f = \tau_w \circ g$ vérifie $\phi(f) = \mathrm{Id}$, il faut en particulier que $g = \mathrm{Id}$. Mais H est fini et ne peut donc pas contenir de translations non triviales. Donc $w = 0$ et $f = \mathrm{Id}$.

Donc ϕ est une injection à valeur dans les transformations linéaires de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit, ϕ est un isomorphisme entre H et son image, laquelle image est dans $\mathrm{O}(n)$.

En ce qui concerne la seconde partie, si $f \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$, alors $\phi(f)$, qui est la partie linéaire de f (théorème 18.80(5)), est dans $\mathrm{O}(n)$ avec un déterminant égal à 1. Autrement dit, $\phi(f) \in \mathrm{SO}(n)$. □

L'extraction de la partie linéaire est injective ? Certe c'est prouvé, mais on peut se demander ce qu'il se passe si H contient deux éléments qui ont la même partie linéaire. Cela n'est pas possible parce si $f_1 = \tau_{w_1} \circ g$ et $f_2 = \tau_{w_2} \circ g$ sont dans H alors $f_1 f_2^{-1} = \tau_{w_1 - w_2}$ est également dans H. Vu que H est fini, cela n'est possible que si $w_1 = w_2$, c'est-à-dire si $f_1 = f_2$.

18.9.1 Points fixés par une affinité

LEMooGUEGooTUXRsQ

Lemme 18.101 ([611])**.**
Si $n \geqslant 3$, alors toute droite est intersection de deux plans non isotropes[28].

Démonstration. Soit une droite d dans E, ainsi que $x \in d$. Soit x est isotrope, soit il ne l'est pas.

(1) **Si x est isotrope**

Étant donné que f est non dégénérée, il existe $y \in E$ tel que $f(x, y) \neq 0$. Le plan $P = \mathrm{Span}\{x, y\}$ est alors non isotrope. En effet, considérons $z \in P \cap P^\perp$. Nous avons alors $f(z, x) = f(z, x) = 0$. Vu que $z \in P$ nous pouvons l'écrire sous la forme $z = \alpha x + \beta y$. La première condition sur z donne :

$$0 = f(\alpha x + \beta y, x) = \beta f(y, x) \tag{18.287}$$

parce que $f(x, x) = 0$. Étant donné que $f(x, y) \neq 0$ nous en déduisons que $\beta = 0$. La seconde condition donne alors $f(\alpha x, y) = 0$, ce qui donne $\alpha = 0$.

Le plan P étant non isotrope, le plan $P^\perp$ est également non isotrope par le lemme 8.141.

Nous fixons maintenant $z \in P^\perp$.

L'élément z n'est pas dans P parce que $P \cap P^\perp = \{0\}$. L'élément $y + z$ n'est pas dans P non plus parce que P est vectoriel, $y \in P$ et $z \notin P$.

Nous considérons donc le plan $Q = \mathrm{Span}\{x, y + z\}$.

Ce plan est non isotrope. En effet, soit $u \in Q \cap Q^\perp$. Nous avons $u = \alpha x + \beta(y + z)$, et cela doit vérifier $f(u, x) = f(y, y + z) = 0$. Nous avons d'abord

$$0 = f(u, x) = \alpha \underbrace{f(x, x)}_{=0} + \beta \underbrace{f(x, y)}_{\neq 0} + \beta \underbrace{f(x, z)}_{=0}. \tag{18.288}$$

[28] Sous-espace isotrope, définition 8.139.

Nous en déduisons que $\beta = 0$. Il reste $u = \alpha x$, et nous imposons la seconde condition :

$$0 = f(u, y + z) = \alpha f(x, y) + \alpha f(x, z). \tag{18.289}$$

Vu que $f(x, y) \neq 0$ et $f(x, z) = 0$ nous déduisons $\alpha = 0$ et donc $u = 0$.

Au final, les plans P et Q sont non isotropes et $P \cap Q = d$.

(2) **Si x n'est pas isotrope** Nous supposons maintenant que x n'est pas isotrope. Le lemme 8.132 sur les dimensions, appliqué à l'espace de dimension 1 engendré par x donne $\dim(x^\perp) + 1 = \dim(E)$. Vu que $\dim(E) \geqslant 3$, nous déduisons que $\dim(x^\perp) \geqslant 2$.

Nous considérons une base f-orthogonale de $x^\perp$ (proposition 8.241). Les vecteurs de cette base ne sont pas isotropes. Soient y et z les vecteurs de cette base. Il nous reste à prouver que les plans $P = \text{Span}\{x, y\}$ et $Q = \text{Span}\{x, z\}$ font l'affaire.

Vu que x n'est pas isotrope, les vecteurs y et z ne sont pas dans d ; ce sont donc de vrais plans de dimension 2, et leur intersection est d. Montrons que P n'est pas isotrope, en considérant $v = \alpha x + \beta y \in P \cap P^\perp$. Vu que $v \in P^\perp$, il vérifie les deux conditions $f(v, x) = f(v, y) = 0$.

La première condition donne

$$0 = \alpha \underbrace{f(x, x)}_{\neq 0} + \beta \underbrace{f(y, x)}_{=0} = \alpha f(x, x) \tag{18.290}$$

parce que $y \in x^\perp$. Il nous reste $v = \beta y$. Appliquons la seconde condition :

$$0 = f(v, y) = \alpha f(y, y). \tag{18.291}$$

Le scalaire $f(y, y) \in \mathbb{K}$ n'est pas nul parce que nous avons choisi une base orthogonale. Au final $v = 0$, et P est non isotrope. Exactement le même raisonnement montre que Q n'est pas isotrope non plus.

□

PROPooVEEUooJQmmkN

Proposition 18.102 ([609]).
Si une isométrie de $\mathbb{R}^n$ fixe un ensemble F de points, alors elle fixe l'espace affine engendrée par F.

Démonstration. Soit $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ fixant F. Par le théorème 8.153, c'est une application affine et l'ensemble $\text{Fix}(f)$ des points fixés par f est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$, grâce à la proposition 11.61.

Donc $\text{Fix}(f)$ est un espace affine contenant F. Puisque l'espace affine engendré par F est l'intersection de tous les espaces affines contenant F, il est en particulier contenu dans $\text{Fix}(f)$. □

CORooZHZZooDgTzsW

Corolaire 18.103.
Si f et g sont des isométries de $\mathbb{R}^n$ qui coïncident sur F, alors elles coïncident sur l'espace affine engendré par F.

Démonstration. Nous considérons $h = g^{-1} \circ f$ qui est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ fixant F. Elle fixe donc, par la proposition 18.102, l'espace affine engendré par F. Or tout point fixé par h est un point sur lequel g et f coïncident. □

18.10 Classification des isométries dans $\mathbb{R}^2$

18.10.1 Projection orthogonale

Une version pour les espaces de Hilbert sera le théorème 25.7

DEFooHXJTooNPyDFQ

Proposition-Définition 18.104.
Soient un espace euclidien de dimension finie $(E, \cdot)$, un sous-espace vectoriel H_0 ainsi que $a, d \in E$. Nous considérons le sous-espace affine $H = H_0 + d$.

Il existe un unique $y \in H$ tel que

$$\|a - y\| = \inf\{\|a - x\| \text{ tel que } x \in H\}. \tag{18.292}$$

*Ce y est la **projection orthogonale** de a sur H et est notée $\texttt{proj}_H(a)$.*

LEMooXZMFooOPTjNx

Lemme 18.105.
Soient un espace vectoriel euclidien $(E, \cdot)$ ainsi que $a \in E$. Nous considérons un sous-espace affine H de E. Si $h \in H$, alors

$$a \cdot h = \texttt{proj}_H(a) \cdot h. \tag{18.293}$$

18.10.2 Réflexions

Soit un espace vectoriel E de dimension 2 muni d'un produit scalaire[29]. Cela pourrait très bien être $\mathbb{R}^2$, mais nous allons nous efforcer de l'appeler E pour rester un peu général.

DEFooLJKDooUaamen

Lemme-Définition 18.106 (Caractérisation des réflexions)**.**
Soit une droite ℓ de $\mathbb{R}^2$. Il existe une unique application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

(1) $f(x) = x$ pour tout $x \in \ell$.

(2) f échange les côtés de ℓ.

(3) f laisse invariants les droites perpendiculaires à ℓ et les cercles dont le centre est sur ℓ.

*Cette application est la **réflexion** d'axe ℓ.*

Démonstration. Soit x hors de ℓ et p la droite perpendiculaire à ℓ et passant par x. Nous avons $f(x) \in p$. En nommant P l'intersection entre ℓ et p, nous considérons le cercle $S(P, \|Px\|)$ qui est un cercle dont le centre est sur ℓ. Il contient x et donc $f(x) \in S(P, \|Px\|)$.

Donc $f(x) \in p \cap S(P, \|Px\|)$. L'intersection entre un cercle et une droite contient de façon générique deux points. L'un est x, mais $f(x) = x$ n'est pas possible parce que x est hors de ℓ et f doit inverser les côtés de ℓ. Donc $f(x)$ est l'autre.

Cela prouve l'unicité. En ce qui concerne l'existence, il suffit de noter que la réflexion σ_ℓ satisfait les contraintes. □

LEMooZSDRooUkNYer

Lemme 18.107.
Soit une droite ℓ et $A \in E$. Alors

EQooVUQDooKuwszl

$$\sigma_\ell(A) = 2\,\texttt{proj}_\ell(A) - A \tag{18.294}$$

où $\texttt{proj}_\ell$ est l'opération de projection orthogonale sur la droite ℓ.

Démonstration. Nous posons $f(X) = 2\,\texttt{proj}_\ell(X) - X$ et nous allons montrer que $f = \sigma_\ell$ en vérifiant les conditions de la définition 18.106. Nous nous gardons bien de faire un raisonnement du type « nous allons montrer que f et σ_ℓ coïncident sur deux points, et sont donc égales par le corolaire 18.103 » parce que nous ne savons pas encore que σ_ℓ est une application affine, ni même que c'est une isométrie.

Si $X \in \ell$ alors $\texttt{proj}_\ell(X) = X$ et nous avons $f(X) = 2X - X = X$. Donc ℓ est conservée.

En ce qui concerne les deux côtés de ℓ, il existe une application linéaire $s\colon E \to \mathbb{R}$ et une constante $c \in \mathbb{R}$ telles qu'en posant $\ell(X) = s(X) + c$, la droite ℓ soit le lieux des points X tels que $\ell(X) = 0$. Un côté de la droite est $\ell < 0$ et l'autre côté est $\ell > 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\ell\big(f(A)\big) &= \ell\big(2\,\texttt{proj}_\ell(A) - A\big) && \text{(18.295a)}\\
&= s(2\,\texttt{proj}_\ell(A) - A) + c && \text{(18.295b)}\\
&= 2s\big(\texttt{proj}_\ell(A)\big) - s(A) + c && \text{(18.295c)}\\
&= s\big(\texttt{proj}_\ell(A)\big) - s(A) && \text{(18.295d)}\\
&= -c - s(A) && \text{(18.295e)}\\
&= -\ell(A) && \text{(18.295f)}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que, $\texttt{proj}_\ell(A)$ étant sur ℓ, $s\big(\texttt{proj}_\ell(A)\big) + c = 0$. Nous avons donc $\ell\big(f(A)\big) = -\ell(A)$, ce qui indique que A et $f(A)$ sont de part et d'autre de ℓ.

Si d est une droite perpendiculaire à ℓ et si $A \in d$ alors $f(A) = 2\,\texttt{proj}_\ell(A) - A = \big(\texttt{proj}_\ell(A) - A\big) + A \in d$ parce que $\texttt{proj}_\ell(A) \in d$ du fait que d soit précisément perpendiculaire à ℓ. Nous avons aussi utilisé le fait que si $A, B, C \in d$ alors $(B - A) + C \in d$; pensez que $B - A$ est un vecteur directeur et que C est un point de d.

Enfin soit $K \in \ell$ et un cercle $S(K, r)$ centré en K. Soit $A \in S(K, r)$; nous devons vérifier que $f(A) = S(K, r)$. Le segment $[A, f(A)]$ est par définition perpendiculaire à ℓ. Soit M, le milieu, qui est sur la droite ℓ. Les triangles AMK et $f(A)MK$ sont rectangles en M, et $\|AM\| = \|Mf(A)\|$. Le théorème de Pythagore donne $\|AK\| = \|f(A)K\|$. Donc le cercle centré en K est alors préservé par f.

Nous en déduisons que $f = \sigma_\ell$. □

LEMooNYIWooXanBXh

Lemme 18.108.
Soit une droite ℓ dans $\mathbb{R}^2$ ainsi que $a \in \mathbb{R}^2$. Nous avons

$$\texttt{proj}_\ell\big(\sigma_\ell(a)\big) = \texttt{proj}_\ell(a). \tag{18.296}$$

[29] Définition 8.163.

PROPooFSVEooWmJsnv

Proposition 18.109 ([612]).
Une réflexion est une isométrie de (E,d) où $d(A,B)=\|A-B\|$.

Démonstration. Soient $A,B\in E$; il faut vérifier que $\|A-B\|=\|\sigma_\ell(A)-\sigma_\ell(B)\|$. Pour cela nous écrivons

$$B-A=\underbrace{B-\texttt{proj}_\ell(B)}_{=a}+\underbrace{\texttt{proj}_\ell(B)-\texttt{proj}_\ell(A)}_{=b}+\underbrace{\texttt{proj}_\ell(A)-A}_{=c}. \tag{18.297}$$

Vu que $b\perp a$ et $b\perp c$ (lemme 18.105) nous avons

$$\|B-A\|^2=\langle B-A,B-A\rangle=\|a\|^2+2\langle a,c\rangle+\|b\|^2+\|c\|^2. \tag{18.298}$$

Nous pouvons jouer le même jeu avec $\sigma_\ell(B)-\sigma_\ell(A)$ en tenant compte du lemme 18.108 et que

$$\sigma_\ell(A)-\texttt{proj}_\ell(A)=2\,\texttt{proj}_\ell(A)-A-\texttt{proj}_\ell(A)=-\big(A-\texttt{proj}_\ell(A)\big). \tag{18.299}$$

Là nous avons utilisé le lemme 18.107. Ce que nous trouvons est que

$$\sigma_\ell(B)-\sigma_\ell(A)=-a+b-c, \tag{18.300}$$

et donc encore une fois

$$\|\sigma_\ell(B)-\sigma_\ell(A)\|^2=\|a\|^2+2\langle a,c\rangle+\|b\|^2+\|c\|^2. \tag{18.301}$$

□

Remarque 18.110.
Il faut bien comprendre que si l'axe de la réflexion ne passe pas par 0 (le zéro de l'espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$), la réflexion n'est pas une isométrie de $(E,\|.\|)$ au sens où nous n'avons pas $\|\sigma_\ell(x)\|=\|x\|$.

LEMooTCIEooXdyuHu

Lemme 18.111.
Si A' est l'image de A par σ_ℓ alors ℓ est la médiatrice du segment $[A,A']$.

Démonstration. Soit $M\in\ell$. Nous avons

$$\|A-M\|^2=\|\texttt{proj}_\ell(A)-A\|^2+\|\texttt{proj}_\ell(A)-M\|^2 \tag{18.302}$$

parce que $A-\texttt{proj}_\ell(A)\perp M-\texttt{proj}_\ell(A)$. Par ailleurs, vu que $\sigma_\ell(A)=2\,\texttt{proj}_\ell(A)-A$ et que $\texttt{proj}_\ell(A)=\texttt{proj}_\ell(A')$,

$$\|\texttt{proj}_\ell(A)-A\|=\|\texttt{proj}_\ell(A')-A'\|. \tag{18.303}$$

Nous avons donc

$$\|\sigma_\ell(A)-M\|^2=\|A-M\|^2, \tag{18.304}$$

ce qui prouve que M est sur la médiatrice de $[A',A]$ par le lemme 12.158. □

18.112.
Si l est une droite dans $\mathbb{R}^2$, nous avons la réflexion $\sigma_l\in\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ d'axe l. Cela est une isométrie et donc une application affine par le théorème 8.153. Le lemme suivant détermine comment la réflexion σ_ℓ se décompose en une translation et une application linéaire.

LEMooVOJLooCFgdNG

Lemme 18.113.
Soit une droite ℓ. Alors

$$\sigma_\ell=\tau_{2w}\circ\sigma_{\ell_0} \tag{18.305}$$

où ℓ_0 est la droite parallèle à ℓ passant par l'origine, et w est le vecteur perpendiculaire à ℓ tel que $\ell_0=\ell+w$.

Démonstration. Il faut trouver trois points non alignés sur lesquels les deux applications coïncident ; cela suffira par le corolaire 18.103.

Pour tous les points de ℓ_0, l'égalité fonctionne parce que si $x\in\ell_0$,

$$\sigma_\ell(x)=x+2w, \tag{18.306}$$

tandis que

$$\sigma_{\ell_0}(x)+2w=x+2w \tag{18.307}$$

du fait que $\sigma_{\ell_0}(x)=x$.

Si $x \in \ell$, alors

$$\sigma_\ell(x) = x \tag{18.308}$$

tandis que

$$\sigma_{\ell_0}(x) + 2w = x - 2w + 2w = x. \tag{18.309}$$

Donc les applications affines σ_ℓ et $x \mapsto \sigma_{\ell_0}(x) + 2w$ coïncident sur ℓ et ℓ_0. Elles coïncident donc partout. □

LEMooRVKEooSlIrIR

Lemme 18.114 ([609]).
Une isométrie de $(\mathbb{R}^2, d)$ fixant tous les points d'une droite est soit l'identité soit la réflexion de cette droite.

Démonstration. Soit l une droite fixée par f, et soient $x, y \in l$ et $z \notin l$ (avec $x \neq y$). Le fait que x et y soient des points fixes de f implique

$$\begin{cases} d\big(x, f(z)\big) = d(x, z) & \text{(18.310a)} \\ d\big(y, f(z)\big) = d(y, z) & \text{(18.310b)} \end{cases}$$

ce qui signifie que $f(z)$ est sur l'intersection des deux cercles[30] $S\big(x, d(x,z)\big)$ et $S\big(y, d(y,z)\big)$, et comme ce sont deux cercles centrés sur la droite l, les intersections sont liées par σ_l. Autrement dit, les intersections sont z et $\sigma_l(z)$.

Si $f(z) = z$ alors f fixe trois points non alignés et fixe donc $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $f = \mathrm{Id}$.

Si par contre $f(z) = \sigma_l(z)$ alors les isométries f et σ_l coïncident sur trois points et coïncident donc partout par le corolaire 18.103 : $f = \sigma_l$. □

18.10.3 Translations et réflexions

LEMooMKTXooYKZcdQ

Lemme 18.115.
Si $A \in \mathbb{R}^2$, si ℓ est une droite de $\mathbb{R}^2$, alors nous avons

$$\boldsymbol{proj}_{\tau_A(\ell)} = \tau_A \circ \boldsymbol{proj}_\ell \circ \tau_A^{-1}. \tag{18.311}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Soit v unitaire dans la direction[31] de ℓ. La condition $q = \mathtt{proj}_\ell(x)$ est le système

$$\begin{cases} q \in \ell & \text{(18.312a)} \\ (q - x) \cdot v = 0. & \text{(18.312b)} \end{cases}$$

Nous voulons prouver que $\tau_A(q) = \mathtt{proj}_{\tau_A(\ell)}\big(\tau_A(x)\big)$, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \tau_A(q) \in \tau_A(\ell) & \text{(18.313a)} \\ \big(\tau_A(q) - \tau_A(x)\big) \cdot v = 0. & \text{(18.313b)} \end{cases}$$

Nous avons utilisé le fait que v est un vecteur unitaire dans la direction de $\tau_A(\ell)$ aussi bien que de ℓ.

Puisque $q \in \ell$, il est bien entendu que $\tau_A(q) \in \tau_A(\ell)$. D'autre part, $\tau_A(q) - \tau_A(x) = q - x$, donc

$$\big(\tau_A(q) - \tau_A(x)\big) \cdot v = (q - x) \cdot v = 0. \tag{18.314}$$

□

LEMooSMMMooAqsHWb

Lemme 18.116.
Si ℓ est une droite de $\mathbb{R}^2$, si $A \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\sigma_{\tau_A(\ell)} = \tau_A \sigma_\ell \tau_A^{-1}. \tag{18.315}$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul mettant en scène les lemmes 18.107 et 18.115 :

$$\begin{aligned} \big(\sigma_{\tau_A(\ell)} \tau_A\big)(x) &= 2\,\mathtt{proj}_{\tau_A(\ell)}\big(\tau_A(x)\big) && \text{(18.316a)} \\ &= 2\tau_A\big(\mathtt{proj}_\ell(x)\big) - \tau_A(x) && \text{(18.316b)} \\ &= 2\,\mathtt{proj}_\ell(x) + 2A - x - A && \text{(18.316c)} \\ &= 2\,\mathtt{proj}_\ell(x) - x + A && \text{(18.316d)} \\ &= \tau_A\big(\sigma_\ell(x)\big). && \text{(18.316e)} \end{aligned}$$

□

[30] L'intersection existe parce que $d(x,z) + d(y,z) > d(x,y)$.
[31] Cela signifie qu'il existe $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $\ell = a + \mathbb{R}v$.

18.10.4 Rotations

DEFooFUBYooHGXphm

Définition 18.117 (Rotation en dimension 2)**.**
*Une **rotation** d'un espace euclidien de dimension 2 est une composée de deux réflexions d'axes non parallèles. L'identité est une rotation.*

18.118.
Quelques remarques à propos de cette définition.

(1) Attention : nous ne parlons pas encore de rotations « vectorielles » : ici le centre de la rotation (que nous n'avons pas encore défini) peut ne pas être 0.

(2) Dans la même veine : plus tard, lorsque nous saurons que les rotations sont des isométries de (E, d) où $d(X, Y) = \|X - Y\|$, nous allons en réalité beaucoup plus souvent parler de rotations centrées en l'origine qu'en un point quelconque. C'est pourquoi à partir de 18.129 nous dirons le plus souvent « rotation » pour « rotation centrée en 0 ». D'où les énoncés comme « les rotations sont les matrices orthogonales » (corolaire 18.137), qui *stricto sensu* de la définition 18.117, sont faux.

(3) Une rotation est composée de deux réflexions d'axes non parallèles. Il est cependant trop tôt pour décréter que l'intersection de ces axes est le centre de la rotation. Rien ne dit en effet pour l'instant que deux décompositions différentes de la même rotation, avec des axes différents donnent le même point d'intersection.

(4) Pourquoi ajouter l'identité ? Pour avoir un groupe. Dans le cas vectoriel, il est suffisant de demander d'être une composée de deux réflexions, parce que toutes les réflexions vectorielles ont des axes qui s'intersectent en 0. Le cas des axes parallèles est seulement le cas des axes confondus et revient à l'identité.

Si nous voulons avoir un groupe même pour les rotations centrées ailleurs qu'en zéro, nous devons ajouter « à la main » l'identité.

Toutes ces remarques se résument par : « tout devient compliqué du fait que nous voulons considérer également les rotations centrées ailleurs qu'en zéro ». En se contentant du cas vectoriel, de nombreuses choses sont plus simples.

CORooNKKIooPGOUJl

Corolaire 18.119.
Si $A \neq B$ dans E alors il existe une unique réflexion envoyant A sur B.

Démonstration. En ce qui concerne l'existence, la réflexion dont l'axe est la médiatrice de $[A, B]$ fait l'affaire. En ce qui concerne l'unicité, le lemme 18.111 nous dit que si A est envoyé sur B, l'axe est forcément la médiatrice de $[A, B]$. □

LEMooIJELooLWqBfE

Lemme-Définition 18.120 ([613])**.**
Soit une rotation $r = \sigma_1 \circ \sigma_2$ différente de l'identité.

(1) Elle admet un unique point fixe.

(2) Ce point fixe est l'intersection des axes $\ell_1 \cap \ell_2$.

*Le **centre** d'une rotation (autre que l'identité) est cet unique point fixe.*

Démonstration. Nous nommons $O = \ell_1 \cap \ell_2$. Soit $A \in E$, et supposons que $r(A) = A$. Nous avons $\sigma_1 \circ r = \sigma_2$ et donc

$$\sigma_1(A) = (\sigma_1 \circ r)(A) = \sigma_2(A). \tag{18.317}$$

On pose $B = \sigma_1(A)$. Alors σ_1 et σ_2 envoient tous deux A sur B.

Si $A = B$ alors A est fixé par σ_1 et donc appartient à ℓ_1. Même chose pour A qui est fixé par σ_2, et donc $A \in \ell_2$. Cela donne $A = B = O$, et alors, le point fixé par r est O.

Si $A \neq B$ alors il existe une unique réflexion envoyant A sur B (corolaire 18.119). L'unicité signifie que $\sigma_1 = \sigma_2$. Dans ce cas, $r = \sigma_1 \circ \sigma_2 = \mathrm{Id}$. □

NORMooDPBOooKkRuTn

18.121.
La rotation $\sigma_1 \circ \sigma_2$ laisse évidemment fixé le point $\ell_1 \cap \ell_2$. Si $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_a \circ \sigma_b$ alors rien n'oblige les axes de σ_1 et σ_2 d'être identiques à ceux de σ_a et σ_b. Mais l'intersection $\ell_1 \cap \ell_2$ doit être la même que l'intersection $\ell_a \cap \ell_b$ parce que c'est l'unique point fixé par la composée. Cela nous permet de poser la définition suivante.

LEMooTZNWooTVOklu

Lemme 18.122.
Les rotations sont des isométries pour la distance : $\|X - Y\| = \|r(X) - r(Y)\|$.

Démonstration. Si $r = \sigma_1 \circ \sigma_2$, en utilisant le fait que σ_1 et σ_2 sont des isométries de (E, d) (18.109) nous avons :

$$d(X,Y) = d\big(\sigma_2(X), \sigma_2(Y)\big) = d\big(\sigma_1\sigma_2(X), \sigma_1\sigma_2(Y)\big) = d\big(r(X), r(Y)\big). \tag{18.318}$$

□

Ce lemme nous dit qu'une rotation de centre O vérifie $\|OX\| = \|Or(X)\|$ pour tout X.

PROPooNXJKooEDOczh

Proposition 18.123 ([1, 613])**.**
Soient $A, B, O \in E$ tels que $\|AO\| = \|BO\| \neq 0$. Alors il existe une unique rotation r centrée en O telle que $r(A) = B$.

Démonstration. Existence et unicité séparément.

(1) **Existence** Si $A = B$, l'identité fait l'affaire. Sinon, $\|A - O\| = \|B - O\|$ implique que la médiatrice de $[A, B]$ contient O. Soit σ_m la réflexion selon cette médiatrice. La rotation $\sigma_m \circ \sigma_{(AO)}$ convient.

(2) **Unicité** Soit r une rotation de centre O et telle que $r(A) = B$. Si $A = B$ alors $r = \mathrm{Id}$ parce qu'une rotation autre que l'identité ne fixe que son centre par le lemme 18.120. Nous supposons que $A \neq B$.

Nous posons $g = \sigma_m \circ r$. Alors $g(A) = \sigma_m(B) = A$ parce que $\sigma_m(B) = A$ et $r(A) = B$. Cela signifie que g est une isométrie qui fixe A.

(2a) **Si A et O ne sont pas alignés** Attention : ici O est un point de E, pas le zéro de l'espace vectoriel E. Lorsqu'on dit que A et O ne sont pas alignés, nous parlons bien d'alignement avec le zéro de E.

Nous avons $g(A) = A$ et $g(O) = O$. Donc g coïncide avec $\sigma_{(AO)}$ en deux points non alignés, c'est-à-dire en deux points pour lesquels l'espace engendré est tout E. Nous en déduisons que $g = \sigma_{(AO)}$.

(2b) **Si A et O sont alignés** Soit maintenant un point C tel que $A - O \perp C - O$ et

$$\|OC\| = \|OA\| = \|OB\|. \tag{18.319}$$

Puisque g est une isométrie pour la distance sur E, pas pour la norme, nous ne pouvons pas écrire $g(C - O) \perp g(A - O)$ à partir de $C - O \perp A - O$. Nous décomposons $g(X) = s(X) + G$ où s est linéaire sur E. Il est vite vu que s est une isométrie de $(E, \|.\|)$:

$$\|X - Y\| = \|g(X) - g(Y)\| = \|s(X) + G - s(Y) - G\| = \|s(X) - s(Y)\| = \|s(X - Y)\| \tag{18.320}$$

pour tout $X, Y \in E$. Nous avons de plus $g(A) = A$ et $g(O) = O$, ce qui donne $O = s(O) + G$ et $A = s(A) + G$. En égalisant les valeurs de G nous avons

EQooPEWGooABHUvu

$$O - s(O) = A - s(A). \tag{18.321}$$

Comme s est une isométrie (une vraie) nous avons

$$s(A - O) \perp s(C - O), \tag{18.322}$$

mais $s(A - O) = s(A) - s(O) = A - O$ par (18.321). Donc

$$A - O \perp s(C - O). \tag{18.323}$$

Nous en concluons que $s(C - O) = \pm(C - O)$. Parce que les vecteurs $\pm(C - O)$ sont les deux seuls de norme $\|AO\| = \|CO\|$ à être perpendiculaire à $A - O$. Rappel : la définition de C, et le fait que nous soyons en dimension 2.

Est-il possible d'avoir $s(C - O) = C - O$? Cela donnerait

$$g(A - O) = s(A) - s(O) + G = s(A) - O + O - s(O) + G = A - O + G \tag{18.324a}$$
$$g(C - O) = C - O + G, \tag{18.324b}$$

ce qui signifierait que g et τ_G coïncideraient sur les points $A - O$ et $C - O$, et donc seraient égaux par le corolaire 18.103. Cela est cependant impossible parce que g fixe au moins les points A et O alors que la translation ne fixe aucun point. Nous en déduisons $s(C - O) = -(C - O)$.

Nous avons aussi, parce que (AO) est une droite passant par l'origine que

$$\sigma_{(AO)}(A - O) = A - O \tag{18.325}$$

et parce que $C-O$ est perpendiculaire à cette droite :

$$\sigma_{(AO)}(C-O)=-(C-O). \tag{18.326}$$

Nous avons donc quand même que g et $\sigma_{(AO)}$ coïncident sur deux points non alignés : $A-O$ et $C-O$.

Dans tous le cas, $g=\sigma_{(AO)}$. Nous avons donc

$$\sigma_{(OA)}=\sigma_m\circ r, \tag{18.327}$$

et donc r est fixé à

$$r=\sigma_m\circ\sigma_{(OA)}. \tag{18.328}$$

□

18.124.
Anticipons un peu et faisons semblant de déjà connaitre les matrices et les fonctions trigonométriques. La proposition 18.123 nous dit qu'il existe une seule rotation amenant A sur B. Vous pourriez objecter que le point $(1,0)$ peut être amené sur $(0,-1)$ soit par la rotation d'angle $3\pi/2$, soit par celle d'angle $-\pi/2$. Il n'en est rien parce que ces deux rotations sont les mêmes ! Pensez-y. En tant qu'application $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, la rotation $R_{3\pi/2}$ est égale à $R_{-\pi/2}$.

Une rotation donnée peut être écrite de beaucoup de façons comme composée de deux réflexions. En fait d'autant de façons qu'il y a de réflexions.

PROPooKAZEooLTHWKe

Proposition 18.125 ([613])**.**
Soit une rotation r de E centrée en O. Pour toute réflexion σ_ℓ telle que le centre de r soit sur ℓ, il existe une réflexion σ_1 telle que $r=\sigma_1\circ\sigma_\ell$. Il existe aussi une réflexion σ_2 telle que $r=\sigma_\ell\circ\sigma_2$.

Démonstration. Si $r=\mathrm{Id}$ c'est bon avec $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_\ell$. Sinon nous considérons $A\neq O$ sur ℓ, et $B=r(A)$. Nous savons que $B\neq A$ parce que O est le seul point de E fixé par r (proposition 18.120). Il existe une réflexion (unique) σ_1 faisant $\sigma_1(A)=B$, et c'est la réflexion dont l'axe est la médiatrice de $[A,B]$. Le point O est sur cette médiatrice parce que les rotations sont des isométries de (E,d) (lemme 18.122).

La rotation $\sigma_1\circ\sigma_\ell$ vérifie

$$(\sigma_1\circ\sigma_\ell)(A)=\sigma_1(A)=B. \tag{18.329}$$

Or $\|OA\|=\|OB\|$, donc il y a unicité de la rotation centrée en O portant A sur B (proposition 18.123) ; nous avons donc $r=\sigma_1\circ\sigma_\ell$.

En ce qui concerne $r=\sigma_\ell\circ\sigma_2$, il faut appliquer ce que nous venons de faire à la rotation r^{-1} : il existe σ_2 tel que $r^{-1}=\sigma_2\circ\sigma_\ell$, ce qui donne

$$r=\sigma_\ell\circ\sigma_2. \tag{18.330}$$

□

18.10.5 Rotation d'un angle donné

DEFooADTDooKIZbrw

Lemme-Définition 18.126.
Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Nous considérons l'application linéaire $R_0(\theta)\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est[32]

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\ \sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}. \tag{18.331}$$

ITEMooIEKJooZfsAui

(1) Nous avons

EQooEVCTooBpTDDq

$$R_0(\theta)=\sigma_\ell\circ s \tag{18.332}$$

où s est la réflexion d'axe horizontal et ℓ est la droite

$$\ell=\mathbb{R}\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{pmatrix}. \tag{18.333}$$

ITEMooBEYOooMHRRYk

(2) L'application $R_0(\theta)$ est une rotation autour de $(0,0)$.

[32] Pour la définition des fonctions trigonométriques, définition 18.1.

ITEMooEQPAooQcsYfj

(3) *Si $A \in \mathbb{R}^2$, alors l'application*

$$R_A(\theta) = \tau_A \circ R_0(\theta) \circ \tau_A^{-1} \tag{18.334}$$

EQooKMJQooWGyWHe

est une rotation autour de A nommée ***rotation d'angle*** *θ.*

Démonstration. Nous allons prouver l'égalité (18.332) en calculant les deux membres sur les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ qui forment une base.

(1) **Pour $p = (1,0)$** D'abord la chose facile[33] : $s(1,0) = (1,0)$.
Pour calculer $\sigma_\ell(1,0)$, nous utilisons le lemme 18.107 ; nous commençons par chercher la projection orthogonale q de $p = (1,0)$ sur ℓ. Nous posons

$$q = \lambda \begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{pmatrix} \tag{18.335}$$

EQooUFMWooWhwcHR

et nous cherchons λ satisfaisant $q \cdot (q-p) = 0$. Un peu de calculs passant par (18.5) nous donne

$$q \cdot (q-p) = \lambda\big(\lambda - \cos(\theta/2)\big). \tag{18.336}$$

Les deux solutions sont $\lambda = 0$ et $\lambda = \cos(\theta/2)$. Mais la solution $\lambda = 0$ revient à dire que la droite ℓ est verticale, c'est-à-dire $\cos(\theta/2) = 0$. Donc la solution est toujours donnée par

$$\lambda = \cos(\theta/2). \tag{18.337}$$

Nous introduisons cette valeur dans (18.335) pour fixer q, et nous utilisons la formule du lemme 18.107 :

$$\sigma_\ell \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2q - p = \begin{pmatrix}2\cos^2(\theta/2) - 1\\ 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}. \tag{18.338}$$

Nous avons utilisé les formules trigonométriques de duplication d'angle (corolaire 18.15).

(2) **Pour $p = (0,1)$** Cette fois $s(p) = (0,-1)$ et l'équation pour déterminer λ est

$$0 = q \cdot (q-p) = \begin{pmatrix}\lambda\cos(\theta/2)\\ \lambda\sin(\theta/2)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\lambda\cos(\theta/2)\\ \lambda\sin(\theta/2) - 1\end{pmatrix}. \tag{18.339}$$

Nous trouvons $\lambda\big(\lambda + \sin(\theta/2)\big) = 0$. Le cas $\lambda = 0$ signifie que la droite ℓ est horizontale et donc que $\sin(\theta/2) = 0$. Donc la solution est dans tous les cas

$$\lambda = -\sin(\theta/2). \tag{18.340}$$

Nous trouvons

$$\sigma_\ell \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 2q - p = \begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}. \tag{18.341}$$

Le calcul de $\sigma_\ell \circ s$ étant effectué sur une base, il est facile de reconstituer la matrice

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}. \tag{18.342}$$

Cette matrice étant celle, par définition, de $R_0(\theta)$, nous avons montré que $R_0(\theta)$ était bien une rotation. Nous avons prouvé les points (1) et (2).

Nous passons maintenant au point (3). Il est facile de voir que A est un point fixe de $R_A(\theta)$ parce que $\tau_A^{-1}(A) = (0,0)$.

Nommons ℓ' la droite horizontale $\mathbb{R}(1,0)$. Nous avons, par le point précédent $R_0(\theta) = \sigma_\ell \circ \sigma_{\ell'}$. En introduisant astucieusement $\tau_A^{-1}\tau_A$ dans l'expression définissant $R_A(\theta)$, nous avons

$$R_A(\theta) = \tau_A\sigma_\ell\sigma_{\ell'}\tau_A^{-1} = \underbrace{\tau_A\sigma_\ell\tau_A^{-1}}_{=\sigma_{\tau_A(\ell)}}\underbrace{\tau_A\sigma_{\ell'}\tau_A^{-1}}_{\sigma_{\tau_A(\ell')}} = \sigma_{\tau_A(\ell)}\sigma_{\tau_A(\ell')}. \tag{18.343}$$

Nous avons utilisé le lemme 18.116.

Nous voyons que $R_A(\theta)$ est une composée de deux réflexions se coupant en A. C'est donc une rotation centrée en A.

□

[33] Ici comme partout dans le Frido nous ne faisons aucune différence entre (a,b) et $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$; ce sont seulement deux façons différentes d'écrire le même élément de $\mathbb{R}^2$. Nous ne faisons pas semblant de croire que l'un ou l'autre serait un « covecteur » suivant que l'on tourne notre page dans un sens ou un autre.

18.10.6 Rotations vectorielles

L'expression « rotation vectorielle » signifie rotation centrée en zéro. Elles sont « vectorielles » parce qu'elles sont linéaires comme nous le voyons à présent.

PROPooTFNSooFjiWHG

Proposition 18.127.
Quelques résultats à propos de rotations.

ITEMooONJOooRgycsQ

(1) Toutes les rotations de $\mathbb{R}^2$ centrées en $(0,0)$ sont de la forme $R_0(\theta)$[34] *pour un $\theta \in \mathbb{R}$.*

ITEMooMQPRooAbPcrr

(2) Les rotations de $\mathbb{R}^2$ centrées en $(0,0)$ sont des applications linéaires.

ITEMooSIHZooBEJhdu

(3) Si r est une rotation dans $\mathbb{R}^2$, il existe $A \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$

$$r = \tau_A \circ R_0(\theta) \circ \tau_A^{-1}. \tag{18.344}$$

Démonstration. Soit r une rotation centrée en $(0,0)$. Par la proposition 18.125, il existe une droite ℓ passant par $(0,0)$ telle que $r = \sigma_\ell \circ s$ où s est la réflexion d'axe horizontal : $s(x,y) = (x,-y)$.

Soit un vecteur unitaire $v \in \ell$. Puisque $v \in S^1$, la proposition 18.59 nous donne $t \in [0, 2\pi[$ tel que

$$v = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}. \tag{18.345}$$

En posant $\theta = 2t$ nous avons

$$\ell = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \tag{18.346}$$

et donc $r = R_0(\theta)$ qui est l'application linéaire définie en 18.126. Ceci prouve les points (1) et (2).

Et enfin nous voyons le point (3). Soit A l'unique point fixe de la rotation r. Cette dernière s'écrit alors $r = \sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2}$ où ℓ_1 et ℓ_2 sont des droites telles que $\ell_1 \cap \ell_2 = \{A\}$.

En utilisant le lemme 18.116, nous avons $\sigma_{\ell_i} = \tau_A \circ \sigma_{\tau_A^{-1}(\ell_i)} \circ \tau_A^{-1}$. En substituant, et en nous rendant compte que $\tau_A^{-1}\tau_A = \mathrm{Id}$, nous avons

$$r = \sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2} = \tau_A r_0 \tau_1^{-1} \tag{18.347}$$

où r_0 est la rotation $\sigma_{\tau_A^{-1}(\ell_1)} \circ \sigma_{\tau_A^{-1}}(\ell_2)$. Cette dernière est une rotation autour de $(0,0)$ parce que $\tau_A^{-1}(\ell_1) \cap \tau_A^{-1}(\ell_2) = \{0\}$. Elle est donc, par le point (1), de la forme $R_0(\theta)$, pour une certaine valeur de θ. □

PROPooWMESooNJMdxf

Proposition 18.128 ([613])**.**
Les rotations basées en $(0,0)$ forment un groupe abélien.

Démonstration. L'identité est une rotation par définition. En ce qui concerne l'inverse, si $r = \sigma_1\sigma_2$ alors $r^{-1} = \sigma_2\sigma_1$. Nous commençons maintenant les choses pas tout à fait évidentes.

(1) **Composition** Soient des rotations r, r' centrées en $(0,0)$. Soit également, une réflexion σ dont l'axe contient $(0,0)$. Alors la proposition 18.125 nous donne l'existence de σ_1 et σ_2 tels que $r = \sigma_1\sigma$ et $r' = \sigma\sigma_2$. Avec ça, la composition donne

$$rr' = \sigma_1\sigma\sigma\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2, \tag{18.348}$$

qui est encore une rotation.

(2) **Commutativité** Soient deux rotations r et r' ainsi que des décompositions $r = \sigma_1\sigma$, $r' = \sigma\sigma_2$. Nous avons

$$rr' = \sigma_1\sigma_2 \tag{18.349a}$$
$$r'r = \sigma\sigma_2\sigma_1\sigma. \tag{18.349b}$$

Vu que $t = \sigma_2\sigma_1$ est une rotation, nous pouvons encore appliquer la proposition 18.125 pour avoir $t = \sigma_2\sigma_1 = \sigma\sigma_3$. Ainsi,

$$r'r = \sigma\sigma\sigma_3\sigma = \sigma_3\sigma. \tag{18.350}$$

Mais aussi $rr' = \sigma_1\sigma_2 = t^{-1} = \sigma_3\sigma$. Nous avons donc bien $rr' = r'r$, et le groupe est commutatif.

□

[34] Définition 18.126.

NORMooOUDJooRfbDEX

18.129.
Jusqu'à présent nous avons parlé de rotations « affines ». Parmi elles, les rotations centrées en 0 (zéro, l'origine de E comme espace vectoriel) sont de particulière importance. Ce sont des applications linéaires, et même des isométries. Dans la suite, nous allons souvent dire simplement « rotation » pour dire « rotation centrée en 0 ».

Nous allons maintenant prendre un point de vue plus vectoriel, et allons noter les points de E avec des lettres comme x, y, u, v et non plus, avec des majuscules, comme lorsqu'on avait un point de vue affine. En même temps, nous allons noter les applications $E \to E$ par des lettres comme A et ne plus écrire les parenthèses. Bref, nous écrivons Au au lieu de $r(A)$.

LEMooSYZYooWDFScw

Lemme 18.130.
En dimension 2*, les réflexions vectorielles (c'est-à-dire dont l'axe passe par* 0*) ont un déterminant qui vaut* -1*.*

Démonstration. Soit une réflexion d'axe ℓ. Prenons une base orthonormale de E constituée de e_1 sur ℓ et de $e_2 \perp \ell$. Alors $\sigma_\ell(e_1) = e_1$ et $\sigma_\ell(e_2) = -e_2$. La formule du déterminant donne

$$\det(\sigma_\ell) = e_1^*\big(\sigma_\ell(e_1)\big)e_2^*\big(\sigma_\ell(e_2)\big) - e_2^*\big(\sigma_\ell(e_1)\big)e_1^*\big(\sigma_\ell(e_2)\big) = 1 \times (-1) - 0 \times 0 = -1. \tag{18.351}$$

Nous utilisons de façon cruciale le fait que le calcul du déterminant ne dépende pas de la base choisie, lemme 8.14. □

PROPooTUJWooAjtEnQ

Proposition 18.131.
Les rotations[35] *sont*

(1) des applications linéaires orthogonales au sens de la définition 8.41,

(2) des applications de déterminant 1*,*

Démonstration. Le fait qu'elles soient linéaires est la proposition 18.127.

Nous avons, pour tout $u \in E$ l'égalité de la norme $\|u\|$ et $\|Au\|$ par le lemme 18.122 appliqué à $Y = 0$. En termes de produits scalaires nous avons alors $\langle Au, Au\rangle = \langle u, u\rangle$, et donc

$$\langle A^*Au, u\rangle = \|u\|^2. \tag{18.352}$$

En particulier si $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une base orthonormée de E nous avons

$$(A^*Ae_i)_i = \|e_i\|^2 = 1, \tag{18.353}$$

ce qui donne $\|A^*Ae_i\| \geqslant 1$, avec égalité si et seulement si $A^*Ae_i = e_i$. Ici nous avons utilisé le fait que $\langle x, e_i\rangle = x_i$, et le fait que pour tout i nous ayons $\|x\| \geqslant |x_i|$, avec égalité seulement si x est un multiple de e_i.

Par ailleurs l'inégalité de Cauchy-Schwarz 10.1 nous donne

$$\|u\|^2 = |\langle A^*Au, u\rangle| \leqslant \|A^*Au\|\|u\| \tag{18.354}$$

et donc

$$\|u\| \leqslant \|A^*Au\|. \tag{18.355}$$

Encore une fois, en appliquant cela à $u = e_i$ nous trouvons $1 \leqslant \|A^*Ae_i\|$. Puisque nous avions déjà l'inégalité dans l'autre sens, $\|A^*Ae_i\| = 1$. Et le cas d'égalité est uniquement possible avec $A^*Ae_i = e_i$.

Donc pour tout i de la base, nous avons $A^*Ae_i = e_i$. Nous avons donc $A^*A = \mathrm{Id}$ et l'application A est orthogonale.

En ce qui concerne le déterminant, les réflexions sont de déterminant -1 par le lemme 18.130, donc $A = \sigma_1 \circ \sigma_2$ est de déterminant 1. Nous avons utilisé le fait que le déterminant était un morphisme : proposition 8.15(1). □

Remarque 18.132.
Nous ne savons pas encore que les rotations forment tout le groupe $\mathrm{SO}(2)$ des endomorphismes orthogonaux de déterminant 1. Il faudra attendre le corolaire 18.137 pour le savoir.

LEMooMIJXooCjiQqP

Lemme 18.133.
L'application $-\mathrm{Id}$ *est une rotation de* $\mathbb{R}^2$*.*

Démonstration. Soit une base orthonormée $\{e_1, e_2\}$ de E et la rotation $r = \sigma_1\sigma_2$ où σ_i est la réflexion le long de l'axe $\ell_i = \{te_i\}_{t\in\mathbb{R}}$. Faut-il vous prouver que $r = -\mathrm{Id}$? La réflexion σ_2 retourne la composante y d'un vecteur écrit dans la base $\{e_1, e_2\}$ sans toucher à la composante x. La réflexion σ_1 fait le contraire. □

[35] Centrées en 0, nous ne le répéterons pas !

18.10.7 Matrice des transformations orthogonales

Nous donnons maintenant une forme générale (trigonométrique) pour les matrices de SO(2). Nous ne pouvons cependant pas invoquer les lemmes 18.134 ou 18.135 pour prétendre avoir une matrice des rotations, parce que nous n'avons pas encore prouvé que les rotations étaient des transformations orthogonales. Ce sera pour la proposition 18.138.

LEMooAJMAooXPSKtS

Lemme 18.134.
Si $A \in \mathrm{O}(2)$ alors il existe un unique $(\theta, \epsilon) \in [0, 2\pi[\times \{\pm 1\}$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\epsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \epsilon \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{18.356}$$

Démonstration. Soit une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et imposons qu'elle soit dans O(2). Le fait que A soit orthogonale impose

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18.357}$$

Nous avons alors le système

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 & \text{(18.358a)} \\ b^2 + d^2 = 1 & \text{(18.358b)} \\ ab + cd = 0 & \text{(18.358c)} \end{cases}$$

La proposition 18.59 nous permet de déduire qu'il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos(\theta)$, $c = \sin(\theta)$, ainsi que plusieurs $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $b = \cos(\alpha)$, $d = \sin(\alpha)$.

Note : si nous voulons $\alpha \in [0, 2\pi[$, alors il y a unicité. Ici nous ne nous attachons pas à cette contrainte ; nous savons qu'il en existe plusieurs, et nous allons en fixer un en fonction de θ. Le α ainsi fixé ne sera peut-être pas dans $[0, 2\pi[$, mais ce ne sera pas grave.

Les angles θ et α sont alors liés par la contrainte

$$\cos(\theta)\cos(\alpha) + \sin(\theta)\sin(\alpha) = 0. \tag{18.359}$$

Utilisant l'identité (18.22c) cela signifie que $\cos(\theta - \alpha) = 0$. Donc

$$\alpha \in \{\theta + \frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}. \tag{18.360}$$

Si k est pair, ça donne

$$\cos(\alpha) = -\sin(\theta) \tag{18.361a}$$
$$\sin(\alpha) = \cos(\theta) \tag{18.361b}$$

et alors

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{18.362}$$

EQooNAMKooKACIfd

Si au contraire k est impair, alors

$$\cos(\alpha) = \sin(\theta) \tag{18.363a}$$
$$\sin(\alpha) = -\cos(\theta), \tag{18.363b}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{18.364}$$

EQooJMYFooGgAjMJ

Nous avons démontré qu'une matrice de O(2) était forcément d'une des deux formes (18.362) ou (18.364). Il est maintenant facile de vérifier que ces deux matrices sont effectivement dans O(2). □

LEMooHRESooQTrpMz

Lemme 18.135.
Si $g \in \mathrm{SO}(2)$, il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la matrice de g dans la base canonique soit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{18.365}$$

Démonstration. Puisque SO(2) est la partie de O(2) constituée des matrices de déterminant 1, nous pouvons reprendre la forme donnée par le lemme 18.134 et fixer ϵ par la contrainte sur le déterminant. Nous avons, en utilisant la relation du lemme 18.4,

$$\det\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\epsilon\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \epsilon\cos(\theta)\end{pmatrix}=\epsilon. \tag{18.366}$$

Étant donné que $\det(g)=1$, nous voyons que $\epsilon=1$. □

COROooGGVUooLQYGET

Corolaire 18.136 ([1]).
Nous avons une bijection

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathrm{SO}(2)&\to[0,2\pi[\\ \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}&\mapsto\theta,\end{aligned} \tag{18.367}$$

et un isomorphisme de groupe

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathrm{SO}(2)&\to \mathrm{U}(1)=\{e^{i\theta}\}_{\theta\in\mathbb{R}}\\ \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}&\mapsto e^{i\theta}.\end{aligned} \tag{18.368}$$

Démonstration. La première assertion est une paraphrase du lemme 18.135. Pour la seconde, il faut vérifier que c'est bien un morphisme et une bijection.

Pour le morphisme, ce sont les formules d'addition d'angle du lemme 18.14 qui jouent. En ce qui concerne la bijection…

(1) **Surjection** Comme $e^{i\theta+2ki\pi}=e^{i\theta}$, tout élément de U(1) est exponentielle de $i\theta$ pour un $\theta\in[0,2\pi[$.

(2) **Injection** Remarquez que nous avons, pour $\theta\in[0,2\pi[$, $\varphi\big(\psi^{-1}(\theta)\big)=e^{i\theta}$.

Soient $A,B\in\mathrm{SO}(2)$ tels que $\varphi(A)=\varphi(B)$. Soient $\theta_a,\theta_b\in[0,2\pi[$ tels que $A=\psi^{-1}(\theta_a)$ et $B=\psi^{-1}(\theta_b)$. L'hypothèse $\varphi(A)=\varphi(B)$ donne

$$e^{i\theta_a}=e^{i\theta_b}, \tag{18.369}$$

et donc $\theta_a=\theta_b$ par la proposition 18.62(1).

Nous en déduisons que $A=B$, et donc que φ est injective.

□

18.10.8 Rotations, SO(2) et matrice de rotation

CORooVYUJooDbkIFY

Corolaire 18.137 ([1]).
Le groupe des rotations centrées en $(0,0)$ *est le groupe* SO(2).

Démonstration. Nous devons prouver deux choses :

- Toutes les rotations sont des éléments de SO(2).
- Tous les éléments de SO(2) sont des rotations.

La proposition 18.127 nous indique que toute rotation de $\mathbb{R}^2$ centrée en $(0,0)$ est de la forme $R_0(\theta)$, c'est-à-dire, a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}. \tag{18.370}$$

EQooSJNBooMPIRZS

Donc toute rotation est dans SO(2).

D'autre part, le lemme 18.135 indique que tout élément de SO(2) a, dans la base canonique, une matrice de la forme (18.370). Le lemme 18.126 nous indique alors que c'est une rotation. □

PROPooOTIVooZpvLnb

Proposition 18.138.
Si r est une rotation de $\mathbb{R}^2$ centrée en $(0,0)$, il existe un unique $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $r=R_0(\theta)$.

Démonstration. Soit une rotation r autour de $(0,0)$. Le corolaire 18.137 nous dit qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$r = R_0(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{18.371}$$

Nous avons identifié l'application linéaire à sa matrice. L'élément $\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$ est dans S^1, et il existe donc, par la proposition 18.59, un unique $t \in [0, 2\pi[$ tel que $\cos(t) = \sin(\theta)$ et $\sin(t) = \sin(\theta)$. Pour ce t nous avons alors

$$r = R_0(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \tag{18.372}$$

□
PROPooISUCooRYJcwo

Proposition 18.139.
Nous avons la formule suivante pour la composition :

$$R_0(\alpha) \circ R_0(\beta) = R_0(\alpha + \beta). \tag{18.373}$$

Démonstration. Par définition de $R_0(\theta)$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la composition se calcule avec le produit suivant, en utilisant les formules du lemme 18.14 :

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \tag{18.374a}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} \tag{18.374b}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}. \tag{18.374c}$$

Donc dans la base canonique, la matrice de $R_0(\alpha)R_0(\beta)$ est celle de $R_0(\alpha+\beta)$. □

18.10.9 Rotation et application affine

Nous considérons à nouveau la définition 11.13 d'une application affine ainsi que sa décomposition en application linéaire et translation donnée par le lemme 11.14. Nous voyons maintenant comment ces propriétés se déclinent dans le cas d'une rotation non centrée en l'origine.

Exemple 18.140.
Soit $A \in \mathbb{R}^2$ ainsi qu'une rotation f autour de A, c'est-à-dire une composition de deux symétries dont les axes se coupent en A[36]. Nous allons extraire de f la partie linéaire définie en 11.14.

Il existe des axes ℓ_1 et ℓ_2 tels que $\ell_1 \cap \ell_2 = \{A\}$ et tels que

$$f = s_{\ell_1} \circ s_{\ell_2}. \tag{18.375}$$

En utilisant le lemme 18.116,

$$f = t_A \circ s_{t_A^{-1}(\ell_1)} \circ t_A^{-1} \circ t_A \circ s_{t_A^{-1}(\ell_2)} \circ t_A^{-1} = t_A \circ s_{t_A^{-1}(\ell_1)} \circ s_{t_A^{-1}(\ell_2)} \circ t_A^{-1}. \tag{18.376}$$

Comme $A \in \ell_i$, nous avons $O = (0,0) \in t_A^{-1}(\ell_i)$. Donc les axes $t_A^{-1}(\ell_1)$ et $t_A^{-1}(\ell_2)$ se coupent en O et nous pouvons écrire

$$f = t_A \circ R \circ t_A^{-1} \tag{18.377}$$

où R est une rotation centrée en O ; donc une application linéaire par la proposition 18.127.

Nous avons

$$f(x) = (t_A \circ R \circ t_A^{-1})(x) \tag{18.378a}$$

$$= (t_A \circ R)(x - A) \tag{18.378b}$$

$$= t_A\big(R(x) - R(A)\big) \tag{18.378c}$$

$$= R(x) + t_{R(A)+A} \tag{18.378d}$$

$$= (t_{R(A)+A} \circ R)(x). \tag{18.378e}$$

Donc

$$f = t_{R(A)+A} \circ R. \tag{18.379}$$

[36] Voir la définition 18.117.

Il est maintenant aisé de montrer que R est la partie linéaire de f. Pour tout $M, x \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$\begin{aligned} f(M+x) &= R(M+x) + R(A) + A && (18.380a)\\ &= R(M) + R(x) + R(A) + A && (18.380b)\\ &= R(x) + f(M). && (18.380c)\end{aligned}$$

Donc nous confirmons la formule

$$f(M+x) = R(x) + f(M) \tag{18.381}$$

et R est la partie linéaire de f, voir la définition 11.14. △

LEMooUKEVooAEWvlM

Lemme 18.141 ([1]).
Tout sous-groupe fini de SO(2) *est cyclique*[37].

Démonstration. Soit un sous-groupe fini G de SO(2). Nous considérons les applications $\psi\colon \mathrm{SO}(2) \to [0, 2\pi[$ et $\varphi\colon \mathrm{SO}(2) \to U(1)$ données par le corolaire 18.136.

Vu que $\psi(e) = 0$, la partie $\psi(G \setminus \{e\})$ est une partie finie de $[0, 2\pi[$ qui ne contient pas 0. Nous en considérons le minimum $\theta_0 \neq 0$. Gardez en tête que ce minimum n'est pas nul : $\theta_0 \neq 0$.

Nous allons prouver que $\psi^{-1}(\theta_0)$ génère le groupe G. Pour cela nous devons montrer que pour tout $g \in G$, il existe un entier k tel que $g = \psi^{-1}(\theta_0)^k$.

Soient $g_1 \in \mathrm{SO}(2)$ et $\theta_1 = \psi(g_1)$. Si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\theta_1 = k\theta_0$, alors le résultat est prouvé. Supposons donc que $\theta_1 = \lambda\theta_0$ avec λ non entier. Nous allons en déduire une contradiction.

Soit k la partie entière de λ (définition 1.594). Vu que φ est un morphisme de groupes, en utilisant la formule de la proposition 18.9(2) nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}\big(e^{i(\theta_1 - k\theta_0)}\big) &= \varphi^{-1}\big(e^{i\theta_1}e^{-ik\theta_0}\big) && (18.382a)\\ &= \varphi^{-1}(e^{i\theta_1})\varphi^{-1}(e^{-ik\theta_0}) && (18.382b)\\ &= \varphi^{-1}(e^{i\theta_1})\varphi^{-1}(e^{t\theta_0})^k && (18.382c)\\ &\in G. && (18.382d)\end{aligned}$$

Nous avons donc $\theta = \theta_1 - k\theta_0 \in \psi(G)$. Mais en utilisant le lemme 1.596,

$$\theta - \theta_0 = \theta_1 - (k+1)\theta_0 < \theta_1 - \lambda\theta_0 = 0. \tag{18.383}$$

Cela signifie que $\theta < \theta_0$, et contredit la minimalité de θ_0. □

18.10.10 Angle orienté

Avant d'aborder la classification des isométries, nous devons parler de l'angle entre deux droites. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux droites, alors il est bien clair que deux angles peuvent prétendre être « l'angle entre ℓ_1 et ℓ_2 ». De plus chacun de ces deux angles sont doubles parce que si α peut prétendre être l'angle entre ℓ_1 et ℓ_2, alors $-\alpha$ peut également y prétendre.

Remarque 18.142.
Nous ne parlons pas de l'angle entre ℓ_1 et ℓ_2 mais bien de l'angle *de* ℓ_1 *à* ℓ_2. L'ordre des droites est important.

18.143.
Pour la suite, $R_O(\alpha)$ est la rotation d'angle α autour du point O tandis que $R(\alpha)$ est la rotation d'angle α autour de l'origine.

PROPooDWIMooQPkobw

Proposition 18.144 ([614]).
Si u et v sont des vecteurs unitaires[38] *de $\mathbb{R}^2$ alors il existe une unique rotation*[39] *f telle que $f(u) = v$.*

Démonstration. C'est la proposition 18.123 appliquée à $O = (0, 0)$. □

Remarque 18.145.
Notons l'unicité. Nous ne faisons pas de différence entre R_θ et $R_{\theta+2\pi}$ et les autres $R_{\theta+2k\pi}$. En particulier si une rotation T est donnée, dire « $T = R_\theta$ » ne définit pas un nombre θ de façon univoque. Par contre ça définit une classe modulo 2π, c'est-à-dire un élément $\theta \in \mathbb{R}/2\pi$.

Nous avons déjà défini le groupe SO(2) en la définition 8.45 et nous avons déterminé ses matrices dans $\mathbb{R}^2$ en le lemme 18.135.

[37] Définition 1.440.
[38] De norme 1.
[39] Définition 18.117.

La proposition 18.144 donne une application

$$T\colon S^1\times S^1\to \mathrm{SO}(2). \tag{18.384}$$

Et nous avons une relation d'équivalence sur $S^1\times S^1$ donnée par $(u,v)\sim(u',v')$ si et seulement si il existe $g\in\mathrm{SO}(2)$ telle que $g(u)=u'$ et $g(v)=v'$.

DEFooVBKIooWlHvod

Définition 18.146 (Angle orienté[614])**.**
*Les classes de $S^1\times S^1$ pour cette relation d'équivalence sont les **angles orientés de vecteurs**. Nous notons $[u,v]$ la classe de (u,v).*

PROPooIWJQooGQJBWR

Proposition 18.147.
Nous avons $T(u,v)=T(u',v')$ si et seulement si $(u,v)\sim(u',v')$.

Démonstration. En utilisant la commutativité du groupe $\mathrm{SO}(2)$ nous avons équivalence entre les affirmations suivantes :

- $(u,v)\sim(u',v')$
- $T(u,u')=T(v,v')$
- $T(u,u')\circ T(u',v)=T(v,v')\circ T(u',v)$
- $T(u,v)=T(u',v')$.

□

Proposition 18.148.
Nous avons une bijection

$$\begin{aligned} S\colon \frac{S^1\times S^1}{\sim}&\to \mathrm{SO}(2)\\ [u,v]&\mapsto T(u,v). \end{aligned} \tag{18.385}$$

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **S est bien définie** En effet si $[u,v]=[z,t]$ alors $T(u,v)=T(z,t)$.

(2) **Injectif** Si $S[u,v]=S[z,t]$ alors $T(u,v)=T(z,t)$, qui implique $(u,v)\sim(z,t)$ par la proposition 18.147.

(3) **Surjectif** Nous avons $R_\theta=T(u,R_\theta u)$.

□

Définition 18.149 (Somme d'angles orientés[614])**.**
Si $[u,v]$ et $[z,t]$ sont des angles orientés, nous définissons la somme par

$$[u,v]+[z,t]=S^{-1}\Big(S[u,v]\circ S[z,t]\Big). \tag{18.386}$$

LEMooWISVooYsStJp

Lemme 18.150.
Quelques propriétés des angles plats liées à la somme.

(1) $(S^1\times S^1)/\sim$ est un groupe commutatif.

ITEMooBKTFooWbEvIU

(2) Relations de Chasles :

$$[u,v]+[v,w]=[u,w]. \tag{18.387}$$

(3) $-[u,v]=[v,u]$.

Démonstration. Pour la relation de Chasles, ça se base sur la propriété correspondante sur T :

$$\begin{aligned} [u,v]+[v,w]&=S^{-1}\Big(T(u,v)\circ T(v,w)\Big) && \text{(18.388a)}\\ &=S^{-1}\big(T(u,w)\big) && \text{(18.388b)}\\ &=[u,w]. && \text{(18.388c)} \end{aligned}$$

Pour l'inverse, la vérification est que

$$[u,v]+[v,u]=[u,u]=0. \tag{18.389}$$

□

DEFooFLGNooCZUkHY

Définition 18.151.
*La **mesure** de l'angle orienté $[u, v]$ est $[\theta]_{2\pi}$ si $T[u, v] = R_\theta$.*

Notons dans cette définition qu'écrire $T[u, v] = R_\theta$ dans $\mathrm{SO}(2)$ ne définit pas θ, mais seulement sa classe modulo 2π. C'est pour cela que la mesure de l'angle orienté n'est également définie que modulo 2π.

Pour la suite nous allons nous intéresser à des vecteurs qui ont, dans l'idée, un point de départ et un point d'arrivée. Si $A, B \in \mathbb{R}^2$ nous notons

$$\overrightarrow{AB} = \frac{B - A}{\|B - A\|}. \tag{18.390}$$

C'est le vecteur unitaire dans la direction « de A vers B ».

THOooQDNKooTlVmmj

Théorème 18.152 (Théorème de l'angle inscrit[615])**.**
Soit un cercle Γ de centre O et trois points distincts $A, B, M \in \Gamma$. Alors

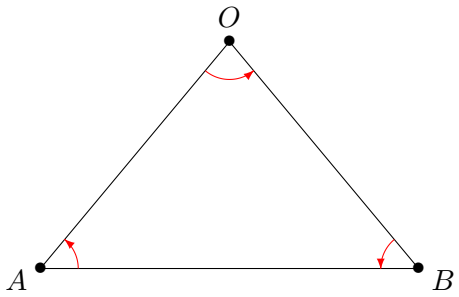
$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \in (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})_{2\pi} \tag{18.391}$$

où l'indice 2π indique la classe modulo 2π.

Démonstration. Le triangle MOA est isocèle en O, donc les angles à la base sont égaux. Et de plus la somme des angles est dans $[\pi]_{2\pi}$. Bon, entre nous, nous savons que la somme des angles est exactement π, mais comme nous n'avons pas défini les angles autrement que modulo π, nous ne pouvons pas dire mieux. Donc

$$2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \in [\pi]_{2\pi}. \tag{18.392}$$

Il faut être sûr de l'orientation de tout cela. Le nombre $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$ est l'angle qui sert à amener $\overrightarrow{AB}$ sur $\overrightarrow{AO}$. Vu que nous l'avons choisi dans le sens trigonométrique, il faut bien prendre les autres dans le sens trigonométrique, et utiliser $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et non $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.



De la même manière sur le triangle MOB nous écrivons

$$2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) \in [\pi]_{2\pi}. \tag{18.393}$$

Nous faisons la différence entre les deux équations en remarquant que la différence de deux représentants de $[\pi]_{2\pi}$ est un représentant de $[0]_{2\pi}$ et en nous souvenant que $-(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB})$ et les relations de Chasles du lemme 18.150(2) nous avons :

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \in [0]_{2\pi}. \tag{18.394}$$

□

18.153.
Comment exprimer le fait qu'un angle orienté soit égal à θ modulo π alors que les angles orientés sont des classes modulo 2π ? Nous ne pouvons certainement pas écrire

$$(u, v) = [\theta]_\pi \tag{18.395}$$

parce que (u, v) est un élément de $S^1 \times S^1$ alors que $[\theta]_\pi$ est un ensemble de nombres. Nous pouvons écrire

$$[u, v] \subset [\theta]_\pi. \tag{18.396}$$

C'est cohérent parce que nous avons des deux côtés des ensembles de nombres. Les opérations permises sont l'égalité ou l'inclusion. L'égalité entre les deux ensembles n'est pas possible parce que la différence minimale ente deux éléments dans $[u,v]$ est 2π alors que celle dans $[\theta]_\pi$ est π.

Si u et v forment un angle droit, nous avons

$$[u,v]=\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{18.397}$$

Et cela est bien un sous-ensemble de $[\pi/2]_\pi$.

Pour exprimer que deux angles orientés diffèrent de π nous devrions écrire :

$$[u,v]\subset[a,b]_\pi \tag{18.398}$$

où le membre de droite signifie la classe modulo π d'un représentant de $[a,b]$.

Nous allons cependant nous permettre d'écrire

$$[u,v]=[a,b]_\pi \tag{18.399}$$

voire carrément

$$(u,v)=(a,b)_\pi. \tag{18.400}$$

Cette dernière égalité devant être comprise comme voulant dire que l'angle pour passer de u à v est, soit le même que celui pour aller de a à b, soit ce dernier, plus π.

THOooUDUGooTJKDpO

Théorème 18.154 ([615]).
Soient 4 points distincts du plan A,B,C,D. Ils sont alignés ou cocycliques[40] *si et seulement si*

$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})_\pi. \tag{18.401}$$

Nous allons seulement démontrer l'implication directe.

Démonstration. Si les quatre points sont alignés nous avons $[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}]=[0]_{2\pi}$ et $[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}]=[0]_{2\pi}$. En particulier nous avons

$$[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}]=[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}] \tag{18.402}$$

et a fortiori l'égalité modulo π au lieu de 2π.

Nous nous relâchons en termes de notations. Si les quatre points sont cocycliques, nous pouvons utiliser le théorème de l'angle inscrit 18.152 dans les triangles ABC et ADB :

$$2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})_{2\pi} \tag{18.403a}$$
$$2(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})_{2\pi}, \tag{18.403b}$$

ce qui donne $2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=2(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})_{2\pi}$ et donc

$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})_\pi. \tag{18.404}$$

Comme annoncé, nous ne faisons pas la preuve dans l'autre sens ; elle peut être trouvée dans [615]. □

EXooOXAAooZMdDfP

Exemple 18.155.
À propos de groupe engendré et de générateur[41]. Soit G le groupe des rotations d'angle[42] $k\pi/5$ (avec k entier). Ce groupe est constitué des « dixièmes de tour », puisque $\frac{k\pi}{5}=\frac{2k\pi}{10}$.

La rotation d'angle $2\pi/5$ n'est pas génératrice parce qu'elle n'engendre que des « cinquièmes de tour » : $4\pi/5$, $6\pi/5$, $8\pi/5$ et l'identité.

Par contre, la rotation d'angle $\pi/5$ est génératrice. △

[40] C'est-à-dire sur un même cercle.
[41] Définition 1.439 et 1.440
[42] Voir la définition 18.151.

18.10.11 Angles et nombres complexes

SUBSECooKNUVooUBKaWm

Les nombres complexes peuvent être repérés par une norme et un angle, ce qui en fait un terrain propice à l'utilisation des angles orientés. Nous en ferons d'ailleurs usage dans $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ pour parler d'alignement, de cocyclicité et de birapport dans la proposition 23.88.

Soient deux éléments $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Nous les écrivons sous la forme $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$; remarquons que cela ne définit θ_i qu'à 2π près. Nous avons

$$[z_1, z_2] = [\theta_2 - \theta_1]_{2\pi}. \tag{18.405}$$

Soient maintenant $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Nous écrivons $\overrightarrow{ab}$ le vecteur unitaire dans le sens « de a vers b », c'est-à-dire un multiple positif bien choisi du nombre $b-a$. Nous notons θ_{ab} l'argument du nombre complexe $b-a$, et nous avons encore

$$[\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{cd}] = [\theta_{ab} - \theta_{cd}]. \tag{18.406}$$

Avec toutes ces notations, ce qui est pas mal, c'est que les produits et quotients de nombres complexes se comportent très bien par rapport aux angles : l'argument de a/b est $\theta_a - \theta_b$ et en particulier l'argument de

$$\frac{a-b}{c-d} \tag{18.407}$$

est dans la classe de l'angle orienté

$$[\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{dc}]. \tag{18.408}$$

DEFooUPUUooKAPFrh

Définition 18.156 (Angle avec 3 points)**.**
Soient trois points $A, O, B \in \mathbb{R}^2$. Voici comment nous définissons l'angle $\widehat{AOB}$; de façon informelle, c'est l'angle de la rotation qui permet d'aller de A vers B.

- *Nous nous mettons en l'origine : $A' = A - O$ et $B' = B - O$.*
- *Nous normalisons : $A'' = A'/\|A'\|$ et $B'' = B'/\|B'\|$.*
- *Soit f, l'unique rotation telle que $f(A'') = B''$ (proposition 18.144).*
- *Soit θ l'unique élément de $[0, 2\pi[$ tel que la matrice de f dans la base canonique soit*

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{18.409}$$

  par la proposition 18.138.

- *L'angle $\widehat{AOB}$ est ce nombre θ.*

Nous noterons également l'angle $\widehat{AOB}$ par $\operatorname{angle}(A, O, B)$.

Nous voyons que l'angle est toujours un nombre entre 0 et 2π. Par abus de notation, nous admettrons de temps en temps, de parler d'angle en dehors de cet intervalle.

DEFooMAKWooGRutOk

Définition 18.157 (Angle dans $\mathbb{C}$)**.**
Si $a, b, c \in \mathbb{C}$, nous définissons l'angle $\operatorname{angle}(a, b, c) = \operatorname{angle}\big(s(a), s(b), s(c)\big)$ *où*

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^2 \\ x + iy &\mapsto (x, y), \end{aligned} \tag{18.410}$$

et le membre de droite étant défini par 18.156.

Avec cette définition, la multiplication dans $\mathbb{C}$ par un élément de S^1 revient à une rotation. C'est le lemme suivant.

LEMooUFOHooWdgIvO

Lemme 18.158 ([1])**.**
Soit

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^2 \\ x + iy &\mapsto (x, y). \end{aligned} \tag{18.411}$$

Nous avons

$$s(e^{i\xi} z) = R_0(\xi) s(z) \tag{18.412}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Nous écrivons $z = re^{i\theta}$ comme l'autorise la proposition 18.63. En d'autres termes, $z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$ et donc

$$s(z) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big). \tag{18.413}$$

D'autre part, la proposition 18.9 donne $e^{i\xi}z = re^{i(\theta+\xi)}$, et donc

$$s(e^{i\xi}z) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\xi) \\ r\sin(\theta+\xi) \end{pmatrix}. \tag{18.414}$$

La conclusion est un calcul :

$$rR(\xi)\big(\cos(\theta),\sin(\theta)\big) = r\begin{pmatrix} \cos(\xi) & -\sin(\xi) \\ \sin(\xi) & \cos(\xi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{prop. 18.138} \tag{18.415a}$$

$$= r\begin{pmatrix} \cos(\xi)\cos(\theta) - \sin(\xi)\sin(\theta) \\ \sin(\xi)\cos(\theta) + \cos(\xi)\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{18.415b}$$

$$= r\begin{pmatrix} \cos(\xi+\theta) \\ \sin(\xi+\theta) \end{pmatrix} \quad \text{lemme 18.14} \tag{18.415c}$$

$$= s(e^{i\xi}z). \tag{18.415d}$$

□

LEMooXMYDooRrNblP

Lemme 18.159.
Pour tout $v \in S^1$, l'application

$$\begin{aligned} s\colon [0,2\pi[&\to S^1 \\ \theta &\mapsto R(\theta)v \end{aligned} \tag{18.416}$$

est une bijection.

LEMooMFXWooGymSoF

Lemme 18.160 ([1]).
Si les points 0, $R(\theta_1)v$ et $R(\theta_2)v$ sont alignés, avec $\theta_1 < \theta_2$ dans $[0,2\pi[$, alors $\theta_2 \in \{\theta_1, \theta_1+\pi\}$.

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $\|v\| = 1$. Étant donné que $R(\theta_2)v$ est sur la droite contenant 0 et $R(\theta_1)v$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$R(\theta_2)v = \lambda R(\theta_1)v. \tag{18.417}$$

Vu que $R(\theta)$ est une isométrie, nous avons $\lambda = \pm 1$. Si $\lambda = 1$, alors nous avons $R(\theta_1)v = R(\theta_2)v$ et donc $\theta_1 = \theta_2$ par le lemme 18.159.

Si $\lambda = -1$, alors en remarquant que $R(\pi)v = -v$, nous avons $R(\theta_1+\pi)v = R(\theta_1)R(\pi)v = -R(\theta_1)v$. Donc le lemme 18.159 nous dit que $\theta_1 + \pi = \theta_2$. □

DEFooEGKOooRPGOAs

Lemme-Définition 18.161 (Angle entre deux droites[1]).
Soient deux droites ℓ_1 et ℓ_2 de $\mathbb{R}^2$ sécantes au point $A \in \mathbb{R}^2$.

Il existe un unique $\theta_0 \in [0,\pi[$ tel que[43] *$R_A(\theta_0)x \in \ell_2$ pour tout $x \in \ell_1$.*

*Cet angle θ_0 est l'**angle** de ℓ_1 à ℓ_2.*

Démonstration. Nous considérons le vecteur v tel que $\ell_1 = \{A + tv\}_{t\in\mathbb{R}}$, ainsi qu'un point arbitraire $x_0 = A + \lambda v$ sur ℓ_1. Nous allons montrer qu'il existe un unique $\theta_\lambda \in]0,\pi[$ tel que $R_A(\theta_\lambda)x_0 \in \ell_2$. Ensuite nous allons montrer que $\theta_{\lambda_1} = \theta_{\lambda_2}$ pour tout λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$.

Nous considérons une application affine

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto u(x) + \alpha \end{aligned} \tag{18.418}$$

avec $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $\ell_2 = \ker(f)$ (proposition 12.153). Nous supposons que $f(x_0) > 0$ pour fixer les idées.

Nous utilisons la formule (18.334) pour R_A ; pour tout θ nous avons

$$R_A(\theta)(A+\lambda v) = (\tau_A \circ R(\theta) \circ \tau_A^{-1})(A+\lambda v) = \tau_A\big(R(\theta)(\lambda)v\big) = A + \lambda R(\theta)v. \tag{18.419}$$

Nous avons d'une part

$$f(x_0) = f(A+\lambda v) = u(A+\lambda v) + \alpha = u(A) + \alpha + \lambda u(v) = f(A) + \lambda u(v) = \lambda u(v) \tag{18.420}$$

[43] Pour rappel, $R_A(\theta)$ est défini en 18.126.

parce que $f(A) = 0$ du fait que $A \in \ell_2$.

De même, en tenant compte que $R(\pi)v = -v$ nous avons

$$R_A(\pi)x_0 = u(-\lambda v + A) + \alpha = -\lambda u(v). \tag{18.421}$$

Donc $f\big(R_A(\pi)x_0\big) = -f(x_0)$.

Nous avons prouvé qu'en posant

$$\begin{aligned} s\colon [0,\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ \theta &\mapsto R_A(\theta)(A + \lambda v), \end{aligned} \tag{18.422}$$

nous avons $s(0) = A + \lambda v$, $s(\pi) = A - \lambda v$ et que $(f \circ s)(0) > 0$ et $(f \circ s)(\pi) < 0$. Nous pouvons donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 à la fonction continue $f \circ s$. Il existe $\theta_0 \in]0, \pi[$ tel que $(f \circ s)(\theta_0) = 0$.

Pour une telle valeur de θ_0, nous avons $s(\theta_0) \in \ker(f)$ et donc $R_A(\theta_0)x_0 \in \ell_2$.

(1) **Unicité** Nous prouvons que si $R_A(\theta_1)x_0$ et $R_A(\theta_2)x_0$ sont sur ℓ_2, alors $\theta_1 = \theta_2$. Supposons que ce les points A, $R_A(\theta_1)x_0$ et $R_A(\theta_2)x_0$ sont alignés sur ℓ_2. Alors les points 0, $R(\theta_1)v$ et $R(\theta_2)v$ sont alignés, et donc le lemme 18.160 nous assure que $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ ou que $\theta_1 = \theta_2$. La possibilité $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ est exclue parce que θ_1 et θ_2 sont dans $]0, \pi[$. Donc $\theta_1 = \theta_2$.

Nous avons vu qu'il existe une unique angle, que nous notons θ_λ tel que $R_A(\theta_\lambda)(A + \lambda v) \in \ell_2$.

(2) **Petite note au passage** La droite ℓ_2 est l'ensemble

$$\ell_2 = \{A + tR(\theta_\lambda)v\}_{t \in \mathbb{R}}. \tag{18.423}$$

(3) **Ce θ_λ fonctionne sur tout ℓ_1** Tout élément de ℓ_1 peut être écrit sous la forme $x_0 + \mu v$. Nous prouvons à présent que si $x_1 = x_0 + \mu v$, alors $R_A(\theta)x_1 \in \ell_2$. Nous avons

$$\begin{aligned} R_A(\theta_\lambda)v &= R_A(\theta_\lambda)(x_0 + \mu v) && (18.424a)\\ &= R_A(\theta_\lambda)\big(A + (\lambda + \mu)v\big) && (18.424b)\\ &= R(\theta_\lambda)\big((\lambda + \mu)v\big) + A && (18.424c)\\ &= (\lambda + \mu)R(\theta_\lambda)v + A. && (18.424d) \end{aligned}$$

Donc cela est dans ℓ_2.

□

PROPooKVSHooRODGWE

Proposition 18.162 ([1]).
Les angles sont invariants sous les translations.

Plus précisément, si $A, B, S, v \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\widehat{T_v(A)T_v(S)T_v(B)} = \widehat{ASB} \tag{18.425}$$

où $T_v(X) = X + v$.

Démonstration. Nous notons $X_v = X + v$. Nous avons $A'_v = A_v - S_v = (A + v) - (S + v) = A - S = A''$. Donc les vecteurs A'' et B'' à partir desquels est calculé $\widehat{ASB}$ sont les mêmes que les vecteurs A''_v et B''_v qui servent à calculer $\widehat{T_v(A)T_v(S)T_v(B)}$. □

PROPooYWKJooRjybUJ

Proposition 18.163 ([1]).
Les angles sont invariants par rotations, c'est-à-dire que si $A, B, S \in \mathbb{R}^2$ et si R_θ est une rotation, alors

$$\widehat{ASB} = \widehat{R_\theta(A)R_\theta(S)R_\theta(B)}. \tag{18.426}$$

Démonstration. Pour être plus concis, nous écrivons A_θ for $R_\theta(A)$ et de même pour B et S. Afin de calculer l'angle $\widehat{R_\theta(A)R_\theta(S)R_\theta(B)}$, nous définissons

$$\begin{cases} A'_\theta = A_\theta - S_\theta & (18.427a)\\ S'_\theta = 0 & (18.427b)\\ B'_\theta = B_\theta - S_\theta. & (18.427c) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A''_\theta = \dfrac{A_\theta - S_\theta}{\|A_\theta - S_\theta\|} & \text{(18.428a)} \\ B''_\theta = \dfrac{B_\theta - S_\theta}{\|B_\theta - S_\theta\|}. & \text{(18.428b)} \end{cases}$$

Par définition, l'angle est le α tel que $R_\alpha(A''_\theta) = B''_\theta$. Nous devons prouver que le même α vérifie $R_\alpha(A'') = B''$.

Le fait que R_θ soit une isométrie nous donne déjà

$$\|R_\theta(A) - R_\theta(B)\| = \|A - B\|. \tag{18.429}$$

Ensuite, la relation de définition de α s'écrit

$$\frac{R_\alpha R_\theta(A) - R_\alpha R_\theta(S)}{\|A_\theta - S_\theta\|} = \frac{R_\theta(B) - R_\theta(S)}{\|B_\theta - S_\theta\|}. \tag{18.430}$$

Vu que R_α et R_θ commutent, nous avons

$$R_\theta \frac{R_\alpha(A) - R_\alpha(B)}{\|A - S\|} = R_\theta \frac{B - S}{\|B - S\|}, \tag{18.431}$$

et comme R_θ est inversible, cela donne $R_\alpha(A'') = B''$. □

LEMooJLHGooQIpKIE

Lemme 18.164 ([1]).
Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et une droite ℓ_1. Soit ℓ_2 une droite passant par A et intersectant ℓ_1 en O. Alors

$$\sigma_{\ell_1}(A) = R_O(-2\alpha)A \tag{18.432}$$

où α est l'angle de ℓ_1 à ℓ_2.

Démonstration. Nous allons utiliser des coordonnées autour de O. Il existe un vecteur v tel que

$$A = O + v \tag{18.433}$$

Par définition de l'angle α[44], la droite ℓ_2 s'obtient par rotation d'angle α depuis la droite ℓ_1. Donc le point

$$B = R_O(-\alpha)A \tag{18.434}$$

est sur ℓ_1.

Nous allons prouver que le point

$$D = R_O(-2\alpha)A \tag{18.435}$$

est $D = \sigma_{\ell_1} A$.

Nous commençons par montrer que la droite (DA) est perpendiculaire à ℓ_1, c'est-à-dire que

$$(D - A) \cdot (B - O) = 0. \tag{18.436}$$

En utilisant le fait que

$$R_O(\alpha)(O + X) = O + R(\alpha)X, \tag{18.437}$$

nous avons

$$D - A = R_O(-2\alpha)(O + v) - (O + v) = O + R(-2\alpha)v - O - v = R(-2\alpha)v - v \tag{18.438}$$

et de la même façon,

$$B - O = R(-\alpha)v. \tag{18.439}$$

Notons que tous les O se sont simplifiés et qu'il ne reste que des rotations usuelles. En utilisant le fait que $R(\alpha)$ est une isométrie, nous pouvons alors calculer

$$\begin{aligned} (D - A) \cdot (B - O) &= \langle R(-2\alpha)v - v, R(-\alpha)v \rangle & \text{(18.440a)} \\ &= \langle R(-\alpha)v - R(\alpha)v, v \rangle. & \text{(18.440b)} \end{aligned}$$

[44] Définition 18.161.

En utilisant la matrice de rotation du lemme 18.135 nous trouvons

$$\big(R(-\alpha)-R(\alpha)\big)v=\begin{pmatrix}2\sin(\alpha)v_2\\-2\sin(\alpha)v_1\end{pmatrix}\tag{18.441}$$

et donc

$$\big\langle\big(R(-\alpha)-R(\alpha)\big)v,v\big\rangle=0.\tag{18.442}$$

Le point D est bien sûr la droite perpendiculaire à ℓ_1 et passant par A. Mais vu que D est obtenu à partir de A par une rotation, le point D est également sur le cercle de rayon $\|OA\|$ et centré en O. Ce cercle possède exactement deux intersections avec cette droite. Le premier est A et le second est $\sigma_{\ell_1}(A)$. Comme D n'est pas A, nous avons $D=\sigma_\ell(A)$. □

18.10.12 Polygone convexe

DEFooBCSKooABKKtR

Définition 18.165 ([616])**.**
*Un **polygone** est une union de segments dans $\mathbb{R}^2$ de la forme*

$$[a_N,a_1]\cup\bigcup_{i=1}^{N}[a_i,a_{i+1}].\tag{18.443}$$

La définition suivante dit ce qu'est un polygone convexe. À mon avis, le théorème de Jordan 27.216 doit permettre de donner une définition plus précise en disant que c'est la partie compacte qui est convexe.

DEFooBCDPooXTpbFq

Définition 18.166.
*Nous disons qu'un polygone est **convexe** si il est la frontière d'une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.*

PROPooFYRMooTqVDEm

Proposition 18.167 ([617])**.**
Un polygone est convexe[45] si et seulement si il est contenu dans le demi-plan de chacun de ses côtés.

PROPooUPPTooZBFvPg

Proposition 18.168.
Les racines de l'unité dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire la partie

$$\{e^{2ik\pi/n},k=0,\dots,n-1\},\tag{18.444}$$

forment un polygone régulier convexe[46].

Démonstration. Nous posons $a_k=e^{2ik\pi/n}$ et $\xi=e^{2i\pi/n}$, de telle sorte que $a_{k+1}=\xi a_k$. Le polygone que nous considérons est celui formé par les segments $[a_i,a_{i+1}]$ avec $i=0,\dots,n-1$. Nous savons que $a_n=a_0$; donc nous pouvons parler seulement de segments de la forme $[a_i,a_{i+1}]$ sans nous soucier du cas particulier $[a_{n-1},a_0]$.

(1) **Longueurs** La longueur d'une arrête est donnée par

$$|a_k-a_{k+1}|=|a_k-\xi a_k|=|a_k||1-\xi|=|1-\xi|\tag{18.445}$$

parce que $|a_k|=1$.

(2) **Angles** Nous avons un calcul utilisant pas mal de propriétés :

$$\begin{aligned}\operatorname{angle}(a_l,a_{l+1},a_{l+2})&=\operatorname{angle}(\xi^la_0,\xi^la_1,\xi^la_2)&&&(18.446a)\\&=\operatorname{angle}\big(s(\xi^la_0),s(\xi^la_1),s(\xi^la_2)\big)&&\text{def. 18.157}&(18.446b)\\&=\operatorname{angle}\big(R_0(\xi^l)s(a_0),R_0(\xi^l)s(a_1),R_0(\xi^l)s(a_2)\big)&&\text{lem. 18.158}&(18.446c)\\&=\operatorname{angle}\big(s(a_0),s(a_1),s(a_2)\big)&&\text{prop. 18.163}&(18.446d)\\&=\operatorname{angle}(a_0,a_1,a_2).&&&(18.446e)\end{aligned}$$

(3) **Convexe** Voici un squelette de preuve[47].

- Utiliser la caractérisation 18.167.

[45] Définition 18.166.
[46] Polygone, définition 18.165, polygone convexe, définition 18.166. En ce qui concerne les angles, formellement c'est la définition 18.157.
[47] Je ne n'ai pas vérifié. Écrivez-moi si vous voyez un problème.

- Tous les sommets sont sur le cercle unité.
- Considérer d, la droite passant par deux points successifs $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$.
- Cette droite définit deux demi-plans.
- La proposition 12.167 devrait permettre de prouver que la partie du cercle entre θ_1 et θ_2 est dans un demi-plan, et le reste dans l'autre demi-plan.
- Il n'y a pas d'autres racines de l'unité entre θ_1 et θ_2. Donc elles sont toutes dans le même demi-plan.
- Les demi-plans étant convexes (lemme 12.161), les arrêtes sont dans le demi-plan.

□

18.10.13 Groupe diédral

18.10.13.1 Définition et générateurs : vue géométrique

DEFooIWZGooAinSOh

Définition 18.169.
*Le **groupe diédral** D_n ($n \geqslant 3$) est le groupe des isométries de $(\mathbb{C}, d)$ laissant invariant l'ensemble*

$$\{e^{2ik\pi/n}, k = 0, \dots, n-1\} \tag{18.447}$$

des racines de l'unité.

18.170.
La proposition 18.168 nous permet de dire que le groupe diédral est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ laissant invariant un polygone régulier à n côtés. C'est un peu pour cela que nous n'avons défini D_n que pour $n \geqslant 3$; et un peu aussi pour une raison technique qui arrivera quand on parlera des générateurs abstraits. Voir 18.179 et ce qui suit.

LEMooCUVPooMZKnzo

Lemme 18.171.
Nous avons

$$D_n \subset O(2, \mathbb{R}). \tag{18.448}$$

Démonstration. Si $f \in D_n$, alors $f(e^{2ik\pi/n})$ doit être l'un des $e^{2ik'\pi/n}$, et puisque f conserve les longueurs dans $\mathbb{C}$, nous devons avoir

$$1 = d(0, e^{2ik\pi/n}) = d\big(f(0), e^{2ik'\pi/n}\big). \tag{18.449}$$

Donc $f(0)$ est à l'intersection de tous les cercles de rayon 1 centrés en les $e^{2ik\pi/n}$, ce qui montre que $f(0) = 0$ (dès que $n \geqslant 3$). Par conséquent notre étude du groupe diédral ne doit prendre en compte que les isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$. En d'autres termes

$$D_n \subset O(2, \mathbb{R}). \tag{18.450}$$

□

PROPooELOIooVJtuZN

Proposition 18.172 ([618]).
Le groupe D_n contient un sous-groupe cyclique d'ordre 2 et un sous-groupe cyclique d'ordre n.

Démonstration. Nous notons s la conjugaison complexe[48]. C'est un élément d'ordre 2 qui est dans D_n parce que

$$s\big(e^{2ki\pi/n}\big) = e^{2(n-k)i\pi/n}. \tag{18.451}$$

EqSUshknP

De la même façon, la rotations d'angle $2\pi/n$, que l'on note r, agit sur les racines de l'unité et engendre le groupe d'ordre n des rotations d'angle $2k\pi/n$. □

Proposition 18.173 ([618]).
Si s est la conjugaison complexe et r la rotation d'angle $2\pi/n$, alors $(sr)^2 = \mathrm{Id}$.

Démonstration. Si $z^n = 1$, alors

$$(srsr)z = (srs)\big(e^{2i\pi/n}z\big) = (sr)\big(e^{-2i\pi/n}\bar{z}\big) = s(\bar{z}) = z. \tag{18.452}$$

□

[48] C'est une réflexion ; la réflexion d'axe $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

PropLDIPoZ

Proposition 18.174 ([618]).
Nous notons s la conjugaison complexe et r la rotation d'angle $2\pi/n$.

ITEMooOEBHooULRmZk

(1) *Le groupe diédral D_n est engendré par s et r.*
(2) *Tous les éléments de D_n s'écrivent sous la forme r^m ou $s \circ r^m$.*

Démonstration. Nous considérons les points $A_0 = 1$ et $A_k = e^{2ki\pi/n}$ avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Par convention, $A_n = A_0$. L'action des éléments s et r sur ces points est

$$r(A_k) = A_{k+1} \tag{18.453a}$$
$$s(A_k) = A_{n-k}. \tag{18.453b}$$

Cette dernière est l'équation (18.451).

Soit $f \in D_n$. Étant donné que c'est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ avec un point fixe (le point 0), f est soit une rotation, soit une réflexion.

Supposons pour commencer qu'un des A_k soit fixé par f. Dans ce cas f a deux points fixes : O et A_k et est donc soit la réflexion d'axe (OA_k), soit l'identité (lemme 18.114). L'identité étant engendrée par s et r, nous supposons que f est la réflexion d'axe (OA_k). Dans ce cas, nous avons $f = s \circ r^{n-2k}$. En effet pour chaque l nous avons

$$(s \circ r^{n-2k})(A_l) = s(A_{l+n-2k}) = A_{n-l+n+2k} = A_{2k-l}. \tag{18.454}$$

Nous voyons que $s \circ r^{n-2k}$ fixe O et A_k, et donc la droite (OA_k). Elle est donc soit la réflexion d'axe (OA_k) soit l'identité. Mais elle n'est pas l'identité parce que elle ne fixe pas tous les A_l.

Nous passons à présent au cas où f ne fixe aucun des A_k.

(1) Supposons que f soit une rotation. Si $f(A_k) = A_m$, alors l'angle de la rotation est

$$\frac{2(m-k)\pi}{n}, \tag{18.455}$$

et donc $f = r^{m-k}$, qui est de la forme demandée.

(2) Supposons à présent que f soit une réflexion d'axe Δ. Cette fois, Δ ne passe par aucun des points A_k, par contre Δ passe par 0. Nous commençons par montrer que Δ doit être la médiatrice d'un des côtés $[A_p, A_{p+1}]$ du polygone. Comme Δ passe par O et n'est aucune des droites (OA_k), cette droite passe par l'intérieur d'un des triangles OA_pA_{p+1} et intersecte donc le côté correspondant.

Notre tâche est de montrer que Δ coupe $[A_p, A_{p+1}]$ en son milieu. Dans ce cas, Δ sera automatiquement perpendiculaire parce que le triangle OA_pA_{p+1} est isocèle en O. Nommons l la longueur des côtés du polygone $P = \Delta \cap [A_p, A_{p+1}]$, $x = d(A_p, P)$ et $\delta = d(A_p, \Delta)$. Vu que f est la symétrie d'axe Δ, nous avons aussi $d\big(f(A_p), \Delta\big) = \delta$ et $d\big(A_p, f(A_p)\big) = 2\delta$. D'autre part, par la définition de la distance, $\delta < x$. Si $x < \frac{l}{2}$, alors $\delta < \frac{l}{2}$ et donc $d\big(A_p, f(A_p)\big) < l$. Or cela est impossible parce que le polygone ne possède aucun sommet à distance plus courte que l de A_p.

De la même manière si $x > \frac{l}{2}$, nous raisonnons avec A_{p+1} pour obtenir une contradiction. Nous en concluons que la seule possibilité est $x = \frac{l}{2}$, et donc $f(A_p) = A_{p+1}$. Montrons alors que $f = s \circ r^{n-2p-1}$. Il faut montrer que c'est une réflexion qui envoie A_p sur A_{p+1}. D'abord c'est une réflexion parce que

$$\det(sr^{n-2p-1}) = \det(s)\det(r^{n-2p-1}) = -1 \tag{18.456}$$

parce que $\det(s) = -1$ alors que $\det(r^k) = 1$ parce que r est une rotation dans $\mathrm{SO}(2)$. Ensuite nous avons

$$s \circ r^{n-2p-1}(A_p) = s(A_{p+n-2p-1}) = s(A_{n-p-1}) = A_{n-(n-p-1)} = A_{p+1}. \tag{18.457}$$

Donc $s \circ r^{n-2p-1}$ est bien une réflexion qui envoie A_p sur A_{p+1}.

□

CorWYITsWW

Corolaire 18.175.
La liste des éléments de D_n est

$$D_n = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\} \tag{18.458}$$

et $|D_n| = 2n$.

Démonstration. Nous savons par la proposition 18.174 que tous les élément de D_n s'écrivent sous la forme r^k ou sr^k. Puisque r est d'ordre n, il ne faut considérer que $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Les éléments 1, r,..., r^{n-1} sont tous différents, et sont (pour des raisons de déterminant) tous différents des sr^k. Les isométries sr^k sont toutes différentes entre elles pour essentiellement la même raison :

$$sr^k(A_p) = s(A_{p+k}) = A_{n-p+k} \tag{18.459}$$

donc si $k \neq k'$, $sr^k(A_p) \neq sr^{k'}(A_p)$. La liste des éléments de D_n est donc

$$D_n = \{1, r, \ldots, r^{n-1}, s, sr, \ldots, sr^{n-1}\} \tag{18.460}$$

et donc $|D_n| = 2n$. □

EXooHNYYooUDsKnm

Exemple 18.176.
Nous considérons le carré $ABCD$ dans $\mathbb{R}^2$ et nous cherchons les isométries de $\mathbb{R}^2$ qui laissent le carré invariant. Nous nommons les points comme sur la figure 18.7. La symétrie d'axe vertical est nommée s et la rotation de 90 degrés est notée r.

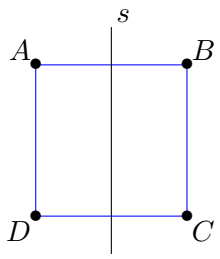


FIGURE 18.7 : Le carré dont nous étudions le groupe diédral. LabelFigIsomCarre

Il est facile de vérifier que toutes les symétries axiales peuvent être écrites sous la forme $r^i s$. De plus le groupe engendré par s agit sur le groupe engendré par r parce que

$$(srs^{-1})(A, B, C, D) = sr(B, A, D, C) = s(A, D, C, B) = (B, C, D, A), \tag{18.461}$$

c'est-à-dire $srs^{-1} = r^{-1}$. Nous sommes alors dans le cadre du corolaire 2.50 et nous pouvons écrire que

$$D_4 = \mathrm{gr}(r) \times_\sigma \mathrm{gr}(s). \tag{18.462}$$

△

18.10.13.2 Table de multiplication

La proposition 18.174 nous indique que tous les éléments de D_n s'écrivent sous la forme $s^\epsilon \circ r^m$ avec $\epsilon \in \{0, 1\}$. Nous allons maintenant écrire la table de multiplication pour de telles transformations de $\mathbb{C}$.

LEMooBNJFooAbhsUa

Lemme 18.177.
Si R est une rotation autour de 0 (dans $\mathbb{C}$), et si s est la conjugaison complexe, alors

$$Rs = sR^{-1} \tag{18.463}$$

Démonstration. Il s'agit seulement d'un calcul en écrivant R comme la multiplication par $e^{i\alpha}$. Nous avons

$$(Rs)z = e^{i\alpha}\bar{z} = s\big(e^{-i\alpha}z\big) = sR^{-1}z. \tag{18.464}$$

□

PROPooPYDLooLgiUjk

Proposition 18.178.
Si $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ et si $k, l \in \mathbb{Z}$ nous avons

$$(s^{\epsilon_1}r^k)(s^{\epsilon_2}r^l) = s^{\epsilon_1+\epsilon_2}r^{l+(-1)^{\epsilon_1}k}. \tag{18.465}$$

Démonstration. Si $\epsilon_2 = 1$ alors nous utilisons le lemme 18.177 pour trouver

$$(s^{\epsilon_1}r^k)(s^{\epsilon_2}r^l) = s^{\epsilon_1}(r^k s^{\epsilon_2})r^l = s^{\epsilon_1}s^{\epsilon_2}r^{-k}r^l. \tag{18.466}$$

La proposition est déjà prouvée dans ce cas.

Passons à $\epsilon_2 = 0$. Dans ce cas nous avons

$$(s^{\epsilon_1}r^k)(s^{\epsilon_2}r^l) = s^{\epsilon_1}r^{k+l}, \tag{18.467}$$

et c'est bon. □

18.10.13.3 Générateurs : vue abstraite

NORMooCCUEooRRENed

18.179.
Nous allons montrer que D_n peut être décrit de façon abstraite en ne parlant que de ses générateurs. Nous considérons un groupe G engendré par des éléments a et b tels que

(1) a est d'ordre 2,

(2) b est d'ordre n avec $n \geqslant 3$,

(3) $abab = e$.

Nous allons prouver que ce groupe doit avoir la même liste d'éléments que celle du corolaire 18.175.

Proposition 18.180 ([618]).
Le groupe G n'est pas abélien.

Démonstration. Nous savons que $abab = e$, donc $abab^{-1} = b^{-2}$, mais $b^{-2} \neq e$ parce que b est d'ordre $n > 2$. Donc $abab^{-1} \neq e$. En manipulant un peu :

$$e \neq abab^{-1} = (ab)(ba^{-1})^{-1} = (ab)(ba)^{-1} \tag{18.468}$$

parce que $a^{-1} = a$. Donc $ab \neq ba$. □

LemKKXdqdL

Lemme 18.181 ([618]).
Pour tout k entre 1 et $n-1$ nous avons

$$\boldsymbol{Ad}(a)b^k = ab^k a^{-1} = ab^k a = b^{-k}. \tag{18.469}$$

Démonstration. Nous faisons la démonstration par récurrence. D'abord pour $k = 1$, nous devons avoir $aba = b^{-1}$, ce qui est correct parce que par construction de G nous avons $abab = e$. Ensuite nous supposons que le lemme tient pour k et nous regardons ce qu'il se passe avec $k+1$:

$$ab^{k+1}a = ab^k ba = \underbrace{ab^k a}_{b^{-k}}\underbrace{aba}_{b^{-1}} = b^{-k}b^{-1} = b^{-(k+1)}. \tag{18.470}$$

□

PROPooVQARooWuKHMZ

Proposition 18.182.
L'élément a n'est pas une puissance de b.

Démonstration. Supposons le contraire : $a = b^k$. Dans ce cas nous aurions

$$e = (ab)(ab) = b^{k+1}b^{k+1} = b^{2k+2} = b^{2k}b^2 = a^2b^2 = b^2, \tag{18.471}$$

ce qui signifierait que b est d'ordre 2, ce qui est exclu par construction. □

PROPooEPVGooQjHRJp

Proposition 18.183 ([618]).
La liste des éléments de G est donnée par

$$G = \{1, b, \cdots, b^{n-1}, a, ab, \ldots, ab^{n-1}\} = \{a^\epsilon b^k\}_{\substack{\epsilon=0,1\\k=0,\ldots,n-1}} \tag{18.472}$$

Les éléments de ces listes sont distincts.

Démonstration. Étant donné que a n'est pas une puissance de b, les éléments 1, a, b,..., b^{n-1} sont distincts. De plus si k et $m = k + p$ sont deux éléments distincts de $\{1, \ldots, n-1\}$, nous avons $ab^k \neq ab^m$ parce que si $ab^k = ab^{k+p}$, alors $a = ab^p$ avec $p < n$, ce qui est impossible. Pour la même raison, $ab^k \neq e$, et $ab^k \neq b^m$.

Au final les éléments $1, a, b, \ldots, b^{n-1}, ab, \ldots, ab^{n-1}$ sont tous différents. Nous devons encore voir qu'il n'y en a pas d'autres.

Par définition le groupe G est engendré par a et b, donc tout élément $x \in G$ s'écrit $x = a^{m_1}b^{k_1}\ldots a^{m_r}b^{k_r}$ pour un certain r et avec pour tout i, $k_i \in \{1, \ldots, n-1\}$ (sauf k_r qui peut être égal à zéro) et $m_i = 1$, sauf m_1 qui peut être égal à zéro. Donc

$$x = a^m b^{k_1} ab^{k_2} a \ldots b^{k_{r-1}} ab^{k_r} \tag{18.473}$$

où m et k_r peuvent éventuellement être zéro. En utilisant le lemme 18.181 sous la forme $b^{k_i}a = ab^{-k_i}$, quitte à changer les valeurs des exposants, nous pouvons passer tous les a à gauche et tous les b à droite pour finir sous la forme $x = a^k b^m$.

Donc non, il n'existe pas d'autres éléments dans G que ceux déjà listés. □

LemooNFRIooPWuikH

Lemme 18.184 ([1]).
Tout élément de G s'écrit de façon unique sous la forme $a^\epsilon b^k$ ou $b^k a^\epsilon$ avec $\epsilon \in \{0,1\}$ et $k \in \{0,\dots,n-1\}$.

Démonstration. Nous commençons par la forme $a^\epsilon b^k$. L'existence est la proposition 18.183. Pour l'unicité nous supposons $a^\epsilon b^k = a^\sigma b^l$ et nous décomposons en 4 cas distincts.

(1) $\epsilon = 0$, $\sigma = 0$ Alors $b^k = b^l$. Mais b étant d'ordre n et k, l étant égaux au maximum à $n-1$, cette égalité implique $k = l$.

(2) $\epsilon = 0$, $\sigma = 1$ Alors $b^k = ab^l$, ce qui donne $a = b^{k-l}$, ce qui est interdit par la proposition 18.182.

(3) $\epsilon = 1$, $\sigma = 0$ Même problème que ci-dessus.

(4) $\epsilon = 1$, $\sigma = 1$ Encore une fois $b^k = b^l$ implique $k = l$.

En ce qui concerne la forme $b^k a^\epsilon$, l'existence est à montrer. Soit l'élément $g = a^\epsilon b^k$; cherchons à le mettre sous la forme $b^l a^\sigma$. Si $\epsilon = 0$ c'est évident. Sinon $\epsilon = 1$ et nous avons par le lemme 18.181

$$ab^k = b^{-k}a^{-1} = b^{-k}b^n a = b^{-k}a. \tag{18.474}$$

En ce qui concerne l'unicité, nous distinguons 4 cas pour $b^k a^\epsilon = b^l a^\sigma$. Comme précédemment ils se traitement exactement comme précédemment. □

THOooYITHooTNTBuG

Théorème 18.185.
Les groupes G et D_n sont isomorphes.

Démonstration. Nous utilisons l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon G &\to D_n \\ a^k b^m &\mapsto s^k r^m. \end{aligned} \tag{18.475}$$

C'est évidemment bien défini et bijectif, mais c'est également un morphisme parce que si nous calculons ψ sur un produit, nous devons comparer

$$\psi\big(a^{k_1}b^{m_1}a^{k_2}b^{m_2}\big) \tag{18.476}$$

EqBULPjlp

avec

$$\psi\big(a^{k_1}b^{m_1}\big)\psi\big(a^{k_2}b^{m_2}\big) = s^{k_1}r^{m_1}s^{k_2}r^{m_2}. \tag{18.477}$$

EqIVEIphI

Vu que D_n et G ont les mêmes propriétés qui permettent de permuter a et b ou s et r, l'expression à l'intérieur du ψ dans (18.476) se simplifie en $a^k b^m$ avec les même k et m que l'expression à droite dans (18.477) et se simplifie en $s^k r^m$. □

Corolaire 18.186.
Toutes les propriétés démontrées pour G sont vraies pour D_n. En particulier, avec quelques redites :

(1) Le groupe D_n peut être défini comme étant le groupe engendré par un élément s d'ordre 2 et un élément r d'ordre $n-1$ assujettis à la relation $srsr = e$.

(2) Le groupe D_n n'est pas abélien.

(3) Pour tout $k \in \{1,\dots,n-1\}$ nous avons $sr^k s = r^{-k}$.

(4) L'élément s ne peut pas être obtenu comme une puissance de r.

(5) La liste des éléments de D_n est

$$D_n = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\} \tag{18.478}$$

(6) Le groupe diédral D_n est d'ordre $2n$.

Proposition 18.187.
En posant $C_n = \{r^k\}_{k=0,\dots,n-1}$ et $C_2 = \{a^\epsilon\}_{\epsilon=0,1}$, nous pouvons exprimer D_n comme le produit semi-direct

$$D_n = C_n \times_\rho C_2 \tag{18.479}$$

où ρ désigne l'action adjointe.

Démonstration. L'isomorphisme est :

$$\begin{aligned}\psi\colon C_n \times_\rho C_2 &\to D_n\\ (b^k, a^\epsilon) &\mapsto b^k a^\epsilon.\end{aligned} \tag{18.480}$$

(1) **Action adjointe** L'application $\rho_{a^\epsilon} = \mathbf{Ad}(a^\epsilon)$ est toujours un morphisme. Comme a^ϵ est, soit e, soit a, nous allons nous restreindre à a et oublier l'exposant ϵ. Il faut montrer que $\mathbf{Ad}(a) \in \mathrm{Aut}(C_n)$. En utilisant le lemme 18.181,

$$\mathbf{Ad}(a)b^k = ab^k a^{-1} = b^{-k} = b^{n-k}. \tag{18.481}$$

L'application $\mathbf{Ad}(a)\colon C_n \to C_n$ est donc bijective et homomorphique. Ergo isomorphisme.

(2) **Injectif** Si $\psi(b^k, a^\epsilon) = \psi(b^l, a^\sigma)$, alors par unicité du lemme 18.184 nous avons $k = l$ et $\epsilon = \sigma$.

(3) **Surjectif** Par la partie « existence » du lemme 18.184.

(4) **Morphisme** Lorqu'on prend deux sous-groupes d'un même groupe (ici le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$), et que l'on tente de faire un produit semi-direct en utilisant l'action adjointe, nous avons toujours un morphisme. Dans notre cas, le calcul est :

$$\psi\big((b^k, a^\epsilon)(b^l, a^\sigma)\big) = b^k \rho_{a^\epsilon}(b^l) a^{\epsilon+\sigma} = b^k a^\epsilon b^l a^{-\epsilon} a^{\epsilon+\sigma} = b^k a^\epsilon b^l a^\sigma = \psi(b^k, a^\epsilon)\psi(b^l, a^\sigma). \tag{18.482}$$

□

18.10.13.4 Classes de conjugaison

subsubsecZQnBcgo

Pour les classes de conjugaison du groupe diédral nous suivons [619].

D'abord pour des raisons de déterminants[49], les classes des éléments de la forme r^k et de la forme sr^k ne se mélangent pas. Nous notons $C(x)$ la classe de conjugaison de x, et $y \cdot x = yxy^{-1}$.

Les relations que nous allons utiliser sont

$$sr^k s = r^{-k} \tag{18.483a}$$

$$rs = sr^{-1} = sr^{n-1}. \tag{18.483b}$$

La classe de conjugaison qui ne rate jamais est bien entendu $C(1) = 1$. Nous commençons les vraies festivités avec $C(r^m)$. D'abord $r^k \cdot r^m = r^m$, ensuite

$$(sr^k) \cdot r^m = sr^k r^m r^{-k} s^{-1} = sr^m s^{-1} = r^{-m}. \tag{18.484}$$

Donc

$$C(r^m) = \{r^m, r^{-m}\}. \tag{18.485}$$ EqVFfFxgi

À ce niveau il faut faire deux remarques. D'abord si $m > \frac{n}{2}$, alors $C(r^m)$ est la classe de C^{n-m} avec $n-m < \frac{n}{2}$. Donc les classes que nous avons trouvées sont uniquement à lister avec $m < \frac{n}{2}$. Ensuite si $m = \frac{n}{2}$ alors $r^m = r^{-m}$ et la classe est un singleton. Cela n'arrive que si n est pair.

Nous passons ensuite à $C(s)$. Nous avons

$$r^k \cdot s = r^k s r^{-k} = ssr^k sr^{-k} = sr^{-k}r^{-k} = sr^{n-2k}, \tag{18.486}$$

et

$$(sr^k) \cdot s = \underbrace{sr^k s}_{r^{-k}} r^{-k} s^{-1} = r^{-2k} s = r^{n-2k} s = sr^{(n-1)(n-2k)} = sr^{n^2-2kn-n+2k} = sr^{2k}. \tag{18.487}$$

donc

$$C(s) = \{sr^{n-2k}, sr^{2k}\}_{k=0,\dots,n-1}. \tag{18.488}$$

Ici aussi l'écriture n'est pas optimale : peut-être que pour certains k il y a des doublons. Nous reportons l'écriture exacte à la discussion plus bas qui distinguera n pair de n impair. Notons juste que si n est pair, l'élément sr n'est pas dans la classe $C(s)$.

Nous en faisons donc à présent le calcul en gardant en tête le fait qu'il n'a de sens que si n est pair. D'abord

$$s \cdot (sr) = ssrs = rs = sr^{n-1}. \tag{18.489}$$

Ensuite

$$(sr^k) \cdot (sr) = sr^k srr^{-k} s = r^{-2k+1} s = sr^{2k-1}. \tag{18.490}$$

Avec $k = \frac{n}{2}$, cela rend $s \cdot (sr)$, donc pas besoin de le recopier. Nous avons

$$C(sr) = \{sr^{2k-1}\}_{k=1,\dots,n-1}. \tag{18.491}$$

[49] Vous notez qu'ici nous utilisons un argument qui utilise la définition de D_n comme isométries de $\mathbb{R}^2$. Si nous avions voulu à tout prix nous limiter à la définition « abstraite » en termes de générateurs, il aurait fallu trouver autre chose.

18.10.13.5 Le compte pour n pair

SubsubsecROVmHuM

Si n est pair, nous avons les classes

$$C(1) = \{1\} \qquad 1 \text{ élément} \tag{18.492a}$$
$$C(r^m) = \{r^m, r^{-m}\} = \{r^m, r^{n-m}\} \qquad \text{pour } 0 < m < \frac{n}{2} \qquad \frac{n}{2} - 1 \text{ fois 2 éléments} \tag{18.492b}$$
$$C(r^{n/2}) = \{r^{n/2}\} \qquad 1 \text{ élément} \tag{18.492c}$$
$$C(s) = \{sr^{2k}\}_{k=0,\dots,\frac{n}{2}-1} \qquad \frac{n}{2} \text{ éléments} \tag{18.492d}$$
$$C(sr) = \{sr^{2k+1}\}_{k=0,\dots,\frac{n}{2}-1} \qquad \frac{n}{2} \text{ éléments.} \tag{18.492e}$$

Au total nous avons bien listé $2n$ éléments comme il se doit, dans $\frac{n}{2} + 3$ classes différentes.

18.10.13.6 Le compte pour n impair

GJIzDEP

Si n est impair, nous avons les classes

$$C(1) = \{1\} \qquad 1 \text{ élément} \tag{18.493a}$$
$$C(r^m) = \{r^m, r^{-m}\} = \{r^m, r^{n-m}\} \qquad \text{pour } 0 < m < \frac{n-1}{2} \qquad \frac{n-1}{2} \text{ fois 2 éléments} \tag{18.493b}$$
$$C(s) = \{sr^k\}_{k=0,\dots,n-1} \qquad n \text{ éléments} \tag{18.493c}$$

Au total nous avons bien listé $2n$ éléments comme il se doit, dans $\frac{n+3}{2}$ classes différentes.

18.10.14 Applications : du dénombrement

18.10.14.1 Le jeu de la roulette

pTqJLY

Soit une roulette à n secteurs que nous voulons colorier en q couleurs[620]. Nous voulons savoir le nombre de possibilités à rotations près. Soit d'abord E l'ensemble des coloriages possibles sans contrainte ; il y a naturellement q^n possibilités. Sur l'ensemble E, le groupe cyclique G des rotations d'angle $2\pi/n$ agit. Deux coloriages étant identiques si ils sont reliés par une rotation, la réponse à notre problème est donnée par le nombre d'orbites de l'action de G sur E qui sera donnée par la formule du théorème de Burnside 2.41.

Nous devons calculer $\text{Card}\big(\text{Fix}(g)\big)$ pour tout $g \in G$. Soit g, un élément d'ordre d dans G. Si g agit sur la roulette, chaque secteur a une orbite contenant d éléments. Autrement dit, g divise la roulette en n/d secteurs. Un élément de E appartenant à $\text{Fix}(g)$ doit colorier ces n/d secteurs de façon uniforme ; il y a $q^{n/d}$ possibilités.

Il reste à déterminer le nombre d'éléments d'ordre d dans G. Un élément de G est donné par un nombre complexe de la forme $e^{2ik\pi/n}$. Les éléments d'ordre d sont les racines primitives[50] d-ièmes de l'unité. Nous savons que –par définition– il y a $\varphi(d)$ telles racines primitives de l'unité. Bref il y a $\varphi(d)$ éléments d'ordre d dans G.

La formule de Burnside nous donne maintenant le nombre d'orbites :

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n} \varphi(d) q^{n/d}. \tag{18.494}$$

Cela est le nombre de coloriage possibles de la roulette à n secteurs avec q couleurs.

18.10.14.2 L'affaire du collier

siOQlG

Nous avons maintenant des perles de q couleurs différentes et nous voulons en faire un collier à n perles. Cette fois non seulement les rotations donnent des colliers équivalents, mais en outre les symétries axiales (il est possible de retourner un collier, mais pas une roulette). Le groupe agissant sur E est maintenant le groupe diédral[51] D_n conservant un polygone à n sommets.

Nous devons séparer le cas n impair, du cas n pair.

Si n est impair, alors les axes de symétries passent par un sommet et par le milieu du côté opposé. Le groupe D_n contient n symétries axiales. Nous avons donc maintenant

$$|G| = 2n. \tag{18.495}$$

[50] Une racine non primitive 8ième de l'unité est par exemple i. Certes $i^8 = 1$, mais $i^4 = 1$ aussi. Le nombre i est d'ordre 4.
[51] Définition 18.169.

Nous écrivons la formule de Burnside

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2n}\sum_{g\in G}\text{Card}\big(\text{Fix}(g)\big). \tag{18.496}$$

Si g est une rotation, le travail est déjà fait. Si g est une symétrie, nous avons le choix de la couleur du sommet par lequel passe l'axe et le choix de la couleur des $(n-1)/2$ paires de sommets. Cela fait

$$qq^{(n-1)/2} = q^{\frac{n+1}{2}} \tag{18.497}$$

possibilités. Nous avons donc

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n} q^{n/d}\varphi(d) + nq^{\frac{n+1}{2}}\right). \tag{18.498}$$

Si n est pair, les choses se compliquent un tout petit peu. En plus de symétries axiales passant par les milieux de deux côtés opposés, il y a les axes passant par deux sommets opposés. Pour colorier un collier en tenant compte d'une telle symétrie, nous pouvons choisir la couleur des deux perles par lesquelles passe l'axe ainsi que la couleur des $(n-2)/2$ paires de perles. Cela fait en tout

$$q^2q^{\frac{n-2}{2}} = q^{\frac{n+2}{2}}. \tag{18.499}$$

Le groupe G contient $n/2$ tels axes.

Notons que cette fois G ne contient plus que $n/2$ symétries passant par un sommet et un côté. L'ordre de G est donc encore $2n$. La formule de Burnside donne

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\varphi(d)q^{n/d} + \frac{n}{2}q^{(n+2)/2} + \frac{n}{2}q^{n/2}\right). \tag{18.500}$$

18.10.15 Classification

THOooRORQooTDWFdv

Théorème 18.188 ([609])**.**
Toute isométrie du plan $(\mathbb{R}^2, d)$ est une composition d'au plus 3 réflexions.

Démonstration. Encore une fois nous décomposons la preuve en fonction du nombre de points fixes.

(1) **Si f n'a pas de point fixe** Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Nous considérons le segment $[x, f(x)]$ et nous nommons l sa médiatrice. Par construction, $f(x) = \sigma_l(x)$. Nous posons $g = \sigma_l \circ f$, et nous avons

$$g(x) = x. \tag{18.501}$$

Donc nous avons $f = \sigma_l \circ g$ avec $x \in \text{Fix}(g)$.

(2) **Si f a un unique point fixe** Soit x cet unique point fixe. Soit $y \neq x$ et l la médiatrice de $[y, f(y)]$. En posant $g = \sigma_l \circ f$ nous avons

$$g(y) = y \tag{18.502}$$

et $g(x) = x$ parce que

$$d\big(x, f(y)\big) = d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y), \tag{18.503}$$

ce qui donne que x est à égale distance de y et de $f(y)$, c'est-à-dire que $x \in l$ et par conséquent $g(x) = (\sigma_l \circ f)(x) = \sigma_l(x) = x$.

Donc g fixe x et y. Par conséquent, g fixe toute la droite (xy).

(3) **Si f fixe une droite** Soit l une droite fixée par f. Alors f est soit σ_l soit l'identité par le lemme 18.114.

(4) **Conclusion**

Nous avons montré que si $\text{Fix}(f)$ a pour dimension m, alors il existe une droite pour laquelle $f = \sigma_l \circ g$ avec $\dim\big(\text{Fix}(g)\big) > m$. Donc il faut au maximum trois pas pour avoir $\dim\big(\text{Fix}(g)\big) = 2$ c'est-à-dire pour avoir $g = \text{Id}$.

□

DEFooJEOYooNwYtuQ

Définition 18.189.
*Une **réflexion glissée** est une transformation du plan de la forme $\tau_v \circ \sigma_\ell$ où le vecteur v est parallèle à la droite ℓ.*

THOooVRNOooAgaVRN

Théorème 18.190 ([609]).
Les isométries du plan $(\mathbb{R}^2, d)$ sont exactement

(1) l'identité (composée de 0 réflexions),

(2) les réflexions,

(3) les translations (composées de 2 réflexions d'axes parallèles),

(4) les rotations (composées de 2 réflexions d'axes non parallèles),

(5) les réflexions glissées (composées de 3 réflexions)

Démonstration. Nous savons déjà que $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ est une composée de 0, 1, 2 ou 3 réflexions.

(1) **Zéro réflexion** Alors c'est l'identité. Ce n'est pas très profond.

(2) **Une réflexion** Alors f est une réflexion. Toujours pas très profond.

(3) **Deux réflexions** Soit $f = \sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2}$. Maintenant ça s'approfondit un bon coup.

Nous supposons d'abord que $\ell_1 /\!\!/ \ell_2$. Dans ce cas nous allons prouver que $f = \tau_{2v}$ où v est le vecteur perpendiculaire à ℓ_1 tel que $\ell_1 + v = \ell_2$. Nous allons utiliser le lemme 18.113 pour montrer que $\sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2} = \tau_{2v}$. Nous avons

$$\ell_1 = \ell_0 + w \tag{18.504a}$$
$$\ell_2 = \ell_0 + w + v \tag{18.504b}$$

où w est un vecteur perpendiculaire à ℓ_1 et ℓ_0 est la droite passant par l'origine et parallèle à ℓ_1 et ℓ_2. Avec cela,

$$\begin{aligned}(\sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2})(x) &= \sigma_{\ell_1}\big(\sigma_{\ell_0}(x) + 2w\big) && (18.505a)\\ &= \sigma_{\ell_0}\big(\sigma_{\ell_0}(x) + 2w\big) + 2(v+w) && (18.505b)\\ &= x + \underbrace{\sigma_{\ell_0}(2w)}_{-2w} + 2v + 2w && (18.505c)\\ &= x + 2v. && (18.505d)\end{aligned}$$

Donc si f est composée de deux réflexions d'axes parallèles, alors f est une translation.

Toujours dans le cas où f est composée de deux réflexions, nous supposons que $f = \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}$ avec ℓ_1 et ℓ_2 non parallèles. Nous notons O le point d'intersection, et nous allons voir que $f = R_O(2\alpha)$, où α est l'angle de ℓ_1 à ℓ_2 donné par le lemme 18.161.

Soit $x \in \ell_1$. Alors

$$f(x) = \sigma_{\ell_2}(x), \tag{18.506}$$

et le lemme 18.164 nous donne un moyen de calculer $\sigma_{\ell_2}(x)$ parce que ℓ_1 est une droite passant par x et coupant ℓ_2 au point O. Le lemme dit que $\sigma_{\ell_2}(x) = R_O(2\alpha)$. Remarque : c'est bien 2α et non -2α parce qu'il s'agit de l'angle de ℓ_2 à ℓ_1 ; il y a inversion des numéros entre ici et l'énoncé du lemme.

Nous avons donc bien $f(x) = R_O(2\alpha)x$ pour $x \in \ell_1$.

Si $y \in \ell_2$ alors

$$f(y) = \sigma_{\ell_2}\big(R_O(-2\alpha)y\big) \tag{18.507}$$

Nous posons $z = \sigma_{\ell_1}(y) = R_O(-2\alpha)y$. Soit la droite ℓ_3 passant par O et z. Puisque $R_O(2\alpha)z = y \in \ell_2$, l'angle de ℓ_3 à ℓ_2 est 2α. Par conséquent

$$\sigma_{\ell_2}(z) = R_O\big(-2\times(-2\alpha)\big)z = R_O(4\alpha)z = R_O(4\alpha)R_O(-2\alpha)y = R_O(2\alpha)y. \tag{18.508}$$

Donc les transformations f et $R_O(2\alpha)$ coïncident pour tous les points des droites ℓ_1 et ℓ_2, qui ne sont pas parallèles. Cela prouve que $f = R_O(2\alpha)$.

(4) **Trois réflexions** Nous écrivons $f = \sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}$. Nous allons transformer cela progressivement en une symétrie glissée en passant par plusieurs étapes :

ITEMooHVYCooPhFMiv

(4a) $f = \sigma_\ell \circ \tau_v$,

ITEMooUKGLooFlCcjt

(4b) $f = \tau_v \circ \sigma_\ell$,

ITEMooWUCWooZSjofe

(4c) $f = \tau_v \circ \sigma_\ell$ avec $v \parallel \ell$.

À chacune de ces étapes, v et ℓ vont changer. La dernière est une réflexion glissée.

Nous commençons par supposer $\ell_2 \parallel \ell_3$. Dans ce cas, $\sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2}$ est une translation, comme nous l'avons déjà vu. Alors $f = \tau_v \circ \sigma_{\ell_1}$ et nous sommes déjà dans le cas (4b).

Nous supposons que ℓ_2 n'est pas parallèle à ℓ_3. Dans ce cas, si $O = \ell_2 \cap \ell_3$ nous avons

$$\sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} = R_O(2\alpha) \tag{18.509}$$

où α est l'angle de ℓ_2 à ℓ_3. En réalité tant que l'angle de ℓ_2' à ℓ_3' est α nous avons

$$\sigma_{\ell_3'} \circ \sigma_{\ell_2'} = \sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} = R_O(2\alpha). \tag{18.510}$$

Nous choisissons ℓ_2' parallèle à ℓ_1, de telle sorte que $\sigma_{\ell_2'} \circ \sigma_{\ell_1}$ soit une translation. Alors nous avons

$$f = \sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell_3'} \circ \sigma_{\ell_2'} \circ \sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell_3} \circ \tau_v. \tag{18.511}$$

où v est le vecteur de la translation en question.

Nous avons donc prouvé que toute composition de trois réflexions peut être écrite soit sous la forme (4a) soit sous la forme (4b).

Nous prouvons à présent que toute transformation de la forme (4a) peut être écrite sous la forme (4b). Plus précisément nous allons prouver que si ℓ est une droite, v un vecteur et ℓ_0 la droite parallèle à ℓ passant par l'origine, alors

$$\sigma_\ell \circ \tau_v = \tau_{\sigma_{\ell_0}(v)} \circ \sigma_l \tag{18.512}$$

D'abord nous savons que $\sigma_\ell(x) = \sigma_{\ell_0}(x) + 2w$ où w est le vecteur tel que $\ell = \ell_0 + w$. Ensuite c'est un simple calcul utilisant le fait que σ_{ℓ_0} est linéaire :

$$(\sigma_\ell \circ \tau_v)(x) = \sigma_l(x + v) = \sigma_{\ell_0}(x) + \sigma_{\ell_0}(v) + 2w, \tag{18.513}$$

et

$$(\tau_{\sigma_{\ell_0}(v)} \circ \sigma_\ell)(x) = \sigma_{\ell_0}(v) + \sigma_\ell(x) = \sigma_{\ell_0}(v) + \sigma_{\ell_0}(x) + 2w. \tag{18.514}$$

L'égalité est prouvée.

Nous montrons maintenant que toute transformation de la forme (4b) peut être mise sous la forme (4c). Soit donc $f = \tau_v \circ \sigma_\ell$ où v et ℓ ne sont pas spécialement parallèles.

Pour cela nous décomposons $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \perp \ell$ et $v_2 \parallel \ell$ et nous posons $\ell' = \ell + \frac{1}{2}v_1$. Nous montrons que

- $\tau_v \circ \sigma_\ell = \tau_{v_2} \circ \sigma_{\ell'}$
- $v_2 \parallel \ell'$.

Pour le deuxième point, $v_2 \parallel \ell$ et bien entendu $\ell' \parallel \ell$. Donc $v_2 \parallel \ell'$.

Soit ℓ_0 la droite parallèle à ℓ et ℓ' et passant par l'origine. Soit aussi le vecteur w tel que $\ell = \ell_0 + w$. Alors nous avons

$$\begin{cases} \sigma_\ell = \sigma_{\ell_0} + 2w & \text{(18.515a)} \\ \sigma_{\ell'} = \sigma_{\ell_0} + 2w + v_1 & \text{(18.515b)} \end{cases}$$

Nous avons

$$(\tau_v \circ \sigma_\ell)(x) = v + \sigma_{\ell_0}(x) + 2w \tag{18.516}$$

et

$$\begin{aligned} (\tau_{v_2} \circ \sigma_{\ell'})(x) &= v_2 + \sigma_{\ell_0}(x) + 2w + v_1 && \text{(18.517a)} \\ &= \sigma_{\ell_0}(x) + v + 2w && \text{(18.517b)} \end{aligned}$$

où dans la dernière ligne, nous avons regroupé $v_1 + v_2 = v$. Et voilà.

□

18.10.16 Classification des isométries de $\mathbb{R}$

Définition 18.191.
*Soit $x \in \mathbb{R}$; nous notons σ_x la **réflexion** par rapport à x, c'est-à-dire*

$$\sigma_x(y) = 2x - y. \tag{18.518}$$

Théorème 18.192 ([609]).
Toute isométrie de $\mathbb{R}$ est composée d'au plus 2 réflexions. Plus précisément toute isométrie de $\mathbb{R}$ est dans une des trois catégories suivantes :

- *l'identité (0 réflexion),*
- *les réflexions,*
- *les translations (2 réflexions)*

Démonstration. Nous divisons la preuve en fonction du nombre de points fixés par l'isométrie $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$.

(1) **f fixe deux points distincts** Alors elle fixe l'espace affine engendré par ces deux points par la proposition 18.102. Donc f fixe tout $\mathbb{R}$, et est l'identité.

(2) **f fixe un unique point** Soit x l'unique point fixé par f et considérons $y \neq x$. Puisque $x = f(x)$ et que f est une isométrie,

$$d\big(x, f(y)\big) = d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y). \tag{18.519}$$

Donc $f(y)$ est à égale distance de x que de y. Autrement dit, $f(y)$ est, soit y, soit $\sigma_x(y)$. Mais comme x est unique point fixe, $f(y) = \sigma_x(y)$. Ce raisonnement étant valable pour tout $y \neq x$, nous avons $f = \sigma_x$.

(3) **f n'a pas de point fixe** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y = \frac{x+f(x)}{2}$. Nous posons $g = \sigma_y \circ f$. Alors x est un point fixe de g parce que

$$g(x) = \sigma_y\big(f(x)\big) = 2y - f(x) = x. \tag{18.520}$$

Donc, soit g est l'identité, soit g est une réflexion (par les points précédents). La possibilité $g = \mathrm{Id}$ est exclue parce que cela donnerait $f = \sigma_y$ alors que f n'a pas de point fixe. Donc g est une réflexion ; et comme x est un point fixe de g nous avons $g = \sigma_x$. Au final

$$f = \sigma_y \circ \sigma_x. \tag{18.521}$$

Montrons que cela implique que f est une translation :

$$\sigma_y\sigma_x(z) = \sigma_y(2x - z) = 2y - 2x + z = z + 2(y - x). \tag{18.522}$$

Donc $\sigma_y \circ \sigma_x$ est la translation de vecteur $2(y - x)$.

□

18.10.17 Isométries du tétraèdre régulier

PROPooHTBIooTJQNZt

Proposition 18.193.
Soient un tétraèdre régulier[52] T ainsi qu'une application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui vérifie

(1) f est affine[53]

(2) f est bijective (sur $\mathbb{R}^3$)

(3) $f(T) \subset T$.

Alors

ITEMooGAVPooVPESod

(1) Il existe une bijection $\alpha\colon \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$ telle que $f(d_i) = d_{\alpha(i)}$.

ITEMooWRINooTlmXyI

(2) Pour la même bijection $\alpha\colon \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$ nous avons $f(a_i) = a_{\alpha(i)}$.

ITEMooGPNPooZiEoLk

(3) Il existe une bijection $\beta\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ telle que $f(s_i) = s_{\beta(i)}$.

[52] Définition 12.180
[53] Définition 8.155.

Autrement dit, f agit comme une permutation[54] *sur l'ensemble des sommets de T.*

Démonstration. Puisque d_i est une droite et que f est affine, l'ensemble $f(d_i)$ est une droite de $\mathbb{R}^3$ (proposition 12.145).

(1) **Pour (1)** Puisque $f(T) \subset T$, la partie $f(a_i)$ contient une infinité de points alignés dans T (parce que a_i contient une infinité de points et f est une bijection de $\mathbb{R}^3$).

Comme le tétraèdre n'a que 6 arrêtes, il y a forcément une des arrêtes qui contient au moins deux points de $f(a_i)$. Soit $a_{\beta(i)}$ une arrête qui contient deux points de $f(a_i)$. En particulier $d_{\alpha(i)}$ contient deux points de $f(a_i)$, et donc de $f(d_i)$. Donc $f(d_i) = d_{\alpha(i)}$.

(2) **Pour (2)** L'ensemble $f(a_i)$ est contenu dans $d_{\alpha(i)} \cap T = a_{\alpha(i)}$ (lemme 12.182). Nommons s_1 et s_2 les deux sommets de T sur a_i. Soit $k \in \{1, 2\}$. Comme les sommets sont sur plusieurs arrêtes, il existe $j \neq i$ tel que $s_k = a_i \cap a_j$. Nous avons alors

$$f(s_k) \in f(a_i) \cap f(a_j) \subset a_{\alpha(i)} \cap a_{\alpha(j)}. \tag{18.523}$$

EQooWJXRooAHVQpW

Mais nous avons déjà vu que les seules intersections des segments sont les sommets (lemme 12.184). Donc $f(s_k)$ est un sommet de T.

Nous avons prouvé que $f(a_i)$ contient deux sommets sur $a_{\alpha(i)}$ donc il contient tout $a_{\alpha(i)}$. Cela prouve que $f(a_i) = f(a_{\alpha(i)})$.

(3) **Pour (3)** Nous avons déjà mentionné, juste en-dessous de (18.523) que l'image d'un sommet doit être un sommet. Nous avons donc une application $\beta\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ telle que $f(s_i) = s_{\beta(i)}$. Puisque f est injective, β est injective. Par principe des tiroirs, cette application doit également être surjective.

□

PROPooVNLKooOjQzCj

Proposition 18.194 (Isométries affines du tétraèdre régulier)**.**
Soient T un tétraèdre régulier et $\mathrm{Isom}(T)$ *son groupe d'isométries affines*[55]*. Alors*

$$\mathrm{Isom}(T) \simeq S_4 \tag{18.524}$$

où S_4 est le groupe des permutations de quatre objets.

Démonstration. Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une bijection affine (ce qui est le cas d'une isométrie affine), alors la proposition 18.193(3) donne une bijection $\beta\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ des sommets de T. Si nous numérotons les sommets x_1,..., x_4, nous obtenons un morphisme de groupe $\varphi\colon \mathrm{Isom}(T) \to S_4$ qui envoie g sur la permutation qui envoie 1 sur le numéro du sommet $g(x_1)$, 2 sur le numéro du sommet $g(x_2)$, etc.

(1) **Le morphisme φ est injectif** Supposons $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Alors $g_1^{-1} \circ g_2$ est une isométrie de $(\mathbb{R}^3, d)$ qui fixe les quatre sommets. Une application affine $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fixant 4 point est l'identité par la proposition 8.157. Donc $g_1^{-1} \circ g_2 = \mathrm{Id}$, ce qui prouve que $g_1 = g_2$. Vous noterez que nous utilisons l'unicité de l'inverse dans un groupe.

(2) **φ est surjectif**

Nous savons que S_4 est engendré par les transpositions (proposition 1.291). Or les transpositions sont dans l'image de φ. En effet, notons les sommets de notre tétraèdre par A, B, C et D et considérons la transposition $A \leftrightarrow B$. Elle est l'image par φ de la réflexion selon le plan σ, médiateur du segment $[A, B]$. Pour nous assurer de cela, nous devons nous assurer que C et D appartiennent à σ. C'est le contenu du lemme 12.185.

(3) **Conclusion** L'application φ est un morphisme bijectif, c'est-à-dire un isomorphisme.

□

[54] Une permutation est une bijection, définition 1.269.
[55] Une isométrie est une isométrie, et une application est affine dans la définition 8.155.

18.10.18 Représentation de S_4 via les isométries du tétraèdre

SUBSECooVEASooDUbsBh

18.195.
Lorsque le tétraèdre a son barycentre en l'origine de $\mathbb{R}^3$, l'isomorphisme $\varphi\colon \mathrm{Isom}(T) \to S_4$ donne une représentation de dimension 3 de S_4. Nous avons calculé les caractères de S_4 en la section 16.5 sans avoir besoin de savoir que l'une des représentations de dimension 3 est celle que nous venons de trouver via le groupe des isométries du tétraèdre. Nous allons cependant également y calculer les caractères de la représentation φ, pour le sport.

Une des représentations trouvées (la représentation ρ_s) peut être vue comme le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries affine du tétraèdre grâce à la proposition 18.194 qui donne un isomorphisme de groupe $S_4 \simeq \mathrm{Iso}(T)$ lorsque T est un tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$.

Si le barycentre de T est situé à l'origine de $\mathbb{R}^3$, alors les éléments de $\mathrm{Isom}(T)$ sont des applications linéaires parce que

- les affinités laissent invariantes les barycentres (proposition 11.43),
- les affinités qui laissent l'origine invariante sont linéaires (corolaire 11.60).

Nous allons à présent calculer la trace de cette représentation, en utilisant le fait que nous la connaissions explicitement. Nous savons que les caractères sont constants sur les classes de conjugaison ; nous allons donc écrire une matrice par classe de conjugaison (qui sont données dans l'exemple 1.287).

Pour tout cela nous allons considérer un tétraèdre dont l'isobarycentre est en $(0,0,0)$ et une base de $\mathbb{R}^3$ formée de trois sommets e_1, e_2 et e_3. Puisque l'isobarycentre des quatre sommets est en $(0,0,0)$, le quatrième sommet est forcément le point de coordonnées $e_4(-1,-1,-1)$, de telle sorte que $e_1+e_2+e_3+e_4=0$.

Les transpositions Quelle isométrie de $\mathbb{R}^3$ permute deux sommets du tétraèdre sans bouger les autres ? Pour permuter les sommets e_1 et e_2 en laissant e_3 et e_4, c'est le symétrie par rapport au plan médiateur de $[e_1,e_2]$. Ce plan passe par les sommets e_3 et e_4, parce que le tétraèdre étant régulier, les points e_3 et e_4 sont équidistants de e_1 et e_2. Le lemme 12.185 dit qu'alors, ces points font partie du plan médiateur.

Dans notre base, la matrice de la transposition précédemment nommée (12) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{18.525}$$

dont la trace est 1. Donc $\chi_s(12)=1$.

Les bitranspositions La bitransposition $(12)(34)$ est le produit des transpositions selon les plans médiateurs de $[e_1,e_2]$ et $[e_3,e_4]$. Ces deux plans sont perpendiculaires, et l'intersection est la droite qui passe par les milieux. Cette droite est perpendiculaire aux deux segments en même temps. La matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18.526}$$

parce que $e_1 \mapsto e_2$, $e_2 \mapsto e_1$ et $e_3 \mapsto e_4$. Pour rappel, la matrice est formée des images des vecteurs de base. Cela donne

$$\chi_s\big((12)(34)\big) = -1. \tag{18.527}$$

Les 3-cycles La symétrie qui permute cycliquement les points e_1, e_2 et e_3 est la rotation d'angle[56] $2\pi/3$ dans le plan formé par les extrémités de ces trois vecteurs. Heureusement, la trace est invariante par changement de base ; donc nous pouvons calculer la trace d'une rotation d'angle $2\pi/3$ dans n'importe quelle base. Par exemple :

$$\chi_s\big((12)(34)\big) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/3) & \sin(2\pi/3) \\ 0 & -\sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix} = 1+2\cos(2\pi/3) = 0. \tag{18.528}$$

Notons que, sans cette interprétation géométrique, nous y arrivons aussi facilement : dans notre base le 3-cycle est $e_1 \mapsto e_2 \mapsto e_3 \mapsto e_1$, donc la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18.529}$$

[56] Angle d'une rotation, définition 18.126.

dont la trace est manifestement nulle : $\chi_s\big((123)\big) = 0$.

Le 4-cycle Il réalise $e_1 \mapsto e_2 \mapsto e_3 \mapsto e_4 \mapsto e_1$, dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{18.530}$$

EQooONDUooYlduup

et la trace est $\chi_s\big((1,2,3,4)\big) = -1$.

Nous avons retrouvé les caractères de la représentation ρ_s, et nous pouvons vérifier qu'elle est irréductible.

18.11 Transformations de Lorentz

Nous considérons dans cette section un nombre réel $c > 0$ ainsi que l'espace $\mathbb{R}^2$ muni du produit pseudo-scalaire[57] donné par la matrice

$$\eta = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18.531}$$

Et pour faire plus vrai, nous notons (x_0, x_1) les coordonnées sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi

$$x \cdot y = c^2 x_0 y_0 - x_1 y_1. \tag{18.532}$$

Nous insistons sur le fait que cela n'est pas un produit scalaire.

LEMooPZPZooVAdPVj

Lemme 18.196 ([1]).
Soit $c > 0$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon]-c, c[&\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \frac{-v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{18.533}$$

est une bijection.

Démonstration. Nous commençons par mentionner le fait que φ est continue du fait que le dénominateur ne s'annule pas. Une petite étude de fonction montre que

$$\lim_{v \to -c} \varphi(v) = +\infty, \tag{18.534}$$

et

$$\lim_{v \to c} \varphi(v) = -\infty, \tag{18.535}$$

et

$$\varphi'(v) = -\frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v^2/c^3}{\big(1 - \frac{v^2}{c^2}\big)^{3/2}} < 0. \tag{18.536}$$

Tout cela fait que φ est bijective (entre autres par le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 et le théorème dérivée et croissance 12.209). □

LEMooUZFKooSIjery

Lemme 18.197.
La forme bilinéaire

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x, y &\mapsto x \cdot y \end{aligned} \tag{18.537}$$

est non dégénérée[58].

Démonstration. Soit $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$b\big((x_0, x_1), (y_0, y_1)\big) = 0 \tag{18.538}$$

pour tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons

$$c^2 x_0 y_0 - x_1 y_1 = 0. \tag{18.539}$$

En écrivant cela avec $(y_0, y_1) = (1, 0)$ puis $(0, 1)$ nous obtenons immédiatement que $(x_0, x_1) = (0, 0)$. □

[57] Définition 8.164.
[58] Définition 8.125.

THOooYHDWooWxVovH

Théorème 18.198.
Soit une bijection[59] $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y \tag{18.540}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$. *Alors :*

(1) f *est linéaire.*

(2) Il existe un unique choix de $(\xi, \sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R} \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ *tel que la matrice de* f *ait la forme*

$$f = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cosh(\xi) & \frac{\sigma_1\sigma_2}{c}\sinh(\xi) \\ c\sinh(\xi) & \sigma_2\cosh(\xi) \end{pmatrix}. \tag{18.541}$$

(3) Il existe un unique $v \in]-c, c[$ *tel que la matrice de* f *ait la forme*

$$f = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{\sigma_1\sigma_2}{c^2}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{\sigma_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}. \tag{18.542}$$

Démonstration. Puisque notre produit pseudo-scalaire est non dégénéré (lemme 18.197), le fait que f soit linéaire est la proposition 8.153. Nous posons

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{18.543}$$

et, conformément à la proposition 8.158, nous imposons $A^t\eta A = \eta$. Après un petit produit matriciel nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} c^2\alpha^2 - \gamma^2 & c^2\alpha\beta - \gamma\delta \\ c^2\alpha\beta - \gamma\delta & c^2\beta^2 - \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18.544}$$

Voilà quatre équations à résoudre pour les quatre inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Déjà les équations des termes anti-diagonaux sont les mêmes. Nous recopions le reste :

$$\begin{cases} c^2\alpha^2 - \gamma^2 = c^2 & \text{(18.545a)} \\ c^2\alpha\beta - \gamma\delta = 0 & \text{(18.545b)} \\ c^2\beta^2 - \delta^2 = 1. & \text{(18.545c)} \end{cases}$$

SUBEQooXZUGooITKZnH SUBEQooDWQRooBeDaPw SUBEQooJAFLooGxmbaO

C'est le moment d'utiliser la proposition 15.147. La relation (18.545a) donne

$$\alpha^2 - \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 = 1, \tag{18.546}$$

ce qui implique l'existence d'un unique[60] $\xi_1 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1 \in \{\pm 1\}$ tels que

SUBEQSooQUSIooRZRYSW

$$\gamma = c\sinh(\xi_1) \tag{18.547a}$$
$$\alpha = \sigma_1\cosh(\xi_1). \tag{18.547b}$$

La relation (18.545c) implique quant à elle l'existence de $\xi_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_2 \in \{\pm 1\}$ tels que

SUBEQSooLFHCooXVetmK

$$\delta = \sigma_2\cosh(\xi_2) \tag{18.548a}$$
$$\beta = \frac{1}{c}\sinh(\xi_2). \tag{18.548b}$$

Nous substituons maintenant toutes les valeurs (18.547) et (18.548) dans (18.545b). Cela donne

EQooHTMSooVYzJUS

$$\sigma_1\cosh(\xi_1)\sinh(\xi_2) = \sigma_2\sinh(\xi_1)\cosh(\xi_2). \tag{18.549}$$

Nous mettons cette relation au carré et nous substituons $\cosh(\xi_1)^2 = 1 + \sinh^2(\xi_1)$. Ce que nous trouvons est

$$\sinh(\xi_1)^2 = \sinh(\xi_2)^2, \tag{18.550}$$

[59] À mon avis, il y a moyen d'affaiblir cette hypothèse. Écrivez-moi si vous avez une idée.
[60] Par 15.147.

qui implique que $\xi_1 = \pm\xi_2$. Nous posons donc $\xi_2 = \sigma_3\xi_1$ pour un certain $\sigma_3 \in \{\pm 1\}$. Cela nous permet d'alléger la notation et d'écrire ξ au lieu de ξ_1.

Nous remettons la valeur $\xi = \xi_1 = \sigma_3\xi_2$ dans l'équation (18.549) en tenant compte du fait que sinh est impaire et cosh est paire :

$$\sigma_1\sigma_3 \cosh(\xi)\sinh(\xi) = \sigma_2 \sinh(\xi)\cosh(\xi). \tag{18.551}$$

Et cela nous enseigne que $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$.

Jusqu'à présent nous avons prouvé qu'il existe un unique $\xi \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm 1\}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cosh(\xi) & \frac{\sigma_1\sigma_2}{c}\sinh(\xi) \\ c\sinh(\xi) & \sigma_2\cosh(\xi) \end{pmatrix}. \tag{18.552}$$

EQooYZIVooCTdmSh

Nous utilisons à présent la bijection du lemme 18.196. Il existe un unique $v \in]-c, c[$ tel que $\sinh(\xi) = \varphi(v)$. En utilisant $\cosh(\xi)^2 = 1 + \varphi(v)^2$, nous trouvons

$$\cosh(\xi)^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{18.553}$$

Mais comme le cosinus hyperbolique est toujours strictement positif, nous pouvons prendre la racine carrée des deux côtés :

$$\cosh(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{18.554}$$

En substituant dans (18.552), nous trouvons le résultat annoncé. □

18.11.1 Sous-groupe fini d'isométries du plan

THOooKDMUooUxQqbB

Théorème 18.199 ([621]).
Soit un groupe fini G d'isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$ contenant n éléments.

ITEMooYEONooCOMpeb

(1) Il existe un point $C \in \mathbb{R}^2$ fixé par tous les éléments de G.

ITEMooGELWooFFAqkc

(2) Si G ne contient pas de réflexion, alors il est cyclique[61] et engendré par la rotation d'angle $2\pi/n$ autour de C.

ITEMooDHKEooFpCfmX

(3) Si G contient au moins une réflexion, et si C est un point fixe de G, alors

ITEMooGQZTooJIPPLtyf

(3a) toutes les réflexions ont un axe qui passe par C,

ITEMooKPQRooLquSiQ

(3b) n est pair,

ITEMooCHSWooHpDGHf

(3c) Si σ est une réflexion dans G, alors nous avons $G = \mathrm{gr}\big(\sigma, R_C(4\pi/n)\big)$ où $R_C(\theta)$ est la rotation d'angle θ autour de C,

ITEMooROUYooRghvMv

(3d) G est isomorphe au groupe diédral $D_{n/2}$.

Démonstration. Soit un groupe fini G constitué d'isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$. Nous prouvons le théorème point par point.

(1) **Pour (1)** C'est la proposition 18.99.

(2) **Questions de réflexions** Le théorème 18.188 nous dit que les éléments de G sont des compositions d'au maximum 3 réflexions.

(3) **Exclure trois réflexions** Il n'est pas possible que G contienne un élément composé de trois réflexions. En effet, les composées de trois réflexions, par le théorème 18.190 sont des réflexions glissées[62], c'est-à-dire des transformations de la forme $g = \tau_v \circ \sigma_\ell$ où v est un vecteur parallèle à la droite ℓ. Si $x \in \ell$, alors

$$g(x) = \tau_v(x) = x + v, \tag{18.555}$$

de telle sorte que $g^k(x) = x + kv$, qui signifie que tous les g^k sont différents. Le groupe G ne peut pas être fini si il contient une réflexion glissée.

(4) **G^+ et G^-** Pour la même raison que celle qui exclut les réflexions glissées, G ne peut pas contenir de translation. Le théorème 18.190 nous donne la liste des possibilités. Après exclusion des translations et des réflexions glissées, il reste :

[61] Définition 1.440.
[62] Définition 18.189.

- l'identité,
- les rotations,
- les réflexions.

Nous notons G^+ la partie de G contenant l'identité et les rotations et G^- celle contenant les réflexions. Notons que G^+ n'est pas vide parce qu'il contient au moins l'identité, tandis que G^- peut être vide, mais n'est certainement pas un groupe.

(5) **Même nombre d'éléments** Nous prouvons à présent que si G^- est non vide, alors il a le même nombre d'éléments que G^+. Un élément de G^- est une réflexion. Soit $\sigma \in G^-$. Nous prouvons que

$$\begin{aligned}\varphi\colon G^+ &\to G^-\\ f &\mapsto \sigma\circ f\end{aligned} \tag{18.556}$$

EQooWRVVooBQCtPg

est une bijection.

(5a) **Surjective** Soit $s \in G^-$. Posons $f = \sigma^{-1}\circ s$. Puisque σ^{-1} et s sont des réflexions, f est une rotation. Donc $f \in G^+$ et $\varphi(f) = s$.

(5b) **Injective** La condition $\varphi(f) = \varphi(g)$ dit que $\sigma\circ f = \sigma\circ g$. En composant par σ^{-1} nous obtenons $f = g$.

(6) $G^+ = \text{gr}\big(R_C(2\pi/p)\big)$ Nous nommons p le nombre d'éléments de G^+. Si G^- est vide, $p = n$, et sinon $p = n/2$. Dans les deux cas, G^+ est un groupe de rotations à p éléments.

Le groupe G^+ contient seulement des rotations ; or le centre d'une rotation est l'unique point fixe. Donc tous les éléments de G^+ sont des rotations autour de C.

Le corolaire 2.15 au théorème de Lagrange nous indique que tous les éléments de G^+ vérifient $g^p = \text{Id}$. Seules les rotations d'angle $2k\pi/p$ autour de C satisfont la condition $g^p = \text{Id}$. Or il n'y a que p telles rotations. Donc elles sont toutes dans G^+. Nous en déduisons que

$$G^+ = \text{gr}\big(R_C(2\pi/p)\big). \tag{18.557}$$

EQooUWTVooEMqkVH

(7) **Pour (2)** Dans le cas où G ne contient pas de réflexion, G^- est vide et G contient n éléments. La relation (18.557) devient

$$G = G^+ = \text{gr}\big(R_C(2\pi/n)\big). \tag{18.558}$$

(8) **Pour (3)** Nous supposons maintenant que G contienne au moins une réflexion. De la sorte $G^- \neq \varnothing$.

(8a) **Pour (3a)** Les seuls points fixes d'une réflexion sont ceux de l'axe. Donc C doit être sur tous les axes des réflexions contenues dans G^-.

Notons au passage que deux réflexions d'axes qui se coupent forment une rotation. Donc G^- ne forme pas un groupe, mais même pas en rêve, quoi.

(8b) **Pour (3b)** Vu que l'union $G = G^+ \cup G^-$ est disjointe et que G^+ et G^- ont le même nombre d'éléments par la bijection 18.556, si G^- est non vide, G possède un nombre pair d'éléments.

(8c) **Pour (3c)** Si $\sigma \in G$ est une réflexion, nous savons que n est pair, que G^+ possède $p = n/2$ éléments et que

$$G^+ = \{R_C(2k\pi/p)\} = \{R_C(4k\pi/n)\}_{k=1,\dots,n/2}. \tag{18.559}$$

L'élément $\sigma \in G^-$ étant fixé, la bijection (18.556) nous indique que tous les éléments de G^- sont de la forme $\sigma\circ f$ avec $f \in G^+$. Donc

$$G^- \subset \text{gr}\big(\sigma, R_C(4\pi/n)\big). \tag{18.560}$$

Nous avons aussi

$$G^+ \subset \text{gr}\big(\sigma, R_C(4\pi/n)\big). \tag{18.561}$$

Et comme σ et $R_C(4\pi/n)$ sont dans G nous avons $\text{gr}\big(\sigma, R_C(4\pi/n)\big) \subset G$. Tout cela pour dire que

$$G = \text{gr}\big(\sigma, R_C(4\pi/n)\big). \tag{18.562}$$

(8d) $\underline{R\sigma = \sigma R^{-1}}$ Nous restons dans le cas où G^- n'est pas vide. Nous considérons R, la rotation d'angle θ autour de C. Si R_0 est la rotation d'angle θ autour de $(0,0)$, nous avons

$$R = \tau_C \circ R_0 \circ \tau_C^{-1}, \tag{18.563}$$

et si σ_0 est la symétrie d'axe parallèle à l'axe de σ, mais passant par $(0,0)$ nous avons :

$$\sigma = \tau_C \circ \sigma_0 \circ \tau_C^{-1}. \tag{18.564}$$

Si v est le vecteur directeur de la réflexion σ_0, nous considérons enfin α, la rotation qui réalise $\alpha(v) = (1,0)$. Nous avons alors

$$\sigma_0 = \alpha^{-1} \circ s \circ \alpha \tag{18.565}$$

où s est la symétrie autour de l'axe horizontal. En n'ayant pas peur d'identifier $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, l'application s est la conjugaison complexe. Avec tout ça nous avons

$$R\sigma = \tau_C R_0 \tau_C^{-1} \tau_C \sigma_0 \tau_C^{-1} = \tau_C R_0 \alpha^{-1} s \alpha \tau_C^{-1} = \tau_C \alpha^{-1} R_0 s \alpha \tau_C^{-1} \tag{18.566}$$

où nous avons utilisé le fait que les rotations autour de $(0,0)$ forment un groupe abélien pour commuter α^{-1} avec R_0. Nous utilisons à présent le lemme 18.177 pour commuter R avec s :

$$\begin{aligned}
R\sigma &= \tau_C \alpha^{-1} s R_0^{-1} \alpha \tau_C^{-1} && (18.567a)\\
&= \tau_C \underbrace{\alpha^{-1} s \alpha}_{\sigma_0} R_0^{-1} \tau_C^{-1} && (18.567b)\\
&= \tau_C \sigma_0 \tau_C^{-1} \tau_C R_0^{-1} \tau_C^{-1} && (18.567c)\\
&= \sigma R^{-1}. && (18.567d)
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $\tau_C R_0^{-1} \tau_C^{-1} = R^{-1}$ comme on peut s'en convaincre en calculant le produit.

(8e) **Table de multiplication**

Nous considérons une réflexion $\sigma \in G$. Les éléments de G^+ sont des rotations autour de C et ceux de G^- de la forme σR où R est une rotation autour de C. Pour connaître la table de multiplication de G, nous devons écrire

$$(\sigma^{\epsilon_1} R^k)(\sigma^{\epsilon_2} R^l) = \sigma^{\epsilon} R^m \tag{18.568}$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0,1\}$, R est la rotation d'angle $4\pi/n$ autour de C et ϵ et m sont des constantes à exprimer en fonction de ϵ_1, ϵ_2, k et l.

Tous les éléments de G pouvant être écrits soit sous la forme R^m, soit sous la forme σR^m, nous avons les possibilités suivantes :

(8e.i) $R^m R^l = R^{m+l}$

(8e.ii) $(R^m)(\sigma R^l) = \sigma R^{-m} R^l = \sigma R^{l-m}$

(8e.iii) $(\sigma R^m) R^l = \sigma R^{m+l}$

(8e.iv) $(\sigma R^m)(\sigma R^l) = \sigma\sigma R^{l-m} = R^{l-m}$.

(8f) **Pour (3d)** Récoltons quelque acquis.

- Nous venons de prouver que $R\sigma = \sigma R^{-1}$.
- Tout élément de G peut s'écrire soit sous la forme R^m, soit sous la forme σR^m, selon que l'élément est dans G^+ ou G^-.
- Tout élément du groupe diédral D_n s'écrit soit sous la forme r^m, soit sous la forme sr^m (proposition 18.174(2)).

L'application $\varphi\colon G \to D_n$ suivante est donc une bijection :

$$\begin{cases} \varphi(R^m) = r^m & (18.569a)\\ \varphi(\sigma R^m) = sr^m. & (18.569b) \end{cases}$$

Il nous reste à prouver que c'est un morphisme. Cela se fait en utilisant la table de multiplication du groupe diédral donnée dans la proposition 18.178 et celle du groupe G que nous venons d'écrire.

□

Définition 18.200 (Groupe de symétrie d'une partie de $\mathbb{R}^n$[609])**.**
Si Y est une partie de $\mathbb{R}^n$, nous définissons le ***groupe des symétries*** *de Y par*

$$\mathrm{Sym}(Y) = \{f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } f(Y) = Y\}. \tag{18.570}$$

Nous définissons aussi le groupe des symétries propres de Y par

$$\mathrm{Sym}^+(Y) = \{f \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } f(Y) = Y\} \tag{18.571}$$

où $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$ est le groupe des isométries positives de $\mathbb{R}^n$, définition 18.93.

THOooAYZVooPmCiWI

Théorème 18.201 ([609])**.**
Soit $Y \subset \mathbb{R}^2$.

(1) Si le groupe $\mathrm{Sym}^+(Y)$ est fini d'ordre n, alors c'est un groupe cyclique d'ordre n.

(2) Si $\mathrm{Sym}^+(Y)$ est fini, alors $\mathrm{Sym}(Y)$ est soit cyclique[63] d'ordre n, soit isomorphe au groupe diédral[64] d'ordre $2n$.

Démonstration. Nous savons déjà par la proposition 18.100 que $\mathrm{Sym}^+(Y)$ est isomorphe à un sous-groupe H^+ d'ordre n de $\mathrm{SO}(2)$. Vérifions que ce groupe est cyclique. Si $n = 1$, c'est évident. Si $n \geqslant 2$ alors nous savons que H^+ est constitué de rotations d'angles dans $[0, 2\pi[$ et vu que c'est un ensemble fini, il possède une rotation d'angle minimal (à part zéro). Notons α_0 cet angle.

Nous montrons que H^+ est engendré par la rotation d'angle α_0. Soit une rotation d'angle α. Étant donné que $\alpha_0 < \alpha$ nous pouvons effectuer la division euclidienne[65] de α par α_0 et obtenir

$$\alpha = k\alpha_0 + \beta \tag{18.572}$$

avec $\beta < \alpha_0$. Mézalors $R(\beta) = R(\alpha)R(\alpha_0)^{-k}$ est également un élément du groupe. Cela contredit la minimalité dès que $\beta \neq 0$. Avoir $\beta = 0$ revient à dire que α est un multiple de α_0, ce qui signifie que le groupe H^+ est cyclique engendré par α_0.

Notons au passage que nous avons automatiquement $\alpha_0 = \frac{2\pi}{n}$ parce qu'il faut $R(\alpha_0)^n = \mathrm{Id}$. Nous avons prouvé que $\mathrm{Sym}^+(Y)$ est cyclique d'ordre n.

Nous étudions maintenant le groupe $\mathrm{Sym}(Y)$. Par la proposition 18.100 nous avons un morphisme injectif

$$\phi\colon \mathrm{Sym}(Y) \to \mathrm{O}(2), \tag{18.573}$$

et en posant $H = \phi\big(\mathrm{Sym}(Y)\big)$ nous avons un isomorphisme de groupes $\phi\colon \mathrm{Sym}(Y) \to H$. Nous savons aussi que ce ϕ se restreint en

$$\phi\colon \mathrm{Sym}^+(Y) \to H^+ \subset \mathrm{SO}(2) \tag{18.574}$$

où $H^+ = \phi\big(\mathrm{Sym}^+(Y)\big) = H \cap \mathrm{SO}(2)$. Le groupe H^+ est cyclique et est engendré par la rotation $R(2\pi/n)$.

Supposons un instant que $H \subset \mathrm{SO}(2)$. Alors nous avons $H = H^+$ et ϕ est un isomorphisme entre $\mathrm{Sym}(Y)$ et le groupe cyclique engendré par $R(2\pi/n)$.

Nous supposons à présent que H n'est pas un sous-ensemble de $\mathrm{SO}(2)$. Quelles sont les isométries de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas de déterminant 1 ? Il faut regarder dans le théorème 18.190 quelles sont les isométries contenant un nombre impair de réflexions. Ce sont les réflexions et les réflexions glissées. Or il ne peut pas y avoir de réflexion glissée dans un groupe fini, parce que si f est une réflexion glissée, tous les f^k sont différents.

Nous en déduisons que si H n'est pas inclus dans $\mathrm{SO}(2)$, il contient une réflexion que nous nommons σ. Nous allons en déduire que $H \simeq H^+ \times_{\mathbf{Ad}} C_2$ où $C_2 = \{\mathrm{Id}, \sigma\}$. Si $h \in H$ nous pouvons écrire

$$h = (h\sigma^\epsilon)\sigma^\epsilon \tag{18.575}$$

pour n'importe quelle valeur de ϵ, et en particulier pour $\epsilon = \pm 1$.

Si $h \in \mathrm{SO}(2)$ alors nous écrivons $h = h\sigma^0$ et si $h \notin \mathrm{SO}(2)$ nous écrivons $h = (h\sigma)\sigma$. Vu que $h\sigma \in \mathrm{SO}(2)$, cette dernière écriture est encore de la forme $\mathrm{SO}(2) \times C_2$. Quoi qu'il en soit, tout élément de H s'écrit comme un produit

$$H = H^+C_2. \tag{18.576}$$

Cette décomposition est unique parce que si $h_1c_1 = h_2c_2$ alors $h_2^{-1}h_1 = c_2c_1^{-1}$, et comme $h_2^{-1}h_1 \in H^+$ nous avons $c_2c_1^{-1} \in H^+$ et donc $c_1 = c_2$. Partant, nous avons aussi $h_1 = h_2$. Pour avoir le produit semi-direct, il

[63] Définition 1.440.
[64] Définition 18.169.
[65] Théorème 1.352.

faut encore montrer que $\mathbf{Ad}(C_2)H^+ \subset H^+$. Le seul cas à vérifier est $\mathbf{Ad}(\sigma)H^+ \subset H^+$. Comme les éléments de H^+ sont caractérisés par le fait d'avoir un déterminant positif, nous avons

$$\mathbf{Ad}(\sigma)R(\alpha) = \sigma R(\alpha)\sigma^{-1} \in H^+. \tag{18.577}$$

□

Remarque 18.202.
Tout ceci est cohérent avec le théorème de Burnside 8.310 parce que le sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(n)$ engendré par la rotation $R(2\pi/n)$ est un groupe d'exposant fini, à savoir que si h est dans ce groupe, $h^n = \mathrm{Id}$.

18.11.2 Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

Nous donnons maintenant quelques relations trigonométriques classiques dans un triangle rectangle. Le théorème de Pythagore est déjà le théorème 10.37 ; nous nous concentrons ici sur les angles.

PROPooCDZVooKOQzct

Proposition 18.203.
Soient $A, B, S \in \mathbb{R}^2$ des points distincts et non alignés formant un triangle rectangle en A :

$$(A - S) \cdot (B - A) = 0. \tag{18.578}$$

En posant $\theta = \widehat{ASB}$ nous avons

$$\cos(\theta) = \frac{\|A - S\|}{\|B - S\|} \tag{18.579}$$

et

$$\sin(\theta) = \pm\frac{\|B - A\|}{\|B - S\|}. \tag{18.580}$$

EQooEKZEooFeNImX

Démonstration. Nous posons $C = A - S$ et $D = B - S$. Comme $C \neq 0$, il existe une rotation R_α telle que

$$\begin{cases} (R_\alpha C)_x > 0 & \text{(18.581a)} \\ (R_\alpha C)_y = 0. & \text{(18.581b)} \end{cases}$$

Nous posons $X = R_\alpha C$ et $Y = R_\alpha D$.

Le triangle formé de O, X et Y est « posé » sur l'axe des abscisses et est rectangle en X, c'est-à-dire

$$X \cdot (Y - X) = 0. \tag{18.582}$$

De ce fait, le point Y satisfait à $Y_x = X_x$. Et enfin, grâce aux propositions 18.162 et 18.163 nous avons $\widehat{ASB} = \widehat{XOY}$.

Nous écrivons les relations qui définissent l'angle $\widehat{XOY}$. Pour cela nous posons $X' = X/\|X\|$ et $Y' = Y/\|Y\|$ et nous avons

SUBEQooVHNDooPOfbjC

$$\begin{cases} \cos(\theta) = X'_x Y'_x & \text{(18.583a)} \\ \sin(\theta) = X'_y Y'_y. & \text{(18.583b)} \end{cases}$$

Vu que $X = (X_x, 0)$, nous avons $X'_x = 1$. De plus

$$\|Y\| = \|R_\alpha(D)\| = \|D\| = \|B - S\|. \tag{18.584}$$

En substituant les valeurs dans (18.583),

$$\cos(\theta) = Y'_x = \frac{Y_x}{\|Y\|} = \frac{X_x}{\|B - S\|} = \frac{\|C\|}{\|B - S\|} = \frac{\|A - S\|}{\|B - S\|}. \tag{18.585}$$

Voilà déjà une chose de prouvée.

Pour la seconde, nous avons $\sin(\theta) = Y'_y$. Selon le signe de Y_y nous avons $Y_y = \pm\|Y - X\|$ et donc

$$\sin(\theta) = Y'_y = \frac{Y_y}{\|Y\|} = \frac{\pm\|Y - X\|}{\|Y\|} = \pm\frac{\|D - C\|}{\|Y\|} = \pm\frac{\|B - A\|}{\|B - S\|}. \tag{18.586}$$

□

Le signe sur la formule du sinus revient au fait que la définition de l'angle $\widehat{AOB}$ est de considérer la rotation qui fait aller A vers B. Donc suivant la position relative de A, O et B, il se peut que l'angle mesuré soit l'angle *extérieur* au triangle.

La proposition suivante est parfois prise comme définition de l'angle.

Proposition 18.204.
Soient trois points non alignés $A, S, B \in \mathbb{R}^2$. Nous avons

$$\cos\left(\widehat{ASB}\right) = \frac{(A-S)\cdot(B-S)}{\|A-S\|\|B-S\|}. \tag{18.587}$$

EQooOWULooVQntyE

Démonstration. Nous posons $C = A - S$, $D = B - S$, $X = C/\|C\|$ et $Y = D/\|D\|$. Avec cela, la définition 18.156 donne l'équation

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_x \\ Y_y \end{pmatrix} \tag{18.588}$$

que nous écrivons comme le système

$$\begin{cases} X_x\cos(\theta) - X_y\sin(\theta) = Y_x & \text{(18.589a)} \\ X_y\cos(\theta) + X_x\sin(\theta) = Y_y. & \text{(18.589b)} \end{cases}$$

Nous considérons maintenant cela comme un système pour $\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$:

$$\begin{pmatrix} X_x & -X_y \\ X_y & X_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_x \\ Y_y \end{pmatrix}. \tag{18.590}$$

Le déterminant de la dernière matrice est $X_x + X_y^2 = \|X\|^2 = 1$ parce que X est unitaire. Cette matrice est donc inversible et son inverse est vite calculée. Nous avons

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x & X_y \\ -X_y & X_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_x \\ Y_y \end{pmatrix}. \tag{18.591}$$

Cela donne ce que nous voulions :

$$\cos(\theta) = X \cdot Y = \frac{C\cdot D}{\|C\|\|D\|} = \frac{(A-S)\cdot(B-S)}{\|A-S\|\|B-S\|}. \tag{18.592}$$

□

Remarque 18.205.
Prendre la formule (18.587)

$$\cos\left(\widehat{ASB}\right) = \frac{(A-S)\cdot(B-S)}{\|A-S\|\|B-S\|}. \tag{18.593}$$

comme définition de l'angle $\widehat{ASB}$ est cependant trompeur parce que ça ne permet de définir les angles que sur une partie de $[0, 2\pi[$ sur laquelle le cosinus est injectif. Pour réellement définir tous les angles, il faut alors un peu bricoler.

Sans vouloir être méchant, je crois que ceux qui procèdent de cette manière sont ceux qui donnent un cours sur le produit scalaire sans avoir l'intention de lier la définition d'une rotation comme composée de réflexions aux matrices de SO(2) et aux fonctions trigonométriques.

18.11.3 Pavages du plan

DEFooHPKFooSIDhCM

Définition 18.206.
*Une application affine $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un **déplacement** lorsqu'elle est une isométrie de $(\mathbb{R}^n, d)$ qui préserve l'orientation*[66].

DEFooJPHKooRgCBJs

Définition 18.207 ([485])**.**
*Un **pavage** de $\mathbb{R}^2$ est une paire (G, K) où G est un groupe de déplacements*[67] *de $\mathbb{R}^2$ et K un compact de $\mathbb{R}^2$ d'intérieur non vide telle que*

(1) $G \cdot K = \mathbb{R}^2$,

ITEMooOIJZooZMKLUm

(2) Si $g_1, g_2 \in G$ satisfont $g_1 \cdot \mathrm{Int}(K) \cap g_2 \cdot \mathrm{Int}(K) \neq \varnothing$, alors $g_1 \cdot K = g_2 \cdot K$.

*Nous disons qu'un groupe G de déplacements de $\mathbb{R}^2$ est un **groupe de pavage** de $\mathbb{R}^2$ si il existe un compact K tel que la paire (G, K) soit un pavage.*

[66] Définition 8.33.
[67] Définition 18.206.

En termes de notations,

$$G \cdot K = \bigcup_{g\in G} g(K) = \bigcup_{g\in G}\bigcup_{k\in K} g(k). \tag{18.594}$$

LEMooWZSWooZYkICn

Lemme 18.208 ([1]).
Soient une bijection affine $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ainsi qu'une droite d et un point A. Nous notons S la partie de $\mathbb{R}^2$ située du côté de d contenant A.

Alors $\varphi(S)$ est la partie de $\mathbb{R}^2$ située du côté de $\varphi(d)$ contenant $\varphi(A)$.

Démonstration. La droite d est donnée par une application affine $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et la définition

$$d = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x) = 0\}. \tag{18.595}$$

Nous supposons que $f(A) > 0$; sinon, nous pouvons utiliser $-f$ au lieu de f. Donc

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x) > 0\}. \tag{18.596}$$

La partie $\varphi(S)$ est alors donnée par

$$\varphi(S) = \{\varphi(x) \text{ tel que } f(x) > 0\}. \tag{18.597}$$

Comme φ est une bijection, cela s'écrit aussi bien

$$\varphi(S) = \{y \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f\big(\varphi^{-1}(y)\big) > 0\}. \tag{18.598}$$

De même

$$\varphi(d) = \{s \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f\big(\varphi^{-1}(s)\big) = 0\}. \tag{18.599}$$

Donc les deux côtés de la droite $\varphi(d)$ sont donnés par le signe de $f \circ \varphi^{-1}$. Nous avons

$$(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(A)\big) = f(A) > 0. \tag{18.600}$$

Donc $\varphi(A) \in \varphi(S)$. □

LEMooZOXVooTJiLTF

Lemme 18.209.
Le groupe

$$G = \mathrm{gr}(\tau_{e_1}, \tau_{e_2}) \tag{18.601}$$

est un groupe de pavage du plan.

Démonstration. Il suffit de prendre le carré $K = [0,1]\times[0,1]$. En appliquant les translations, nous recouvrons tout le plan, sans intersection des intérieurs des carrés. Notons toutefois qu'il y a un recouvrement des bords. □

LEMooTMRGooChBzZg

Lemme 18.210 ([1, 622]).
Le groupe

$$G = \mathrm{gr}(\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, R_0(\pi)) \tag{18.602}$$

est un groupe de pavage du plan.

Démonstration. Le compact à considérer est $K = [0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$. Le compact K et son image par $R_0(\pi)$ sont représentés sur la figure 18.8.

En agissant sur K avec les translations verticales et horizontales, nous recouvrons des bandes verticales de largeur $1/2$. En agissant de même sur $R_0(\pi)(K)$, nous recouvrons les autres bandes verticales.

Donc $G \cdot K$ recouvre bien $\mathbb{R}^2$. Il serait cependant un peu présomptueux de croire en avoir fini. Il faut vérifier la condition (2) de la définition 18.207 d'un pavage.

Supposons que $g_1 \cdot \mathrm{Int}(K) \cap g_2 \cdot \mathrm{Int}(K) \neq \varnothing$. Cela signifie qu'il existe $k_1, k_2 \in \mathrm{Int}(K)$ tels que $g_1(k_1) = g_2(k_2)$, ou encore que

$$(g_2^{-1}g_1)k_1 = k_2 \in \mathrm{Int}(K). \tag{18.603}$$

EQooITJEooUkUKuu

Quelle est la forme d'un élément général de G ? Le lemme 1.437 nous indique qu'un élément général de G est un produit fini de τ_{e_1}, τ_{e_2} et $R_0(\pi)$. Mais nous savons que si α est linéaire,

$$\alpha \circ \tau_u = \tau_{\alpha(u)} \circ \alpha. \tag{18.604}$$

Dans notre cas, dans un produit général, nous pouvons déplacer tous les facteurs $R_0(\pi)$ à droite en changeant des τ_{e_i} en $\tau_{R_0(\pi)e_i} = \tau_{-e_i}$. Les translations par contre commutent sans faire d'histoires. Donc un élément général de G est de la forme

$$g = \tau_{e_1}^k \tau_{e_2}^l R_0(\pi)^m \tag{18.605}$$

Nous pouvons évidemment restreindre m à $\{0,1\}$. Supposons $k \in \text{Int}(K)$ et $g(k) \in \text{Int}(K)$. Nous avons $0 < k_x < 0.5$. Si $m = 1$, alors $g(k)_x \in]-1/2, 0[$ et aucun $\tau_{e_1}^k g(k)_x$ ne pourra plus être entre 0 et 1/2. Donc $m = 0$. À partir de là, pour avoir $g(k) \in \text{Int}(K)$ nous devons avoir également $k = l = 0$. Donc $g = \text{Id}$.

Deux éléments g_1 et g_2 vérifiant la condition (18.603) doivent donc vérifier $g_2^{-1}g_1 = \text{Id}$, et donc $g_1 = g_2$. Par conséquent $g_1 \cdot K = g_2 \cdot K$. □

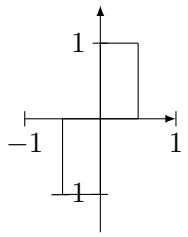


FIGURE 18.8 : Le compact K et son image par $R_0(\pi)$ pour le lemme 18.210.

LabelFigARrJSooefYkmCbP

LEMooJPNDooHDCLnY

Lemme 18.211 ([1, 622])**.**
Le groupe

$$\text{gr}(\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, R_0(\pi/2)) \tag{18.606}$$

est un groupe de pavage.

Démonstration. Le pavé à considérer est

$$K = [-\frac{1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{2}]. \tag{18.607}$$

En lui appliquant trois fois la rotation $R_0(\pi/2)$, nous reconstituons le carré $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ensuite, avec les translations, nous pavons tout le plan.

Pour la seconde condition, nous procédons comme dans la démonstration du lemme 18.210. D'abord $R_0(\pi/2)e_1 = e_2$ et $R_0(\pi/2)e_2 = -e_1$. Donc dans un produit général de τ_{e_1}, τ_{e_2} et $R_0(\pi/2)$ (et de leurs inverses), toutes les rotations peuvent être mises à droite ; nous avons donc un élément général de G sous la forme

$$g = \tau_a \circ R_0(\pi/2)^k \tag{18.608}$$

avec $a \in \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ et $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Vu que les translations se font par nombres entiers tandis que les différences de coordonnées entre les $R_0(\pi/2)^k K$ sont demi-entiers, si $k \in \text{Int}(K)$, alors aucun τ_a ne permet d'avoir $(\tau_a \circ R_0(\pi/2))k \in \text{Int}(K)$.

Bref, si $(g_2^{-1}g_1)k \in K$, alors encore une fois $g_2^{-1}g_1 = \text{Id}$. □

Et c'est maintenant que les choses compliquées commencent.

LEMooMWWEooEbZXtb

Lemme 18.212.
Le groupe

$$\text{gr}\left(\tau_{e_1}, \tau_{(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})}, R_0(\pi/3)\right) \tag{18.609}$$

est un groupe de pavage.

Démonstration. Ici le compact K est le triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ et $C = (1,0)$. Plus précisément il s'agit de l'intersection des trois parties suivantes :

- le côté de la droite (AB) où est C,
- le côté de la droite (AC) où est B,
- le côté de la droite (BC) où est A.

Il est bon d'écrire ces trois conditions sous forme d'inéquations.

- La droite AB est donnée par l'équation $f_{AB}(x, y) = 0$ pour $f_{AB}(x, y) = x - \sqrt{3}y$. Puisque $f_{AB}(C) = 1$, la première inéquation pour K est
$$x - \sqrt{3}y \geqslant 0. \tag{18.610}$$

- Pour la droite (BC) nous avons $f_{BC}(x,y) = -x - \sqrt{3}y + 1$ et $f_{BC}(A) = 1$. Donc la seconde inéquation pour K est
$$-x - \sqrt{3}y + 1 \geqslant 0 \tag{18.611}$$
- La droite AC est donnée par l'application $f_{AC}(x,y) = y$. Vu que $f_{AC}(B) = \sqrt{3}/6$, nous avons la troisième inéquation pour K :
$$y \geqslant 0. \tag{18.612}$$

En résumé, la définition de K est le système SUBEQSooECKFooOdneOA
$$\begin{cases} x - \sqrt{3}y \geqslant 0 & (18.613a)\\ -x - \sqrt{3}y + 1 \geqslant 0 & (18.613b)\\ y \geqslant 0. & (18.613c) \end{cases}$$

La figure 18.9(a) nous montre ce triangle et l'action des puissances de $R_0(\pi/3)$ sur lui. Pour votre gouverne, la matrice de cette rotation est

$$R_0(\pi/3) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{18.614}$$ EQooMRRXooTebLlt

La figure 18.9(c) vous montre une partie de ce pavage dans toute sa splendeur.

Puisque les translations sont $u_1 = e_1$ et $u_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, il est suffisant de montrer que notre pavage pave réellement le parallélogramme construit sur ces deux vecteurs. Nous vous avons très obligeamment dessiné ce parallélogramme pavé sur la figure 18.9(b).

Pour montrer que les triangles dessinés pavent effectivement le parallélogramme, nous allons procéder à une exhaustion de cas. Soit (x,y) dans le parallélogramme.

Nous commençons par couper le parallélogramme en deux parties suivant la diagonale allant de u_1 à u_2. Dans la vie mon p'ti gars, il y a deux types de points : ceux qui vérifient $x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - 1 \leqslant 0$ et les autres.

(1) **Si** $x + y/\sqrt{3} - 1 \leqslant 0$ Ceci est le côté de $(0,0)$. Nous subdivisons suivant la petite barre verticale (suivez le dessin), c'est-à-dire suivant les deux cas : $x \geqslant \frac{1}{2}$ et $x \leqslant \frac{1}{2}$.

(1a) **Si** $x \leqslant \frac{1}{2}$ Enfin nous coupons avec la droite diagonale partant de $(0,0)$, c'est-à-dire selon que $x - \sqrt{3}y \leqslant 0$ ou $x - \sqrt{3}y \geqslant 0$.

(1a.i) **Si** $x - \sqrt{3}y \leqslant 0$ Les points dont nous parlons sont les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant SUBEQSooNYWDooYMNVad
$$\begin{cases} x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - 1 \leqslant 0 & (18.615a)\\ x \leqslant \frac{1}{2} & (18.615b)\\ x - \sqrt{3}y \leqslant 0. & (18.615c) \end{cases}$$

En suivant le dessin, vous remarquerez que l'élément de G à considérer est
$$g = \tau_{e_1} \circ \tau_{(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})} \circ R_0(\pi/3)^4. \tag{18.616}$$

Nous avons EQSooOJBFooCTaTtu
$$g(A) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \tag{18.617a}$$
$$g(B) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}) \tag{18.617b}$$
$$g(C) = (0,0). \tag{18.617c}$$

Ce que les équations (18.615) décrivent est l'intersection des trois parties suivanteas[68] :
- le côté de la droite $\big(g(A)g(B)\big)$ contenant $g(C)$,
- le côté de la droite $\big(g(A)g(C)\big)$ contenant $g(B)$,
- le côté de la droite $\big(g(B)g(C)\big)$ contenant $g(A)$,

Le lemme 18.208 nous permet d'exprimer ces trois parties en termes de K :

[68] Personnellement, je n'ai pas vérifié, mais ça m'étonnerait que ce soit faux. Vérifiez et écrivez-moi.

- l'image par g du côté de la droite (AB) contient C,
- l'image par g du côté de la droite (AC) contient B,
- l'image par g du côté de la droite (BC) contient A,

Comme g est une bijection, l'intersection des images par g est l'image par g de l'intersection. Bref, les équations (18.617) décrivent l'image par g de K.
Cette partie est donc pavée par (G, K).

(1a.ii) **Si** $x - \sqrt{3}y \geqslant 0$ hop, même calculs avec des petites variations. Nous laissons le lecteur s'en occuper.

(1b) **Si** $x \geqslant \frac{1}{2}$ hop.

(2) **Si** $x + y/\sqrt{3} - 1 \geqslant 0$ hop.

Les cas listés se traitent surement de la même façon. Nous tenons pour prouvé que (G, K) est bien surjectif sur $\mathbb{R}^2$.

Nous devons encore montrer la condition (2) de la définition 18.207. Commençons par déterminer la forme générale d'un élément de G sous la forme $\tau_a \circ r_0$ où r_0 est une application linéaire. Le lemme 1.437 nous indique qu'un élément général de $G = \text{gr}(\tau_{e_1}, \tau_{(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}, R_0(\pi/3))$ est un produit arbitraire (mais fini) de τ_{e_1}, $\tau_{(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}$ et de $R_0(\pi/3)$ et de leurs inverses.

Comme toujours nous avons $\alpha \circ \tau_v = \tau_{\alpha(v)} \circ \alpha$. Donc nous pouvons passer toutes les rotations $R_0(\pi/3)$ et $R_0(\pi/3)^{-1}$ à droite du produit, quitte à produire des translations des formes suivantes :

$$R_0(\pi/3)^k e_1 \tag{18.618a}$$

$$R_0(\pi/3)^k (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \tag{18.618b}$$

$$R_0(\pi/3)^{-k} e_1 \tag{18.618c}$$

$$R_0(\pi/3)^{-k} (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}). \tag{18.618d}$$

En utilisant la matrice (18.614) nous trouvons assez vite que SUBEQooEMVIooNaaMqk

$$R_0(\pi/3)e_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \tag{18.619a}$$

$$R_0(\pi/3)^2 e_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \tag{18.619b}$$

$$R_0(\pi/3)^3 e_1 = -e_1. \tag{18.619c}$$

Les applications suivantes de $R_0(\pi/3)$ ne donnent rien de nouveau, si ce n'est le signe. Les puissances de $R_0(\pi/3)$ appliquées à $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ sont déjà parmi celles listées en (18.619). Quant aux inverses, $R_0(\pi/3)^{-1} = R_0(\pi/3)^5$; donc rien de nouveau non plus.

Un élément général de G est donc dans

$$\tau_v \circ R_0(\pi/3)^k \tag{18.620}$$

avec v dans

$$\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}\begin{pmatrix} 1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix} -1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \tag{18.621}$$

Remarquons que

$$\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = -e_1 + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}. \tag{18.622}$$

Donc un élément général de G est

$$\tau_{e_1}^k \circ \tau_{(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}^l \circ R_0(\pi/3)^m. \tag{18.623}$$

Nous pouvons maintenant prouver notre point. Pour cela nous allons successivement considérer les 5 rotations de K présentées dans la sous-figure 18.9(a). Pour chacune nous allons montrer qu'aucune translation ne permet d'obtenir une intersection avec K.

Nous allons en faire un seul en détail.

(1) **Pour** $L = R_0(\pi/3)K$ hop. les détails sont laissés à notre aimable lecteur qui ne pourra pas ne pas compléter tous les cas.

(2) **Pour $L = R_0(\pi/3)^2K$** Nous allons prouver que si $(x,y) \in \text{Int}(L)$, alors

$$\tau_{e_1}^k \circ \tau^l_{(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}(x,y) \tag{18.624}$$

ne peut pas être dans $\text{Int}(K)$. Pour la simplicité des notations nous notons $r = R_0(\pi/3)^2$; nous avons

$$r = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \tag{18.625}$$

Nous considérons $g = \tau_{e_1}^k \circ \tau_{(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})} \circ r$. Un calcul nous donne l'image de (x,y) par g :

$$g(x,y) = \tau_{e_1}^k \circ \tau^l_{(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + k - \frac{1}{2}l \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}l \end{pmatrix}. \tag{18.626}$$

Nous considérons $(x,y) \in \text{Int}(K)$ tel que $g(x,y) \in \text{Int}(K)$, et nous allons trouver une contradiction. Le fait que $(x,y) \in \text{Int}(K)$ signifie que (x,y) satisfait les inéquations (18.613) mais avec des inégalités strictes. Le fait que $g(x,y) \in \text{Int}(K)$ nous donne trois inéquations de plus. Assez rapide calcul :

$$f_{AB}\big(g(x,y)\big) = -2x + k - 2l, \tag{18.627a}$$
$$f_{BC}\big(g(x,y)\big) = -x - \sqrt{3}y - k - l + 1, \tag{18.627b}$$
$$f_{AC}\big(g(x,y)\big) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}l. \tag{18.627c}$$

Au final, notre point (x,y) doit satisfaire le système suivant :

$$\begin{cases} x - \sqrt{3}y > 0 & \text{SUBEQooQJBRooSvcvfW} \quad (18.628a) \\ -x - \sqrt{3}y + 1 > 0 & \text{SUBEQooLWJQooAIQhCh} \quad (18.628b) \\ y > 0 & \text{SUBEQooYCVNooHJHVWt} \quad (18.628c) \\ -2x + k - 2l > 0 & \text{SUBEQooYYVUooORxLnp} \quad (18.628d) \\ -x - \sqrt{3}y - k - l + 1 > 0 & \text{SUBEQooRRGQooYtSxso} \quad (18.628e) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}l > 0 & \text{SUBEQooSNVNooVrIVVy} \quad (18.628f) \end{cases}$$

Les inéquations 18.628c et 18.628a donnent déjà $x > 0$. De même avec 18.628b nous trouvons $x < 1$. Voilà déjà $x \in]0,1[$ qui est directement visible sur le dessin du triangle K.

Puisque $x > 0$, l'inéquation (18.628d) donne

$$k - 2l > -2x + k - 2l > 0. \tag{18.629}$$

Donc $k - 2l > 0$.

Comme $x < 1$ et $y > 0$, l'inéquation (18.628f) donne

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}l > \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}l > 0. \tag{18.630}$$

Donc $\frac{\sqrt{3}}{2}(1+l) > 0$. Comme l est entier, cela donne $l \geqslant 0$.

Enfin, de (18.628e) nous tirons

$$-k + 1 > -x - \sqrt{3}y - k - l + 1 > 0, \tag{18.631}$$

Ce qui donne $k < 1$ et donc $k \leqslant 0$.

En résumé nous avons trouvé trois inéquations pour k et l :

$$\begin{cases} k \leqslant 0 & (18.632a) \\ l \geqslant 0 & (18.632b) \\ k - 2l > 0. & (18.632c) \end{cases}$$

Ce système est impossible.

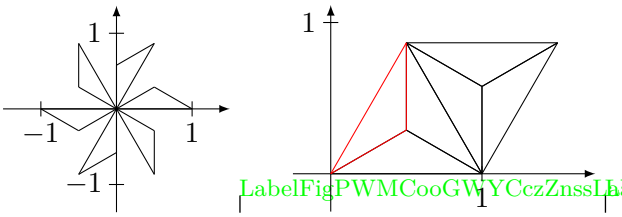
Il n'existe donc pas de translation qui, appliquée à $\text{Int}(L)$, donne une intersection avec $\text{Int}(K)$.

(3) **Pour** $L = R_0(\pi/3)^3 K$ hop.

(4) **Pour** $L = R_0(\pi/3)^4 K$ hop.

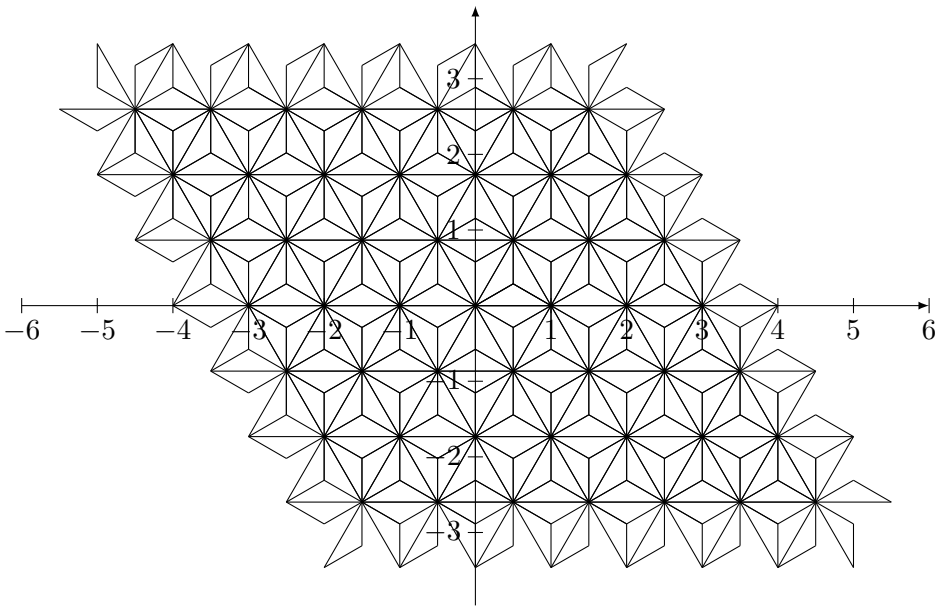
(5) **Pour** $L = R_0(\pi/3)^5 K$ hop.

Voilà. J'espère que toutes les idées sont en place, et que les parties manquantes sont seulement des vérifications qui se font mécaniquement, de la même manière[69]. □



(a) Le compact K et ses rotations.

(b) Une maille du réseau des translations de G.



(c) Une partie du pavage complet.

FIGURE 18.9 : Illustrations pour le pavage du lemme 18.212. LabelFigPWMCooGWYCczZn

LEMooGSQSooGSfkaL

Lemme 18.213.
Le groupe

$$\mathrm{gr}\left(\tau_1, \tau_{(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}, R_0(\pi/3)\right) \tag{18.633}$$

est un groupe de pavage.

D'après [622], la démonstration du lemme 18.213 demande d'utiliser le losange de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ et $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$[70].

LEMooEKWZooYbcGBp

Lemme 18.214 ([1])**.**
Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires, ainsi que $\alpha, \beta \in [0,1]$. Nous considérons $v = \alpha u_1 + \beta u_2$.

Nous supposons pour fixer les idées, que $\|u_1\| \geqslant \|u_2\|$. Alors

$$\min\{\|v\|, \|u_1 + u_2 - v\|\} \leqslant \|u_1\|. \tag{18.634}$$

Autrement dit, tout point intérieur d'un parallélogramme est plus proche d'un angle que la longueur du plus long côté.

[69] Je n'ai pas vérifié. Faites-le et écrivez-moi pour me dire ce qu'il en est.
[70] Je n'ai pas vérifié, mais à mon avis une preuve doit prendre les mêmes idées que celles du lemme 18.212.

Démonstration. Les points $\alpha u_1 + \beta u_2$ ($\alpha, \beta \in [0,1]$) se divisent en deux parties : ceux avec $0 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 1$ et ceux avec $1 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 2$.

Si $\alpha + \beta \leqslant 1$ alors

$$\|\alpha u_1 + \beta u_2\| < \|\alpha u_1\| + \beta\|u_2\| = \alpha\|u_1\| + \beta\|u_2\| \leqslant (\alpha+\beta)\|u_1\| \leqslant \|u_1\|. \tag{18.635}$$

L'inégalité est stricte parce que u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.

Si au contraire $\alpha + \beta \geqslant 1$ nous avons

$$\|u_1 + u_2 - \alpha u_1 - \beta u_2\| < \|(1-\alpha)u_1\| + \|(1-\beta)u_2\| < (2-\alpha-\beta)\|u_1\| \leqslant \|u_1\|. \tag{18.636}$$

□

LEMooWKTGooQlfuxm

Lemme 18.215.
Soient un ensemble E, et deux bijections $r, s : E \to E$ ayant chacune un unique point fixe. Si elles commutent, alors leurs points fixes sont égaux.

Démonstration. Nous nommons a le point fixe de r et b celui de s. Pour tout $x \in E$ nous avons $(rs)(x) = (sr)(x)$. En particulier pour $x = s^{-1}(a)$. D'une part

$$(rs)(x) = r(a) = a. \tag{18.637}$$

Et d'autre part,

$$(sr)(a) = (srs^{-1})(a) \tag{18.638}$$

Si nous imposons $(srs^{-1})(a) = a$, nous avons, en appliquant s^{-1} des deux côtés : $(rs^{-1})(a) = s^{-1}(a)$. Cela prouve que $s^{-1}(a)$ est un point fixe de r. Donc $s^{-1}(a) = a$.

Nous en déduisons que a est un point fixe de s et donc que $a = b$. □

LEMooDGSJooCiBhZz

Lemme 18.216.
Soit un sous-groupe T de $(\mathbb{R}^2, +)$ tel que $\|v\| > \delta$ pour tout $v \neq 0$ dans T.

Alors si u_1 et u_2 sont les plus petits éléments en norme de T, nous avons

$$T = \mathbb{Z}u_1 + \mathbb{Z}u_2. \tag{18.639}$$

Démonstration. Nous décomposons en plusieurs parties.

(1) $\mathbb{R}^+ v \cap T = \mathbb{N}v_m$ Soit $v \in T$. L'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \lambda v \in T\}$ a un minimum parce que tous les éléments de T sont en norme plus grands que $\delta > 0$. Soit λ_m ce minimum et $v_m = \lambda_m v$.

Nous prétendons à présent que $\mathbb{R}^+ v \cap T = \mathbb{N}v_m$. Nous ne faisons d'ailleurs pas que prétendre ; nous *prouvons*. En effet, soit $\lambda v \in T$. Nous devons prouver que $\lambda = l\lambda_m$ pour un certain $l \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leqslant \lambda < k+1$.

Nous avons

$$(k+1)\lambda_m - \lambda \leqslant (k+1)\lambda_m - k\lambda_m = \lambda_m. \tag{18.640}$$

Vu que T est un groupe pour l'addition, et que $\lambda_m v \in T$ et $\lambda v \in T$, cela implique que $\big((k+1)\lambda_m - \lambda\big)v \in T$. Mais

$$|\big((k+1)\lambda_m - \lambda\big)v| \leqslant \lambda_m. \tag{18.641}$$

Vue la propriété de minimalité de λ_m, nous avons forcément

$$(k+1)\lambda_m - \lambda = \lambda_m. \tag{18.642}$$

Cela prouve que $\lambda = k\lambda_m$.

Jusqu'ici nous avons prouvé que

$$\mathbb{R}^+ v \cap T = \mathbb{N}v_m \tag{18.643}$$

pour un certain multiple v_m de v.

(2) $\|u_1\| \leqslant \|v\|$ **pour tout** v

Nous montrons à présent qu'il existe $u_1 \in T$ tel que $\|u_1\| \leqslant \|v\|$ pour tout $v \in T$. Si tel n'était pas le cas, il existerait une suite $v_k \in T$ telle que $\|v_{k+1}\| < \|v_k\|$. Toute cette suite serait contenue dans la couronne (compacte) de rayons δ et $\|u_1\|$. Quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que (v_k) converge[71]. Cette suite serait de Cauchy et pour tout ϵ (en particulier $\epsilon < \delta$), il existerait p, q tels que $\|v_p - v_q\| < \epsilon$. Puisque T est un groupe pour l'addition, nous aurions $v_p - v_q \in T$ avec $\|v_p - v_q\| < \epsilon \leqslant \delta$.

[71] Proposition 7.343.

(3) **Première pause**

Si T est engendré seulement par u_1, nous avons fini. Autrement dit, si tout T est dans un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$, nous avons terminé.

Dans la suite, nous supposons donc que T n'est pas contenu dans un sous-espace de dimension 1.

(4) $T = \mathbb{Z}u_1 + \mathbb{Z}u_2$ Soient u_1 et u_2 les deux plus petits éléments de T en norme (peut-être ex-aequo). Ces deux éléments ne sont pas colinéaires, sinon leur différence serait plus petite. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit $v \in T$. Comme $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2. \tag{18.644}$$

Notre but est à présent de prouver que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Si ce n'était pas le cas, une simple translation nous mènerait dans les circonstances du lemme 18.214. Nous aurions alors que, soit $\|v\|$, soit $\|u_1 + u_2 - v\|$ serait strictement plus petit que le plus grand entre $\|u_1\|$ et $\|u_2\|$. Cela contredirait le fait que $\|u_1\|$ et $\|u_2\|$ étaient les deux plus petits.

□

PROPooPQYXooIDZlHy

Proposition 18.217 ([1]).
Si G est un groupe de pavage[72] *de $\mathbb{R}^2$ et si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une isométrie affine, alors le groupe*

$$G' = f \circ G \circ f^{-1} = \{f \circ g \circ f^{-1} \text{ tel que } g \in G\} \tag{18.645}$$

est un groupe de pavage.

Démonstration. Soit un compact K tel que (G, K) soit un pavage. Nous notons $K' = f(K)$. Nous devons prouver deux choses :

- $f \circ G \circ f^{-1}$ est un groupe de déplacements ;
- (G', K') est un pavage.

Ceci mène à prouver trois éléments.

(1) G' **est constitué de déplacements** Les éléments de G sont des isométries, ainsi que f et f^{-1}. Donc les éléments de G' sont des isométries.

Soit $g \in G$. Comme g est affine, il existe une décomposition $g = \tau_v \circ g_0$ où g_0 est linéaire. De même $f = \tau_w \circ f_0$. Les règles du produit et de l'inverse de la proposition 11.62(2)(3) nous indiquent que la partie linéaire de fgf^{-1} est $f_0 g_0 f_0^{-1}$.

En ce qui concerne le déterminant de $f_0 g_0 f_0^{-1}$, c'est la proposition 8.15 qui nous indique que

$$\det(f_0 g_0 f_0^{-1}) = \det(f_0)\det(g_0)\det(f_0^{-1}) = \det(f_0)\det(g_0)\det(f_0)^{-1} = \det(g_0) = 1. \tag{18.646}$$

(2) $G' \cdot K' = \mathbb{R}^2$ Comme f est affine, K' est encore compact[73] Nous avons :

$$\begin{aligned}
(f \circ G \circ f^{-1})\big(f(K)\big) &= \bigcup_{g\in G}\bigcup_{k\in K}(f \circ g \circ f^{-1})\big(f(k)\big) && \text{(18.647a)}\\
&= \bigcup_{g\in G}\bigcup_{k\in K}(f \circ g)(k) && \text{(18.647b)}\\
&= \bigcup_{g\in G} f\Big(\bigcup_{k\in K} g(k)\Big) && \text{(18.647c)}\\
&= \bigcup_{g\in G}(f \circ g)(K) && \text{(18.647d)}\\
&= f\Big(\bigcup_{g\in G} g(K)\Big) && \text{(18.647e)}\\
&= f\big(G \cdot K\big) && \text{(18.647f)}\\
&= \mathbb{R}^2. && \text{(18.647g)}
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que f est bijective et que $G \cdot K = \mathbb{R}^2$.

[72] Définition 18.207.
[73] Il suffit de prouver que $f(K)$ est fermé et borné par le théorème de Borel-Lebesgue 9.24.

(3) **L'autre condition** Deux éléments de G' s'écrivent fg_1f^{-1} et fg_2f^{-1}. Nous les supposons tels que

$$(fg_1f^{-1})\cdot\operatorname{Int}(K')\cap(fg_2f^{-1})\cdot\operatorname{Int}(K')\neq\varnothing. \tag{18.648}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}(fg_1f^{-1})\cdot\operatorname{Int}(K')\cap(fg_2f^{-1})\cdot\operatorname{Int}(K')&=f\big(g_1\cdot\operatorname{Int}(K)\big)\cap f\big(g_2\cdot\operatorname{Int}(K)\big) &\text{(18.649a)}\\ &=f\big(\underbrace{g_1\cdot\operatorname{Int}(K)\cap g_2\cdot\operatorname{Int}(K)}_{\neq\varnothing}\big) &\text{(18.649b)}\\ &\neq\varnothing. &\text{(18.649c)}\end{aligned}$$

SUBEQooWPMUooWvfdAw
SUBEQooTOGSooNrArAk

Justifications :

- Égalité (18.649a) parce qu'un peu de topologie nous enseigne que $f^{-1}\big(\operatorname{Int}(K')\big)=\operatorname{Int}\big(f^{-1}(K')\big)=\operatorname{Int}(K)$ parce que f est affine.
- Égalité (18.649b) parce que, f étant bijective, $f(A)\cap f(B)=f(A\cap B)$;

□

THOooUPHQooYfeHAy

Théorème 18.218 ([485, 622]).
Nous notons τ_v la translation de vecteur v, $r_{A,\theta}$ la rotation de centre A et d'angle θ ainsi que $\tau_i=\tau_{e_i}$.

Un groupe G est un groupe de pavage de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe une bijection affine $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que $f\circ G\circ f^{-1}$ est un groupe de la liste suivante :

(1) $\operatorname{gr}\big(\tau_1,\tau_2\big)$

(2) $\operatorname{gr}\big(\tau_1,\tau_2,R_0(\pi)\big)$

(3) $\operatorname{gr}\big(\tau_1,\tau_{(\frac12,\frac{\sqrt3}{2})},R_0(2\pi/3)\big)$

(4) $\operatorname{gr}\big(\tau_1,\tau_2,R_0(\pi/2)\big)$

(5) $\operatorname{gr}\big(\tau_1,\tau_{(-\frac12,\frac{\sqrt3}{2})},R_0(\pi/3)\big)$.

Démonstration. Les lemmes 18.209, 18.210, 18.211, 18.212, et 18.213 montrent que les groupes listés sont des groupes de pavage. La proposition 18.217 nous montre alors que si $H=fGf^{-1}$ est dans la liste, alors G est un groupe de pavage. Il nous reste à montrer que si G est un groupe de pavage, alors il existe une application affine α telle que $\alpha G\alpha^{-1}$ est un groupe de la liste.

Soit (G,K) un pavage de $\mathbb{R}^2$. Nous notons T l'ensemble des translations dans G, plus précisément,

$$T=\{v\in\mathbb{R}^2\text{ tel que }\tau_v\in G\}. \tag{18.650}$$

(1) **Une borne pour T** Nous prouvons qu'il existe $\delta>0$ tel que $\|v\|>\delta$ pour tout $v\neq0\in T$. En effet, soit $m\in\operatorname{Int}(K)$ ainsi que r tel que $B(m,r)\subset\operatorname{Int}(K)$. Alors si $v\in T$ est tel que $\|v\|<r$ nous avons $\tau_v(m)\in\operatorname{Int}(K)$, ce qui donnerait

$$m\in\tau_v\big(\operatorname{Int}(K)\big)\cap\operatorname{Int}(K) \tag{18.651}$$

par hypothèse, cette intersection est non vide seulement si $v=0$.

Donc il existe δ tel que $\|v\|\geqslant\delta$ pour tout $v\in T$.

(2) **Utilisation du lemme**

La partie T est donc dans la position du lemme 18.216 et nous avons

$$T=\mathbb{Z}u_1+\mathbb{Z}u_2 \tag{18.652}$$

pour les vecteurs u_1 et u_2 les plus petits en norme de T.

En réalité, il se peut que T soit plus petit que ça, parce que G peut par exemple ne contenir aucune translation. Nous avons trois possibilités :

- $T=\{0\}$,
- $T=\mathbb{Z}u$ pour un certain $u\neq0$ dans $\mathbb{R}^2$,
- $T=\mathbb{Z}u_1+\mathbb{Z}u_2$ pour certains $u_1,u_2\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

(3) **Translation** Si $r, s \in G$, alors l'élément $rsr^{-1}s^{-1}$ est une translation. En effet, puisque les éléments de G sont des déplacements, ce sont des applications affines et donc il existe des applications linéaires A_r, A_s et des translations τ_r, τ_s telles que $r = A_r \circ \tau_r$ et $s = A_s \circ \tau_s$. La proposition 11.62 nous donne les inverses. Nous avons

$$rsr^{-1}s^{-1} = (A_r \circ \tau_r)(A_s \circ \tau_s)(A_r^{-1} \circ \tau_{-A_r v_r})(A_s^{-1} \circ \tau_{-A_s v_s}). \tag{18.653}$$

La partie linéaire de cela est

$$A_r \circ A_s \circ A_r^{-1} \circ A_s^{-1}. \tag{18.654}$$

C'est donc une composée de rotations centrées en $(0,0)$. Mais ces rotations forment un groupe abélien (proposition 18.128). Donc nous pouvons écrire

$$A_r \circ A_s \circ A_r^{-1} \circ A_s^{-1} = A_r \circ A_r^{-1} \circ A_s \circ A_s^{-1} = \mathrm{Id}\,. \tag{18.655}$$

Tout ceci pour dire que dès que $r, s \in G$, l'élément $rsr^{-1}s^{-1}$ est une translation.

(4) **Les parties linéaires[1]** Nous savons de l'exemple 11.19 que les éléments de G s'écrivent sous la forme $f = \tau_v \circ \alpha$ où $v \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire.

De plus, f étant une isométrie de $(\mathbb{R}^2, d)$, l'application α est une isométrie de $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$. Puisque α est une isométrie, $\det(\alpha) = \pm 1$. Mais les déplacements conservent l'orientation ; donc α doit conserver l'orientation, et la proposition 8.32 nous dit que $\det(\alpha) > 0$. Donc

$$\det(\alpha) = 1. \tag{18.656}$$

Le théorème 18.96 dit que α est la composition d'un nombre pair de réflexions. Mais comme il y en a au plus trois (théorème 18.188), l'application α est composée de zéro ou deux réflexions.

Donc les parties linéaires des éléments de G sont des rotations.

(5) **Les autres**

Les parties linéaires des éléments de G sont des rotations. Mais les éléments de G eux-mêmes ne sont pas tellement mystérieux. Puisque ce sont des isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$, elles sont composées de 0, 1, 2 ou 3 réflexions.

Mais ce sont des déplacements, donc ils préservent l'orientation et le théorème 18.96 dit qu'ils sont des composées de zéro ou deux réflexions (nombre pair). Ce sont donc des rotations.

(6) **Hein ?** Les éléments linéaires de G sont des rotations. Et les autres aussi ? Les linéaires sont des rotations autour de $(0,0)$; les autres sont des rotations autour de points autres que $(0,0)$.

C'est pourquoi dans la suite, nous préciserons « rotation linéaire » pour une rotation autour de $(0,0)$ et nous dirons « rotation » pour une rotation en général. Dans le contexte affine, il faut toujours faire attention à ça : une rotation peut très bien n'être pas linéaire[74].

(7) **Les rotations linéaires stabilisent T** Nous prouvons maintenant que les rotations linéaires de G stabilisent T, c'est-à-dire que si $v \in T$ et si α est une rotation linéaire de G, alors $\alpha(v) \in T$. La transformation $\alpha\tau_v\alpha^{-1}$ est dans G. Mais pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$(\alpha\tau_v\alpha^{-1})(x) = \alpha\big(\alpha^{-1}(x) + v\big) = x + \alpha(v) = \tau_{\alpha(v)}(x). \tag{18.657}$$

EQooLLZVooUuahir

Donc $\alpha\tau\alpha^{-1} = \tau_{\alpha(v)}$ et $\alpha(v) \in T$.

(8) **Exclusion de $T = \{0\}$** Le fait que $T = \{0\}$ ne signifie pas que tous les éléments de G sont des rotations ; il peut encore y avoir des composées de rotations et de translations $A \circ \tau$. Cela étant dit, si $T = \{0\}$, il n'en reste pas moins que $rsr^{-1}s^{-1}$ est une translation, c'est-à-dire est égal à Id. Mais $rsr^{-1}s^{-1} = e$ implique $rs = sr$.

Donc G est abélien. Les éléments de G sont donc des rotations qui commutent deux à deux. Puisqu'une rotation a son centre comme unique point fixe, le lemme 18.215 nous dit que tous les éléments de G sont des rotations de même centre.

Soit c le centre commun de tous les éléments de G. Vu que K est compact dans $\mathbb{R}^2$, il existe $r > 0$ tel que $K \subset B(c, r)$. Puisque G stabilise toutes les boules centrées en c, nous avons

$$G \cdot K \subset B(c, r). \tag{18.658}$$

Donc nous n'avons pas un recouvrement de $\mathbb{R}^2$. Le cas $T = \{0\}$ est exclu.

[74] Lorsque, ailleurs dans le Frido, nous disons « rotation », souvent nous pensons « rotation linéaire ». Gardez cependant à l'esprit qu'une rotation peut très bien être centrée ailleurs qu'en l'origine, et soyez toujours capable de préciser le cas échéant.

(9) **Exclusion de $T = \mathbb{Z}u$** Nous supposons à présent que $T = \mathbb{Z}u$ pour un certain $u \in \mathbb{R}^2$.

(9a) $r_0 = \pm \mathrm{Id}$ Nous savons que tous les éléments de G sont des rotations ; soit un élément r de G. La proposition 18.127(3) nous indique qu'il existe un point $a \in \mathbb{R}^2$ ainsi qu'une rotation linéaire r_0 telle que $r = \tau_a^{-1} r_0 \tau_a$. Nous allons prouver que r_0 est $\pm \mathrm{Id}$. D'abord,

$$r\tau_u r^{-1} = \tau_a^{-1} r_0 \tau_a \tau_u \tau_a^{-1} r_0^{-1} \tau_a = \tau_a^{-1} r_0 \tau_u r_0^{-1} \tau_a. \tag{18.659}$$

Ensuite, nous appliquons cela à $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(\tau_a^{-1} r_0 \tau_u r_0^{-1} \tau_a)(x) &= (\tau_a^{-1} r_0 \tau_u)\big(r_0^{-1}(x+a)\big) && \text{(18.660a)}\\ &= (\tau_a^{-1} r_0)\big(r_0^{-1}(x+a) + u\big) && \text{(18.660b)}\\ &= \tau_a^{-1}\big(x + a + r_0(u)\big) && \text{(18.660c)}\\ &= x + r_0(u). && \text{(18.660d)}\end{aligned}$$

Donc $r \circ \tau_u \circ r^{-1} = \tau_{r_0(u)}$, ce qui prouve que $r_0(u) \in T$. Comme $\|r_0(u)\| = \|u\|$ nous avons forcément $r_0(u) = \pm u$.

Si $r_0(u) = u$, alors $r_0 = \mathrm{Id}$ (parce que r_0 est une rotation fixant plus qu'un seul point). Dans ce cas, $r = \mathrm{Id}$.

Si au contraire $r_0(u) = -u$, alors $r_0 = -\mathrm{Id}$.

(9b) **Forme générale** Donc si r est un élément non trivial de G nous avons $r = \tau_a^{-1} \circ (-\mathrm{Id}) \circ \tau_a$, et alors

$$\big(\tau_a^{-1} \circ (-\mathrm{Id}) \circ \tau_a\big)(x) = \tau_a^{-1}(-\mathrm{Id})(x+a) = \tau_a^{-1}(-x-a) = -x - 2a. \tag{18.661}$$

Donc pour tout $r \in G$, il existe $a \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$r(x) = -x - 2a. \tag{18.662}$$

EQooQGNVooKyCCYW

Pour information, le centre de cette rotation est $-a$ (c'est le seul point fixe).

(9c) **Les centres sont alignés** Soit r une rotation de centre $-a$ et s de centre $-b$. Alors

$$(rs)(x) = r(-x-2b) = x + 2b - 2a = x + 2(b-a). \tag{18.663}$$

Donc $rs = \tau_{2(b-a)}$.

Cela prouve que $2(b-a) \in \mathbb{Z}u$.

(9d) **Une bande** Soit la droite $D = \mathbb{R}u$. Nous considérons la bande

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } d(x, D) < r\}. \tag{18.664}$$

(9e) **Une inclusion** Nous prouvons à présent que pour tout r, nous avons

$$G \cdot B_r \subset B_r. \tag{18.665}$$

Nous savons qu'un élément général de G est une rotation centrée en un point de D, et que l'action d'une telle rotation est donnée par (18.662). Nous avons

$$\begin{aligned}d\big(r(x), D\big) &= d(x + 2a, D) && \text{(18.666a)}\\ &= d\big(\tau_{2a}^{-1}(x+2a), \tau_{2a}^{-1}(D)\big) && \text{(18.666b)}\\ &= d(x, D). && \text{(18.666c)}\end{aligned}$$

EQooNCQGooGGAhCR
EQooNFJNooSAYtBD
SUBEQooMGTMooAlRwWT

Justifications :

- Pour (18.666a), nous avons $D = -D$ et $d(x,y) = d(-x,-y)$.
- Pour (18.666b), invariance par translation de la distance dans $\mathbb{R}^2$.
- Pour (18.666c), les éléments de D sont les multiples de a ; donc cette droite est invariante par cette translation.

Bref, $d(x, D) = d\big(r(x), D\big)$. Donc, pour tout $r > 0$[75] et pour tout $g \in G$, si $x \in B_r$, alors $g(x) \in B_r$.

[75] Remarquez la notation malheureuse pour r qui est maintenant une distance alors que trois mots plus tôt, c'était un élément de G.

(9f) **Exclusion**
Comme K est compact et que la fonction $x \mapsto d(x, D)$ est continue, il existe $r > 0$ tel que $K \subset B_r$. Avec ça, $G \cdot K \subset G \cdot B_r \subset B_r$. Donc $G \cdot K$ ne recouvre pas tout $\mathbb{R}^2$ et G n'est pas un groupe de pavage.

Et nous voilà avec seulement $T = \mathbb{Z}u_1 + \mathbb{Z}u_2$ en lice.

(1) **Pause : quelques parties de G à ne pas confondre** Il convient de ne pas se perdre entre différentes parties de G. Je vous laisse méditer quelques temps sur la liste suivante :

(1a) G est le groupe que nous cherchons à déterminer ;
(1b) T est le groupe des translations de G ;
(1c) le groupe des rotations linéaires dans G ;
(1d) l'ensemble des $\tau_A^{-1} \circ r \circ \tau_A$ où r est une rotation de G centrée en A. ITEMooFWWMooNzLUGy
(1e) L est l'ensemble des parties linéaires des éléments de G. ITEMooIEJZooNaSKpc

En particulier les deux derniers points ne sont pas les mêmes.

Dans le cas (1d), il s'agit de dire que r est une rotation centrée en $A \in \mathbb{R}^2$ et écrire $r = \tau_A \circ r_0 \circ \tau_A^{-1}$ (proposition 18.127(3)) et considérer r_0. Dans ce cas, r_0 est une rotation, mais elle n'est pas ce que nous appelons la « partie linéaire » de r. Il n'y a pas de garantie que cela forme un groupe.

Si r est une rotation dans G, dans le cas (1e) il s'agit de décomposer $r = \tau_v \circ \alpha$ (lemme 11.14) et considérer α. Dans ce cas, α est linéaire, mais il n'y a pas de garantie que α soit une rotation.

(2) **L est un groupe** En trois conditions.

- Si $\alpha, \beta \in L$, il existe $v, w \in \mathbb{R}^2$ tels que $\tau_v \circ \alpha \in G$ et $\tau_w \circ \beta \in G$. La loi de produit 11.62(2) dit que $\tau_v \circ \alpha \circ \tau_w \circ \beta = \tau_{\alpha(w)+v} \circ \alpha\beta$. Donc $\alpha\beta$ est la partie linéaire d'un élément de G.
- De la même façon, en utilisant l'inverse 11.62(3), $(\tau_v \circ \alpha)^{-1} = \tau_{-\alpha^{-1}(v)} \circ \alpha^{-1}$. Donc α^{-1} est la partie linéaire d'un élément de G.
- Et enfin $\mathrm{Id} = \tau_0 \circ \mathrm{Id}$. Donc l'identité est dans L.

Ok : L est un groupe.

(3) **Précision** L'ensemble L est un groupe, certes. Mais rien ne dit que L soit un sous-groupe de G.

(4) **L préserve le réseau** Soit $\alpha \in L$. Il existe $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $g = \tau_v \circ \alpha \in G$. Soit $u \in T$. Nous allons montrer que $\alpha(u) \in T$. Vu que g et τ_u sont dans G, l'élément $g\tau_u g^{-1}$ est également dans G. Nous l'appliquons à $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
(\tau_v\alpha\tau_u\alpha^{-1}\tau_v^{-1})(x) &= (\tau_v\alpha\tau_u\alpha^{-1})(x - v) && \text{(18.667a)}\\
&= (\tau_v\alpha)\big(\alpha^{-1}(x - v) + u\big) && \text{(18.667b)}\\
&= \tau_v\big(x - v + \alpha(u)\big) && \text{(18.667c)}\\
&= x + \alpha(u) && \text{(18.667d)}\\
&= \tau_{\alpha(u)}(x). && \text{(18.667e)}
\end{aligned}$$

Donc $g\tau_u g^{-1} = \tau_{\alpha(u)} \in G$.

(5) **Question de trace** Soit $\alpha \in L$; dans la base $\{u_1, u_2\}$ la matrice de α est

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{18.668}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. La trace de cette matrice est $a + d \in \mathbb{Z}$. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par contre, la proposition 18.138 nous dit qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la matrice de α soit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{18.669}$$

La trace est $2\cos(\theta)$. La trace est invariante par changement de base[76], donc $2\cos(\theta) = a + d \in \mathbb{Z}$. Les possibilités pour $\cos(\theta)$ sont donc -1, $-1/2$, 0, $1/2$ et 1.

[76] Proposition 8.202.

(6) **Les angles possibles** Nous savons que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\cos(\pi/3) = 1/2$ (proposition 18.21(6) et lemme 18.28). La proposition 18.75 nous dit alors que, dans notre cas, les valeurs possibles pour θ dans $[0, 2\pi[$ sont

$$\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\}. \tag{18.670}$$ EQooLMPIooPQoHUI

Donc les rotations possibles dans L sont les rotations de ces angles.

Nous devons trouver quels sont les groupes qui peuvent être formés seulement avec ces éléments.

(7) **Quelques combinaisons impossibles**

Puisque L est un groupe, il y a des combinaisons impossibles. Par exemple si $R_0(\pi/3)$ et $R_0(\pi/2)$ sont dans L, alors la composée[77] $R_0(\pi/2)R_0(\pi/3) = R_0(5\pi/6)$ est également dans L. Mais comme $5\pi/6$ n'est pas dans la liste (18.670), $R_0(5\pi/6)$ n'est pas dans L.

En raisonnant de la sorte, nous voyons que si $R_0(\pi/2) \in L$, alors $L = \text{gr}\big(R_0(\pi/2)\big)$.

(8) **La liste** Plus généralement, les possibilités pour L sont

- $\{\text{Id}\}$
- $\text{gr}\big(R_0(\pi/2)\big)$
- $\text{gr}\big(R_0(\pi/3)\big)$
- $\text{gr}\big(R_0(\pi)\big)$
- $\text{gr}\big(R_0(2\pi/3)\big)$

Une justification plus courte pour cette liste est d'invoquer le théorème 18.199(2) qui dit que L étant un sous-groupe fini des isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$, il est cyclique et donc monogène. Notons pour cela que $\text{gr}\big(R_0(4\pi/3)\big) = \text{gr}\big(R_0(2\pi/3)\big)$ parce que $R_0(4\pi/3) = R_0(2\pi/3)^{-1}$. De la même manière $R_0(3\pi/2) = R_0(\pi/2)^{-1}$ et $R_0(5\pi/3) = R_0(\pi/3)^{-1}$.

(9) **Le cas un peu générique**

Nous supposons que $L = \text{gr}\big(R_0(\theta)\big)$ pour un certain θ. Nous allons voir qu'à part dans les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, il est possible de trouver une application affine α telle que le groupe $\alpha G \alpha^{-1}$ soit alors dans la liste.

Nous considérons un élément de G de la forme $\tau_{v_0} \circ R_0(\theta)$. Pour être bien clair, il n'est absolument pas garanti que v_0 soit dans T. Nous allons chercher un élément $w_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que le groupe de pavage[78] $G' = \tau_{w_0} G \tau_{w_0}^{-1}$ contienne $R_0(\theta)$. Le groupe G' contient l'élément $g = \tau_{w_0}\tau_{v_0}R_0(\theta)\tau_{w_0}^{-1}$; nous l'appliquons à $x \in \mathbb{R}^2$:

$$g(x) = R_0(\theta)x - R_0(\theta)w_0 + w_0 + v_0. \tag{18.671}$$

Nous avons $g(x) = R_0(\theta)x$ lorsque

$$w_0 = \big(R_0(\theta) - \mathbb{1}\big)^{-1} v_0. \tag{18.672}$$

Voilà pourquoi le cas $\theta = 0$ sera traité à part : dans le cas $\theta = 0$, l'opérateur $R_0(\theta) - \mathbb{1}$ n'est pas inversible. Dans les autres cas, nous avons un groupe $G' = \tau_{w_0} G \tau_{w_0}^{-1}$ qui contient $R_0(\theta)$.

Puisqu'un élément général de G est de la forme $\tau_v \circ R_0(\theta)^k$, un élément général de G' est de la forme

$$\tau_{w_0} \circ \tau_v \circ R_0(\theta)^k \circ \tau_{w_0}^{-1} = \tau_{w_0 + v - R_0(\theta)^k w} \circ R_0(\theta)^k. \tag{18.673}$$

Donc tous les éléments de G' sont encore de la forme

$$\tau_v \circ R_0(\theta)^k. \tag{18.674}$$

Mais dans G' nous avons une information capitale : $R_0(\theta)^k$ lui-même est dans G'. Donc si $\tau_v \circ R_0(\theta)^k \in G'$, alors $\tau_v \in G'$.

Vu que G' est encore un groupe de pavage, tout ce qui a été dit précédemment tient, et le groupe des translations dans G' est un réseau $T' = \mathbb{Z}u_1 + \mathbb{Z}u_2$ où u_1 et u_2 peuvent être choisis arbitrairement parmi les deux plus petits vecteurs non colinéaires de T.

Tous les éléments de G' sont de la forme $\tau_v \circ R_0(\theta)^k$ avec $v \in T'$. Donc

$$G' = \text{gr}\big(\tau_{u_1}, \tau_{u_2}, R_0(\theta)\big). \tag{18.675}$$ EQooUUDQooQpRcJi

[77] Proposition 18.139 pour l'addition des angles.
[78] Proposition 18.217.

Nous savons que $R_0(\theta)$ fixe T'. Or l'élément $R_0(\theta)u_1$ a la même norme que u_1 ; donc nous pouvons choisir $u_2 = R_0(\theta)u_1$ pour peu que $R_0(\theta)u_1$ soit non colinéaire à u_1. Et c'est ici que nous laissons le cas $\theta = \pi$ de côté.

Nous écrivons donc sans vergogne que

$$G' = \mathrm{gr}\big(\tau_{u_1}, \tau_{R_0(\theta)u_1}, R_0(\theta)\big). \tag{18.676}$$

Nous allons maintenant nous occuper de u_1. Pour cela nous considérons une rotation suivie d'une homothétie α telle que $\alpha(u_1) = e_1$. Une telle opération α d'une part, commute avec $R_0(\theta)$ et d'autre part, réalise $\alpha \circ \tau_v \circ \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(v)}$. Donc le groupe $G'' = \alpha G' \alpha^{-1}$ est, par le lemme 1.438,

$$G'' = \mathrm{gr}\big(\tau_{e_1}, \tau_{\alpha R_0(\theta)u_1}, R_0(\theta)\big). \tag{18.677}$$

Cela s'écrit aussi bien

$$G'' = \mathrm{gr}\big(\tau_{e_1}, \tau_{R_0(\theta)e_1}, R_0(\theta)\big). \tag{18.678}$$

Et voilà, ce groupe G'' est un de ceux de la liste.

(10) **Le cas $L = \{\mathrm{Id}\}$** Dans ce cas, tous les éléments de G sont de la forme τ_v avec $v \in T$. Nous considérons l'application linéaire $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\alpha(u_1) = e_1$ et $\alpha(u_2) = e_2$. Nous avons

$$(\alpha \circ \tau_{u_i} \circ \alpha^{-1})(x) = (\alpha\tau_{u_i})\alpha^{-1}(x) = \alpha\big(\alpha^{-1}(x) + u_i\big) = x + \alpha(u_i) = \tau_i(x). \tag{18.679}$$

Donc $\alpha \circ \tau_{u_i} \circ \alpha^{-1} = \tau_i$. De la même façon, si $a \in \mathbb{Z}$ nous avons $\alpha\tau_{au_i}\alpha^{-1} = \tau_{ae_i}$. Et avec tout ça, si $v \in T$, alors $v = au_1 + bu_2$ et nous avons

$$\alpha\tau_v\alpha^{-1} = \alpha\tau_{au_1}\tau_{bu_2}\alpha^{-1} = \alpha\tau_{au_1}\alpha^{-1}\alpha\tau_{bu_2}\alpha^{-1} = \tau_{ae_1}\tau_{be_2}. \tag{18.680}$$

Nous avons donc

$$\alpha G \alpha^{-1} = \mathrm{gr}(\tau_1, \tau_2). \tag{18.681}$$

Cela est un des groupes de la liste.

Notez qu'à la place de ces calculs, nous pouvions aussi invoquer la proposition 1.438.

(11) **Le cas $L = \{-\mathrm{Id}\}$** Dans le cas $\theta = \pi$, nous pouvons aller jusqu'à (18.675) et écrire

$$G' = \mathrm{gr}\big(\tau_{u_1}, \tau_{u_2}, R_0(\pi)\big). \tag{18.682}$$

Puisque $R_0(\pi) = -\mathrm{Id}$ commute avec toutes les applications linéaires et que u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, nous pouvons considérer une application linéaire $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\alpha(u_1) = e_1$, $\alpha(u_2) = e_2$. Nous avons alors

$$G'' = \alpha G' \alpha^{-1} = \mathrm{gr}\big(\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, -\mathrm{Id}\big), \tag{18.683}$$

qui est encore dans la liste.

□

18.12 Un peu de structure de O(n)

18.12.1 Valeurs propres dans O(n)

PROPooVEJGooWnqtMm

Proposition 18.219 ([623]).
Soit une matrice $A \in O(n)$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $\bar{\lambda}$ est également une valeur propre de A, et de plus $|\lambda| = 1$.

Démonstration. Dire que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A signifie qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ (non nul) tel que $Ax = \lambda x$. Comme les éléments de la matrice A sont réels,

$$A\bar{x} = \bar{A}\bar{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \bar{\lambda}\bar{x}. \tag{18.684}$$

Donc $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A pour le vecteur propre $\bar{x}$.

Soit λ une valeur propre de A de vecteur propre x. Alors nous avons d'une part

$$\langle \overline{Ax}, Ax\rangle = \langle A^tA\bar{x}, x\rangle = \langle x, \bar{x}\rangle, \tag{18.685}$$

et d'autre part

$$\langle \overline{Ax}, Ax\rangle = \langle \bar{\lambda}\bar{x}, \lambda x\rangle = |\lambda|^2\langle \bar{x}, x\rangle. \tag{18.686}$$

Puisque $x \neq 0$ nous avons aussi $\langle \bar{x}, x\rangle \neq 0$. Par conséquent $|\lambda|^2 = 1$ et $|\lambda| = 1$. □

LEMooNEDQooNRmASH

Lemme 18.220 ([623]).
Soient un espace vectoriel euclidien E de dimension finie et une isométrie f de E. Soit F un sous-espace de E stable par f. Alors $F^\perp$ est stable par f.

Démonstration. La restriction $f_F\colon F \to F$ est encore une isométrie ; elle est donc inversible : pour tout $y \in F$, il existe $x \in F$ tel que $y = f(x)$. Soit $a \in F^\perp$; nous montrons que $f(a) \in F^\perp$. Soit donc $y \in F$ et calculons :

$$\langle y, f(a)\rangle = \langle f(x), f(a)\rangle = \langle x, a\rangle = 0 \tag{18.687}$$

parce que $x \in F$ et $a \in F^\perp$. □

PROPooOMORooWzsrDB

Proposition 18.221 ([623]).
Soit une isométrie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(1) L'application linéaire f possède au moins une valeur propre réelle qui vaut ± 1.

(2) Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\epsilon\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \epsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{18.688}$$

avec $\epsilon, \lambda = \pm 1$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Démonstration. Le polynôme caractéristique de f, donné par $\det(f - \lambda\,\mathrm{Id})$, est à coefficients réels et de degré 3. Il possède donc au moins une solution réelle, par le corolaire 12.93. Soit donc une valeur propre réelle λ de χ_f ; par le lemme 18.219 nous avons $\lambda = \pm 1$. Soit u_1 le vecteur propre correspondant. Nous notons F l'espace engendré par u_1.

Nous avons $f(F) = F$ et donc $f(F^\perp) = F^\perp$ par le lemme 18.220. Soit une base orthonormée $\{u_2, u_3\}$ de $F^\perp$ et la matrice B de la restriction f_p à $F^\perp$. Comme l'application f_p est une isométrie de $F^\perp$, la matrice B est, par le lemme 18.134, de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\epsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \epsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{18.689}$$

pour un certain $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\epsilon = \pm 1$.

Dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice de f est alors

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{18.690}$$

comme annoncé. □

Pour classifier les isométries de $\mathbb{R}^3$, nous pouvons nous baser sur les possibilités de la matrice donnée dans le lemme 18.221. Il y a essentiellement quatre possibilités suivant les valeurs de $\lambda = \pm 1$ et $\epsilon = \pm 1$.

(1) **Si $\epsilon = \lambda = 1$** Alors la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{18.691}$$

et l'isométrie correspondante est la rotation d'angle $-\theta$ autour de la droite de u_1.

(2) **Si $\epsilon = \lambda = -1$** Alors la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{18.692}$$

Cette application est plus subtile, parce que même dans le plan $\mathrm{Span}(u_2, u_3)$, ce n'est pas une rotation. Nous allons montrer qu'il s'agit d'une réflexion autour de la droite d'angle $\theta/2$ dans le plan $\mathrm{Span}(u_2, u_3)$. Nous nommons D cette droite. Dans la base (u_1, u_2, u_3), cette droite est donnée par[79]

$$t \mapsto t\big(0, \cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\big). \tag{18.693}$$

[79] Les plus acharnés liront 4.6 pour comprendre la différence entre $\{u_1, u_2, u_3\}$ et (u_1, u_2, u_3).

L'image de u_1 par cette réflexion est $-u_1$, c'est clair.

Étudions en détail l'image de u_3. Nous devons démontrer que la droite D coupe le segment $[u_3, A(u_3)]$ perpendiculairement en son milieu.

Nous considérons la base (u_2, u_3) du plan $\text{Span}(u_2, u_3)$. En utilisant les coordonnées dans cette base, nous avons $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(u_3) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Le milieu du segment $[u_3, A(u_3)]$ est le point

$$M = \left(\frac{\sin(\theta)}{2}, \frac{1 - \cos(\theta)}{2} \right). \tag{18.694}$$

Les formules de duplication d'angle du corolaire 18.15 nous permettent d'écrire $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ en fonction de $\sin(\theta/2)$ et $\cos(\theta/2)$, et donc d'exprimer le point M de la façon suivante :

$$\begin{aligned} M &= \left(\cos(\theta/2)\sin(\theta/2), \frac{1 - \big(\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)\big)}{2} \right) && \text{(18.695a)} \\ &= \big(\cos(\theta/2)\sin(\theta/2), \sin^2(\theta/2) \big) && \text{(18.695b)} \\ &= \sin(\theta/2)\big(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2) \big). && \text{(18.695c)} \end{aligned}$$

Ce point fait donc partie de la droite D. La droite D coupe le segment $[u_3, A(u_3)]$ en son milieu.

En ce qui concerne l'orthogonalité, nous calculons le produit scalaire

$$\big(A(u_3) - u_3\big) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = \sin(\theta)\cos(\theta/2) - \big(1 + \cos(\theta)\big)\sin(\theta/2) = 0 \tag{18.696}$$

où nous avons encore utilisé les duplications d'angles et le fait que $1 = \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)$ (lemme 18.4).

(3) **Si $\epsilon = -1$ et $\lambda = 1$** Alors la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{18.697}$$

C'est la symétrie orthogonale par le plan engendré par u_1 et $v = \cos(\theta/2)u_2 + \sin(\theta/2)u_3$.

Le vecteur u_1 est bien évidemment préservé par A. En ce qui concerne le vecteur v,

$$A(v) = \cos(\theta/2) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + \sin(\theta/2) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = v. \tag{18.698}$$

Nous avons sauté quelques étapes de calcul mettant en scène les formules de duplication d'angle[80] : exprimer $\cos(\theta) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$ et $\sin(\theta) = 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)$.

Pour achever, nous devons trouver un vecteur w perpendiculaire au plan, et montrer qu'il est envoyé par A sur $-w$. Un vecteur $w = xu_1 + yu_2 + zu_3$ est perpendiculaire au plan si les deux égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \big(\cos(\theta/2)u_2 + \sin(\theta/2)u_3\big) \cdot (xu_1 + yu_2 + zu_3) = 0 && \text{(18.699a)} \\ u_1 \cdot (xu_1 + yu_2 + zu_3) = 0. && \text{(18.699b)} \end{aligned}$$

Nous avons immédiatement $x = 0$ et ensuite la relation

$$y\cos(\theta/2) + z\sin(\theta/2) = 0. \tag{18.700}$$

EQooXQMDooTywrWk

Nous devons prouver que $A(w) = -w = -yu_2 - zu_3$, c'est-à-dire que

$$y \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}. \tag{18.701}$$

[80] Corolaire 18.15.

La première ligne est immédiate. Nous faisons la seconde, et nous laissons à la lectrice la troisième[81]. En utilisant les formules de duplication d'angle,

$$\begin{aligned} y\cos(\theta)+z\sin(\theta) &= y\big(\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2)\big)+2z\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) && (18.702a)\\ &= y\big(2\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2)-\cos^2(\theta/2)\big)+2z\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) && (18.702b)\\ &= -y+2\cos(\theta/2)\big(y\cos(\theta/2)+z\sin(\theta/2)\big) && (18.702c)\\ &= -y && (18.702d)\end{aligned}$$

où pour la dernière ligne, nous avons utilisé la relation (18.700).

(4) **Si $\epsilon=1$ et $\lambda=-1$** Alors la matrice est

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}. \tag{18.703}$$

Cela est la composition entre la symétrie de plan $\mathrm{Span}(u_2,u_3)$ et la rotation d'angle θ dans ce plan.

18.12.2 Sous-groupes finis de SO(3)

LEMooWIMMooXOCfSt

Lemme 18.222 ([1]).
Points fixes pour SO(3).

(1) *Tout élément de* SO(3) *possède une droite de points fixes.*

(2) *Tout élément non trivial de* SO(3) *possède une seule droite de points fixes.*

Démonstration. Le polynôme caractéristique d'un élément de SO(3) est de degré trois et possède donc (en comptant les multiplicités), trois racines dont une réelle par le corolaire 12.93. Comme nous sommes en dimension impaire, le coefficient du terme de degré 3 est -1 et le polynôme caractéristique de $g\in\mathrm{SO}(3)$ s'écrit

$$\chi_g(X)=-(X-\lambda_1)(X-\bar{\lambda}_1)(X-s) \tag{18.704}$$

avec $s=\pm1$ que nous allons tout de suite fixer. Nous savons que $\det(g)=\chi_g(0)$ mais aussi que $\det(g)=1$. Donc

$$1=\det(g)=\chi_g(0)=\lambda_1\bar{\lambda}_1 s=s. \tag{18.705}$$

Tout cela pour dire que tout élément de SO(3) possède une valeur propre égale à 1, et donc une droite de points fixes.

Pour continuer, supposons que g possède deux droites distinctes de points fixes. En particulier g fixe un plan. Une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ peut être choisie en prenant deux vecteurs e_1, e_2 dans ce plan et un vecteur e_3 perpendiculaire au plan.

Puisque g est une isométrie, la base reste orthonormée sous l'action de g. Donc g a pour matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \pm1\end{pmatrix}. \tag{18.706}$$

Pour que le déterminant soit 1, il faut que la matrice soit l'identité. □

PROPooBHPNooHPlgwH

Proposition 18.223 ([1, 624, 137, 625, 559]).
Les sous-groupes finis de SO(3) *sont :*

(1) *les groupes cycliques $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,*

(2) *les groupes diédraux D_n,*

(3) *le groupe alterné A_4,*

(4) *le groupe alterné A_5*

(5) *le groupe symétrique S_4.*

Démonstration. Soit G, un sous-groupe fini de SO(3). Par la proposition 8.44, les éléments de G sont des isométries de $\mathbb{R}^3$, et le lemme 18.222 dit que tout élément de G possède une droite de points fixes.

Un point de la sphère unité fixé par $g\in G$ est un **pôle** de g. Nous nommons Ω l'ensemble des pôles des éléments non triviaux de G.

[81] Je n'ai pas vérifié, alors faites attention.

(1) **Une action** Le groupe G agit sur Ω. En effet si $x \in \Omega$, alors x est fixé par un élément g. Montrons que $h(x)$ est également fixé par un élément de G. Pas dur : $(hgh^{-1})h(x) = h(x)$; donc $h(x)$ est un pôle de hgh^{-1}.

(2) **Les fixateurs sont cycliques** Nous montrons à présent que pour tout $x \in \Omega$, le sous-groupe $\mathrm{Fix}(x)$ est cyclique. Soit donc $x \in \Omega$, le plan orthogonal $\sigma = \mathrm{Span}(x)^\perp$ et $h \in \mathrm{Fix}(x)$. Nous avons $h(\sigma) = \sigma$. En effet si $y \in \sigma$ nous avons

$$0 = y \cdot x = h(y) \cdot h(x) = h(y) \cdot x, \tag{18.707}$$

donc $h(y)$ est perpendiculaire à x. L'inclusion inverse se démontre de même : si $y \in \sigma$ alors $y = h\big(h^{-1}(y)\big)$ alors que $h^{-1}(y) \in \sigma$.

La restriction de h à σ est une isométrie de σ. Prenant une isométrie $f : \sigma \to \mathbb{R}^2$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Fix}(x) &\to \mathrm{SO}(2) \\ h &\mapsto f \circ h \circ f^{-1}. \end{aligned} \tag{18.708}$$

est un morphisme injectif de groupes. En effet nous avons d'une part

$$\varphi(hh') = f \circ h \circ h' \circ f^{-1} = fhf^{-1}fh'f^{-1} = \varphi(h)\varphi(h'), \tag{18.709}$$

d'où le morphisme. Et d'autre part, si $\varphi(h) = \varphi(h')$ alors $f \circ h \circ f^{-1} = f \circ h' \circ f^{-1}$, qui donne immédiatement $h = h'$.

Nous en déduisons que $\mathrm{Fix}(x)$ est isomorphe à un sous-groupe de $SO(2)$ (l'image de φ). Le lemme 18.141 en fait un groupe cyclique.

(3) **Taille des fixateurs** Soient Ω_i les orbites. Si $x, y \in \Omega_i$ alors nous montrons que $|\mathrm{Fix}(x)| = |\mathrm{Fix}(y)|$ avec la bijection

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Fix}(x) &\to \mathrm{Fix}(y) \\ h &\mapsto g^{-1}hg \end{aligned} \tag{18.710}$$

où g est choisie de façon à avoir $y = g(x)$ (possible parce que x et y sont dans la même orbite). Cela est surjectif parce que si $k \in \mathrm{Fix}(x)$ alors $k = \varphi(gkg^{-1})$ et l'on vérifie que $gkg^{-1} \in \mathrm{Fix}(y)$. L'application φ est également injective parce que si $ghg^{-1} = gh'g^{-1}$ alors $h = h'$.

(4) **Un peu de notations** Puisque tous les fixateurs des éléments d'une orbite ont la même taille (finie), nous pouvons noter

$$n_i = |\mathrm{Fix}(x_i)| \tag{18.711}$$

pour $x_i \in \Omega_i$. Nous notons également r le nombre d'orbites de G.

La formule de Burnside du théorème 2.41, avec les notations d'ici, donne

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|. \tag{18.712}$$

(5) **Une belle formule** Soit l'ensemble

$$A = \{(g, x) \text{ tel que } g \in G \setminus \{e\}, x \in \mathrm{Fix}(g)\} \tag{18.713}$$

où par $\mathrm{Fix}(g)$ nous entendons les pôles de G fixés par g.

Il y a $|G| - 1$ possibilités pour la composante g, mais chaque élément $g \neq e$ possède exactement deux pôles, donc l'ensemble A contient exactement $2(|G| - 1)$ éléments.

Nous pouvons calculer le nombre d'éléments dans A d'une autre façon : pour chaque $x \in \Omega$ nous avons $|\mathrm{Fix}(x)| - 1$ éléments de $G \setminus \{e\}$ qui fixent x. Donc

$$|A| = \sum_{x \in \Omega} \big(|\mathrm{Fix}(x)| - 1\big). \tag{18.714}$$

Mais $|\mathrm{Fix}(x)|$ est constant sur les orbites. Nous coupons donc la somme sur Ω en plusieurs sommes sur les orbites Ω_i :

$$|A| = \sum_{i=1}^{r} \sum_{x \in \Omega_i} \big(|\mathrm{Fix}(x)| - 1\big) = \sum_i |\Omega_i|(n_i - 1). \tag{18.715}$$

En égalisant les deux façons de calculer $|A|$, nous déduisons la formule

$$2\big(|G|-1\big)=\sum_i |\Omega_i|(n_i-1). \tag{18.716}$$

Nous utilisons ensuite la relation orbite-stabilisateur, proposition 2.34 : $|\operatorname{Fix}(x_i)||\Omega_i|=|G|$; la formule (18.716) devient

$$2\big(|G|-1\big)=\sum_i |G|-\sum_i \frac{|G|}{n_i}=r|G|+|G|\sum_i\frac{1}{n_i}, \tag{18.717}$$

ou encore, en simplifiant par $|G|$:

$$2-\frac{2}{|G|}=r-\sum_i\frac{1}{n_i}=\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{n_i}\right). \tag{18.718}$$

Nous pouvons aussi repartir de (18.716) et sommer de façon plus simple $\sum_i|\Omega_i|=|\Omega|$ pour obtenir

$$2\big(|G|-1\big)=r|G|-|\Omega| \tag{18.719}$$

où Ω est l'ensemble des pôles de $G\setminus\{e\}$.

(6) **Quelles sont les possibilités ?** Les nombres $|G|$, r et n_i sont des entiers. Nous allons voir qu'il n'y a pas des centaines de possibilités pour satisfaire la relation (18.718). D'abord, pour toute valeur de $|G|$ (strictement plus grande que 1),

$$1\leqslant 2-\frac{2}{|G|}<2. \tag{18.720}$$

Ensuite, si g fixe x alors g^{-1} fixe également x, de sorte que $n_i=|\operatorname{Fix}(x_i)|\geqslant 2$ pour tout i. Donc tous les termes dans la somme à droite de (18.718) sont dans $[\frac{1}{2},1[$. Nous avons donc au minimum deux termes, et au maximum trois. Autrement dit : $r=2$ ou $r=3$.

(7) **Si $r=2$** Le plus simple est de repartir de (18.719). En posant $r=2$ nous trouvons tout de suite $|\Omega|=2$. Il y a donc exactement deux pôles pour l'action de G sur la sphère unité.

Tous les éléments de G laissent donc le même axe invariant et G est un sous-groupe des isométries du plan qui lui est perpendiculaire. Autrement dit, G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(2)$ et donc cyclique par le lemme 18.141.

Nous étudions à présent le cas $r=3$. Vu que ça va être un peu long, nous sautons un niveau d'indentation.

(1) **Les possibilités pour $r=3$** Nous devons voir les solutions entières $(n_1,n_2,n_3,|G|)$ de

$$2-\frac{2}{|G|}=3-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}-\frac{1}{n_3}<2. \tag{18.721}$$

Il faut en particulier que

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}>1, \tag{18.722}$$

ce qui signifie qu'au moins un des n_i doit être 1 ou 2, mais qu'il n'est pas possible que tous les n_i soient plus grands ou égaux à 3. Puisque $n_i=|\operatorname{Fix}(x_i)|\geqslant 2$, nous en déduisons qu'au moins un des n_i doit valoir 2. Nous posons donc $n_1=2$.

De plus, nous savons que les n_i doivent diviser $|G|$. Donc $|G|$ est pair.

(2) **Si $n_2=2$** Nous sommes dans le cas $r=3$, $n_1=2$, $n_2=2$. Nous avons

$$\frac{1}{n_3}=\frac{2}{|G|}, \tag{18.723}$$

mais aussi $n_3=|G|/|\Omega_3|$ d'où nous déduisons que $|\Omega_3|=2$. Nous avons donc une orbite à deux éléments. Soit $\Omega_3=\{x,y\}$ avec $x\neq y$.

Le groupe $\operatorname{Fix}(x)$ est un groupe à $|G|/2$ éléments. Il est donc normal par le lemme 3.24. Si $g\in G$ est tel que $g(x)=y$ alors nous avons $\operatorname{Fix}(y)=g\operatorname{Fix}(x)g^{-1}$, mais comme $\operatorname{Fix}(x)$ est normal nous avons $\operatorname{Fix}(x)=\operatorname{Fix}(y)$. Donc tous les éléments de $\operatorname{Fix}(x)$ fixent x et y. Le groupe $\operatorname{Fix}(x)$ est donc un sous-groupe de $\mathrm{SO}(2)$ et est cyclique, comme vu plus haut.

Mais de plus nous avons forcément $y = -x$ parce qu'un élément de G qui fixe un point fixe également l'opposé. Vu que $\Omega_3 = \{x, -x\}$, il existe $s \in G$ tel que $s(x) = -x$. Évidemment, s n'est pas dans $\mathrm{Fix}(x)$ et les points fixes de s ne sont pas parmi x et $-x$. Donc l'élément s^2 a au moins 4 points fixes : les deux de s ainsi que x et $-x$. Il a donc au moins deux droites de points fixes, et est donc l'identité : $s^2 = e$.

De plus, vu que $s(y)$ doit être égal soit à x soit à y, et que $s(x) = y$, l'injectivité de s donne $s(y) = x$.

Soit a, un générateur de $\mathrm{Fix}(x)$. Nous allons montrer que $G = \mathrm{gr}(s, sa)$. Nous avons déjà

$$(sa)(x) = s(x) = y \tag{18.724a}$$
$$(sa)(y) = s(y) = x. \tag{18.724b}$$

Donc sa inverse x et y. Mais sa a ses propres deux points fixes (qui ne sont ni x ni y). L'élément $(sa)^2$ a donc quatre points fixes sur la sphère unité : x, y et les deux de sa. Nous en déduisons que $(sa)^2 = e$.

Nous nous souvenons que a est un générateur $\mathrm{Fix}(x)$. Mais $a = s \cdot sa$, donc $a^k = (ssa)^k$. Nous en déduisons que $\mathrm{gr}(s, sa)$ contient au moins $\mathrm{Fix}(x)$.

D'autre part si h et h' sont des éléments distincts dans $\mathrm{Fix}(x)$, alors sh et sh' sont des éléments distincts de $\mathrm{gr}(s, sa)$ qui ne sont pas dans $\mathrm{Fix}(x)$. Autrement dit, la partie

$$A = \{sh \text{ tel que } h \in Fix(x)\} \tag{18.725}$$

est une partie de même cardinal que $\mathrm{Fix}(x)$ tout en n'ayant aucune intersection avec $\mathrm{Fix}(x)$ (note : l'identité n'est pas dans A). Mais $|\mathrm{Fix}(x)| = |G|/2$, donc $A \cup \mathrm{Fix}(x) = G$. Et justement $A \cup G \subset \mathrm{gr}(s, sa)$. Nous en déduisons que $\mathrm{gr}(s, sa) = G$.

Le théorème 18.185 nous assure que le groupe G est alors le groupe diédral parce que les éléments s et sa vérifient les relations données en 18.179.

(3) **Si $r = 3$, les autres cas possibles** Nous repartons de (18.718) en posant $r = 3$. Nous obtenons ceci :

$$1 + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}. \tag{18.726}$$

Nous avons déjà vu que $n_1 = 2$ était obligatoire, et que tous les cas où deux des n_i sont égaux à 2 sont déjà couverts. Donc n_2 et n_3 valent 3 ou plus.

Nous trions les n_i dans l'ordre croissant. Si $n_2 = 4$ ou plus, alors n_3 vaut 4 ou plus. Mais

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 < 1 + \frac{2}{|G|}. \tag{18.727}$$

Donc $n_3 = 3$ est obligatoire. Nous avons alors l'inégalité suivante qui restreint n_3 :

$$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{3}{|G|} > \frac{1}{6}. \tag{18.728}$$

Donc n_3 est 3, 4 ou 5.

Les derniers cas à couvrir sont :

- $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 3)$. Dans ce cas, $\frac{7}{6} = 1 + \frac{2}{|G|}$, donc $|G| = 12$.
- $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 4)$. Dans ce cas, $|G| = 24$.
- $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 5)$. Dans ce cas, $|G| = 60$.

(4) **Le cas $(2, 3, 3)$**

Nous utilisons les relations $n_i|\Omega_i| = |G|$ pour connaître la taille des orbites. Nous avons :

(4a) $2|\Omega_1| = 12$, donc $|\Omega_1| = 6$,

(4b) $3|\Omega_2| = 12$, donc $|\Omega_2| = 4$,

(4c) $3|\Omega_3| = 12$, donc $|\Omega_3| = 4$.

Nous avons $G \cdot \Omega_2 = \Omega_2$. D'une part parce que, par définition d'une orbite, $G \cdot \Omega_2 \subset \Omega_2$, et d'autre part parce que si $x \in \Omega_2$, alors $g^{-1}(x) \in \Omega_2$ et $g\big(g^{-1}(x)\big) = x$; donc Ω_2 est bien dans l'image de Ω_2 par G. Nous avons donc un morphisme $s\colon G \to S_{\Omega_2}$ que nous allons immédiatement voir comme

$$s\colon G \to S_4 \tag{18.729}$$

où S_4 est le groupe des permutations de $\{1,2,3,4\}$.

Voyons que s est injective. Si $s(g)=s(h)$, alors $s(gh^{-1})=\mathrm{Id}$. Autrement dit, l'élément sh^{-1} de G est l'identité sur Ω_2 qui contient 4 éléments. Fixant 4 points (au moins), l'élément sh^{-1} est l'identité. Par conséquent

$$s\colon G\to s(G)\subset S_4 \tag{18.730}$$

est un isomorphisme entre G et un sous-groupe de S_4. Mais $|G|=12$ et $|S_4|=24$, donc G est d'indice deux dans S_4 et est donc le groupe alterné A_4 par la proposition 5.45(3).

(5) **Le cas $(2,3,4)$** Nous avons $|G=24|$ et les orbites ont pour taille :

- $2|\Omega_1|=24$, donc $|\Omega_1|=12$,
- $3|\Omega_2|=24$, donc $|\Omega_2|=8$,
- $4|\Omega_3|=24$, donc $|\Omega_3|=6$.

(5a) **Ω_2 vient par paires** Soit $x\in\Omega$ tel que $|\operatorname{Fix}(x)|=3$. Alors $x\in\Omega_2$ parce que x est forcément dans un des Ω_i et tout élément x_i de Ω_i vérifie $|\operatorname{Fix}(x_i)|=n_i$. Mais comme les éléments de $\mathrm{SO}(3)$ sont des applications linéaires, ceux qui fixent x fixent également $-x$. Cela pour dire que si $x\in\Omega_2$, alors $-x\in\Omega_2$. Nous avons donc quatre éléments distincts a_1, a_2, a_3 et a_4 tels que

$$\Omega_2=\{\pm a_1,\pm a_2,\pm a_3,\pm a_4\}. \tag{18.731}$$

(5b) **Action sur les couples** Nous prétendons que G agit sur l'ensemble des couples $\{\pm a_i\}$. C'est encore la linéarité qui joue : l'élément $g(a_i)$ est forcément un des $\pm a_k$ (éventuellement $k=i$). Si $g(a_i)=a_k$, alors $g(-a_i)=-a_k$. Autrement dit, pour tout i, il existe un k tel que $g\big(\{a_i,-a_i\}\big)=\{a_k,-a_k\}$. Cette association $i\mapsto k$ est bijective (sinon g ne serait pas bijective), et fournit donc un morphisme de groupes

$$s\colon G\to S_4. \tag{18.732}$$

(5c) **s est injective** Nous prouvons à présent que $s(g)=\mathrm{Id}$ si et seulement si $g=e$. Dans un sens c'est évident : $g(e)=\mathrm{Id}$. Dans l'autre sens, nous devons prouver que si $g(a_i)\in\pm a_i$ pour tout i alors $g=e$.

Si $g(a_i)=a_i$ pour tout i, alors g stabilise 4 points et l'affaire est pliée. Nous supposons qu'au moins un des a_i n'est pas stabilisé par g. Pour fixer les idées nous disons que c'est a_1. Nous avons donc $g(a_1)=-a_1$. (oui : $g(a_1)=-a_1$ et non $\pm a_k$ pour un autre k parce que nous sommes sous l'hypothèse que g stabilise les couples)

L'élément g^2 fixe tout Ω_2 ; donc $g^2=e$. Nommons $\pm b$ les points fixes de g. Si $b\in\Omega_2$ alors $|\operatorname{Fix}(b)|=3$, c'est-à-dire que les éléments de G qui fixent b sont dans un groupe d'ordre 3, et le corolaire 2.15 nous indique que ces éléments ne peuvent être que d'ordre 1 ou 3, pas deux. Nous en déduisons que b n'est pas dans Ω_2 et donc que $g(a_i)=-a_i$ pour tout i.

Jusqu'à présent nous avons prouvé que si $g\in\ker(s)$ est non trivial, alors $g(a_i)=-a_i$ pour tout i.

Soit maintenant $h\in G$. Comme Ω_2 est une orbite, $h(a_i)\in\Omega_2$ et nous notons $h(a_i)=\epsilon a_k$ avec $\epsilon=\pm1$ et éventuellement $k=i$ ou éventuellement pas. Nous avons :

$$(h^{-1}gh)(a_i)=\epsilon(h^{-1}g)(a_k)=-\epsilon h^{-1}(a_k)=-\epsilon^2a_i=-a_i. \tag{18.733}$$

Donc g et $h^{-1}gh$ ont même restriction à Ω_2. En particulier $h^{-1}ghg^{-1}$ est l'identité sur Ω_2 et est donc l'identité.

Pour tout h nous avons $g=h^{-1}gh$. Les points fixes de $h^{-1}gh$ sont $\pm h^{-1}(b)$, mais aussi $\pm b$. Nous avons donc égalité d'ensemble $\{h(b),-h(b)\}=\{b,-b\}$ pour tout $h\in G$ (notez le changement de notation $h\to h^{-1}$). Cela signifie que $\{b,-b\}$ est une orbite de G. Maizon'a pas d'orbites de cardinal deux ; contradition. Nous en déduisons que e est l'unique élément de $\ker(s)$.

(5d) **Conclusion** La partie $s(G)$ est un sous-groupe de S_4 isomorphe à G. Mais au niveau des cardinaux, $|G|=24$ en même temps que $|S_4|=24$. Donc $G\simeq s(G)\simeq S_4$.

Nous passons au cas $(2,3,5)$, et comme ça va être long et douloureux[82], nous sautons un niveau d'indentation.

Au niveau du cardinal de G,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=1+\frac{2}{|G|}, \tag{18.734}$$

[82] Mais pas autant que le théorème 32.36, cependant.

donc $|G| = 60$. Et pour les orbites, $|\Omega_1| = 30$, $|\Omega_2| = 20$, $|\Omega_3| = 12$.

La proposition 5.55 nous indique que le seul groupe simple d'ordre 60 est le groupe A_5. Nous allons donc nous atteler à prouver que G est simple. Vous êtes prêts ?

(1) **Fixateurs et ordres** Tous les éléments de G sont dans un fixateur de type $\mathrm{Fix}(x)$, et comme l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe (corolaire 2.15), tous les éléments de G ont un ordre 2, 3 ou 5. Nous sommes dans un cas très particulier parce que

- Les trois nombres 2, 3 et 5 sont des nombres premiers distincts. Donc « diviser n_i » signifie pratiquement « être égal à n_i », surtout lorsqu'on parle de l'ordre d'un élément, qui ne peut pas être 1.
- Il existe une seule orbite de chaque taille.

Nous notons $G(n_i)$ l'ensemble des éléments de G d'ordre n_i. Les parties $G(n_i)$ ne contiennent pas l'identité.

(2) $g \in G(n_i)$ **implique** $\mathrm{Fix}(g) \subset \Omega_i$ Si $g \in G(n_i)$ et $x \in \mathrm{Fix}(g)$ alors $x \in \Omega_i$. En effet $x \in Fix(g)$ signifie $g(x) = x$ et donc aussi $g \in \mathrm{Fix}(x)$. Donc l'ordre de g divise $|Fix(x)|$, alors que l'ordre de g est n_i et que les possibilités pour $|\mathrm{Fix}(x)|$ sont exactement les n_i, lesquels sont premiers entre eux. Donc $|\mathrm{Fix}(x)| = n_i$ et $x \in \Omega_i$.

(3) $|\mathrm{Fix}(x)| = n_i$ **implique** $x \in \Omega_i$ Comme plus haut, $g \in \mathrm{Fix}(x)$ implique que l'ordre de g divise n_i et est donc égal à n_i. Autrement dit, $g \in G(n_i)$. De plus $g \in \mathrm{Fix}(x)$ implique $x \in \mathrm{Fix}(g)$. Par le cas juste au-dessus nous déduisons $x \in \Omega_i$.

(4) a **et** $-a$ **dans la même orbite**

Nous avons évidemment $\mathrm{Fix}(a) = \mathrm{Fix}(-a)$ parce que les éléments de G sont des applications linéaires. Si $|\mathrm{Fix}(a)| = n_i$ alors $a \in \Omega_i$ et aussi $|\mathrm{Fix}(-a)| = |\mathrm{Fix}(a)| = n_i$ et encore $-a \in \Omega_i$.

(5) **Nombre de** $\mathrm{Fix}(x_i)$ Soient $a, b \in \Omega_i$. Nous avons $|\mathrm{Fix}(a)| = |\mathrm{Fix}(b)| = n_i$ et $\mathrm{Fix}(a) = \mathrm{Fix}(b)$ si et seulement si $b = -a$ parce qu'un élément qui fixe a et b fixe automatiquement a, b, $-a$, et $-b$. Aucun élément non trivial ne peut fixer quatre points distincts. Autrement dit,

$$\mathrm{Fix}(a) \cap \mathrm{Fix}(b) = \begin{cases} \mathrm{Fix}(a) & \text{si } a = \pm b \\ \{e\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{18.735}$$

Chaque élément $x_i \in \Omega_i$ a son fixateur (il y en aurait $|\Omega_i| = 60/n_i$), mais ces fixateurs sont égaux deux à deux, donc il y a seulement $\frac{60}{2n_i}$ groupes distincts de la forme $|\mathrm{Fix}(x_i)|$ avec $x_i \in \Omega_i$.

(6) **Récapitulatif** En reprenant ce que nous venons de dire avec $i = 1, 2, 3$ nous trouvons :

(6a) $n_1 = 2$, avec $|\Omega_1| = 30$ et 15 groupes du type $\mathrm{Fix}(x_1)$ avec x_1 parcourant Ω_1.

(6b) $n_2 = 3$, avec $|\Omega_2| = 20$ et 10 groupes du type $\mathrm{Fix}(x_2)$ avec x_2 parcourant Ω_2.

(6c) $n_3 = 5$, avec $|\Omega_3| = 12$ et 6 groupes du type $\mathrm{Fix}(x_3)$ avec x_3 parcourant Ω_3.

Un élément non trivial de G se trouve forcément dans un et un seul de ces sous-groupes. Plus précisément, si $g \in G(n_i)$ alors g est dans un des $\mathrm{Fix}(x_i)$ avec $x_i \in \Omega_i$.

Comptons pour être sûr de ne pas s'être trompé. Chacune des lignes décrit 30 éléments de G ; par exemple, la seconde ligne donne 10 groupes de taille $|\mathrm{Fix}(x_2)| = n_2 = 3$. Mais tous ces groupes ont pour intersection exactement $\{e\}$. Donc le comptage des éléments se fait comme suit :

$$3 \times 30 - 15 - 10 - 6 + 1. \tag{18.736}$$

Le dernier $+1$ est parce que nous aurions décompté l'identité une fois de trop. Bref, on a bien 60 éléments comme il se doit.

(7) **Un ensemble à calculer deux fois** Soient les ensembles A_2, A_3 et A_5 définis par

$$A_i = \{(g, a) \in G(n_i) \times \Omega_i \text{ tel que } g(a) = a\} \tag{18.737}$$

où $G(n_i)$ est la partie de G des éléments d'ordre n_i.

Nous avons

$$|A_i| = \sum_{g \in G(n_i)} |\mathrm{Fix}(g) \cap \Omega_i|. \tag{18.738}$$

Mais les éléments de $G(n_i)$ sont d'ordre n_i, et par ce que nous avons dit plus haut, tous les éléments de $\mathrm{Fix}(g)$ sont dans Ω_i. Donc $\mathrm{Fix}(g) \cap \Omega_i = \mathrm{Fix}(g)$. Nous avons alors

$$|A_i| = \sum_{g \in G(n_i)} |\mathrm{Fix}(g)| = 2|G(n_i)| \tag{18.739}$$

parce que $|\mathrm{Fix}(g)| = 2$ pour tout g.

En comptant $|A_i|$ dans l'autre sens, nous avons

$$|A_i| = \sum_{x \in \Omega_i} |\mathrm{Fix}(x) \cap G(n_i)| \tag{18.740}$$

EQooBHIIooVcCgFd

Vu que $x \in \Omega_i$, les éléments de $\mathrm{Fix}(x)$ sont d'ordre n_i[83] (sauf e), et comme $G(n_i)$ est justement l'ensemble des éléments d'ordre n_i dans G nous avons $\mathrm{Fix}(x) \cap G(n_i) = \mathrm{Fix}(x) \setminus \{e\}$. Cela pour dire que

$$\begin{aligned}
|A_i| &= \sum_{x \in \Omega_i} \Big(|\mathrm{Fix}(x)| - 1 \Big) && \text{(18.741a)}\\
&= \sum_{x \in \Omega_i} |\mathrm{Fix}(x)| - \sum_{x \in \Omega_i} 1 && \text{(18.741b)}\\
&= \sum_{x \in \Omega_i} n_i - |\Omega_i| && |\mathrm{Fix}(x)| = n_i \text{ pcq } x \in \Omega_i \quad \text{(18.741c)}\\
&= |\Omega_i| n_i - |\Omega_i| = |G| - |\Omega_i|. && \text{(18.741d)}
\end{aligned}$$

En égalisant cela à la valeur $2|G(n_i)|$ déjà trouvée, nous déduisons les valeurs des $|G(n_i)|$:

$$|G(n_i)| = \frac{|G| - |\Omega_i|}{2}. \tag{18.742}$$

Nous avons alors

(7a) $|G(2)| = 15$

(7b) $|G(3)| = 20$

(7c) $|G(5)| = 24$

(8) **Les Sylow de G** Les p-Sylow sont définis en 5.6, et le super théorème qui répond à toutes les questions est le théorème 5.11. Dans notre cas, les diviseurs premiers de $|G| = 60$ sont 2, 3 et 5. Il faut faire attention au 2 parce que sa plus haute puissance dans la décomposition de 60 est 4 et non 2. Nous avons :

(8a) Un 2-Sylow est un sous-groupe d'ordre 4.

(8b) Un 3-Sylow est un sous-groupe d'ordre 3.

(8c) Un 5-Sylow est un sous-groupe d'ordre 5.

Entre autres :

(8a) Les 10 sous-groupes $\mathrm{Fix}(x_2)$ avec $x_2 \in \Omega_2$ sont des 3-Sylow de G.

(8b) Les 6 sous-groupes $\mathrm{Fix}(x_3)$ avec $x_3 \in \Omega_3$ sont des 5-Sylow de G.

(8c) Les 15 sous-groupes $\mathrm{Fix}(x_1)$ avec $x_1 \in \Omega_1$ sont d'ordre 2 et ne sont donc pas des 2-Sylow de G.

(9) **Tous les 3-Sylow et les 5-Sylow** Nous avons déjà trouvé 10 3-Sylow et 6 5-Sylow. Nous montrons à présent qu'il n'y en a pas d'autres. Le théorème de Sylow 5.11(4) nous indique que le nombre n_3 de 3-Sylow est :

- diviseur de 60,
- dans $[1]_3$
- au moins 10.

[83] Encore et toujours parce que les éléments de $\mathrm{Fix}(x)$ ont un ordre qui divise $|\mathrm{Fix}(x)| = n_i$ et que n_i est premier, et que nous avons exclu l'identité.

Les diviseurs de 60 sont :

$$1, 5, 3, 15, 2, 10, 6, 30, 4, 20, 12, 60. \tag{18.743}$$

Le seul qui vérifie toutes les conditions est 10. Donc G possède seulement 10 3-Sylow et ils sont tous de la forme $\text{Fix}(x_2)$ avec $x_2 \in \Omega_2$.

Même raisonnement pour les 5-Sylow : il faut

- diviseur de 60,
- dans $[1]_5$
- au moins 6.

La seule possibilité est 6.

(10) **Sous-groupe normal** Soit H, un sous-groupe normal de G. Notre but étant de prouver que G est simple, nous voulons prouver que H est soit $\{e\}$ soit G. Nous supposons que H est non trivial, et nous allons prouver que $H = G$.

Le théorème de Lagrange 2.14(1) nous dit que $|H|$ divise $|G|$. Le nombre $|H|$ ne peut donc avoir que 2, 3 et 5 comme facteurs premiers. Avec une mention spéciale pour le 2 : $|H|$ pourrait être divisible aussi par 4.

(11) **Diviseurs de $|H|$**

Soit un sous-groupe normal H de G. Puisque c'est un sous-groupe, son ordre divise celui de G (encore et toujours le théorème de Lagrange 2.14), et donc les facteurs premiers de $|H|$ ne peuvent être que 2, 3 et 5.

(12) **Si $|H|$ est divisible en 3** Alors H contient au moins un 3-Sylow. Mais nous avons vu que les 3-Sylow de H sont les 3-Sylow de G. Donc H contient tous les 3-Sylow de G, parce que les 3-Sylow sont conjugués et H est normal.

Soit E l'ensemble des sous-groupes de H. Puisqu'il est normal, H agit sur E par conjugaison, et les 3-Sylow forment une orbite. Si α est un 3-Sylow, la formule des classes (proposition 2.34(2)) nous donne

$$|H| = |\text{Fix}(\alpha)||\mathcal{O}_\alpha|. \tag{18.744}$$

Mais l'orbite $\mathcal{O}_\alpha$ de α est l'ensemble des 3-Sylow, de sorte que $|\mathcal{O}_\alpha| = 10$. Donc $|H|$ est divisible en 10.

Mais il y a pire : H contient au moins les 10 sous-groupes $\text{Fix}(x_2)$ pour $x_2 \in \Omega_2$. Ce sont 10 groupes de $|\text{Fix}(x_2)| = 3$ éléments. En décomptant e qui est dans l'intersection, cela fait

$$10 \times |\text{Fix}(x_2)| - 10 + 1 = 21 \tag{18.745}$$

éléments. Donc H contient au moins 21 éléments. Le nombre $|H|$ est donc :

- diviseur de 60
- multiple de 10
- au moins 21.

Donc c'est 30 ou 60.

(13) **Si $|H|$ est divisible en 5** Le même raisonnement tient et $|H|$ est 30 ou 60.

Nous restons avec les possibilités $|H|$ égal à 2, 4, 30 ou 60.

(1) **Si $|H| = 4$**

Alors H contient au moins un 2-Sylow. Un 2-Sylow de H est un sous-groupe contenant 4 éléments qui sont d'ordre 2^m. Le seul m possible dans G est $m = 1$. Vu qu'un 2-Sylow de H contient 4 éléments, nous sommes dans le cas où H est un 2-Sylow. Il est donc le seul 2-Sylow de H parce que H est normal, et que tous les 2-Sylow sont conjugués.

Mais tous les sous-groupes d'ordre 2 sont contenus dans un 2-Sylow. En particulier tous les 15 groupes $\text{Fix}(x_1)$ sont dans l'unique 2-Sylow H qui est soi-disant d'ordre 4. Il y a là une belle impossibilité.

Donc, le cas $|H| = 4$ est hors-concours.

(2) **Si $|H| = 2$** Alors $H = \{e, g\}$ avec $g^2 = e$. Si $h \in G$, l'élément hgh^{-1} ne peut être que e ou g (parce que H est normal). Le premier cas est $g = e$, et le second donne $gh = hg$. Donc g est dans le centre de G : il commute avec tous les éléments de G.

Comme $g \in G(2)$, nous savons que les éléments $a \in \mathrm{Fix}(g)$ sont forcément dans Ω_1 parce que les points dont les fixateurs sont formés d'éléments d'ordre 2 sont dans Ω_1. Soit $h \in G$. Nous avons $g = hgh^{-1}$ et donc aussi

$$\big(hgh^{-1}\big)\big(h(a)\big) = hg(a) = h(a), \tag{18.746}$$

donc $h(a)$ et $-h(a)$ sont des points fixes de hgh^{-1}. Ce sont donc également des points fixes de g. Nous en déduisons que g a pour points fixes les points a, $-a$, $h(a)$ et $-h(a)$. Puisque g n'est pas e, ces quatre points ne peuvent pas être distincts. Comme $h(a)$ ne peut pas être $-h(a)$, nous avons forcément $h(a) = \pm a$.

Donc l'orbite de a ne contiendrait que 2 éléments. Pas possible.

(3) **Si $|H| = 30$** À part $|H| = 60$, le dernier cas à traiter est $|H| = 30$. Nous rappelons obligeamment que

(3a) $|G(2)| = 15$

(3b) $|G(3)| = 20$

(3c) $|G(5)| = 24$.

Si H possède 30 éléments, le théorème de Sylow dit que H contient au moins un 3-Sylow et un 5-Sylow, et donc tous. Puisque pour 3 et 5, les Sylow de H et de G sont les mêmes et bien identifiés, nous allons nous baser dessus. Le sous-groupe H contient tous les 3 et 5-Sylow, donc le comptage des éléments est :

$$10 \times |\mathrm{Fix}(x_2)| + 6 \times |\mathrm{Fix}(x_3)| - 15 = 45. \tag{18.747}$$

Nous aurions aussi pu ajouter $+4 - 1$ pour compter au moins un 2-Sylow.

Donc dès que H compte 30 éléments, il en compte au moins 45. Autrement dit le cas $|H| = 30$ est impossible.

□

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 18.224
La démonstration des groupes finis de SO(3) *est longue. Je me demande si il n'y a pas moyen de faire plus court. Par exemple [624] utilise le théorème de Cauchy 3.22 que je n'utilise pas. D'autre part, toutes les références me semblent utiliser plus ou moins implicitement le fait que si le sous-groupe normal H contient un élément de $G(n_i)$, alors il les contiennent tous. J'avoue ne pas trop comprendre pourquoi.*

18.13 Systèmes de coordonnées

SECooWTPRooZbOSzO

La trigonométrie nous offre de nouveaux systèmes de coordonnées qui peuvent se révéler pratiques dans certains cas : les coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$, ainsi que les coordonnées cylindriques et sphériques sur $\mathbb{R}^3$.

18.13.1 Coordonnées polaires

18.13.1.1 Ce que ça signifie intuitivement

On a vu qu'un point M dans $\mathbb{R}^2$ peut être représenté par ses abscisses x et ses ordonnées y. Nous pouvons également déterminer le même point M en donnant un angle et une distance comme illustré sur la figure 18.10.

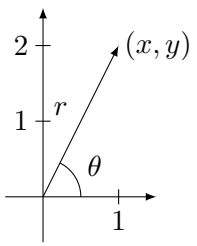


FIGURE 18.10 : Un point en coordonnées polaires est donné par sa distance à l'origine et par l'angle qu'il fait avec l'horizontale. LabelFigJWINooSfKCeA

Le même point M peut être décrit indifféremment avec les coordonnées (x, y) ou bien avec (r, θ).

Remarque 18.225.
L'angle θ d'un point n'étant à priori défini qu'à un multiple de 2π près, nous convenons de toujours choisir un angle $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Par ailleurs l'angle θ n'est pas défini si $(x, y) = (0, 0)$.

La coordonnée r est toujours positive.

Nous avons dans l'idée de définir r et θ par les formules EqrthetaxyPoal

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) & (18.748a) \\ y = r\sin(\theta). & (18.748b) \end{cases}$$

18.13.1.2 Coordonnées polaires : le théorème

THOooBETSooXSQhdX

Théorème 18.226 (Coordonnées polaires[1])**.**
Soit l'application

$$\begin{aligned} T\colon [0,\infty[\times [0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{18.749}$$

ITEMooNGOKooFCXmwy

(1) L'application T est surjective.

ITEMooMCIOooJiBvug

(2) L'application

$$T\colon]0,\infty[\times [0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \tag{18.750}$$

est bijective.

ITEMooZFRGooQPDUtX

(3) En considérant la demi-droite $D = \{(x, 0)\}_{x\geqslant 0}$, l'application

$$T\colon]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus D \tag{18.751}$$

est un C^∞-difféomorphisme[84]*.*

Démonstration. Une bonne partie de ce théorème est une conséquence de 18.59. La vraie nouveauté de ce théorème sera la régularité. Nous démontrons point par point.

(1) Pour (1). Soit $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons $a/\|a\| \in S^1$. Par la proposition 18.59, il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\frac{a}{\|a\|} = \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big). \tag{18.752}$$

Alors $a = \|a\|\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big) = T(\|a\|, \theta)$. Voilà. L'application T est surjective.

(2) Pour (2). En ce qui concerne la surjectivité,

$$T\big(0, [0, 2\pi[\big) = \{(0, 0)\}. \tag{18.753}$$

Donc le point (1) donne le surjectif lorsque nous enlevons d'un côté les points avec $r = 0$ et de l'autre le point $(0, 0)$.

Pour l'injectivité, nous supposons $T(r_1, \theta_1) = T(r_2, \theta_2)$. Puisque $\|T(r, \theta)\| = r$, nous avons tout de suite $r_1 = r_2$. Nous restons donc avec l'égalité

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{pmatrix}. \tag{18.754}$$

La proposition 18.59 dit alors que $\theta_1 = \theta_2$.

(3) Pour (3). L'application T est injective en tant que restriction d'une application injective. Pour le surjectif, soit $a \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Comme $a \notin D$, nous avons $\|a\| \neq 0$ et il est légitime de dire, comme plus haut, qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\frac{a}{\|a\|} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}. \tag{18.755}$$

Ce θ n'est pas zéro parce que $\theta = 0$ donne le point $(1, 0)$ qui est sur D.

En ce qui concerne l'inverse, nous n'allons pas nous lancer dans une étude subtile de la fonction (18.180) ; nous avons déjà démontré la continuité dans le lemme 18.66, et monter dans les dérivées nous semble un peu compliqué. Au lieu de cela, nous allons procéder en deux étapes :

[84] L'application est de classe C^∞ et son inverse est également de classe C^∞. Le plus souvent, vous voulez seulement utiliser ce théorème dans le but de faire un changement de variables dans une intégrale ; vous n'avez donc besoin que d'un C^1-difféomorphisme.

- Prouver que T est de classe C^p pour tout p en invoquant seulement des théorèmes à proposition de différentielle,
- En déduire que T^{-1} est également C^p pour tout p en invoquant le théorème d'inversion locale 17.47.

Les applications $(r,\theta)\mapsto r$, $(r,\theta)\mapsto \sin(\theta)$ et $(r,\theta)\mapsto\cos(\theta)$ sont de classe C^∞ grâce au lemme 12.273. Le lemme 12.294 sur la différentiabilité du produit montre alors que les fonctions T_1 et T_2 données par

$$T_1(r,\theta)=r\cos(\theta) \tag{18.756a}$$
$$T_2(r,\theta)=r\sin(\theta) \tag{18.756b}$$

sont différentiables[85]. Mieux, la proposition 12.297 montre que ces fonctions T_1 et T_2 sont de classe C^p pour tout p, c'est-à-dire qu'elles sont de classe C^∞. Cela montre que les coordonnées polaires sont de classe C^∞, et il faut encore parler de l'inverse.

En ce qui concerne la différentielle,

$$dT_{(r,\theta)}(u,v)=\begin{pmatrix}u\cos(\theta)-rv\sin(\theta)\\ u\sin(\theta)+rv\cos(\theta)\end{pmatrix}. \tag{18.757}$$

Donc la matrice de la différentielle est

$$dT_{(r,\theta)}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta),\end{pmatrix} \tag{18.758}$$

dont le déterminant est r (lemme 18.4 utilisé). Donc la différentielle en (r,θ) est une application linéaire inversible parce que $r\neq 0$ aux points que nous considérons. L'application $dT_{(r,\theta)}$ est bicontinue parce que nous sommes en dimension finie. Tout cela pour dire que le théorème d'inversion local 17.47 s'applique, et T^{-1} est C^p dès que T est C^p.

Puisque T est de classe C^p pour tout p, l'inverse T^{-1} est également C^p pour tout p, c'est-à-dire que T^{-1} est de classe C^∞.

□

Définition 18.227.
Ce que nous appelons ***les coordonnées polaires*** *est l'application*

$$\begin{aligned}T\colon [0,\infty[\times[0,2\pi[&\to\mathbb{R}^2\\ (r,\theta)&\mapsto\begin{pmatrix}r\cos(\theta)\\ r\sin(\theta)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{18.759}$$

du théorème 18.226(3). Selon les circonstances, nous considérons l'une ou l'autre des restrictions pour avoir une bijection ou un difféomorphisme.

EXooSDHDooJzDioW

Exemple 18.228.
Soit à calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x-y}. \tag{18.760}$$

Nous introduisons la fonction

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R}^2\setminus\{x=y\}&\to\mathbb{R}\\ (x,y)&\mapsto\frac{x^2+y^2}{x-y}.\end{aligned} \tag{18.761}$$

Une idée souvent fructueuse pour traiter ce genre de limite est de passer aux coordonnées polaires. Attention, si on veut faire les choses très explicitement, c'est un peu lourd en notations. Il s'agit de poser

$$\begin{aligned}g\colon \big]0,\infty[\times[0,2\pi[\big)\setminus\big\{\mathbb{R}\times\{\tfrac{\pi}{4}\}\cup\mathbb{R}\times\{\tfrac{5\pi}{4}\}\big\}&\to\mathbb{R}\\ (r,\theta)&\mapsto\frac{r^2}{r\big(\cos(\theta)-\sin(\theta)\big)}.\end{aligned} \tag{18.762}$$

[85] Si vous voulez seulement avoir un C^1-difféomorphisme, calculez explicitement la différentielle et montrez que c'est continu. Vous n'avez pas à utiliser la proposition 12.297 ni rien des produits tensoriels.

Bon. À strictement parler, nous aurions pu dire que g est définie pour $r = 0$, mais vu que nous voulons seulement calculer la limite pour $r \to 0$, on n'a pas besoin de la valeur en zéro. De plus les coordonnées polaires ne sont pas bijectives en l'origine. Donc bon … on s'en passe.

Quel est le lien entre f et g ? Du point de vue du calcul, le lien est qu'on a remplacé x par $r\cos(\theta)$ et y par $r\sin(\theta)$. Le vrai lien est l'égalité

$$g = f \circ T \tag{18.763}$$

où T est l'application de coordonnées polaires dont les principales propriétés sont données dans le théorème 18.226(2).

Soit un voisinage $B\big((0,0),R\big)$ de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$. Le but est de montrer que les valeurs $f(B)$ se regroupent autour d'une valeur ℓ lorsque $R \to 0$. Soyons plus précis et nommons ℓ le candidat limite. Soit $\epsilon > 0$; nous devons trouver $R > 0$ tel que $f\Big(B\big((0,0),R\big)\Big) \subset B(\ell,\epsilon)$.

Pour $R > 0$, nous avons

$$B\big((0,0),R\big) = T\big([0,R[\times [0,2\pi[\big), \tag{18.764}$$

donc

$$f(B) = g\big([0,R[\times [0,2\pi[\big). \tag{18.765}$$

Soit $r < R$. Nous avons

$$\lim_{\theta\to\pi/4} g(r,\theta) = \infty. \tag{18.766}$$

Donc $f(B)$ contient des valeurs arbitrairement grandes, quelle que soit la valeur de R. Il n'y a donc pas de limite possible.

Si vous voulez un argument un peu plus imagé, en voici un[86] basé sur une combinaison entre la méthode des coordonnées polaires et la méthode des chemins.

Certes *pour chaque* θ nous avons $\lim_{r\to 0} g(r,\theta) = 0$, mais il ne faut pas en déduire trop vite que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ vaut zéro parce que prendre la limite $r \to 0$ avec θ fixé revient à prendre la limite le long de la droite d'angle θ.

Il n'est pas possible de majorer $g(r,\theta)$ par une fonction ne dépendant pas de θ parce que cette fonction tend vers l'infini lorsque $\theta \to \pi/4$. Est-ce que cela veut dire que la limite n'existe pas ? Cela veut en tout cas dire que la méthode des coordonnées polaires ne parvient pas à résoudre l'exercice. Pour conclure, il faudra encore un peu travailler.

Nous pouvons essayer de calculer le long d'un chemin plus général $(r(t),\theta(t))$. Choisissons $r(t) = t$ puis cherchons $\theta(t)$ de telle sorte à avoir

$$\cos\theta(t) - \sin\theta(t) = t^2. \tag{18.767}$$ EqICrDSe

Le mieux serait de résoudre cette équation pour trouver $\theta(t)$. Mais en réalité il n'est pas nécessaire de résoudre : montrer qu'il existe une solution suffit. Nous pouvons supposer que $t^2 < 1$. Pour $\theta = \pi/4$ nous avons $\cos(\theta)-\sin(\theta) = 0$ et pour $\theta = 0$ nous avons $\cos(\theta)-\sin(\theta) = 1$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous enseigne alors qu'il existe une valeur de θ qui résout l'équation (18.767).

Pour être rigoureux, nous devons aussi montrer que la fonction $\theta(t)$ est continue. Pour cela il faudrait utiliser le théorème de la fonction implicite 17.49. Nous verrons dans l'exemple 18.244 comment s'en sortir sans théorème de la fonction implicite, au prix de plus de calculs. △

Les coordonnées polaires sont données par le difféomorphisme

$$\begin{aligned} g\colon]0,\infty[\times]0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \setminus D \\ (r,\theta) &\mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \end{aligned} \tag{18.768}$$

où D est la demi-droite $y = 0$, $x \geqslant 0$. Le fait que les coordonnées polaires ne soient pas un difféomorphisme sur tout $\mathbb{R}^2$ n'est pas un problème pour l'intégration parce que le manque de difféomorphisme est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$. Le jacobien est donné par

$$Jg = \det\begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} = r. \tag{18.769}$$

La fonction qui donne les coordonnées polaires est

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^+ \times]0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{18.770}$$

[86] Qui satisfera tous vos professeurs, pourvu que vous ayez compris que ce qui se cache est une histoire de valeurs de f prises sur un voisinage de $(0,0)$.

Son Jacobien vaut

$$J_\varphi(r,\theta) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x(r,\theta)}{\partial r} & \frac{\partial x(r,\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y(r,\theta)}{\partial r} & \frac{\partial y(r,\theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r. \tag{18.771}$$

PROPooFLUAooDsyMXO

Proposition 18.229.
Soit la fonction

$$\begin{aligned} T\colon]0,+\infty[\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ (r,\theta) &\mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big). \end{aligned} \tag{18.772}$$

(1) Elle est surjective.

(2) Pour tout $a\in\mathbb{R}$, l'application T est bijective sur la bande $]0,+\infty[\times[a-\pi,a+\pi[$.

(3) Si $a=0$, la fonction inverse est donnée par

$$T^{-1}(x,y) = \big(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)\big). \tag{18.773}$$

Soit $P=(x,y)$ un élément dans $\mathbb{R}^2$, on dit que $r=\sqrt{x^2+y^2}$ est le rayon de P et que $\theta=\arctan(y/x)$ est son argument principal. L'origine ne peut pas être décrite en coordonnées polaires parce que si son rayon est manifestement zéro, on ne peut pas lui associer une valeur univoque de l'angle θ.

Exemple 18.230.
L'équation du cercle de rayon a et centre $(0,0)$ en coordonnées polaires est $r=a$. △

Exemple 18.231.
Une équation possible pour la demi-droite $x=y$, $x>0$, est $\theta=\pi/4$. △

18.13.1.3 Polaires : calcul de limites

EXooBEROooPhPsSU

Exemple 18.232.
Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^2}{(x+y)^2+(x-y)^2}$

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Tentez de les faire par vous-même avant de regarder la solution qui suit.

(1) Si $(x,y)\in B(0,\delta)\setminus\{(0,0)\}$, alors le théorème 18.226 dit qu'il existe $0<r<\delta$ et $\theta\in[0,2\pi[$ tels que $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$. Avec ça nous avons

$$f(x,y) = \frac{r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2\big(\cos(\theta)+\sin(\theta)\big)^2 + r^2\big(\cos(\theta)-\sin(\theta)\big)^2}. \tag{18.774}$$

Vu que $r\neq 0$ nous pouvons simplifier par r^2. Ce qui reste au dénominateur est une fonction de θ continue sur le compact $[0,2\pi]$. Je ne peux pas vous dire quel est le minimum, mais il est facile de voir que ce n'est pas zéro. Bref,

$$f(x,y) = r^2 f(\theta) \tag{18.775}$$

et $|f(x,y)|<ar^2$ où a est une constante que vous pouvez vous amuser à calculer. En posant $\delta<\sqrt{\epsilon/a}$ nous avons $|f(x,y)|<\epsilon$ pour tout $(x,y)\in B(0,\delta)$, ce qui signifie que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

(2) Regardons la technique des coordonnées polaires. Nous remplaçons x par $r\cos(\theta)$ et y par $r\sin(\theta)$:

$$f(r,\theta) = \frac{r^4\cos(\theta)\sin^3(\theta)}{r^2} = r^2\cos(\theta)\sin^3(\theta). \tag{18.776}$$

Cette fonction tend vers zéro quand $r\to 0$. Nous avons donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0. \tag{18.777}$$

Pour cet exercice nous pouvons aussi utiliser la règle de l'étau en écrivant d'abord

$$0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \frac{|x||y^3|}{|x^2+y^2|}. \tag{18.778}$$

Mais on a $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et $|x^2+y^2| = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$, donc

$$0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \to 0. \tag{18.779}$$

(3) En passant aux polaires, nous avons

$$f(r,\theta) = \frac{r\cos\theta\sin\big(r\sin\theta\big)}{r} = \cos(\theta)\sin\big(r\sin\theta\big). \tag{18.780}$$

La limite de cette dernière fonction lorsque $r \to 0$ vaut zéro.

Une autre façon de procéder consiste à multiplier et diviser par y de telle façon à faire apparaitre $\sin(y)/y$ dont nous connaissons la limite :

$$f(x,y) = \frac{\sin(y)}{y} \cdot \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{18.781}$$

La limite du premier facteur est 1, tandis que le second peut être traité de façon classique en prenant la valeur absolue et en majorant $|x|$ par $\sqrt{x^2+y^2}$.

△

18.13.1.4 Transformation inverse : théorie

Voyons la question inverse : comment retrouver r et θ si on connait x et y ? Tout d'abord,

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{18.782}$$

parce que la coordonnée r est la distance entre l'origine et (x,y). Comment trouver l'angle ? Nous supposons $(x,y) \neq (0,0)$. Si $x = 0$, alors le point est sur l'axe vertical et nous avons

$$\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{si } y < 0 \end{cases} \tag{18.783}$$

Notez que si $y < 0$, conformément à notre convention $\theta \geqslant 0$, nous avons noté $\frac{3\pi}{2}$ et non $-\frac{\pi}{2}$.

Supposons maintenant le cas général avec $x \neq 0$. Les équations (18.748) montrent que

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}. \tag{18.784}$$

Nous avons donc

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{18.785}$$

La fonction inverse de la fonction tangente est celle définie plus haut.

18.13.1.5 Transformation inverse : pratique

Le code suivant utilise Sage.

```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

def PointToPolaire(x,y):
  x=SR(x)
  y=SR(y)
  r = sqrt(x**2+y**2)
```

```
  if x == 0:
    if y > 0:
      alpha = pi/2
    if y < 0:
      alpha = 3*pi/2
    if y == 0 :
      raise ValueError,"Pas d'angle pour le point (0,0) !!"
  else :
    alpha = atan(y/x)
  if (x < 0) and (y == 0) :
    alpha = pi
  if (x < 0) and (y > 0) :
    alpha = alpha + pi
  if (x < 0) and (y < 0 ) :
    alpha = alpha + pi
  alpha=alpha.simplify_trig()
  return (r,alpha)

print PointToPolaire(1,1)
print PointToPolaire(-2,1)
print PointToPolaire(6*sqrt(3)/2,3)
```

tex/frido/calculAngle.py

Son exécution retourne :

```
(sqrt(2), 1/4*pi)
(sqrt(5), pi - arctan(1/2))
(6, 1/6*pi)
```

Notez que ce sont des valeurs *exactes*. Ce ne sont pas des approximations, Sage travaille de façon symbolique.

18.13.1.6 Coordonnées polaires : dérivées partielles

Le changement de coordonnées pour les coordonnées polaires est la fonction

$$f\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{18.786}$$

Considérons une fonction g sur $\mathbb{R}^2$, et définissons la fonction $\tilde{g}$ par

$$\tilde{g}(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta). \tag{18.787}$$

La formule (12.817) permet de trouver les dérivées partielles de g par rapport à r et θ en termes de celles par rapport à x et y de g.

Pour faire le lien avec les notations du point précédent, nous avons

$$\begin{aligned} f_1(r,\theta) &= r\cos(\theta) \\ f_2(r,\theta) &= r\sin(\theta) \\ (x_1,x_2) &\to (r,\theta) \\ (y_1,y_2) &\to (x,y). \end{aligned} \tag{18.788}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(r,\theta) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial g}{\partial x_i}\big(f(r,\theta)\big)\frac{\partial f_i}{\partial r}(r,\theta) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial\big(r\cos\theta\big)}{\partial r}(r,\theta) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial\big(r\sin\theta\big)}{\partial r}(r,\theta) \\ &= \cos\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta). \end{aligned} \tag{18.789}$$

Prenons par exemple $g(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$. Étant donné que

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2},\tag{18.790}$$

nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{-2\cos\theta}{r^3}.\tag{18.791}$$

En utilisant la formule,

$$\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(r,\theta)=\cos(\theta)\left(\frac{-2\cos\theta}{r^3}\right)+\sin(\theta)\left(\frac{-2\sin\theta}{r^3}\right)=-\frac{2}{r^3}.\tag{18.792}$$

Nous pouvons vérifier directement que cela est correct. En effet

$$\tilde{g}(r,\theta)=g(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{1}{r^2},\tag{18.793}$$

dont la dérivée par rapport à r vaut $-2/r^3$.

En ce qui concerne la dérivée par rapport à θ, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\theta}&=\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\frac{\partial\big(r\cos(\theta)\big)}{\partial\theta}+\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\frac{\partial\big(r\sin(\theta)\big)}{\partial\theta}\\&=\left(\frac{-2\cos\theta}{r^3}\right)(-r\sin\theta)+\left(\frac{-2\sin\theta}{r^3}\right)(r\cos\theta)\\&=0.\end{aligned}\tag{18.794}$$

En résumé et avec quelques abus de notation :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}&=\cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial x}+\sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial y}\\\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\theta}&=-r\sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial x}+r\cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial y}\end{aligned}\tag{18.795}$$

18.13.2 Coordonnées cylindriques

Les **coordonnées cylindriques** sont un perfectionnement des coordonnées polaires. Il s'agit simplement de donner le point (x,y,z) en faisant la conversion $(x,y)\mapsto(r,\theta)$ et en gardant le z. Les formules de passage sont

$$\begin{cases}x=r\cos(\theta) & \text{(18.796a)}\\ y=r\sin(\theta) & \text{(18.796b)}\\ z=z. & \text{(18.796c)}\end{cases}$$

Soit T la fonction de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ définie par

$$\begin{array}{rccc}T:&]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\\&(r,\theta,z)&\mapsto&(r\cos\theta,r\sin\theta,z),\end{array}\tag{18.797}$$

Cette fonction est surjective. Elle est bijective sur chaque bande de la forme $]0,+\infty[\times[a-\pi,a+\pi[\times\mathbb{R}$, a dans $\mathbb{R}$. Il n'y a presque rien de nouveau par rapport aux coordonnées polaires. Les coordonnées cylindriques sont intéressantes si on décrit un objet invariant par rapport aux rotations autour de l'axe des z.

Exemple 18.233.
Il faut savoir ce que décrivent les équations les plus simples en coordonnées cylindriques,

- $r\leqslant a$, pour a constant dans $]0,+\infty[$, est le cylindre de hauteur infinie qui a pour axe l'axe des z et pour base le disque de rayon a centré à l'origine,
- $r=a$ est la surface du cylindre,
- $\theta=b$ est un demi-plan ouvert et sa fermeture contient l'axe des z,
- $z=c$ est un plan parallèle au plan x-y.

△

Exemple 18.234.
Un demi-cône qui a son sommet en l'origine et pour axe l'axe des z est décrit par $z = dr$. Si d est positif il s'agit de la moitié supérieure du cône, si $d < 0$ de la moitié inférieure. △

Exemple 18.235.
De même, la sphère de rayon a et centrée à l'origine est l'assemblage des calottes $z = \sqrt{a^2 - r^2}$ et $z = -\sqrt{a^2 - r^2}$. △

En ce qui concerne les coordonnées cylindriques, le Jacobien est donné par

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \tag{18.798}$$

Nous avons donc $dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & \text{(18.799a)} \\ y = r\sin\theta & \text{(18.799b)} \\ z = z & \text{(18.799c)} \end{cases}$$

avec $r \in]0,\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$. Le jacobien vaut r.

18.13.3 Coordonnées sphériques

Soit T la fonction de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ définie par

$$\begin{array}{rccc} T: &]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\} \\ & (\rho,\theta,\phi) & \mapsto & (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi), \end{array} \tag{18.800}$$

Cette fonction est surjective. Elle est bijective sur chaque bande de la forme $]0,+\infty[\times[a-\pi, a+\pi[\times[b-\pi/2, b+\pi/2[$, a et b dans $\mathbb{R}$. Si $a = 0$ et $b = -\pi/2$ la fonction inverse T^{-1} est donnée par

$$\begin{array}{rccc} T^{-1}: & \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\} & \to &]0,+\infty[\times[-\pi,\pi[\times[0,\pi[\\ & (x,y,z) & \mapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \arctan\frac{y}{x}, \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right). \end{array} \tag{18.801}$$

Soit P un point dans $\mathbb{R}^3$. L'angle ϕ est l'angle entre le demi-axe positif des z et le vecteur $\overrightarrow{OP}$, ρ est la norme de $\overrightarrow{OP}$ et θ est l'argument en coordonnées polaires de la projection de $\overrightarrow{OP}$ sur le plan x-y.

Remarque 18.236.
Dans la littérature, les angles θ et ϕ sont parfois inversés (voire, changent de nom, par exemple φ au lieu de ϕ). Il faut donc être très prudent lorsqu'on veut utiliser dans un cours des formules données dans un autre cours.

Exemple 18.237.
Il faut connaitre le sens des équations plus simples,

- $\rho \leqslant a$, pour a constant dans $]0,+\infty[$, est la boule fermée de rayon a centrée à l'origine,
- $\rho = a$ est la sphère de rayon a centrée à l'origine,
- $\theta = b$ est un demi-plan ouvert et sa fermeture contient l'axe des z,
- $\phi = c$ est un demi-cône qui a son sommet à l'origine et pour axe l'axe des z. Si c est positif il s'agit de la moitié supérieure du cône, si $d < 0$ de la moitié inférieure.

△

Les **coordonnées sphériques** sont ce qu'on appelle les « méridiens » et « longitudes » en géographie. Les formules de transformation sont SubEqsCoordSphe

$$\begin{cases} x = \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) & \text{(18.802a)} \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) & \text{(18.802b)} \\ z = \rho\cos(\theta) & \text{(18.802c)} \end{cases}$$

avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ et $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Remarque 18.238.
Attention : d'un livre à l'autre les conventions sur les noms des angles changent. N'essayez donc pas d'étudier par cœur des formules concernant les coordonnées sphériques trouvées autre part. Par exemple sur le premier dessin de wikipédia, l'angle φ est noté θ et l'angle θ est noté Φ. Mais vous noterez que sur cette même page, les conventions de noms de ces angles changent plusieurs fois.

Les coordonnées sphériques sont données par

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \tag{18.803}$$ EqChmVarSpherique

avec $r \in]0,\infty[$, $\theta \in]0,2\pi[$ et $\varphi \in]0,\pi[$. Le jacobien associé est $Jg(r,\theta,\varphi) = -r^2\sin\varphi$. N'oubliez pas que lorsqu'on effectue un changement de variables dans une intégrale, la *valeur absolue* du jacobien apparaît.

Cependant notre convention de coordonnées sphériques fait venir $\sin(\phi)$ avec $\phi \in [0,\pi[$; vu que le signe de $\sin(\phi)$ y est toujours positif, cette histoire de valeur absolue est sans grandes conséquences. Ce n'est pas le cas de toutes les conventions possibles.

18.13.3.1 Coordonnées sphériques : inverse

Trouvons le changement inverse, c'est-à-dire trouvons ρ, θ et φ en termes de x, y et z. D'abord nous avons

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{18.804}$$

Ensuite nous savons que

$$\cos(\theta) = \frac{z}{\rho} \tag{18.805}$$

détermine de façon unique[87] un angle $\theta \in [0,\pi]$. Dès que ρ et θ sont connus, nous pouvons poser $r = \rho\sin\theta$ et alors nous nous trouvons avec les équations

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) & \text{(18.806a)} \\ y = r\sin(\varphi), & \text{(18.806b)} \end{cases}$$

qui sont similaires à celles déjà étudiées dans le cas des coordonnées polaires.

18.14 Calcul de limites

Beaucoup de techniques de calcul de limites fonctionnent bien avec les fonctions trigonométriques, entre autres grâce à l'utilisation des coordonnées polaires de la proposition 18.229. Nous en voyons quelques exemples à présent.

ExQWHooGddTLE

Exemple 18.239 (Limite et prolongement par continuité)**.**
La fonction

$$f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x} \tag{18.807}$$

n'est pas définie en $x = 0$.

Nous avons vu dans l'équation (18.6) que $\cos(0) = 1$, donc la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} \tag{18.808}$$

est la limite définissant la dérivée de cosinus en 0 (ici, le x joue le rôle de ϵ). Le lemme 18.3 nous donne la dérivée du cosinus comme étant le sinus. Nous avons donc :

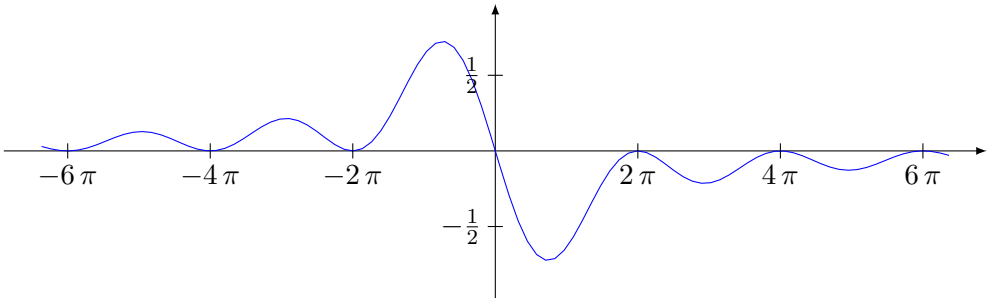
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = \sin(0) = 0, \tag{18.809}$$

et nous définissons le prolongement par continuité :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{18.810}$$

Encore une fois, le graphe de la fonction $\tilde{f}$ ne présente aucune particularité autour de $x = 0$.

[87] Le problème $\rho = 0$ ne se pose pas ; pourquoi ?



△

EXooINLRooPzRWEA

Exemple 18.240 (Un calcul heuristique de limite)**.**
Soit à calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2\cos(x)+2}\sin(x)}{\sqrt{e^{2\cos(x)+2}}-1}. \tag{18.811}$$

La stratégie que nous allons suivre pour calculer cette limite est de développer certaines parties de l'expression en série de Taylor, afin de simplifier l'expression. La première chose à faire est de remplacer $e^{y(x)}$ par $1+y(x)$ lorsque $y(x)\to 0$. La limite devient

$$\lim_{x\to 0} \frac{\big(-2\cos(x)+3\big)\sin(x)}{\sqrt{-2\cos(x)+2}}. \tag{18.812}$$

Nous allons maintenant remplacer $\cos(x)$ par 1 au numérateur et par $1-x^2/2$ au dénominateur. Pourquoi ? Parce que le cosinus du dénominateur est dans une racine, donc nous nous attendons à ce que le terme de degré deux du cosinus donne un degré un en dehors de la racine, alors que du degré un est exactement ce que nous avons au numérateur : le développement du sinus commence par x.

Nous calculons donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{-2\big(1-\frac{x^2}{2}\big)+2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1. \tag{18.813}$$

Tout ceci n'est évidemment pas très rigoureux, mais en principe vous avez tous les éléments en main pour justifier les étapes. △

18.14.1 Méthode des coordonnées polaires

SUBSECooWCGMooPrXSpt

La proposition suivante exprime la définition de la limite en d'autres termes, et va être pratique dans le calcul de certaines limites.

PropMethodePolaire

Proposition 18.241.
Soit $f\colon D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, a un point d'accumulation de D et $\ell\in\mathbb{R}^n$. Nous définissons

$$E_r = \{f(x) \text{ tel que } x\in B(a,r)\cap D\}, \tag{18.814}$$

et

$$s_r = \sup\{\|v-\ell\| \text{ tel que } v\in E_r\}. \tag{18.815}$$

Alors nous avons $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ si et seulement si $\lim_{r\to 0} s_r = 0$.

Dans cette proposition, E_r représente l'ensemble des valeurs atteintes par f dans un rayon r autour de a. Le nombre s_r sélectionne, parmi toutes ces valeurs, celle qui est la plus éloignée de ℓ et donne la distance. En d'autres termes, s_r est la distance maximale entre $f(x)$ et ℓ lorsque x est à une distance au maximum r de a.

Lorsque nous avons affaire à une fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, cette proposition nous permet de calculer facilement les limites en passant aux coordonnées polaires.

ExempleMethodeTrigigi

Exemple 18.242.
Reprenons la fonction de l'exemple 12.243 :

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}. \tag{18.816}$$

Son domaine est $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Nous voulons calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Écrivons la définition de E_r :

$$E_r = \{f(x,y) \text{ tel que } (x,y)\in B\big((0,0),r\big)\}. \tag{18.817}$$

Les points de la boule sont, en coordonnées polaires, les points de la forme (ρ,θ) avec $\rho<r$. La chose intéressante est que $f(\rho,\theta)$ est relativement simple (plus simple que la fonction départ). En effet en remplaçant tous les x par $\rho\cos(\theta)$ et tous les y par $\rho\sin(\theta)$, et en utilisant le fait que $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$, nous trouvons

$$f(\rho,\theta)=\frac{\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\rho^2}=\cos(\theta)\sin(\theta). \tag{18.818}$$ Eq2807fpolairerhodeuxcossin

Cela signifie que

$$E_r=\{\cos(\theta)\sin(\theta)\text{ tel que }\theta\in[0,2\pi[\}. \tag{18.819}$$

Prenons ℓ quelconque. Le nombre s_r est le supremum des

$$\|\ell-\cos(\theta)\sin(\theta)\| \tag{18.820}$$

lorsque θ parcours $[0,2\pi]$. Nous ne sommes pas obligés calculer la valeur exacte de s_r. Ce qui compte ici est que s_r ne vaut certainement pas zéro, et ne dépend pas de r. Donc il est impossible d'avoir $\lim_{r\to 0}s_r=0$, et la fonction donnée n'a pas de limite en $(0,0)$. △

Nous pouvons retenir cette règle pour calculer les limites lorsque $(x,y)\to(0,0)$ de fonctions $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:

(1) passer en coordonnées polaires, c'est-à-dire remplacer x par $\rho\cos(\theta)$ et y par $\rho\sin(\theta)$;

(2) nous obtenons une fonction g de ρ et θ. Si la limite $\lim_{r\to 0}g(r,\theta)$ n'existe pas ou dépend de θ, alors la fonction n'a pas de limite. Si on peut majorer g par une fonction ne dépendant pas de θ, et que cette fonction a une limite lorsque $r\to 0$, alors cette limite est la limite de la fonction.

La vraie difficulté de la technique des coordonnées polaires est de trouver le supremum de E_r, ou tout au moins de montrer qu'il est borné par une fonction qui a une limite qui ne dépend pas de θ. Une des situations classiques dans laquelle c'est facile est lorsque la fonction se présente comme une fonction de r multiplié par une fonction de θ.

Exemplexyxsqysq

Exemple 18.243.
Soit à calculer la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right). \tag{18.821}$$

Le passage aux coordonnées polaires donne

$$f(r,\theta)=r^2\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta). \tag{18.822}$$

Déterminer le supremum de cela est relativement difficile. Mais nous savons que de toutes façons, la quantité $\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$ est bornée par 1. Donc

$$\|f(r,\theta)\|\leqslant r^2. \tag{18.823}$$

Maintenant la règle de l'étau montre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ est zéro.

La situation vraiment gênante serait celle avec une fonction de θ qui risque de s'annuler dans un dénominateur. △

L'exemple 18.228 donnera un cas où la méthode fonctionne plus difficilement. Entre autres parce qu'il utilisera en même temps la méthode des chemins et celle des coordonnées polaires.

ExmeASDLAf

Exemple 18.244.
Considérons fonction

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x-y}. \tag{18.824}$$

Une mauvaise idée pour prouver que la limite n'existe pas pour $(x,y)\to(0,0)$ est de considérer le chemin (t,t). En effet, la fonction n'existe pas sur ce chemin. Or la méthode des chemins parle uniquement de chemins contenus dans le domaine de la fonction.

Nous prouvons que la limite n'existe pas en trouvant des chemins le long desquels les limites sont différentes. Si nous essayons le chemin (t,kt) avec k constant, nous trouvons

$$f(t,kt)=\frac{t(1+k^2)}{1-k}. \tag{18.825}$$

La limite $t\to 0$ est hélas toujours 0. Nous ne pouvons donc pas conclure.

Nous allons maintenant utiliser la même technique que celle utilisée en coordonnées polaires. Vous noterez que dans ce cas, travailler en cartésiennes donne lieu à des calculs plus longs. L'astuce consiste à prendre k non constant et à chercher par exemple $k(t)$ de façon à avoir

$$\frac{1+k(t)^2}{1-k(t)}=\frac{1}{t}. \tag{18.826}$$

Avec une telle fonction k, la fonction $t\mapsto f(t,tk(t))$ serait la constante 1. L'équation à résoudre pour k est

$$tk^2+k+(t-1)=0, \tag{18.827}$$

et les solutions sont

$$k(t)=\frac{-1\pm\sqrt{1-4t(t-1)}}{2t}. \tag{18.828}$$

Nous proposons donc les chemins

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \frac{-1\pm\sqrt{1-4t(t-1)}}{2}\end{pmatrix} \tag{18.829}$$

Nous devons vérifier deux points. D'abord que ce chemin est bien défini, et ensuite que $tk(t)$ tend bien vers zéro lorsque $t\to 0$ (sinon $(t,k(t)t)$ n'est pas un chemin passant par $(0,0)$. Lorsque t est petit, ce qui se trouve sous la racine est proche de 1 et ne pose pas de problèmes. Ensuite,

$$\lim_{t\to 0}tk(t)=\frac{-1\pm 1}{2}. \tag{18.830}$$

En choisissant le signe $+$, nous trouvons un chemin qui nous convient.

Ce que nous avons prouvé est que

$$f\left(t,\frac{-1+\sqrt{1-4t(t-1)}}{2}\right)=1 \tag{18.831}$$

pour tout t. Le long de ce chemin, la limite de f est donc 1. Cette limite est différente des limites obtenues le long de chemins avec k constant. La limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ n'existe donc pas. △

seno

Exemple 18.245.
Considérons la fonction (figure 18.11)

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases} \tag{18.832}$$

et cherchons la limite $(x,y)\to(0,0)$. Le passage en coordonnées polaires[88] donne

$$f(\rho,\theta)=\rho\sin\frac{1}{\rho}. \tag{18.833}$$ EqFoncRho2907

Pour calculer la limite de cela lorsque $\rho\to 0$, nous remarquons que

$$0\leqslant|\rho\sin\frac{1}{\rho}|\leqslant\rho \tag{18.834}$$

parce que $\sin(\frac{1}{\rho})\leqslant 1$ quel que soit ρ. Or évidemment $\lim_{\rho\to 0}\rho=0$, donc la limite de la fonction (18.833) est zéro et ne dépend pas de θ. Nous en concluons que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$. △

18.14.2 Méthode du développement asymptotique

SUBSECooRAKKooAnpvkE

Nous savons que nous pouvons développer certaines fonctions en série grâce au développement de Taylor (théorème 12.471). Lorsque nous avons une limite à calculer, nous pouvons remplacer certaines parties de la fonction à traiter par la formule (12.1340a). Cela est très utile pour comparer des fonctions trigonométrique à des polynômes.

LEMooZYNEooYkwsWD

Lemme 18.246.
Nous avons la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1. \tag{18.835}$$

[88] Proposition 18.229.

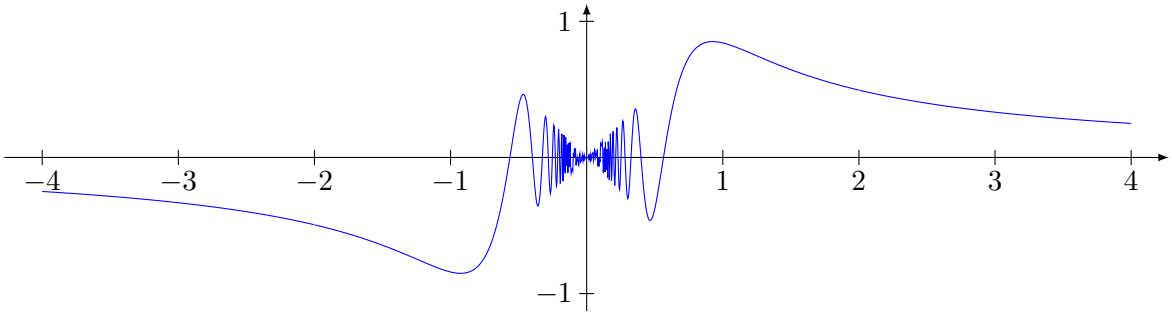


FIGURE 18.11 : La fonction de l'exemple 18.245. LabelFigsenotopologo

Démonstration. Une manière de prouver cela est d'écrire

$$\sin(x) = x + h(x) \tag{18.836}$$

avec $h \in o(x)$, c'est-à-dire $\lim_{x\to 0} h(x)/x = 0$. Alors nous avons

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + h(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = 1. \tag{18.837}$$

□

L'utilisation de la proposition 12.507 permet d'utiliser cette technique dans le cadre de limites à plusieurs variables. Reprenons le lemme 18.246 un tout petit peu modifié :

LEMooSFALooVRBdNb

Lemme 18.247.
Pour tout $x > 0$ nous avons $\sin(x) < x$.

Démonstration. Nous posons $f(x) = x - \sin(x)$. Cette fonction vérifie $f(0) = 0$ et

$$f'(x) = 1 - \cos(x). \tag{18.838}$$

Vu que $|\cos(x)| \leqslant 1$, nous avons toujours $f'(x) \geqslant 0$ et même $f'(x) > 0$ pour $x \in]0, \delta]$. Donc f est au moins strictement croissante sur $]0, \delta]$ et ensuite strictement croissante presque partout. □

Exemple 18.248.
Soit à calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ où

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{xy}. \tag{18.839}$$

La première chose à faire est de voir f comme la composée de fonctions $f = f_1 \circ f_2$ avec

$$\begin{aligned} f_1 \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\sin(t)}{t} \end{aligned} \tag{18.840}$$

et

$$\begin{aligned} f_2 \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy. \end{aligned} \tag{18.841}$$

Étant donné que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x, y) = 0$, nous avons $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f_1(t) = 1$. △

EXooETZYooYsKPDJ

Exemple 18.249.
Les dérivées partielles de la fonction $f(x, y) = xy^3 + \sin y$ au point $(0, \pi)$ sont

$$\partial_x f(0, \pi) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \pi) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \frac{(t\pi^3 + \sin\pi) - (\sin\pi)}{t} = \pi^3,$$

$$\partial_y f(0, \pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, \pi) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \frac{0(\pi + t)^3 + \sin(t + \pi) - 0 \cdot \pi^3}{t} = \cos\pi = -1,$$

△

18.15 Quelques intégrales avec de la trigonométrie

SECooOOPPooZLbaEH

Le théorème 14.282 manque un peu d'exemples. Nous allons en voir quelques-uns maintenant.

18.15.1 Changement de variables

Le domaine $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2+y^2 < 1\}$ s'écrit plus facilement $E = \{(r,\theta) \text{ tel que } r < 1\}$ en coordonnées polaires. Le passage aux coordonnées polaires permet de transformer une intégration sur un domaine rond à une intégration sur le domaine rectangulaire $]0,2\pi[\times]0,1[$. La question est évidemment de savoir si nous pouvons écrire

$$\int_E f = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr d\theta. \tag{18.842}$$

Hélas, non. La vie n'est pas aussi simple ; il faut tenir compte du fait que le changement de base dilate ou contracte certaines surfaces.

Soit $\varphi\colon D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to D_2 \subset \mathbb{R}^2$ une fonction bijective de classe C^1 dont l'inverse est également de classe C^1. On désigne par x et y ses composantes, c'est-à-dire que

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} \tag{18.843}$$

avec $(u,v) \in D_1$.

ThoChamDeVarIntDDf

Théorème 18.250.
Soit une fonction continue $f\colon D_2 \to \mathbb{R}$. Alors

$$\int_{\varphi(D_1)} f(x,y)dxdy = \int_{D_1} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)|J_\varphi(u,v)|dudv \tag{18.844}$$

où J_φ est le Jacobien de φ c'est-à-dire

$$J_\varphi(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \end{pmatrix}. \tag{18.845}$$

Ne pas oublier de prendre la valeur absolue lorsqu'on utilise le Jacobien dans un changement de variables.

18.15.2 Coordonnées polaires

Exemple 18.251.
Calculons la surface du disque D de rayon R. Nous devons calculer

$$\int_D dxdy. \tag{18.846}$$

Pour passer au polaires, nous savons que le disque est décrit par

$$D = \{(r,\theta) \text{ tel que } 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}. \tag{18.847}$$

Nous avons donc

$$\int_D dxdy = \int_D r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\, dr d\theta = 2\pi\int_0^R r\, dr = \pi R^2. \tag{18.848}$$

△

ExpmfDtAtV

Exemple 18.252.
Montrons comment intégrer la fonction $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ sur le domaine délimité par la droite $y = x$ et le cercle $x^2+y^2 = y$, représenté sur la figure 18.12. Pour trouver le centre et le rayon du cercle $x^2+y^2 = y$, nous commençons par écrire $x^2+y^2-y = 0$, et ensuite nous reformons le carré : $y^2-y = (y-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

Le passage en polaire transforme les équations du bord du domaine en

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \sin(\theta) \\ r^2 &= r\sin(\theta). \end{aligned} \tag{18.849}$$

L'angle θ parcours donc $]0,\pi/4[$, et le rayon, pour chacun de ces θ parcours $]0,\sin(\theta)[$. La fonction à intégrer se note maintenant $f(r,\theta) = \sqrt{1-r^2}$. Donc l'intégrale à calculer est

$$\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\sin(\theta)} \sqrt{1-r^2} r\, dr\right). \tag{18.850}$$

PgOMRapIntMultFubiniBoutCercle

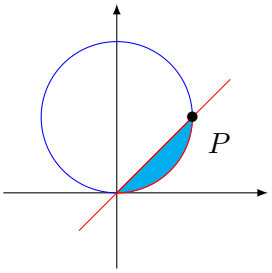


FIGURE 18.12 : Passage en polaire pour intégrer sur un morceau de cercle. LabelFigHFAYooOrfMAA

Remarquez la présence d'un r supplémentaire pour le jacobien.

Notez que les coordonnées du point P sont $(1, 1)$. △

En pratique, lors du passage en coordonnées polaires, le « $dxdy$ » devient « $r\,drd\theta$ ».

Exemple 18.253.
On veut évaluer l'intégrale de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur la région V suivante :

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x > 0,\ y > 0\}.$$

On peut faire le calcul directement,

$$\int_V f(x, y)\, dV = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 + y^2\, dy\, dx = \int_0^1 \left(x^2\sqrt{1 - x^2} + \frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3} \right) dx$$

mais c'est un peu ennuyeux. On peut simplifier beaucoup les calculs avec un changement de variables vers les coordonnées polaires. Dans ce cas, on sait bien que le difféomorphisme à utiliser est $\phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Le jacobien J_ϕ est

$$J_\phi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r, \tag{18.851}$$

qui est toujours positif. D'une part, la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(\phi(r, \theta)) = r^2$ et d'autre part, $\phi^{-1}(V) =]0, 1] \times]0, \pi/2[$. Par conséquent, la formule du changement de variables nous donne

$$\int_V f(x, y)\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

△

18.15.3 Coordonnées cylindriques

Exemple 18.254.
On veut calculer le volume de la région A définie par l'intersection entre la boule unité et le cylindre qui a pour base un disque de rayon $1/2$ centré en $(0, 1/2)$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^1 \leqslant 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + (y - 1/2)^2 \leqslant 1/4\}.$$

On peut décrire A en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} A = \Big\{ & (r, \theta, z) \in]0, +\infty[\times [-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \,| \\ & -\pi/2 < \theta < \pi,\ 0 < r \leqslant \sin\theta,\ -\sqrt{1 - r^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - r^2} \Big\}. \end{aligned} \tag{18.852}$$

Le jacobien de ce changement de variables, J_{cyl}, est

$$J_{cyl}(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r, \tag{18.853}$$

qui est toujours positif. Le volume de A est donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_A(x, y, z)\, dV = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sin\theta} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r dz\, dr\, d\theta = \frac{2\pi}{8} + \frac{8}{9}.$$

△

Exemple 18.255 (Volume d'un solide de révolution)**.**
Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive. On dit que le solide A décrit par

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in [a, b],\ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant g^2(z)\right\}$$

est un solide de révolution. Afin de calculer son volume, on peut décrire A en coordonnées cylindriques,

$$A = \left\{(r, \theta, z) \in]0, +\infty[\times[-\pi, \pi[\times\mathbb{R} \,|\, a \leqslant z \leqslant b,\ 0 < r^2 \leqslant g^2(z)\right\}.$$

Le jacobien de ce changement de variables est $J_{cyl} = r$, comme dans l'exemple précédent. Le volume de A est donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_A(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{g(z)} r\, dr\, d\theta\, dz = \int_a^b \pi g^2(z)\, dz.$$

Cette formule peut être utilisée pour tout solide de révolution. △

18.15.3.1 Coordonnées sphériques

Le calcul est un peu plus long :

$$\begin{aligned} J(\rho, \theta, \varphi) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \sin\theta. \end{aligned} \tag{18.854}$$

Donc

$$dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin(\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi. \tag{18.855}$$

Exemple 18.256.
On veut calculer le volume du cornet de glace A

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{S}^2,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}.$$

On peut décrire A en coordonnées sphériques.

$$A = \{(\rho, \theta, \phi) \in]0, +\infty[\times[-\pi, \pi[\times[0, \pi[\,|\, 0 < \phi \leqslant \pi/4,\ 0 < \rho \leqslant 1\}.$$

Le jacobien de ce changement de variables J_{sph} est

$$J_{sph}(\rho, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & 0 \\ \rho\cos\theta\cos\phi & \rho\sin\theta\cos\phi & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\phi, \tag{18.856}$$

Le volume de A est donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_A(x, y, z)\, dV = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

△

18.15.4 Un autre système utile

Un changement de variables que l'on voit assez souvent est

$$\begin{cases} u = x + y & \text{(18.857a)} \\ v = x - y. & \text{(18.857b)} \end{cases}$$

Afin de calculer son jacobien, il faut d'abord exprimer x et y en fonctions de u et v :

$$\begin{cases} x = (u + v)/2 & \text{(18.858a)} \\ y = (u - v)/2. & \text{(18.858b)} \end{cases}$$

La matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{18.859}$$

Le déterminant vaut $-\frac{1}{2}$. Nous avons donc

$$dxdy = \frac{1}{2}dudv. \tag{18.860}$$

Nous insistons sur le fait que c'est $\frac{1}{2}$ et non $-\frac{1}{2}$ qui intervient parce que que la formule du changement de variable demande d'introduire la *valeur absolue* du jacobien.

Exemple 18.257.
Calculer l'intégrale de la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$ sur le domaine représenté sur la figure 18.13.

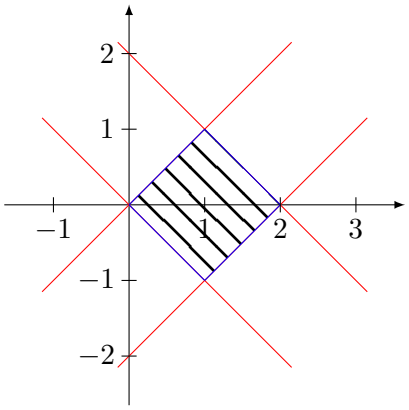


FIGURE 18.13 : Un domaine qui s'écrit étonnament bien avec un bon changement de coordonnées. LabelFigVVFLbbfSrOqz

Les droites qui délimitent le domaine d'intégration sont

$$\begin{aligned} y &= -x + 2 \\ y &= x - 2 \\ y &= x \\ y &= -x \end{aligned} \tag{18.861}$$

Le domaine est donc donné par les équations

$$\begin{cases} y + x < 2 & \text{(18.862a)} \\ y - x > -2 & \text{(18.862b)} \\ y - x < 0 & \text{(18.862c)} \\ y + x > 0. & \text{(18.862d)} \end{cases}$$

En utilisant le changement de variables $u = x+y$, $v = x-y$ nous trouvons le domaine $0 < u < 2$, $0 < v < 2$. En ce qui concerne la fonction, $f(x,y) = (x+y)(x-y)$ et par conséquent

$$f(u,v) = uv. \tag{18.863}$$

L'intégrale à calculer est simplement

$$\int_0^2 \int_0^2 uv\, dudv = \int_0^2 u\, du \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^2 = 2\int_0^2 u\, du = 4. \tag{18.864}$$

△

18.16 Aire d'une surface de révolution

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 18.258
Vu que nous n'avons pas encore de définition d'une aire dans $\mathbb{R}^3$, ce qui suit n'est en réalité pas très rigoureux.

Soit γ une courbe dans le plan xy, paramétrée par

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18.865}$$

avec $u \in [a, b]$. Nous supposons que la courbe est toujours positive, c'est-à-dire $y(u) > 0$ pour tout u.

Nous voulons considérer la surface obtenue en effectuant une rotation de cette ligne autour de l'axe X. Chaque point de la courbe va parcourir un cercle de rayon $y(u)$ dans le plan YX et centré en $(x(u), 0, 0)$. La surface est donc donnée par

$$\varphi(u, \theta) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u)\cos\theta \\ y(u)\sin\theta \end{pmatrix} \tag{18.866}$$

avec $(u, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$. Notez que la courbe de départ correspond à $\theta = 0$.

Les vecteurs tangents à la surface pour ce paramétrage sont

$$T_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u)\cos\theta \\ y'(u)\sin\theta \end{pmatrix} \quad T_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y(u)\sin\theta \\ y(u)\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{18.867}$$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs vaut

$$\begin{aligned} T_u \times T_\theta &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x' & y'\cos\theta & y'\sin\theta \\ 0 & -y\sin\theta & y\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= y'(u)y(u)\,e_x - x'(u)y(u)\cos\theta\,e_y + x'(u)y(u)\sin\theta\,e_z. \end{aligned} \tag{18.868}$$

En ce qui concerne la norme :

$$dS = \|T_u \times T_\theta\| = \sqrt{(y'y)^2 + (x'y)^2} = |y(u)|\sqrt{y'(u)^2 + x'(u)^2}. \tag{18.869}$$

Étant donné que nous avons supposé que $y(u) > 0$, nous pouvons supprimer les valeurs absolues, et l'aire de la surface de révolution devient :

$$\begin{aligned} Aire(S) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b y(u)\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}du \\ &= 2\pi \int_a^b y(u)\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}du. \end{aligned} \tag{18.870}$$

EXooZCLXooVmXQgY

Exemple 18.259.
Calculons la surface du cône de révolution de rayon (à la base) R et de hauteur h. La courbe de départ est le segment droite qui part de $(0, 0)$ et qui termine en (R, h) de la figure 18.14.

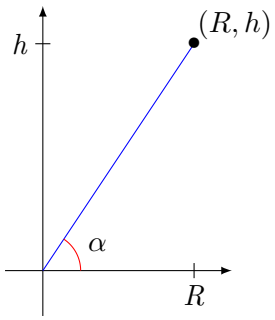


FIGURE 18.14 : En faisant tourner cette droite autour de l'axe X, nous obtenons un cône. LaboFigTEXLLn

Ce segment peut être paramétré par

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} Ru \\ hu \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18.871}$$

avec $u \in [0, 1]$. Cela donne $x(u) = Ru$, $y(u) = hu$ et par conséquent

$$Aire = 2\pi \int_0^1 hu\sqrt{R^2 + h^2} = \pi h\sqrt{R^2 + h^2}. \tag{18.872}$$

Ce résultat peut aussi être exprimé en fonction de l'angle, grâce à la formule (18.580). En sachant que $h = \sqrt{h^2 + R^2}\sin(\alpha)$, nous trouvons

$$Aire = \pi(R^2 + h^2)\sin(\alpha). \tag{18.873}$$

△

Exemple 18.260.
Calculons la surface latérale du tore obtenu par révolution du cercle de la figure 18.15.

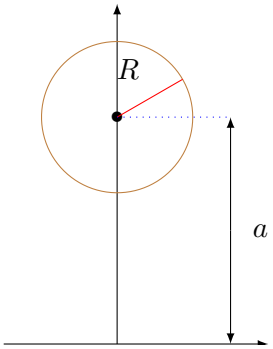


FIGURE 18.15 : Si nous tournons ce cercle autour de l'axe X, nous obtenons un tore de rayon « externe » a et de rayon « interne » R. LabelFigROAOooPgUZIt

Le chemin qui détermine le cercle de départ est

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} R\cos(u) \\ a + R\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{18.874}$$

c'est-à-dire $x(u) = R\cos(u)$, $y(u) = a + R\sin(u)$ avec $u \in [0, 2\pi]$. Nous avons donc l'aire

$$\begin{aligned} Aire &= 2\pi \int_0^{2\pi} \big(a + R\sin(u)\big) R\, du \\ &= 2\pi R\big(2\pi a + R[-\cos(u)]_0^{2\pi}\big) \\ &= 4\pi^2 aR. \end{aligned} \tag{18.875}$$

△

18.17 Table de caractères du groupe diédral

SecWMzheKf

Cette section vient de [128] ; nous avons comme but d'établir la table des caractères des représentations complexes du groupe diédral D_n.

18.17.1 Représentations de dimension un

Nous nous occupons des représentations de D_n sur $\mathbb{C}$. Les applications linéaires $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont seulement les multiplications par des nombres complexes. Nous cherchons donc $\psi\colon D_n \to \mathbb{C}^*$.

Nous savons que D_n est généré[89] par s et r. Vu que $s^2 = 1$, nous avons

$$\psi(s)^2 = \psi(s^2) = \psi(1) = 1, \tag{18.876}$$

donc $\psi(s) \in \{-1, 1\}$. Nous savons aussi que $srsr = 1$, donc

$$\psi(s)^2\psi(r)^2 = 1, \tag{18.877}$$

ce qui donne $\psi(r) \in \{-1, 1\}$.

Nous avons donc quatre représentations de dimension un données par

	$\psi(r) = 1$	$\psi(r) = -1$
$\psi(s) = 1$	ρ^{++}	ρ^{+-}
$\psi(s) = -1$	ρ^{-+}	ρ^{--}

[89] Voir proposition 18.174 et tout ce qui suit.

Attention au fait que nous devons aussi avoir la relation $\psi(r)^n = \psi(r^n) = 1$. Donc $\psi(r)$ doit être une racine n^{e} de l'unité. Nous allons donc devoir avoir un compte différent selon la parité de n. Nous en reparlerons à la fin, au moment de faire les comptes. En ce qui concerne les caractères correspondants,

	r^k	sr^k
χ^{++}	1	1
χ^{+-}	$(-1)^k$	$(-1)^k$
χ^{-+}	1	-1
χ^{--}	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Étant donné qu'ils sont tous différents, ce sont des représentations deux à deux non équivalentes, lemme 16.16.

18.17.2 Représentations de dimension deux

Nous cherchons maintenant les représentations $\rho\colon D_n \to \text{End}(\mathbb{C}^2)$. Ici nous supposons connue la liste des éléments de D_n donnée par le corolaire 18.175. Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $h \in \mathbb{Z}$; nous considérons la représentation $\rho^{(h)}$ de D_n définie par

$$\rho^{(h)}(r^k) = \begin{pmatrix} \omega^{hk} & 0 \\ 0 & \omega^{-hk} \end{pmatrix} \tag{18.878a}$$

$$\rho^{(h)}(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hk} \\ \omega^{hk} & 0 \end{pmatrix}. \tag{18.878b}$$

Cela donne bien $\rho^{(h)}$ sur tous les éléments de D_n par la proposition 18.174. Nous pouvons restreindre le domaine de h en remarquant d'abord que $\rho^{(h)} = \rho^{(h+n)}$, et ensuite que les représentations $\rho^{(h)}$ et $\rho^{(-h)}$ sont équivalentes. Un opérateur d'entrelacement est donné par $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et il est facile de vérifier que $T\rho^{(h)}(x) = \rho^{-h}(x)T$ avec $x = r^k$ puis avec $x = sr^k$.

Donc $\rho^{(h)} \simeq \rho^{(-h)} \simeq \rho^{(n-h)}$ et nous pouvons restreindre notre étude à $0 \leqslant h \leqslant \frac{n}{2}$.

Nous allons séparer les cas $n = 0$, $h = n/2$ et les autres. En effet si nous notons par commodité $a = \omega^h$, alors un vecteur (x, y) est vecteur propre de $\rho^{(h)}(s)$ et de $\rho^{(h)}(r)$ si et seulement si il vérifie les systèmes d'équations SubEqsGXZoxLq

$$\begin{cases} ax = \lambda x & (18.879a) \\ \frac{1}{a}y = \lambda y & (18.879b) \end{cases}$$

et SubEqsFYZmzhT

$$\begin{cases} \frac{1}{a}y = \mu x & (18.880a) \\ ax = \mu y & (18.880b) \end{cases}$$

avec λ et μ des nombres non nuls. Une représentation sera réductible si et seulement si ces deux systèmes acceptent une solution non nulle commune. Il est vite vu que si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $a^2 = 1$, ce qui signifie $h = 0$ ou $h = n/2$. Sinon, il n'y a pas de solutions, et la représentation associée est irréductible.

(1) $h = 0$. Nous avons

$$\rho^{(0)}(r^k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho^{(0)}(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18.881}$$

donc le caractère de cette représentation est $\chi^{(0)}(r^k) = 2$ et $\chi^{(0)}(sr^k) = 0$. Donc nous avons

$$\chi^{(0)} = \chi^{++} + \chi^{-+}. \tag{18.882}$$

Il y a maintenant (au moins) quatre façons de voir que la représentation $\rho^{(0)}$ est réductible.

Première méthode Trouver un opérateur d'entrelacement. Pour cela nous calculons les matrices :

$$S(r^k) = (\rho^{++} \oplus \rho^{-+})(r^k) = \begin{pmatrix} \rho^{++}(r^k) & 0 \\ 0 & \rho^{-+}(r^k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18.883a}$$

$$S(sr^k) = (\rho^{++} \oplus \rho^{-+})(sr^k) = \begin{pmatrix} \rho^{++}(sr^k) & 0 \\ 0 & \rho^{-+}(sr^k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18.883b}$$

$$\tag{18.883c}$$

Nous cherchons une matrice T telle que $TS(r^k) = \rho^{(0)}(r^k)T$ et $TS(sr^k) = \rho^{(0)}(sr^k)T$. Étant donné que $S(r^k) = \mathbb{1} = \rho^{(0)}(r^k)$, la première contrainte n'en est pas une. Nous pouvons vérifier qu'avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, nous avons bien

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18.884}$$

Donc ce T entrelace $\rho^{++} \oplus \rho^{-+}$ avec $\rho^{(0)}$ qui sont donc deux représentations équivalentes. Donc $\rho^{(0)}$ est réductible et ça ne nous intéresse pas de la lister.

Seconde méthode Invoquer le théorème 16.24(1) et dire que les représentations sont équivalentes parce que les caractères sont égaux.

Troisième méthode Utiliser le théorème 16.24(2) et calculer $\langle \chi^{(0)}, \chi^{(0)} \rangle$:

$$\langle \chi^{(0)}, \chi^{(0)} \rangle = \frac{1}{|D_n|} \sum_{g \in D_n} |\chi^{(0)}(g)|^2 \tag{18.885a}$$

$$= \frac{1}{2n}\big(4 + 0 + 4(n-1)\big) \tag{18.885b}$$

$$= 2. \tag{18.885c}$$

Ici le 4 est pour le 1, le zéro est pour les termes sr^k et $4(n-1)$ est pour les $n-1$ termes r^k. Vu que le résultat n'est pas 1, la représentation $\rho^{(0)}$ n'est pas irréductible.

Quatrième méthode Regarder les solutions des systèmes (18.879) et (18.880) dont nous avons parlé plus haut.

La première méthode a l'avantage d'être simple et ne demander aucune théorie particulière à part les définitions. La seconde méthode est la plus rapide, mais demande un théorème très puissant. La troisième utilise également un théorème assez avancé, mais a l'avantage sur les deux autres méthodes de ne pas avoir besoin de savoir à priori un candidat décomposition de $\rho^{(0)}$; cette méthode est applicable même sans faire la remarque que $\chi^{(0)} = \chi^{++} + \chi^{-+}$.

Quoi qu'il en soit, nous ne listons pas $\chi^{(0)}$ dans notre table de caractères.

(2) $h = n/2$. Vu que $\omega^{n/2} = e^{i\pi} = -1$, nous avons

$$\rho^{(n/2)}(r^k) = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \quad \rho^{(n/2)}(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}, \tag{18.886}$$

et donc

$$\chi^{(n/2)}(r^k) = 2(-1)^k \tag{18.887a}$$

$$\chi^{(n/2)}(sr^k) = 0. \tag{18.887b}$$

Il est vite vu que $\chi^{(n/2)} = \chi^{+-} + \chi^{-+}$. Ergo la représentation $\rho^{(n/2)}$ n'est pas irréductible.

(3) $0 < h < \frac{n}{2}$. Dans ce cas nous avons $\omega^h \neq \omega^{-h}$, et en regardant les systèmes d'équations donnés plus haut, nous voyons que $\rho^{(h)}(s)$ et $\rho^{(h)}(r)$ n'ont pas de vecteurs propres communs. Donc ces représentations sont irréductibles.

Nous devons cependant encore vérifier si elles sont deux à deux non équivalentes. Supposons que pour $h \neq h'$ nous ayons une matrice $T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ telle que $T\rho^{(h)}(r)T^{-1} = \rho^{(h')}(r)$. Cela impliquerait en particulier que les matrices $\rho^{(h)}(r)$ et $\rho^{(h')}(r)$ aient même valeurs propres. Nous aurions donc $\{\omega^h, \omega^{-h}\} = \{\omega^{h'}, \omega^{-h'}\}$. Mais cela est impossible avec $0 < h < h' < \frac{n}{2}$. Donc toutes ces représentations sont distinctes.

Le caractère de la représentation $\rho^{(h)}$ est $\chi^{(h)}(r^k) = \omega^{hk} + \omega^{-hk} = 2\cos\left(\frac{2\pi hk}{n}\right)$.
Nous ajoutons donc la ligne suivante à notre liste :

	r^k	sr^k
$\chi^{(h)}$	$2\cos\left(\frac{2\pi hk}{n}\right)$	0

18.17.3 Le compte pour n pair

Nous avons 4 représentations de dimension 1 puis $\frac{n}{2}-1$ représentations de dimension 2. En tout nous avons

$$\frac{n}{2}+3 \tag{18.888}$$

représentations irréductibles modulo équivalence. Cela fait le compte en vertu des classes de conjugaisons listées en 18.10.13.5. Pour rappel, le nombre de représentations non équivalentes est égal au nombre de classes de conjugaison par le corolaire 16.27. Notons que c'est cela qui justifie le fait que nous ne devons pas chercher d'autres représentations. Nous sommes sûrs de les avoir toutes trouvées.

18.17.4 Le compte pour n impair

Nous avions fait mention plus haut du fait que si ψ est une représentation de dimension 1, le nombre $\psi(r)$ devait être une racine n^{e} de l'unité. Donc en dimension 1 nous avons seulement les représentations ρ^{++} et ρ^{-+}. Pour celles de dimension 2, nous en avons $\frac{n-1}{2}$. En tout nous avons donc

$$\frac{n+3}{2} \tag{18.889}$$

représentations irréductibles modulo équivalence. Cela fait le compte en vertu des classes de conjugaisons listées en 18.10.13.6.

Chapitre 19

Corps finis, racines de l'unité

19.1 Le groupe des racines de l'unité dans les nombres complexes

SecGJOLooWdMYVl

19.1.1 Le groupe

DEFooDUWPooZaAByH

Définition 19.1.
Une ***racine*** n^e ***de l'unité*** *dans un anneau est une racine du polynôme* $X^n - 1$.

LEMooSXFBooYJmRTK

Lemme-Définition 19.2.
Soit

EqIEAXooIpvFPe

$$U_n = \{e^{2i\pi k/n} \text{ tel que } k = 0, \dots, n-1\} \tag{19.1}$$

(1) L'ensemble U_n *est un groupe pour la multiplication.*

(2) L'ensemble U_n *est l'ensemble des racines* n^e *de l'unité dans* $\mathbb{C}$.

Démonstration. Il est vite vérifié que tous les éléments de U_n sont des racines de l'unité parce que

$$\big(e^{2i\pi k/n}\big)^n = e^{2i\pi k} = 1, \tag{19.2}$$

entre autres à cause du lemme 18.11.

Cela nous donne déjà n racines pour $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$. Le théorème 6.110 nous indique qu'il ne peut pas y en avoir plus. □

19.3.
En ce qui concerne les notations, dans U_n, le « U » signifie « unité ». Cela n'a à peu près rien à voir avec le « U » du groupe $\mathrm{SU}(n)$; dans ce dernier, le « U » est pour « unitaire ».

Un des intérêts du groupe des racines est qu'il permet de factoriser $X^n - 1$, comme nous le verrons via les polynômes cyclotomiques dans le lemme 19.20.

LEMooRQRYooWZAuSD

Lemme 19.4 ([626]).
Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ *tels que* $\sigma_k(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}$ *pour tout* $k = 1, \dots, n$. *Alors pour tout* $l \in \mathbb{N}$ *et tout* $r \in \mathbb{N}^*$, *nous avons* $\sigma_r(z_1^l, \dots, z_n^l) \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. L'application $(c_1, \dots, c_n) \mapsto \sigma_r(c_1^l, \dots, c_n^l)$ est un polynôme symétrique : il existe un polynôme symétrique P à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$\sigma_r(z_1^l, \dots, z_n^l) = P(z_1, \dots, z_n). \tag{19.3}$$

Par le théorème de décomposition 6.180, il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$P(z_1, \dots, z_n) = Q\big(\sigma_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \sigma_n(z_1, \dots, z_n)\big). \tag{19.4}$$

Vu que Q est à coefficients entiers et que chacun des $\sigma_i(z_1, \dots, z_n)$ est entier, le tout est entier. □

LEMooDJQFooOhVoPj

Lemme 19.5 ([627]).
L'ensemble des polynômes unitaires de degré n *dans* $\mathbb{Z}[X]$ *dont les racines sont dans* $\overline{B(0,1)}$ *(boule dans* $\mathbb{C}$*) est fini.*

Démonstration. Nous notons n le degré de P, et $z_1, \dots, z_n$ les racines de P. Les relations coefficients-racines 6.183 dit que

$$\sigma_k(z_1, \dots, z_n) = (-1)^k a_{n-k} \tag{19.5}$$

où σ_k est le polynôme symétrique élémentaire défini en 6.179. Vu que $P \in \mathbb{Z}[X]$, nous avons $\sigma_k(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}$, et pour chaque k nous avons

$$|\sigma_k(z_1, \dots, z_n)| = |\sum_{s \in F_k} \prod_{i=1}^{k} g_{s(i)}| \leqslant \sum_{s \in F_k} \prod_{i=1}^{k} |g_{s(i)}| \leqslant \sum_{s \in F_k} 1 = \mathrm{Card}(F_k). \tag{19.6}$$

Nous avons montré que $|a_{n-k}| \leqslant \mathrm{Card}(F_k)$. Il n'y a qu'un nombre fini de possibilités. □

PROPooINGJooPkByVP

Proposition 19.6 (Théorème de Kronecker[627, 628, 626])**.**
Soit un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ dont toutes les racines sont dans $\overline{B(0,1)}$. Si $P(0) \neq 0$ alors toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

Démonstration. Nous notons Ω_n l'ensemble des polynômes unitaires dans $\mathbb{Z}[X]$ de degré n dont les racines sont dans $\overline{B(0,1)}$. Ce ensemble est fini par le lemme 19.5.

Soit un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ dont toutes les racines sont dans $\overline{(B(0,1))}$ et tel que $P(0) \neq 0$. Nous devons prouver que toutes les racines de P sont des racines de l'unité. Soient $z_1, \dots, z_n$ les racines de P.

(1) **Les polynômes P_k** Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, nous posons

$$P_k(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - z_i^k). \tag{19.7}$$

C'est un polynôme symétrique unitaire de degré n sont les racines sont les z_i^k qui vérifient $|z_i^k| \leqslant 1$.

(2) $P_k \in \mathbb{Z}[X]$ Nous montrons que les polynômes P_k sont à coefficients entiers. Les relations coefficients racines montrent que les coefficients de P_k sont essentiellement les nombres $\sigma_r(z_1^k, \dots, z_n^k)$, qui sont entiers par le lemme 19.4.

Nous avons prouvé que $P_k \in \Omega_n$ pour tout k.

Notons que Ω_n étant fini et chaque élément de Ω_n ayant au maximum n racines distinctes, l'ensemble des racines d'éléments de Ω_n est fini. Par ailleurs, pour chaque i, tous les z_i^k sont racines d'éléments de Ω_n (en l'occurrence de P_k). Par une autre manière de le dire est que $\{z_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est un ensemble fini[1]. Il existe donc $k \neq l$ tels que $z_i^k = z_i^l$. Nous avons alors $z^{k-l} = 1$, et z_i est une racine de l'unité. □

LemWHQGooXyeJiw

Lemme 19.7.
L'ensemble U_n est un groupe cyclique[2] d'ordre n généré par $\xi = e^{2i\pi/n}$.

Démonstration. Il y a trois propriétés à vérifier pour que ce soit un groupe.

(1) **Neutre** Le nombre 1 est une racine de l'unité.

(2) **Inverse** Si $\omega \in U_n$ alors $\omega^n = 1$ et donc $\omega\omega^{n-1} = 1$, ce qui signifie que ω^{n-1} est un inverse de ω. Il reste à voir que $\omega^{n-1} \in U_n$. En effet $\left(\omega^{n-1}\right)^n = (\omega^n)^{n-1} = 1^{n-1} = 1$.

(3) **Associativité** Cas particulier de l'associativité dans $\mathbb{C}$.

Le fait que ce soit un groupe cyclique contenant n éléments fait partie de la définition. □

Le lemme suivant donne les autres générateurs.

LemcFTNMa

Lemme 19.8.
Le nombre ξ^a est un générateur de U_n si et seulement si $\mathrm{pgcd}(a, n) = 1$.

Démonstration. Si $\mathrm{pgcd}(a, n) = 1$ alors le théorème de Bézout 1.358 nous fournit des entiers u et v tels que $ua + vn = 1$. Alors nous avons

$$e^{2i\pi/n} = e^{2(ua+vn)i\pi/n} = (e^{2ai\pi/n})^u, \tag{19.8}$$

ce qui signifie que ξ est dans le groupe engendré par ξ^a, et par conséquent tout U_n est engendré.

Pour l'implication inverse, nous utilisons le théorème de Bézout dans le sens inverse. Soit ξ^a un générateur de U_n. Alors il existe u tel que $(\xi^a)^u = \xi$, donc $\xi^{au-1} = 1$, c'est-à-dire qu'il existe v tel que $au - 1 = vn$. Cette dernière égalité implique que $\mathrm{pgcd}(a, n) = 1$. □

[1] En tant que partie d'un ensemble fini. On pourrait invoquer le principe des tiroirs, mais la proposition 1.71 fait aussi bien l'affaire.

[2] Définition 1.440.

Exemple 19.9.
Une conséquence tout à fait extraordinaire de ce lemme est que le nombre 7 est générateur de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (parce que $\text{pgcd}(7,12)=1$). Or en solfège, une quinte fait 7 demi-tons, et une gamme en fait 12. Le cycle des quintes est donc générateur de la gamme chromatique[629]. Ce fait est connu des musiciens[3] depuis des siècles. △

PROPooIOQEooGMcCJm

Proposition 19.10 (Intersection par deux)**.**
Les ensembles U_α et U_β ont une intersection réduite à $\{1\}$ si et seulement si α et β sont premiers entre eux.

Démonstration. Nous rappelons qu'une racine α^{e} de l'unité peut s'écrire sous la forme $e^{2i\pi k/\alpha}$ avec $0\leqslant k<\alpha$.

(1) **Sens direct** Par contraposée, nous supposons que α et β ne sont pas premiers entre eux, et nous notons d leur pgcd. Nous nommons $\alpha=d\alpha'$ et $\beta=d\beta'$. Pour trouver une intersection entre U_α et U_β nous devons trouver une valeur de $0<k<\alpha$ telle que

$$(e^{2i\pi k/\alpha})^\beta=e^{2i\pi k\beta/\alpha}=1, \tag{19.9}$$

c'est-à-dire une valeur de k telle que $k\beta/\alpha$ soit un entier. Mais $k\beta/\alpha=k\beta'/\alpha'$ et par conséquent prendre $k=\alpha'$ fonctionne. Surtout que par hypothèse $d>1$ et donc $k=\alpha'<\alpha$.

(2) **Sens réciproque** Supposons maintenant que α et β soient premiers entre eux. Soit $z\in U_\alpha\cap U_\beta$. Le fait que z soit une racine α^{e} de l'unité implique qu'il existe un $k<\alpha$ tel que $z=e^{2i\pi k/\alpha}$. Mais si z est également une racine β^{e} de l'unité, alors $z^\beta=1$, c'est-à-dire que $k\beta/\alpha$ doit être un entier, soit l cet entier. Nous avons

$$k\beta=l\alpha. \tag{19.10}$$

Si $k>0$, comme le nombre α divise $k\beta$, cela conduirait via le lemme de Gauss 1.370 à dire que α divise k. Mais α ne peut pas diviser k parce que nous avions supposé que k était strictement plus petit que α. Donc $k=0$ et $z=1$.

□

PropFDDHooEyYxBC

Proposition 19.11 (Intersection : le cas général[1])**.**
Soient des entiers positifs $\alpha_1,\dots,\alpha_p$. Nous avons

$$\bigcap_{i=1}^{p}U_{\alpha_i}=\{1\} \tag{19.11}$$

si et seulement si $\text{pgcd}(\alpha_1,\dots,\alpha_p)=1$ *(c'est-à-dire que les α_i sont premiers dans leur ensemble).*

Démonstration. Nous décomposons les α_i en facteurs premiers[4] de la façon suivante : $\alpha_i=\prod_{k\in\mathbb{N}}p_k^{\alpha_i^{(k)}}$ où les p_k sont les nombres premiers.

(1) **Caractérisation par une décomposition en facteurs premiers** Les éléments z différents de 1 dans U_{α_1} s'écrivent sous la forme

$$z=e^{2i\pi k/\alpha_1} \tag{19.12}$$

avec $0<k<\alpha_1$.

Pour tout $i\neq1$, le fait que $z\in U_{\alpha_i}\cap U_{\alpha_1}$ se traduit par le fait que $\left(e^{2i\pi k/\alpha_1}\right)^{\alpha_i}=1$, c'est-à-dire que $\alpha_i k/\alpha_1$ est entier, donc que α_1 divise $k\alpha_i$. Par conséquent il existera un élément différent de 1 dans l'intersection des U_{α_i} si et seulement si il existe un entier k strictement compris entre 0 et α_1 pour lequel α_1 divise tous les $k\alpha_i$.

Un entier $0<k<\alpha_1$ convient si et seulement si pour tout l, la puissance de p_l dans la décomposition de k est au moins égale à

$$\alpha_1^{(l)}-\alpha_i^{(l)} \tag{19.13}$$

pour tout l.

(2) **Sens direct** L'hypothèse $\text{pgcd}(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\neq1$ implique qu'il existe un l pour lequel tous les $\alpha_i^{(l)}$ sont non nuls. Nous construisons le k voulu en prenant pour tout p_i la même puissance que celle dans α_1, sauf pour p_l pour lequel nous prenons la puissance $\alpha_1^{(l)}-\min_i\{\alpha_i^{(l)}\}$. Le minimum en question est strictement positif, ce qui donne un k strictement inférieur à α_1.

[3] Même ceux qui ignorent le théorème de Bézout.
[4] Théorème 1.374.

(3) **Sens réciproque** Si $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = 1$ alors pour tout l, il existe un i tel que $\alpha_i^{(l)} = 0$. Donc pour tout l, la puissance de p_l dans la décomposition de k est au moins $\alpha_1^{(l)}$. Cela implique que $k \geqslant \alpha_1$, ce qui est impossible.

□

19.1.2 Fonction indicatrice d'Euler

Voir le thème 11.

DefLYGTooFPOYGZ

Définition 19.12.
*Les générateurs de U_n sont les **racines primitives**[5] de l'unité dans $\mathbb{C}$. Nous nommons Δ_n leur ensemble :*

$$\Delta_n = \{e^{2i\pi k/n} \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } \text{pgcd}(k, n) = 1\}. \tag{19.14}$$

Nous avons par exemple

- Pour $n = 1$, $\text{pgcd}(k, 1) = 1$ et $1 \leqslant k \leqslant 1$ uniquement pour $k = 1$.
- Pour $n = 2$, $\text{pgcd}(k, 2) = 1$ et $1 \leqslant k \leqslant 2$ uniquement pour $k = 1$.
- Pour $n = 3$, $\text{pgcd}(k, 3) = 1$ et $1 \leqslant k \leqslant 3$ uniquement pour $k = 1$, $k = 2$.

$$\Delta_1 = \{1\} \tag{19.15a}$$
$$\Delta_2 = \{e^{i\pi}\} \tag{19.15b}$$
$$\Delta_4 = \{e^{i\pi/2}, e^{i3\pi/2}\}. \tag{19.15c}$$

Notons que $1 \in \Delta_d$ seulement avec $d = 1$.

PROPooWILSooFHWLnt

Proposition 19.13.
En posant[6]

$$U_n = \{e^{2i\pi k/n} \text{ tel que } k = 0, \dots, n-1\}, \tag{19.16}$$

et[7]

$$\Delta_d = \{e^{2i\pi k/d} \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant d \text{ et } \text{pgcd}(k, d) = 1\}, \tag{19.17}$$

nous avons

$$U_n = \bigcup_{d|n} \Delta_d \tag{19.18}$$

EqpZuIyL

et l'union est disjointe.

Démonstration. En plein de petites parties.

(1) **Union disjointe** Soient d_1, d_2 tels que $x \in \Delta_{d_1} \cap \Delta_{d_2}$. Il existe k, l tels que $e^{2i\pi k/d_1} = e^{2i\pi l/d_2}$. Le corolaire 18.25 dit alors qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{k}{d_1} = \frac{l}{d_2} + s = \frac{l + sd_2}{d_2}. \tag{19.19}$$

Vu que k/d_2 est une fraction irréductible, nous avons $d_2 \leqslant d_1$ par la proposition 3.30. Nous faisons de même en permutant les rôles de d_1 et d_2 : il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{l}{d_1} = \frac{k + d_1 t}{d_1}, \tag{19.20}$$

de telle sorte que $d_1 \leqslant d_2$. Nous en déduisons que $d_1 = d_2$. Donc l'union à droite dans (19.18) est disjointe.

[5] parce qu'en prenant les puissances successives de l'une d'entre elles, nous retrouvons toutes les racines de l'unité, voir aussi la définition 19.56.

[6] Voir la définition 19.2.

[7] Définition 19.12. On pourrait croire que la condition $\text{pgcd}(k, d) = 1$ exclu $k = d$. On aurait alors envie d'écrire $1 \leqslant k < d$. Mais pour $d = 1$, ça fait une différence parce que tel qu'écrit $\Delta_1 = \{1\}$.

(2) **Première inclusion** Soit $x \in U_n$. Il existe $0 \leqslant k \leqslant n-1$ tel que $x = e^{2i\pi k/n}$. Si $x = 1$, alors $x \in \Delta_1$; nous supposons que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire que $k \neq 0$. Nous écrivons la fraction k/n sous forme irréductible :

$$\frac{k}{n} = \frac{k'}{d} \tag{19.21}$$

avec $d = \text{pgcd}(k, n)$, et $\text{pgcd}(k', d) = 1$. Donc $x \in \Delta_d$.

(3) **Seconde inclusion** Nous supposons que $x \in \Delta_d$ pour un certain diviseur d de n. Il existe donc $1 \leqslant k \leqslant d$ tel que $\text{pgcd}(k, d) = 1$ et $x = e^{2i\pi k/d}$. Si $d = 1$ alors $x = 1$ et $x \in U_n$. Nous excluons ce cas. Vu que $d \mid n$, nous considérons $s \in \mathbb{N}$ tel que $n = sd$. Nous avons alors

$$\frac{k}{d} = \frac{ks}{sd} = \frac{ks}{n}. \tag{19.22}$$

Multiplions par s les inéquations $1 \leqslant k \leqslant d$:

$$s \leqslant ks \leqslant sd = n. \tag{19.23}$$

Le cas $ks = n$ est exclu parce que cela demanderait $kn = ksd = nd$, et donc $k = d$, ce que nous avons exclu parce que $k = d$ est uniquement possible pour $d = 1$ à cause de la condition $\text{pgcd}(k, d) = 1$.

□

PROPooFKCHooWdFicM

Proposition 19.14.
Nous avons

$$\varphi(n) = \text{Card}(\Delta_n) \tag{19.24}$$

EqEulerGqPsyi

φ est l'indicatrice d'Euler[8].

Démonstration. Nous prouvons que l'application

$$\begin{aligned} f\colon \{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant n, \text{pgcd}(k, n) = 1\} &\to \{e^{2i\pi k/n} \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant n, \text{pgcd}(k, n) = 1\} \\ k &\mapsto e^{2i\pi k/n} \end{aligned} \tag{19.25}$$

est une bijection.

Le fait que ce soit surjectif est immédiat. Pour l'injectivité, nous considérons $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant l \leqslant n$ tels que $f(k) = f(l)$. Nous avons donc $e^{2i\pi k/n} = e^{2i\pi l/n}$. Le corolaire 18.25 nous dit alors qu'il existe $s \in \mathbb{Z}$ tel que

$$2\pi k/n = 2\pi l/n + 2\pi s. \tag{19.26}$$

En simplifiant par 2π et en multipliant par n, nous trouvons $k = l + sn$. Étant donné que k et l sont tout deux entre 1 et n, nous avons obligatoirement $s = 0$ et donc $k = l$.

Donc f est bijective et $\text{Card}(\Delta_n) = \varphi(n)$. □

19.1.3 Décomposition en éléments simples

SUBSEMooSBXMoDDHUjgV

Lemme 19.15 ([630, 1])**.**
Soient des nombres complexes distincts $a_1, \dots, a_N$. Alors pour tout $z \notin \{a_i\}_{i=1,\dots,N}$,

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{z - a_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{z - a_i} \tag{19.27}$$

où

$$\lambda_i = \prod_{j \neq i} \frac{1}{a_i - a_j}. \tag{19.28}$$

Démonstration. Nous posons $P(z) = \prod_{k=1}^{N}(z - a_k)$, et nous calculons :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{z - a_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i \prod_{k \neq i}(z - a_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z - a_k)} \tag{19.29a}$$

$$= \frac{1}{P(z)} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \prod_{k \neq i}(z - a_k) \tag{19.29b}$$

[8] Définition 5.29.

Il s'agit maintenant de prouver que la somme de gauche vaut toujours 1. Nous posons

$$S(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{k\neq i}(z-a_k)}{\prod_{k\neq i}(a_i-a_k)}. \tag{19.30}$$

Calculons $S(a_l)$:

$$S(a_l)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{k\neq i}(a_l-a_k)}{\prod_{k\neq i}(a_i-a_k)}. \tag{19.31}$$

Pour les termes $i\neq l$, le numérateur est nul, car il contient le facteur $a_l-a_l=0$. Donc la somme se réduit au seul terme $i=l$:

$$S(a_l)=\frac{\prod_{k\neq l}(a_l-a_k)}{\prod_{k\neq l}(a_l-a_k)}=1. \tag{19.32}$$

Le polynôme $S-1$ est donc un polynôme de degré $N-1$ qui possède N racines distinctes. Le théorème 6.110 implique que $S-1=0$ et donc que $S=1$ comme nous le voulions. □

Il est possible de décomposer une fraction rationnelle en fractions dites « simples ». Si $|z|<1$ nous avons par exemple la décomposition

$$\frac{1}{1-z^r}=\sum_{\omega\in U_r}\frac{A_\omega}{\omega-z} \tag{19.33}$$ EqDWYBooJIMBAt

où U_r est le groupe des racines r^{e} de l'unité défini en (19.1). Les nombres A_ω peuvent alors être déterminés en effectuant la somme. Le dénominateur commun sera $1-z^r$ tandis que les A_ω sont déterminés en égalant le numérateur à 1.

Exemple 19.16.
Pour décomposer la fraction $\frac{1}{1-x^2}$ nous savons que les racines du dénominateur sont ±1. Donc nous écrivons

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}. \tag{19.34}$$

Nous trouvons les valeurs de A et B en effectuant la somme :

$$\frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2}=\frac{A+B+(A-B)x}{1-x^2}. \tag{19.35}$$

Les coefficients A et B doivent donc vérifier $A+B=1$ et $A-B=0$. Au final,

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2(1-x)}+\frac{1}{2(1+x)}. \tag{19.36}$$

△

19.2 Chiffrement RSA

SecEVaFYi

Ce passage sur RSA provient en bonne partie de la page de Wikipédia[631].

Alice veut envoyer un message à Bob. L'idée est que Bob va donner à Alice une clef publique qui va permettre de chiffrer le message, tandis que Bob va garder pour lui une clef privée qui permet de déchiffrer.

19.2.1 Mise en place par Bob

Bob se crée une paire de clef publique, clef privée de la façon suivante.

(1) Bob choisit deux nombres premiers distincts p,q.

(2) Il calcule $n=pq$.

(3) Par le corolaire 5.43, l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)=(p-1)(q-1)$ est facile à calculer pour Bob.

(4) Bob choisit $e\in\mathbb{N}$ premier avec $\varphi(n)$, puis d tel que $ed\in[1]_{\varphi(n)}$.

Maintenant la paire est : clef publique (n,e) et clef privée (n,d)[9].

Bob envoie la paire (n,e) à Alice.

Remarque 19.17.
Ici nous ne supposons pas que la communication soit sure. Une tierce personne peut intercepter le message. D'ailleurs en principe, les gens publient leur clef publique sur leurs sites, voire sur des sites dédiés. Le problème de l'identification reste à résoudre à l'ancienne.

[9]Le fait que e soit public et d soit privé est une convention. e comme *encryption* et d comme *decryption*.

19.2.2 Chiffrement

Nous chiffrons en utilisant la clef publique (n, e). D'abord Alice se débrouille pour transformer son message en un nombre plus petit que n. Soit M ce message. Alice code M en

$$C = M^e \mod n. \tag{19.37}$$

Tout le truc est que nous allons voir que l'application $x \mapsto x^e$ est une bijection de $\mathbb{F}_n$, et que l'inverse est facile à calculer par Bob, et difficile pour les autres. Alice envoie C à Bob. Encore une fois, nous ne supposons pas que cette communication soit privée. Le nombre C peut être intercepté.

19.2.3 Déchiffrement

Nous allons montrer que $M = C^d \mod n$, et donc que Bob, connaissant (n, d), peut déchiffrer. D'abord

$$C^d = (M^e)^d = M^{ed}, \tag{19.38}$$

mais nous savons qu'il existe k tel que

$$ed = 1 + k\varphi(n) = 1 + k(p-1)(q-1). \tag{19.39}$$

L'étape astucieuse est de remarquer que

$$M^{1+k(p-1)(q-1)} \in [M]_p \cap [M]_q. \tag{19.40}$$

EqreeHgn

Pour montrer cela nous utilisons le petit théorème de Fermat 6.15(4).

- Si M est premier avec p, alors $M^{p-1} \in [1]_p$.
- Si M n'est pas premier avec p, alors M est multiple de p et on sait que $M^{p-1} \in [0]_p = [M]_p$.

Dans les deux cas nous avons (19.40). Le nombre $M^{1+k\varphi(n)} - M$ est donc à la fois multiple de p et de q.

Le lemme chinois 6.28 nous dit immédiatement[10] qu'alors

$$M^{1+k\varphi(n)} - M \tag{19.41}$$

est un multiple de $pq = n$, c'est-à-dire que

$$C^d = M^{ed} \in [M]_n. \tag{19.42}$$

Si on ne croit pas au lemme chinois, on peut utiliser le lemme de Gauss. Posons

$$M^{1+k\varphi(n)} - M = ap = bq. \tag{19.43}$$

Dans ce cas p divise bq, mais q est premier avec p, donc le lemme de Gauss 3.60 nous enseigne[11] que p divise b.

19.2.4 Une imprudence à ne pas commettre

Nous avons pris deux cas selon que M soit ou non premier avec p. Une question qui se pose est la suivante : est-ce que c'est une bonne idée d'envoyer un message qui ne soit pas premier avec p ?

Si nous savons que M n'est pas premier avec p, alors nous avons $M^e = l^e p^e$ et $n = pq$ qui sont publics. Donc un calcul de PGCD permettrait de trouver p.

Il faut cependant savoir que

PageAKTBooMDeQxY

- La probabilité que ça arrive est infime : comme M est entre 0 et $n = pq$, les multiples de p possibles sont $p, 2p, \cdots pq$. Il y a donc une chance sur p que cela arrive. Typiquement avec des p de l'ordre de 10^{120}, on peut utiliser RSA chaque milliseconde sur chaque atome de l'univers depuis le début des temps que ça ne se serait presque certainement pas encore produit.
- De toutes façons, Alice ne sait pas vérifier si son message est premier avec p, parce qu'elle ne connaît pas p.
- En conclusion, la partie de la preuve qui montre que $M^{1+\varphi(n)} \in [M]_p \cap [M]_q$ dans le cas M non premier avec p est, à toutes fins pratiques, inutile parce que ce cas de figure ne se présentera jamais dans toutes l'histoire de l'univers, même pas avec une civilisation intelligente autour de chaque étoile.

ProbGAYFooZATuYy

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 19.18
Est-ce que ces trois points sont corrects ?

[10] C'est ici qu'il est important que p ne soit pas égal à q. Si $p = q$, alors le lemme chinois ne fonctionne pas.
[11] Ici aussi, si $p = q$, ça ne marche pas.

19.2.5 Problèmes calculatoires

Pour implémenter RSA, il faut pouvoir faire (au moins) trois choses :

(1) Trouver de grands nombres premiers.

(2) Trouver des couples de Bézout.

(3) Calculer M^e lorsque e est très grand.

En ce qui concerne le problème de trouver des nombres premiers, c'est compliqué, mais il faut savoir qu'il y en a plein. À 120 chiffres, il y a environ autant de nombres premiers que d'atomes dans 10^{20} fois l'univers connu. Cela rend impossible toute tentative de factoriser un grand nombre en essayant toutes les possibilités. Même pas en science-fiction.

Trouver des nombres u et v tels que $Au + Bv = \text{pgcd}(A, B)$ est un problème expliqué en 3.2.1.

En ce qui concerne le calcul de M^e lorsque e est grand, il n'est évidemment pas pensable de faire $M \cdot M \cdot \ldots M$ avec e facteurs. Un truc pour calculer en moins d'étapes est l'**exponentiation rapide**. Si $e = 2k$ est pair, nous calculons

$$M^e = (M^k)^2; \tag{19.44}$$

si $e = 2k + 1$ alors nous calculons

$$M^e = M(M^k)^2. \tag{19.45}$$

Le calcul prend alors seulement environ $\log_2(e)$ étapes. Pour donner une idée,

$$\log_2(10^{120}) \simeq 400. \tag{19.46}$$

Très raisonnable, mais un ordinateur reste indispensable.

19.2.6 La solidité de RSA

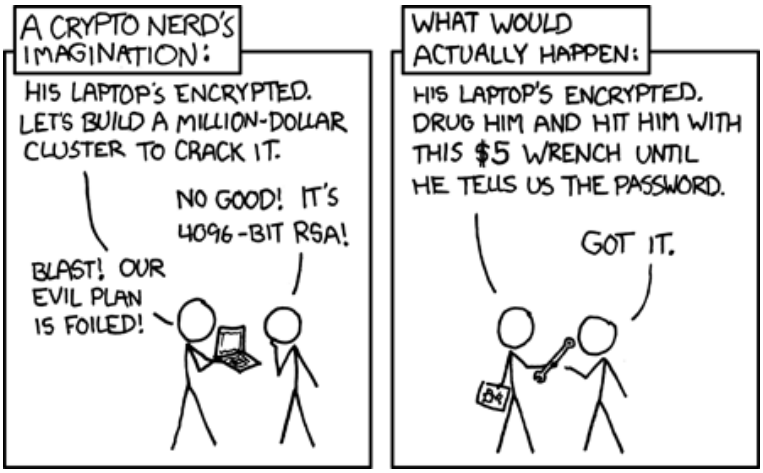
La solidité de la méthode repose sur deux conjectures (non démontrées !!) :

- Pour déchiffrer il *faut* connaitre p et q.
- La difficulté de trouver p et q en partant de $n = pq$ est exponentielle en n.

Dans la méthode de déchiffrage proposée ici, p et q sont utilisés pour calculer d qui est solution de $ed = [1]_{\varphi(n)}$. La seule formule connue pour calculer $\varphi(n)$ est $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$. Si on trouve plus simple, alors RSA peut être craqué.

19.2.7 Note non mathématique pour doucher l'enthousiasme

Il est souvent dit[632] que différents systèmes de chiffrement peuvent aider à avoir des discussions « discrètes » dans les régimes totalitaires. La technologie au service de la démocratie, voilà qui enthousiasme la jeunesse[12]. La réalité est qu'il est souvent possible de craquer un système de chiffrement arbitrairement complexe, même sans connaitre le petit théorème de Fermat …



http://xkcd.com/538/ Creative Commons Attribution-NonCommercial 2.5 License.

… tout dépend du contexte.

[12] Cela dit, le navigateur Tor[633], qui est un pur produit de RSA, permet effectivement d'accéder en France aux sites bloqués pour apologie du terrorisme (mars 2015).

19.3 Polynômes cyclotomiques

19.3.1 Définitions et propriétés

DefXGHooRAXlpp

Définition 19.19.
*Le **polynôme cyclotomique** d'indice n est le polynôme*

EqLjGYKK
$$\phi_n(X) = \prod_{z\in\Delta_n} (X - z) \tag{19.47}$$

où Δ_n est l'ensemble des racines primitives de l'unité de la définition 19.12 :

$$\Delta_n = \{e^{2i\pi k/n} \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } \operatorname{pgcd}(k, n) = 1\}, \tag{19.48}$$

voir la définition 19.12.

Le polynôme ϕ_n est un polynôme unitaire de degré $\varphi(n)$ où φ est l'indicatrice d'Euler[13]. Nous avons par exemple

$$\Delta_1 = \{1\} \tag{19.49a}$$
$$\Delta_2 = \{-1\} \tag{19.49b}$$
$$\Delta_3 = \{e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\} \tag{19.49c}$$

et les premiers polynômes cyclotomiques sont donnés par

$$\phi_1(X) = X - 1 \tag{19.50a}$$
$$\phi_2(X) = X + 1 \tag{19.50b}$$
$$\phi_3(X) = X^2 + X + 1. \tag{19.50c}$$

Pour le dernier nous avons utilisé le fait que $e^{6i\pi/3} = 1$ et $e^{2i\pi/3} + e^{4i\pi/3} = -1$.

LemKYGBooAwpOHD

Lemme 19.20.
Le polynôme $X^n - 1$ se factorise des diverses manières suivantes :

$$X^n - 1 = \prod_{z\in U_n} (X - z) = \prod_{d|n} \prod_{z\in\Delta_d} (X - z) = \prod_{d|n} \phi_d(X) \tag{19.51}$$

où U_n est défini en 19.2.

Démonstration. En ce qui concerne la première égalité, tous les éléments de U_n sont des racines simples de $X^n - 1$. Donc le théorème 3.118 dit qu'il existe un nombre k (polynôme de degré zéro) tel que $X^n - 1 = k\prod_{z\in U_n}(X - z)$. Vu le coefficient du terme de plus haut degré, ce k ne peut être que 1.

Pour la suite nous utilisons l'union disjointe $U_n = \bigcup_{d|n} \Delta_d$ de la proposition 19.13 et la définition (19.47) des polynômes cyclotomiques. □

Remarque 19.21.
Notons juste pour le plaisir que dans le produit $\prod_{d|n}\prod_{z\in\Delta_d}$, il y a bien n termes parce que $\operatorname{Card}(\Delta_d) = \varphi(d)$ et $\sum_{d|n}\varphi(d) = n$ (définition 19.12 et proposition 5.38).

Proposition 19.22.
Les polynômes cyclotomiques sont à coefficients entiers : $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. Nous devons démontrer que les coefficients de ϕ_n sont dans $\mathbb{Z}$ alors qu'ils sont à priori dans $\mathbb{C}$. Nous démontrons cela par récurrence. D'abord $\phi_1(X) = X - 1$, d'accord. Ensuite

$$X^{n+1} - 1 = \prod_{d|n+1} \phi_d(X) = \phi_{n+1}(X) \cdot \underbrace{\prod_{\substack{d|n+1\\ d\leqslant n}} \phi_d(X)}_{\in\mathbb{Z}[X] \text{ par récurrence}} \tag{19.52}$$

Le lemme 6.49 conclut que $\phi_{n+1} \in \mathbb{Z}[X]$. Nous avons considéré $\mathbb{Z}$ comme sous anneau du corps $\mathbb{C}$. □

[13] Définie par l'équation 19.24.

PropUImYnL

Proposition 19.23.
Soient $1 \leqslant m \leqslant n$, deux entiers, et

$$T(X) = \frac{X^n - 1}{X^m - 1} \in \mathbb{Z}(X). \tag{19.53}$$

Alors :

ItemhpDPKE

(1) si $m \mid n$ alors $T \in \mathbb{Z}[X]$,

(2) si $m \mid n$ et si $m < n$ alors ϕ_n divise T dans $\mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. Nous prouvons point par point.

(1) Si m divise n alors les diviseurs de n sont l'union des diviseurs de m et des diviseurs de n qui ne divisent pas m. Soit

$$Q = \{\text{diviseurs de } n \text{ ne divisant pas } m\}. \tag{19.54}$$

Nous avons alors

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(X) = \prod_{d|m} \phi_d(X) \cdot \prod_{q\in Q} \phi_q(X) = (X^m - 1) \cdot \prod_{q\in Q} \phi_q(X). \tag{19.55}$$

Nous avons donc

$$T(X) = \frac{X^n - 1}{X^m - 1} = \prod_{q\in Q} \phi_q(X) \in \mathbb{Z}[X]. \tag{19.56}$$

(2) Nous venons de montrer que

$$T = \prod_{q\in Q} \phi_q \in \mathbb{Z}[X]. \tag{19.57}$$

Étant donné que $m < n$ nous avons $n \in Q$ et donc

$$T = \phi_n \cdot \prod_{q\in Q\setminus\{n\}} \phi_q. \tag{19.58}$$

Par conséquent ϕ_n divise T dans $\mathbb{Z}[X]$.

□

CorTVUooErJiAC

Corolaire 19.24.
Si p est premier alors le polynôme cyclotomique ϕ_p a une bonne tête :

$$\phi_p(X) = 1 + X + \cdots + X^{p-1}. \tag{19.59}$$

Démonstration. Nous utilisons la formule du lemme 19.20 en remarquant que seuls p et 1 divisent p :

$$X^p - 1 = \prod_{d|p} \phi_d(X) = \phi_1(X)\phi_p(X) = (X - 1)\phi_p(X). \tag{19.60}$$

Nous pouvons simplifier par $X - 1$ en utilisant la formule du lemme 3.124(2) :

$$1 + X + \cdots + X^{p-1} = \phi_p(X) \tag{19.61}$$

□

PropoIeOVh

Proposition 19.25 (Irréductibilité des polynômes cyclotomiques[634])**.**
Les polynômes cyclotomiques sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Pour rappel, nous savons déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$. Puisque les racines de ϕ_n sont les racines primitives de l'unité, nous devons montrer que toutes les racines primitives de l'unité ont même polynôme minimal (qui sera alors ϕ_n) ; en effet comme ces polynômes divisent ϕ_n, s'ils sont distincts, la proposition 6.107 s'applique et le produit des polynômes minimaux diviserait ϕ_n. Dans le cas inverse, ϕ_n est polynôme minimal des racines primitives de l'unité et est donc irréductible. Soit donc ξ, une telle racine primitive. Une autre racine primitive est de la forme ξ^l où l est un nombre premier tel que $\text{pgcd}(l, n) = 1$.

Soient f et g, les polynômes minimaux dans $\mathbb{Z}[X]$ de ξ et ξ^l. Nous allons montrer que $f = g$ et donc que $f = g = \phi_n$. Supposons par l'absurde que $f \neq g$. Dans ce cas ils seraient des facteurs irréductibles distincts de ϕ_n et il existerait un polynôme h tel que $\phi_n = fgh$. A priori, $h \in \mathbb{Q}[X]$ parce que nous sommes justement en train de prouver que ϕ_n est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Quoi qu'il en soit, le lemme de Gauss 6.51 nous montre que $h \in \mathbb{Z}[X]$ parce que ϕ_n, f et g ont des coefficients entiers. Nous avons

$$f(\xi) = g(\xi^l) = 0. \tag{19.62}$$

Considérons le polynôme $\psi(X) = g(X^l)$. Ce polynôme ψ est dans $\mathbb{Z}[X]$ et ψ est annulateur de ξ, donc f divise ψ en tant que polynôme minimal de ξ. Il y a un polynôme unitaire à coefficients entiers (lemme de Gauss forever) k tel que

$$\psi = fk \tag{19.63}$$

Nous considérons maintenant les projections sur $\mathbb{F}_l[X]$: étant donné que $\phi_n = fgh$, nous savons que $\bar{f}\bar{g}$ divise $\bar{\phi}_n$. En même temps, $\bar{f}$ divise $\bar{\psi}$. En utilisant le morphisme de Frobenius (c'est ici que la projection sur $\mathbb{F}_l$ joue), nous avons aussi

$$\bar{\psi}(X) = \bar{g}(X^l) = \bar{g}(X)^l. \tag{19.64}$$

Par conséquent dire que $\bar{f}$ divise $\bar{\psi}$ revient à dire que $\bar{f}(X)$ divise $\bar{g}(X)^l$. En particulier tout facteur irréductible de $\bar{f}$ divise $\bar{g}$. Un facteur irréductible de $\bar{f}$ serait donc à la fois dans $\bar{f}$ et dans $\bar{g}$ et donc deux fois (au moins) dans $\bar{\phi}_n$ parce que $\bar{f}\bar{g}$ divise ϕ_n. Dans un corps de décomposition de ce facteur, ϕ_n aurait une racine double, alors que ce n'est pas le cas. Contradiction. Nous concluons que $f = g$. □

Le corolaire suivant va être utilisé pour déterminer les polygones constructibles à la règle et au compas, théorème de Gauss-Wantzel 19.90.

CorKRTooTJtyvP

Corolaire 19.26.
Soit p un nombre premier et α un entier non nul. Nous posons $q = p^\alpha$. Alors le polynôme minimal de $e^{2i\pi/q}$ sur $\mathbb{Q}$ est le polynôme cyclotomique ϕ_q.

Démonstration. Le polynôme ϕ_q est irréductible par la proposition 19.25, il est unitaire par définition et contient le monôme $X - e^{2i\pi/q}$, donc il est annulateur. Annulateur, irréductible et unitaire, la proposition 6.82(2) en fait le polynôme minimal de $e^{2i\pi/q}$. □

ThojCJpFW

Théorème 19.27.
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire irréductible non constant tel que toutes les racines dans $\mathbb{C}$ soient de module $\leqslant 1$. Alors, soit $P = X$, soit P est un polynôme cyclotomique.

Démonstration. Le polynôme $P = X$ vérifie les conditions. Pour la suite, nous supposons que $P \neq X$.

Nous notons $P = \sum_i a_i X^i$. Étant donné que P est irréductible et différent de X, nous avons $a_0 \neq 0$ (sinon $x = 0$ serait une racine). Nous allons montrer que les racines de P sont toutes des racines N-ièmes de l'unité (avec le même N pour toutes).

Soient $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,d}$ les racines de P ; on a

$$P = \prod_{i=1}^{d}(X - \xi_i) \tag{19.65}$$

avec $\prod_{i=1}^{d} \xi_i = a_0$. Par hypothèse, $|\xi_i| \leqslant 1$ et donc $0 < |a_0| \leqslant 1$. Puisque $P \in \mathbb{Z}[X]$ nous avons donc $a_0 = 1$ et $|\xi_i| = 1$, pour tout i.

Nous introduisons les polynômes

$$g_q(X) = \prod_{i=1}^{d}\big(X - (\xi_i)^q\big), \tag{19.66}$$

et en particulier $g_1 = P$, et nous développons

$$g_q(X) = X^n + C_{1,q}X^{n-1} + \cdots + C_{n,q} \tag{19.67}$$

où

$$C_{k,q} = (-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant d} (\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k})^q. \tag{19.68}$$

Nous introduisons aussi les polynômes

$$F_{k,q}(X_1,\dots,X_n) = (-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant d} (X_{i_1}\dots X_{i_k})^q \tag{19.69}$$

qui sont des polynômes symétriques. Ils vérifient deux propriétés. La première est que

$$C_{r,q} = F_{r,q}(\xi_1, \dots, \xi_n), \tag{19.70}$$

et la seconde est que les polynômes $F_{r,1}$ sont les polynômes symétriques élémentaires à un coefficient près. Le théorème 6.180 nous donne alors des polynômes $G_{k,q} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ tels que

$$F_{k,q}(X_1, \dots, X_n) = G_{k,q}\big(F_{1,1}(X_1, \dots, X_n), \dots, F_{k,1}(X_1, \dots, X_n)\big). \tag{19.71}$$

Nous savons que

$$|C_{k,q}| \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k < d} 1 = \binom{d}{k}. \tag{19.72}$$

Donc g_q fait partie de l'ensemble fini des polynômes dans $\mathbb{Z}[q]$ dont tous les coefficients sont bornés en valeur absolue par

$$\max_{k=1,\dots,d} \binom{d}{k}. \tag{19.73}$$

Il existe un certain nombre d'ensembles $\{\xi_i\}$ qui sont racines de polynômes vérifiant les conditions du théorème. À chacun de ces ensembles est associé une suite de polynômes g_q et donc des coefficients $C_{k,q}$. Ce que nous avons vu est que l'ensemble de tous les coefficients $C_{k,q}$ possibles (pour un choix donné des $\{\xi_i\}$) est fini, en particulier, comme $C_{1,q} = \sum_i \xi_i^q$, pour chaque k, l'ensemble

$$\{\xi_k^q \text{ tel que } q \in \mathbb{N}\}. \tag{19.74}$$

Par le principe des tiroirs, il existe q_1 et q_2 tels que $\xi_k^{q_1} = \xi_k^{q_2}$. Ici, q_1 et q_2 dépendent de k et nous notons $N_k = q_1 - q_2$; nous avons donc $\xi_k^{N_k} = 1$.

En posant $N = \text{ppcm}(N_1, \dots, N_d)$, nous avons

$$\xi_k^N = 1 \tag{19.75}$$

pour tout k.

Mais P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$; si il a ± 1 comme racines, alors c'est que $P = X + 1$ ou $P = X - 1$ et ce sont des polynômes cyclotomiques. Si P n'a pas ± 1 parmi ses racines, alors P n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$ parce que ± 1 sont les seules racines de $X^N - 1$ dans $\mathbb{Q}$.

Par conséquent P est un facteur irréductible de $X^N - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$. Mais étant donné que

$$X^N - 1 = \prod_{d|N} \phi_d(X), \tag{19.76}$$

les polynômes cyclotomiques sont les seuls facteurs irréductibles de $X^N - 1$. Donc P est un polynôme cyclotomique. □

19.3.2 Nombres premiers

LemiAqLEn

Lemme 19.28 ([635]).
Soit $n \geqslant 1$. Il existe un nombre premier p et un entier a tels que

(1) p divise $\phi_n(a)$,

(2) p ne divise aucun de $\phi_d(a)$ avec $d \mid n$ et $d \neq n$.

De tels p et a vérifient automatiquement

(1) p divise $a^n - 1$,

(2) p ne divise aucun des $a^d - 1$ pour $d \mid n$, $d \neq n$.

Démonstration. Nous posons

$$B(X) = \prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} \phi_d(X), \tag{19.77}$$

et nous commençons par montrer que ϕ_n est premier avec B. Nous avons $X^n - 1 = B\phi_n$, donc B et ϕ_n n'ont pas de racine commune (même pas dans $\mathbb{C}$) parce que ce serait une racine double de $X^n - 1$. Notons que par définition 19.47, les polynômes cyclotomiques sont scindés (dans $\mathbb{C}$), donc en particulier les polynômes ϕ_n

et B sont scindés, et donc premiers entre eux, dans $\mathbb{C}$ et a fortiori dans $\mathbb{Q}$. Par Bézout (proposition 3.59), il existe $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que

$$U\phi_n + VB = 1. \tag{19.78}$$

Si nous prenons $a \in \mathbb{Z}$ tel que $U' = aU$ et $V' = aV$ soient tous deux dans $\mathbb{Z}[X]$, alors nous avons

$$U'\phi_n + V'B = a, \tag{19.79}$$

EqCpNMEi

égalité dans $\mathbb{Z}[X]$. Quitte à prendre un multiple assez grand de a, nous pouvons choisir a de telle sorte que $|\phi_n(a)| \geqslant 2$. Nous prenons alors un nombre premier p divisant $\phi_n(a)$.

Montrons que le a et le p ainsi construits satisfont aux exigences.

Puisque $X^n - 1 = B\phi_n$, si p divise $\phi_n(a)$, il divise automatiquement $a^n - 1$ et donc $[a^n]_p = 1$, ce qui signifie entre autres que a et p sont premiers entre eux. Évaluons l'équation (19.79) en a :

$$U'(a)\phi_n(a) + V'(a)B(a) = a. \tag{19.80}$$

Le nombre p ne divisant pas a, mais divisant $\phi_n(a)$, il ne peut pas diviser $B(a)$[14]. Étant donné que p ne divise pas $B(a)$, il ne divise aucun des $\phi_d(a)$ avec $d \mid n$ et $d \neq n$.

Nous passons maintenant à la seconde partie de la preuve. Nous supposons avoir a et p tels que p soit un nombre premier divisant $\phi_n(a)$ et tels que p ne divise aucun des $\phi_d(a)$ avec $d \mid n$, $d \neq n$. Le fait de diviser $\phi_n(a)$ entraine le fait de diviser $a^n - 1$ parce que ϕ_n est un des facteurs de $X^n - 1$. Soit maintenant $d \neq n$ divisant n ; nous avons

$$X^d - 1 = \prod_{d' \mid d} \phi_{d'}, \tag{19.81}$$

EqwTWcCu

et cela est une partie du produit

$$\prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq n}} \phi_d. \tag{19.82}$$

Puisque p ne divise aucun des $\phi_d(a)$ de ce dernier produit, a fortiori, il ne divise pas le produit 19.81, et donc pas $a^d - 1$. □

LemrZnmpG

Lemme 19.29.
Si $n \geqslant 1$, alors il existe un nombre premier dans $[1]_n$, c'est-à-dire un nombre premier de la forme $1 + kn$ avec $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Démonstration. Soient $n \geqslant 1$ et p, a les nombres donnés par le lemme 19.28. Puisque p divise $\phi_n(a)$, p divise $a^n - 1$ et donc $[a]_p$ a un ordre qui divise n dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ parce que $[a]_p^n = [1]_p$.

Prenons $d \neq n$ divisant n. Nous savons que

$$a^d - 1 = \prod_{d' \mid d} \phi_{d'}(a). \tag{19.83}$$

Par construction de a et p, nous avons

$$[\phi_{d'}(a)]_p \neq 0 \tag{19.84}$$

Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est intègre, le produit est également non nul, c'est-à-dire

$$\Big[\prod_{d' \mid d} \phi_{d'}(a)\Big]_p \neq 0, \tag{19.85}$$

et donc $[a]_p^a \neq 1$. Nous avons donc montré que si $d \neq n$ divise n, alors nous avons en même temps

$$[a]_p^n = 1 \tag{19.86}$$

et

$$[a]_p^d \neq 1. \tag{19.87}$$

Cela prouve que $[a]_p$ est d'ordre exactement n. Oui, mais l'ordre de $[a]_p$ doit diviser l'ordre du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui est $p - 1$, donc n divise $p - 1$ et nous écrivons $p = kn + 1$ avec k entier. □

ThoxwTjcl

Théorème 19.30 (Forme faible du théorème de Dirichlet [137])**.**
Pour tout $n \geqslant 1$, il existe une infinité de nombres premiers dans $[1]_n$.

[14] C'est pour pouvoir dire ça que l'on a choisi $V' \in \mathbb{Z}[X]$ de telle sorte que $V'(a)$ soit dans $\mathbb{Z}$

Démonstration. Le lemme 19.29 nous donne déjà l'existence de nombres premiers dans $[1]_n$. Il faut maintenant voir qu'il y en a une infinité. Nous supposons qu'il y en ait seulement un nombre fini : $p_1, \dots, p_r$, et nous notons

$$N = np_1 \dots p_r. \tag{19.88}$$

Nous utilisons maintenant le lemme 19.29 avec ce N, c'est-à-dire qu'on a un nombre premier de la forme

$$p = 1 + kN = 1 + knp_1 \dots p_r. \tag{19.89}$$

C'est un nombre premier plus grand que tous les p_i, et de la forme $1 + \lambda n$. Cela contredit l'exhaustivité de la liste $p_1, \dots, p_r$. □

19.4 Corps finis

SecCorpsFinizkAcbS

Si vous cherchez des choses à propos de RSA, c'est à la section 19.2.

19.4.1 Théorème de Wedderburn

ThoMncIWA

Théorème 19.31 (Théorème de Wedderburn[189])**.**
Tout corps fini est commutatif.

Démonstration. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini et Z, le centre de $\mathbb{K}$. Ce dernier est un corps fini et un sous-corps de $\mathbb{K}$. Si $q = \text{Card}(Z)$ alors par le lemme 6.58 nous avons

$$\text{Card}(\mathbb{K}) = q^n \tag{19.90}$$

pour un certain n.

Nous supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est non commutatif. Dans ce cas $Z \neq \mathbb{K}$ et nous avons $n \geqslant 2$. Nous considérons aussi

$$Z_x = \{a \in \mathbb{K} \text{ tel que } ax = xa\}. \tag{19.91}$$

Le centre Z est un sous-corps de Z_x, donc il existe $d(x)$ tel que

$$\text{Card}(Z_x) = q^{d(x)}. \tag{19.92}$$

De la même manière, Z_x est un sous-corps de $\mathbb{K}$, donc il existe $m(x)$ tel que

$$\text{Card}(\mathbb{K}) = \text{Card}(Z_x)^{m(x)}. \tag{19.93}$$

En mettant bout à bout, nous avons

$$q^n = \text{Card}(Z_x)^{m(x)} = q^{d(x)m(x)}, \tag{19.94}$$

et par conséquent $n = d(x)m(x)$. Le point important à retenir est que $d(x)$ divise n pour tout $x \in \mathbb{K}$.

Nous considérons maintenant l'action adjointe du groupe $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ sur lui-même :

$$\varphi(k)x = kxk^{-1}. \tag{19.95}$$

Nous notons $\mathcal{O}_x$ l'orbite de $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ pour cette action, et $\text{Fix}(x)$ son stabilisateur. Nous avons

$$Z_y = \text{Fix}(y) \cup \{0\} \tag{19.96}$$

parce que Z_y et $\text{Fix}(y)$ ont les mêmes définitions, sauf que $\text{Fix}(y)$ est dans $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ alors que Z_y est dans $\mathbb{K}$. Nous avons donc

$$\text{Card}\big(\text{Fix}(y)\big) = \text{Card}(Z_y) - 1 = q^{d(y)} - 1. \tag{19.97}$$

Nous avons équivalence des affirmations suivantes :

- $\text{Card}(\mathcal{O}_x) = 1$
- $\mathcal{O}_x = \{x\}$
- $\text{Fix}(x) = \mathbb{K} \setminus \{0\}$
- $x \in Z \setminus \{0\}$.

Soient $z_0,\dots,z_{q-1}$ les éléments de Z avec $z_0=0$. Ce sont les éléments qui auront une orbite réduite à un point. Les orbites qui coupent $Z\setminus\{0\}$ sont

$$\{z_1\},\dots,\{z_{q-1}\} \tag{19.98}$$

et il y en a $q-1$. Soient $\mathcal{O}_{y_1},\dots,\mathcal{O}_{y_r}$, les autres orbites. Nous utilisons l'équation des classes (2.80) :

$$\mathrm{Card}(\mathbb{K}^*)=\mathrm{Card}(Z^*)+\sum_{i=1}^{r}\frac{\mathrm{Card}(\mathbb{K}^*)}{\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(y_i))}, \tag{19.99}$$

mais $\mathrm{Card}(Z^*)=q-1$, $\mathrm{Card}(\mathbb{K}^*)=q^n-1$ et $\mathrm{Card}\big(\mathrm{Fix}(y_i)\big)=q^{d(y_i)}-1$, donc

$$q^n-1=(q-1)+\sum_{i=1}^{r}\frac{q^n-1}{q^{d(y_i)}-1}. \tag{19.100}$$

Nous considérons la fraction rationnelle

$$F(X)=(X^n-1)-\sum_{i=1}^{r}\frac{X^n-1}{X^{d(y_i)}-1}. \tag{19.101}$$

Étant donné que $d(y_i)$ divise n, nous avons, contrairement aux apparences, $F\in\mathbb{Z}[X]$, par la proposition 19.23(1).

Nous pouvons exploiter un peu mieux la proposition 19.23 en remarquant que $d(y_i)<n$ parce que sinon $\mathrm{Card}(Z_{y_i})=\mathrm{Card}(\mathbb{K})$, ce qui signifierait que $y_i\in Z$, ce qui nous avions exclu. Par conséquent le polynôme cyclotomique ϕ_n divise

$$\frac{X^n-1}{X^{d(y_i)}-1} \tag{19.102}$$

dans $\mathbb{Z}[X]$. Le polynôme cyclotomique ϕ_n divise également X^n-1 et par conséquent ϕ_n divise F. Il existe donc $Q\in\mathbb{Z}[X]$ tel que $F=Q\phi_n$. En particulier en évaluant en q :

$$F(q)=Q(q)\phi_n(q)=q-1. \tag{19.103}$$

En effet nous avons $F(q)=q-1$ par construction : comparer (19.100) avec (19.101). Évidemment $q\neq1$ parce que si $q=1$ alors $\mathrm{Card}(\mathbb{K})=1$ et le théorème est trivial. Par ailleurs $Q(q)$ est un entier (parce que $Q\in\mathbb{Z}[X]$ et $q\in\mathbb{N}$) et $Q(q)\neq0$, parce qu'à droite de (19.103) nous avons $q-1\neq0$. Nous avons donc $|Q(q)|\geqslant1$ et donc

$$|\phi_n(q)|\leqslant q-1. \tag{19.104}$$

Par définition du polynôme cyclotomique nous avons

$$|\phi_n(q)|=\prod_{z\in\Delta_n}|q-z|. \tag{19.105}$$

Étant donné que ce produit doit être inférieur à $q-1$, au moins un des termes doit l'être : il existe $z_0\in\Delta_n$ tel que $|z_0-q|\leqslant q-1$. Étant donné que $n\geqslant2$ nous avons $z_0\neq1$.

Mais d'autre part, comme indiqué sur la figure 19.1, la distance entre z_0 et q doit être strictement plus grande que $q-1$ parce que $q-1$ est le minimum de la distance entre le cercle trigonométrique et q, et n'est atteint qu'en $z=1$.

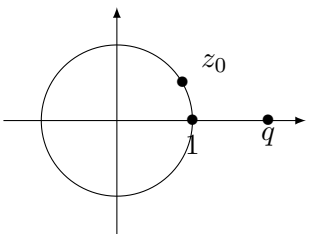


FIGURE 19.1 : Nous devons avoir $|z_0-q|>q-1$.

Nous avons ainsi obtenu une contradiction, et nous concluons que le corps $\mathbb{K}$ est commutatif. □

19.4.2 Existence, unicité

Nous avons déjà défini le corps fini $\mathbb{F}_p$ lorsque p est un nombre premier dans la section 6.1.3. Le théorème suivant sert à définir $\mathbb{F}_{p^n}$ lorsque p est premier.

ThoOzgSfy

Théorème 19.32.
Soit p un nombre premier, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $q = p^n$. Alors il existe un unique corps $\mathbb{K}$ de cardinal q. Ce corps est le corps de décomposition du polynôme $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$.

Démonstration. Montrons l'unicité. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal $q = p^n$. Le groupe multiplicatif $\mathbb{K}^*$ est de cardinal $q-1$, et par le corolaire 2.15 tous les éléments de $\mathbb{K}^*$ vérifient $g^{q-1} = e$, c'est-à-dire que dans $\mathbb{K}[X]$, les éléments de $\mathbb{K}^*$ sont des racines du polynôme

$$X^{q-1} - 1 \tag{19.106}$$

Par conséquent $\mathbb{K}$ est un corps de décomposition pour le polynôme $Q(X) = X^q - X = X(X^{q-1} - 1)$ parce que $Q(X) = 0$ dans $\mathbb{K}$. Il est unique par la proposition 6.145.

Montrons maintenant que le corps de décomposition de $P = X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$ est un corps de cardinal q. Pour ce faire nous considérons $\mathbb{K}$ ce corps de décomposition, et $\mathbb{E}$, l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{K}$. Nous allons montrer que $\mathbb{E} = \mathbb{K}$ et que $\mathbb{E}$ est un corps contenant q éléments.

Montrons que $\mathbb{E}$ est un corps. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ nous avons

$$(\alpha\beta)^q = \alpha^q\beta^q = \alpha\beta \tag{19.107}$$

parce que $\alpha^q = \alpha$. Le produit $\alpha\beta$ est donc encore dans $\mathbb{E}$. Pour la somme,

$$(\alpha+\beta)^q = (\alpha+\beta)^{p^n} = \Big((\alpha+\beta)^p\Big)^{p^{n-1}} = (\alpha^p + \beta^p)^{p^{n-1}} = \ldots = \alpha^{p^n} + \beta^{p^n} = \alpha + \beta. \tag{19.108}$$

En ce qui concerne l'inverse,

$$(\alpha^{-1})^q = (\alpha^q)^{-1} = \alpha^{-1}. \tag{19.109}$$

Donc $\mathbb{E}$ est un corps. Évidemment $\mathbb{E}$ est un corps de décomposition de P au sens où $\mathbb{E}$ est une extension de $\mathbb{F}_p$ sur lequel P est scindé (parce qu'il est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{E}$ est le sous-corps de $\mathbb{K}$ contenant les racines de P) et tel que $\mathbb{E} = \mathbb{F}_p(\{\alpha_i\})$ où les α_i sont les racines de P. Notons que $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{E}$ parce que dans $\mathbb{F}_p$ on a $x^q = x$.

Par unicité, nous avons $\mathbb{K} = \mathbb{E}$. Nous devons montrer que P possède exactement q racines distinctes, afin d'avoir $\text{Card}(\mathbb{E}) = q$. Pour cela remarquons que

$$P'(X) = qX^{q-1} - 1 = -1 \tag{19.110}$$

dans $\mathbb{F}_p$. En effet $P \in \mathbb{F}_p$ et $q = 0$ dans $\mathbb{F}_p$. Par conséquent P' ne s'annule pas et P n'a pas de racine double. Toutes les racines étant simples, il y en a exactement q. □

Le théorème 19.32 ne permet pas de *construire* le corps à $q = p^n$ éléments. Nous allons maintenant voir un certain nombre de résultats donnant des façons de le construire. Ces résultats proviennent de [636, 637, 638] et de Wikipédia.

PropnfebjI

Proposition 19.33 ([638]).
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Alors le groupe multiplicatif $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est cyclique.

Démonstration. Soit $\mathbb{K}$ un corps ayant q éléments. Le groupe $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ en a $q-1$; ergo l'ordre des éléments de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ sont des diviseurs de $q-1$; c'est le corolaire 2.15. Soit d un diviseur de $q-1$ et

$$H_d \setminus \{0\} = \{x \text{ d'ordre } d \text{ dans } \mathbb{K} \setminus \{0\}\} \tag{19.111a}$$

$$H_d = \{\text{racines de } X^d - 1 \text{ dans } \mathbb{K}\}. \tag{19.111b}$$

Ici le polynôme $X^d - 1$ est vu dans $\mathbb{K}[X]$. Notons que nous avons automatiquement $H_d^* \subset H_d$, mais l'inclusion inverse n'est pas assurée parce que les éléments d'ordre $d/2$ par exemple sont aussi dans H_d. Supposons $H_d^* \neq \varnothing$ et considérons $a \in H_d^*$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} &\to H_d \\ n &\mapsto a^n \end{aligned} \tag{19.112}$$

est un isomorphisme d'anneaux. En effet étant donné que $a \in H_d^* \subset H_d$, l'ensemble H_d contient le groupe cyclique engendré par a. Ce dernier contient, par construction, d éléments. Mais $\text{Card}(H_d) \leqslant d$ parce que

H_d est l'ensemble des racines d'un polynôme de degré d. Par conséquent $\text{Card}(H_d) = d$ et l'ensemble H_d est bien engendré par a et ϕ est bien un isomorphisme. Par conséquent tous les éléments de H_d^* sont des générateurs de H_d.

Inversement soit x un générateur de H_d. L'ordre de H_d étant d, l'ordre de x doit être un diviseur de d. Supposons donc que x soit d'ordre d/k. Dans ce cas nous devrions avoir $\text{Card}(H_d) = d/k$, ce qui contredit l'isomorphisme ϕ.

En conclusion, H_d^* est l'ensemble des générateurs du groupe H_d. Le nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ étant $\varphi(d)$ par la proposition 5.41, et H_d étant isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ nous avons

$$\text{Card}(H_d^*) = \varphi(d). \tag{19.113}$$

Par conséquent si H_d^* n'est pas vide, son cardinal est $\varphi(d)$. Nous avons

$$\begin{aligned} q - 1 &= \text{Card}(\mathbb{K}^*) && \text{(19.114a)}\\ &= \text{Card}\Big(\bigcup_{d|q-1} H_d^* \Big) && \text{(19.114b)}\\ &= \sum_{d|q-1} \text{Card}(H_d^*) && \text{(19.114c)}\\ &\leqslant \sum_{d|q-1} \varphi(d) = q - 1 && \text{(19.114d)} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la proposition 5.38. Par conséquent pour tout d divisant $q-1$ nous avons $\text{Card}(H_d^*) = \varphi(d)$ et il y a au moins un élément d'ordre $q-1$ dans $\mathbb{K}$. Cet élément engendre $\mathbb{K}^*$ parce que $\mathbb{K}^*$ contient exactement $q-1$ éléments. Par conséquent $\mathbb{K}^*$ est cyclique. □

CorpRUndR

Corolaire 19.34.
Si p est un nombre premier, alors

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}. \tag{19.115}$$

L'isomorphisme est un isomorphisme de groupes (abéliens). À gauche multiplicatif et à droite additif.

Démonstration. La proposition 19.33 nous enseigne que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique et donc isomorphe à un certain $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Donc $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est un groupe cyclique d'ordre p, et donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n = p - 1$. □

Lorsque $\mathbb{K}$ est un corps les éléments du groupe $\mathbb{K}^*$ sont les **éléments primitifs** de $\mathbb{K}$.

propQRcUlq

Proposition 19.35.
Soit $\mathbb{K}$ un corps contenant q éléments. Alors

(1) $x^q = x$ pour tout $x \in \mathbb{K}$,

(2) $X^q - X = \prod_{a\in\mathbb{K}}(X - a)$.

Démonstration. Le groupe $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ ayant $q-1$ éléments, ses éléments vérifient $a^{q-1} = 1$ par le corolaire 2.15 et par conséquent $a^q = aa^{q-1} = a$.

Soit $a \in \mathbb{K}$. Étant donné que $a^q - a = 0$, le polynôme $(X - a)$ divise $X^q - X$ dans $\mathbb{K}[X]$. Par conséquent

$$\prod_{a\in\mathbb{K}} (X - a) \tag{19.116}$$

divise également $X^q - X$. Les polynômes $X^q - X$ et $\prod_{a\in\mathbb{K}}(X - a)$ étant deux polynômes unitaires de même degré, le fait que l'un divise l'autre montre qu'ils sont égaux. □

Une conséquence de $x^q = x$ est qu'il ne faut pas considérer le théorème 6.110 trop rapidement en disant « s'il s'annule partout, alors c'est le polynôme nul ». En effet dans un corps fini, « partout » n'est pas forcément très grand.

exVQBooBMPLkD

Exemple 19.36.
Si $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est le[15] corps à 3 éléments, alors le polynôme $P(X) = X^3 - X$ s'évalue à zéro pour tout $x \in \mathbb{F}_3$ (proposition 19.35.) mais il n'est pas le polynôme nul. △

[15] Le singulier est justifié par le théorème 19.32, mais ça n'a pas d'importance ici.

19.4.3 Symboles de Legendre et carrés

Source : [639].

Nous disons que $a \in \mathbb{F}_p$ est un **carré** si il existe $b \in \mathbb{F}_p$ tel que $a = b^2$.

Définition 19.37.
*Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p > 2$ un nombre premier. Le **symbole de Legendre** est défini par*

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ divise } n \\ 1 & \text{si } n \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_p \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{19.117}$$

Note : -1 peut être un carré, et pas que dans $\mathbb{C}$. Par exemple dans $\mathbb{F}_5$ nous avons $4 = -1$ et donc -1 est un carré.

PropcGsJjk

Proposition 19.38.
Soit un nombre premier $p > 2$. Le corps $\mathbb{F}_p^*$ contient autant de carrés que de non carrés. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\left(\frac{n}{p}\right) = n^{(p-1)/2} \mod p. \tag{19.118}$$

Eqbcugos

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{F}_p^* &\to \mathbb{F}_p^* \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned} \tag{19.119}$$

C'est un morphisme de groupes multiplicatifs et $\ker\psi = \{-1, 1\}$. Étant donné que $p > 2$, nous avons alors

$$\text{Card}(\ker\psi) = 2 \tag{19.120}$$

parce que $1 \neq -1$. Évidemment l'ensemble des carrés dans $\mathbb{F}_p^*$ est l'image de ψ. Le premier théorème d'isomorphisme 2.7(3) nous permet alors de conclure que

$$\text{Card}(\text{Image}(\psi)) = \frac{\text{Card}(\mathbb{F}_p^*)}{2}. \tag{19.121}$$

Ceci prouve la première assertion.

Par le petit théorème de Fermat (théorème 6.15), nous avons $x^{p-1} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{F}_p^*$. Les $(p-1)$ éléments de $\mathbb{F}_p^*$ sont donc tous racines d'un des deux polynômes

$$X^{(p-1)/2} = \pm 1. \tag{19.122}$$

Mais chacun des deux ne peut avoir, au maximum, que $(p-1)/2$ solutions. Ils ont donc chacun exactement $(p-1)/2$ racines.

Nous pouvons maintenant prouver la formule (19.118). D'abord si $n = 0$, elle est évidente. Si n est un carré dans $\mathbb{F}_p$, nous posons $n = x^2$ et nous avons

$$n^{(p-1)/2} = x^{p-1} = 1 = \left(\frac{n}{p}\right). \tag{19.123}$$

Si n n'est pas un carré, c'est que n n'est pas une racine de $X^{(p-1)/2} = 1$. Le nombre n est alors une racine de $X^{(p-1)/2} = -1$. Nous avons alors

$$n^{(p-1)/2} = -1 = \left(\frac{n}{p}\right). \tag{19.124}$$

□

CoruJosNz

Corolaire 19.39.
Si $a, b \in \mathbb{N}$ et si $p > 2$ est un nombre premier, alors

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right). \tag{19.125}$$

Démonstration. Par la formule (19.118),

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = (ab)^{(p-1)/2} = a^{(p-1)/2}b^{(p-1)/2} = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right). \tag{19.126}$$

□

Soit un nombre premier $q > 2$ et $\mathbb{A}$, un anneau de caractéristique p. Si $\alpha \in \mathbb{A}$ vérifie

$$1 + \alpha + \cdots + \alpha^{q-1} = 0, \tag{19.127}$$

nous définissons la **somme de Gauss** par

$$\tau = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \left(\frac{x}{q}\right) \alpha^x = \sum_{x=1}^{q-1} \left(\frac{x}{q}\right) \alpha^x. \tag{19.128}$$

Notons que la somme de Gauss dépend de q et du α choisis.

PropciRUov

Proposition 19.40.
Les sommes de Gauss vérifient les propriétés suivantes.

(1) $\tau^2 = \left(\frac{-1}{q}\right) q$. *Nous allons noter* $\epsilon(q) = \left(\frac{-1}{q}\right)$.

(2) Si $\mathbb{A}$ *est de caractéristique* $p \geqslant 3$ *et si* $p \neq q$ *alors*

$$\tau^p = \left(\frac{p}{q}\right) \tau. \tag{19.129}$$

EqxBNpJz

(3) Si $\mathbb{A}$ *est de caractéristique* p *et si* q *est premier avec* p*, alors* τ *est inversible dans* $\mathbb{A}$.

Démonstration. D'abord nous notons que

$$\alpha^q - 1 = (\alpha - 1)(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{q-1}) = 0 \tag{19.130}$$

par définition de α. Nous calculons

$$\begin{aligned}
\epsilon(q)\tau^2 &= \epsilon(q) \sum_{x,y \in \mathbb{F}_q} \left(\frac{x}{q}\right)\left(\frac{y}{q}\right) \alpha^{x+y} && \text{(19.131a)}\\
&= \sum_{x,y \in \mathbb{F}_q} \left(\frac{-xy}{q}\right) \alpha^{x+y}. && \text{(19.131b)}\\
&= \sum_{z \in \mathbb{F}_q} \sum_{y \in \mathbb{F}_q} \left(\frac{-(z-y)y}{q}\right) \alpha^z && \text{(19.131c)}\\
&= \sum_{z \in \mathbb{F}_q} s_z \alpha^z && \text{(19.131d)}
\end{aligned}$$

EqlObFeo

EqWyIhhk

EqWoIszS

Justifications :

- Pour obtenir (19.131b) nous avons utilisé le corolaire 19.39.
- (19.131c) est un changement de variable $z = x + y$ dans la somme sur x.
- Pour (19.131d) nous avons posé

$$s_z = \sum_{y \in \mathbb{F}_q} \left(\frac{-(z-y)y}{q}\right). \tag{19.132}$$

Nous avons

$$s_0 = \sum_{y \in \mathbb{F}_q} \left(\frac{y^2}{q}\right). \tag{19.133}$$

Dans cette somme, tous les termes sont égaux à 1, sauf celui avec $y = 0$ qui vaut zéro. Nous avons donc $s_0 = q - 1$. Voyons maintenant s_y avec $y \neq 0$. L'application

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_q^* &\to \mathbb{F}_q \setminus \{1\}\\
k &\mapsto 1 - zy^{-1}
\end{aligned} \tag{19.134}$$

étant une bijection nous pouvons effectuer le changement de variables $t = y^{-1}z - 1$ pour la somme sur y en notant y^{-1} l'inverse de y dans $\mathbb{F}_q^*$, nous trouvons alors

$$\sum_{y\in\mathbb{F}_q}\left(\frac{y(z-y)}{q}\right) = \sum_{y\in\mathbb{F}_q}\left(\frac{y^2(y^{-1}z-1)}{q}\right) \tag{19.135a}$$

$$= \sum_{y\in\mathbb{F}_q}\left(\frac{y^{-1}z-1}{q}\right) \tag{19.135b}$$

$$= \sum_{t\in\mathbb{F}_q\setminus\{1\}}\left(\frac{t}{q}\right) \tag{19.135c}$$

$$= \underbrace{\sum_{t\in\mathbb{F}_q}\left(\frac{y}{q}\right)}_{=0} - \left(\frac{1}{1}\right) \tag{19.135d}$$

$$= -1 \tag{19.135e}$$

parce qu'il y a autant de carrés que de non carrés dans $\mathbb{F}_q^*$ (proposition 19.38). En résumé nous avons

$$\epsilon(q)\tau^2 = \sum_{z\in\mathbb{F}_q} s_z\alpha^z \tag{19.136}$$

où

$$s_z = \begin{cases} q-1 & \text{si } z=0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{19.137}$$

Cela donne

$$\epsilon(q)\tau^2 = (q-1) - \underbrace{(\alpha+\cdots+\alpha^{q-1})}_{=-1} = q \tag{19.138}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse sur α. Donc $\epsilon(q)\tau^2 = q$, et étant donné que $\epsilon(q) = \pm 1$ nous concluons

$$\tau^2 = \epsilon(q)q. \tag{19.139}$$

Nous prouvons maintenant la seconde partie. Comme $\mathbb{A}$ est de caractéristique p, en utilisant le fait que le morphisme de Frobenius est un morphisme,

$$\tau^p = \left(\sum_{x\in\mathbb{F}_q}\left(\frac{x}{q}\right)\alpha^x\right)^p = \sum_{x\in\mathbb{F}_q}\left(\frac{x}{q}\right)^p\alpha^{px}. \tag{19.140}$$

Étant donné que $\left(\frac{x}{q}\right) = \pm 1$ et que p est impair, nous avons

$$\left(\frac{x}{q}\right)^p = \left(\frac{x}{q}\right). \tag{19.141}$$

Du coup nous avons

$$\left(\frac{p}{q}\right)\tau^p = \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\left(\frac{xp}{q}\right)\alpha^{px}. \tag{19.142}$$

Mais p étant inversible dans $\mathbb{F}_q$, l'application $x \mapsto px$ est une bijection et nous pouvons sommer sur px au lieu de x :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\tau^p = \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\left(\frac{x}{q}\right)\alpha^x = \tau. \tag{19.143}$$

Nous trouvons alors que

$$\tau^p = \left(\frac{p}{q}\right)\tau. \tag{19.144}$$

Étant donné la formule du τ^2 que nous venons de démontrer, nous avons $\tau^2 = \pm q$. Les nombres p et q étant premiers entre eux, le théorème de Bézout (théorème 1.358) nous donne a et b tels que

$$ap + bq = 1. \tag{19.145}$$

Cela montre que b est un inverse de q modulo p. Donc τ^2 est inversible, et il en découle que τ lui-même est inversible. □

ThoMiEiUm

Théorème 19.41 (Loi de réciprocité quadratique)**.**
Soient deux nombres premiers distincts $p, q \geqslant 3$. Alors

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} \left(\frac{q}{p}\right). \tag{19.146}$$

Démonstration. Soit ϕ_q le polynôme $1 + X + \cdots + X^{q-1}$ et l'anneau

$$\mathbb{A} = \mathbb{F}_p[X]/(\phi_q). \tag{19.147}$$

C'est un anneau de caractéristique p parce que son unité est le polynôme constant 1. Nous nommons $\alpha = X/(\phi_q)$, c'est-à-dire que $\phi_q(\alpha) = 0$ dans $\mathbb{A}$, et nous pouvons considérer la somme de Gauss

$$\tau = \sum_{i \in \mathbb{F}_q} \left(\frac{i}{q}\right) \alpha^i. \tag{19.148}$$

Notons que ceci est un élément de $\mathbb{A}$ et plus précisément un polynôme de degré zéro dans $\mathbb{A}$, et encore plus précisément, une classe d'un tel polyôme. Donc les coefficients de α doivent être compris comme des éléments de $\mathbb{F}_p$. Nous savons (proposition 19.40) que

$$\tau^2 = \left(\frac{-1}{q}\right), \tag{19.149}$$

et en utilisant la formule (19.118) nous trouvons

$$\left(\frac{\tau^2}{p}\right) = (\tau^2)^{(p-1)/2} \mod p = \tau^{p-1} \mod p \tag{19.150}$$

En réalité sur cette dernière ligne, nous ne devrions pas préciser le « modulo p » parce que, comme mentionné plus haut, ce sont des éléments de $\mathbb{F}_p$. En utilisant cela, ainsi que (19.129), nous avons

$$\underbrace{\left(\frac{\tau^2}{p}\right)}_{\tau^{p-1}} \tau = \tau^p = \left(\frac{p}{q}\right) \tau \tag{19.151}$$

Puisque τ est inversible, nous écrivons

$$\left(\frac{\tau^2}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) \tag{19.152}$$

Nous utilisons maintenant la formule (19.118) sur le membre de gauche avec $n = \tau^2 = \left(\frac{-1}{q}\right)$:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right). \tag{19.153}$$

Toujours avec la même formule nous pouvons substituer $\left(\frac{-1}{q}\right)$ par $(-1)^{(q-1)/2}$ et obtenir

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(q-1)}{2}\frac{(p-1)}{2}}. \tag{19.154}$$

□

Lemoabzrn

Lemme 19.42.
Si p est un nombre premier $p \geqslant 3$, alors le symbole de Legendre $x \mapsto \left(\frac{x}{p}\right)$ est l'unique morphisme non trivial de $\mathbb{F}_p^*$ dans $\{-1, 1\}$.

Démonstration. Le fait que le symbole de Legendre soit non trivial est simplement le fait qu'il y ait des carrés et des non carrés dans $\mathbb{F}_p^*$; voir la proposition 19.38. Pour l'unicité, soit $\alpha\colon \mathbb{F}_p^* \to \{-1, 1\}$ un morphisme surjectif (c'est-à-dire non trivial). Étant donné que

$$\mathbb{F}_p^* = \ker(\alpha) \cup -\ker(\alpha), \tag{19.155}$$

le groupe $\mathbb{F}_p^*/\ker(\alpha)$ ne contient que deux éléments : $[1]$ et $[-1]$. Autrement dit, $\ker(\alpha)$ est d'indice 2 dans $\mathbb{F}_p^*$.

Or $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ ne possède qu'un seul sous-groupe d'indice 2. En effet soit S un tel sous-groupe et a, un générateur de $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ (qui est cyclique par la proposition 19.33), alors $a^2 \in S$ par le lemme 3.25. Par conséquent S contient le groupe des puissances paires de a. Le groupe S ne peut rien contenir de plus parce qu'il est d'indice 2 et que l'ordre de $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ est pair.

Bref, le sous-groupe $\ker(\alpha)$ est l'unique sous-groupe d'indice 2 dans $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$. Mais la proposition 19.38 nous indique que $|(\mathbb{F}_p \setminus \{0\})^2| = \frac{p-1}{2}$, c'est-à-dire que le groupe des carrés est d'indice 2. Nous avons donc, par l'unicité,

$$\ker(\alpha) = (\mathbb{F}_p \setminus \{0\})^2. \tag{19.156}$$

Au final, pour $y \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$,

$$\alpha(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ est un carré} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{19.157}$$

Ce qui est bien la définition des symboles de Legendre. □

PROPooCLEUooHWnoXM

Proposition 19.43.
Si p est un nombre premier, nous avons

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in [1]_8 \text{ ou } p \in [7]_8 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{19.158}$$

Démonstration. Soit le polynôme

$$X^4 + 1 \in \mathbb{F}_p[X] \tag{19.159}$$

et α, une racine dans une extension[16] de $\mathbb{F}_p$[17]. Nous posons $\theta = \alpha + \alpha^{-1}$ et nous calculons

$$\theta^2 = (\alpha + \alpha^{-1})(\alpha + \alpha^{-1}) = \alpha^2 + 2 + (\alpha^2)^{-1} = \alpha^2 + 2 - \alpha^2 = 2 \tag{19.160}$$

parce que α^4 étant -1, nous avons $(\alpha^2)^{-1} = -\alpha^2$. Bref, $\theta^2 = 2$.

Dire que 2 est un carré modulo p revient à dire que θ est dans $\mathbb{F}_p$. C'est-à-dire que pour calculer le symbole de Legendre $\left(\frac{2}{p}\right)$, nous étudions pour quels p, l'élément θ est vraiment dans $\mathbb{F}_p$ et non seulement dans l'extension $\mathbb{F}_p(\alpha)$. En tenant compte de l'exemple 6.97, il faut distinguer deux cas : $\alpha^p = \alpha$ et $\alpha^p \neq \alpha$. Autrement dit, si $\alpha^k = \alpha$ pour un certain nombre premier k, alors le cas $p = k$ est à traiter à part. La liste des puissances de α est :

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, -1, -\alpha, -\alpha^2, -\alpha^3, 1, \alpha, \dots \tag{19.161}$$

Nous avons donc automatiquement $\alpha^{9k} = \alpha$, mais $p = 9k$ est exclu parce que p est premier. Nous devons donc vérifier si une des propriétés

$$\alpha^2 = \alpha \tag{19.162a}$$
$$\alpha^3 = \alpha \tag{19.162b}$$
$$-\alpha = \alpha \tag{19.162c}$$
$$-\alpha^3 = \alpha \tag{19.162d}$$

est possible. Il est aisément vérifiable, au cas par cas, que ces possibilités sont toutes incompatibles avec $\alpha^4 = -1$. Nous avons donc certainement $\alpha^p \neq \alpha$ et compte tenu de l'exemple 6.97, l'équation $x^p = x$ caractérise les éléments de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{F}_p(\alpha)$.

L'équation $X^2 = 2$ a exactement deux solutions qui sont $\pm\theta$. Nous avons donc $2 \in \mathbb{F}_p^2$ si et seulement si $\theta \in \mathbb{F}_p$ si et seulement si $\theta^p = \theta$. Nous avons réduit notre problème à déterminer pour quels p nous avons $\theta^p = \theta$. D'abord nous avons, par le morphisme de Frobenius,

$$\theta^p = (\alpha + \alpha^{-1})^p = \alpha^p + \alpha^{-p}. \tag{19.163}$$

Nous pouvons maintenant conclure facilement. Un nombre premier étant impair (sauf $p = 2$ qui peut être traité à part), p est automatiquement dans un des ensembles $[1]_8$, $[3]_8$, $[5]_8$ ou $[7]_8$. Nous avons quatre petites vérifications à faire. Dans tous les cas $\alpha^{8k} = 1$. Si $p = 1 + 8k$, alors

$$\theta^p = \alpha^{1+8k} + (\alpha^{-1})^{1+8k} = \alpha + \alpha^{-1} = \theta, \tag{19.164}$$

[16] Dans la source que je suivais (je ne sais plus où), on parlait ici de « fermeture » de $\mathbb{F}_p$ et non d'extension. Il me semble que parler simplement d'extension suffit. Vous confirmez ?

[17] Voir par exemple la proposition 6.142 pour l'existence d'une extension comme il faut.

donc 2 est un carré dans $\mathbb{F}_p$. Si $p \in [3]_8$, alors $\theta^p = \alpha^3 + \alpha^{-3}$. Si cela était égal à $\alpha + \alpha^{-1}$, alors nous aurions

$$\alpha^6 + 1 = \alpha^4 + \alpha^2, \tag{19.165}$$

et donc $\alpha^2 = 1$, ce qui est impossible. Les vérifications pour $p \in [5]_8$ et $p \in [7]_8$ sont du même style. □

19.4.4 Théorème de Chevalley-Warning

Lemme 19.44.
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p et de cardinal q. Pour $m \in \mathbb{N}$ nous définissons

$$S_m = \sum_{x \in \mathbb{K}} x^m. \tag{19.166}$$

Alors nous avons

$$S_m \mod p = \begin{cases} -1 & \text{si } m \geqslant 1 \text{ et } m \text{ divisible par } q-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{19.167}$$

Démonstration. Si $m = 0$, alors $x^0 = 1$ et $S_m = q$. Par conséquent $S_m \mod p = 0$ parce que la caractéristique d'un corps divise son ordre (proposition 1.467).

Nous prenons maintenant $m \geqslant 1$ et nous voyons séparément les cas où $q-1$ divise m ou non. Si $q-1$ divise m, alors pour tout $x \neq 0$ nous avons

$$x^m = x^{k(q-1)} = 1 \tag{19.168}$$

parce que $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est cyclique et $x^{q-1} = 1$ par le petit théorème de Fermat (théorème 6.15). Par conséquent nous avons

$$\sum_{x \in \mathbb{K}} x^m = \sum_{x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}} 1 = q - 1. \tag{19.169}$$

Si le nombre $m \geqslant 1$ n'est pas divisible par $q-1$ alors nous prenons un générateur y du groupe $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Un tel élément vérifie $y^m \neq 1$. En effet, si y vérifiait $y^m = 1$ alors cela signifierait que l'ordre de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est un diviseur de m, ce qui n'est pas le cas ici, parce que l'ordre de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est $q-1$. Pour un tel y, l'application

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{K} \setminus \{0\} &\to \mathbb{K} \setminus \{0\} \\ x &\mapsto yx \end{aligned} \tag{19.170}$$

est une bijection[18]. En ce qui concerne l'injectivité, $ya = yb$ implique $a = b$. En ce qui concerne la surjectivité, si a est un générateur, si $z = a^l$ et si $y = a^k$, alors

$$z = \varphi(a^{l-k}). \tag{19.171}$$

Nous pouvons maintenant poser le calcul.

$$S_m = \sum_{x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}} x^n = \sum_{x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}} (yx)^m = y^m \sum_{x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}} x^m = y^m S_m. \tag{19.172}$$

Étant donné que $y^m \neq 1$, la seule solution est $S_m = 0$. □
ThoLTcYKk

Théorème 19.45 (Chevalley-Warning[640])**.**
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q et de caractéristique p. Soient $P_1, \dots, P_r$ des éléments de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tels que $\sum_{i=1}^r \deg(P_i) < n$. Nous considérons l'ensemble des zéros communs à tous les polynômes :

$$V = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } P_1(x) = \dots = P_r(x) = 0\}. \tag{19.173}$$

Alors $\operatorname{Card}(V) = 0 \mod p$.

Démonstration. Nous considérons le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^{r} (1 - P_i^{q-1}). \tag{19.174}$$

[18] Notons que nous n'avons pas réellement besoin que y soit un générateur. Nous n'utilisons seulement le fait que $y^m \neq 1$ et $y \neq 0$.

Montrons que

$$P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{19.175}$$

La première ligne est facile : étant donné que tous les $P_i(x)$ sont nuls pour $x \in V$, nous avons $P(x) = 1$. Si x n'est pas dans V, alors nous avons un i tel que $P_i(x) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Mais dans ce cas (toujours la cyclicité de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$) nous avons $P_i(x)^{q-1} = 1$ et donc le produit est nul.

En utilisant l'hypothèse sur le degré des P_i, nous trouvons

$$\deg(P) = \sum_{i=1}^{r} (q-1)\deg(P_i) < n(q-1). \tag{19.176}$$

Pour un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, nous définissons

$$\int Q = \sum_{x \in \mathbb{K}^n} Q(x). \tag{19.177}$$

Nous avons immédiatement

$$\int P = \sum_{x \in \mathbb{K}^n} P(x) = \sum_{x \in V} 1 = \text{Card}(V) \mod p. \tag{19.178}$$

Nous insistons sur le « modulo p » parce que dans la formule $P(x) = 1$, le membre de droite est le 1 de $\mathbb{K}$; il est donc automatiquement modulo la caractéristique de $\mathbb{K}$.

Il nous reste à prouver que $\int P = 0$. Pour cela nous décomposons

$$P = \sum_m c_m X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n} \tag{19.179}$$

EqHnUVlM

où la somme s'étend sur les $m \in \mathbb{N}^n$ tels que $c_m \neq 0$. Nous avons

$$\int P = \sum_{x \in \mathbb{K}^n} \sum_m c_m x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} \tag{19.180a}$$

$$= \sum_m c_m \left(\sum_{x \in \mathbb{K}^n} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} \right) \tag{19.180b}$$

$$= \sum_m c_m S_{m_1} \ldots S_{m_n}. \tag{19.180c}$$

Le terme de plus haut degré dans la décomposition (19.179) est celui du m tel que $\sum_i m_i$ est le plus grand. Comme ce degré est plus petit que $n(q-1)$, pour chacun des m rentrant dans la somme, nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} m_i < n(q-1). \tag{19.181}$$

En particulier pour tout $m \in \mathbb{N}^n$, il existe i tel que $m_i < q-1$, et dans ce cas $S_{m_i} = 0$. Donc tous les termes de la somme

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^n} c_m S_{m_1} \ldots S_{m_n} \tag{19.182}$$

ont un facteur nul. □

CorfuHNKz

Corolaire 19.46.
Soit P_i des polynômes à n variables avec $\sum_{i=1}^{r} \deg(P_i) < n$. Si les P_i n'ont pas de terme constant, alors ils ont un zéro commun non trivial.

Démonstration. Nous reprenons les notations du théorème 19.45. Étant donné que les P_i n'ont pas de terme constant, $0 \in V$, mais $\text{Card}(V) = 0 \mod p$. Par conséquent nous devons avoir $\text{Card}(V) > p$. □

Exemple 19.47.
Nous considérons les polynômes

$$P_1(x, y, t, u) = xy + x + ux \tag{19.183a}$$

$$P_2(x, y, t, u) = x + y - 3t. \tag{19.183b}$$

La somme de leurs degrés est 3 et ce sont des polynômes à 4 variables. Nous devons donc avoir, en vertu du corolaire 19.46, d'autres racines que la racine triviale $(x, y, t, u) = (0, 0, 0, 0)$.

Le corolaire nous donne aussi une borne inférieure du nombre de racines à chercher : plus que la caractéristique du corps sur lequel nous travaillons. Nous pouvons dire cela sans avoir la moindre idée de la façon dont on pourrait résoudre le système $P_1 = P_2 = 0$. △

19.4.5 Contenu d'un polynôme

LemHULrVaF

Lemme 19.48 (de Gauss[128, 641])**.**
Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$. Alors

$$c(PQ) = c(P)c(Q) \tag{19.184}$$

où c est le contenu, définition 3.101.

Démonstration. Afin de fixer les notations, nous posons $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_j b_j Y^j$.

(1) **Pour les polynômes primitifs**

Nous commençons par supposer que $c(P) = c(Q) = 1$. Dans ce cas si $c(PQ) \neq 1$, nous considérons un nombre premier p divisant $c(PQ)$. Puisque le contenu de P et de Q vaut 1, le nombre p ne peut pas diviser tous leurs coefficients. Nous définissons i_0 de façon que a_{i_0} soit le premier à ne pas être divisible par p, et j_0 de telle façon que b_{j_0} soit le premier à ne pas être divisible par p. Autrement dit :

$$p \mid a_0, p \mid a_1, \ldots, p \mid a_{i_0-1}, p \nmid a_{i_0} \tag{19.185}$$

et de façon similaire pour j_0. Donc p ne divise ni a_{i_0}, ni b_{j_0}. Nous nous demandons alors avec malice quel est le coefficient de $X^{i_0+j_0}$ dans PQ. La réponse est :

$$a_{i_0}b_{j_0} + \sum_{\substack{i+j=i_0+j_0 \\ i<i_0 \text{ ou } j<j_0}} a_i b_j. \tag{19.186}$$

Par définition p divise soit a_i soit b_j pour chacun des termes de la grande somme. Comme p ne divise pas $a_{i_0}b_{j_0}$, il ne divise pas le coefficient de $X^{i_0+j_0}$ dans PQ, alors que nous étions partis en disant que p divisait tous les coefficients de PQ.

Nous concluons donc que $c(PQ) = 1$.

(2) **Cas général**

Si P et Q sont maintenant des polynômes sans condition particulière dans $\mathbb{Z}[X]$, nous considérons $P_1 = \frac{P}{c(P)}$ et $Q_1 = \frac{Q}{c(Q)}$; ces deux polynômes sont primitifs et nous avons alors, en utilisant la première partie :

$$c(P_1Q_1) = 1. \tag{19.187}$$

Étant donné que

$$P_1Q_1 = \frac{1}{c(P)c(Q)}PQ, \tag{19.188}$$

nous avons

$$c(PQ) = c(P)c(Q)c(P_1Q_1) = c(P)c(Q). \tag{19.189}$$

□

19.4.6 Théorème de l'élément primitif

Définition 19.49.
*Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ est dite **finie** si $\mathbb{L}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.*

Notez que la définition d'extension finie ne suppose ni que $\mathbb{K}$, ni que $\mathbb{L}$, soient finis en tant qu'ensembles.

THOooYFLZooHYENKp

Théorème 19.50 (de l'élément primitif)**.** *Si $\mathbb{K}$ est un corps fini, toute extension finie de $\mathbb{K}$ est simple*[19]*.*

Si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque alors toute extension séparable finie est simple.

[19] Définition 6.93.

Démonstration. Nous ne donnons la preuve que dans le cas où $\mathbb{K}$ est fini. Dans ce cas nous savons par la proposition 19.33 que le groupe $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est cyclique. Si de plus $\mathbb{L}$ est une extension finie alors $\mathbb{L}$ est fini en tant qu'ensemble. Par conséquent $\mathbb{L} \setminus \{0\}$ est un groupe cyclique. Si α est un générateur de $\mathbb{L}$ alors $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ et l'extension est donc simple.

Une preuve de l'assertion dans le cas où $\mathbb{K}$ est infini peut être trouvée sur Wikipédia. □

PROPooWNHYooSzMJqF

Proposition 19.51.
L'ordre d'un polynôme P vérifie les propriétés suivantes :

(1) L'ordre de P est l'ordre multiplicatif de ses racines

(2) L'ordre de P divise $p^n - 1$.

LemZrUUOz

Lemme 19.52.
Soit p un nombre premier et P un polynôme irréductible unitaire de degré n. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_p[X]/P$, alors $(\alpha + \beta)^p = \alpha^p + \beta^p$.

Démonstration. La preuve est exactement la preuve classique[20] :

$$(\alpha + \beta)^p = \sum_k \binom{p}{k} \alpha^k \beta^{p-k} \tag{19.190}$$

où les coefficients binomiaux sont dans $\mathbb{F}_p$ et donc nuls pour les k différents de p et de 0. □

Cette proposition est encore vraie avec $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{p^n}$ et $(\alpha + \beta)^{p^n}$.

Lemme 19.53.
Si $\alpha \in \mathbb{F}_q$ est une racine d'ordre k de P (de degré n) alors les racines de $X^k - 1$ sont $\{\alpha^i$ tel que $i = 0, \dots, k-1\}$.

Nous serions donc intéressés à construire $\mathbb{F}_q$ comme quotient de $\mathbb{F}_p[X]$ par un polynôme primitif. Le théorème suivant donne une description abstraite de $\mathbb{F}_q$ qui va nous servir de point de départ pour la construction.

ThoqSludu

Théorème 19.54 (Théorème de l'élément primitif)**.**
Soit p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}$ et $q = p^n$. Soit $\mathbb{K}$ un corps à q éléments. Alors

(1) Il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[\alpha]$.

(2) Il existe un polynôme irréductible $P \in \mathbb{F}_p[X]$ de degré n tel que

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{F}_p[X]/(P) &\to \mathbb{K} \\ \overline{X} &\mapsto \alpha \end{aligned} \tag{19.191}$$

EqWlMhhm

soit un isomorphisme de corps.

Soient α et P choisis pour avoir les propriétés citées plus haut. Alors nous avons les propriétés suivantes.

(1) P est primitif[21]*.*

(2) P est scindé dans $\mathbb{K}$.

(3) L'ensemble des racines de P est $\{\alpha, \alpha^p, \dots, \alpha^{p^{n-1}}\}$.

(4) Le polynôme P divise $X^q - X$ dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Démonstration. Le corps $\mathbb{K}$ étant fini, il est cyclique par la proposition 19.33. Soit α un générateur de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ alors

$$\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[\alpha]. \tag{19.192}$$

Soit ℓ le plus grand entier tel que l'ensemble

$$\{1, \alpha, \cdots, \alpha^{\ell-1}\} \subset \mathbb{K} \tag{19.193}$$

[20] Voir le coefficients binomiaux de la proposition 1.387.
[21] Définition 3.103.

soit libre. Pour rappel, $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$. Il existe des $a_i \in \mathbb{F}_p$ tels que

$$\alpha^\ell + a_{\ell-1}\alpha^{\ell-1} + \cdots + a_0 = 0. \tag{19.194}$$

De façon équivalente, il existe un polynôme unitaire $P \in \mathbb{F}_p[X]$ de degré ℓ tel que $P(\alpha) = 0$. Étant donné que α est générateur de $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K} = \text{Span}\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{\ell-1}\} \tag{19.195}$$

parce que $\mathbb{K}$ est généré par les puissances de α alors que les puissances de α plus hautes que $\ell - 1$ peuvent être générées par $1, \alpha, \ldots, \alpha^{\ell-1}$. L'espace $\mathbb{K}$ est donc un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension ℓ ; par conséquent

$$\text{Card}(\mathbb{K}) = p^n = q \tag{19.196}$$

et $\ell = n$.

Montrons que P est irréductible dans $\mathbb{F}_p$. Si P était réductible dans $\mathbb{F}_p$, l'élément $\alpha \in \mathbb{K}$ serait une racine d'un des facteurs, c'est-à-dire qu'il serait racine d'un polynôme de degré inférieur à n, ce qui contredirait le fait que

$$\{\alpha^{\ell-1}, \ldots, 1\} \tag{19.197}$$

soit libre.

Montrons que l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{F}_p[X]/(P) &\to \mathbb{K} \\ \overline{X} &\mapsto \alpha \end{aligned} \tag{19.198}$$

est un isomorphisme. Pour l'injectivité, deux éléments $Q_1, Q_2 \in \mathbb{F}_p[X]/(P)$ s'écrivent

$$Q_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \overline{X}^k \tag{19.199a}$$

$$Q_2 = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \overline{X}^k. \tag{19.199b}$$

Dans ce cas si $\phi(Q_1) = \phi(Q_2)$ alors

$$\phi(Q_1) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k = \phi(Q_2) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \alpha^k. \tag{19.200}$$

Mais l'ensemble $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ étant libre sur $\mathbb{F}_p$, cela implique $a_k = b_k$. La surjectivité de ϕ provient du fait que α génère $\mathbb{K}$.

Nous passons maintenant à la seconde partie de la démonstration. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[\alpha]$ et $P \in \mathbb{F}_p[X]$ un polynôme irréductible de degré n tel que $\alpha \mapsto \overline{X}$ soit un isomorphisme entre $\mathbb{K}$ et $\mathbb{F}_p[X]/(P)$.

Le polynôme P est primitif parce que α est d'ordre p^n dans $\mathbb{K}$ alors que $\overline{X} \mapsto \alpha$ est un isomorphisme. Par conséquent $\overline{X}$ est d'ordre p^n dans $\mathbb{F}_p[X]/P$.

Nous commençons par prouver que l'ensemble

$$\{\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^{n-1}}\} \tag{19.201}$$

EqAcsQHL

est l'ensemble des racines distinctes de P. Pour cela nous posons

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \tag{19.202}$$

avec $a_k \in \mathbb{F}_p$. D'abord α est une racine de P. En effet

$$P(\overline{X}) = \sum_k a_k \overline{X}^k = 0 \tag{19.203}$$

EqbTAmKG

parce que cette somme est calculée dans $\mathbb{F}_p[X]/(P)$. En appliquant l'isomorphisme ϕ à l'égalité (19.203) nous trouvons

$$0 = \phi\big(P(\overline{X})\big) = \sum_k a_k \phi(\overline{X}^k) = \sum_k a_k \alpha^k. \tag{19.204}$$

Donc α est bien une racine de P dans $\mathbb{F}_p[X]$. Nous devons montrer qu'il en est de même pour les autres puissances dans l'ensemble (19.201). Étant donné que pour tout x dans $\mathbb{F}_p$ nous avons $x^p = x$, nous avons aussi

$$P(X^p) = \sum_k a_k (X^p)^k = \sum_k a_k^p (X^p)^k = \sum_k (a_k X^k)^p \tag{19.205}$$

alors que nous savons que $x \mapsto x^p$ est un automorphisme de $\mathbb{F}_p$ par la proposition 1.469. Par conséquent

$$P(X^p) = \sum_k (a_k X^k)^p = \left(\sum_k a_k X^k \right)^p = P(X)^p. \tag{19.206}$$

Nous avons montré que si β est une racine de P, alors β^p est également une racine de P. Nous savons déjà que α est une racine de P, et que α est également générateur de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire que α est d'ordre $q-1$. Les puissances

$$\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^{n-1}} \tag{19.207}$$

sont donc distinctes ($\alpha^{p^n} = \alpha^q = 1$) et sont toutes des racines de P. Étant donné que P est de degré n il ne peut pas y avoir d'autres racines. Nous concluons que l'ensemble

$$\{\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^{n-1}}\} \tag{19.208}$$

est l'ensemble des racines distinctes de P dans $\mathbb{K}$. Le polynôme P est alors scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Le dernier point du théorème est de montrer que P divise $X^q - X$. Pour cela nous allons montrer que toutes les racines de P sont des racines de $X^q - X$. Soit β une racine de P ; il s'écrit $\beta = \alpha^k$ pour un certain k. Étant donné que $\alpha^{q-1} = e = \alpha^{p^n - 1}$,

$$\begin{aligned}
\beta^q &= (\alpha^{p^n})^k && \text{(19.209a)}\\
&= \left(\alpha^{p^n - 1}\alpha\right)^k && \text{(19.209b)}\\
&= \left(\alpha^{q-1}\alpha\right)^k && \text{(19.209c)}\\
&= \alpha^k && \text{(19.209d)}\\
&= \beta. && \text{(19.209e)}
\end{aligned}$$

Cela signifie que $\beta^q = \beta$ et donc que β est racine de $X^q - X$. □

Corolaire 19.55.
Le corps fini à $q = p^n$ éléments est de caractéristique p.

Démonstration. Nous considérons le corps fini $\mathbb{K}$ à q éléments sous la forme $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[X]/P$ comme indiqué par l'équation (19.191). Soit 1_q la classe du polynôme 1 modulo P, nous considérons le morphisme

$$\begin{aligned}
\mu\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{F}_q\\
n &\mapsto n1_q.
\end{aligned} \tag{19.210}$$

Le noyau de cette application est $\ker\mu = \mathbb{Z}_p$ parce que $p1_q = 0$, les coefficients étant à comprendre dans $\mathbb{F}_p$. □

DefnPNCFO

Définition 19.56.
*Soient P, un polynôme de degré n, et p, un nombre premier. Un élément $\alpha \in \mathbb{F}_p[X]/(P)$ est une **racine primitive** si les puissances de α parcourent tout le groupe multiplicatif $(\mathbb{F}_p[X]/P) \setminus \{0\}$.*

Lembcerei

Lemme 19.57.
Soit p un nombre premier et P, un polynôme de degré n. Si $\alpha \in \mathbb{F}_p[X]/P$ est une racine primitive de P alors les autres racines de P sont également primitives.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{F}_p[X]/P$ une racine primitive de P. L'élément α^p est également une racine parce que si $P = \sum_k a_k X^k$,

$$P(\alpha^p) = \sum_k (a_k \alpha^k)^p = \big(\sum_k a_k \alpha^k\big)^p = 0 \tag{19.211}$$

où nous avons utilisé le fait que $a_k^p = a_k$ étant donné que $a_k \in \mathbb{F}_p$. Par hypothèse α est une racine primitive ; cela implique que les éléments $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^n - 1}$ sont distincts dans $\mathbb{F}_p[X]/P$. Ces éléments constituent donc *toutes* les racines de P.

Soit $\beta = \alpha^{p^k}$ une racine de P. Montrons que α est une puissance de β. Étant donné que $(\mathbb{F}_p[X]/P) \setminus \{0\}$ est un groupe à $p^n - 1$ éléments, le corolaire 2.15 indique que $\alpha^{p^n} = \alpha$. En particulier avec $r = p^{n-k}$ nous avons

$$\beta^r = \alpha^{rp^k} = \alpha^{p^n} = \alpha. \tag{19.212}$$

Par suite toutes les puissances de α sont des puissances de β, ce qui implique que β est générateur du groupe cyclique $(\mathbb{F}_p[X]/P) \setminus \{0\}$. □

LemkzWjse

Lemme 19.58.
Soit p un nombre premier et n, un entier. Un polynôme de degré d, irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$, divise $X^{p^n} - X$ si et seulement si, d divise n.

Théorème 19.59.
Soient P et Q deux polynômes irréductibles de degré n dans $\mathbb{F}_p[X]$. Alors les quotients $\mathbb{F}_p[X]/P$ et $\mathbb{F}_p[X]/Q$ sont isomorphes en tant que corps.

En guise de démonstration de ce théorème, nous allons démontrer la proposition suivante.

PropCRPjZsp

Proposition 19.60.
Si $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont deux corps à $q = p^n$ éléments, alors ils sont isomorphes.

Démonstration. Soit a un élément primitif de $\mathbb{K}$ et P son polynôme minimal. Nous savons que $\mathbb{K} \simeq \mathbb{F}_p[X]/P$ par le théorème de l'élément primitif 19.54. L'élément a est en particulier une racine de $X^q - X$. Par ailleurs P divise $X^q - X$ par le lemme 19.58.

Nous avons aussi

$$X^q - X = \prod_{b \in \mathbb{L}} (X - b) \tag{19.213}$$

par la proposition 19.35. Étant donné que P divise $X^q - X$, un des éléments de $\mathbb{L}$ annule P. Soit $b \in \mathbb{L}$ tel que $P(b) = 0$. Soit Q le polynôme minimal de b. Par définition nous savons que Q divise P, mais P étant irréductible et unitaire, nous avons immédiatement $P = Q$. En particulier

$$\mathbb{F}_p[X]/P \simeq \mathbb{F}_p[X]/Q \simeq \mathbb{K}. \tag{19.214}$$

Nous montrons maintenant que $\mathbb{F}_p[X]/Q \simeq \mathbb{L}$ par l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{F}_p[X]/Q &\to \mathbb{L} \\ \overline{X} &\mapsto b \end{aligned} \tag{19.215}$$

qui se prolonge en $R(\overline{X}) \mapsto R(b)$ pour tout $R \in \mathbb{F}_p[X]$. Cette application est bien définie parce que $Q(b) = 0$. Elle est injective parce que $R(b) = 0$ ne peut pas avoir lieu avec $R \in \mathbb{F}_p[X]/Q$ parce que Q est le polynôme minimal de b. La surjectivité vient alors du fait que les deux corps ont le même nombre d'éléments. □

19.4.7 Construction de $\mathbb{F}_{p^n}$

Le théorème 19.32 nous indique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q = p^n$, il existe un unique corps possédant q éléments. Ce corps est noté $\mathbb{F}_q$.

Le théorème 19.54 nous incite à chercher à écrire $\mathbb{F}_q$ sous la forme

$$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[X]/(P) \tag{19.216}$$

pour un certain polynôme irréductible $P \in \mathbb{F}_p[X]$.

19.4.7.1 La version du faignant

Nous pouvons construire le corps à $q = p^n$ éléments en prenant le quotient de $\mathbb{F}_p[X]$ par n'importe quel polynôme irréductible de degré n. Le résultat est le suivant.

PropHfrNCB

Proposition 19.61.
Soit P un polynôme unitaire irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$. Nous posons $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[X]/(P)$. Alors

(1) $\mathbb{K}$ est un corps à q éléments.

(2) $\alpha = \overline{X}$ est une racine de P dans $\mathbb{K}$.

(3) $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[\alpha]$.

ItemiEFRTg

Démonstration. (1) En vertu du corolaire 6.44, $\mathbb{K}$ est un corps. Il est aussi un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{F}_p$, et contient donc $p^n = q$ éléments.

(2) Nous avons $P(\overline{X}) = 0$ par construction de $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[X]/(P)$.

(3) En tant que quotient de $\mathbb{F}_p[X]$, les éléments de $\mathbb{K}$ sont des polynômes en $\overline{X}$.

□

19.4.7.2 La version plus élaborée

Construire $\mathbb{F}_q$ comme quotient de $\mathbb{F}_p[X]$ par un polynôme irréductible quelconque ne donne pas d'information sur les générateurs de $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$, et en particulier il n'est pas toujours vrai que $\overline{X}$ est générateur.

Exemple 19.62.
Construisons $\mathbb{F}_4$. Le polynôme X^2+X+1 est irréductible dans $\mathbb{F}_2$ parce qu'il n'a pas de racine (c'est vite vu : dans $\mathbb{F}_2$ il n'y a que deux candidats). Donc $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$. △

Remarque 19.63.
Le corps $\mathbb{F}_2$ n'est pas un sous-corps de $\mathbb{C}$ parce que leurs caractéristiques ne sont pas les mêmes. Une conséquence est que les racines de polynômes peuvent être très différentes. Par exemple le polynôme X^2+1 accepte $x=1$ comme racine dans $\mathbb{F}_2$ tandis qu'il a pour racines $\pm i$ dans $\mathbb{C}$.

En changeant de corps, les racines peuvent donc complètement changer. Ce n'est pas juste qu'il y a des racines dans l'un et pas dans l'autre.

ExemWUdrcs

Exemple 19.64.
Cherchons à construire $\mathbb{F}_{16}$ comme quotient de $\mathbb{F}_2$ par un polynôme de degré 4.

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.7.1, Release Date: 2011-08-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: x=polygen(GF(2))
sage: -x-1
x + 1
sage: Q=x**15-1
sage: Q.factor()
(x + 1) * (x^2 + x + 1) * (x^4 + x + 1) * (x^4 + x^3 + 1)
            * (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)
```

Les polynômes candidats à avoir des racines génératrices sont donc au nombre de 3 :

$$P_1 = X^4+X+1 \tag{19.217a}$$
$$P_2 = X^4+X^3+1 \tag{19.217b}$$
$$P_3 = X^4+X^3+X^2+X+1. \tag{19.217c}$$

Dans le quotient $\mathbb{F}_2[X]/P_3$, l'élément $\overline{X}$ n'est pas générateur. En effet nous avons $X^4 = X^3+X^2+X+1$ et par conséquent les puissances successives de X sont

$$X \tag{19.218a}$$
$$X^2 \tag{19.218b}$$
$$X^3 \tag{19.218c}$$
$$X^4 = X^3+X^2+X+1 \tag{19.218d}$$
$$1. \tag{19.218e}$$

La classe de X dans $\mathbb{F}_2[X]/P_3$ n'est donc pas génératrice du groupe $(\mathbb{F}_2[X]/P_3)\setminus\{0\}$.

Le polynôme $P_1 = X^4+X+1$ par contre est primitif parce que les puissances de X dans $\mathbb{F}_2[X]/P_1$ sont

$$X \tag{19.219a}$$
$$X^2 \tag{19.219b}$$
$$X^3 \tag{19.219c}$$
$$X+1 \tag{19.219d}$$
$$X^2+X \tag{19.219e}$$
$$X^3+X^2 \tag{19.219f}$$
$$X+1+X^3 \tag{19.219g}$$
$$X^2+1 \tag{19.219h}$$
$$X^3+X \tag{19.219i}$$
$$X+1+X^2 \tag{19.219j}$$
$$X^2+X+X^3 \tag{19.219k}$$
$$X^3+X^2+X+1 \tag{19.219l}$$
$$1+X^2+X^2 \tag{19.219m}$$
$$1+X^3 \tag{19.219n}$$
$$1 \tag{19.219o}$$

Cela fait 15 puissances distinctes, ce qui prouve que P_1 est primitif. Nous verrons plus loin comment alléger un peu la vérification de la primitivité de P_1. △

PropNsLqWb

Proposition 19.65 ([1]).
Soient un nombre premier p, un entier non nul $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ainsi qu'un polynôme P irréductible unitaire primitif dans $\mathbb{F}_p[X]$. Nous considérons $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[X]/P$ et $\alpha = \overline{X} \in \mathbb{K}$. En notant $q = p^n$ nous avons

(1) Les racines de P sont $\{\alpha, \alpha^p, \ldots, \alpha^{p^{n-1}}\}$ et $\alpha^q = \alpha$.

(2) P est le polynôme minimal de α.

(3) P est scindé dans $\mathbb{K}$.

(4) P divise $X^q - X$ dans $\mathbb{K}$.

(5) La famille $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ est une base de $\mathbb{K}$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$.

(6) En tant qu'ensemble,

$$\mathbb{F}_q = \{0, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{q-1}\}, \tag{19.220}$$

et les α^k sont distincts pour $k = 1, \ldots, q-1$.

Démonstration. La plupart des assertions sont des corolaires ou des paraphrases de résultats contenus dans les propositions précédentes.

(1) L'assertion à propos des racines de P est contenue dans le lemme 19.57. D'autre part le groupe $(\mathbb{F}_p[X]/P) \setminus \{0\}$ est cyclique d'ordre $q-1$. Par conséquent le corolaire 2.15 indique que $\alpha^{q-1} = 1$ et donc $\alpha^q = \alpha$.

(2) Soit $\tilde{P}$ un polynôme annulateur de α. Nous voyons que si β est racine de $\tilde{P}$ alors β^p est également racine de $\tilde{P}$ en utilisant les techniques habituelles. Par conséquent toutes les racines de P sont racines de $\tilde{P}$, ce qui implique que $\tilde{P}$ est de degré au moins égal à celui de P.

(3) Possédant n racines distinctes dans $\mathbb{K}$, le polynôme P est scindé.

(4) D'après le lemme 19.35 un polynôme irréductible de degré n divise le polynôme $X^{p^n} - X$. Une autre façon de montrer ce point est de remarquer que le polynôme P est scindé et que toutes ses racines sont également racines de $X^q - X$.

(5) Une combinaison linéaire nulle entre les éléments de $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ serait un polynôme annulateur de degré $n-1$ de α. Cet ensemble est donc libre. Par ailleurs un ensemble libre de n éléments dans un espace vectoriel de dimension n est générateur.

(6) Si $\alpha^l = \alpha^k$ avec $k < l$ et $k, l \leqslant q$ alors nous avons $\alpha^r = 1$ avec $r = l - k < q$, ce qui contredirait la primitivité de P. Les éléments $0, \alpha, \ldots, \alpha^{q-1}$ étant distincts et au nombre de q, ils forment tout l'ensemble $\mathbb{F}_q$.

□

19.4.8 Exemple : étude de $\mathbb{F}_{16}$

Dans cette section nous voulons construire $\mathbb{F}_{16}$. Nous considérons donc $p = 2$ et $n = 4$. Des polynôme irréductibles de degré 4 dans $\mathbb{F}_2[X]$ ne sont pas très difficiles à trouver. Par exemple $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Si vous en voulez d'autres, en voici.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 19.66
Le lemme suivant me semble douteux. Écrivez-moi si vous avez une preuve ou un contre-exemple.
LEMooTBROooANstIL

Lemme 19.67 ([1]).
Soit un polynôme de degré 4 dans $\mathbb{F}_2[X]$. Si il vérifie

(1) le terme constant est non nul,

(2) il y a un nombre impair de termes non nuls,

alors il est irréductible.

Les polynômes primitifs par contre, doivent être trouvés parmi les diviseurs irréductibles de $X^{15} - 1$. Montrons que

$$P = X^4 + X^3 + 1 \tag{19.221}$$

est primitif. Nous posons $\omega = \overline{X} \in \mathbb{F}_2[X]/P$. L'ordre de ω dans le groupe $(\mathbb{F}_2[X]/P) \setminus \{0\}$ doit être un diviseur de 15 et donc peut être seulement 1, 3, 5 ou 15. Le fait que l'ordre ne soit ni 1 ni 3 est trivial parce que le degré de P est 4. Montrons que l'ordre de ω n'est pas 5 non plus :

$$\omega^5 = \omega^4\omega = (\omega^3 + 1)\omega = \omega^4 + \omega = \omega^3 + \omega + 1 \neq 1. \tag{19.222}$$

Dans ce calcul nous avons abondamment utilisé le fait que $-1 = 1$.

À partir de maintenant nous posons $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2[X]/P$. Les racines de P sont $\omega, \omega^2, \omega^4$ et ω^8. En effet si β est une racine de P, alors β^2 est une racine en vertu de

$$P(\beta^2) = (\beta^2)^4 + (\beta^2)^3 + 1 = (\beta^4)^2 + (\beta^3)^2 + 1^2 = (\beta^4 + \beta^3 + 1)^2 = 0. \tag{19.223}$$

Ici nous avons implicitement utilisé le lemme 19.52. D'autre part P ne peut pas avoir plus de 4 racines.

Proposition 19.68.
L'ensemble $\{\omega, \omega^2, \omega^4, \omega^8\}$ est une base de $\mathbb{F}_{16}$ sur $\mathbb{F}_2$.

Démonstration. Nous savons que $\{1, \omega, \omega^2, \omega^3\}$ est une base. En effet cet ensemble est libre (sinon ω aurait un polynôme annulateur de degré 3) et générateur parce que l'espace engendré par 4 vecteurs indépendants sur $\mathbb{F}_2$ contient $2^4 = 16$ éléments.

Nous posons $e_0 = 1$, $e_1 = \omega$, $e_2 = \omega^2$, $e_3 = \omega^3$ et $f_1 = \omega$, $f_2 = \omega^2$, $f_3 = \omega^4$, $f_4 = \omega^8$. En utilisant le calcul modulo $\omega^4 + \omega^3 + 1 = 0$ et $2 = 0$ nous trouvons

$$f_1 = \omega \tag{19.224a}$$
$$f_2 = \omega^2 \tag{19.224b}$$
$$f_3 = \omega^3 + 1 \tag{19.224c}$$
$$f_4 = \omega^3 + \omega^2 + \omega. \tag{19.224d}$$

Ensuite nous montrons que les vecteurs e_i peuvent être construits comme combinaisons linéaires des vecteurs f_j :

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = e_0 \tag{19.225a}$$
$$f_1 = e_1 \tag{19.225b}$$
$$f_2 = e_2 \tag{19.225c}$$
$$f_1 + f_2 + f_4 = e_3. \tag{19.225d}$$

Les quatre vecteurs f_j forment donc bien une base parce qu'ils sont générateurs d'un espace de dimension 4. □

Exemple 19.69. (1) Résoudre dans $\mathbb{F}_{16}$ l'équation $x^5 = a$ en discutant éventuellement en fonction de la valeur de a.

(2) Montrer qu'il existe quatre éléments $\gamma \in \mathbb{F}_{16}$ tels que pour chacun d'eux l'ensemble $B_\gamma = \{\gamma, \gamma^2, \gamma^4, \gamma^8\}$ est une base de $\mathbb{F}_{16}$ sur $\mathbb{F}_2$ telle que le produit de deux éléments de B_γ est, soit un élement de B_γ, soit 1.

C'est parti !

(1) Si $a = 0$, alors $x = 0$ est la seule solution. Si $a \neq 0$ alors a est une puissance de ω ; nous posons $a = \omega^l$. Nous cherchons x sous la forme $x = \omega^k$. L'équation à résoudre pour k est

$$\omega^{5k} = \omega^l \tag{19.226}$$

où l est donné. Cette équation revient à

$$5k = l \mod 15. \tag{19.227}$$

Si l n'est pas un multiple de 5, alors il n'y a pas de solution. Il n'y a des solutions que pour $l = 0, 5, 10$ et elles sont :

$$k = \begin{cases} 3, 6, 9, 12 & \text{si } l{=}0 \\ 1 & \text{si } l{=}5 \\ 2 & \text{si } l{=}10 \end{cases} \tag{19.228}$$

(2) Nous cherchons γ sous la forme $\gamma = \omega^k$. Parmi les nombreuses contraintes liées à l'énoncé, nous devons avoir

$$\gamma^5 = 1, \gamma, \gamma^2, \gamma^4, \gamma^8. \tag{19.229}$$

Les possibilités $\gamma^5 = \gamma, \gamma^2, \gamma^4, \gamma^5$ ne sont pas bonnes parce qu'elles impliqueraient que B_γ n'est pas une base. Reste à explorer $\gamma^5 = 1$.

Étant donné le premier point, nous restons avec les possibilités

$$\gamma = 1, \omega^3, \omega^6, \omega^9, \omega^{12}. \tag{19.230}$$

Évidemment $\gamma = 1$ ne produit pas une base. Avec $\gamma = \omega^3$ nous trouvons

$$B_\gamma = \{\omega^3, \omega^6, \omega^{12}, \omega^{24}\} = \{\omega^3, \omega^6, \omega^{12}, \omega^9\} \tag{19.231}$$

où nous avons utilisé le fait que $\omega^k = \omega^{k \mod 15}$. En utilisant le fait que $\omega^4 = \omega^3 + 1$ nous trouvons

$$\omega^5 = \omega^3 + \omega + 1 \tag{19.232a}$$
$$\omega^6 = \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 \tag{19.232b}$$
$$\omega^9 = \omega^2 + 1 \tag{19.232c}$$
$$\omega^{12} = \omega + 1. \tag{19.232d}$$

L'ensemble B_γ est alors formé des éléments

$$f_1 = \omega^3 \tag{19.233a}$$
$$f_2 = \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 \tag{19.233b}$$
$$f_3 = \omega + 1 \tag{19.233c}$$
$$f_4 = \omega^2 + 1. \tag{19.233d}$$

Il est assez simple de vérifier que c'est une base en remarquant que $f_1 + f_2 + f_2 + f_4 = 1$.

Les possibilités $\gamma = \omega^6, \omega^9, \omega^{12}$ produisent les mêmes ensembles B_γ.

△

19.4.9 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$

DefWXBkOxg

Définition 19.70.
*La **fonction de Möbius** est la fonction $\mu\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{-1, 0, 1\}$ définie par*

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré différent de } 1, \\ 1 & \text{si } n \text{ est le produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts,} \end{cases} \tag{19.234}$$

19.71.
La fonction de Möbius arrive dans cette vidéo de Numberphile après 55 minutes de souffrances :

https://www.youtube.com/watch?v=XhA5U9pFXuU&pp=ygUbbnVtYmVycGhpbGUgcmFmZmxlIGZ1bmN0aW9u

Avec un lien avec la fonction totient d'Euler, qui est je crois celle définie en 5.29. Je n'ai pas vérifié.

Il faudrait prouver la formule

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}(1-\frac{1}{p}). \tag{19.235}$$

Écrivez-moi si vous avez une preuve.

PROPooOVYJooFvmxyj

Proposition 19.72 ([642]).
Si m et n sont strictement positifs et premiers entre eux, alors

$$\mu(mn) = \mu(m)\mu(n). \tag{19.236}$$

De plus nous avons

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 0 & si\ n > 1 \end{cases} \tag{19.237}$$

PropLBZoIoO

Proposition 19.73 (Formule d'inversion de Möbius[642]).
Soient $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \geqslant 1$,

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d). \tag{19.238}$$

Alors

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \tag{19.239}$$

où μ est la fonction de Möbius pour tout $n \geqslant 1$.

LemRGuWqNu

Lemme 19.74 ([643]).
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ayant une racine commune dans une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Si P est irréductible, alors $P \mid Q$.

Démonstration. Si P ne divise pas Q, alors P et Q sont premiers entre eux parce que dans la décomposition en irréductibles de Q, il n'y a pas de P tandis que dans celle de P, il n'y a que P. Par conséquent, il existe $a, b \in \mathbb{K}[X] \subset \mathbb{L}[X]$ tels que[22] $aP + bQ = 1$. Cette dernière égalité est encore valable dans $\mathbb{L}$ et donc rend impossible l'existence d'une racine commune. □

PropVFNOvzZ

Proposition 19.75 ([643, 128]).
Soit p un nombre premier, $n \geqslant 1$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous notons $q = p^r$, $A(n,q)$, l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de degré n sur $\mathbb{F}_q$. Nous notons aussi $I(n,q) = \operatorname{Card}\big(A(n,q)\big)$. Alors :

(1) Le polynôme $X^{q^n} - X$ se décompose en irréductibles de la façon suivante :

$$X^{q^n} - X = \prod_{d|n}\prod_{P\in A(d,q)} P. \tag{19.240}$$

(2) Le nombre d'irréductibles est donné par

$$I(n,q) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d \tag{19.241}$$

où μ est la fonction de Möbius (définition 19.70).

(3) Nous avons l'équivalence de suite

$$I(n,q) \sim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n}. \tag{19.242}$$

[22] Théorème de Bézout, 6.47.

Démonstration. (1) Soit un diviseur d de n et $P \in A(d,q)$. Montrons que P divise $X^{q^n}-X$. Nous considérons le corps $\mathbb{K}=\mathbb{F}_q[X]/(P)$, qui est une extension de degré $\deg(P)$ de $\mathbb{F}_q$ parce qu'il s'agit des polynômes de degré au maximum $\deg(P)$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. Ce corps possède donc q^d éléments et est isomorphe à $\mathbb{F}_{q^d}$ par la proposition 19.60. Par construction dans $\mathbb{K}$, l'élément $\alpha=[X]$ (la classe de X dans le quotient par P) est une racine de P. Cet élément est également une racine de $X^{q^d}-X$ parce que tout élément de $\mathbb{F}_{q^d}$ est une racine de ce polynôme. Ce dernier point est la proposition 19.35.

Nous sommes donc dans la situation où P et $X^{q^d}-X$ ont une racine commune dans l'extension $\mathbb{F}_q[X]/(P)$. Nous en déduisons que α est aussi une racine de $X^{q^n}-X$. En effet en utilisant le fait que $\alpha^{q^d}=\alpha$, nous avons

$$\alpha^{q^n}=\alpha^{q^{kd}}=\alpha^{q^dq^{(k-1)d}}=\left(\alpha^{q^d}\right)^{q^{(k-1)d}}=\alpha^{q^{(k-1)d}}, \tag{19.243}$$

donc par récurrence, on a encore $\alpha^{q^n}=\alpha$, et α est racine de $X^{q^n}-X$. Puisque P est irréductible, le lemme 19.74 nous indique alors, que P divise $X^{q^n}-X$.

Étant donné que tous les éléments de $A(d,q)$ divisent $X^{q^n}-X$ et sont irréductibles, leur produit divise encore $X^{q^n}-X$:

$$\prod_{d|n}\prod_{P\in A(d,q)}P \mid X^{q^n}-X. \tag{19.244}$$

Nous devons à présent montrer que tous les facteurs irréductibles de $X^{q^n}-X$ sont dans un $A(d,q)$ avec $d\mid n$. Soit donc P un facteur irréductible de $X^{q^n}-X$ de degré $d\geqslant 1$. Nous posons encore $\mathbb{K}=\mathbb{F}_q[X]/(P)$ et nous utilisons la propriété de multiplication sur les degrés (proposition 6.63) :

$$[\mathbb{F}_{q^n}:\mathbb{K}][\mathbb{K}:\mathbb{F}_q]=[\mathbb{F}_{q^n}:\mathbb{F}_q]=n, \tag{19.245}$$

donc $[\mathbb{K}:\mathbb{F}_q]$, qui vaut $\deg(P)$ est un diviseur de n.

Étant donné que $X^{q^n}-X$ n'a que des racines simples sur $\mathbb{F}_{q^n}$ (à nouveau la proposition 19.35), dans sa décomposition en irréductibles sur $\mathbb{F}_q$, il n'a pas de facteur carré ; il n'a donc qu'une fois chacun des $P\in A(d,q)$ avec $d\mid n$. Autrement dit, tous les facteurs irréductibles de $X^{q^n}-X$ sont dans le produit $\prod_{d|n}\prod_{P\in A(d,q)}P$ et donc $X^{q^n}-X$ divise ce gros produit :

$$X^{q^n}-X \mid \prod_{d|n}\prod_{P\in A(d,q)}P. \tag{19.246}$$

Ayant déjà obtenu la divisibilité inverse et les polynômes étant unitaires, nous avons égalité.

(2) Nous passons au degré dans l'expression que nous venons de démontrer :

$$q^n=\sum_{d|n}d\,\mathrm{Card}\left(A(d,q)\right)=\sum_{d|n}dI(d,q). \tag{19.247}$$

Nous pouvons utiliser la formule d'inversion de Möbius (proposition 19.73) pour les fonctions $g(n)=q^n$ et $f(n)=dI(n,q)$. Nous écrivons alors

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)q^d, \tag{19.248}$$

ou encore

$$I(n,q)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)q^d, \tag{19.249}$$

ce qu'il fallait.

(3) Nous posons

$$r_n=\sum_{\substack{d|n\\ d<n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)q^d, \tag{19.250}$$

mais sachant que les diviseurs de n, outre n lui-même, sont tous plus petits ou égaux à $n/2$ et qu'en valeur absolue, la fonction de Möbius est toujours plus petite ou égale à[23] 1,

$$|r_n|\leqslant\sum_{d=1}^{\lfloor n/2\rfloor}q^d=\frac{q-q^{\lfloor n/2\rfloor}}{1-q}=q\frac{q^{\lfloor n/2\rfloor}-1}{q-1}\leqslant\frac{q^{\lfloor n/2\rfloor+1}}{q-1}. \tag{19.251}$$

[23] Dans [128], ma dernière inégalité arrive comme une égalité.

D'autre part en reprenant la formule déjà prouvée,

$$I(n,q)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)q^d=\frac{1}{n}\left(r_n+\mu\left(\frac{n}{n}\right)q^n\right)=\frac{r_n+q^n}{n}. \tag{19.252}$$

Au numérateur, le plus haut degré en n est q^n parce que r_n est en $q^{\lfloor n/2\rfloor}$. Donc nous avons bien l'équivalence de suite pour $n\to\infty$:

$$\frac{q^n+r_n}{n}\sim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n}. \tag{19.253}$$

□

19.4.10 Matrices

Proposition 19.76.
Nous avons

$$|\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)|=(p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{n-1}). \tag{19.254}$$

Démonstration. Par construction il existe une bijection entre $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)$ et l'ensemble des bases de $\mathbb{F}_p^n$. Nous devons donc seulement compter le nombre de bases. Pour le premier vecteur de base nous avons le choix entre les p^n-1 éléments non nuls de $\mathbb{F}_p^n$. Pour le second nous avons le choix entre p^n-p éléments, et ainsi de suite. □

LemcDOTzM

Lemme 19.77.
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini autre que $\mathbb{F}_2$[24], soit un groupe abélien M et un morphisme $\varphi\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\to M$. Alors il existe un unique morphisme $\delta\colon \mathbb{K}\setminus\{0\}\to M$ tel que $\varphi=\delta\circ\det$.

Démonstration. D'abord le groupe dérivé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ est $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ parce que les éléments de $D\big(\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\big)$ sont de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$ dont le déterminant est 1.

De plus le groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est normal dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Par conséquent $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est un groupe et nous pouvons définir l'application relevée

$$\tilde{\varphi}\colon \frac{\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})}{\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})}\to M \tag{19.255}$$

vérifiant $\varphi=\tilde{\varphi}\circ\pi$ où π est la projection.

Nous pouvons faire la même chose avec l'application

$$\det\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\to\mathbb{K}\setminus\{0\} \tag{19.256}$$

qui est un morphisme de groupes dont le noyau est $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$. Cela nous donne une application

$$\tilde{\det}\colon \frac{\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})}{\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})}\to\mathbb{K}\setminus\{0\} \tag{19.257}$$

telle que $\det=\tilde{\det}\circ\pi$. Cette application $\tilde{\det}$ est un isomorphisme. En effet, elle est surjective parce que le déterminant l'est, et elle est injective parce que son noyau est précisément ce par quoi on prend le quotient. Par conséquent $\tilde{\det}$ possède un inverse et nous pouvons écrire

$$\varphi=\tilde{\varphi}\circ\tilde{\det}^{-1}\circ\tilde{\det}\circ\pi. \tag{19.258}$$

Étant donné que $\tilde{\det}\circ\pi=\det$, nous avons alors $\varphi=\delta\circ\det$ avec $\delta=\tilde{\varphi}\circ\tilde{\det}^{-1}$. Ceci conclut la partie existence de la preuve.

En ce qui concerne l'unicité, nous considérons $\delta'\colon\mathbb{K}\setminus\{0\}\to M$ telle que $\varphi=\delta'\circ\det$. Pour tout $u\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ nous avons $\delta'(\det(u))=\varphi(u)=\delta(\det(u))$. L'application det étant surjective depuis $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}\setminus\{0\}$, nous avons $\delta'=\delta$. □

Théorème 19.78.
Soient $p\geqslant 3$ un nombre premier et E, un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour tout $u\in\mathrm{GL}(E)$ nous avons

$$\epsilon(u)=\left(\frac{\det(u)}{p}\right). \tag{19.259}$$

Ici ϵ est la signature de u vue comme une permutation des éléments de $\mathbb{F}_p$.

[24] Je ne comprends pas très bien à quel moment joue cette hypothèse.

Démonstration. Commençons par prouver que

$$\epsilon\colon \mathrm{GL}(E) \to \{-1,1\}. \tag{19.260}$$

est un morphisme. Si nous notons $\overline{u} \in S(E)$ l'élément du groupe symétrique correspondant à la matrice $u \in \mathrm{GL}(E)$, alors nous avons $\overline{uv} = \overline{u} \circ \overline{v}$, et la signature étant un morphisme (proposition 1.299),

$$\epsilon(uv) = \epsilon(\overline{u} \circ \overline{v}) = \epsilon(\overline{u})\epsilon(\overline{v}). \tag{19.261}$$

Par ailleurs $\{-1,1\}$ est abélien, donc le lemme 19.77 s'applique et nous pouvons considérer un morphisme $\delta\colon \mathbb{F}_p \setminus \{0\} \to \{-1,1\}$ tel que $\epsilon = \delta \circ \det$.

Nous allons utiliser le lemme 19.42 pour montrer que δ est le symbole de Legendre. Pour cela il nous faudrait trouver un $x \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ tel que $\delta(x) = -1$. Étant donné que det est surjective, nous cherchons ce x sous la forme $x = \det(u)$. Par conséquent nous aurions

$$\delta(x) = (\delta \circ \det)(u) = \epsilon(u), \tag{19.262}$$

et notre problème revient à trouver une matrice $u \in \mathrm{GL}(E)$ dont la permutation associée soit de signature -1.

Soit $n = \dim E$; en conséquence de la proposition 19.61(3), l'espace $\mathbb{E}_q = \mathbb{F}_{p^n}$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension n et est donc isomorphe en tant qu'espace vectoriel à E. Étant donné que $\mathbb{F}_q$ est un corps fini, nous savons que $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ est un groupe cyclique à $q-1$ éléments. Soit y, un générateur de $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ et l'application

$$\begin{aligned} \beta\colon \mathbb{F}_q &\to \mathbb{F}_q \\ x &\mapsto yx. \end{aligned} \tag{19.263}$$

Cela est manifestement $\mathbb{F}_p$-linéaire (ici y et x sont des classes de polynômes et $\mathbb{F}_p$ est le corps des coefficients). L'application β fixe zéro et à part zéro, agit comme le cycle

$$(1, y, y^2, \dots, y^{q-2}). \tag{19.264}$$

Nous savons qu'un cycle de longueur n est de signature $(-1)^{n+1}$. Ici le cycle est de longueur $q-1$ qui est pair (parce que $p \geqslant 3$) et par conséquent, l'application β est de signature -1. □

19.5 Constructions à la règle et au compas

Définition 19.79 ([644]).
Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$. Un point de $\mathbb{R}^2$ est constructible en une étape à partir de E si il est un point de E ou une intersection de deux objets parmi

- *les droites passant par deux points distincts de E ;*
- *les cercles centrés en un point de E et dont le rayon est la distance entre deux points de E.*

Nous notons $C_1(E)$ l'ensemble des points constructibles en une étape à partir de E.

*Les points constructibles en n étapes à partir de E sont définis par récurrence : $C_{n+1}(E) = C_1\big(C_n(E)\big)$. Enfin un point de $\mathbb{R}^2$ est **constructible** à partir de E si il appartient à*

$$C(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(E). \tag{19.265}$$

*Un réel est **constructible** si il est l'abscisse d'un point constructible.*

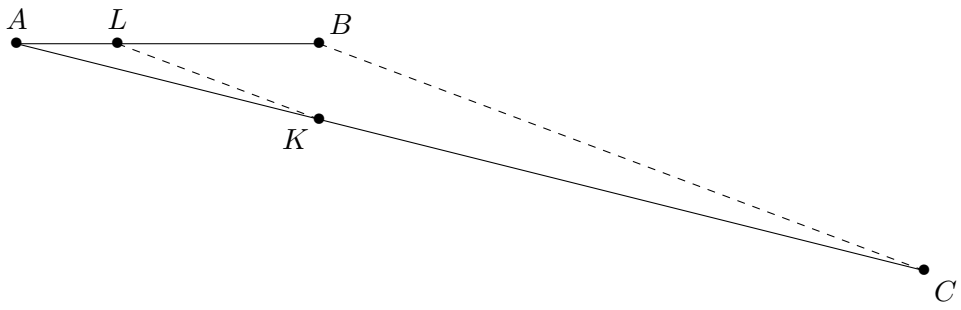
Pour toute la suite, nous allons considérer les points et réels constructibles à partir de l'ensemble $E = \{(0,0),(0,1)\}$.

19.5.1 Quelques constructions

PropIMFooDWAyoH

Proposition 19.80 ([645]).
Les nombres rationnels sont tous constructibles.

Démonstration. Si le réel r est constructible, alors kr est également constructible pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Nous devons donc seulement pouvoir construire le nombre $1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

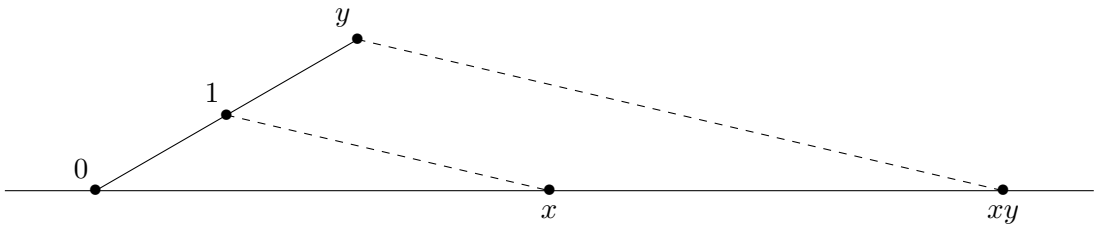


La méthode pour construire le nombre $1/n$ est la suivante. Soit $[AB]$ un segment de longueur 1 (par exemple $A=(0,0)$ et $B=(1,0)$) et un point C, non aligné avec A et B, et tel que $[AC]$ ait une longueur n. Nous plaçons sur $[AC]$ le point K situé à une distance 1 de A en pointant le compas en A et en traçant le cercle de rayon $[AB]$.

La droite passant par K et parallèle à (BC) coupe $[AB]$ en un point L. Maintenant, le segment $[AL]$ a une longueur de $1/n$, par le théorème de Thalès[25]. □

ExGROooIosiBt

Exemple 19.81 (Multiplication à la règle et au compas[644])**.**
Soient x et y deux nombres constructibles. Montrons qu'il est possible de construire le nombre xy. La construction est la suivante :



- On trace deux droites sécantes en A.
- Sur la première nous plaçons le point Y à distance y de A et le point P à distance 1 de A.
- Sur la seconde on place le point X à distance x de A.
- On trace la droite (PX)
- Puis la parallèle à (PX) passant par Y.
- Le point d'intersection entre cette dernière droite et (AX) est le point B.

La longueur AB est égale à xy. △

ExTYMooSMCvSr

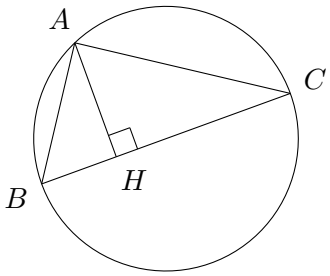
Exemple 19.82 (Racine carrée à la règle et au compas[644])**.**
Nous supposons que le nombre x est constructible, et nous voulons une construction qui donne un segment de longueur $\sqrt{x}$. Nous traçons un segment $[BC]$ dont la longueur correspond à la plus grande des valeurs entre x et 1, puis le cercle de diamètre BC, ensuite le point H sur $[BC]$ tel que BH corresponde à la plus petite des valeurs entre x et 1, enfin la perpendiculaire à (BC) menée par H, qui rencontre le cercle en un point A. D'après le théorème de Thalès sur le cercle[26], le triangle ABC est rectangle en A.

Les triangles ABC et ABH sont donc semblables parce qu'ils sont rectangles avec un angle (autre que l'angle droit) égal. Nous avons donc proportionnalité des longueurs des côtés :

$$\frac{AB}{BH}=\frac{BC}{AB}, \tag{19.266}$$

ce qui donne $AB^2=BC\times BH=x$ (BC et BH valent respectivement 1 et x ou le contraire).

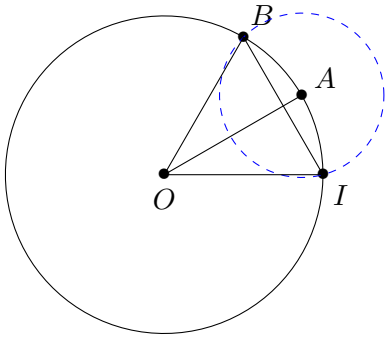
[25] Théorème 12.169.
[26] Théorème 12.170.



△
ExAHCooELGGPa

Exemple 19.83 (Duplication d'un angle)**.**
Si un angle α est constructible, nous allons construire les angles 2α, 3α, etc. Pour cela nous considérons un cercle de centre O et les points A et I sur le cercle tels que $\widehat{AOI} = \alpha$. Le cercle de centre A et de rayon AI intersecte le cercle de départ en les points I et B.

Le point A est à égale distance de B et I ; le point O également. Donc la droite (OA) est médiatrice du segment $[BI]$. Par conséquent elle est la hauteur du triangle isocèle OBI. L'angle $\widehat{BOA}$ est alors le même que $\widehat{AOI}$; par conséquent $\widehat{BOI} = 2\alpha$.



En traçant le cercle de centre B et de rayon BA, nous continuons et nous construisons 3α. △

L'exemple suivant qui permet d'additionner des angles repose sur le fait que deux cordes de mêmes longueurs sous-tendent des angles égaux, et est une adaptation simple de la duplication d'angle.
ExOVDooXnWPDl

Exemple 19.84 (Addition d'angles)**.**
Quitte à soustraire ou additionner un certain nombre de fois 90°, nous supposons que les deux angles donnés sont entre 0° et 90°.

Soient A, B, I sur un cercle de centre O, et nous notons $\alpha = \widehat{OAI}$, $\beta = \widehat{BOI}$. Nous traçons le cercle de centre B et de rayon AI ; il intersecte le cercle en des points K_1 et K_2. Les angles $\widehat{K_1OB}$ et $\widehat{K_2OB}$ sont tous deux égaux à α.

Les angles $\widehat{K_1OA}$ et $\widehat{K_2OA}$ sont égaux à $\beta - \alpha$ et $\beta + \alpha$. △

19.85.
Notez que l'exemple 19.84 donne un moyen de construire $\alpha+\beta$ et $\alpha-\beta$ ensemble. Il ne permet pas de savoir lequel est $\alpha + \beta$ et lequel est $\alpha - \beta$.

19.5.2 Nombres constructibles

ThoRHFooZsLbqd

Théorème 19.86 (Wantzel[646])**.**
Le réel a est constructible si et seulement si il existe une suite finie de corps $\mathbb{L}_i$ tels que

(1) $\mathbb{L}_0 = \mathbb{Q}$,

(2) $\mathbb{L}_{i+1}$ *est un extension quadratique*[27] *de* $\mathbb{L}_i$

(3) $a \in \mathbb{L}_n$.

Démonstration. Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres constructibles (par exemple $\mathbb{Q}$) ; nous notons $E_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées sont dans $\mathbb{K}$. Ce sont des points forcément constructibles.

[27] C'est-à-dire une extension finie de degré 2.

(1) **Intersection de droites** Si $A, B \in E_{\mathbb{K}}$ alors la droite (AB) a pour équation $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, et le point d'intersection entre deux droites est donné par la solution du système

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (19.267a) \\ a'x + b'y + c' = 0, & (19.267b) \end{cases}$$

dont les solutions sont encore dans $\mathbb{K}$.

(2) **Intersection droite-cerle** L'équation d'un cercle est de la forme

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2 \tag{19.268}$$

où $(u, v) \in E_{\mathbb{K}}$ et r est la distance entre deux points de $E_{\mathbb{K}}$; donc $r^2 \in \mathbb{K}$. En développant et en redéfinissant u, v nous voyons que tous les cercles à considérer ont une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + ux + vy + t = 0 \tag{19.269}$$

avec $u, v, t \in \mathbb{K}$. Il s'agit de voir où sont les solutions du système

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (19.270a) \\ x^2 + y^2 + ux + vy + t = 0. & (19.270b) \end{cases}$$

Si $a \neq 0$ alors nous pouvons opérer la substitution $x = -(c+by)/a$ et obtenir l'équation suivante pour y :

$$\left(\frac{-c - by}{a}\right)^2 + y^2 + u\left(\frac{-c - by}{a}\right) + vy + t = 0. \tag{19.271}$$

Cette équation est de la forme $P(y) = 0$ où P est un polynôme du second degré à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si $a = 0$ nous substituons y au lieu de x et le résultat est le même.

C'est le moment de relire la proposition 6.103 qui nous assure que si le réel α est une solution de $P(y) = 0$ hors de $\mathbb{K}$, alors l'extension $\mathbb{K}(\alpha)$ est de degré 2 parce que le polynôme minimal de α est de degré 2 :

$$\big[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}\big] = 2. \tag{19.272}$$

De plus $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$.

(3) **Intersection cercle-cercle** Le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ux + vy + t = 0 & (19.273a) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 & (19.273b) \end{cases}$$

est équivalent au système (en substituant la seconde équation par la différence entre les deux)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ux + vy + t = 0 & (19.274a) \\ (u - a)x + (v - b)y + t - c = 0 & (19.274b) \end{cases}$$

qui est à nouveau une intersection entre un cercle et une droite.

Passons à la conclusion. Si α est un nombre constructible, alors il apparaît dans les coordonnées d'un point de $C_m(E_{\mathbb{Q}})$ pour un certain m. Nous supposons (pour la récurrence) que chaque réel constructible en $m-1$ étapes possède sa pile d'extension quadratiques en partant de $\mathbb{Q}$. Le nombre α vérifie donc

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \tag{19.275}$$

avec a, b, c trois réels constructibles en $m - 1$ étapes. L'hypothèse de récurrence donne donc des piles d'extensions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}_0 = \mathbb{Q} & \mathbb{L}'_0 = \mathbb{Q} & \mathbb{L}''_0 = \mathbb{Q} \\ L_{i+1} = \mathbb{L}_i(a_i) & \mathbb{L}'_{i+1} = \mathbb{L}'_i(b_i) & \mathbb{L}''_{i+1} = \mathbb{L}''_i(c_i) \\ a \in \mathbb{L}_n & b \in \mathbb{L}'_{n'} & c \in \mathbb{L}''_{n''}. \end{array} \tag{19.276}$$

Nous considérons donc la suite d'extensions de $\mathbb{Q}$ qui consiste à étendre successivement par les nombres $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n'}, c_1, \dots, c_{n''}$ tout en excluant les doublons : il est possible que par exemple b_3 soit déjà dans $\mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n)$. Cela nous fournit une suite d'extensions

$$\begin{array}{c} \mathbb{M}_0 = \mathbb{Q} \\ \mathbb{M}_{i+1} = \mathbb{M}_i(\alpha_i) \\ a, b, c \in \mathbb{M}_n. \end{array} \tag{19.277}$$

Ici le n n'est pas spécialement le même que celui plus haut. Maintenant, α est dans une extension quadratique de $\mathbb{M}_n$.

Pour la réciproque, nous supposons avoir une tour d'extensions quadratiques $\mathbb{L}_0 = \mathbb{Q}$, $\mathbb{L}_i$, et $\alpha \in \mathbb{L}_n$, et nous voulons prouver que α est constructible. Nous y allons par récurrence : si $n = 0$ alors α est rationnel, et il est constructible par la proposition 19.80.

Supposons que tous les points à coordonnées dans $\mathbb{L}_i$ sont constructibles. Alors, nous allons prouver que les éléments de $\mathbb{L}_{i+1}$ le sont également. Puisque α est solution d'une équation de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{L}_i$, nous avons

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \tag{19.278}$$

pour certains $a, b, c \in \mathbb{L}_i$ et donc

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{19.279}$$

Les exemples 19.81 et 19.82 montrent que les produits et les racines carrées de nombres constructibles sont constructibles. Donc α est constructible. □

19.5.3 Polygones constructibles

Définition 19.87.
*Un angle α est **constructible** si le nombre $\cos(\alpha)$ est constructible.*

La raison est qu'il suffit de prendre la perpendiculaire à l'axe horizontal.

LemMAHooXcOCpr

Lemme 19.88 ([128]).
Soient m et n, deux nombres premiers entre eux. L'angle $\frac{2\pi}{mn}$ est constructible si et seulement si les angles $\frac{2\pi}{m}$ et $\frac{2\pi}{n}$ sont constructibles.

Démonstration. (1) **Sens direct** Il suffit de pouvoir multiplier un angle par un entier, ce qui est fait dans l'exemple 19.83.

(2) **Sens réciproque** Le théorème de Bézout 1.358 nous donne $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $an + bm = 1$. Cela donne immédiatement

$$\frac{1}{mn} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}, \tag{19.280}$$

et donc

$$\frac{2\pi}{mn} = a\frac{2\pi}{m} + b\frac{2\pi}{n}, \tag{19.281}$$

ce qui fait que l'angle $2\pi/mn$ est une combinaison entière d'angles constructibles. Il est donc constructible par l'exemple 19.84.

□

LemUKNooSBzDyY

Lemme 19.89.
Soit un entier $n \geqslant 3$ ayant

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \tag{19.282}$$

comme décomposition en facteurs premiers. Le polynôme régulier à n côtés est constructible si et seulement si les angles $\frac{2\pi}{p_i^{\alpha_i}}$ sont constructibles.

Démonstration. Le polygone régulier à n côtés est constructible si et seulement si l'angle $\frac{2\pi}{n}$ est constructible, c'est-à-dire si l'angle

$$\frac{2\pi}{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}} \tag{19.283}$$

est constructible. Par récurrence sur le lemme 19.88, cet angle est constructible si et seulement si les angles $\frac{2\pi}{p_i^{\alpha_i}}$ sont constructibles. □

ThoTWAooEsLjJu

Théorème 19.90 (Gauss-Wantzel[128]).
Soit $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

ItemFSEooONDFrSi

(1) L'angle $\frac{2\pi}{2^\alpha}$ est constructible.

ItemFSEooONDFrSii

*(2) Si p est premier et $p \neq 2$, alors l'angle $\frac{2\pi}{p^\alpha}$ est constructible si et seulement si $\alpha = 1$ et p est un **nombre de Fermat**, c'est-à-dire de la forme $1 + 2^{(2^\beta)}$ pour $\beta \in \mathbb{N}$.*

ItemFSEooONDFrSiii

(3) *Le polygone régulier à n côtés est constructible si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts.*

Démonstration. Le point (1) est une construction de bissectrice, et le point (3) consistera à remettre en place différents morceaux. Le gros de la preuve est donc consacré à (2).

(1) **Sens direct** Nous supposons que l'angle $\frac{2\pi}{p^\alpha}$ est constructible ; alors le nombre $\cos\big(2\pi/p^\alpha\big)$ l'est également et le théorème de Wantzel 19.86 nous indique que

$$\Big[\mathbb{Q}\Big(\cos(2\pi/p^\alpha)\Big):\mathbb{Q}\Big]=2^m \tag{19.284}$$

pour un certain m. Posons $q=p^\alpha$ et $\omega=e^{2i\pi/q}$. Grâce au corolaire 19.26, nous savons que le polynôme minimal de ω est le polynôme cyclotomique ϕ_q dont le degré est[28]

$$\varphi(q)=\varphi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1). \tag{19.285}$$

Par conséquent

$$\big[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}\big]=p^{\alpha-1}(p-1). \tag{19.286}$$

Mais par ailleurs

$$\omega+\omega^{-1}=2\cos(2\pi/q), \tag{19.287}$$

EqJDBooHURUQa

donc $\cos(2\pi/q)\in\mathbb{Q}(\omega)$. Et en multipliant (19.287) par ω nous trouvons le polynôme annulateur suivant pour ω :

$$\omega^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)\omega+1=0. \tag{19.288}$$

Cela signifie que ω est de degré 2 dans $\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/q)\big)$, c'est-à-dire

$$\big[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/q)\big)\big]=2. \tag{19.289}$$

EqSJXooRCLJyt

En remettant bout à bout et en utilisant la propriété multiplicative des degrés des extensions[29],

$$\underbrace{\big[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}\big]}_{p^{\alpha-1}(p-1)}=\underbrace{\Big[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p^\alpha)\big)\Big]}_{2}\underbrace{\Big[\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p^\alpha)\big):\mathbb{Q}\Big]}_{2^m}, \tag{19.290}$$

donc $p^{\alpha-1}(p-1)=2^{m+1}$, mais comme p est premier et impair, $\alpha=1$ et $p=2^{m+1}+1$. Par ailleurs $m+1$ est un entier et nous nous proposons de mettre en facteur la puissance de 2 dans son développement en facteurs premiers : $m+1=\lambda 2^\beta$ avec $\beta\in\mathbb{N}$ et un certain nombre impair $\lambda\in\mathbb{N}^*$. Nous avons :

$$p=2^{\lambda 2^\beta}+1=\Big(2^{2^\beta}\Big)^\lambda+1, \tag{19.291}$$

mais le lemme 3.124(1) nous indique alors que $1+2^{2^\beta}$ divise $1+\Big(2^{2^\beta}\Big)^\lambda=p$. Mais vu que p est premier, il ne peut être divisé que par p lui-même et donc λ soit être égal à 1 et nous avons

$$p=1+2^{2^\beta}, \tag{19.292}$$

ce qui signifie que p est un nombre de Fermat premier.

(2) **Sens réciproque** Nous supposons que p est un nombre premier de la forme $p=1+2^{2^\beta}$ et nous devons prouver que l'angle $\frac{2\pi}{p}$ est constructible. Pour cela nous posons tout de suite $n=2^\beta$ et $\omega=e^{2i\pi/p}$. Comme dans la première partie nous nous souvenons que le polynôme minimal de ω est le polynôme cyclotomique ϕ_p de degré $p-1$; donc

$$[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}]=p-1. \tag{19.293}$$

[28] Voir juste en dessous de la définition 19.19.
[29] Proposition 6.63.

(2a) **Un groupe d'automorphismes** Nous considérons le groupe $G = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\big(\mathbb{Q}(\omega)\big)$ des automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\omega)$ agissant sur $\mathbb{Q}$ comme l'identité. Tous les éléments de $\mathbb{Q}(\omega)$ étant des polynômes en ω (proposition 6.103), un élément $g \in G$ est uniquement déterminé par $g(\omega)$, et de plus $g(0) = 0$ ainsi que $\phi_p(\omega) = 0$ et que ϕ_p commute avec g, donc

$$\phi_p\big(g(\omega)\big) = g\big(\phi_p(\omega)\big) = g(0) = 0, \tag{19.294}$$

ce qui signifie que $g(\omega)$ est une racine du polynôme cyclotomique ϕ_p. Par définition 19.19, les racines sont $\{\omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}\}$, ce qui signifie que l'action de g consiste à élever ω à une certaine puissance entre 1 et $p-1$. Le groupe G est donc d'ordre $|G| = p-1$ et a pour éléments

$$g_k : \omega \mapsto \omega^k \tag{19.295}$$

avec $k = 1, \dots, p-1$. L'application[30]

$$\begin{aligned} \psi : G &\to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \\ g_k &\mapsto [k]_p. \end{aligned} \tag{19.296}$$

est un morphisme surjectif entre deux groupes finis de même cardinal, donc c'est un isomorphisme. Le corolaire 19.34 nous donne de plus l'isomorphisme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, ce qui fait que G a un élément d'ordre $p-1$ (parce que $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ en a un). Nous notons g_0 cet élément.

(2b) **La tour d'extensions** À partir de cet élément $g_0 \in G$ nous définissons avec $0 \leqslant i \leqslant n$:

$$\mathbb{K}_i = \{z \in \mathbb{Q}(\omega) \text{ tel que } g_0^{2^i}(z) = z\}. \tag{19.297}$$

Ces ensembles sont bien des corps parce que g_0 est un morphisme : $g_0(zz') = g_0(z)g_0(z')$; on en déduit immédiatement que $g_0^2(zz') = g_0^2(z)g_0^2(z')$.

(2c) $\mathbb{K}_n = \mathbb{Q}(\omega)$ Cela est dû au fait que g_0 est, par définition, d'ordre 2^n, ce qui signifie que $g_0^{2^n}(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{Q}(\omega)$.

(2d) $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ Puisque les éléments de G laissent $\mathbb{Q}$ invariant nous avons forcément $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_0$. Nous nous attelons maintenant à prouver l'inclusion inverse. Nous savons par la proposition 6.103(2) que $\{\omega^i\}_{i=0,\dots,p-2}$ est une base[31] de $\mathbb{Q}(\omega)$. Vu que $g_0 : \mathbb{Q}(\omega) \to \mathbb{Q}(\omega)$ est un isomorphisme, l'image d'une base est une base :

$$\{g_0(\omega)^i\}_{i=0,\dots,p-2} \tag{19.298}$$

est également une base de $\mathbb{Q}(\omega)$. Soit $z \in \mathbb{K}_0$ et décomposons-le dans cette base[32] :

$$z = \sum_{i=0}^{p-2} \lambda_i g_0(\omega)^i; \tag{19.299}$$

EqTMZooCUySZb

nous appliquons g_0 à cette égalité en tenant compte du fait que $g_0(z) = z$:

$$z = \sum_{i=0}^{p-2} \lambda_i g_0(\omega)^{i+1}. \tag{19.300}$$

EqGGDooMAngMs

En identifiant les coefficients (et en remarquant que le dernier terme dans (19.299) est le premier dans (19.300)) nous voyons que tous les coefficients sont égaux :

$$z = \lambda_0 g_0(\omega + \cdots + \omega^{p-1}) = \lambda_0 g_0\big(\phi_p(\omega) - 1\big) = -\lambda_0 \in \mathbb{Q}. \tag{19.301}$$

Dans cette chaine d'égalités nous avons utilisé le fait que $\phi_p(X) = 1 + X + \cdots + X^{p-1}$ (corolaire 19.24) et que $\phi_p(\omega) = 0$ par définition.

(2e) $\mathbb{K}_i \subset \mathbb{K}_{i+1}$ **strictement** Nous avons une inclusion pour la simple raison que si $z \in \mathbb{K}_i$, alors $g_0^{2^i}(z) = z$. Par conséquent :

$$g_0^{2^{i+1}}(z) = g_0^{2\times 2^i}(z) = (g_0^{2^i})^2(z) = z. \tag{19.302}$$

[30] Pour rappel, la notation $[k]_p$ est la classe de l'entier k modulo p, qui est un élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
[31] Ici [128] parle de $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$. Dans ce cas il me semble qu'il faille faire partir les valeurs de i de 0 et non de 1.
[32] Il s'agit d'une base en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, donc les λ_i sont dans $\mathbb{Q}$.

Afin de voir que l'inclusion est stricte nous montrons que l'élément

$$x = \sum_{k=0}^{2^{n-i}-1} g_0^{k2^{i+1}}(\omega) \tag{19.303}$$

est dans $\mathbb{K}_{i+1} \setminus \mathbb{K}_i$. Dans la base $\{1, \omega, \ldots, \omega^{p-1}\}$ l'élément x a une composante ω avec le terme $k = 0$, mais si on lui applique $g_0^{2^i}$ nous obtenons

$$g_0^{2^i}(x) = \sum_{k=0}^{2^{n-i-1}-1} g_0^{2^i(1+2k)}(\omega). \tag{19.304}$$

Une composante ω pour cela demanderait d'avoir $2^i(1+2k) = \lambda 2^n$ avec $\lambda \in \mathbb{N}$; cela demanderait

$$k = \lambda 2^{n-i-1} - \frac{1}{2} \tag{19.305}$$

ce qui est impossible. Donc $x \notin \mathbb{K}_i$.
Nous montrons que $x \in \mathbb{K}_{i+1}$ de la même manière :

$$g_0^{2^{i+1}}(x) = \sum_{k=0}^{2^{n-i-1}-1} g^{2^{i+1}(k+1)}(\omega). \tag{19.306}$$

Soit k_0 entre 0 et $2^{n-i-1} - 1$; nous voulons trouver un k entre 0 et $2^{n-i-1} - 1$ tel que $k_0 2^{i+1} = 2^{i+1}(k+1)$; cela est très simple : il suffit de prendre $k = k_0 - 1$ tant que $k_0 \neq 0$. Si $k_0 = 0$ alors cela correspond au terme ω dans (19.303), et il se trouve dans (19.306) avec $k = 2^{n-i-1} - 1$. Donc $g_0^{2^{i+1}}(x) = x$ et $x \in \mathbb{K}_{i+1}$.

(2f) **Les degrés dans la tour** Par définition de n et de ω, et par la propriété multiplicative des degrés[33] nous avons :

$$2^n = p - 1 = \big[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}\big] = \underbrace{\big[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{K}_{n-1}\big] \ldots \big[\mathbb{K}_1 : \mathbb{Q}\big]}_{n \text{ facteurs}}. \tag{19.307}$$

Un produit de n facteurs entiers tous strictement plus grands que zéro doit valoir 2^n. Ils doivent donc tous valoir 2 et nous avons en particulier

$$\big[\mathbb{K}_{n-1} : \mathbb{Q}\big] = 2^{n-1}. \tag{19.308}$$

(2g) $\cos(2\pi/p) \in \mathbb{K}_{n-1}$ Soit $f = g_0^{2^n-1}$; puisque l'action de g_0 (comme de tous les éléments de G) est de décaler les puissances de ω, il existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $f(\omega) = \omega^\lambda$. Mais $f^2 = \mathrm{Id}$ donc

$$\omega = f^2(\omega) = \omega^{2\lambda}, \tag{19.309}$$

ce qui donne $1 = \omega^{\lambda^2-1}$ ou encore que p divise $\lambda^2 - 1$ parce que ω est une racine primitive p^{e} de l'unité. Par conséquent $[\lambda^2 - 1]_p = 0$ ce qui donne $[\lambda]_p = \pm[1]_p$, mais comme $f \neq \mathrm{Id}$ nous avons

$$[\lambda]_p = -[1]_p. \tag{19.310}$$

Ce que donne $f(\omega) = \omega^{-1}$.
Par ailleurs $\mathbb{Q}(\omega)$ est un corps, donc il contient

$$\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) = \frac{1}{2}(\omega + \omega^{-1}). \tag{19.311}$$

Nous en déduisons que $\cos(2\pi/p)$ est un point fixe de $f = g_0^{2^{-1}}$:

$$f\big(\cos(2\pi/p)\big) = \frac{1}{2}\big(f(\omega) + f(\omega^{-1})\big) = \cos(2\pi/p). \tag{19.312}$$

Être un point fixe de $g_0^{2^{n-1}}$ signifie être un élément de $\mathbb{K}_{n-1}$:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) \in \mathbb{K}_{n-1}. \tag{19.313}$$

[33] Proposition 6.63

(2h) **Questions de degrés** Nous avons alors les (non)inclusions suivantes :

$$\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p)\big) \subset \mathbb{K}_{n-1} \subsetneq \mathbb{K}_n = \mathbb{Q}(\omega), \tag{19.314}$$

ce qui fait que

$$1 < \big[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{K}_{n-1}\big] \leqslant \big[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p)\big)\big] = 2 \tag{19.315}$$

EqGEKooJBAQbg

La première inégalité est le fait que $\mathbb{Q}(\omega)$ n'est pas égal à $\mathbb{K}_{n-1}$. La dernière égalité se démontre de la même manière que (19.289) (ici $\alpha = 1$). Les inégalités de (19.315) sont donc en réalité des égalités :

$$\big[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{K}_{n-1}\big] = \big[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p)\big)\big] = 2. \tag{19.316}$$

Cela, combiné au fait que $\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p)\big) \subset \mathbb{K}_{n-1}$ donne

$$\mathbb{K}_{n-1} = \mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p)\big). \tag{19.317}$$

Mais nous savons déjà que $\big[\mathbb{K}_{n-1} : \mathbb{Q}\big] = 2^{n-1}$, donc

$$\big[\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p)\big) : \mathbb{Q}\big] = 2^{n-1} \tag{19.318}$$

et le nombre $\cos(2\pi/p)$ est bien sûr le sommet d'une tour d'extensions quadratiques partant de $\mathbb{Q}$. Il est donc constructible par le théorème de Wantzel 19.86.

Il est maintenant l'heure de conclure en prouvant le point (3). D'abord si n est un produit de nombres premiers de Fermat distincts, alors $n = p_1 \dots p_m$ et l'angle $\frac{2\pi}{n}$ est constructible si et seulement si chacun des angles $\frac{2\pi}{p_k}$ est constructible (lemme 19.89), ce qui est le cas d'après la partie (2). Si n est le produit d'une puissance de 2 avec un produit de nombres premiers de Fermat, le polygone à n côtés est tout autant constructible : il suffit de bissecter les angles.

À l'inverse si le polynôme à n côtés (avec n impair) est constructible, alors $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$, dont l'angle est constructible si et seulement si $\alpha = 1$ et p_i est un nombre premier de Fermat. Et si le polygone à n côtés (n pair) est constructible, alors $n = 2^\lambda \prod_i p_i^{\alpha_i}$. Ce polygone est constructible si et seulement si le polygone à $\prod_i p_i^{\alpha_i}$ côtés est constructible : il suffit de regrouper les côtés par deux. □

Remarque 19.91.
D'après Wikipédia[647], les seuls nombres de Fermat connus pour être premiers sont

$$F_0 = 3 \tag{19.319a}$$
$$F_1 = 5 \tag{19.319b}$$
$$F_2 = 17 \tag{19.319c}$$
$$F_3 = 257 \tag{19.319d}$$
$$F_4 = 65537. \tag{19.319e}$$

Pour les autres, essentiellement on ne sait pas. Il n'est même pas sûr qu'il y en ait d'autres. Le problème des polygones constructibles n'est donc pas encore tout à fait terminé.

Remarque 19.92.
Les angles $\frac{2\pi}{p^\alpha}$ avec p premier et $\alpha > 1$ ne sont pas constructibles. Il n'est donc pas possible de trisecter l'angle $\frac{2\pi}{3}$. Voilà qui règle un des vieux problèmes de l'antiquité.

Chapitre 20

Intégration sur des variétés

20.1 Variétés

20.1.1 Introduction

Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur la sphère usuelle $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Une question naturelle est d'estimer la régularité de f ; est-elle continue, dérivable, différentiable ? Il n'existe pas de dérivée directionnelle étant donné que le quotient différentiel

$$\frac{f(x+\epsilon u_1, y+\epsilon u_2) - f(x,y)}{\epsilon}$$

n'a pas de sens pour un point $(x+\epsilon u_1, y+\epsilon u_2)$ qui n'est pas –sauf valeurs particulières– dans la surface. Pour la même raison il n'est pas possible de parler de différentiabilité de cette manière. Comment faire, sans devoir étendre le domaine de définition de f à un voisinage de la sphère ? Une solution possible est de parler de la notion de variété.

Une variété est un objet qui ressemble, vu de près, à $\mathbb{R}^m$ pour un certain m. En d'autres termes, on imagine une variété comme un recollement de morceaux de $\mathbb{R}^m$ vivant dans un espace plus grand $\mathbb{R}^n$. Ces morceaux sont appelés des ouverts de carte, et l'application qui exprime la ressemblance à $\mathbb{R}^m$ est l'application de carte.

20.1.2 Définition, carte

DEFooJOAHooAxcLHe

Définition 20.1.
*Une **variété** de dimension m de classe C^1 est une partie M de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant m$) munie d'un ensemble de paires $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ où U_α est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ est une application vérifiant*

(1) φ_α est une bijection entre U_α et $\varphi_\alpha(U_\alpha)$;

(2) pour tout $a \in M$, il existe un α tel que $a \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$;

(3) pour tout α, β, la partie $\varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)\big)$ est un ouvert de U_α ;

(4) L'application

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)\big) \to U_\beta \tag{20.1}$$

est un C^1-difféomorphisme vers son image.

Notez que cette définition n'utilise pas du tout la structure de $\mathbb{R}^n$ dans lequel se trouve M. Seulement la structure différentielle du $\mathbb{R}^m$ depuis lequel les cartes partent. En particulier, nous n'avons pas dit si $\varphi_\alpha : U_\alpha \to M$ était de classe C^1 pour une topologie induite de $\mathbb{R}^n$ vers M. Nous pouvons en réalité définir plus généralement une variété en remplaçant « une partie de $\mathbb{R}^n$ » par « un ensemble » sans rien y changer.

La difficulté qui apparaît lorsque nous voulons dire que M est un ensemble quelconque au lieu d'une partie de $\mathbb{R}^n$ est pour la mesure.

Nous verrons plus loin comment les cartes φ_α peuvent transporter la mesure de U_α (celle de Lebesgue dans $\mathbb{R}^m$) vers une partie de $\mathbb{R}^n$ en utilisant le déterminant de $d\varphi_\alpha$. Cela n'est possible que parce que $\mathbb{R}^n$ a une structure différentielle qui permet de définir $d\varphi_\alpha$. Si M est un ensemble quelconque, cette façon de faire n'est plus possible. Dans ce cas, il faut définir des fibrés tangents et cotangents puis en extraire une « forme volume ». Le choix de la forme volume n'étant pas canonique, il n'y a pas d'intégrale canonique sur une variété générale comme il y en a une sur une variété « dans $\mathbb{R}^n$ ».

DEFooWABZooGIEDEV

Définition 20.2.
Soit une variété M de dimension m. Une ***carte*** *pour M est un couple (U, φ) où U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $\varphi\colon U \to M$ est une application*

(1) qui est une bijection entre U et son image,

(2) pour tout α,

$$\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi\colon \varphi^{-1}\big(\varphi(U) \cap \varphi_\alpha(U_\alpha)\big) \to \varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi(U) \cap \varphi_\alpha(U_\alpha)\big) \tag{20.2}$$

est un C^1-difféomorphisme.

Proposition 20.3 ([1])**.**
Si (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont des cartes pour la variété M, alors en posant $S = \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)$, l'application

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\colon \varphi_1^{-1}(S) \to \varphi_2^{-1}(S) \tag{20.3}$$

est un C^1-difféomorphisme.

Démonstration. Le fait que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ soit une bijection est dû au fait que nous ayons choisi les espaces de départ et d'arrivée pour que ce soit une bijection.

Soit $a \in \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)$. Soient α tel que $a \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ et un ouvert A autour de $\varphi_\alpha^{-1}(a)$ tel que $\varphi_\alpha(A) \subset \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)$. Nous allons montrer que

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\colon \varphi_1\big(\varphi_\alpha(A)\big) \to \varphi_2^{-1}\big(\varphi_\alpha(A)\big) \tag{20.4}$$

est un C^1-difféomorphisme. Nous avons

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_1, \tag{20.5}$$

mais vu que φ_1 et φ_2 sont des cartes, les applications $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_\alpha$ et $\varphi_\alpha \circ \varphi_1$ sont de classe C^1 et d'inverses C^1. La composition l'est encore. □

Nous avons demandé qu'une variété n'admette que des cartes partant d'ouverts de $\mathbb{R}^m$. Aurions-nous pu admettre, dans la définition 20.2 que la carte parte d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ avec $p \neq m$? Non. Voici une résultat qui dit que si une carte part de $\mathbb{R}^m$, alors toutes les cartes doivent partir de $\mathbb{R}^m$.

Proposition 20.4.
Soit une variété M de dimension m et une carte $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to M$. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et si $\varphi\colon U \to M$ est telle que $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi$ soit un difféomorphisme, alors $p = m$.

Démonstration. Soit $A = \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi(U)$. Les parties $\varphi_\alpha^{-1}(A)$ et $\varphi^{-1}(U)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^p$ respectivement. Par hypothèse, l'application

$$\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi\colon \varphi^{-1}(A) \to \varphi_\alpha^{-1}(A) \tag{20.6}$$

est un difféomorphisme entre l'ouvert $\varphi^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^p$ et l'ouvert $\varphi_\alpha^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^m$. La proposition 10.325 implique que $m = p$. □

20.1.3 Ancienne définition

Cette section est à recycler.

Définition 20.5.
Soit $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant m < n$ et $k \geqslant 1$. M est une variété de classe C^k de dimension m *si pour tout $a \in M$, il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, et un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ tel que $U \cap M$ soit le graphe d'une fonction $f : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1, c'est-à-dire qu'il existe un réagencement des coordonnées $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}, x_{i_{m+1}}, \ldots, x_{i_n})$ avec*

$$M \cap U = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) \in V \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_{i_{m+1}} & = & f_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) \\ \vdots & = & \vdots \\ x_{i_n} & = & f_{n-m}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) \end{array} \right. \right\}$$

où V est un voisinage ouvert de $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in \mathbb{R}^m$.

La littérature regorge de théorèmes qui proposent des conditions équivalentes à la définition d'une variété. Celle que nous allons le plus utiliser est la suivante

Proposition 20.6.
Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ et $1 \leqslant m \leqslant n-1$. L'ensemble M est une variété si et seulement si $\forall a \in M$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a dans $\mathbb{R}^n$ et une application $F\colon W \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ où W est un ouvert tels que

(1) F est un homéomorphisme de W vers $M \cap \mathcal{U}$,

(2) $F \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$,

(3) Le rang de $dF(w) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est de rang maximum (c'est-à-dire m) en tout point $w \in W$.

Pour rappel, si $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, son rang[1] est la dimension de son image. Si A est la matrice d'une application linéaire, alors le rang de cette application linéaire est égal à la taille de la plus grande matrice carrée de déterminant non nul contenue dans A[2].

La condition de rang maximum sert à éviter le genre de cas de la figure 20.1 qui représente l'image de l'ouvert $[-1, 1]$ par l'application $F(t) = (t^2, t^3)$.

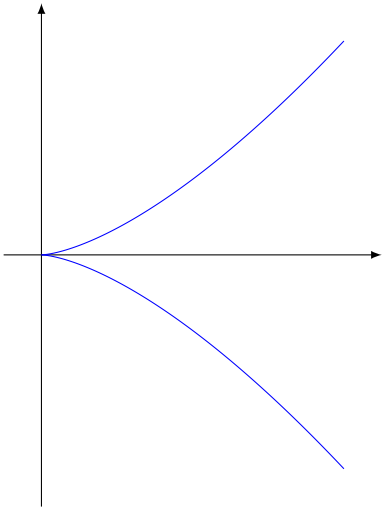


FIGURE 20.1 : Quelque chose qui n'est pas de rang maximum et qui n'est pas une variété. LabelFigExempleNonRang

La différentielle a pour matrice

$$dF(t) = (2t, 3t^2). \tag{20.7}$$

Le rang maximum est 1, mais en $t = 0$, la matrice vaut $(0, 0)$ et son rang est zéro. Pour toute autre valeur de t, c'est bon.

Une autre caractérisation des variétés est donnée par la proposition suivante

PropCarVarZerFonc

Proposition 20.7.
Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ et $1 \leqslant m \leqslant n-1$. L'ensemble M est une variété si et seulement si $\forall a \in M$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a dans $\mathbb{R}^n$ tel et une application $G \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n-m})$ tel que

(1) le rang de $dG_a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$ soit maximum (c'est-à-dire $n-m$) en tout $a \in M$,

(2) $M \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} \text{ tel que } G(x) = 0\}$.

20.1.4 Espace tangent

DEFooMCEYooHuCAdg

Proposition-Définition 20.8 ([648])**.**
Soit une variété M de dimension m dans $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in M$. L'ensemble

$$T_aM = \left\{ \gamma'(0) \text{ tel que } \begin{cases} \gamma \in C^1\big(]-1,1[, M\big) \\ \gamma(0) = a \end{cases} \right\} \tag{20.8}$$

*est un sous-espace vectoriel de dimension m, appelé **espace tangent** de M en a.*

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

[1] Définition 4.48.
[2] Proposition 4.134

20.2 Intégration

20.2.1 Le problème pour une intégration globale

Soient une variété M et une partie A de M. Si nous avons une fonction $f\colon A\to\mathbb{R}$, nous voudrions définir une intégrale de f sur A en utilisant les cartes.

Il y a une petite complication. Supposons que A soit dans $\varphi_\alpha(U_\alpha)\cap\varphi_\beta(U_\beta)$. Pour la carte φ_α nous aurions tendance à vouloir écrire

$$\int_A f=\int_{\varphi_\alpha^{-1}(A)} f\circ\varphi_\alpha \tag{20.9}$$

pour la mesure de Lebesgue induite de $\mathbb{R}^m$ vers son ouvert U_α. Pas de problème à ce que (20.9) soit bien définie. Le problème est que α n'est pas à priori spécial par rapport à β et qu'il faudrait également que

$$\int_A f=\int_{\varphi_\beta^{-1}(A)} f\circ\varphi_\beta \tag{20.10}$$

Mais en utilisant le changement de variable (théorème 14.282(3)) pour le C^1-difféomorphisme $\phi=\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\beta$, nous avons

$$\int_{\varphi_\alpha^{-1}(A)} f\circ\varphi_\alpha=\int_{\varphi_\beta^{-1}(A)}(f\circ\varphi_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\beta)|J_\phi|=\int_{\varphi_\beta^{-1}(A)}(f\circ\varphi_\beta)|J_\phi|. \tag{20.11}$$

À moins d'une coïncidence extraordinaire sur les valeurs du jacobien, il n'y aura pas égalité entre (20.9) et (20.10).

Pour faire mieux, il faudra ajouter quelque chose qui compense l'arrivée du jacobien. C'est ce que nous allons faire maintenant.

20.2.2 Intégrale sur une carte

Dans un premier temps, nous allons définir l'intégrale sur une carte. Nous verrons plus tard comment combiner les cartes pour faire une intégrale sur une variété entière.

Proposition-Définition 20.9 ([1]).
Soient deux cartes (U_1,φ_1) et (U_2,φ_2) pour la partie A d'une variété de dimension m dans $\mathbb{R}^n$. Soit une fonction mesurable $f\colon A\to[0,+\infty]$[3].

Alors[4]

$$\int_{U_1}(f\circ\varphi_1)(x)\sqrt{\det\big((d\varphi_1)_x^*(d\varphi_1)_x\big)}dx=\int_{U_2}(f\circ\varphi_2)(y)\sqrt{\det\big((d\varphi_2)_y^*(d\varphi_2)_y\big)}dy \tag{20.12}$$

où les deux intégrales sont au sens de la mesure de Lebesgue sur des ouverts de $\mathbb{R}^m$.

*Ce nombre est **l'intégrale** de f sur A, et est noté*

$$\int_A f. \tag{20.13}$$

Démonstration. Vu que nous sommes en présence de cartes pour une variété, les applications $\varphi_1\colon U_1\to A$ et $\varphi_2\colon U_2\to A$ sont des bijections telles que $\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2\colon U_2\to U_1$ soit un C^1-difféomorphisme.

Nous considérons le C^1-difféomorphisme $\phi=\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2$. Notre but est d'utiliser le théorème de changement de variables 14.282(2).

Vu que φ_1 est une bijection, $(\varphi_1\circ\varphi_1^{-1})(A)=A$ et nous avons

$$\phi^{-1}\big(\varphi_1^{-1}(A)\big)=\varphi_2^{-1}(A). \tag{20.14}$$

Ensuite, $f\circ\varphi_1\circ\phi=f\circ\varphi_2$.

Jusqu'ici, rien de drôle me diriez-vous. Ok. Alors voyons un peu comment se passe le jacobien et ce qui se trouve sous la racine carrée.

L'application $x\mapsto\det\big((d\varphi_1)_x^*\circ(d\varphi_1)_x\big)$ doit être composée avec ϕ pour donner

$$y\mapsto\det\big((d\varphi_1)_{\phi(y)}^*\circ(d\varphi_1)_{\phi(y)}\big). \tag{20.15}$$

Attardons-nous un peu sur $(d\varphi_1)_{\phi(y)}$. Nous savons par la règle de différentiation en chaine 10.317 que

$$d(\varphi_1\circ\phi)_y=(d\varphi_1)_{\phi(y)}\circ(d\phi)_y. \tag{20.16}$$

[3] Si f est seulement mesurable, allez voir les hypothèses du théorème 14.282(3).

[4] Voir la définition de l'adjoint 8.35.

Le lemme 10.324 nous dit que l'application linéaire $d\phi_y\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est inversible et que $d\phi_y^{-1} = (d\phi^{-1})_{\phi(y)}$. En composant les deux côtés de (20.16) par cela nous trouvons

$$(d\varphi_1)_{\phi(y)} = d(\varphi_1 \circ \phi)_y \circ (d\phi)_y^{-1} = (d\varphi_2)_y \circ (d\phi^{-1})_{\phi(y)}. \tag{20.17}$$

C'est me moment d'utiliser la proposition 8.38 à propos de la composition des applications adjointes. Ce qui est dans le déterminant est :

$$\big((d\varphi_2)_y \circ (d\phi^{-1})_{\phi(y)}\big)^* \circ \big((d\varphi_2)_y \circ (d\phi^{-1})_{\phi(y)}\big) = \underbrace{(d\phi^{-1})^*_{\phi(y)}}_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m} \circ \underbrace{(d\varphi_2)^*_y \circ (d\varphi_2)_y}_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m} \circ \underbrace{(d\phi^{-1})_{\phi(y)}}_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m}. \tag{20.18}$$

Nous utilisons à présent un combo entre les propriétés des déterminants et de l'adjoint : les propositions 8.15(2) et 8.37 font sortir $|\det\big((d\phi^{-1})_{\phi(y)}\big)|$ de la racine carré. Ne pas oublier la valeur absolue parce que $\sqrt{x^2} = |x|$ et non $\sqrt{x^2} = x$. Cela pour dire que

$$\sqrt{\det\big((d\varphi_1)^*_{\phi(y)} \circ (d\varphi_1)_{\phi(y)}\big)} = |\det\big((d\phi^{-1})_{\phi(y)}\big)|\sqrt{\det\big((d\varphi_2)^*_y \circ (d\varphi_2)_y\big)}. \tag{20.19}$$

En ce qui concerne l'intégrale que nous voulons calculer, en mettant les bouts ensemble,

$$\begin{aligned}&\int_{\varphi_1^{-1}(A)} (f\circ\varphi_1)(x)\sqrt{\det(\dots)}dx\\ &\quad= \int_{\varphi_2^{-1}(A)} (f\circ\varphi_2)(y)|\det\big((d\phi^{-1})_{\phi(y)}\big)|\sqrt{\det\big((d\varphi_2)^*_y \circ (d\varphi_2)_y\big)}|\det(d\phi_y)|dy.\end{aligned} \tag{20.20}$$

Enfin, les déterminants se suppriment : dans la valeur absolue nous avons :

$$\det\big((d\phi^{-1})_{\phi(y)}\big)\det(d\phi_y) = \det\big((d\phi^{-1})_{\phi(y)} \circ d\phi_y\big) = \det(\mathrm{Id}) = 1. \tag{20.21}$$

□

20.10.
Notez que si A est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ lui-même, le nombre défini dans la définition 20.9 est l'intégrale usuelle. Pour le voir, choisir $U = A$ ainsi que la carte

$$\begin{aligned}\varphi\colon U &\to A\\ x &\mapsto x.\end{aligned} \tag{20.22}$$

La différentielle de φ est l'identité, de telle sorte que $\det\big((d\varphi)^*_x(d\varphi)_x\big) = 1$. De même, $f\circ\varphi = f$. Il reste seulement $\int_U f(x)dx$.

Si nous voulons que la formule de la proposition 20.9 fournisse une définition raisonnable de $\int_A f$, il faut que si (U,φ) est une carte,

$$\det\big(d\varphi_x^* \circ d\varphi_x\big) \geqslant 0 \tag{20.23}$$

pour tout x, et ne soit nul sur aucun ouvert de U.

Lemme 20.11 ([1])**.**
Soit une carte (U,φ) d'une variété M de dimension m. Soit $x \in U$. Alors

(1) L'opérateur $d\varphi_x^* \circ d\varphi_x$ est autoadjoint semi-défini positif.

(2) Il existe une base de $\mathbb{R}^m$ formée de vecteurs propres de $d\varphi_x^* \circ d\varphi_x$. Les valeurs propres sont réelles et positives.

(3) Pour tout $x \in U$ nous avons

$$\det(d\varphi_x^* \circ d\varphi_x) > 0. \tag{20.24}$$

Démonstration. Point par point.

(1) Soit $x \in U$. Nous notons $A = d\varphi_x$. Par la proposition 8.38 nous avons $(AA^*)^* = AA^*$ du fait que $(A^*)^* = A$. Donc A^*A est autoadjoint. Sa matrice est donc symétrique par la proposition 8.35(2).

De plus, pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ nous avons

$$\langle A^*Au, u\rangle = \langle Au, Au\rangle \geqslant 0. \tag{20.25}$$

Cela implique que la matrice de A^*A est semi-définie positive par le lemme 8.232(2). L'opérateur A^*A est également semi-défini positif par la proposition 8.233.

(2) L'existence de la base de vecteurs propres est le théorème 8.225. Ce théorème dit de plus que les valeurs propres sont réelles. Le fait qu'elles soient positives est le fait déjà prouvé que A^*A est semi-défini positif.

(3) Dans la base de vecteurs propres, la matrice est diagonale avec des nombres positifs sur la diagonale. Le déterminant est alors le produit des valeurs propres. Voilà pourquoi le déterminant est positif.

Il nous reste à montrer que ce déterminant ne peut pas être nul. Si $\det(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a) = 0$, alors l'application $d\varphi_a^* \circ d\varphi$ a un noyau (proposition 8.15(2)), c'est-à-dire un vecteur u tel que $d\varphi_a^* d\varphi_a(u) = 0$ en particulier,

$$0 = \langle d\varphi_a^* d\varphi_a u, u\rangle = \langle d\varphi_a u, d\varphi_a u, \rangle = \|d\varphi_a u\|^2. \tag{20.26}$$

Donc $d\varphi_a(u) = 0$.

Mais $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ est bijective, donc l'application $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to U$ l'est aussi et vu que φ est une carte, l'application $\varphi^{-1} \circ \varphi\colon U \to U$ est égale à l'identité. L'identité est une application linéaire dont la différentielle est elle-même, c'est-à-dire que

$$d(\varphi^{-1} \circ \varphi)_a = (d\varphi^{-1})_{\varphi(a)} \circ d\varphi_a = \mathrm{Id}\,. \tag{20.27}$$

Si donc $u \neq 0$, nous devons avoir $d\varphi_a(u) \neq 0$.

□

20.2.3 Quelques expressions pour l'élément de volume

Ce que nous appelons « élément de volume » (pour des raisons qui apparaîtront plus tard) est le coefficient $\sqrt{\det(d\varphi_x^* \circ d\varphi_x)}$, introduit pour le besoin de compenser l'arrivée du jacobien en cas de changement de variables. Mais à quoi ressemble ce coefficient pour les variétés de petite dimension ?

C'est ce que nous allons voir maintenant.

20.2.3.1 En dimension un

Nous supposons une variété de dimension un dans $\mathbb{R}^n$. Une carte est donc une application $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dont nous notons φ_i les composantes. Nous avons, pour $u \in \mathbb{R}$,

$$d\varphi_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[\varphi(a+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varphi_1(a+tu)\\ \vdots \\ \varphi_n(a+tu)\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}\varphi_1'(a)\\ \vdots \\ \varphi_n'(a)\end{pmatrix} = u\varphi'(a). \tag{20.28}$$

Là dedans, vous vous souviendrez que $a \in \mathbb{R}$ et que $\varphi'(a) \in \mathbb{R}^n$.

Nous devons savoir ce que vaut $d\varphi_a^* x$ lorsque $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\langle d\varphi_a x, u\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, d\varphi_a(u)\rangle_{\mathbb{R}^n} = u\langle x, \varphi'(a)\rangle_{\mathbb{R}^n} = u\varphi'(a) \cdot x = \langle \varphi'(a) \cdot x, u\rangle_{\mathbb{R}}. \tag{20.29}$$

Donc $d\varphi_a^*(x) = \varphi'(a) \cdot x$.

Question notation, nous avons noté $\langle a, b\rangle_{\mathbb{R}} = ab$ et indifféremment $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} = x \cdot y$.

L'application $d\varphi_a^* \circ d\varphi_a$ est une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$. Sa matrice est donc 1×1 et elle se calcule en appliquant l'application au vecteur de base 1 de $\mathbb{R}$:

$$(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a)(1) = d\varphi_a^*\big(\varphi'(a)\big) = \varphi'(a) \cdot \varphi'(a) = \|\varphi'(a)\|^2. \tag{20.30}$$

Nous avons donc

$$\det\big(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a\big) = \|\varphi'(a)\|^2. \tag{20.31}$$

20.2.3.2 En dimension quelconque

Soit une carte $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ pour une variété de dimension m. Les éléments de matrice de la différentielle d'une application sont donnés par la proposition 12.272 :

$$(d\varphi_a)_{ij} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(a). \tag{20.32}$$

Les éléments de la matrice de $d\varphi_a^*$ sont ceux de la matrice transposée. En ce qui concerne la composition, c'est le produit des matrices :

$$(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a)_{ij} = \sum_k (d\varphi_a^*)_{ik}(d\varphi_a)_{kj} = \sum_k (d\varphi_a)_{ki}(d\varphi_a)_{kj} = \sum_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}(a)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}(a). \tag{20.33}$$

Cela pour écrire cette bonne formule :

$$(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a)_{ij} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(a) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(a). \tag{20.34}$$

20.2.3.3 En dimension deux

Nous considérons maintenant une carte $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ avec $U \subset \mathbb{R}^2$. En notant $v_i = \partial_i\varphi(a)$ nous notons la formule (20.34) sous la forme

$$\det\left(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a\right) = \det\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} = \|v_1\|^2\|v_2\|^2 - (v_1 \cdot v_2)^2. \tag{20.35}$$

L'identité de Lagrange de la proposition 10.47 nous donne alors

$$\sqrt{\det(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a)} = \|\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}\|. \tag{20.36}$$

20.2.3.4 En dimension trois

Nous considérons maintenant une carte $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ avec $U \subset \mathbb{R}^3$. Nous notons $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(a)$, $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a)$ et $w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(a)$.

En utilisant l'expression du lemme 10.45 à propos du produit mixte, la formule 20.34 donne

$$\det(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a) = \det\begin{pmatrix} \|u\|^2 & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & \|v\|^2 & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & \|w\|^2 \end{pmatrix} = \big|(u \times v) \cdot w\big|. \tag{20.37}$$

Donc

$$\det(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a) = \big|(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a) \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a)) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z}(a)\big|. \tag{20.38}$$

20.3 Intégrale sur une variété

20.3.1 Mesure sur une carte

Nous considérons dans cette section uniquement des variétés M de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. Une particularité de $\mathbb{R}^3$ (par rapport aux autres $\mathbb{R}^n$) est qu'il existe le produit vectoriel.

Si v, $w \in \mathbb{R}^3$, alors le vecteur $v \times w$ est un vecteur normal au plan décrit par v et w qui jouit de l'importante propriété suivante :

$$\text{aire du parallélogramme} = \|v \times w\|. \tag{20.39}$$

L'aire du parallélogramme construit sur v et w est donnée par la norme du produit vectoriel. Afin de donner une mesure infinitésimale en un point $p \in M$, nous voudrions prendre deux vecteurs tangents à M en p, et puis considérer la norme de leur produit vectoriel. Cette idée se heurte à la question du choix des vecteurs tangents à considérer.

Dans $\mathbb{R}^2$, le choix est évident : nous choisissons e_x et e_y, et nous avons $\|e_x \times e_y\| = 1$. L'idée est donc de choisir une carte $F\colon W \to F(W)$ autour du point $p = F(w)$, et de choisir les vecteurs tangents qui correspondent à e_x et e_y via la carte, c'est-à-dire les vecteurs

$$\frac{\partial F}{\partial x}(w), \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(w). \tag{20.40}$$

L'**élément infinitésimal de surface** sur M au point $p = F(w)$ est alors défini par

$$d\sigma_F = \|\frac{\partial F}{\partial x}(w) \times \frac{\partial F}{\partial y}(w)\|dw, \tag{20.41}$$

et si la partie $A \subset M$ est entièrement contenue dans $F(W)$, nous définissons la **mesure** de A par

$$\mu_2(A) = \int_{F^{-1}(A)} d\sigma_F = \int_{F^{-1}(A)} \|\frac{\partial F}{\partial x}(w) \times \frac{\partial F}{\partial y}(w)\|dw. \tag{20.42}$$

Remarque 20.12.
Afin que cette définition ait un sens, nous devons prouver qu'elle ne dépend pas du choix de la carte F. En effet, les vecteurs $\partial_x F$ et $\partial_y F$ dépendent de la carte F, donc leur produit vectoriel (et sa norme) dépendent également de la carte F choisie. Il faudrait donc un petit miracle pour que le nombre $\mu_2(A)$ donné par (20.42) soit indépendant du choix de F. Nous allons bientôt voir comme cas particulier du théorème 20.16 que c'est en fait le cas. C'est-à-dire que si F et $\tilde{F}$ sont deux cartes qui contiennent A, alors

$$\int_{F^{-1}(A)} d\sigma_F = \int_{\tilde{F}^{-1}(A)} d\sigma_{\tilde{F}}. \tag{20.43}$$

20.3.1.1 Exemple : la mesure de la sphère

PROPooAFGSooJBZiuo

Proposition 20.13 ([1]).
L'aire de la sphère $S^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + R^2$ est $4\pi R^2$.

Démonstration. Nous allons calculer l'aire de la demi-sphère. L'application $F\colon B((0,0),R) \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} \tag{20.44}$$

est une carte pour une demi-sphère. Ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{pmatrix}. \tag{20.45}$$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs tangents donne

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\alpha}e_1 + \frac{y}{\alpha}e_2 + e_3 \tag{20.46}$$

où $\alpha = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. En calculant la norme, nous trouvons

$$\| \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \| = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}, \tag{20.47}$$

et en passant aux coordonnées polaires, nous écrivons l'intégrale (20.42) sous la forme

$$\int_B \|\partial_x F \times \partial_y F\| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dr = 2\pi R^2, \tag{20.48}$$

EQooYGRFooKwEYfV

qui est bien la mesure de la demi-sphère. □

20.3.2 Intégrale sur une carte

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale d'une fonction sur une carte de la variété M.

DEFooZNFOooZPiBWY

Définition 20.14.
*Soit $F\colon W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, une carte pour une variété M. Soit A, une partie de $F(W)$ telle que $A = F(B)$ où $B \subset W$ est mesurable. Soit encore $f\colon A \to \mathbb{R}$, une fonction continue. L'**intégrale** de f sur A est le nombre*

$$\int_A f = \int_A f d\sigma_F = \int_{F^{-1}(A)} (f \circ F)(w) \| \frac{\partial F}{\partial x}(w) \times \frac{\partial F}{\partial y}(w) \| dw \tag{20.49}$$

EqDefIntDeuxDF

Remarque 20.15.
L'intégrale (20.49) n'est pas toujours bien définie. Étant donné que F est C^1 et que f est continue, l'intégrande est continue. L'intégrale sera donc bien définie par exemple lorsque B est borné et si la fermeture $\bar{A}$ est un compact contenu dans $F(W)$.

Le théorème suivant montre que le travail que nous avons fait jusqu'à présent ne dépend en fait pas du choix de carte F effectué.

ThoIntIndepF

Théorème 20.16.
Soient $F\colon W \to F(W)$ et $\tilde{F}\colon \tilde{W} \to \tilde{F}(\tilde{W})$, deux cartes de la variété M. Soit une partie $A \subset F(W) \cap \tilde{F}(\tilde{W})$ telle que $A = F(B)$ avec $B \subset W$ mesurable. Alors $A = \tilde{F}(\tilde{B})$ avec $\tilde{B} \subset \tilde{W}$ mesurable.

Si f est une fonction continue, et si $\int_A f d\sigma_F$ existe, alors $\int_A f d\sigma_{\tilde{F}}$ existe et

$$\int_A f d\sigma_F = \int_A f d\sigma_{\tilde{F}}. \tag{20.50}$$

20.3.3 Exemples

Intégrons la fonction $f(x,y,z)$ sur le carré $K =]0,1[\times]0,2[\times \{1\}$. La première carte que nous pouvons utiliser est

$$\begin{aligned} F\colon]0,1[\times]0,2[&\to K \\ (x,y) &\mapsto (x,y,1). \end{aligned} \tag{20.51}$$

Nous trouvons aisément les vecteurs tangents qui forment l'élément de surface :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{20.52}$$

donc $d\sigma_F = 1 \cdot dxdy$, et

$$\int_K f d\sigma_F = \int_{]0,1[\times]0,2[} f(x,y,1) \cdot 1 \cdot dxdy. \tag{20.53}$$

IntKSurcarrUn

Nous pouvons également utiliser la carte

$$\begin{aligned} \tilde{F}\colon]0,\frac{1}{2}[\times]0,6[&\to K \\ (\tilde{x},\tilde{y}) &\mapsto (2\tilde{x},\frac{\tilde{y}}{3},1). \end{aligned} \tag{20.54}$$

Les vecteurs tangents sont maintenant

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{20.55}$$

et nous avons donc $d\sigma_{\tilde{F}} = \|\frac{2}{3}e_3\| = \frac{2}{3}$. Cette fois, l'intégrale de f sur K s'écrit

$$\int_K f d\sigma_{\tilde{F}} = \int_{]0,\frac{1}{2}[\times]0,6[} f\big(2\tilde{x},\frac{\tilde{y}}{3},1\big) \cdot \frac{2}{3} \cdot d\tilde{x}d\tilde{y}. \tag{20.56}$$

Conformément au théorème 20.16, cette dernière intégrale est égale à l'intégrale (20.53) parce qu'il s'agit juste d'un changement de variable.

20.3.4 Orientation

Soient $F\colon W \to F(W)$ et $\tilde{F}\colon \tilde{W} \to \tilde{F}(\tilde{W})$, deux cartes de la variété M. Nous pouvons considérer la fonction $h = \tilde{F}^{-1} \circ F$, définie uniquement sur l'intersection des cartes :

$$h\colon F^{-1}\big(F(W) \cap \tilde{F}(\tilde{W})\big) \to \tilde{F}^{-1}\big(F(W) \cap \tilde{F}(\tilde{W})\big). \tag{20.57}$$

Nous disons que F et $\tilde{F}$ ont même **orientation** si

$$J_h(w) > 0 \tag{20.58}$$

pour tout $w \in F^{-1}\big(F(W) \cap \tilde{F}(\tilde{W})\big)$.

Considérons les deux cartes suivantes pour le même carré :

$$\begin{aligned} F\colon]0,1[\times]0,1[&\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto (x,y,0) \end{aligned} \tag{20.59}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{F}\colon]0,\frac{1}{2}[\times]0,\frac{1}{3}[&\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto (2x,3y,0) \end{aligned} \tag{20.60}$$

Ici, $h(x,y)=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{3}\right)$ et nous avons $J_h=\frac{1}{6}>0$. Ces deux cartes ont même orientation. Notez que

$$\frac{\partial F}{\partial x}\times\frac{\partial F}{\partial y}=e_3, \tag{20.61}$$

tandis que

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}\times\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}=6e_3. \tag{20.62}$$

Les vecteurs normaux à le paramétrage pointent dans le même sens.

Si par contre nous prenons le paramétrage

$$\begin{aligned} G\colon]0,1[\times]0,1[&\to\mathbb{R}^3\\ (x,y)&\mapsto(x,(1-y),0), \end{aligned} \tag{20.63}$$

nous avons

$$\frac{\partial G}{\partial x}\times\frac{\partial G}{\partial y}=-e_3, \tag{20.64}$$

et si $g=G^{-1}\circ F$, alors $J_g=-1$.

L'orientation d'une carte montre donc si le vecteur normal à la surface pointe d'un côté ou de l'autre de la surface.

DEFooSWREooNdQpdA

Définition 20.17 (Variété orientable)**.**
*Une variété M est **orientable** si il existe un atlas de M tel que deux cartes quelconques ont toujours même orientation. Une variété est **orientée** lorsque qu'un tel choix d'atlas est fait.*

Proposition 20.18.
Soit M, une variété orientable et un atlas orienté $\{F_i\colon W_i\to\mathbb{R}^3\}$. Alors le vecteur unitaire

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\|\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\|} \tag{20.65}$$

ne dépend pas du choix de F parmi les F_i.

Démonstration. Considérons deux cartes F_1 et F_2, ainsi que l'application $h=F_2^{-1}\circ F_1$. Écrivons le vecteur $\partial_xF_1\times\partial_yF_1$ en utilisant $F_1=F_2\circ h$. D'abord, par la règle de dérivation de fonctions composées,

$$\frac{\partial(F_2\circ h)}{\partial x}=\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial x}. \tag{20.66}$$

Après avoir fait le même calcul pour $\frac{\partial(F_2\circ h)}{\partial y}$, nous pouvons écrire

$$\partial_x(F_2\circ h)\times\partial_y(F_2\circ h)=(\partial_xh_1\partial_xF_2+\partial_xh_2\partial_yF_2)\times(\partial_yh_1\partial_xF_2+\partial_yh_2\partial_yF_2). \tag{20.67}$$

Dans cette expression, les facteurs ∂_ih_j sont des nombres, donc ils se factorisent dans les produits vectoriels. En tenant compte du fait que $\partial_xF_2\times\partial_xF_2=0$ et $\partial_yF_2\times\partial_yF_2=0$, ainsi que de l'antisymétrie du produit vectoriel, l'expression se réduit à

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\times\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)(\partial_xh_1\partial_yh_2-\partial_xh_2\partial_yh_2). \tag{20.68}$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\times\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial(F_2\circ h)}{\partial x}\times\frac{\partial(F_2\circ h)}{\partial y}=\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\times\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\det J_h. \tag{20.69}$$

Donc, tant que J_h est positif, les vecteurs unitaires correspondants au membre de gauche et de droite sont égaux. □

Corolaire 20.19.
Si nous avons choisi un atlas orienté pour la variété M, nous avons une fonction continue $G\colon M\to\mathbb{R}^3$ telle que $\|G(p)\|=1$ pour tout $p\in M$. Cette fonction est donnée par

$$G(F(x,y))=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\|\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\|} \tag{20.70}$$

DefCarteGOritn

sur l'image de la carte F.

Démonstration. La fonction G est construite indépendamment sur chaque carte $F(W)$ en utilisant la formule (20.70). Cette fonction est une fonction bien définie sur tout M parce que nous venons de démontrer que sur $F_1(W_1) \cap F_2(W_2)$, les fonctions construites à partir de F_1 et à partir de F_2 sont égales. □

Il est possible que prouver, bien que cela soit plus compliqué, que la réciproque est également vraie.

PROPooGHXTooPrAESF

Proposition 20.20.
Une variété M de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ est orientable si et seulement si il existe une fonction continue $G\colon M \to \mathbb{R}^3$ telle que pour tout $p \in M$, le vecteur $G(p)$ soit de norme 1 et normal à M au point p.

20.4 Longueur, aire, volumes etc.

Grâce à la mesure de Lebesgue (définition 14.249), nous avons la définition d'aires dans $\mathbb{R}^2$ et de volumes dans $\mathbb{R}^3$. Dans tout ce qui suit, nous considérons toujours la tribu de Lebesgue, la mesure de Lebesgue, et l'intégrale de Lebesgue correspondante.

DEFooPZRDooWbbBXy

Définition 20.21.
*L'**aire** de la partie mesurable S de $\mathbb{R}^2$ est le nombre*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_S \tag{20.71}$$

au sens de l'intégrale pour la mesure de Lebesgue de la fonction caractéristique de la partie S.

Définition 20.22.
*Le **volume** de la partie mesurable V de $\mathbb{R}^3$ est le nombre*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_V \tag{20.72}$$

au sens de l'intégrale pour la mesure de Lebesgue de la fonction caractéristique de la partie V.

Ceci est bien beau, mais ne permet pas de définir l'aire d'une surface dans $\mathbb{R}^3$, ni une longueur dans $\mathbb{R}^2$. Nous n'avons pas encore défini ce que nous appelons une surface dans $\mathbb{R}^3$, mais selon toute définition raisonnable, si S en est une, elle sera négligeable au sens de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^3$ et nous aurons toujours

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_S = 0. \tag{20.73}$$

L'objet de ce chapitre sera de donner un sens aux notions de longueurs dans $\mathbb{R}^2$, de surfaces dans $\mathbb{R}^3$ et d'y définir des intégrales permettant de définir longueurs et aires.

20.4.1 Quelques aires faciles

Nous nous souvenons de la proposition 10.49 qui donnait une bonne propriété du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. Nous en donnons une autre.

LEMooVHGKooDjcfOL

Lemme 20.23.
L'aire d'une droite dans $\mathbb{R}^2$ est nulle.

Démonstration. Nous considérons la mesure le Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ et une droite A dans $\mathbb{R}^2$.

La mesure dans $\mathbb{R}^2$ est donné par la définition 14.249 qui demande de calculer les intégrales (14.754) :

$$(\lambda \otimes \lambda)(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\big(A_2(x)\big) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\big(A_1(y)\big) d\lambda(y) \tag{20.74}$$

EQooUTAHooUyFScq

où $A_2(x) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x,y) \in A\}$ et $A_1(y) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x,y) \in A\}$.

En vertu du lemme 12.152, cette droite est soit d'équation $y = ax + b$, soit d'équation $x = a$.

(1) **Droite $y = ax + b$** Dans ce cas, $A_2(x) = \{ax + b\}$. C'est un singleton et nous avons $\lambda\big(A_2(x)\big) = 0$ pour tout x. Nous avons donc $(\lambda \otimes \lambda)(A) = 0$.

(2) **Droite $x = a$** Nous utilisons la seconde possibilité laissée par l'égalité (20.74). L'ensemble A_1 est facile à déterminer : $A_1(y) = \{a\}$ pour tout y. Donc $\lambda\big(A_1(y)\big) = 0$ pour tout y, et l'intégrale est nulle.

□

Remarque 20.24.
Dans la preuve de 20.23, nous aurions pu faire le cas $x = a$ en utilisant la première formule. Dans ce cas nous serions partis de

$$A_2(x) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } x = a \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases} \tag{20.75}$$

et donc de

$$\lambda\big(A_2(x)\big) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{20.76}$$

Le lemme 14.172 nous dit que l'intégrale de A_2 sur $\mathbb{R}$ est nulle.

DEFooDTFCooCTdaDO

Définition 20.25.
*Soient a, u_1 et u_2 dans $\mathbb{R}^2$. Le **parallélogramme** basé en a formé sur u_1 et u_2 est l'ensemble*

$$\{a + su_1 + tu_2 \text{ tel que } 0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant s \leqslant 1\}. \tag{20.77}$$

Assez souvent, nous supposerons que u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.

PROPooAVVNooOOlSzr

Proposition 20.26.
L'aire[5] *du parallélogramme*[6] *basé en a et formé sur u et v (que nous supposons n'être pas colinéaires) est donnée par*

$$\|u \times v\| = |u_1v_2 - v_1u_2|. \tag{20.78}$$

Démonstration. En vertu de la définition 20.21 d'une aire, le nombre à calculer est $\int_D 1 d\lambda$ où

$$D_0 = \{a + xu + yv \text{ tel que } x \in [0,1], y \in [0,1]\}. \tag{20.79}$$

En posant

$$D = \{a + xu + yv \text{ tel que } x \in]0,1[, y \in]0,1[\}, \tag{20.80}$$

nous avons

$$\int_{D_0} d\lambda = \int_D d\lambda, \tag{20.81}$$

parce que ce que nous avons enlevé sont des segments de droites alors que les droites sont de mesure nulle (lemme 20.23).

Nous considérons la paramétrisation

$$\begin{aligned} \varphi\colon]0,1[\times]0,1[&\to D \\ (x,y) &\mapsto a + xu + yv. \end{aligned} \tag{20.82}$$

Pour le théorème 14.282, nous devons montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme. Comme nous sommes un peu fatigués, nous allons seulement prouver ϕ est injective[7]. Supposons que $\phi(x_1, x_2) = \phi(y_1, y_2)$. Alors

$$(x_1 - x_2)u + (y_1 - y_2)v = 0. \tag{20.83}$$

Si $y_1 - y_2 = 0$, alors $x_1 - x_2 = 0$ et on est bon. Sinon,

$$v = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}u \tag{20.84}$$

Vu que les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, nous en déduisons que $x_1 - x_2 = 0$ et on est encore bon.

Nous utilisons la formule (14.860) de changement de variable avec la fonction ϕ. Le jacobien à calculer est

$$J = \det \begin{pmatrix} (\partial_x\phi_1)(x,y) & (\partial_x\phi_2)(x,y) \\ (\partial_y\phi_1)(x,y) & (\partial_y\phi_2)(x,y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = |u_1v_2 - v_1u_2|. \tag{20.85}$$

Le lien avec le produit vectoriel est un petit abus de notation : il s'agit du produit vectoriel entre $(u1, u2, 0)$ et $(v_1, v_2, 0)$ qui peut être obtenu en utilisant directement la formule de définition (10.114). □

[5] Définition 20.21.
[6] Définition 20.25.
[7] Pour le reste, écrivez l'inverse explicitement, et prouvez que c'est C^1. Si ça pose problème, écrivez-moi parce que je n'ai pas vérifié.

20.5 Autres théorèmes de points fixes

SECooDWMPooWZgzRZ

En termes de théorème de points fixes nous avons déjà vu le théorème de Picard 17.34. Voir aussi le thème 65.

20.5.1 Brouwer

subSecZCCmMnQ

Proposition 20.27.
Soit $f\colon [a,b]\to[a,b]$ une fonction continue. Alors f accepte un point fixe.

Démonstration. En effet si nous considérons $g(x)=f(x)-x$ alors nous avons $g(a)=f(a)-a\geqslant 0$ et $g(b)=f(b)-b\leqslant 0$. Si $g(a)$ ou $g(b)$ est nul, la proposition est démontrée ; nous supposons donc que $g(a)>0$ et $g(b)<0$. La proposition découle à présent du théorème des valeurs intermédiaires 9.95. □

Exemple 20.28.
La fonction $x\mapsto\cos(x)$ est continue entre $[-1,1]$ et $[-1,1]$. Elle admet donc un point fixe. Par conséquent il existe (au moins) une solution à l'équation $\cos(x)=x$. △

PROPooBRZCooLvscEf

Proposition 20.29 (Théorème de rétraction[649])**.**
Il n'existe pas d'applications $g\colon \overline{B(0,1)B(0,1)}\to$ qui soit de classe C^1 et qui soit l'identité sur $\partial B(0,1)$.

Démonstration. En plein d'étapes.

(1) **Définition de l'application F** Nous définissons la fonction

$$\begin{aligned}F\colon \overline{B(0,1)}\times[0,1]&\to\overline{B(0,1)}\\(x,t)&\mapsto(1-t)x+tg(x).\end{aligned}\tag{20.86}$$

Lorsque t est fixé, nous notons

$$\begin{aligned}F_t\colon \overline{B(0,1)}&\to\overline{B(0,1)}\\x&\mapsto F(x,t).\end{aligned}\tag{20.87}$$

Nous avons $F_0=\mathrm{Id}\,|_{\overline{B(0,1)}}$ et $F_1=g$. De plus, nous avons $F(x,t)=x$ pour tout $x\in\partial B(0,1)$ et pour tout $t\in[0,1]$.

(2) **définition de V** Nous posons[8]

$$\begin{aligned}V\colon[0,1]&\to\mathbb{R}\\t&\mapsto\int_{B(0,1)}\det(dF_t)_x dx.\end{aligned}\tag{20.88}$$

En ce qui concerne la différentielle de F_t, nous avons $F_t(x)=(1-t)x+tg(x)$. La différentielle de $x\mapsto x$ est $v\mapsto v$ (lemma 10.307), et donc

$$(dF_t)_x=(1-t)\,\mathrm{Id}+tdg_x.\tag{20.89}$$

Le déterminant de cela est un polynôme en t.

(3) **$V(1)=0$** Vu que $g(x)\in\partial B(0,1)$, nous avons $g(x)\cdot g(x)=\|g(x)\|^2=1$. En utilisant la proposition 10.323, pour tout $h\in\mathbb{R}^n$ nous avons :

$$2g(x)\cdot(dg_x)(h)=0.\tag{20.90}$$

Autrement dit, l'image de dg_x est dans $g(x)^\perp$, qui est de dimension plus petite que n (parce que $g(x)\neq 0$). Donc dg_x n'est pas de rang maximum ; bref : son déterminant est nul.

Vu que $F_1(x)=F(1,x)=g(x)$, nous avons bien $V(1)=0$.

(4) **$\det\Big((dF_t)_x\Big)>0$ si t est assez petit**

Supposons le contraire : pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $t_n\in\,]0,1/n]$ et $x_n\in\overline{B(0,1)}$ tels que $\det\big((dF_{t_n})_{x_n}\big)\leqslant 0$. La suite (x_n) étant dans le compact $\overline{B(0,1)}$, elle admet une sous-suite convergente : il existe une

[8] L'intégrale est définie en (14.539), et la mesure de Lebesgue en 14.249. Mais en principe, ça fait longtemps que vous êtes à l'aise avec ça.

application strictement croissante $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et un $x \in \overline{B(0,1)}$ tels que $x_{\phi(n)} \to x$. Notez au passage que $t_{\phi(n)} \to 0$.

Pour tout n nous avons

$$\det\Big(\big(dF_{t_{\phi(n)}}\big)_{x_{\phi(n)}}\Big) \leqslant 0. \tag{20.91}$$

EqooABSWooUErEXU

Vu que l'application $x \mapsto \det\big((dF_t)_x\big)$ est continue en t et en x, nous pouvons passer à la limite dans (20.91) :

$$\det\Big((dF_0)_x\Big) \leqslant 0. \tag{20.92}$$

Mais comme $dF_0 = \mathrm{Id}$, nous avons en réalité $\det\big((dF_0)_x\big) > 0$. Contradiction. Nous en déduisons que il existe $m_1 > 0$ tel que pour tout $t < m_1$ et pour tout $x \in \overline{B(0,1)}$, nous avons

$$\det\Big((dF_t)_x\Big) > 0. \tag{20.93}$$

(5) **F_t est injective si t est assez petit**

Soient $t < 1/N$ et $x, y \in \overline{B(0,1)}$ tels que $F(x,t) = F(y,t)$. Nous avons

$$0 = F(x,t) - F(y,t) = (1-t)(x-y) + t\big(g(x) - g(y)\big). \tag{20.94}$$

En passant aux normes et en utilisant le théorème des accroissements finis 10.337,

$$(1-t)\|x-y\| = t\|g(x) - g(y)\| \leqslant tM\|x-y\| \tag{20.95}$$

où $M = \sup_{x\in\overline{B(0,1)}} \|dg_x\|$. En simplifiant par $\|x-y\|$, nous trouvons $tM/(1-t) \geqslant 1$ ou encore

$$t \geqslant \frac{1}{M+1}. \tag{20.96}$$

Autrement dit, dès que $t < 1/(M+1)$, l'application F_t est injective.

(6) **t est assez petit**

Nous posons

$$\alpha = \min\{m_1, \frac{1}{M+1}\}. \tag{20.97}$$

Dès que $t < \alpha$,

- F_t est injective,
- $\det\Big((dF_t)_x\Big) > 0$.

Cela étant dit, nous continuons la preuve.

(7) **Un peu de relations ensemblistes**

Nous considérons $t < \alpha$ et $x \in \partial B(0,1)$. Nous avons alors $F(x,t) = x$. Nous avons alors

$$F\big(\partial B(0,1), t\big) \cup B(0,1) = \overline{B(0,1)}, \tag{20.98}$$

qui est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

Vu que F_t est injective, nous pouvons utiliser la formule ensembliste (1.14) :

SUBEQSooLWJLooBEVkro

$$\begin{aligned} F\big(B(0,1),t\big) &= F\big(\overline{B(0,1)},t\big) \setminus F\big(\partial B(0,1),t\big) && \text{(20.99a)}\\ &= F\big(\overline{B(0,1)},t\big) \setminus \partial B(0,1) && \text{(20.99b)}\\ &= F\big(\overline{B(0,1)},t\big) \cap B(0,1), && \text{(20.99c)} \end{aligned}$$

parce que $X \setminus \partial B(0,1) = X \cap B(0,1)$.

(8) **$F\big(B(0,1),t\big)$ est ouvert**

L'application F est de classe C^1 et injective. Donc $(dF_t)_x$ est continue et injective (proposition 10.292). Soit $x \in B(0,1)$. Par le théorème d'inversion locale 17.47 il existe un ouvert $V_x \subset B(0,1)$ et un ouvert W_x de $\mathbb{R}^n$ tels que $F_t\colon V_x \to W_x$ soit une bijection. Nous avons donc

$$F_t\big(B(0,1)\big) = \bigcup_{x\in B(0,1)} F_t(V_x) = \bigcup_{x\in B(0,1)} W_x. \tag{20.100}$$

EQooDCMAooVJnhxy

Une union d'ouverts étant ouverte, nous en déduisons que $F\big(B(0,1),t\big)$ est ouvert.

(9) **Un peu de topologie induite** Nous considérons l'espace $B(0,1)$ avec la topologie induite de $\mathbb{R}^n$.

(9a) **C'est fermé**
La partie $F\big(\overline{B(0,1)},t\big)$ est l'image d'un compact par une fonction continue. C'est donc un compact (et donc fermé) par le théorème 7.275. Du coup la proposition 7.30 dit que la partie

$$F\big(B(0,1),t\big)=F\big(\overline{B(0,1)},t\big)\cap B(0,1) \tag{20.101}$$

est fermée dans $B(0,1)$.

(9b) **C'est ouvert**
La partie $F\big(B(0,1),t\big)$ est ouverte (voir (20.100)) et contenue dans $B(0,1)$ (voir (20.99)). Elle est donc un ouvert pour la topologie de $B(0,1)$.

(9c) **Et donc c'est ...**
La partie $F\big(B(0,1),t\big)$ est ouvert et fermée dans $B(0,1)$. Par connexité, la proposition 7.105(4) conclu que

$$F\big(B(0,1),t\big)=B(0,1). \tag{20.102}$$

(10) **Volume de la boule**

Nous sommes toujours avec $t<\alpha$. Nous avons donc $\det\big((dF_t)_x\big)>0$ pour tout x. Nous calculons le volume de la boule $B(0,1)$ en introduisant la fonction constante 1. En utilisant le changement de variables[9] $F_t\colon B(0,1)\to B(0,1)$:

$$\int_{B(0,1)}1dx=\int_{F_t^{-1}\left(B(0,1)\right)}\underbrace{(1\circ F_t)(x)}_{=1}|\det\big((dF_t)_x\big)|dx \tag{20.103a}$$

$$=\int_{B(0,1)}\det\big((dF_t)_x\big)dx \tag{20.103b}$$

$$=V(t). \tag{20.103c}$$

Nous venons de prouver que sur $t\in[0,\alpha[$, la fonction $V(t)$ est en réalité une constante égale au volume de la boule unité.

(11) **Et enfin...**

Vu que V est un polynôme et que V est constant sur un intervalle, V est constante partout. En particulier, $V(1)$ est encore égal au volume de le boule. Ah ben non parce que nous avions démontré plus haut que $V(1)=0$.

Contradiction, fin de l'histoire.

□
PropDRpYwv

Proposition 20.30 (Brouwer dans $\mathbb{R}^n$ version C^∞)**.**
Toute application $f\colon\overline{B(0,1)}\to\overline{B(0,1)}$ de classe C^∞ admet un point fixe.

Démonstration. Supposons que f ne possède pas de points fixes. Alors pour tout $x\in\overline{B(0,1)}$ nous considérons la demi-droite issue de $f(x)$ et passant par x (cette demi-droite existe parce que x et $f(x)$ sont supposés distincts). Cette demi-droite intersecte $\partial B(0,1)$ en un point que nous appelons $g(x)$. Prouvons que cette fonction est C^k dès que f est C^k (y compris avec $k=\infty$).

L'application

$$g\colon\overline{B(0,1)}\to\partial B(0,1) \tag{20.104}$$

est construite comme solution du système

$$\begin{cases}g(x)-f(x)=\lambda\big(x-f(x)\big) & (20.105a)\\ \|g(x)\|^2=1 & (20.105b)\\ \lambda\geqslant 0. & (20.105c)\end{cases}$$

En substituant nous obtenons l'équation

$$P_x(\lambda)=\|\lambda\big(x-f(x)\big)+f(x)\|^2-1=0, \tag{20.106}$$

[9] Théorème 14.282.

ou encore

$$\lambda^2\|x-f(x)\|^2+2\lambda\big(x-f(x)\big)\cdot f(x)+\|f(x)\|^2-1=0. \tag{20.107}$$

En tenant compte du fait que $\|f(x)\|<1$ (parce que les images de f sont dans $\mathcal{B}$), nous trouvons que $P_x(0)\leqslant 0$ et $P_x(1)\leqslant 0$. De même $\lim_{\lambda\to\infty}P_x(\lambda)=+\infty$. Par conséquent le polynôme de second degré P_x a exactement deux racines distinctes $\lambda_1\leqslant 0$ et $\lambda_2\geqslant 1$. La racine que nous cherchons est la seconde. Le discriminant est strictement positif, donc pas besoin d'avoir peur de la racine dans

$$\lambda(x)=\frac{-\big(x-f(x)\big)\cdot f(x)+\sqrt{\Delta_x}}{\|x-f(x)\|^2} \tag{20.108}$$

où

$$\Delta_x=4\Big(\big(x-f(x)\big)\cdot f(x)\Big)^2-4\|x-f(x)\|^2\big(\|f(x)\|^2-1\big). \tag{20.109}$$

Notons que la fonction $\lambda(x)$ est C^k dès que f est C^k ; et en particulier elle est C^∞ si f l'est.

En résumé la fonction g ainsi définie vérifie deux propriétés :

(1) $g\colon\overline{B(0,1)}\to\overline{B(0,1)}$

(2) elle est C^∞ ;

(3) elle est l'identité sur $\partial B(0,1)$.

Cela viole le théorème de contraction 20.29. Contradiction, fin de la preuve. □

20.31.
Voici comment on démontre le théorème de rétraction dans le cas C^∞ en utilisant Stokes.

La suite de la preuve consiste à montrer qu'une telle application $g\colon B\to\partial B$ ne peut pas exister[10]. Nous considérons une forme de volume ω sur ∂B : l'intégrale de ω sur ∂B est l'aire de ∂B qui est non nulle. Nous avons alors la contradiction suivante :

$$0<\int_{\partial B}\omega=\int_{\partial B}g^*\omega=\int_B d(g^*\omega)=\int_B g^*(d\omega)=0 \tag{20.110}$$

Justifications :

- L'intégrale $\int_{\partial B}\omega$ est l'aire de ∂B et est donc strictement positive.
- La fonction g est l'identité sur ∂B. Nous avons donc $\omega=g^*\omega$.
- Le lemme 27.95.
- La forme ω est de volume, par conséquent de degré maximum et $d\omega=0$.

Un des points délicats pour démontrer le théorème de Brouwer en version continue est de se ramener au cas de fonctions C^∞. Pour la régularisation par convolution, voir [650] ; pour celle utilisant le théorème de Weierstrass, voir [651].

ThoRGjGdO

Théorème 20.32 (Brouwer dans $\mathbb{R}^n$, version continue)**.**
Toute application continue[11] $\overline{B(0,1)}\to\overline{B(0,1)}$ *admet un point fixe.*

Démonstration. Soit une application continue $f\colon\overline{B(0,1)}\to\overline{B(0,1)}$. Nous commençons par définir une suite de fonctions

$$f_k(x)=\frac{f(x)}{1+\frac{1}{k}}. \tag{20.111}$$

Nous avons $\|f_k-f\|_\infty\leqslant\frac{1}{1+k}$ où la norme est la norme uniforme sur B. Par le théorème de Weierstrass 12.445 il existe une suite de fonctions $C^\infty(B,\mathbb{R})$ que nous nommons g_k telles que

$$\|g_k-f_k\|_\infty\leqslant\frac{1}{1+k}. \tag{20.112}$$

[10] Notons qu'il n'existe pas non plus de rétractions continues sur B, mais pour le montrer il faut utiliser d'autres méthodes que Stokes, ou alors présenter les choses dans un autre ordre.

[11] Une fonction continue sur un fermé de $\mathbb{R}^n$ est à comprendre pour la topologie induite.

Vérifions que cette fonction g_k soit bien une fonction qui prend ses valeurs dans B :

$$\|g_k(x)\| \leqslant \|g_k(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x)\| \tag{20.113a}$$
$$\leqslant \frac{1}{1+k} + \frac{\|f(x)\|}{1+\frac{1}{k}} \tag{20.113b}$$
$$\leqslant \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \tag{20.113c}$$
$$= 1. \tag{20.113d}$$

Par la version C^∞ du théorème (proposition 20.30), g_k admet un point fixe que l'on nomme x_k.

Étant donné que x_k est dans le compact B, quitte à prendre une sous-suite nous supposons que la suite (x_k) converge vers un élément $x \in B$. Nous montrons maintenant que x est un point fixe de f :

$$\|f(x) - x\| = \|f(x) - g_k(x) + g_k(x) - x_k + x_k - x\| \tag{20.114a}$$
$$\leqslant \|f(x) - g_k(x)\| + \underbrace{\|g_k(x) - x_k\|}_{=0} + \|x_k - x\| \tag{20.114b}$$
$$\leqslant \frac{1}{1+k} + \|x_k - x\|. \tag{20.114c}$$

En prenant le limite $k \to \infty$ le membre de droite tend vers zéro et nous obtenons $f(x) = x$. □

20.5.2 Théorème de Schauder

Une conséquence du théorème de Brouwer est le théorème de Schauder qui est valide en dimension infinie.
ThovHJXIU

Théorème 20.33 (Théorème de Schauder[652])**.**
Soit E, un espace vectoriel normé, K un convexe compact de E et $f\colon K \to K$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe.

Démonstration. Étant donné que $f\colon K \to K$ est continue, elle y est uniformément continue. Si nous choisissons ϵ alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \epsilon \tag{20.115}$$

dès que $\|x - y\| \leqslant \delta$. La compacité de K permet de choisir un recouvrement fini par des ouverts de la forme

$$K \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant p} B(x_j, \delta) \tag{20.116}$$
EqKNPUVR

où $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset K$. Nous considérons maintenant $L = \text{Span}\{f(x_j) \text{ tel que } 1 \leqslant j \leqslant p\}$ et

$$K^* = K \cap L. \tag{20.117}$$

Le fait que K et L soient convexes implique que K^* est convexe. L'ensemble K^* est également compact parce qu'il s'agit d'une partie fermée de K qui est compact (lemme 7.121). Notons en particulier que K^* est contenu dans un espace vectoriel de dimension finie, ce qui n'est pas le cas de K.

Nous allons à présent construire une sorte de partition de l'unité subordonnée au recouvrement (20.116) sur K (voir le théorème 27.88). Nous commençons par définir

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geqslant \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{20.118}$$

pour chaque $1 \leqslant j \leqslant p$. Notons que ψ_j est une fonction positive, nulle en-dehors de $B(x_j, \delta)$. En particulier la fonction suivante est bien définie :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^p \psi_k(x)} \tag{20.119}$$

et nous avons $\sum_{j=1}^p \varphi_j(x) = 1$. Les fonctions φ_j sont continues sur K et nous définissons finalement

$$g(x) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(x) f(x_j). \tag{20.120}$$

Pour chaque $x \in K$, l'élément $g(x)$ est une combinaison des éléments $f(x_j) \in K^*$. Étant donné que K^* est convexe et que la somme des coefficients $\varphi_j(x)$ vaut un, nous avons que g prend ses valeurs dans K^* par la proposition 11.29.

Nous considérons seulement la restriction $g\colon K^* \to K^*$ qui est continue sur un compact contenu dans un espace vectoriel de dimension finie. Le théorème de Brouwer 20.32 nous enseigne alors que g a un point fixe. Nous nommons y ce point fixe. Notons que y est fonction du ϵ choisi au début de la construction, via le δ qui avait conditionné la partition de l'unité.

Nous avons EqoXuTzE

$$\begin{aligned} f(y) - y &= f(y) - g(y) && \text{(20.121a)}\\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j) && \text{(20.121b)}\\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \big(f(y) - f(x_j)\big). && \text{(20.121c)} \end{aligned}$$

Par construction, $\varphi_j(y) \neq 0$ seulement si $\|y - x_j\| \leqslant \delta$ et par conséquent seulement si $\|f(y) - f(x_j)\| \leqslant \epsilon$. D'autre part nous avons $\varphi_j(y) \geqslant 0$; en prenant la norme de (20.121) nous trouvons

$$\|f(y) - y\| \leqslant \sum_{j=1}^{p} \|\varphi_j(y)\big(f(y) - f(x_j)\big)\| \leqslant \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)\epsilon = \epsilon. \tag{20.122}$$

Nous nous souvenons maintenant que y était fonction de ϵ. Soit y_m le y qui correspond à $\epsilon = 2^{-m}$. Nous avons alors

$$\|f(y_m) - y_m\| \leqslant 2^{-m}. \tag{20.123}$$

L'élément y_m est dans K^* qui est compact, donc quitte à choisir une sous-suite nous pouvons supposer que y_m est une suite qui converge vers $y^* \in K$[12]. Nous avons les majorations

$$\|f(y^*) - y^*\| \leqslant \|f(y^*) - f(y_m)\| + \|f(y_m) - y_m\| + \|y_m - y^*\|. \tag{20.124}$$

Si m est assez grand, les trois termes du membre de droite peuvent être rendus arbitrairement petits, d'où nous concluons que

$$f(y^*) = y^* \tag{20.125}$$

et donc que f possède un point fixe. □

20.5.3 Théorème de Cauchy-Arzella

ThoHNBooUipgPX

Théorème 20.34 (Cauchy-Arzela[567]).
Nous considérons le système d'équation différentielles EqTXlJdH

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & \text{(20.126a)}\\ y(t_0) = y_0. & \text{(20.126b)} \end{cases}$$

avec $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, continue où U est ouvert dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Alors il existe un voisinage fermé V de t_0 sur lequel une solution C^1 du problème (20.126) existe.

Idée de la démonstration. Nous considérons $M = \|f\|_\infty$ et K, l'ensemble des fonctions M-lipschitziennes sur U. Nous prouvons que $(K, \|.\|_\infty)$ est compact. Ensuite nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi\colon K &\to K\\ \Phi(f)(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(u, f(u)\big)du. \end{aligned} \tag{20.127}$$

Après avoir prouvé que Φ était continue, nous concluons qu'elle a un point fixe par le théorème de Schauder 20.33. □

Remarque 20.35.
Quelques remarques.

[12] Notons que même dans la sous-suite nous avons $\|f(y_m) - y_m\| \leqslant 2^{-m}$, avec le même « m » des deux côtés de l'inégalité.

(1) Les théorèmes de Cauchy-Lipschitz et Cauchy-Arzella donnent des existences pour des équations différentielles du type $y' = f(t, y)$. Et si nous avons une équation du second ordre ? Alors il y a la méthode de la réduction de l'ordre qui permet de transformer une équation différentielle d'ordre élevé en un système d'ordre 1.

(2) Ces théorèmes posent des *conditions initiales* : la valeur de y est donnée en un point, et la méthode de la réduction de l'ordre permet de donner l'existence de solutions d'un problème d'ordre k en donnant les valeurs de $y(0)$, $y'(0)$, ...$y^{(k-1)}(0)$. C'est-à-dire de la fonction et de ses dérivées en un point. Rien n'est dit sur l'existence de *conditions aux bords*.

Ces deux points sont illustrés dans les exemples 32.20 et 32.21.

20.5.4 Théorème de Markov-Kakutani

Le théorème de Markov-Kakutani, nous donne l'existence d'une mesure de Haar sur un groupe compact.
ThoeJCdMP

Théorème 20.36 (Markov-Katutani[653]).
Soit E un espace vectoriel normé et L, une partie non vide, convexe, fermée et bornée de E'. Soit $T : L \to L$ une application linéaire et continue. Alors T a un point fixe.

Démonstration. Nous considérons un point $x_0 \in L$ et la suite

$$x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} T^i x_0. \tag{20.128}$$

La somme des coefficients devant les $T^i(x_0)$ étant 1, la convexité de L montre que $x_n \in L$. Nous considérons l'ensemble

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_m \text{ tel que } m \geqslant n\}}. \tag{20.129}$$

Le lemme 7.354 indique que C n'est pas vide, et de plus il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers un élément $x \in C$. Nous avons

$$\lim_{n \to \infty} x_{\sigma(n)}(v) = x(v) \tag{20.130}$$

pour tout $v \in E$. Montrons que x est un point fixe de T. Nous avons[13]

$$(Tx_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k)})(v) = \frac{1}{1+\sigma(k)} \sum_{i=0}^{\sigma(k)} (T^{i+1}x_0)(v) - \frac{1}{1+\sigma(k)} \sum_{i=0}^{\sigma(k)} (T^i x_0)(v) \tag{20.131a}$$

$$= \frac{1}{1+\sigma(k)} \sum_{i=0}^{\sigma(k)} (T^{i+1}x_0 - T^i x_0)(v) \tag{20.131b}$$

$$= \frac{1}{1+\sigma(k)} (T^{i+\sigma(k)+1}x_0 - x_0)(v) \qquad \text{somme télescopique.} \tag{20.131c}$$

En prenant la norme,

$$\|(Tx_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k)})v\| = \frac{1}{1+\sigma(k)} \left\| T^{\sigma(k)+1}x_0(v) - x_0(v) \right\| \tag{20.132a}$$

$$\leqslant \frac{2M}{\sigma(k)+1} \tag{20.132b}$$

où $M = \sum_{y \in L} \|y(v)\| < \infty$ parce que L est borné. En prenant $k \to \infty$ nous trouvons

$$\lim_{k \to \infty} \big(Tx_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k)}\big)v = 0, \tag{20.133}$$

ce qui signifie que $Tx = x$ parce que T est continue. □

[13] Je ne vois pas comment fonctionne ce passage si on suppose que T est affine et non linéaire.

20.6 Intégrales curvilignes

secintcurvi

20.6.1 Chemins de classe C^1

DEFooQTAWooOCmSJo

Définition 20.37 ([654]).
*Soit $p, q \in \mathbb{R}^n$. Un **chemin** C^1 **par morceaux** joignant p à q est une application continue*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \tag{20.134}$$

vérifiant :

(1) L'application $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est continue.

(2) Les extrémités : $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$

(3) Il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{r-1} < t_r = b$ telle que la restriction de γ sur chaque fermé $[t_i, t_{i+1}]$ est de classe C^1.

Pour être d'accord sur les définitions, quand on dit qu'une application est C^1 sur un fermé, c'est qu'elle est C^1 sur ce fermé, avec la topologie de ce fermé (induite[14] de $\mathbb{R}$). Autrement dit, toutes les limites et tous les ouverts qui interviennent dans la notion de « être C^1 » sont à prendre dans la topologie du fermé $[a_i, b_i]$.

Remarque 20.38.
Si a et b sont des points de $\mathbb{R}^n$, on peut créer le chemin particulier

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (1 - t)a + tb \tag{20.135}$$

qui relie ces points par un segment de droite.

Il existe des fonctions C^1 par morceaux qui ne sont pas C^1.

Proposition 20.39.
L'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x & si\ x \leqslant 0 \\ 2x & si\ x > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{20.136}$$

est C^1 par morceaux.
Elle n'est pas de classe C^1.

Démonstration. Le fait que f ne soit pas de classe C^1 est immédiat parce que sa dérivée n'est pas définie en zéro.

Pour montrer que f est C^1 par morceaux, nous définissons les deux fonctions

$$\begin{aligned} f_1\colon]-\infty, 0] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned} \tag{20.137}$$

et

$$\begin{aligned} f_2\colon [0, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x. \end{aligned} \tag{20.138}$$

Nous calculons la dérivée de f_1 en $x = 0$. C'est par définition

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}. \tag{20.139}$$

Attention : cette limite est à comprendre au sens de la topologie de $]-\infty, 0]$. Nous allons montrer que cette limite vaut 1, en remontant aux définitions pour le sport.

Posons $g(x) = f(x)/x$. Si V est un voisinage de 1 dans $\mathbb{R}$, il existe une boule $B(1, r)$ qui contient V. Nous allons trouver un $\epsilon > 0$ tel que $g\big(B(0, \epsilon) \setminus \{0\}\big) \subset B(1, r)$. Attention : à gauche c'est une boule au sens de la topologie induite. Au sens de la topologie normale, nous cherchons $\epsilon > 0$ tel que

$$g\Big(\big(B(0, \epsilon) \cap]-\infty, 0]\big) \setminus \{0\}\Big) \tag{20.140}$$

[14] Topologie induite, définition 7.27.

Bref, pour tout x dans cette boule, nous devons avoir $|g(x)-1|<r$. Vu que $x\in\,]-\infty,0]\setminus\{0\}$, nous avons $g(x)=1$ pour tout x. Et voilà, n'importe que ϵ fait l'affaire.

Nous avons prouvé que la dérivée de f_1 est donnée par

$$\begin{aligned} f_1'\colon\,]-\infty,0]&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto 1. \end{aligned} \tag{20.141}$$

Elle est continue. Nous laissons la démonstration de la continuité de f_1' au lecteur ; attention : continuité pour la topologie induite, toujours. Bref,f_1 est de classe C^1.

Nous démontrons de même que f_2 est de classe C^2 et que $f_2'(x)=2$ pour tout x. □

20.6.2 Intégrer une fonction

DEFooFAYUooCaUdyo

Définition 20.40.
*Soit $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction continue, et $\gamma:[a,b]\to D$ un chemin C^1. On définit **l'intégrale de f sur γ** par*

$$\int_\gamma f\,ds=\int_\gamma f=\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt. \tag{20.142}$$ EqhJGRcb

Note : dans le cadre de l'analyse complexe, ce n'est pas exactement cette définition. Voir 26.6.

Exemple 20.41.
Soit l'hélice

$$\begin{aligned} \sigma\colon[0,2\pi]&\to\mathbb{R}^3\\ t&\mapsto\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ t\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{20.143}$$

et la fonction $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. L'intégrale de f sur σ est

$$\begin{aligned} \int_\sigma f&=\int_0^{2\pi}(\cos^2t+\sin^2t+t^2)\|\sigma'(t)\|dt\\ &=\int_0^{2\pi}(1+t^2)\sqrt{2}dt\\ &=\sqrt{2}\left[t+\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi}\\ &=\sqrt{2}\left(2\pi+\frac{8\pi^3}{3}\right). \end{aligned} \tag{20.144}$$

△

Remarque 20.42.
Si $f=1$, alors nous tombons sur

$$\int_\gamma ds=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt, \tag{20.145}$$

Nous verrons par le théorème 21.9 que cette dernière intégrale est la longueur de la courbe. Il est un fait général que l'intégrale de la fonction 1 sur un ensemble en donne la « mesure ». Cela est à mettre en rapport avec le lemme 14.175 en gardant en tête que $\int_\gamma 1$ n'est pas la mesure de l'image de γ dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 20.43 (Indépendence en le paramétrage)**.**
La valeur de l'intégrale de f sur γ ne dépend pas du paramétrage (équivalent ou pas) choisi.

Démonstration. Soit donc un chemin $\gamma\colon[c,d]\to\mathbb{R}^3$ ainsi que $\varphi\colon[c,d]\to[a,b]$, un reparamétrage de classe C^1, strictement monotone et le chemin σ défini par $\gamma(s)=\sigma\big(\varphi(s)\big)$ avec $s\in[c,d]$. En supposant que $\varphi'(s)\geqslant 0$, nous avons

$$\begin{aligned} I=\int_\gamma f&=\int_c^d f\big(\gamma(s)\big)\|\gamma'(s)\|ds\\ &=\int_c^d f\Big(\sigma\big(\varphi(s)\big)\Big)\|\sigma'\big(\varphi(s)\big)\|\,|\varphi'(s)|ds. \end{aligned} \tag{20.146}$$

Pour cette intégrale, nous posons $t = \varphi(s)$, et par conséquent $dt = \varphi'(s)ds$. Étant donné que $\varphi'(s) \geqslant 0$, nous pouvons supprimer les valeurs absolues, et obtenir

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f\big(\sigma(t)\big)\|\sigma'(t)\|dt \\ &= \int_a^b f\big(\sigma(t)\big)\|\sigma'(t)\|dt \\ &= \int_\sigma f. \end{aligned} \tag{20.147}$$

Essayez de faire le cas $\varphi'(s) \leqslant 0$. □

RemiqswPd

Remarque 20.44.
Attention : les intégrales sur des chemins dans $\mathbb{C}$ ne sont la même chose. En effet $\mathbb{C}$ doit être souvent plutôt traité comme $\mathbb{R}$ que comme $\mathbb{R}^2$. Si γ est un chemin dans $\mathbb{C}$, l'intégrale

$$\int_\gamma f \tag{20.148}$$

doit être comprise comme une généralisation de $\int_a^b f(x)dx$ et non comme l'intégrale sur un chemin. La différence est qu'en retournant les bornes d'une intégrale usuelle sur $\mathbb{R}$ on change le signe, alors qu'en retournant un chemin dans $\mathbb{R}^2$, on ne change pas. Bref, la définition est que si $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin, alors

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt, \tag{20.149}$$

sans valeur absolue autour de $\gamma'(t)$.

20.6.3 Intégrer un champ de vecteurs

DEFooSHHFooVdsxMf

Définition 20.45.
*Un **champ de vecteur** est une application $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On définit l'intégrale de G sur un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ par*

$$\int_\gamma G \stackrel{def}{=} \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt.$$

Remarque 20.46.
Cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi, mais le signe change selon le sens du chemin.

20.6.4 Intégrer une forme différentielle sur un chemin

La formule d'intégration d'un champ de vecteur[15],

$$\int_\gamma G = \int_{[a,b]} \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt, \tag{20.150}$$

contient quelque chose d'intéressant : la combinaison $\langle G(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$. Cette combinaison sert à transformer le vecteur tangent $\gamma'(t)$ en un nombre en utilisant le produit scalaire avec le vecteur $G(\gamma(t))$.

Si G est un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$, et si $x \in \mathbb{R}^n$, nous pouvons utiliser l'isomorphisme musical (définition 12.676)

$$\begin{aligned} G_x^\flat\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle G(x), v\rangle \end{aligned} \tag{20.151}$$

pour écrire de façon plus compacte :

$$\int_\gamma G = \int_{[a,b]} G^\flat_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt. \tag{20.152}$$

DEFooRMHGooFtMEPB

Définition 20.47.
*Soient une forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^n$ et un chemin de classe C^1 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. L'**intégrale** de ω sur γ est définie par*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\gamma'(t)dt \tag{20.153}$$

EqEFIZyEe

[15] Définition 20.45.

Remarque 20.48.
Cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi, mais le signe change selon le sens du chemin.

20.6.5 Intégration d'une forme différentielle sur un chemin

Les formes intégrales que nous avons déjà vues sont celles de fonctions et de champs de vecteur sur des chemins. Si $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$ est le chemin, les formules sont

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_{[a,b]} f\big(\gamma(t)\big)\|\gamma'(t)\|dt\\ \int_\gamma G &= \int_{[a,b]}\langle G\big(\gamma(t)\big),\gamma'(t)\rangle dt.\end{aligned}\tag{20.154}$$

Dans les deux cas, le principe est que nous disposons de quelque chose (la fonction f ou le vecteur G), et du vecteur tangent $\gamma'(t)$, et nous essayons d'en tirer un nombre que nous intégrons. Lorsque nous avons une 1-forme, la façon de l'utiliser pour produire un nombre avec le vecteur tangent est évidemment d'appliquer la 1-forme au vecteur tangent. La définition suivante est donc naturelle.

Définition 20.49.
*Soit $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$, un chemin de classe C^1 tel que son image est contenue dans le domaine D. Si ω est une 1-forme différentielle sur D, nous définissons l'**intégrale de ω le long de** γ le nombre*

$$\begin{aligned}\int_\gamma\omega &= \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt\\ &= \int_a^b\Big[a_1\big(\gamma(t)\big)\gamma_1'(t)+\ldots+a_n\big(\gamma(t)\big)\gamma_n'(t)\Big]dt.\end{aligned}\tag{20.155}$$

Cette définition est une bonne définition parce que si on change le paramétrage du chemin, on ne change pas la valeur de l'intégrale, c'est la proposition suivante.

Proposition 20.50.
Si γ et β sont des chemins équivalents, alors

$$\int_\gamma\omega=\int_\beta\omega,\tag{20.156}$$

c'est-à-dire que l'intégrale est invariante sous les reparamétrages du chemin.

Démonstration. Deux chemins sont équivalents quand il existe un difféomorphisme C^1 $h\colon[a,b]\to[c,d]$ tel que $\gamma(t)=(\beta\circ h)(t)$. En remplaçant γ par $(\beta\circ h)$ dans la définition de $\int_\gamma\omega$, nous trouvons

$$\int_a^b\omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt=\int_a^b\omega_{(\beta\circ h)(t)}\big((\beta\circ h)'(t)\big)dt.\tag{20.157}$$

Un changement de variable $u=h(t)$ transforme cette dernière intégrale en $\int_\beta\omega$, ce qui prouve la proposition. □

Remarque 20.51.
Si γ est une somme de chemins, $\gamma=\gamma^{(1)}+\ldots+\gamma^{(n)}$, où chacun des $\gamma^{(i)}$ est un chemin, alors

$$\int_\gamma\omega=\sum_{i=1}^n\int_{\gamma_i}\omega\tag{20.158}$$

parce que ω est linéaire.

Remarque 20.52.
Si $-\gamma$ est le chemin

$$\begin{aligned}-\gamma\colon[a,b]&\to\mathbb{R}^n\\ t&\mapsto\gamma\big(b-(t-a)\big),\end{aligned}\tag{20.159}$$

alors

$$\int_{-\gamma}\omega=-\int_\gamma\omega,\tag{20.160}$$

c'est-à-dire que si l'on parcours le chemin en sens inverse, alors on change le signe de l'intégrale.

L'intégrale d'une forme différentielle sur un chemin est compatible avec l'intégrale déjà connue d'un champ de vecteur sur le chemin parce que si G est un champ de vecteurs,

$$\int_\gamma G^\flat = \int_\gamma G. \tag{20.161}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int_\gamma G^\flat &= \int_a^b G^\flat_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \\ &= \int_a^b \big[G_1(\gamma(t))dx_1 + \ldots + G_n(\gamma(t))dx_n\big]\big(\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)\big) \\ &= \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \\ &= \int_\gamma G.\end{aligned} \tag{20.162}$$

Proposition 20.53.
Soit $\omega = df$, une 1-forme exacte et continue sur le domaine D. Alors la valeur de $\int_\gamma df$ ne dépend que des valeurs de f aux extrémités de γ.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega = \int_\gamma df &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\gamma(t)\big)\gamma_i'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\Big((f\circ\gamma)(t)\Big)dt \\ &= (f\circ\gamma)(b) - (f\circ\gamma(a)).\end{aligned} \tag{20.163}$$

□

20.6.6 Interprétation physique : travail

Définition 20.54 ([655]).
*Une force $F\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est **conservative** si elle dérive d'un potentiel, c'est-à-dire si il existe une fonction $V \in C^1(D, \mathbb{R})$ telle que*

$$F(x) = (\nabla V)(x). \tag{20.164}$$

Étant donné que F est un champ de vecteurs, nous avons une forme différentielle associée $F^\flat$,

$$F^\flat_x\colon v \mapsto \langle F(x), v\rangle. \tag{20.165}$$

Lemme 20.55.
Le champ F est conservatif si et seulement si la 1-forme différentielle $F^\flat$ est exacte.

Démonstration. Supposons que la force F soit conservative, c'est-à-dire qu'il existe une fonction V telle que $F = \nabla V$. Dans ce cas, il est facile de prouver que $F^\flat$ est exacte et est donnée par $F^\flat_x = dV(x)$. En effet,

$$\begin{aligned}F^\flat_x(v) &= \langle F(x), v\rangle \\ &= F_1(x)v_1 + \ldots + F_n(x)v_n \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)v_1 + \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)v_n \\ &= dV(x)v.\end{aligned} \tag{20.166}$$

Pour le sens inverse, supposons que $F^\flat$ soit exacte. Dans ce cas, nous avons une fonction V telle que $F^\flat = dV$. Il est facile de prouver qu'alors, $F = \nabla V$. □

En résumé, nous avons deux façons équivalentes d'exprimer que la force F dérive du potentiel V : soit nous disons $F = \nabla V$, soit nous disons $F^\flat = dV$.

Proposition 20.56.
Si F est une force conservative, alors le travail[16] de F lors d'un déplacement ne dépend pas du chemin suivi.

[16] Voir [656].

Démonstration. Le travail d'une force le long d'un chemin n'est autre que l'intégrale de la force le long du chemin, et le calcul est facile :

$$W_\gamma(F) = \int_\gamma F = \int_\gamma dV = V\big(\gamma(b)\big) - V\big(\gamma(a)\big). \tag{20.167}$$

Donc si β est un autre chemin tel que $\beta(a) = \gamma(a)$ et $\beta(b) = \gamma(b)$, nous avons $W_\beta(F) = W_\gamma(F)$. □

20.6.7 Intégrer un champ de vecteurs sur un bord en 2D

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ est tel que ∂D est une variété de dimension 1 et tel que D accepte un champ de vecteur normal extérieur unitaire ν. Si nous voulons définir

$$\int_{\partial D} G, \tag{20.168}$$

le mieux est de prendre un paramétrage $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ et de calculer

$$\int_0^1 \langle G_{\gamma(t)}, \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\rangle dt. \tag{20.169}$$

Hélas, cette définition ne fonctionne pas parce que son signe dépend du sens du paramétrage γ. Si le paramétrage tourne dans l'autre sens, il y a un signe de différence.

Nous allons définir

$$\int_{\partial D} G = \int_0^1 \langle G_{\gamma(t)}, T(t)\rangle dt \tag{20.170}$$

où $T(t) = \dot\gamma(t)/\|\dot\gamma(t)\|$ et où γ est choisi de telle façon que la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ amène ν sur T. Cela fixe le choix de sens.

Ce choix de sens aura des répercussions dans l'application de la formule de Green et du théorème de Stokes.

20.6.8 Intégrer une forme différentielle sur un bord en 2D

Nous n'allons pas chercher très loin :

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} \omega^\sharp, \tag{20.171}$$

c'est-à-dire que l'intégrale de la forme différentielle est celle du champ de vecteur associé. Le membre de droite est défini par (20.170), avec le choix d'orientation qui va avec.

20.6.9 Intégrer une forme différentielle sur un bord en 3D

Nous allons maintenant intégrer une forme différentielle sur certains chemins fermés dans $\mathbb{R}^3$. Soit $F(D) \subset \mathbb{R}^3$, une variété de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ où $F\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est la carte. Nous supposons que D vérifie les hypothèses de la formule de Green. Alors nous définissons

$$\int_{F(\partial D)} \omega = \int_{\partial D} F^*\omega \tag{20.172}$$

où $F^*\omega$ est la forme différentielle définie sur ∂D par $(F^*\omega)(v) = \omega\big(dF(v)\big)$.

Cette définition est très abstraite, mais nous n'allons, en pratique, jamais l'utiliser, grâce au théorème de Stokes.

20.6.10 Intégrer un champ de vecteurs sur un bord en 3D

Encore une fois, nous n'allons pas chercher bien loin :

$$\int_{F(\partial D)} G = \int_{F(\partial D)} G^\flat \tag{20.173}$$

où $G^\flat$ est la forme différentielle associée au champ de vecteur. Le membre de droite est défini par l'équation (20.172).

20.6.11 Dérivées croisées et forme différentielle exacte

Nous considérons le problème suivant : trouver une fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que EqskfgfNr

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y) & (20.174a) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y) & (20.174b) \end{cases}$$

où a et b sont des fonctions supposées suffisamment régulières. Nous savons que ce problème n'a pas de solutions lorsque

$$\frac{\partial a}{\partial y} \neq \frac{\partial b}{\partial x} \tag{20.175}$$

parce que cela impliquerait $\partial^2_{xy} f \neq \partial^2_{yx} f$. Nous sommes en droit de nous demander si la condition

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} \tag{20.176}$$

impliquerait qu'il existe une solution au problème (20.174). La réponse est oui, et nous allons brièvement la justifier. Pour plus de détails nous vous demandons de chercher un peu. La référence [657] peut être utile.

Proposition 20.57.
Si a et b sont des fonctions qui satisfont à la condition

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \tag{20.177}$$

alors la fonction

$$f(x,y) = \int_0^x a(t,0)dt + \int_0^y b(x,t)dt \tag{20.178}$$ EqllhTaT

répond au problème

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y) & (20.179a) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y) & (20.179b) \end{cases}$$

La preuve qui suit n'en est pas complètement une parce qu'il manque des justifications, notamment au moment de permuter la dérivée et l'intégrale.

Démonstration. La clef de la preuve est le théorème fondamental de l'analyse :

$$\int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)dt = f(x,y) \tag{20.180}$$

et son pendant par rapport à y :

$$\int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dt = f(x,y). \tag{20.181}$$

En appliquant ces versions du théorème fondamental, nous obtenons immédiatement.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y). \tag{20.182}$$

En ce qui concerne la dérivée par rapport à y,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= a(x,0) + \int_0^y \frac{\partial b}{\partial x}(x,t)dt & (20.183a) \\ &= a(x,0) + \int_0^y \frac{\partial a}{\partial y}(x,t)dt & (20.183b) \\ &= a(x,0) + [a(x,t)]_{t=0}^{t=y} & (20.183c) \\ &= a(x,y). & (20.183d) \end{aligned}$$

□

En ce qui concerne l'unicité, supposons que f et g soient deux solutions au problème. L'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{20.184}$$

implique que

$$f(x,y) = g(x,y) + C(y) \tag{20.185}$$

où C est une fonction seulement de y. L'autre équation implique

$$f(x,y) = g(x,y) + D(x) \tag{20.186}$$

où D est seulement une fonction de x. En égalisant nous voyons que les fonctions C et D doivent être des constantes.

Par conséquent la fonction f est donnée à une constante près et en réalité la fonction (20.178) est suffisante pour répondre au problème de trouver toutes les fonctions dont les dérivées partielles sont données par les fonctions a et b.

La fonction f ainsi créée est un **potentiel** pour le champ de force

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \end{pmatrix}. \tag{20.187}$$

Notez que ce champ de vecteurs est le gradient de f. La question initiale aurait donc pu être posée en les termes suivants : trouver une fonction f dont le gradient est donné par

$$\nabla f = \begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \end{pmatrix}. \tag{20.188}$$

20.7 Surfaces paramétrées

De la même façon qu'un chemin dans $\mathbb{R}^3$ est décrit comme une application $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, une surface dans $\mathbb{R}^3$ sera vue comme une application $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Une **surface paramétrée** dans $\mathbb{R}^3$ est une application

$$\begin{aligned} \varphi\colon D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20.189}$$

Nous allons parler de la « surface φ » pour désigner l'image de φ dans $\mathbb{R}^3$.

Si on fixe le paramètre $u = u_0$, alors l'application

$$v \mapsto \varphi(u_0, v) \tag{20.190}$$

est un chemin dans la surface. Un vecteur tangent à ce chemin sera tangent à la courbe :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}. \tag{20.191}$$

De même, en fixant v_0, on considère le chemin

$$u \mapsto \varphi(u, v_0). \tag{20.192}$$

Le vecteur tangent à ce chemin est égalent tangent à la surface :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \end{pmatrix} \tag{20.193}$$

DefSurfReguliere

Définition 20.58.
*Nous disons que la surface est **régulière** si les vecteurs $\partial_u\varphi(u_0,v_0)$ et $\partial_v\varphi(u_0,v_0)$ sont non nuls et non colinéaires.*

Si la surface est régulière, les vecteurs tangents au paramétrage forment le plan tangent à la surface au point $\varphi(u_0, v_0)$.

Un vecteur orthogonal à la surface (et donc au plan tangent) est donc donné par le produit vectoriel :

$$n(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0). \tag{20.194}$$

L'équation du plan tangent est alors obtenue par

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot n(u_0, v_0) = 0 \tag{20.195}$$

EqPlanTgSurfaceParm

où $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$.

20.7.1 Graphe d'une fonction

Soit la fonction $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Le graphe de f est l'ensemble des points de la forme

$$\big(x, y, f(x, y)\big) \tag{20.196}$$

tels que $(x, y) \in D$. Cela est une surface paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi\colon D &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20.197}$$

Les vecteurs tangents sont

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}. \tag{20.198}$$

La surface est donc partout régulière parce que ces deux vecteurs ne sont jamais nuls ou colinéaires. Un vecteur normal à cette surface au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est donné par le produit vectoriel

$$n = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & \partial_x f(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \partial_y f(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) e_x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) e_y + e_z. \tag{20.199}$$

En suivant l'équation (20.195), nous avons l'équation suivante pour le plan :

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{20.200}$$

c'est-à-dire

$$-(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + z - f(x_0, y_0) = 0, \tag{20.201}$$

ce qui revient à

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{20.202}$$

Nous retrouvons donc l'équation du plan tangent à un graphe.

Exemple 20.59.
La sphère de rayon R peut être paramétrée par les angles sphériques :

$$\phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \sin\theta \cos\varphi \\ R \sin\theta \sin\varphi \\ R \cos\theta \end{pmatrix} \tag{20.203}$$

avec $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Tentons d'en trouver le plan tangent au point $(x,y,z)=(R,0,0)$. Un petit dessin nous montre que c'est un plan vertical d'équation $x=R$. Montrons cela en utilisant la théorie que nous venons de découvrir. D'abord le point $(R,0,0)$ correspond à $\theta_0=\frac{\pi}{2}$ et $\varphi=0$. Les vecteurs tangents sont

$$T_\theta=\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(R,\frac{\pi}{2},0)=\begin{pmatrix}R\cos\theta\cos\varphi\\R\cos\theta\sin\varphi\\-R\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-R\end{pmatrix},\tag{20.204}$$

EqTthetaSph

et

$$T_\varphi=\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(R,\frac{\pi}{2},0)=\begin{pmatrix}-R\sin\theta\sin\varphi\\R\sin\theta\cos\varphi\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\R\\0\end{pmatrix}.\tag{20.205}$$

EqTvarphiSph

Cela sont de toute évidence bien les deux vecteurs tangents à la sphère au point $(x,y,z)=(R,0,0)$. Le vecteur normal est

$$\begin{vmatrix}e_x&e_y&e_z\\0&0&-R\\0&R&0\end{vmatrix}=R^2e_x.\tag{20.206}$$

Ici encore, nous avons le vecteur que nous attendions sur un dessin. L'équation du plan tangent est maintenant

$$\begin{pmatrix}x-R\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R^2\\0\\0\end{pmatrix}=0,\tag{20.207}$$

c'est-à-dire $R^2(x-R)=0$ et donc $x=R$. △

20.7.2 Intégrale sur une partie de $\mathbb{R}^m$

Soit M une variété de dimension n dans $\mathbb{R}^m$. Soit $F:W\subset\mathbb{R}^n\to M$ un paramétrage d'un ouvert relatif de M.

Si f est une fonction définie sur un sous-ensemble $A\subset F(W)$ tel que $F^{-1}(A)$ est mesurable, l'*intégrale de f sur A* est définie par

$$\int_A f=\int_{F^{-1}(A)}f(F(w))\sqrt{\det(J_F(w)^tJ_F(w))}dw$$

où l'intégrale est l'intégration usuelle (de Lebesgue) sur $F^{-1}(A)\subset\mathbb{R}^n$. On écrit parfois cette intégrale $\int_{F^{-1}(A)}f(F(w))d\sigma$ où

$$d\sigma=\sqrt{\det(J_F(w)^tJ_F(w))}dw\tag{20.208}$$

EQooARMAooQPhQAL

est l'*élément infinitésimal de volume* de la variété.

Si $m=3$ et $n=2$, l'élément infinitésimal de volume vaut

$$d\sigma=\left\|\frac{\partial F}{\partial w_1}\times\frac{\partial F}{\partial w_2}\right\|dw$$

où $\times$ représente le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, et (w_1,w_2) sont les coordonnées sur $W\subset\mathbb{R}^2$. Dans la suite, nous ne regarderons plus que ce cas.

20.8 Intégrales de surface

secintsurfaciques

20.8.1 Intégrale d'un champ de vecteurs

Dans l'intégration curviligne, on a noté que si l'intégrale d'une fonction ne dépendait pas de l'orientation du chemin, l'intégrale d'un champ de vecteurs ou d'une forme différentielle en dépendait. Ce problème d'orientation apparait également dans l'intégration sur des surfaces de l'espace.

DEFooFTQLooXXbtOQ

Définition 20.60.
*Une **orientation** sur une surface $S\subset\mathbb{R}^3$ est le choix d'un champ de vecteurs continu $\nu:S\to\mathbb{R}^3$ dont la norme en tout point de S vaut* 1.

On remarque qu'ayant fait un tel choix d'orientation $\nu(x)$ en un point x, le seul autre choix possible en x est $-\nu(x)$. Si S est le bord d'un ouvert $D \subset \mathbb{R}^3$, l'*orientation induite par D sur S* est, si elle existe, l'orientation qui pointe hors de D en tout point de S. Plus précisément, il faut que pour tout $x \in D$ il existe $\epsilon > 0$ vérifiant, pour tout $0 < t < \epsilon$, la relation $t\nu(x) \notin D$. Dans ce cas, le champ de vecteurs ν est appelé le *vecteur normal unitaire extérieur* à D et il est forcément unique.

Soit G un champ de vecteurs défini sur une surface orientée par un champ ν. L'intégrale de G sur S, aussi appelée le *flux de G à travers S*, est

$$\iint_S G \cdot dS \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S \langle G, \nu \rangle \, d\sigma. \tag{20.209}$$ eqflux-star

Si on suppose que la surface est paramétrée par une application

$$F : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v))$$

alors un vecteur unitaire ν peut s'écrire sous la forme

$$\nu = \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right\|}$$

et grâce à ce paramétrage l'intégrale (20.209) devient

$$\iint_S G \cdot dS = \iint_W \left\langle G(F(u, v)), \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right\rangle du dv.$$

où on utilise l'expression de $d\sigma$ obtenue précédemment dans le cas qui nous intéresse (surface dans l'espace).

20.9 Aires et intégrales

20.9.1 Aire d'une surface paramétrée

Lorsque nous avions vu la longueur d'une courbe paramétrée, nous avions pris comme « élément de longueur » la norme du vecteur tangent. Il est donc naturel de prendre comme « élément de surface » une petite surface que l'on peut construire à partir des deux vecteurs tangents à la surface.

Au point $\varphi(u_0, v_0)$, nous avons les deux vecteurs tangents

$$T_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \quad T_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0). \tag{20.210}$$

L'élément de surface que nous pouvons construire à partir de ces deux vecteurs est la surface du parallélogramme, donnée par la norme du produit vectoriel :

$$dS = \|T_u \times T_v\|. \tag{20.211}$$ EQooNYWSooZuycPe

L'aire de la surface donnée par $\varphi \colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sera donc donnée par

$$Aire\big(\varphi(D)\big) = \iint_D \|T_u \times T_v\| du \, dv. \tag{20.212}$$

Exemple 20.61.
Calculons l'aire de la sphère. Les vecteurs tangents ont déjà été calculés aux équations (20.204) et (20.205) :

$$T_\theta = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix}, \quad T_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20.213}$$

Le produit vectoriel vaut

$$\begin{aligned} T_\theta \times T_\varphi &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\theta \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= (R^2\sin^2\theta\cos\varphi)e_x + (R^2\sin^2\theta\sin\varphi)e_y \\ &\quad + (R^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + R^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi)e_z. \end{aligned} \tag{20.214}$$

La norme demande quelques calculs et mises en évidences. Le résultat est :

$$\|T_\theta \times T_\varphi\| = R^2 \sin\theta. \tag{20.215}$$

L'aire de la sphère est donc donnée par

$$Aire = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} R^2 \sin\theta d\theta = 2\pi R^2 [-\cos\theta]_0^{\pi} = 4\pi R^2. \tag{20.216}$$

Il est bon de se souvenir que, en coordonnées sphériques,

$$\|T_\theta \times T_\varphi\| = R^2 \sin\theta. \tag{20.217}$$

Or nous savons que ce vecteur est dirigé dans le sens de e_r parce que ce dernier est le vecteur qui est constamment dirigé radialement. En coordonnées sphériques nous avons donc

$$T_\theta \times T_\varphi = R^2 \sin(\theta) e_r. \tag{20.218}$$

△

Remarque 20.62.
L'équation (20.215) donne l'élément de surface pour la sphère. Notez que cela est justement l'expression du jacobien des coordonnées sphériques. Cela n'est évidemment pas une coïncidence.

Exemple 20.63.
Nous pouvons donner l'aire du graphe d'une fonction quelconque. La surface est paramétrée par

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}. \tag{20.219}$$

Les vecteurs tangents sont

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}, \quad T_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix}. \tag{20.220}$$

Le produit vectoriel est donné par

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & \partial_x f \\ 0 & 1 & \partial_y f \end{vmatrix} = (-\partial_x f)e_x - (\partial_y f)e_y + e_z. \tag{20.221}$$

L'élément de surface est par conséquent

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}, \tag{20.222}$$

et la surface du graphe sera

$$Aire = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 + 1}\, dx\, dy \tag{20.223}$$

△

20.9.2 Intégrale d'une fonction sur une surface

Si S est une surface dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$\begin{aligned} &\varphi\colon D \to \mathbb{R}^3 \\ &(u,v) \mapsto \varphi(u,v) \in S, \end{aligned} \tag{20.224}$$

et si f est une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie au moins sur S, l'intégrale de f sur S est logiquement définie par

$$\int_S f\, dS = \iint_D f\big(\varphi(u,v)\big) \|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\| du dv \tag{20.225}$$

où $T_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $T_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$. La quantité

$$\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\| du dv \tag{20.226}$$

est appelé **élément de surface**.

Encore une fois, si on prend $f = 1$, alors on retrouve la surface de S :

$$\int_S dS = Aire(S). \tag{20.227}$$

Remarque 20.64.
Le nombre $\int_S f dS$ ne dépend pas de le paramétrage choisie pour S.

20.9.3 Intégrale d'une 2-forme

Nous considérons ω, une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 20.65.
Si $\omega_{(x,y)} = u(x,y)dx \wedge dy$ et si D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ alors nous définissons

$$\int_D \omega = \int_D u(x,y)dx\,dy. \tag{20.228}$$

Nous voulons maintenant intégrer une 2-forme sur une surface dans $\mathbb{R}^3$. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$, une surface orientée (c'est-à-dire que nous avons un choix continu d'un vecteur normal unitaire n). Nous supposons de plus avoir un paramétrage $\phi\colon D \to S$ de S avec D ouvert dans $\mathbb{R}^2$ compatible avec l'orientation, c'est-à-dire que pour tout $(t,s) \in D$,

$$n\big(\phi(t,s)\big) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s). \tag{20.229}$$

Définition 20.66.
Pour intégrer ω sur S nous faisons

$$\int_S \omega = \int_D \phi^*\omega \tag{20.230}$$

où $\phi^*\omega$ est de la forme $F(t,s)dt \wedge ds$.

Montrons ce que cela fait. Soient u, v des vecteurs de D et calculons

$$(\phi^*\omega)(u,v) = \omega\big(d\phi(u), d\phi(v)\big) \tag{20.231a}$$

$$= \omega\left(u_1\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial \infty}{\partial x_2}, v_1\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial \infty}{\partial x_2}\right). \tag{20.231b}$$

Les termes en u_1v_1 et u_2v_2 sont nuls ; par exemple :

$$\omega\left(u_1\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, v_1\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) = u_1v_1\omega\left(\frac{\partial \infty}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) = 0 \tag{20.232}$$

parce que ω est antisymétrique. Il nous reste donc

$$(\phi^*\omega)(u,v) = (u_1v_2 - u_2v_1)\omega\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) \tag{20.233a}$$

$$= \omega\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)(dt \wedge ds)(u,v). \tag{20.233b}$$

Cette dernière ligne est bien de la forme $\phi^*\omega = F(t,s)dt \wedge ds$.

20.10 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

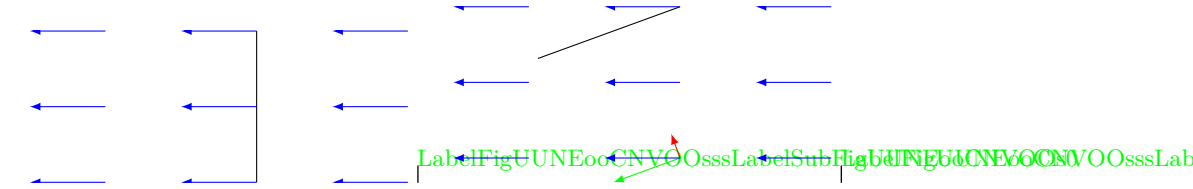
Nous voulons construire un moulin à eau. Comment placer les pales pour maximiser le travail de la pression de l'eau ? On n'a pas attendu l'invention du calcul intégral pour répondre à cette question. Trois paramètres rentrent en ligne de compte :

(1) plus il y a d'eau, plus ça pousse ;

(2) plus la surface de la pale est grande, plus on va utiliser d'eau ;

(3) plus la pale est perpendiculaire au courant, plus on va en profiter.

Nous voyons sur la figure 20.2 que lorsque la pale du moulin est inclinée, non seulement elle prend moins d'eau sur elle, mais qu'en plus elle la prend avec un moins bon angle : une partie de la force ne sert pas à la faire tourner.



(a) L'eau pousse bien perpendiculairement à la palle du moulin.

(b) Lorsque l'eau ne pousse pas perpendiculairement, une partie de la force est perdue. Ici la partie normale (en rouge) est très petite.

FIGURE 20.2 : La partie rouge de la force est perdue si l'eau ne pousse pas perpendiculairement. De plus lorsque la pale est inclinée, elle prend moins d'eau sur elle. LabelFigUUNEooCNVOOs

L'idée du flux d'un champ de vecteurs à travers une surface est de savoir quelle est la quantité « utile » de vecteurs qui traverse la surface. Ce sera simplement l'intégrale sur la surface de la composante du champ de vecteurs normale à la surface. Il reste deux problèmes à régler : le premier est de savoir quel est le vecteur normal à la surface, et le second est de savoir comment « sélectionner » la composante normale d'un champ de vecteurs F.

Le problème de trouver un vecteur normal est résolu par le produit vectoriel des vecteurs tangents. Si la surface est donnée par $\varphi\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, les vecteurs tangents sont $T_u = \partial_u\varphi(u,v)$ et $T_v = \partial_v\varphi(u,v)$. Le normal de norme 1 est donné par :

$$n(u,v) = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}. \tag{20.234}$$

Si p est un point de la surface $\varphi(D)$, la composante de $F(p)$ qui est normale à la surface au point p est donnée par le produit scalaire

$$F(p)_\perp = F(p) \cdot n(p). \tag{20.235}$$

C'est ce nombre là que nous intégrons sur la surface.

Définition 20.67.
*Le **flux du champ de vecteurs** à travers la surface $S = \varphi(D)$ est*

$$\int F \cdot dS = \int F \cdot n \, dudv. \tag{20.236}$$

Une petite simplification se produit lorsqu'on veut calculer effectivement cette intégrale. En effet $F \cdot n$ est, en soi, une fonction sur S. Pour l'intégrer, il faut donc la multiplier par $\|T_u \times T_v\|$ (c'est la définition de l'intégrale d'une fonction sur une surface). Donc, étant donné que $n = (T_u \times T_v)/\|T_u \times T_v\|$, nous avons

$$\int F \cdot dS = \iint_D F\big(\varphi(u,v)\big) \cdot (T_u \times T_v) \, dudv \tag{20.237}$$

où $T_u = \frac{\partial\phi}{\partial u}$ et $T_v = \frac{\partial\varphi}{\partial v}$.

Exemple 20.68.
Soit le champ de vecteurs

$$F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}. \tag{20.238}$$

Calculons son flux au travers de la sphère de rayon R.

Nous choisissons de paramétrer la sphère en coordonnées sphériques avec $\phi(\theta,\varphi)$. Nous pouvons reprendre le résultat (20.218) :

$$T_\theta \times T_\varphi = R^2 \sin(\theta). \tag{20.239}$$

Nous savons aussi que

$$F\big(\phi(\theta,\varphi)\big) = Re_r. \tag{20.240}$$

L'intégrale à calculer est donc

$$I = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, 2e_r \cdot \big(R^2 \sin(\theta) e_r\big). \tag{20.241}$$

Vu que le produit scalaire $e_r \cdot e_r$ vaut 1, nous calculons

$$I = 4\pi R^2 \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = 8\pi R^2. \tag{20.242}$$

△

Exemple 20.69.
Calculons le flux du champ de force de gravitation d'une masse au travers de la sphère de centre R centrée autour la masse. À un coefficient constant près, le champ vaut

$$G(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2} e_r. \tag{20.243}$$

Sur la sphère de rayon R, nous avons

$$G\big(\phi(\theta,\varphi)\big) = \frac{1}{R^2} e_r. \tag{20.244}$$

L'intégrale est donc

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} e_r \cdot \big(R^2 \sin(\theta) e_r\big) d\varphi = 8\pi. \tag{20.245}$$

Ce flux ne dépend pas de R. △

Exemple 20.70.
Soit S le disque de rayon 5 placé horizontalement à la hauteur 12. Calculer le flux du champ de vecteurs

$$F(x,y,z) = xe_x + ye_y + ze_z. \tag{20.246}$$

Les équations de la surface sont $z = 12$, $x^2 + y^2 \leqslant 25$. Nous prenons le paramétrage en coordonnées cylindriques :

$$\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ 12 \end{pmatrix}. \tag{20.247}$$

Les vecteurs tangents sont

$$T_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad T_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20.248}$$

Le vecteur normal est alors

$$T_r \times T_\theta = re_z. \tag{20.249}$$

Sur la surface, le champ de vecteurs s'écrit

$$F\big(\varphi(r,\theta)\big) = r\cos(\theta)e_x + r\sin(\theta)e_y + 12e_z. \tag{20.250}$$

Par conséquent

$$F \cdot (T_r \times T_\theta) = 12r. \tag{20.251}$$

L'intégrale à calculer est

$$\begin{aligned} \int_0^5 dr \int_0^{2\pi} 12r\, d\theta &= 12 \cdot 2\pi \int_0^5 r\, dr \\ &= \frac{25}{2} 24\pi \\ &= 300\pi. \end{aligned} \tag{20.252}$$

△

20.11 Divergence, Green, Stokes

Le théorème de Stokes (et ses variations) peut se voir comme une généralisation du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral qui stipule que

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

c'est-à-dire qui relie l'intégrale de f' sur $I = [a, b]$ aux valeurs de f sur le bord $\partial I = \{a, b\}$. Le signe $-$ qui apparait vient de l'orientation ; celle-ci requiert de la prudence dans l'utilisation des théorèmes.

Voici, pour votre culture générale, un énoncé général :

ThoATsPuzF

Théorème 20.71.
Si M est une variété orientable de dimension n avec un bord noté ∂M, alors pour toute forme différentielle ω de degré $n-1$ on a

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

où $d\omega$ désigne la différentielle extérieure de ω.

Nous allons maintenant voir quelques cas particuliers.

Une des nombreuses formes du théorème de Stokes (théorème 20.71) est que si la forme différentielle ω est exacte alors son intégrale est facile.

ThoUJMhFwU

Théorème 20.72 ([1])**.**
Si γ est une chemin de classe C^1 dans un ouvert Ω et si ω est la forme différentielle exacte $\omega = df$, alors

$$\int_\gamma df = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big). \tag{20.253}$$

Démonstration. C'est une application du lemme 12.306 et du théorème fondamental du calcul intégral 14.288. □

20.11.1 Théorème de la divergence

Si nous considérons une surface dans $\mathbb{R}^n$ et un champ de vecteurs, il est bon de se demander quelle « quantité de vecteurs » traverse la surface. Soit D, un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ telle que ∂D soit une variété de dimension $n-1$, et G, un champ de vecteurs défini sur $\bar{D}$. Afin de compter combien de G traverse ∂D, il faudra faire en sorte de ne considérer que la composante de G normale à ∂D : pas question d'intégrer par exemple la norme de G sur ∂D.

Comme nous le savons, la composante du vecteur v dans la direction w est le produit scalaire $v \cdot 1_w$ où 1_w est le vecteur de norme 1 dans la direction w. Nous allons donc introduire le concept de vecteur normal extérieur.

Définition 20.73.
*Soit $x \in \partial D$ et $\nu \in \mathbb{R}^n$, nous disons que ν est un **vecteur normal extérieur** de ∂D si*

(1) $\langle \nu, v\rangle = 0$ pour tout vecteur tangent v à ∂D au point x. Pour rappel, ∂D étant une variété de dimension $n-1$, il y a $n-1$ tels vecteurs v linéairement indépendants.

(2) Il existe un $\delta > 0$ tel que $\forall t \in]0, \delta[$, nous avons $x + t\nu \notin \bar{D}$ et $x - t\nu \in D$.

Nous pouvons maintenant définir le concept de flux. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ tel que ∂D soit une variété de dimension $n-1$ qui admette un vecteur normal extérieur $\nu(x)$ en chaque point. Soit aussi $G\colon \bar{D} \to \mathbb{R}^n$, un champ de vecteur de classe C^1. Le **flux** de G au travers de ∂D est le nombre

$$\int_{\partial D} \langle G(x), \nu(x)\rangle d\sigma(x). \tag{20.254}$$

Cette intégrale est en général très compliquée à calculer parce qu'il faut trouver le champ de vecteur normal, puis un paramétrage de la surface ∂D et ensuite appliquer la méthode décrite au point 20.8.

Heureusement, il y a un théorème qui nous permet de calculer plus facilement : sans devoir trouver de vecteurs normaux.

Il n'est pas plus contraignant d'énoncer ce théorème dans le cadre d'une hypersurface de $\mathbb{R}^n$, ce que nous faisons donc :

Théorème 20.74 (Formule de la divergence)**.**
Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord est « assez régulier par morceaux », c'est-à-dire :

$$\partial D = A_1 \cup \ldots \cup A_p \cup N \tag{20.255}$$

où

(1) $A_1, \ldots, A_p, N$ sont deux à deux disjoints,

(2) pour tout $i \leqslant p$, A_i est un ouvert relatif d'une certaine variété M_i de dimension $(n-1)$

(3) $\bar{A}_i \subset M_i$

(4) N est un compact contenu dans une réunion finie de variétés de dimensions $(n-2)$.

Supposons également qu'en chaque point de $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ il existe un vecteur normal extérieur ν.
Si G est un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\bar{D}$ alors

$$\int_D \nabla \cdot G = \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i} \langle G, \nu \rangle . \tag{20.256}$$

L'intégrale du membre de gauche est l'intégrale sur un ouvert d'une simple fonction.

20.11.2 Lacets et homotopie

DEFooQZMSooYYkGDv

Définition 20.75 (chemin, lacet[235, 658])**.**
Plusieurs notions autour de chemins dans un espace topologique X.

*(1) Un **chemin** dans un espace vectoriel X est une application continue $\gamma\colon [a,b] \to X$ avec $a < b$.*

*(2) Un **lacet** dans X est un chemin $\gamma\colon [a,b] \to X$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

*(3) Un chemin $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est **régulier** si il est C^1 et si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t*

*(4) Le chemin $\gamma\colon [a,b] \to X$ est un **chemin de Jordan** si il est injectif.*

*(5) Un lacet $\gamma\colon [a,b] \to X$ est un **lacet de Jordan** si $\gamma\colon [a,b[\to X$ est injective.*

*(6) Une **courbe de Jordan** est l'image d'un lacet de Jordan.*

*(7) Une **courbe simple** est l'image d'un chemin de Jordan.*

L'homotopie sera définie en 20.77.

20.76.
Un chemin de Jordan peut évidemment être vu comme une application $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. En particulier il n'est jamais mauvais de se rappeler qu'on peut choisir un paramétrage normal par la proposition 21.46.

DEFooHJQTooYUFcee

Définition 20.77 (homotopie de lacets)**.**
*Soit un espace topologique X. Les lacets[17] $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to X$ sont **homotopes** dans X si il existe une application continue*

$$H\colon [0,1] \times [a,b] \to X \tag{20.257}$$

telle que

(1) Pour tout $s \in [0,1]$, l'application

$$\begin{aligned} \Gamma_s\colon [a,b] &\to X \\ t &\mapsto H(s,t) \end{aligned} \tag{20.258}$$

est un lacet dans X.

(2) Nous avons $\Gamma_0 = \gamma_0$ et $\Gamma_1 = \gamma_1$.

L'application H est l'homotopie entre γ_0 et γ_1.

[17] Définition 20.75.

DEFooLXDTooDPgxqL

Définition 20.78 (Homotopie à extrémités fixées[235]).
Soit un espace topologique X. Soient des chemins $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to X$. Nous supposons que leurs extrémités soient égales, et nous les notons $p, q : \gamma_0(a) = \gamma_1(a) = p$ et $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = q$. Nous disons que γ_0 et γ_1 sont ***homotopes avec les extrémités fixées*** *si il existe une application continue $H : [0,1] \times [a,b] \to X$ telle que*

(1) les extrémités sont fixées : $H(s,a) = p$ et $H(s,b) = q$ pour tout $s \in [0,1]$.

(2) pour tout $t \in [a,b]$, nous avons $H(0,t) = \gamma_0(t)$ et $H(1,t) = \gamma_1(t)$.

20.11.3 Formule de Green

La formule de Green est un cas particulier du théorème de la divergence dans le cas $n = 2$, légèrement reformulé.

THOooQSWMooAZasTl

Théorème 20.79.
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert borné tel que son bord est la réunion finie d'un certain nombre de chemins de classe C^1 de Jordan réguliers. Supposons qu'en chaque point de son bord, D possède un vecteur normal unitaire extérieur ν. Soient P et Q deux fonctions réelles de classe C^1 sur $\bar{D}$. Alors

$$\iint_D (\partial_x Q - \partial_y P) dx\, dy = \oint_{\partial D} P dx + Q dy \tag{20.259}$$

EqYLblSqV

où chaque chemin γ formant le bord de D est orienté de sorte que $T\nu = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$ où T représente la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Justifions le fait que cela soit un cas particulier de la formule de Stokes du théorème 20.71. Nous considérons la forme différentielle

$$\omega = P dx + Q dy, \tag{20.260}$$

et sa différentielle

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_i d\omega_i \wedge dx_i && \text{(20.261a)}\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy\right) \wedge dy && \text{(20.261b)}\\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy. && \text{(20.261c)} \end{aligned}$$

Intégrons cette forme $d\omega$ sur le domaine ouvert D que nous paramétrons de façon triviale par

$$\begin{aligned} \varphi : D &\to \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\mapsto (u,v). \end{aligned} \tag{20.262}$$

Ce que nous avons est

$$\iint_D d\omega = \iint_D d\omega_{(u,v)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) du dv \tag{20.263}$$

EqKYjFEGF

Nous avons aussi $T_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $T_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$(dx \wedge dy)(T_u, T_v) = dx(T_u)dy(T_v) - dx(T_v)dy(T_u) = 1 - 0 = 1. \tag{20.264}$$

L'intégrale (20.263) se développe donc en

$$\iint_D d\omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(u,v) - \frac{\partial P}{\partial y}(u,v)\right) (dx \wedge dy)(T_u, T_v) du dv = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) du dv. \tag{20.265}$$

Par conséquent la formule de Stokes nous donne la formule (20.259).

La formule de Green nous permet de calculer l'aire de la surface délimitée par une courbe fermée en termes de l'intégrale d'une forme bien choisie le long du contour. Pour cela nous prenons la forme

$$\omega = -\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy, \tag{20.266}$$

EqZNXYMQb

de telle sorte que $\partial_x Q - \partial_y Q = 1$ et que

$$\iint_D d\omega = \iint_D dudv = S, \tag{20.267}$$

et au final l'aire est donnée par

$$S = \int_{\partial D} \Big(-\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy \Big). \tag{20.268}$$

Lorsque le bord de D est paramétré par

$$\begin{aligned} \gamma\colon [a,b] &\to \mathbb{R}^2 \\ u &\mapsto \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{20.269}$$

nous avons

$$(Pdx + Qdy)\gamma'(u) = Px' + Qy', \tag{20.270}$$

et alors

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_a^b P\big(x(u),y(u)\big)x'(u) + Q\big(x(u),y(u)\big)y'(u)du. \tag{20.271}$$

En ce qui concerne l'aire de la surface, nous prenons les P et Q de la forme 20.266 :

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b \Big(-y(u)x'(u) + x(u)y'(u)\Big)du. \tag{20.272}$$ EqAJGrtQk

20.11.4 Formule de Stokes

secstokesusuel

La formule de Stokes est la version classique, qui permet d'exprimer la circulation d'un champ de vecteur le long d'une courbe de $\mathbb{R}^3$ comme le flux de son rotationnel à travers n'importe quelle surface dont le bord est la courbe. La version présentée ici suppose que la surface peut se paramétrer en un seul morceau :

THOooDCPKooMqNOMU

Théorème 20.80 (Formule de Stokes)**.**
Soit $F : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un paramétrage (carte) d'une surface dans $\mathbb{R}^3$, supposée de classe C^2. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les hypothèses de la formule de Green, et tel que $\bar{D} \subset W$. Soit G un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur $F(\bar{D})$, et soit N le champ normal unitaire donné par le paramétrage

$$N = \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v}}{\big\| \frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v} \big\|} \tag{20.273}$$

alors

$$\iint_{F(D)} \langle \nabla \times G, N\rangle \, d\sigma_F = \int_{F(\partial D)} G \tag{20.274}$$ EqStokesTho

où les chemins formant le bord ∂D sont orientés comme dans le théorème de Green.

Notons, juste pour avoir une bonne nouvelle de temps en temps, que

$$d\sigma_F = \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right\| dudv, \tag{20.275}$$

mais cette norme apparaît exactement au dénominateur de N. Il ne faut donc pas la calculer parce qu'elle se simplifie.

Sous forme un peu plus physicienne[18], la formule (20.274) s'écrit

$$\int_{F(D)} \langle \nabla \times G, N(x)\rangle \, d\sigma_F(x) = \int_{F(\gamma)} \langle G, T\rangle \, ds \tag{20.276}$$

où T est le vecteur unitaire tangent à $F(\gamma)$.

[18] et surtout plus explicite.

20.11.4.1 Quelle est la bonne orientation ?

Le signe du vecteur normal N dépend du choix de l'ordre des coordonnées dans la carte. Supposons que je veuille paramétrer la surface $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$. Nous prenons naturellement comme carte le cercle C de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ et la carte

$$F(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{20.277}$$

Mais nous aurions aussi pu mettre les coordonnées r et θ dans l'autre ordre :

$$\tilde{F}(\theta, r) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{20.278}$$

Les vecteurs normaux ne sont pas les mêmes : la carte F donnera $\partial_r F \times \partial_\theta F$, tandis que l'autre donnera $\partial_\theta \tilde{F} \times \partial_r \tilde{F}$. Le signe change !

Il faut savoir laquelle choisir. Le cercle $C \subset \mathbb{R}^2$ a une orientation donnée par le théorème de Green. Nous choisissons l'ordre des coordonnées pour que 1_θ et 1_r soient dans la même orientation que les vecteurs ν et T tels que donnés par le théorème de Green, et tels que dessinés sur la figure 20.3.

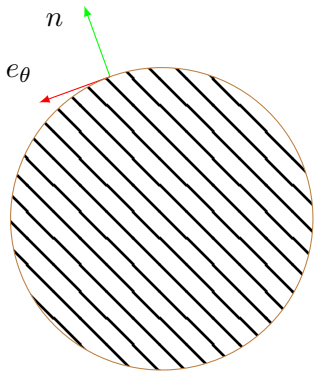


FIGURE 20.3 : L'orientation sur le cercle. Si nous les prenons dans l'ordre, les vecteurs $(1_r, 1_\theta)$ ont la même orientation que celle donnée par les vecteurs (ν, T) donnés par la convention de Green. LabelFigCercleTnu

Plus généralement, nous choisissons l'ordre des coordonnées u et v pour que la base $(1_u, 1_v)$ ait la même orientation que (ν, T) où T a le sens convenu dans le théorème de Green.

20.12 Résumé des intégrales vues

Nous sommes maintenant capables de revoir tous les types d'intégrales vues jusqu'ici de façon très cohérentes. Nous commencerons par les intégrales de fonctions et nous ferons ensuite les intégrales de champs de vecteurs.

20.12.1 L'intégrale d'une fonction sur les réels

Si $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction usuelle, sont intégrale est

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{20.279}$$

où F est une primitive de f.

20.12.2 Intégrale d'une fonction sur un chemin

Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^3$ et si $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ est un chemin dans $\mathbb{R}^3$, l'intégrale de f sur σ est, par définition,

$$\int f\, d\sigma = \int_a^b f\big(\sigma(t)\big)\|\sigma'(t)\|dt. \tag{20.280}$$

20.12.3 Intégrale d'une fonction sur une surface

Nous devons paramétrer la surface S par une application $\varphi\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. À partir d'un tel paramétrage, nous construisons un élément de surface en prenant le produit vectoriel des deux vecteurs tangents :

$$dS = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} du dv. \tag{20.281}$$

L'intégrale est

$$\int f\, dS = \iint_D f\big(\varphi(u,v)\big) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| du dv. \tag{20.282}$$ EqDefIntSurffS

Il ne faut pas rajouter de jacobien : la norme du produit vectoriel *est* le jacobien.

Remarque 20.81.
La formule (20.282) est autant valable pour des surfaces dans $\mathbb{R}^2$ que dans $\mathbb{R}^3$. Si nous considérons une surface dans $\mathbb{R}^2$, nous la voyons dans $\mathbb{R}^3$ en ajoutant un zéro comme troisième composante.

Exemple 20.82.
Les coordonnées polaires sont données par

$$\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20.283}$$

Les vecteurs tangents à ce paramétrage sont

$$T_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20.284}$$

Le vecteur normal est

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = re_z. \tag{20.285}$$

Nous trouvons donc que l'élément de surface est la norme de re_z, c'est-à-dire r, le jacobien connu. △

20.12.4 Intégrale d'une fonction sur un volume

Si V est un volume dans $\mathbb{R}^3$, nous effectuons la même procédure : nous trouvons un paramétrage, et nous formons un élément de volume avec les vecteurs tangents de le paramétrage. Nous avons donc un volume déterminé par l'application

$$\varphi\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \tag{20.286}$$

et ses trois vecteurs tangents

$$\begin{aligned} T_u &= \frac{\partial\varphi}{\partial u} \\ T_v &= \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ T_w &= \frac{\partial\varphi}{\partial w}. \end{aligned} \tag{20.287}$$

Comment former un volume avec trois vecteurs ? Réponse : le produit mixte. L'intégrale de f sur V sera

$$\int f\, dV = \iiint_D f\big(\varphi(u,v,w)\big) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} \times \frac{\partial\varphi}{\partial w} \right) \right\| du dv dw. \tag{20.288}$$

Encore une fois, le produit mixte *est* le jacobien. Prenons les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} x(r,\theta,\varphi) &= r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y(r,\theta,\varphi) &= r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(r,\theta,\varphi) &= r\cos(\theta) \end{aligned} \tag{20.289}$$

Les trois vecteurs tangents seront

$$T_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{20.290a}$$

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -r\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{20.290b}$$

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20.290c}$$

Nous avons vu que le produit mixte revient à mettre toutes les composantes dans une matrice. Ici nous avons donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \tag{20.291}$$

Cela est précisément le jacobien dont nous parlions plus haut.

20.12.5 Conclusion pour les fonctions

Lorsque nous intégrons une fonction sur un chemin, une surface ou un volume, la technique est toujours la même :

(1) Trouver un paramétrage à une, deux ou trois variables.

(2) Dériver le paramétrage par rapport à ses variables.

(3) Construire un élément de longueur, surface ou volume à partir des vecteurs que l'on a. Cela se fait en prenant la norme, le produit vectoriel ou le produit mixte.

20.12.6 Circulation d'un champ de vecteurs

Pour les champs de vecteurs, nous faisons la même chose, mais au lieu de *multiplier* par l'élément de longueur ou de surface, nous prenons le produit scalaire. Si nous considérons la courbe paramétrée $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ et le champ de vecteurs F, nous avons donc

$$\int_\sigma F = \int F \cdot d\sigma = \int_a^b F\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t) dt. \tag{20.292}$$

20.12.7 Flux d'un champ de vecteurs

Si la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est paramétrée par

$$\begin{aligned} \phi\colon D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto \phi(u,v), \end{aligned} \tag{20.293}$$

et si F est un champ de vecteurs, alors on a

$$\int_S F = \int_S F \cdot dS = \iint_D F\big(\phi(u,v)\big) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) du dv. \tag{20.294}$$ EqResIntFluxPhi

20.12.8 Conclusion pour les champs de vecteurs

La circulation et le flux ne représentent pas tout à fait la même chose. En effet pour la circulation, nous sélectionnons la composante *tangente* à la courbe, c'est-à-dire la partie du vecteurs qui « circule » le long de la courbe. Une force perpendiculaire au mouvement ne travaille pas.

La situation est exactement le contraire pour le flux. Étant donné que le vecteur

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \tag{20.295}$$

est normal à la surface, le fait de prendre le produit scalaire du champ de vecteurs avec lui sélectionne la composante *normale* à la surface, c'est-à-dire la partie du vecteur qui traverse la surface.

20.12.9 Attention pour les surfaces fermées !

Si nous considérons une surface fermée, il faut faire attention à choisir une *orientation*. Les vecteurs normaux doivent soit tous pointer vers l'intérieur soit tous vers l'extérieur. En effet, en tant que vecteur normal, nous avons choisi de prendre

$$T_u \times T_v. \tag{20.296}$$

Mais le vecteur $T_v \times T_u$ est tout aussi normal ! Il n'y a pas à priori de façon standard pour choisir l'un ou l'autre. Il faut juste être cohérent : il faut que si on divise la surface en plusieurs morceaux, tous les vecteurs pointent dans le même sens.

Notez que si vous faites un choix et que votre voisin fait le choix inverse, vous obtiendrez des réponses qui diffèrent d'un signe. Sans plus de précisions[19], les deux réponses sont correctes.

Un exemple de ce problème est donné dans l'exemple 20.83.

EXooAJRLooSTPChN

Exemple 20.83.
Calculer le flux du champ de vecteurs

$$F(x, y, z) = e_x \tag{20.297}$$

au travers du cylindre de rayon R et de hauteur h autour de l'axe z.

Même question si le cylindre est autour de l'axe x.

Remarque : ces cylindres sont considérés *avec* leur « couvercles ».

Un paramétrage du cylindre autour de l'axe z est

$$\phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ z \end{pmatrix}. \tag{20.298}$$

Les vecteurs tangents sont

$$T_\theta = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, T_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{20.299}$$

Le vecteur normal est donc

$$T_\theta \times T_z = R\cos(\theta)e_x + R\sin(\theta)e_y. \tag{20.300}$$

C'est un vecteur dirigé vers l'extérieur.

Le champ de vecteurs considéré est constant : $F(\theta, z) = e_x$. Nous avons donc

$$F(\theta, z) \cdot (T_\theta \times T_z) = R\cos(\theta) \tag{20.301}$$

et le flux vaut

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h R\cos(\theta)dz = 0. \tag{20.302}$$

En ce qui concerne les couvercles haut au bas, ils sont paramétrés par

$$\phi_1(r, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos(\theta) \\ R\sin(\theta) \\ h \end{pmatrix}, \phi_2(r, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos(\theta) \\ R\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20.303}$$

Les vecteurs normaux correspondants sont dans la direction de e_z, de façon que le produit scalaire avec $F(r, \theta)$ soit nul. Le flux total est donc nul.

Regardons maintenant le cylindre le long de l'axe x. Un paramétrage est

$$\phi(\theta, x) = \begin{pmatrix} x \\ R\cos(\theta) \\ R\sin(\theta) \end{pmatrix}, \tag{20.304}$$

et le vecteurs tangents sont

$$T_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix}, T_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20.305}$$

Le vecteur normal est alors donné par

$$T_\theta \times T_x = R\cos(\theta)e_y + R\sin(\theta)e_z. \tag{20.306}$$

[19] Il faudrait définir ce qu'est une surface *orientable* et choisir une orientation.

Nous avons par conséquent $F(\theta, x) \cdot (T_\theta \times T_x) = 0$. Pas de flux par le côté du cylindre.

Regardons les « couvercles ». Le premier est donné par le paramétrage

$$\phi_1(r, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.307}$$

Le vecteur normal serait $T_r \times T_\theta = re_x$, et le flux

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\, dr = \pi R^2. \tag{20.308}$$

Le second couvercle est donné par

$$\phi_2(r, \theta) = \begin{pmatrix} h \\ r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.309}$$

Le vecteur normal est encore re_x, et le flux est à nouveau πR^2.

Le flux total serait donc $2\pi R^2$.

Cela n'est pas possible parce que tous les vecteurs qui « rentrent » d'un côté doivent « sortir » de l'autre côté. L'erreur est le le premier vecteur normal est un vecteur qui pointe vers l'intérieur du cylindre, tandis que le second pointe vers l'extérieur. Si nous choisissons, par convention, de prendre uniquement les vecteurs extérieurs, il faut changer le vecteur normal du premier couvercle en $-re_x$. Le premier flux vaudra donc

$$-\pi R^2, \tag{20.310}$$

de telle sorte que le flux total sera nul. △

20.13 Formes différentielles exactes et fermées

Nous avons déjà parlé de formes différentielles et de leurs intégrales sur un chemin dans la section 12.24.

DefEFKQmPs

Définition 20.84.
*La forme différentielle ω est **exacte** si il existe une fonction f telle que $\omega = df$; elle est dite **fermée** si $d\omega = 0$.*

Dire que la forme différentielle $\omega = f dx + g dy$ est fermée, c'est dire que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{20.311}$$

Il est naturel de se demander si toutes les formes différentielles sont des différentielles de fonctions. Une réponse complète est délicate à établir, mais a d'innombrables conséquences en physique, notamment en ce qui concerne l'existence d'un potentiel vecteur pour le champ magnétique dans les équations de Maxwell.

Le fait qu'une forme exacte soit fermée est relativement facile à établir ; c'est la proposition suivante. La question plus délicate est la réciproque : sous quelles conditions une forme fermée est-elle exacte ?

Proposition 20.85.
Si ω est une 1-forme exacte de classe C^1, alors ω est fermée.

Démonstration. Le fait que ω soit exacte implique l'existence d'une fonction f telle que $\omega = df$, c'est-à-dire

$$\omega_x = \sum_i a_i(x) dx_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i, \tag{20.312}$$

c'est-à-dire que $a_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. L'hypothèse que ω est C^1 implique que f est C^2, et donc que nous pouvons inverser l'ordre de dérivation pour les dérivées secondes $\partial^2_{ij} f = \partial^2_{ji} f$. Nous pouvons donc faire le calcul suivant :

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}, \tag{20.313}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

La réciproque est vraie sur un ouvert simplement connexe.

ThoFermeExactFormRappel

Théorème 20.86.
Supposons que $D \subset \mathbb{R}^n$ soit un ouvert simplement connexe. Alors toute forme différentielle de degré 1 et de classe C^1 sur D qui est fermée est exacte.

Nous allons prouver ce théorème dans un cas un peu moins général : celui d'un domaine étoilé de $\mathbb{R}^2$ plutôt que simplement connexe de $\mathbb{R}^n$.

ThoMSofFxL

Théorème 20.87.
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, une ouvert étoilé, et ω, une 1-forme fermée de classe C^1. Alors ω est exacte.

Démonstration. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, un ouvert étoilé par rapport à l'origine. Soient $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon D \to \mathbb{R}$, des fonctions de classe C^1 telles que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{20.314}$$

sur D, et

EqIMDefFformI33

$$F(x,y) = \int_0^1 \big[f(tx,ty)x + g(tx,ty)y\big]dt \tag{20.315}$$

pour tout $(x,y) \in D$.

Étant donné que nous ne définissons $F(x,y)$ que pour des $(x,y) \in D$, la fonction $t \mapsto f(tx,ty)$ est C^1 sur tout le compact $[0,1]$ et aucune divergence de l'intégrale n'est à craindre. Nous sommes donc dans le cadre de la proposition 17.24, et nous pouvons dériver sous le signe intégral.

Nous calculons, en utilisant la règle de dérivation de fonctions composées

EqIMI33dsdsFlolo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 \left[f\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + f(tx,ty) + t\frac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)y\right]dt \\ &= \int_0^1 \left[t\Big(x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\Big) + f(tx,ty)\right]dt\end{aligned} \tag{20.316}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse $\partial_y f = \partial_x g$. Ce qui se trouve dans la parenthèse n'est autre que $\partial_t\big(f(tx,ty)\big)$, plus précisément, si nous posons $\mathcal{F}(x,y,t) = f(tx,ty)$, nous avons

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(x,y,t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty). \tag{20.317}$$

En recopiant le résultat (20.316) en termes de $\mathcal{F}$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 \left(t\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(x,y,t) + \mathcal{F}(x,y,t)\right)dt \\ &= \int_0^1 \partial_t\big(t\mathcal{F}(x,y,t)\big)dt \\ &= \big[t\mathcal{F}(x,y,t)\big]_0^1 \\ &= \mathcal{F}(x,y,1) \\ &= f(x,y).\end{aligned} \tag{20.318}$$

Le résultat correspondant pour $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = g(x,y)$ s'obtient de la même manière. Nous avons donc obtenu que

EqIMFormI33Fffdd

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f, \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = g. \tag{20.319}$$

En ayant prouvé cela, nous avons prouvé que si $\omega = fdx + gdy$ avec $\partial_y f = \partial_x g$, alors $\omega = dF$ où F est définie par (20.315). □

Démonstration alternative du théorème 20.87. Nous posons $u = tx$ et $v = ty$, ainsi que $\mathcal{F}(x,y,t) = f(u,v)$ et $\mathcal{G}(x,y,t) = g(u,v)$. Avec cette notation, nous avons

$$F(x,y) = \int_0^1 \big(x\mathcal{F}(x,y,t) + y\mathcal{G}(x,y,t)\big)dt, \tag{20.320}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = t\frac{\partial f}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} &= t\frac{\partial g}{\partial u}.\end{aligned} \tag{20.321}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \int_0^1 \left(x\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \mathcal{F} + y\frac{\partial G}{\partial x} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(xt\frac{\partial f}{\partial u} + \mathcal{F} + yt\frac{\partial g}{\partial u} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left[t\left(x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v} \right) + \mathcal{F} \right] dt.\end{aligned} \tag{20.322}$$

où nous avons utilisé le fait que, par hypothèse, $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v}$. Nous calculons par ailleurs que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}. \tag{20.323}$$

Donc, nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^1 \left(t\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathcal{F} \right) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(t\mathcal{F})dt. \tag{20.324}$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = [t\mathcal{F}]_0^1 = \mathcal{F}(x, y, 1) = f(x, y). \tag{20.325}$$

Le même genre de calculs fournit $\frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y)$. □

20.14 Théorème d'Abel angulaire

ThoTGjmeen

Théorème 20.88 (Abel angulaire[128]).
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence plus grand ou égal à 1 et de somme f. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Nous posons

$$\Delta_{\theta_0} = \{z = 1 - \rho e^{i\varphi} \text{ tel que } \rho > 0, \varphi \in [-\theta_0, \theta_0], |z| < 1\}. \tag{20.326}$$

Nous supposons de plus que $\sum_n a_n$ converge. Alors

$$\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_0}} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \tag{20.327}$$

Démonstration. Le résultat de ce théorème est que l'on peut calculer la limite $z \to 1$ avec des chemins contenus dans un domaine de la forme de celui dessiné à la figure 20.4.

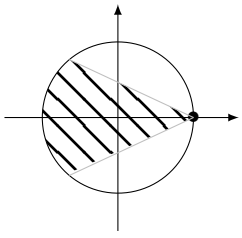


FIGURE 20.4 : La zone dans laquelle peut être le chemin qui va vers $z = 1$. LabelFigJGuKEjH

De façon très classique nous posons

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \tag{20.328}$$

et $R_n = S - S_n$. En particulier $a_n = R_{n-1} - R_n$.

Le but du théorème est de montrer que $\sum a_n z^n$ converge vers S lorsque z converge vers 1 à l'intérieur de Δ_{θ_0}. Pour cela nous calculons pour un N donné la différence $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N$ en triant les termes par

ordre de R_n, en isolant le terme R_0 et le terme R_N :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n(z^n - 1) \tag{20.329a}$$
$$= \sum_{n=1}^{N}(R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \tag{20.329b}$$
$$= R_0(z-1) + \sum_{n=1}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1 - z^n + 1) + R_N(z^N - 1) \tag{20.329c}$$
$$= R_0(z-1) + \sum_{n=1}^{N-1} R_n z^n(z-1) + R_N(z^N - 1) \tag{20.329d}$$
$$= (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n + R_N(z^N - 1). \tag{20.329e}$$

Cela est valable pour tout N et $|z| < 1$. Nous avons donc

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n + R_N(z^N - 1). \tag{20.330}$$

Par hypothèse nous avons $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$. Et de plus le membre de gauche converge parce que chacun des deux termes converge séparément. En passant à la limite nous avons pour tout $|z| < 1$:

$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n. \tag{20.331}$$

Nous voudrions étudier le comportement de la différence $f(z) - S$ lorsque z tend vers 1. Pour cela nous nous fixons $\epsilon > 0$ et $N \geqslant 1$ tel que $|R_n| < \epsilon$ dès que $n \geqslant N$. Alors pour tout $|z| < 1$ nous avons

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \underbrace{|z^n|}_{\leqslant 1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{|R_n|}_{\leqslant \epsilon} |z^n| \right) \tag{20.332a}$$
$$\leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \epsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} \tag{20.332b}$$

où nous avons utilisé la somme de la série géométrique (1.888) et l'égalité $|z^n| = |z|^n$. Avant de nous particulariser à $z \in \Delta_{\theta_0}$ nous devons anticiper un problème au dénominateur en multipliant par le binôme conjugué :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|(1+|z|)}{1-|z|^2}. \tag{20.333}$$

C'est maintenant que nous nous particularisons à $z \in \Delta_{\theta_0}$ en posant $z = \rho e^{i\varphi}$ et en remarquant que $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos(\varphi) + \rho^2$. Nous avons le calcul suivant :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{\rho(1+|z|)}{2\rho\cos(\varphi) - \rho^2} \tag{20.334a}$$
$$= \frac{1+|z|}{2\cos(\varphi) - \rho} \tag{20.334b}$$
$$\leqslant \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho} \tag{20.334c}$$
$$\leqslant \frac{2}{2\cos(\varphi) - \cos(\theta_0)} \tag{20.334d}$$
$$\leqslant \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} \tag{20.334e}$$
$$= \frac{2}{\cos(\theta_0)}. \tag{20.334f}$$

Quelques justifications.

- Vu que nous avons dans l'idée de faire $\rho \to 0$ nous supposons que $\rho < \cos(\theta_0)$.
- Nous avons $\cos(\varphi) > \cos(\theta_0)$ parce que z est dans Δ_{θ_0}.

Nous avons donc, pour tout $z \in \Delta_{\theta_0}$ que

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \epsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)}. \tag{20.335}$$

Il suffit de prendre ρ assez petit pour que

$$|z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \epsilon \tag{20.336}$$

et nous avons

$$|f(z) - S| \leqslant \epsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)} \right). \tag{20.337}$$

Nous avons donc bien $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_0}} f(z) = S$, comme nous le voulions. □

La réciproque du théorème d'Abel angulaire est que si $f(z) = \sum_n a_n z^n$ sur $B(0,1)$ se prolonge par continuité en $z = 1$ alors cette prolongation se fait par $f(1) = \sum_n a_n$. Cela est faux comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 20.89.
Nous considérons la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ qui converge[20] vers

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \tag{20.338}$$

sur $B(0,1)$. De plus nous avons

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}. \tag{20.339}$$

Donc la fonction converge bien vers quelque chose lorsque z tend vers 1. La fonction f se prolonge par continuité en 1. Pourtant la série ses coefficients $\sum_n (-1)^n$ ne converge pas. △

Le théorème suivant donne une espèce d'inverse au théorème d'Abel angulaire. En effet il dit que si la série converge en allant vers 1 le long de l'axe réel, alors ça converge vers la somme des coefficients. Il faut cependant une hypothèse en plus sur les a_n.

Théorème 20.90 (Théorème taubérien faible[128])**.**
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. Nous supposons

(1) Il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in]-1,1[}} f(x) = S$.

(2) $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et vaut S.

Démonstration. Nous notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $M = \sup_{k \geqslant 1} k|a_k|$, qui est fini par hypothèse. Pour $x \in]0,1[$ et $n \geqslant 0$ nous avons

$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k x^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k. \tag{20.340}$$

Nous utilisons la série géométrique sous la forme $1 - x^k = (1-x) \sum_{i=0}^{n} x^i$ pour écrire

$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k (1-x) \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} x^i}_{\leqslant k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \tag{20.341a}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} k a_k (1-x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k, \tag{20.341b}$$

[20] C'est la série géométrique de raison $-z$.

donc en passant à la norme

$$\big|S_n - f(x)\big| \leqslant (1-x)Mn + \sum_{k=n+1} |a_k| x^k \tag{20.342a}$$

$$\leqslant (1-x)Mn + \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\frac{k}{n}|a_k|}_{\leqslant M/n} x^k \tag{20.342b}$$

$$\leqslant (1-x)Mn + \frac{M}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \tag{20.342c}$$

$$\leqslant (1-x)Mn + \frac{M}{n} \frac{1}{1-x}. \tag{20.342d}$$

Ce que nous cherchons à étudier est le comportement $x \to 1$ et montrer que $S_n \to S$, ce qui nous incite à calculer $|S_n - f(1 - \frac{\epsilon}{n})|$ avec $0 < \epsilon < 1$:

$$\big|S_n - f\big(1 - \frac{\epsilon}{n}\big)\big| \leqslant \epsilon M + \epsilon. \tag{20.343}$$

Nous choisissons N_1 tel que $\frac{M}{n} \leqslant \epsilon^2$ dès que $n \geqslant N_1$. En sus nous savons que

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(1-\epsilon) = S. \tag{20.344}$$

Nous choisissons N_2 de telle sorte à avoir

$$\left| f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right) - S \right| < \epsilon, \tag{20.345}$$

et en prenant $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ nous avons

$$|S_n - S| \leqslant \left| S_n - f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right) \right| + \left| f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right) - S \right| \leqslant \epsilon M + 2\epsilon. \tag{20.346}$$

Il suffit de choisir ϵ suffisamment petit (en particulier pour que ϵM soit petit) pour montrer que $|S_n - S|$ est borné par un nombre arbitrairement petit. □

20.15 Passage à la limite sous le signe intégral

Un autre résultat très important pour l'étude de l'intégrabilité est le théorème de la **convergence dominée de Lebesgue** :

Théorème 20.91.
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable et $\{f_k\}$, une suite de fonctions intégrables sur E qui converge simplement vers une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Supposons qu'il existe une fonction g intégrable sur E telle que pour tout k,

$$|f(x)| \leqslant g(x) \tag{20.347}$$

pour tout $x \in E$. Alors f est intégrable sur E et

$$\int_E f = \lim_{k \to \infty} \int_E f_k. \tag{20.348}$$

20.15.1 Intégrale en dimension un

Proposition 20.92 (Critère de comparaison)**.**
Soit f mesurable sur $]a, \infty[$ et bornée sur tout $]a, b]$, et supposons qu'il existe un $X_0 \geqslant a$, tel que sur $]X_0, \infty[$,

$$|f(x)| \leqslant g(x) \tag{20.349}$$

où $g(x)$ est intégrable. Alors $f(x)$ est intégrable sur $]a, \infty[$.

Corolaire 20.93 (Critère d'équivalence)**.**
Soient f et g des fonctions mesurables et positives ou nulles sur $]a, \infty[$, bornées sur tout $]a, b]$, telles que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \tag{20.350}$$

existe dans $\bar{\mathbb{R}}$.

(1) *Si* $L \neq \infty$ *et* $\int_a^\infty g(x)dx$ *existe, alors* $\int_a^\infty f(x)dx$ *existe,*

(2) *Si* $L \neq 0$ *et si* $\int_a^\infty f(x)dx$ *existe, alors* $\int_a^\infty g(x)dx$ *existe,*

CorCritFonsTest

Corolaire 20.94 (Critère des fonctions test)**.**
Soit $f(x)$ *une fonction mesurable et positive ou nulle sur* $]a,\infty[$ *et bornée pour tout* $]a,b]$*. Nous posons*

$$L(\alpha) = \lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x), \tag{20.351}$$

et nous supposons qu'elle existe.

(1) *Si il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $L(\alpha) \neq \infty$*, alors* $\int_a^\infty f(x)dx$ *existe,*

(2) *Si il existe* $\alpha \leqslant 1$ *et* $L(\alpha) \neq 0$*, alors* $\int_a^\infty f(x)dx$ *n'existe pas.*

CorAlphaLCasInteabf

Corolaire 20.95.
Soit $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable, positive ou nulle, et bornée sur* $[a+\epsilon,b]$ $\forall \epsilon > 0$*. Si* $\lim_{x\to a}(x-a)^\alpha f(x) = L$ *existe, alors*

(1) *Si* $\alpha < 1$ *et* $L \neq \infty$*, alors* $\int_a^b f(x)dx$ *existe,*

(2) *Si* $\alpha \geqslant 1$ *et* $L \neq 0$*, alors* $\int_a^b f(x)dx$ *n'existe pas.*

20.15.2 Intégrales convergentes

Définition 20.96.
Soit f*, une fonction mesurable sur* $[a,\infty[$*, bornée sur tout intervalle* $[a,b]$*. On dit que l'intégrale*

$$\int_a^\infty f(x)dx \tag{20.352}$$

converge *si la limite*

$$\lim_{X\to\infty} \int_a^X f \tag{20.353}$$

EqDEfConvergeZeroInftX

existe et est finie.

20.15.3 La méthode de Rothstein-Trager

subSecBCRYooRVjFpS

Mes sources pour parler d'intégration de fractions rationnelles : [659].

ThoXJFatfu

Théorème 20.97 (Rothstein-Trager[660])**.**
Soient $P,Q \in \mathbb{Q}[X]$ *premiers entre eux avec* $\operatorname{pgcd}(P,Q) = 1$ *et* $\deg(P) < \deg(Q)$*. Nous supposons que* Q *est unitaire et sans facteurs carrés. Supposons que nous puissions écrire, dans un extension* $\mathbb{K}$ *de* $\mathbb{Q}$ *la primitive de* P/Q *de la façon suivante :*

$$\int \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^n c_i \ln(P_i) \tag{20.354}$$

EqCHVaDay

où les c_i *sont des constantes non nulles et deux à deux distinctes et où les* P_i *sont des polynômes unitaires non constants sans facteurs carrés et premiers deux à deux entre eux dans* $\mathbb{K}[X]$*.*

Alors les c_i *sont les racines distinctes du polynôme*

$$R(Y) = \operatorname{res}_X(P - YQ', Q) \in \mathbb{K}[Y] \tag{20.355}$$

et

$$P_i = \operatorname{pgcd}(P - c_iQ', Q). \tag{20.356}$$

Démonstration. Nous posons

$$U_i = \prod_{j\neq i} P_j. \tag{20.357}$$

(1) **Question de division** Ensuite nous dérivons formellement l'équation (20.354) et nous multiplions les deux côtés du résultat par $\prod_{j=1}^{n} P_j$:

$$P\prod_{j=1}^{n} P_j = Q\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{P'i}{P_i}\prod_{j=1}^{n} P_j = Q\sum_{i=1}^{n} c_i P'_i U_i. \tag{20.358}$$

Une première chose que nous en tirons est que Q divise le produit $P\prod_{j=1}^{n} P_j$; mais P et Q étant premiers entre eux,

$$Q \mid \prod_{j=1}^{n} P_j \tag{20.359}$$

par le théorème de Gauss 6.50.

Une seconde chose que nous tirons de (20.358) est que P_j divise $Q\sum_{i=1}^{n} c_i P'_i U_i$. De cette somme, à cause du U_i qui est divisé par P_j pour tout i sauf $i = j$, le polynôme P_j divise tous les termes sauf peut-être un. Donc il les divise tous et en particulier

$$P_j \mid Qc_j P'_J U_j \tag{20.360}$$

En nous souvenant que les P_k sont premiers entre eux, P_j ne divise pas U_j. De plus P_j étant sans facteurs carrés, les polynômes P_j et P'_j sont premiers entre eux. Il ne reste que Q. Nous en déduisons que

$$P_j \mid Q \tag{20.361}$$

pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$. Et vu que les P_i sont premiers entre eux, le fait que chacun divise Q implique que leur produit divise Q, c'est-à-dire

$$\prod_{j=1}^{n} P_j \mid Q. \tag{20.362}$$

Or nous avions déjà prouvé la division contraire. Du fait que les deux polynômes sont unitaires nous en déduisons qu'ils sont en réalité égaux :

$$Q = \prod_{j=1}^{n} P_j. \tag{20.363}$$

Nous pouvons simplifier les deux membres de (20.358) par cela :

$$P = \sum_{i=1}^{n} c_i P'_i U_i. \tag{20.364}$$

(2) **Encore un peu de division**

En dérivant (20.363) nous trouvons

$$Q' = \sum_{j=1}^{n} P'_j U_j, \tag{20.365}$$

et en écrivant P sous sa forme (20.364),

$$P - c_i Q' = \sum_{j=1}^{n} c_j P'_j U_j - \sum_{j=1}^{n} c_i P'_j U_j = \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_i) P'_j U_j. \tag{20.366}$$

Le terme $i = j$ de la somme est nul ; en ce qui concerne les autres termes, ils sont divisés par P_i parce que $P_i \mid U_j$. Donc P_i divise tous les termes de la somme et nous avons

$$P_i \mid P - c_i Q'. \tag{20.367}$$

(3) **Un pgcd pour continuer**

Nous montrons à présent que $P_i = \operatorname{pgcd}(P - c_i Q', Q)$. Pour cela nous utilisons la multiplicativité du PGCD lorsque les facteurs sont premiers entre eux :

$$\operatorname{pgcd}(P - c_i Q', Q) = \operatorname{pgcd}(P - c_i Q', \prod_{j=1}^{n} P_j) = \prod_{j=1}^{n} \operatorname{pgcd}(P - c_i Q', P_j). \tag{20.368}$$

Nous remplaçons $P - c_iQ'$ par son expression (20.366) et nous écrivons un des facteurs du produit :

$$\operatorname{pgcd}(P - c_iQ', P_j) = \operatorname{pgcd}(\sum_{k=1}^{n}(c_k - c_i)P'_kU_k, P_j) \tag{20.369}$$

Le polynôme P_j divise tous les U_k sauf celui avec $k = j$. Donc le lemme 6.57(1) nous permet de dire

$$\operatorname{pgcd}(P - c_iQ', P_j) = \operatorname{pgcd}\left((c_j - c_i)P'_jU_j, P_j\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ P_j & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{20.370}$$

La seconde ligne provient du fait que nous ayons déjà montré que $P_j \mid P - c_jQ'$. En fin de compte,

$$\operatorname{pgcd}(P - c_iQ', Q) = P_i. \tag{20.371}$$

(4) **Une histoire de résultant**

Les nombres c_i sont tels que les polynômes $P - c_iQ'$ et Q ne sont pas premiers entre eux. Vu que les P_i sont non nuls, la proposition 8.23 nous dit que le résultant

$$\operatorname{res}_X(P - c_iQ', Q) = 0. \tag{20.372}$$

Donc les c_i sont des racines du polynôme (en Y)

$$R(Y) = \operatorname{res}_X(P - YQ', Q). \tag{20.373}$$

EqOOjmwJj

Nous n'avons pas prouvé qu'ils étaient *toutes* les racines[21].

(5) **Toutes les racines**

Nous allons maintenant montrer que les c_i étaient toutes les racines imaginables du polynôme (20.373) dans toutes les extensions de $\mathbb{Q}$. Soit donc c une racine de R dans une extension $\hat{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$ qui ne soit pas parmi les c_i de la formule (20.354). Étant donné que c est racine du résultat, les polynômes $P - cQ'$ et Q ont un PGCD non trivial, c'est-à-dire non constant. Donc

$$\operatorname{pgcd}(P - cQ', Q) = S \in \hat{\mathbb{K}}[X] \tag{20.374}$$

est un polynôme non constant. Si T un facteur irréductible de S, alors T divise $P - cQ'$ et Q, mais $Q = \prod_{i=1}^{n} P_i$ avec les P_i premiers entre eux. Donc T ne peut diviser que l'un (et exactement un) d'entre eux[22]. Soit P_{i_0} celui qui est divisé par T. La relation (20.366) dans ce contexte donne :

$$P - cQ' = \sum_{j=1}^{n}(c_j - c)P'_jU_j \tag{20.375}$$

Le polynôme T divise tous les U_j avec $j \neq i_0$, mais comme en plus il divise $P - cQ'$, il divise aussi le dernier terme de la somme :

$$T \mid (c_{i_0} - c)P'_{i_0}U_{i_0}. \tag{20.376}$$

Le polynôme T ne divisant pas U_{i_0} et $(c_{i_0} - c)$ étant non nul, nous concluons que T divise P'_{i_0}. Mais cela n'est pas possible parce que nous avons supposé que P_{i_0} était sans facteur carré, ce qui voulait entre autres dire que P_{i_0} et P'_{i_0} n'ont pas de facteurs communs.

□

Ce théorème suggère la méthode suivante pour trouver la primitive de la fraction rationnelle P/Q (si elle vérifie les hypothèses)

(1) Écrire le résultant $R(y) = \operatorname{res}_X(P - yQ', Q)$ et en trouver les racines $\{c_i\}_{i=1,\dots,n}$.

(2) Calculer les polynômes $P_i = \operatorname{pgcd}(P - c_iQ', Q)$.

(3) Écrire la réponse :

$$\int \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} c_i \ln(P_i). \tag{20.377}$$

[21] De plus, nous n'avons pas de garanties que ces racines soient dans $\mathbb{Q}$, et en fait il y a des cas dans lesquels les c_i n'y sont pas.

[22] On ne peut pas diviser deux trucs qui sont premiers entre eux ; c'est une question de cohérence, madame !

Notons que le polynôme $R(Y)$ est de degré $\deg(Q)$ (pour le voir, faire un peu de comptage de lignes et colonnes dans la matrice de Sylvester), donc il n'est à priori pas pire à factoriser que Q lui-même[23]. Mais il se peut que nous ayons de la chance et que R soit plus facile que Q.

À part qu'on a peut-être plus de chance avec R qu'avec Q, l'avantage de la méthode est qu'elle permet d'éviter de passer par des extensions de $\mathbb{Q}$ non nécessaires[24].

Exemple 20.98 ([660]).
Prenons la fraction rationnelle $\frac{x}{x^2-3}$. L'intégration via les fractions simples est :

$$\int \frac{x}{x^2-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln(x-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln(x^2-3). \tag{20.378}$$

Nous voyons que dans la réponse, il n'y a pas de racines. Passer par l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ est par conséquent peut-être un effort inutile. Voyons comment les choses se mettent avec la méthode Rothstein-Trager.

D'abord

$$\begin{aligned}
R(Y) &= \operatorname{res}_X(X - 2YX, X^2 - 3) && (20.379a)\\
&= \operatorname{res}_X\big((1-2Y)X, X^2-3\big) && (20.379b)\\
&= \det\begin{pmatrix} 1-2Y & 0 & 0\\ 0 & 1-2Y & 0\\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} && (20.379c)\\
&= (1-2Y)\big(-3(1-2Y)\big) && (20.379d)\\
&= -3(1-2Y)^2, && (20.379e)
\end{aligned}$$

dont les solutions sont faciles : il n'y a que la racine double $y = \frac{1}{2}$. La somme (20.354) sera donc réduite à un seul terme avec $c_1 = \frac{1}{2}$. Nous calculons P_1 :

$$P_1 = \operatorname{pgcd}(X - \frac{1}{2}2X, X^2 - 3) = \operatorname{pgcd}(0, X^2 - 3) = X^2 - 3, \tag{20.380}$$

et par conséquent

$$\int \frac{X}{X^2-3} = \frac{1}{2}\ln(X^2-3). \tag{20.381}$$

À aucun moment nous ne sommes sortis de $\mathbb{Q}$. △

Comme vu sur cet exemple, l'intérêt du théorème de Rothstein-Trager est de permettre, lorsqu'on a de la chance, d'en profiter, et non de nous en rendre compte à la fin en remarquant bêtement que la réponse pouvait s'écrire dans $\mathbb{Q}[X]$.

Remarque 20.99.
Afin d'utiliser cette méthode, il faut s'assurer que Q soit sans facteurs carrés. Si nous devons intégrer un $\frac{P}{Q}$ quelconque, nous devons commencer par écrire

$$Q = Q_1Q_2^2Q_3^3\dots Q_r^r, \tag{20.382}$$

et ensuite il y a moyen de ramener l'intégrale de P/Q à des intégrales de $\frac{P}{Q_1\dots Q_r}$. Cela ne demande pas de factoriser complètement Q, mais seulement de trouver ses facteurs irréductibles Q_i dans $\mathbb{Q}[X]$.

Dans l'exemple donné plus haut, $Q = X^2 - 3$ a des facteurs irréductibles autres que Q lui-même dans $\mathbb{R}[X]$, mais nous n'en avons pas besoin.

Voici une exemple où nous évitons de passer par les complexes.

EXooIPEQooGKDjea

Exemple 20.100 ([661]).
À calculer : $\int \frac{1}{x^3+x}$. La décomposition en fractions simples donne :

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{1/2}{x-i} - \frac{1/2}{x+i}. \tag{20.383}$$

Déjà cette décomposition passe par l'extension $\mathbb{Q}[i]$, et le calcul de la primitive de $\frac{1}{x+i}$ demande le logarithme complexe qui ne sera vu que dans la proposition 26.43 au prix d'un peu de sang. Nous verrons dans l'exemple 26.44 comment ça se passe en passant par les complexes.

[23] C'est de la factorisation de Q qu'on a besoin pour utiliser la méthode de décomposition en fractions simples.
[24] J'imagine que pour un ordinateur, c'est plus facile d'éviter les extensions.

En ce qui concerne la méthode de Rothstein-Trager, nous commençons par calculer le résultant (qui est tout de même un peu de calcul) :

$$P(y) = \text{res}_X\big(-3yX^2 - y + 1, X^3 - X\big) \tag{20.384a}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -3y & 0 & 1-y & 0 & 0 \\ 0 & -3y & 0 & 1-y & 0 \\ 0 & 0 & -3y & 0 & 1-y \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{20.384b}$$

$$= -(y-1)^2(2y+1)^2 \tag{20.384c}$$

```
------------------------------------------------------------------------
| Sage Version 5.7, Release Date: 2013-02-19                           |
| Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.          |
| Type "help()" for help.                                              |
------------------------------------------------------------------------
sage: y=var('y')
sage: R=matrix(5,5,[-3*y,0,1-y,0,0,0,-3*y,0,1-y,0,0,0,
                    -3*y,0,1-y,1,0,1,0,0,0,1,0,1,0])
sage: R.determinant().factor()
-(y - 1)*(2*y + 1)^2
```

Les solutions sont $c_1 = 1$ et $c_2 = -\frac{1}{2}$. Nous pouvons alors calculer les P_i :

$$P_1 = \text{pgcd}(-3X^2, X^3 + X) = X \tag{20.385}$$

et

$$P_2 = \text{pgcd}(\frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}, X^3 + X) = X^2 + 1, \tag{20.386}$$

et finalement

$$\int \frac{1}{X^3 + X} = \ln(X) - \frac{1}{2}\ln(X^2 + 1). \tag{20.387}$$

△

Notons qu'il n'y a pas de miracles : lorsque la réponse contient des racines, nous ne pouvons pas couper à passer par des extensions et factoriser un peu à la dure.

ExYQODuyU

Exemple 20.101 ([661]).
Nous voulons calculer

$$\int \frac{1}{X^2 + 1}. \tag{20.388}$$

Nous posons donc $P = 1$ et $Q = X^2 + 1$. Le résultant à calculer est

$$P(y) = \text{res}_X(-2yX + 1, X^2 + 1) = \det\begin{pmatrix} -2y & 1 & 0 \\ 0 & -2y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4y^2 + 1. \tag{20.389a}$$

Les racines de cela sont complexes et il n'y a donc pas d'échappatoires : $c_1 = \frac{i}{2}$, $c_2 = -\frac{i}{2}$. Ensuite, étant donné que $X^2 + 1 = (X + i)(X - i) = i(-iX + 1)(X - i)$ nous avons

$$P_1 = \text{pgcd}(-iX + 1, X^2 + 1) = X + i. \tag{20.390}$$

Notons que de façon naturelle, nous aurions écrit $P_1 = 1 - iX$, mais par convention nous considérons le PGCD unitaire. Cela ne change rien à la réponse parce que changer P_i en kP_i ne fait que rajouter une constante $\ln(k)$ à la primitive trouvée.

De la même façon,

$$P_2 = \text{pgcd}(1 + iX, X^2 + 1) = X - i. \tag{20.391}$$

Au final nous écrivons

$$\int \frac{1}{X^2 + 1} = \frac{i}{2}\ln(X + i) - \frac{i}{2}\ln(X - i). \tag{20.392}$$

△

Remarque 20.102.
Tout cela est si nous voulons absolument écrire la primitive avec des logarithmes de polynômes. Pour celui de l'exemple 20.101, nous avons trouvé

$$\int \frac{1}{X^2+1} = \frac{i}{2}\ln(X+i) - \frac{i}{2}\ln(X-i). \tag{20.393}$$ EqBCjCCbs

Mais

```
sage: f(x)=1/(x**2+1)
sage: f.integrate(x)
x |--> arctan(x)
```

Si nous acceptons de passer aux fonctions trigonométriques (inverses), la primitive prend un tour très différent et bien réel. Ces deux visions de l'univers sont bien entendu[25] compatibles. En effet, afin de tomber juste, nous allons prendre la primitive

$$f(x) = \frac{i}{2}\ln(ix-1) - \frac{i}{2}\ln(ix+1) \tag{20.394}$$

au lieu de (20.393). Il s'agit seulement de multiplier l'intérieur des logarithmes, ce qui ne donne qu'une constante de différence. Ensuite nous passons à la forme trigonométrique des nombres complexes : $ix-1 = \sqrt{x^2+1}e^{i\arctan(-x)}$ et $ix+1 = \sqrt{x^2+1}e^{i\arctan(x)}$. Avec un peu de calcul,

$$f(x) = -\frac{1}{2}\Big(\arctan(-x) - \arctan(x)\Big) = \arctan(x). \tag{20.395}$$

20.16 Rappel sur les intégrales usuelles

Soit une fonction

$$\begin{aligned} f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned} \tag{20.396}$$

L'intégrale de f sur le segment $[a,b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$ est le nombre égal à l'aire de la surface située entre le graphe de f et l'axe des x, comme indiqué à la figure 20.5.

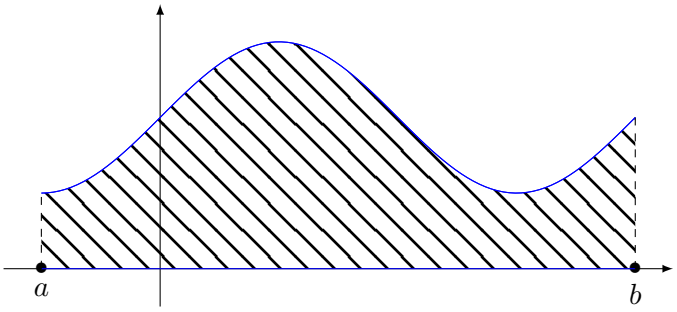


FIGURE 20.5 : L'intégrale de f entre a et b représente la surface sous la fonction. LaBcHFgKKLooMbjxdI

Définition 20.103.
Si f est une fonction de une variable à valeurs réelles, une ***primitive*** *de f est une fonction F telle que $F' = f$.*

Toute fonction continue admet une primitive.

Théorème 20.104 (Théorème fondamental du caclul intégral)**.**
Si f est une fonction positive et continue, et si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{20.397}$$

[25] Si on croit que la mathématique est cohérente.

Remarque 20.105.
Si f est une fonction continue par morceaux, l'intégrale de f se calcule comme la somme des intégrales de ses morceaux. Plus précisément si nous avons $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ et si f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout i, alors nous posons

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx. \tag{20.398}$$

Sur chacun des morceaux, l'intégrale se calcule normalement en passant par une primitive.

20.17 Intégrales le long de chemins

20.17.1 Circulation d'un champ de vecteur

Définition 20.106.
Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs et un chemin $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$. On appelle ***circulation*** *de F le long du chemin σ le scalaire*

$$\int_a^b F\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t)dt. \tag{20.399}$$

EqDeffykZwh

Il existe de nombreuses notations pour cela ; entre autres :

$$\int_\sigma F = \int_\sigma F \cdot ds. \tag{20.400}$$

En physique, la circulation de la force le long d'un chemin est le travail de la force.

Exemple 20.107.
À la surface de la Terre, le champ de gravitation est donné par

$$G(x,y,z) = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{20.401}$$

Si nous considérons un mobile qui monte à vitesse constante jusqu'à la hauteur h, c'est-à-dire le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \tag{20.402}$$

avec $t \in [0,h]$. Le travail de la gravitation est alors donné par

$$W = \int_0^h G\big(\sigma(t)\big) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -mg \int_0^h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -mgh. \tag{20.403}$$

Cela est bien le résultat usuel de l'énergie potentielle. Nous allons voir bientôt que nous nommons la fonction mgh énergie *potentielle* précisément parce que la force dérive de ce potentiel. △

Exemple 20.108.
Soit le chemin

$$\begin{aligned} \sigma\colon [0,2\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20.404}$$

et le champ de vecteurs

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{20.405}$$

La circulation de ce champ de vecteur le long de l'hélice σ est

$$\begin{aligned}\int_\sigma F\cdot ds &= \int_0^{2\pi}(F\circ\sigma)(t)\cdot\sigma'(t)dt\\ &= \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\\ t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\sin(t)\\ 1\end{pmatrix}dt\\ &= \int_0^{2\pi}tdt\\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}\\ &= 2\pi^2.\end{aligned}\tag{20.406}$$

△

Proposition 20.109.
La circulation d'un champ de vecteurs le long d'un chemin ne dépend pas du paramétrage. En d'autres termes, si σ_1 et σ_2 sont deux chemins équivalents, alors

$$\int_{\sigma_1}F=\int_{\sigma_2}F.\tag{20.407}$$

Démonstration. Soient deux chemins $\sigma_1\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3$ et $\sigma_2\colon[c,d]\to\mathbb{R}^3$ équivalents, c'est-à-dire tels que

$$\sigma_1(t)=\sigma_2\big(\varphi(t)\big)\tag{20.408}$$

où $\varphi\colon[a,b]\to[c,d]$ strictement croissante. En utilisant le fait que $\sigma_1'(t)=\varphi'(t)\sigma_2'\big(\varphi(t)\big)$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_1}F\cdot ds &= \int_a^b F\big(\sigma_1(t)\big)\cdot\sigma_1'(t)dt\\ &= \int_a^b F\Big(\sigma_2\big(\varphi(t)\big)\Big)\cdot\sigma_2'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt\\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}F\big(\sigma_2(s)\big)\cdot\sigma_2(s)ds\\ &= \int_c^d F\big(\sigma_2(s)\big)\cdot\sigma_2'(s)ds\\ &= \int_{\sigma_2}F\cdot ds.\end{aligned}\tag{20.409}$$

où nous avons effectué le changement de variables $s=\varphi(t)$, $ds=\varphi'(t)dt$. □

Remarque 20.110.
Si σ_2 est le chemin opposé de σ, alors

$$\int_{\sigma_2}F=-\int_{\sigma_1}F.\tag{20.410}$$

20.18 Circulation d'un champ conservatif

Si nous avons une fonction scalaire $V\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, nous pouvons construire un champ de vecteur en prenant le gradient :

$$F(x)=\nabla V(x).\tag{20.411}$$

On dit que le champ de vecteur F **dérive** de V, et on dit que V est le **potentiel** de F. Nous posons la définition suivante :

Définition 20.111.
*Un champ de vecteurs $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ est un champ **conservatif** si il existe une fonction $V\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que*

$$F(x)=\nabla V(x).\tag{20.412}$$

Nous disons aussi parfois que le champ F dérive d'un potentiel *ou bien qu'il s'agit d'un* champ de gradient.

Les champs de vecteurs conservatifs sont particulièrement importants parce que presque toutes les forces connues en physiques dérivent d'un potentiel. Nous verrons que la terminologie « conservatif » provient du fait que les forces de ce type conservent l'énergie associée.

Proposition 20.112.
Considérons une fonction $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *(que nous appellerons* potentiel*) et le champ de vecteur qui en dérive :*

$$F = \nabla V. \tag{20.413}$$

Alors

$$\int_\sigma F \cdot ds = V\big(\sigma(b)\big) - V\big(\sigma(a)\big). \tag{20.414}$$

Autrement dit, le travail nécessaire pour déplacer un objet d'un point à un autre dans un champ de force conservatif vaut la différence de potentiel entre le point de départ et le point d'arrivée.

Démonstration. Par définition,

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b F\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t)dt. \tag{20.415}$$

Eqintparddeftrav

Nous pouvons transformer l'intégrante de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t) &= \nabla V\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}\big(\sigma(t)\big)\sigma_x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}\big(\sigma(t)\big)\sigma_y'(t) + \frac{\partial V}{\partial z}\big(\sigma(t)\big)\sigma_z'(t) \\ &= \frac{d}{dt}\Big[V\big(\sigma(t)\big)\Big] \end{aligned} \tag{20.416}$$

où nous avons posé

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_x(t) \\ \sigma_y(t) \\ \sigma_z(t) \end{pmatrix} \tag{20.417}$$

et utilisé à l'envers la formule de dérivation de fonction composée pour

$$\frac{d}{dt}\Big[V\big(\sigma(t)\big)\Big] = \Big((V \circ \sigma)(t)\Big)'. \tag{20.418}$$

En remettant ces expressions dans l'intégrale (20.415),

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b \frac{d}{dt}\Big[V\big(\sigma(t)\big)\Big]dt = V\big(\sigma(b)\big) - V\big(\sigma(a)\big). \tag{20.419}$$

□

Exemple 20.113.
Nous savons que le champ de gravitation dérive d'un potentiel. À la surface de la Terre, le potentiel de gravitation vu par une masse m est donné par la fonction $V(x, y, z) = mgz$. Si nous voulons soulever cette masse d'une hauteur h, cela demandera toujours une énergie mgh, quel que soit le chemin suivi : en ligne droite vertical, en diagonal, en hélice, … △

Exemple 20.114.
À plus grande échelle, le champ de gravitation est encore un champ qui dérive d'un potentiel. En coordonnées sphériques,

$$V(\rho, \theta, \varphi) = k\frac{m}{\rho} \tag{20.420}$$

Lorsqu'un satellite a une orbite de rayon R autour la Terre, il reste sur la sphère $\rho = R$. Donc il reste sur une surface sur laquelle V est constante. Il n'y a donc pas de travail de la force de gravitation ! C'est pour cela qu'un satellite peut tourner pendant des siècles sans apport énergétique. △

Exemple 20.115.
Soit le champ de vecteurs

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \tag{20.421}$$

et le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} t^4/4 \\ \sin^3(t\frac{\pi}{2}). \end{pmatrix} \tag{20.422}$$

Nous voulons calculer la circulation de F le long du chemin σ entre $t=0$ et $t=1$.

La première chose à voir est que $F=\nabla V$ avec $V(x,y)=xy$. Donc la circulation sera donnée par

$$\int_\sigma F\cdot ds=V\big(\sigma(1)\big)-V\big(\sigma(0)\big)=V\big(\frac{1}{4},1\big)-V(0,0)=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}. \tag{20.423}$$

Nous n'avons pas réellement calculé l'intégrale. △

20.19 Intégration de fonction à deux variables

20.19.1 Intégration sur un domaine rectangulaire

PgRapIntMultFubiniRect

Soit une fonction positive

$$\begin{aligned} f\colon [a,b]\times[c,d]&\to\mathbb{R}^+\\ (x,y)&\mapsto f(x,y). \end{aligned} \tag{20.424}$$

L'intégrale de f sur le rectangle $[a,b]\times[c,d]$ est le volume sous le graphe de la fonction. C'est-à-dire le volume de l'ensemble

$$\{(x,y,z)\text{ tel que }(x,y)\in[a,b]\times[c,d],z\leqslant f(x,y)\}. \tag{20.425}$$

Théorème 20.116 (Théorème de Fubini)**.**
Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $\mathcal{R}=[a,b]\times[c,d]$. Alors

$$\int_{\mathcal{R}}f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy. \tag{20.426}$$

En pratique, nous utilisons le théorème de Fubini pour calculer les intégrales sur des rectangles.

Exemple 20.117.
Nous voudrions intégrer la fonction $f(x,y)=4+x^2+y^2$ sur le rectangle de la figure 20.6.

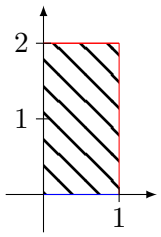


FIGURE 20.6 : Intégration sur un rectangle LabelFigVNBGooSqMsGU

L'ensemble sur lequel nous intégrons est donné par le produit cartésien d'intervalles $E=[0,1]\times[0,2]$. Le théorème de Fubini montre que nous pouvons intégrer séparément sur l'intervalle horizontal et vertical :

$$\int_{E=[0,1]\times[0,2]}f=\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,2]}(4-x^2-y^2)dy\right)dx. \tag{20.427}$$

Ces intégrales sont maintenant des intégrales usuelles qui s'effectuent en calculant des primitives :

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_0^2(4-x^2-y^2)dy\,dx&=\int_0^1\left[4y-x^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2dx\\ &=\int_0^1(8-2x^2-\frac{8}{3})dx\\ &=\left[\frac{16x}{3}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^1\\ &=\frac{14}{3}. \end{aligned} \tag{20.428}$$

Avec Sage, on peut faire comme ceci :

```
------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                   |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.    |
------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y)=4-x**2-y**2
sage: f.integrate(y,0,2).integrate(x,0,1)
(x, y) |--> 14/3
```

△

20.19.2 Intégration sur un domaine non rectangulaire

PgRapIntMultFubiniTri

Nous voulons maintenant intégrer la fonction $f(x,y)=x^2+y^2$ sur le triangle de la figure 20.7.

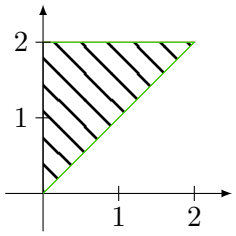


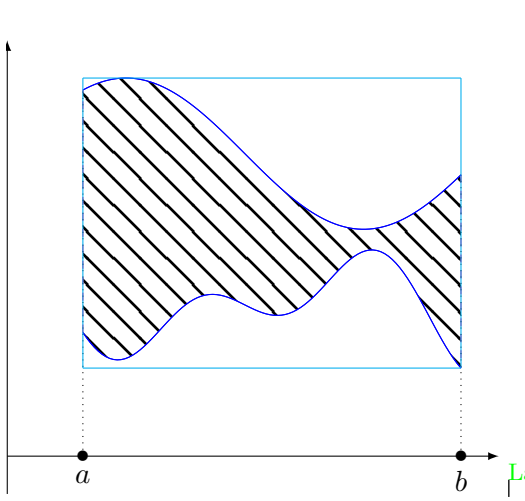
FIGURE 20.7 : Intégration sur un triangle

LabelFigCURGooXvruWV

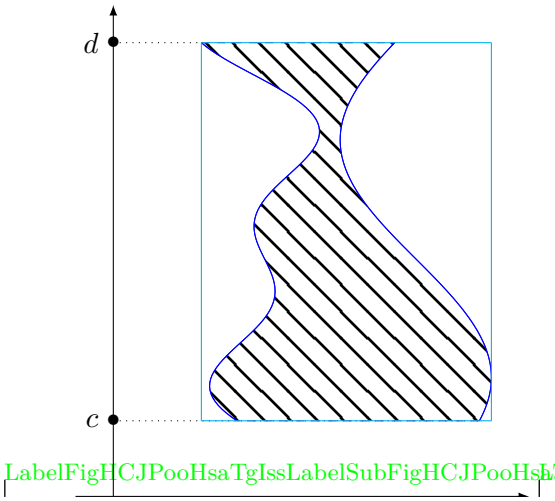
Étant donné que y varie de 0 à 2 et que *pour chaque* y, la variable x varie de 0 à y, nous écrivons l'intégrale sur le triangle sous la forme :

$$\int_{\text{triangle}}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^2\left(\int_0^y(x^2+y^2)dx\right)dy. \tag{20.429}$$

Il existe principalement deux types de domaines non rectangulaires : les « horizontaux » et les « verticaux », voir figure 20.8.



(a) Un domaine horizontal.



(b) Un domaine vertical.

LabelFigHCJPooHsaTgIssLabelSubFigHCJPooHsaTgI0FigHCJPooHsa

FIGURE 20.8 : Deux types de surfaces. Nous avons tracé un rectangle qui contient chacune des deux surfaces. L'intégrale sur un domaine sera l'intégrale sur le rectangle de la fonction qui vaut zéro en dehors du domaine.

LabelFigHCJPooHsaTgI

Les surfaces horizontales sont de la forme

$$D=\{(x,y)\text{ tel que }x\in[a,b],\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\} \tag{20.430}$$

où φ_1 et φ_2 sont les deux fonctions qui bornent le domaine. Le domaine D est la région comprise entre les graphes de φ_1 et φ_2. Pour un tel domaine nous avons

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{20.431}$$

Les surfaces verticales sont de la forme

$$D = \{(x,y) \text{ tel que } y \in [c,d], \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\} \tag{20.432}$$

où φ_1 et φ_2 sont les deux fonctions qui bornent le domaine. Le domaine D est la région comprise entre les graphes de φ_1 et φ_2. Dans ces cas nous avons

$$\int_D f = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{20.433}$$

Proposition 20.118.
L'aire du domaine D vaut l'intégrale de la fonction $f(x,y) = 1$ sur D :

$$Aire(D) = \int_D dxdy. \tag{20.434}$$

Démonstration. Supposons que le domaine soit du type « horizontal ». En utilisant le théorème de Fubini avec $f(x,y) = 1$ nous avons

$$\int_D dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right] dx = \int_a^b \big[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\big]. \tag{20.435}$$

Cela représente l'aire sous φ_2 moins l'aire sous φ_1, et par conséquent l'aire contenue entre les deux. □

Exemple 20.119.
Cherchons la surface du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dessinée à la figure 20.9.

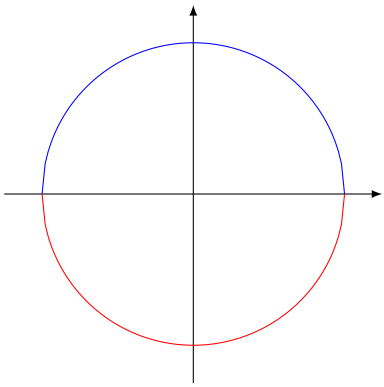


FIGURE 20.9 : En bleu, la fonction $\sqrt{r^2-x^2}$ et en rouge, la fonction $-\sqrt{r^2-x^2}$. LaTeXFigGMMAooQegASg

Le domaine est donné par $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$ et $x \in [-r,r]$ où $\varphi_1(x) = -\sqrt{r^2-x^2}$ et $\varphi_2(x) = \sqrt{r^2-x^2}$. L'aire est donc donnée par

$$A = \int_{-r}^{r} \big[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\big]dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}dx = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}. \tag{20.436}$$

Nous effectuons le premier changement de variables $x = ru$, donc $dx = rdu$. En ce qui concerne les bornes, si $x = 0$, alors $u = 0$ et si $x = r$, alors $u = 1$. L'intégrale à calculer devient

$$A = 4\int_0^1 \sqrt{r^2 - r^2u^2}rdu = 4r^2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du. \tag{20.437}$$

Cette dernière intégrale se calcule en posant

$$\begin{aligned} u &= \sin(t) \quad du = \cos(t)dt \\ u &= 0 \qquad\quad t = 0 \\ u &= 1 \qquad\quad t = \pi/2. \end{aligned} \tag{20.438}$$

Nous avons

$$A = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt. \tag{20.439}$$

En utilisant la formule $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$, nous avons

$$A = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \pi r^2. \tag{20.440}$$

△

20.19.3 Changement de variables

Nous n'allons pas parler de changements de variables maintenant parce que les principaux exemples sont les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques qui requièrent les fonctions trigonométriques. Ce sera pour la section 18.15.

20.20 Les intégrales triples

Les intégrales triples fonctionnent exactement de la même manière que les intégrales doubles. Il s'agit de déterminer sur quelle domaine les variables varient et d'intégrer successivement par rapport à x, y et z. Il est autorisé de permuter l'ordre d'intégration[26] à condition d'adapter les domaines d'intégration.

Exemple 20.120.
Soit le domaine parallélépipédique rectangle

$$R = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, 4]. \tag{20.441}$$

Pour intégrer la fonction $f(x, y, z) = x^2 y \sin(z)$ sur R, nous faisons

$$\begin{aligned} I &= \int_R x^2 y \sin(z)\, dxdydz \\ &= \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_0^4 x^2 y \sin(z) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_1^2 x^2 y (1 - \cos(4)) dy \\ &= \int_0^1 \frac{3}{2}(1 - \cos(4)) x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\big(1 - \cos(4)\big). \end{aligned} \tag{20.442}$$

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y,z)=x**2*y*sin(z)
sage: f.integrate(x,0,1).integrate(y,1,2).integrate(z,0,4)
(x, y, z) |--> -1/2*cos(4) + 1/2
```

△

Exemple 20.121.
Soit D la région délimitée par le plan $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ et la surface d'équation

$$z = x^2 + y^2. \tag{20.443}$$

Cherchons à calculer $\int_D x\, dx\, dy\, dz$. Ici, un dessin indique que le volume considéré est $z \geqslant x^2 + y^2$. Il y a plusieurs façons de décrire cet ensemble. Une est celle-ci :

$$\begin{aligned} &z\colon 0 \to 2 \\ &x\colon 0 \to \sqrt{z} \\ &y\colon 0 \to \sqrt{z - x^2}. \end{aligned} \tag{20.444}$$

[26] En toute rigueur, cela n'est pas vrai, mais nous ne considérons seulement des cas où cela est autorisé.

Cela revient à dire que z peut prendre toutes les valeurs de 0 à 2, puis que pour chaque z, la variable x peut aller de 0 à $\sqrt{z}$, mais que pour chaque z et x fixés, la variable y ne peut pas dépasser $\sqrt{z-x^2}$. En suivant cette méthode, l'intégrale à calculer est

$$\int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{z}} dx \int_0^{\sqrt{z-x^2}} f(x,y,z)dy. \tag{20.445}$$

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y,z)=x
sage: assume(z>0)
sage: assume(z-x**2>0)
sage: f.integrate(y,0,sqrt(z-x**2)).integrate(x,0,sqrt(z)).integrate(z,0,2)
(x, y, z) |--> 8/15*sqrt(2)
```

Notez qu'il a fallu aider Sage en lui indiquant que $z > 0$ et $z - x^2 > 0$.

Un autre paramétrage serait

$$\begin{aligned} x&\colon 0 \to \sqrt{2} \\ y&\colon 0 \to \sqrt{2-x^2} \\ z&\colon x^2+y^2 \to 2. \end{aligned} \tag{20.446}$$

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y,z)=x
sage: assume(2-x**2>0)
sage: f.integrate(y,0,sqrt(z-x**2)).integrate(x,0,sqrt(z)).integrate(z,0,2)
(x, y, z) |--> 8/15*sqrt(2)
```

Écrivons le détail de cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^2 x dz \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2)dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} dx\, x \left[(2-x^2)y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2-x^2}} \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{3}x(2-x^2)^{3/2}dx. \end{aligned} \tag{20.447}$$

Ici nous effectuons le changement de variable $u = x^2$, $du = 2xdx$. Ne pas oublier de changer les bornes de l'intégrale :

$$I = \frac{1}{3}\int_0^2 (2-u)^{3/2}du. \tag{20.448}$$

Le changement de variable $t = 2 - u$, $dt = -du$ fait venir (attention aux bornes !!)

$$I = -\frac{1}{3}\int_2^0 t^{3/2}dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^{5/2}}{5/2}\right]_0^2 = \frac{8}{15}\sqrt{2}. \tag{20.449}$$

△

20.20.1 Volume

Parmi le nombreuses interprétations géométriques de l'intégrale triple, notons celle-ci :

Proposition 20.122.
Soit $D \subset \mathbb{R}^3$. Le volume de D est donné par

$$Vol(D) = \int_D dxdydz. \tag{20.450}$$

C'est-à-dire l'intégrale de la fonction $f(x,y,z) = 1$ sur D.

Suivant les points de vue, cette proposition peut être considérée comme une *définition* du volume.

ExemVolSphCart

Exemple 20.123.
Calculons le volume de la sphère de rayon R. Le domaine de variation des variables x, y et z pour la sphère est

$$\begin{aligned} x&: -R \to R \\ y&: -\sqrt{R^2-x^2} \to \sqrt{R^2-x^2} \\ z&: -\sqrt{R^2-x^2-y^2} \to \sqrt{R^2-x^2-y^2}. \end{aligned} \tag{20.451}$$

Par conséquent nous devons calculer l'intégrale

$$V = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz. \tag{20.452}$$

La première intégrale est simple :

$$V = 2\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}dy. \tag{20.453}$$

Afin de simplifier la notation, nous posons $a = R^2 - x^2$. Ceci n'est pas un changement de variables : juste une notation provisoire le temps d'effectuer l'intégration sur y. Étudions donc

$$I = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \sqrt{a-y^2}dy, \tag{20.454}$$

ce qui est la surface du demi-disque de rayon $\sqrt{a}$. Nous avons donc

$$I = \frac{\pi a}{2} = \frac{\pi}{2}(R^2-x^2), \tag{20.455}$$

et

$$V = 2\int_{-R}^{R} \frac{\pi}{2}(R^2-x^2)dx = \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{20.456}$$

△

Exemple 20.124.
Nous pouvons calculer le volume de la sphère en utilisant les coordonnées sphériques. Les bornes des variables pour la sphère de rayon R sont

$$\begin{aligned} \rho&: 0 \to R \\ \theta&: 0 \to \pi \\ \varphi&: 0 \to 2\pi. \end{aligned} \tag{20.457}$$

En n'oubliant pas le jacobien $\rho^2\sin(\theta)$, l'intégrale à calculer est

$$V = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \rho^2\sin(\theta)d\theta \tag{20.458}$$

L'intégrale sur φ fait juste une multiplication par 2π. Celle sur ρ vaut

$$\int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{R^3}{3}. \tag{20.459}$$

L'intégrale sur θ donne

$$\int_0^{\pi} \sin(\theta)d\theta = [-\cos(\theta)]_0^{\pi} = 2. \tag{20.460}$$

Le tout fait par conséquent

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{20.461}$$

Sans contestes, le passage aux coordonnées sphériques a considérablement simplifié le calcul par rapport à celui de l'exemple 20.123. △

20.21 Un petit peu plus formel

20.21.1 Intégration sur un domaine non rectangulaire

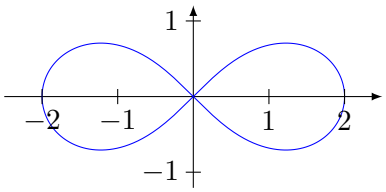


FIGURE 20.10 : Intégrer sur des domaines plus complexes. LabelFigPONXooXYjEot

La méthode de Fubini ne fonctionne plus sur un domaine non rectangulaire tel que celui de la figure 20.10. Nous allons donc utiliser une astuce. Considérons le domaine

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a < x < b \text{ et } \alpha(x) < y < \beta(x)\} \tag{20.462}$$

représenté sur la figure 20.10. Nous considérons la fonction

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{20.463}$$

Ensuite intégrons $\tilde{f}$ sur un rectangle qui englobe la surface à intégrer à l'aide de Fubini. Étant donné que $\tilde{f} = f$ sur la surface et que $\tilde{f}$ est nulle en dehors, nous avons

$$\int_E f = \int_E \tilde{f} = \int_{\text{rectangle}} \tilde{f} = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx. \tag{20.464}$$

Dans le cas de l'intégrale de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur le triangle de la figure 20.7, nous avons

$$\int_{\text{triangle}} (x^2+y^2)dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^y (x^2+y^2)dx \right) dy. \tag{20.465}$$

Remarque 20.125.
Le nombre $\int_D f(x,y)dxdy$ ne dépend pas du choix du rectangle englobant D.

En pratique, nous calculons l'intégrale en utilisant une extension du théorème de Fubini :

Théorème 20.126.
Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue où D est un domaine de type vertical ou horizontal.

(1) Si D est vertical, alors

$$\int_D f = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx. \tag{20.466}$$

(2) Si D est horizontal, alors

$$\int_D f = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy. \tag{20.467}$$

20.21.1.1 Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires sont données par le difféomorphisme

$$\begin{aligned} g\colon]0,\infty[\times]0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \setminus D \\ (r,\theta) &\mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \end{aligned} \tag{20.468}$$

où D est la demi-droite $y = 0$, $x \geqslant 0$. Le fait que les coordonnées polaires ne soient pas un difféomorphisme sur tout $\mathbb{R}^2$ n'est pas un problème pour l'intégration parce que le manque de difféomorphisme est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$. Le jacobien est donné par

$$Jg = \det \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} = r. \tag{20.469}$$

20.21.1.2 Coordonnées sphériques

SubSubCoordSpJxhMwm

Les coordonnées sphériques sont données par

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi & \\ y = r\sin\theta\sin\varphi & \text{avec} \quad \begin{array}{l} r\in]0,\infty[\\ \theta\in]0,2\pi[\\ \phi\in]0,\pi[. \end{array} \\ z = r\cos\varphi & \end{cases} \tag{20.470}$$

OMEqChmVarSpherique

Le jacobien associé est $Jg(r,\theta,\varphi) = -r^2\sin\varphi$. Rappelons que ce qui rentre dans l'intégrale est la valeur absolue du jacobien.

Si nous voulons calculer le volume de la sphère de rayon R, nous écrivons donc

$$\int_0^R dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} r^2\sin(\phi)d\phi = 4\pi R = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{20.471}$$

Ici, la valeur absolue n'est pas importante parce que lorsque $\phi\in]0,\pi,[$, le sinus de ϕ est positif.

Des petits malins pourraient remarquer que le changement de variable (20.470) est encore un paramétrage de $\mathbb{R}^3$ si on intervertit le domaine des angles :

$$\begin{aligned} \theta&\colon 0\to\pi \\ \phi&\colon 0\to 2\pi, \end{aligned} \tag{20.472}$$

alors nous paramétrons encore parfaitement bien la sphère, mais hélas

$$\int_0^R dr\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\pi} r^2\sin(\phi)d\phi = 0. \tag{20.473}$$

EqOMVolumeIncorrectSphere

Pourquoi ces « nouvelles » coordonnées sphériques sont-elles mauvaises ? Il y a que quand l'angle ϕ parcours $]0,2\pi[$, son sinus n'est plus toujours positif, donc la *valeur absolue* du jacobien n'est plus $r^2\sin(\phi)$, mais $r^2\sin(\phi)$ pour les ϕ entre 0 et π, puis $-r^2\sin(\phi)$ pour ϕ entre π et 2π. Donc l'intégrale (20.473) n'est pas correcte. Il faut la remplacer par

$$\int_0^R dr\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\pi} r^2\sin(\phi)d\phi - \int_0^R dr\int_0^{\pi} d\theta\int_{\pi}^{2\pi} r^2\sin(\phi)d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{20.474}$$

20.22 Aire et primitive

Soient $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $x\in\mathbb{R}$. Pour chaque $a\in\mathbb{R}$, nous pouvons considérer le nombre $F(x)$ défini par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{20.475}$$

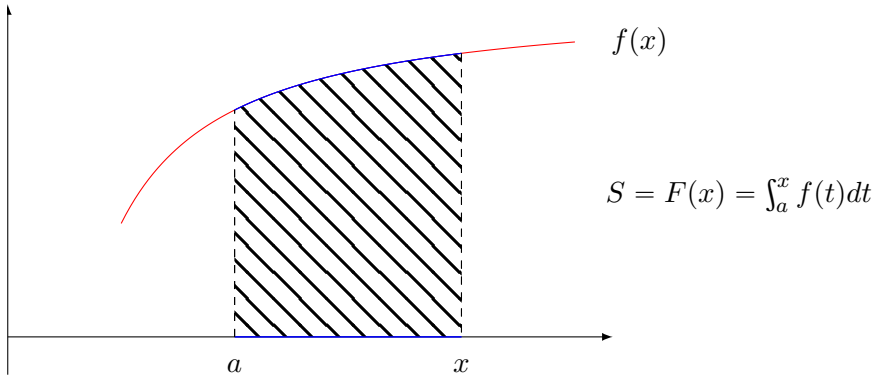


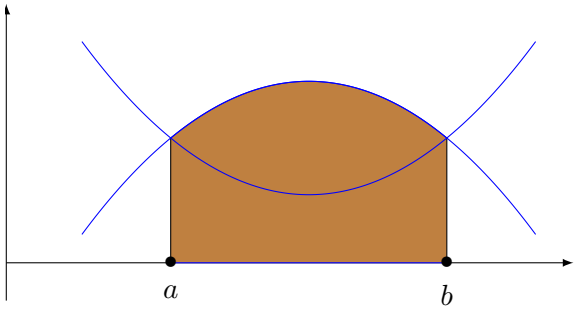
FIGURE 20.11 : Surface sous une courbe

LabelFigVSZRooRWgUGu

La fonction F ainsi définie a deux importantes propriétés :

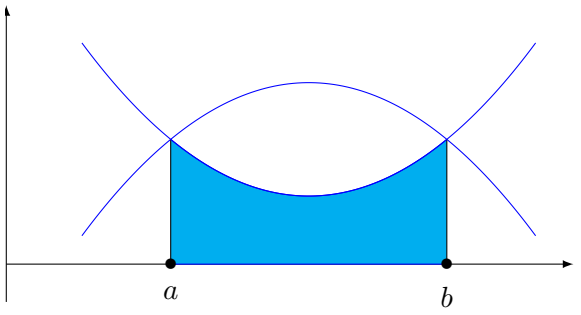
(1) C'est une primitive de f,

(2) Elle donne la surface en dessous de f entre les points a et x, voir la figure 20.11.



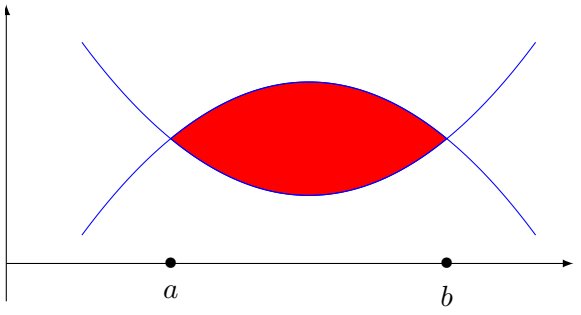
LabelFigQOBAooZZZOrlssLabelSubFigQOBA

(a) La grande surface.



LabelFigQOBAooZZZOrlssLabelSubFigQOBA

(b) La surface à soustraire.



LabelFigQOBAooZZZOrlssLabelSubFigQOBA

(c) La surface entre les deux fonctions.

FIGURE 20.12 : Le calcul de la surface comprise entre deux fonctions.

LabelFigQOBAooZZZOrl

Notons que tant que f est positive, la surface est croissante.
La manière de calculer la surface comprise entre deux fonctions est dessinée à la figure 20.12.
La surface entre les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ se calcule comme suit.

(1) On calcule les intersections entre $y1$ et y_2. Notons a et b les ordonnées obtenues.

(2) La surface demandée est la différence entre la surface sous la fonction y_1 (la plus grande) et la surface sous la fonction y_2 (la plus petite), donc

$$S = \int_a^b y_1 - \int_a^b y_1. \tag{20.476}$$

20.22.1 Longueur d'arc de courbe

La longueur de l'arc de courbe de la fonction $y = f(x)$ entre les abscisses x_0 et x_1 est donné par la formule

$$l(x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(t)^2} dt. \tag{20.477}$$

EqLongArcCourbe

Lorsque la courbe est donnée sous forme paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) & \text{(20.478a)} \\ y = y(t), & \text{(20.478b)} \end{cases}$$

alors la formule devient

$$l(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}dt, \tag{20.479}$$ EqLongArcParam

où $\dot{x}(t)=x'(t)$.

20.22.2 Aire de révolution

Pour savoir l'aire engendrée par la ligne $y=f(x)$ entre a et b autour de l'axe Ox, on utilise la formule

$$S=2\pi\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}f(x)dx. \tag{20.480}$$

20.23 L'aire en dessous d'une courbe

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Nous voudrions pouvoir calculer l'aire au-dessous du graphe de la fonction f. Nous notons $S_f(x)$ l'aire en dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x, c'est-à-dire l'aire bleue de la figure 20.13.

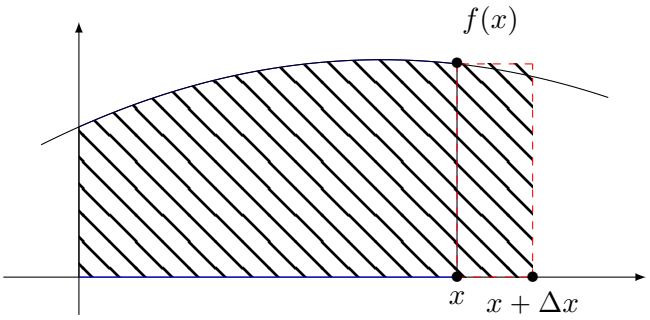


FIGURE 20.13 : L'aire en dessous d'une courbe. Le rectangle rouge d'aire $f(x)\Delta x$ approxime de combien la surface augmente lorsqu'on passe de x à $x+\Delta x$. LabelFigKKRooHseDzC

Si la fonction f est continue et que Δx est assez petit, la fonction ne varie pas beaucoup entre x et $x+\Delta x$. L'augmentation de surface entre x et $x+\Delta x$ peut donc être approximée par le rectangle de surface $f(x)\Delta x$. Ce que nous avons donc, c'est que quand Δx est très petit,

$$S_f(x+\Delta x)-S_f(x)=f(x)\Delta x, \tag{20.481}$$

ou encore

$$f(x)=\frac{S_f(x+\Delta x)-S_f(x)}{\Delta x}. \tag{20.482}$$

Nous formalisons la notion de « lorsque Δx est très petit » par une limite :

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S_f(x+\Delta x)-S_f(x)}{\Delta x}. \tag{20.483}$$

Donc, la fonction f est la dérivée de la fonction qui représente l'aire en dessous de f. Calculer des surfaces revient donc au travail inverse de calculer des dérivées.

20.24 Propriétés des intégrales

LemIneqnormeintintnorm

Lemme 20.127.
Pour toute fonction $u\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$, nous avons

$$\|\int_a^b u(t)dt\|\leqslant\int_a^b\|u(t)\|dt \tag{20.484}$$

pourvu que le membre de gauche ait un sens.

Démonstration. Étant donné que $\int_a^b u(t)dt$ est un élément de $\mathbb{R}^n$, par la proposition 10.22, il existe un $\xi \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 tel que

$$\| \int_a^b u(t)dt\| = \xi \cdot \int_a^b u(t)dt = \int_a^b u(t) \cdot \xi dt \leqslant \int_a^b \|u(t)\|\|\xi\| = \int_a^b \|u(t)\|dt. \tag{20.485}$$

□

Proposition 20.128 (Relations de Chasles)**.**
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Si $a, b, c \in I$ nous avons

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \tag{20.486}$$

Sur la figure 20.14, la surface de a à c est évidemment égale à la somme des surfaces de a à b et de b à c.

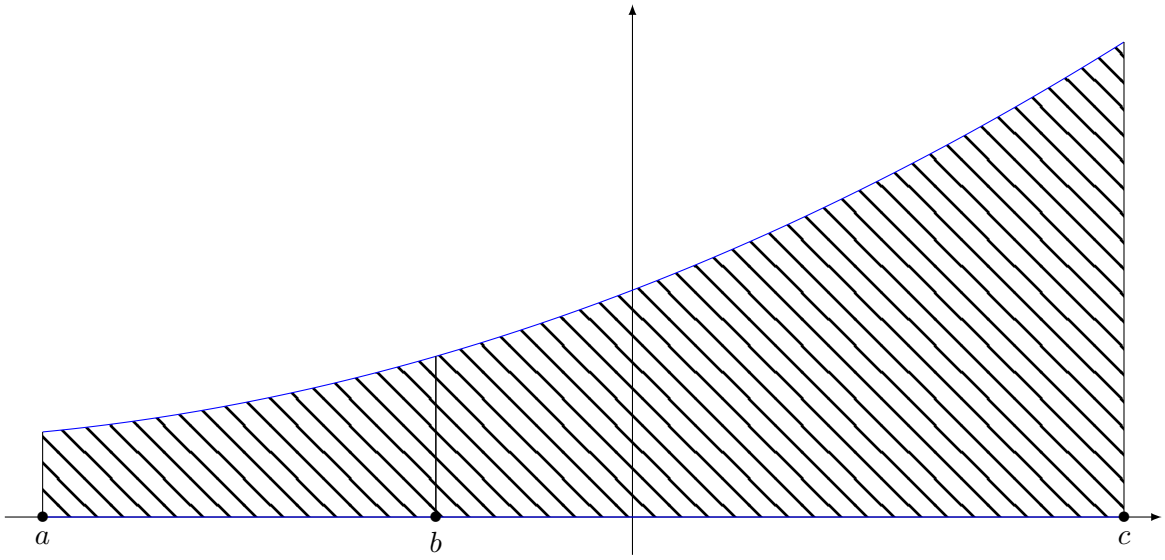


FIGURE 20.14 : Illustration pour les relations de Chasles.LabelFigNWDooOObSHB

Corolaire 20.129.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{20.487}$$

linearite integrale

Proposition 20.130 (Linéarité de l'intégrale)**.**
Si f et g sont deux fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$, a, $b \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \tag{20.488}$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx. \tag{20.489}$$

PropCJIooHqECbq

Proposition 20.131 (L'intégrale est monotone)**.**
Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f \geqslant g$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx. \tag{20.490}$$

PropHVWooBDRhCX

Corolaire 20.132 (Positivité)**.**
Si $a < b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0. \tag{20.491}$$

Ce résultat n'est qu'une application de la proposition 20.131 car il consiste à prendre comme fonction g la fonction nulle.

20.25 Techniques d'intégration

Par le théorème 14.288, la calcul d'une intégrale consiste essentiellement à trouver une primitive de la fonction à intégrer. Il est donc indispensable de bien connaitre les dérivées des fonctions usuelles.

Voici un tableau des primitives à connaitre. PageLCHooMbWjOj

Fonction $f(x)$	Primitive $\int f(x)\,dx$	Ensemble de définition de f	Remarques
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	dépend de α	$\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\big(\lvert x\rvert\big)+C$	$x\neq 0$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)+C$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+C$	$]-1,1[$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)+C$	$]-1,1[$	
e^x	e^x+C	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$	$\mathbb{R}$	
$1+\tan^2(x)$	$\tan(x)+C$	un intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[+k\pi$	

Notez que au signe près, les fonctions arcsin et arccos ont la même dérivée.

Si la fonction à intégrer est une combinaison linéaire de fonctions usuelles alors sa primitive peut être calculée en utilisant la proposition 20.130. Dans les sections suivantes on abordera deux autres cas où la fonction à intégrer peut s'écrire en termes de fonctions dont on connaît une primitive.

20.25.1 Intégration par parties

PROPooRLFIooQHnyJY

Proposition 20.133 ([1])**.**
Si u et v sont deux fonctions dérivables de dérivées continues sur l'intervalle $[a,b]$ alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\big[u(x)v(x)\big]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx. \tag{20.492}$$ EQooKISBooQyGMQT

Si de plus les fonctions uv' et $u'v$ sont intégrables sur $[a,\infty]$, alors

$$\int_a^\infty u(x)v'(x)dx=\big[u(x)v(x)\big]_a^\infty-\int_a^\infty u'(x)v(x)dx. \tag{20.493}$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser à l'envers la formule de dérivation d'un produit :

$$uv'=(uv)'-u'v. \tag{20.494}$$

Les fonctions à gauche et à droite étant égales, elles ont même intégrale sur $[a,b]$ et par linéarité, voir proposition 20.130, on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\int_a^b (uv)'(x)-\int_a^b u'(x)v(x)dx. \tag{20.495}$$

La fonction uv est évidemment une primitive de $(uv)'$, de telle sorte que l'on puisse un peu simplifier cette expression :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx, \tag{20.496}$$

ce qu'il fallait démontrer.

En ce qui concerne l'affirmation avec $b=\infty$, le lemme 14.262 est applicable et il suffit de passer à la limite dans (20.492). □ ExWIEooVUgvSp

Exemple 20.134.
Un cas typique d'utilisation de l'intégrale par parties est le suivant. Soit à calculer

$$\int_0^\pi x\cos(x)dx. \tag{20.497}$$

Nous devons écrire $x\cos(x)$ comme un produit $u(x)v'(x)$. Il y a (au moins) deux moyens de le faire :

$$\begin{cases} u=x & \text{(20.498a)}\\ v'=\cos(x). & \text{(20.498b)}\end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u = \cos(x) & \text{(20.499a)} \\ v' = x. & \text{(20.499b)} \end{cases}$$

Nous allons choisir le premier[27]. Nous avons donc

$$\begin{aligned} u = x, \quad v' = \cos(x) \\ u' = 1 \qquad v = \sin(x). \end{aligned} \tag{20.500}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^\pi x\cos(x)dx = \Big[x\sin(x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 1\times\sin(x)dx = \pi\sin(\pi) - \Big[-\cos(x)\Big]_0^\pi = -2. \tag{20.501}$$

△

Le plus souvent, pour alléger les notations, il est plus pratique d'utiliser l'intégration par parties pour déterminer une primitive. Nous utilisons pour cela la formule (sans doute plus simple à retenir)

$$\int uv' = uv - \int u'v. \tag{20.502}$$

ExLTJooDZIYWP

Exemple 20.135.
Nous reprenons l'exemple 20.134 en déterminant cette fois une primitive de $x\cos(x)$:

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + C, \qquad C\in\mathbb{R}. \tag{20.503}$$

EqTQNooVTYkZX

Nous retrouvons le résultat numérique de l'exemple précédent en ajoutant les extrêmes d'intégration

$$\int_0^\pi x\cos(x)dx = \big[x\sin(x)+\cos(x)\big]_0^\pi = -2. \tag{20.504}$$

△

Remarque 20.136.
Lorsqu'on calcule des intégrales, il est bon de passer par la primitive (c'est-à-dire en suivant l'exemple 20.135 et non 20.134) parce qu'il est alors facile de vérifier le résultat en calculant la dérivée de la primitive trouvée.

Par exemple pour vérifier si (20.503) est correct, il suffit de dériver $x\sin(x)+\cos(x)$:

$$\big(x\sin(x)+\cos(x)\big)' = \sin(x) + x\cos(x) - \sin(x) = x\cos(x). \tag{20.505}$$

La fonction $x\sin(x)+\cos(x)$ est donc bien une primitive de $x\cos(x)$.

primln

Exemple 20.137 (Primitive du logarithme)**.**
La primitive de la fonction logarithme définie en 15.95 nous offre un bon moment d'intégration par partie.

Trouver la primitive de la fonction $x\mapsto\ln(x)$. Pour calculer

$$\int \ln(x)dx \tag{20.506}$$

nous écrivons $\ln(x) = 1\times\ln(x)$ et nous posons $u'=1$ et $v=\ln(x)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} u' = 1 \quad v = \ln(x) \\ u = x \qquad v' = \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{20.507}$$

La formule d'intégration par parties (20.492) donne donc

$$\int \ln(x) = x\ln(x) - \int x\times\frac{1}{x} = x\ln(x) - \int 1 = x\ln(x) - x + C, \qquad C\in\mathbb{R}. \tag{20.508}$$

Il est facile de vérifier par un petit calcul que

$$\big(x\ln(x)-x\big)' = \ln(x). \tag{20.509}$$

△

[27] Mais nous conseillons vivement au lecteur d'essayer le deuxième pour se rendre compte qu'il ne fonctionne pas.

20.25.2 Changement de variables – pour trouver des primitives

De la même manière que l'utilisation « à l'envers » de la formule de dérivation du produit avait donné la méthode d'intégration par parties, nous allons voir que que l'utilisation « à l'envers » de la formule de dérivation d'une fonction composée donne lieu à la méthode d'intégration par changement de variables.

PROPooMVIUooZmvHxS

Proposition 20.138.
Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, $u\colon I \to J$ une fonction qui est dérivable de dérivée continue et $f\colon J \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive F. Alors la fonction

$$x \mapsto F\big(u(x)\big) \tag{20.510}$$

est une primitive de

$$f\big(u(x)\big)u'(x). \tag{20.511}$$

changvar

Démonstration. Cela est une utilisation immédiate de la formule de dérivée des fonctions composées. □

Exemple 20.139.
Soit à calculer

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx. \tag{20.512}$$

La fonction $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ est le produit de x et de $\sqrt{1-x^2}$. On remarque que la dérivée de $1-x^2$ est $-2x$: nous avons alors, à un facteur -2 près, une expression de la forme (20.511) où la racine carrée joue le rôle de f, $f(t) = \sqrt{t}$, et $1-x^2$ le rôle de u. Une primitive de la fonction $f(t) = \sqrt{t}$ est $F(t) = 2t^{3/2}/3$.

Donc la fonction $\frac{2u(x)^{3/2}}{3} = \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}$ est primitive de $-2x\sqrt{1-x^2} = -2g(x)$. Autrement dit,

$$\int -2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{2(1-x^2)^{3/2}}{3} + C, \tag{20.513}$$

et en divisant par -2 nous trouvons la primitive demandée :

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} + C. \tag{20.514}$$

△

L'exemple suivant donne une façon plus économe de retenir la méthode du changement de variables.

exemple primitive changvar

Exemple 20.140.
Soit à calculer

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx. \tag{20.515}$$

Vu qu'il y a beaucoup de fonctions trigonométriques dans la fonction à intégrer, nous allons poser $u(x) = \sin(x)$, et remplacer élément par élément tout ce qui contient du « x » dans l'intégrale demandée par la quantité correspondante en termes de u.

La difficulté est de savoir ce que nous allons faire du « dx » dans l'intégrale. Ce dx marque une variation (infinitésimale) de x. La formule des accroissements finis dit que si x augmente de la valeur dx, alors $u(x)$ augmente de $u'(x)dx$, c'est-à-dire que

$$du = \cos(x)dx. \tag{20.516}$$

Nous avons donc les substitutions suivantes à faire :

$$\sin(x) = u \tag{20.517a}$$
$$du = \cos(x)dx \tag{20.517b}$$
$$dx = \frac{du}{\cos(x)}. \tag{20.517c}$$

La chose « magique » est que le $\cos(x)$ se trouvant dans la fonction se simplifie avec le cosinus qui arrive lorsqu'on remplace dx par $\frac{du}{\cos(x)}$. Les substitutions faites nous restons avec

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx = \int e^u du = e^u + C, \qquad \text{où } u = \sin(x). \tag{20.518}$$

Attention : la réponse doit être impérativement donnée en termes de x et non de u. Nous écrivons donc

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)} = e^{\sin(x)} + C. \tag{20.519}$$

△

20.25.3 Changement de variables – pour calculer des intégrales

Le théorème 14.288 fixe la relation entre la recherche des primitives de f et la calcul de l'intégrale de f sur l'intervalle d'extrêmes a et b. On a vu dans la section précédente comment utiliser le changement de variable pour trouver une primitive de f. Il faut maintenant comprendre comment appliquer ce qu'on a vu dans le calcul d'une intégrale.

En effet nous avons le choix entre

- trouver une primitive de f comme dans la section précédente et appliquer ensuite la formule du corolaire 14.288 ;
- écrire une intégrale pour la nouvelle variable $u = u(x)$ sur l'intervalle entre $u(a)$ et $u(b)$.

Nous allons voir ces deux méthodes dans des exemples.

Exemple 20.141.
Soit à calculer

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx. \tag{20.520}$$

Les primitives $\int x\sqrt{1-x^2}dx$ ont été trouvé dans l'exemple 20.140. Une primitive est

$$F(x) = \int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}. \tag{20.521}$$

Nous pouvons maintenant calculer l'intégrale de $x\sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[1/3, 1/2]$ par la définition

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{16\sqrt{2}}{81}. \tag{20.522}$$

△

Remarque 20.142.
Pour que le calcul d'intégrale donne quelque chose de sensé il faut absolument que la primitive soit écrite en tant que fonction de x et non comme fonction de u. La méthode que nous allons voir dans l'exemple suivant réduit grandement la probabilité d'oublier ce détail, d'où le fait qu'elle soit de loin la plus utilisée.

Exemple 20.143.
Calculons à nouveau

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx. \tag{20.523}$$

Cette fois nous allons toucher à l'intervalle d'intégration en même temps que faire le changement de variables. Nous savons déjà les substitutions

$$\begin{cases} u = 1 - x^2 & \text{(20.524a)} \\ du = -2xdx & \text{(20.524b)} \\ dx = \dfrac{du}{-2x}. & \text{(20.524c)} \end{cases}$$

En ce qui concerne les extrêmes d'intégration, si $x = 1/3$ alors $u = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ et si $x = \frac{1}{2}$ alors $u = \frac{3}{4}$. Nous avons donc encore les substitutions suivantes :

$$\begin{cases} x = 1/3 \to u = 8/9 & \text{(20.525a)} \\ x = 1/2 \to u = 3/4 & \text{(20.525b)} \end{cases}$$

Le calcul est alors

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{8/9}^{3/4} \sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{8/9}^{3/4} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{16\sqrt{2}}{81}. \tag{20.526}$$

Attention : la dernière égalité n'est pas immédiate ; elle demande quelques calculs et une bonne utilisation des règles de puissances. △

La deuxième méthode est plus utilisée et, avec un peu d'exercice, plus rapide à mettre en place que la première.

Jusqu'à présent nous avons utilisé des changements de variables dans lesquels nous exprimions u en termes de x. Comme le montre l'exemple suivant, il est parfois fructueux d'utiliser le changement de variable dans le sens inverse : avec x exprimé en termes d'un paramètre.

exemplepassagepolaires

Exemple 20.144.
À calculer :

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx. \tag{20.527}$$

Nous posons $x = \sin(\theta)$ parce que nous savons que $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$; nous espérons que le changement de variables simplifie l'expression[28]. Les substitutions à faire dans l'intégrale sont :

$$\begin{cases} x = \sin(\theta) & \text{(20.528a)} \\ dx = \cos(\theta)d\theta, & \text{(20.528b)} \end{cases}$$

et en ce qui concerne les bornes, si $x = 1/2$ alors $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{6}$. Si $x = \sqrt{3}/2$ alors $\theta = \frac{\pi}{3}$. Donc

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1-\sin^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta. \tag{20.529}$$

Nous avons $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$ et vu que $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ nous avons toujours $\cos(\theta) > 0$, ce qui donne $\sqrt{\cos^2(\theta)} = \cos(\theta)$. Nous devons donc calculer

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2(\theta)d\theta. \tag{20.530}$$

Pour celle-là, il faut utiliser une formule de trigonométrie[29] :

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}. \tag{20.531}$$

Donc

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2(\theta)d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta, \tag{20.532}$$

Pour calculer proprement la dernière intégrale nous effectuons un autre changement de variable (facile) en posant $t = 2\theta$, $dt = 2d\theta$, $t(\pi/6) = \pi/3$ et $t(\pi/3) = 2\pi/3$, nous avons alors

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2(\theta)d\theta = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\cos(t)}{4}dt = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}, \tag{20.533}$$

parce que $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Au final,

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{12}. \tag{20.534}$$

△

20.25.4 Intégrations des fractions rationnelles réduites

Définition 20.145.
*Une **fraction rationnelle** est un quotient de deux polynômes à coefficients réels ou complexes.*

Par exemple

$$\frac{x^5 + 7x^4 - \frac{x^3}{2} + x}{x^2 - 1} \tag{20.535}$$

est une fraction rationnelle.

[28] Lorsqu'on fait un changement de variables, il s'agit toujours d'*espérer* que l'expression se simplifie. Il n'y a pas moyen de savoir à priori si tel changement de variable va être utile. Il faut essayer.

[29] En fait, il y a moyen de terminer le calcul en intégrant deux fois par parties, mais c'est plus compliqué.

Il sera expliqué dans le cours d'algèbre que toute fraction rationnelle peut être écrite sous forme d'une somme d'éléments simples, c'est-à-dire de fractions rationnelles d'un des deux types suivants :

$$\frac{\alpha}{(x-a)^m}, \qquad \alpha, a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} \tag{20.536a}$$

$$\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^m}; \qquad \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}, a^2-4b<0. \tag{20.536b}$$

Nous allons nous contenter de donner un exemple de chaque type.

(1) En ce qui concerne le cas (20.536a) avec $m=1$, nous avons par exemple

$$\int \frac{1}{x-3}dx = \ln\big(|x-3|\big)+C. \tag{20.537}$$

Si vous voulez en être tout à fait sûr, effectuez d'abord le changement de variables $u=x-3$ qui donne $dx=du$.

(2) En ce qui concerne le cas (20.536a) avec $m\neq 1$, nous avons par exemple

$$\int \frac{1}{(x-1)^4}dx = -\frac{1}{3(x-1)^3}+C. \tag{20.538}$$

Encore une fois, pour s'en convaincre, utiliser le changement de variables $u=x-1$, $dx=du$:

$$\int \frac{1}{(x-1)^4}dx = \int \frac{1}{u^4}du = \int u^{-4}du = -\frac{u^{-3}}{3}+C = -\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^3}+C. \tag{20.539}$$

(3) En ce qui concerne le cas (20.536b) avec $\alpha\neq 0$, nous avons par exemple

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C. \tag{20.540}$$

Pour ce faire, il faut faire le changement de variables $u=x^2+4$, $du=2xdx$, $dx=\frac{du}{2x}$ qui donne

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(|u|)+C = \frac{1}{2}\ln(|x^2+4|)+C. \tag{20.541}$$

Dans ce cas nous pouvons oublier d'écrire la valeur absolue dans le logarithme parce que de toutes façons, x^2+4 est toujours positif.

(4) En ce qui concerne le cas (20.536b) avec $\alpha=0$, nous avons par exemple

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(\frac{x}{2})^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2})+C. \tag{20.542}$$

où nous avons utilisé la primitive $\int \frac{dx}{x^2+1}dx = \arctan(x)$ du tableau de la page 1799. Pour vous en convaincre vous pouvez faire la dernière étape avec le changement de variables $u=x/2$, $dx=2du$.

20.25.5 Quelques formules à connaitre

À retenir 20.146

$$\int \big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)\,dx = \alpha\int f(x)\,dx+\beta\int g(x)\,dx. \tag{20.543a}$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx. \tag{20.543b}$$

$$\int f'(u(x))u'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \qquad \text{avec } t=u(x). \tag{20.543c}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|+C, \qquad \text{c'est un cas particulier de la formule précédente.} \tag{20.543d}$$

20.25.6 Taylor avec reste intégral

THOooDGCJooXKmFTT

Théorème 20.147 (Taylor, reste intégral)**.**
Soit une fonction $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^{n+1}. Alors pour tout $N\leqslant n$ nous avons

$$f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{1}{N!}\int_a^b(b-t)^N f^{(N+1)}(t)dt. \tag{20.544}$$

EQooSCKCooXcKzCc

Démonstration. Notons que dans l'énoncé, n est fixé ; nous faisons une récurrence sur N. Ça ne change pas grand chose, mais il faut être conscient de ce qui est exactement dans l'hypothèse du théorème et ce qui est dans l'hypothèse de récurrence.

Bref, n est fixé, la fonction f est de classe C^{n+1} et nous vérifions d'abord la formule avec $N=1$. À droite dans (20.544) nous avons

$$f(a)+f'(a)(b-a)+\int_a^b(b-t)f''(t)dt. \tag{20.545}$$

EQooETPRooJHcOXh

Nous évaluons l'intégrale à part en faisant une intégration par parties[30]. Il s'agit de poser

$$u=b-t \tag{20.546a}$$
$$v'=f'', \tag{20.546b}$$

de déduire

$$u'=-1 \tag{20.547a}$$
$$v=f' \tag{20.547b}$$

et d'écrire

$$\int_a^b(b-t)f''(t)dt=[(b-t)f'(t)]_a^b-\int_a^b(-)f'(t)dt \tag{20.548a}$$
$$=-(b-a)f'(a)+\int_a^b f'(t)dt \tag{20.548b}$$
$$=-(b-a)f'(a)+f(b)-f(a). \tag{20.548c}$$

Dans le calcul nous avons utilisé le théorème fondamental du calcul intégral 14.288. En remettant ça dans (20.545) nous trouvons $f(b)$ comme il se doit.

En ce qui concerne la récurrence, nous devons calculer

$$f(a)+\sum_{k=1}^{N+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{1}{(N+1)!}\int_a^b(b-t)^{N+1}f^{(N+2)}(t)dt. \tag{20.549}$$

EQooKQWZooGBytlZ

Ici encore, il s'agit de faire une intégration par partie, et sortir de la somme le terme $k=N+1$. L'intégration par partie donne

$$\int_a^b(b-t)^{N+1}f^{(N+2)}(t)dt=-(b-a)^{N+1}f^{(N+1)}(a)+(N+1)\int_a^b(b-t)^N f^{(N+1)}(t)dt. \tag{20.550}$$

En remettant tout ensemble, il y a encore deux termes qui se simplifient, et des termes qui se remettent pour former la formule de récurrence. Bref, on obtient que (20.549) se réduit bien à $f(b)$. □

Cette formule avec reste intégral sert par exemple à prouver un encadrement pour $\ln(2)$, voir la proposition 20.151.

PROPooWGWKooYydpFg

Proposition 20.148 (Formule de Taylor avec reste intégral[662])**.**
Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^{m+1} sur un ouvert U contenant $a\in\mathbb{R}$. Alors pour tout $k\leqslant m$ et pour tout $x\in U$ nous avons

$$f(x)=f(a)+\sum_{l=1}^{k}\frac{f^{(l)}(a)}{l!}(x-a)^l+\frac{1}{k!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt \tag{20.551a}$$
$$=\sum_{l=0}^{k}\frac{f^{(l)}(a)}{l!}(x-a)^l+\frac{1}{k!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt \tag{20.551b}$$
$$\tag{20.551c}$$

[30] Proposition 20.133.

Démonstration. Nous faisons par récurrence sur k. Nous commençons par voir la formule pour $k = 0$. La formule se réduit à

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \tag{20.552}$$

qui est correcte par le théorème 14.288 sous la forme (14.911).

La vraie récurrence maintenant. Nous supposons donc avoir la formule

$$f(x) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \frac{f^{(l)}(a)}{l!}(x-a)^l + \frac{1}{k!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt \tag{20.553}$$ EQooJGVGooZBKDyM

valide pour un certain $k \leqslant m$, et nous allons prouver la formule pour $k+1$. L'idée est d'effectuer l'intégrale dans (20.553) par partie (proposition 20.133) en posant

$$\begin{aligned} u &= f^{(k+1)} & dv &= (x-t)^k \\ du &= f^{(k+2)}dt & v &= -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}. \end{aligned} \tag{20.554}$$

Nous avons

$$\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k = \left[-f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}\right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}f^{(k+2)}(t)dt \tag{20.555a}$$

$$= f^{(k+1)}(a)\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \int_a^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{k+1}(x-t)^{k+1}dt. \tag{20.555b}$$

En remettant dans (20.553), nous trouvons la réponse. □ THOooFKZZooAgecfp

Théorème 20.149 (Formule de Taylor, reste intégral[129])**.**
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^{m+1} sur un ouvert convexe U. Soient $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in U$. Alors

$$f(a+h) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\leqslant m}} \frac{h^\alpha}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(a) + (m+1)\sum_{|\alpha|=m+1}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^m(\partial^\alpha f)(a+th)dt. \tag{20.556}$$

Démonstration. Étant donné que U est connexe et que a et $a+h$ sont dans U, nous pouvons poser

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a+th). \end{aligned} \tag{20.557}$$

Cela est une fonction de classe C^{m+1} parce que f l'est (théorème 10.317). Nous appliquons à la fonction g la formule du corolaire 12.328 :

$$g'(t) = h \cdot (\nabla f)(a+th). \tag{20.558}$$ EQooQDLSooGbrePQ

(1) **Une récurrence pour $g^{(k)}$** Par $h \cdot \nabla$ nous entendons l'opérateur $h \cdot \nabla = h_1\partial_1 + \ldots + h_n\partial_n$. Nous prouvons maintenant par récurrence que

$$g^{(k)}(t) = \big[(h \cdot \nabla)^k f\big](a+th). \tag{20.559}$$

En ce qui concerne le cas $k = 1$, c'est une réécriture de la formule (20.558) :

$$g'(t) = h \cdot (\nabla f)(a+th) = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(a+th) \\ \vdots \\ (\partial_n f)(a+th) \end{pmatrix} \tag{20.560a}$$

$$= \sum_i h_i(\partial_i f)(a+th) \tag{20.560b}$$

$$= \sum_i (h_i\partial_i f)(a+th) \quad \text{cf. justif} \tag{20.560c}$$ SUBEQooTRIUooPHkKyE

$$= \Big(\sum_i h_i\partial_i f\Big)(a+th) \quad \text{cf. justif.} \tag{20.560d}$$ SUBEQooHXSJooRZHTPT

$$= \big((h \cdot \nabla)f\big)(a+th). \tag{20.560e}$$

Justifications.

- Pour (20.560c). Dans un cas il s'agit de calculer $(\partial_i f)(a+th)$ et de multiplier le résultat par h_i, et dans l'autre cas, de considérer la fonction $(h_i\partial_i f)$ et de l'appliquer à $a+th$.
- Pour (20.560d). Avant, on calculait $(h_i\partial_i f)(a+th)$ et on sommait sur i, et maintenant on applique la fonction $\sum_i h_i\partial_i f$ à $a+th$.

Nous y allons maintenant pour la récurrence. Nous posons

$$s(t) = \big((h\cdot\nabla)^k f\big)(a+th), \tag{20.561}$$

et nous essayons de calculer $s'(t)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
s'(t) &= h\cdot\Big(\nabla(h\cdot\nabla)^k f\Big)(a+th) && \text{(20.562a)}\\
&= \sum_i h_i\,\mathtt{proj}_i\Big[\big(\nabla(h\cdot\nabla)^k f\big)(a+th)\Big] && \text{(20.562b)}\\
&= \sum_i h_i\big(\partial_i(h\cdot\nabla)^k f\big)(a+th) && \text{(20.562c)}\\
&= \Big((h\cdot\nabla)^{k+1} f\Big)(a+th). && \text{(20.562d)}
\end{aligned}$$

(2) **Expression pour $g^{(k)}$** En mettant les bouts ensemble, nous avons

$$g^{(k)}(t) = (h\cdot\nabla)^k f(a+th). \tag{20.563}$$

Nous prouvons à présent que

$$(h\cdot\nabla)^k = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!}h^\alpha\partial^\alpha. \tag{20.564}$$ EQooTBDVooBsguqP

Pour cela nous nous souvenons du théorème multinomial 3.37. Il s'applique parce que f est de classe C^{m+1}, ce qui permet de permuter les dérivées[31]. Les « variables » $h_i\partial_i$ sont donc commutatives. D'abord nous avons

$$(h\cdot\nabla)^k = \big(\sum_i h_i\partial_i\big)^k = (h_1\partial_1+\ldots+h_n\partial_n)^k, \tag{20.565}$$

et ensuite nous appliquons le théorème multinomial avec $x_i = h_i\partial_i$.

En ce qui concerne g, nous avons

$$g^{(k)}(t) = (h\cdot\nabla)^k f(a+th) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!}(h^\alpha\partial^\alpha f)(a+th). \tag{20.566}$$

Nous savons que $g(1) = f(a+h)$ et $g(0) = f(a)$. Nous écrivons donc un développement de Taylor pour $g(1)$ autour de $t=0$. Il s'agit d'utiliser la proposition 20.148.

$$\begin{aligned}
g(1) &= \sum_{l=0}^{m}\frac{g^l(0)}{l!}1^l + \frac{1}{m!}\int_0^1 g^{(m+1)}t(t)(1-t)^m dt && \text{(20.567a)}\\
&= \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=l}}\frac{l!}{\alpha!}(h^\alpha\partial^\alpha f)(a) + \frac{1}{m!}\int_0^1\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=m+1}}\frac{(m+1)!}{\alpha!}(h^\alpha\partial^\alpha f)(a+th)(1-t)^{m+1}dt && \text{(20.567b)}\\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|\leqslant m}}\frac{1}{\alpha!}h^\alpha(\partial^\alpha f)(a) + (m+1)\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=m+1}}\int_0^1\frac{h^\alpha}{\alpha!}(1-t)^m(\partial^\alpha f)(a+th). && \text{(20.567c)}
\end{aligned}$$

□ PROPooJFSRooGJcLyv

Proposition 20.150 (Taylor à l'ordre $m=1$[1])**.**
Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe C^2 sur un ouvert convexe U. Soient $a\in U$ et $h\in\mathbb{R}^n$ tel que $a+h\in U$. Alors

$$f(a+h) = h\cdot(\nabla f)(a) + h\cdot Q(a,h)h \tag{20.568}$$

où $Q(a,h)\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est l'opérateur linéaire dont les éléments de matrice sont donnés par

$$Q(a,h)_{kl} = \int_0^1(1-t)(\partial_{kl}f)(a+th)dt. \tag{20.569}$$

[31] Proposition 12.379.

Démonstration. Nous commençons par écrire la formule Taylor avec reste intégral du théorème 20.149 avec $m = 1$:

$$f(a+h) = \sum_k h_k(\partial_k f)(a) + 2\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=2}} \frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)(\partial^\alpha f)(a+th)dt \tag{20.570a}$$

$$= h\cdot(\nabla f)(a) + \frac{1}{2}\sum_{k,l} 2h_k h_l \int_0^1 (1-t)(\partial_{kl} f)(a+th)dt \quad \text{cf. justif} \tag{20.570b}$$

SUBEQooJLEYooPbiCjj

$$= h\cdot(\nabla f)(a) + \sum_l h_l Q(a,h)h \tag{20.570c}$$

$$= h\cdot(\nabla f)(a) + h\cdot Q(a,h)h \tag{20.570d}$$

$$\tag{20.570e}$$

Justification pour (20.570b). Nous avons utilisé la formule du lemme 3.38 ainsi que le fait que $h^{e_k+e_l} = h_k h_l$. □

20.25.7 Approximation de ln(2)

PROPooHOMYooFclkCU

Proposition 20.151 (Approximation de ln(2)[663])**.**
Pour tout n nous avons

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}. \tag{20.571}$$

Démonstration. Nous écrivons la formule de Taylor avec reste intégral du théorème 20.147 pour la fonction $f = \ln$ et pour $a = 1$ et $b = x$. Cela donne :

$$\ln(x) = \ln(1) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + \frac{1}{N!}\int_1^x (x-t)^N \ln^{(N+1)}(t)dt. \tag{20.572}$$

Sachant que la dérivée du logarithme[32] est $1/x$ et faisant une petite récurrence, pour $k \geqslant 1$ nous avons

$$\ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}. \tag{20.573}$$

En remplaçant,

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k + \int_1^x \frac{(-1)^N(x-t)^N}{t^{N+1}}dt. \tag{20.574}$$

C'est le moment de poser $x = 2$ et de faire les simplifications qui s'imposent,

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \int_1^2 \frac{(-1)^N(2-t)^N}{t^{N+1}}dt. \tag{20.575}$$

Nous déplaçons la somme à gauche, et nous prenons la valeur absolue des deux côtés :

$$|\ln(2) - \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k}| = |\int_1^2 \frac{(-1)^N(2-t)^N}{t^{N+1}}dt| \tag{20.576a}$$

$$\leqslant \int_1^2 \frac{(2-t)^N}{t^{N+1}}dt \tag{20.576b}$$

SUBEQooZSXEooVcbJpd

$$\leqslant \int_1^2 (2-t)^N dt. \tag{20.576c}$$

SUBEQooHGZLooGIhoVt

Justifications :

- Pour 20.576b. Majoration en rentrant la valeur absolue dans l'intégrale, suppression de $(-1)^N$, et le fait que pour $t \in [1,2]$, $2-t \geqslant 0$.
- Pour 20.576c. Majoration en supprimant purement et simplement le dénominateur $t^N + 1 \geqslant 1$.

[32] Voir la proposition 15.105.

Ais-je vraiment besoin de vous dire que la dernière intégrale se calcule en posant le changement de variables[33] $u = 2 - t$? Le résultat est que

$$\int_1^2 (2-t)^N dt = \frac{1}{N+1}. \tag{20.577}$$

□
EXooYMEEooMGpUNM

Exemple 20.152 ([1])**.**
La convergence de l'encadrement (20.151) n'est pas terrible. Pour avoir une erreur de $\frac{1}{10}$, il faut

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{n+1}, \tag{20.578}$$

ce qui demande $n = 9$. Ça reste jouable, même pour les jeunes d'aujourd'hui. Écrivons 9 termes :

$$|\ln(2) - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}| \leqslant \frac{1}{10}. \tag{20.579}$$

En calculant[34],

$$|\ln(2) - \frac{1879}{2520}| \leqslant \frac{1}{10}. \tag{20.580}$$

Voici donc un bel encadrement

$$\frac{1879}{2520} - \frac{1}{10} \leqslant \ln(2) \leqslant \frac{1879}{2520} + \frac{1}{10}. \tag{20.581}$$

Pour avoir quelque chose avec des virgules, d'abord un peu de calcul mental donne

$$\frac{1879}{2520} \simeq 0.745634920634921. \tag{20.582}$$

Donc en majorant et minorant, disons, la troisième décimale[35], on n'est pas moins précis que le $\frac{1}{10}$. On a

$$0.744 - \frac{1}{10} \leqslant \ln(2) \leqslant 0.746 + \frac{1}{10}. \tag{20.583}$$

Bref, on retient l'approximation

$$0.644 \leqslant \ln(2) \leqslant 0.846. \tag{20.584}$$

Pour la quantité de travail, avouez que ce n'est pas terrible comme résultat. Eh oui ; le calcul numérique c'est tout un métier ; il existe des méthodes nettement plus efficaces que ce que nous venons de faire. △

20.26 Constructions plus naïves de l'intégrale dans le cas réel

Les sections 14.2 et 14.8 ont donné une construction très complète de la mesure de Lebesgue, et nous avons défini la théorie de l'intégration sur un espace mesuré quelconque dans la définition 14.167.

Dans cette section nous allons donner différentes choses plus rapides qui servent souvent de définition dans les cours moins avancés.

20.26.1 Mesure de Lebesgue, version rapide

Nous construisons à présent la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Un **pavé** dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme

$$B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]; \tag{20.585}$$

le volume d'un tel pavé est défini par $\mathrm{Vol}(B) = \prod_i (b_i - a_i)$. Soit maintenant $A \subset \mathbb{R}^n$. La **mesure externe** de A est le nombre

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{B\in\mathcal{F}} \mathrm{Vol}(B) \text{ où } \mathcal{F} \text{ est un ensemble dénombrable de pavés dont l'union recouvre } A.\} \tag{20.586}$$

[33] Proposition 20.138.
[34] Moi j'ai utilisé Sage, mais si tu es au tableau, débrouille-toi.
[35] Notez ici que nous utilisons le fait que la division euclidienne, elle, donne un encadrement pour les fractions. Pensez-y.

DefKTzOlyH

Définition 20.153.
*Nous disons que A est **mesurable** au sens de Lebesgue si pour tout ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ nous avons l'égalité*

$$m^*(S) = m^*(A \cap S) + m^*(S \setminus A). \tag{20.587}$$

Dans ce cas nous disons que la mesure de Lebesgue de A est $m(A) = m^*(A)$.

PropNCMToWI

Proposition 20.154.
Deux fonctions continues égales presque partout pour la mesure de Lebesgue[36] *sont égales.*

Démonstration. Soient f et g deux fonctions continues telles que $f(x) = g(x)$ pour presque tout $x \in D$. La fonction $h = f - g$ est alors presque partout nulle et nous devons prouver qu'elle est nulle sur tout D. La fonction h est continue ; si $h(a) \neq 0$ pour un certain $a \in D$ alors h est non nulle sur un ouvert autour de a par continuité et donc est non nulle sur un ensemble de mesure non nulle. □

20.26.2 Pavés et subdivisions

Définition 20.155.
*Nous appelons **pavé** de $\mathbb{R}^p$ toute partie de $\mathbb{R}^p$ obtenue comme produit de p intervalles de $\mathbb{R}$. Plus explicitement, une partie R est un pavé de $\mathbb{R}^p$ si il s'écrit sous la forme*

$$R = \left\{ (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \,\middle|\, x_i \in \mathcal{I}_i, i = 1, \ldots, p \right\},$$

où $\mathcal{I}_i$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ pour tout $i = 1, \ldots, p$.

On appelle pavé fermé de $\mathbb{R}^p$ le produit de p intervalles fermés

$$R = \prod_{i=1}^{p} [a_i, b_i].$$

On définit de même le pavé ouvert

$$S = \prod_{i=1}^{p}]a_i, b_i[.$$

Un pavé $R = \prod_{i=1}^{p} \mathcal{I}_i$ est dit borné si tous les intervalles $\mathcal{I}_i$ sont bornés dans $\mathbb{R}$. Les pavés non bornés sont des produits d'intervalles où un (ou plusieurs) des intervalles n'est pas borné. Par exemple,

$$N =]-\infty, 5] \times [0, 13].$$

L'espace $\mathbb{R}^p$, lui-même, est un pavé de $\mathbb{R}^p$.

Définition 20.156.
*Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est dite **pavable** si il existe une famille finie de pavés R_j, $j = 1, \ldots, n$, et deux à deux disjoints tels que*

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} R_j.$$

Un exemple d'ensemble pavable dans $\mathbb{R}^2$ est donné à la figure 20.15. Il existe beaucoup d'ensembles dans $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas pavables, par exemple les ellipses.

Le complémentaire d'un pavé est un ensemble pavable et, en particulier, tout complémentaire d'un pavé borné est une réunion de pavés non bornés. Toute union finie et toute intersection d'ensemble pavables est pavable.

Définition 20.157.
*Soit R un pavé borné de $\mathbb{R}^p$, pour fixer les idées on peut penser $R = \prod_{i=1}^{p} [a_i, b_i]$. On appelle **longueur** de l'i-ème arrête de R le nombre $b_i - a_i$. La **mesure p-dimensionnelle de** R, $m(R)$, est le produit des longueurs*

$$m(R) = \prod_{i=1}^{p} (b_i - a_i).$$

[36] Définition 20.153.

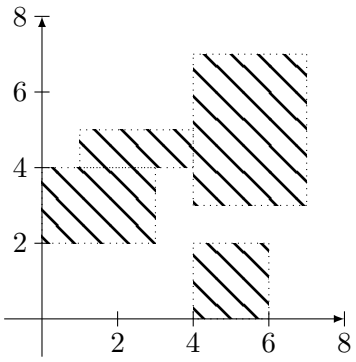


FIGURE 20.15 : Un ensemble pavable. LabelFigPolirettangolo

Exemple 20.158.
Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $R = [-1,1] \times [3,4] \times [0,2]$ est un pavé fermé de mesure

$$m(R) = (1+1) \cdot (4-3) \cdot (2-0) = 4.$$

Il s'agit du volume usuel du parallélépipède rectangle. △

Exemple 20.159.
L'ensemble $R =]-1,1[\times [3,4] \times [0,2]$ est un pavé de $\mathbb{R}^3$. Il n'est ni fermé ni ouvert, sa mesure est encore 4. △

Si R est un pavé non borné on peut encore définir sa mesure. La notion de mesure se généralise en deux étapes. D'abord on dit que la longueur d'une arête non bornée est ∞. Ensuite, on adopte la convention $0 \cdot \infty = 0$. Il faut remarquer que avec cette généralisation tout point et toute droite dans $\mathbb{R}^2$ ont mesure nulle.

Afin de définir les intégrales, nous allons intensivement faire appel à la notion de subdivision d'intervalles, voir définition 21.2 et la discussion qui suit.

Lorsqu'on considère un pavé borné $R = \prod_{i=1}^{p} \mathcal{I}_i$ de $\mathbb{R}^p$, on note $\mathcal{S}_i$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $\mathcal{I}_i$. La notion de subdivision de généralise au cas des pavés.

Définition 20.160.
Soit R un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^p$, pour fixer les idées on peut penser à $R = \prod_{i=1}^{p}[a_i,b_i]$. On appelle ***subdivision*** *finie de R les éléments de l'ensemble $\mathcal{S} = \prod_{i=1}^{p} \mathcal{S}_i$,*

$$\mathcal{S} = \left\{ (Y_1, \dots, Y_p) \,\middle|\, Y_i = (y_{i,j})_{j=1}^{n_i} \in \mathcal{S}_i,\ i = 1, \dots, p \right\}.$$

On peut définir de même l'ensemble des subdivisions d'un pavé non borné.

Souvent, une subdivision d'un pavé $R = \prod_{i=1}^{p} \mathcal{I}_i$ sera noté $\sigma = (y_{i,j})_{j=1}^{n_i}$. Dans cette notation, on sous-entend que pour chaque i fixé, les nombres $y_{i,j}$ (il y en a n_i) forment une subdivision de l'intervalle $\mathcal{I}_i$. Afin de vous familiariser avec ces notations, repérez bien tous les éléments de la figure 20.16.

Définition 20.161.
Si σ est une subdivision d'un pavé R, un ***raffinement*** *de σ est une subdivision de R obtenue en fixant plus de points dans chaque intervalle.*

La subdivision σ de R détermine $n_1 n_2 \dots n_p$ pavés fermés de la forme

$$R_{(k_1,\dots,k_p)} = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \,|\, y_{i,k_{i-1}} \leqslant x_i \leqslant y_{i,k_i}\},$$

où k_i est dans $\{1, \dots, n_i\}$ et i dans $\{1, \dots, p\}$. On les appelles **cellules** de σ. On remarque que les cellules de σ sont toujours deux à deux disjointes (sauf au plus sur leurs bords).

meas_sous

Lemme 20.162.
Soit R un pavé borné de $\mathbb{R}^p$ et soit $\sigma = (y_{i,j})_{j=1}^{n_i}$ une subdivision de R. On a

$$m(R) = \sum_{(k_1,\dots,k_p) \in K} m(R_{(k_1,\dots,k_p)}),$$

où $K = \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\} \times \dots \times \{1, \dots, n_p\}$.

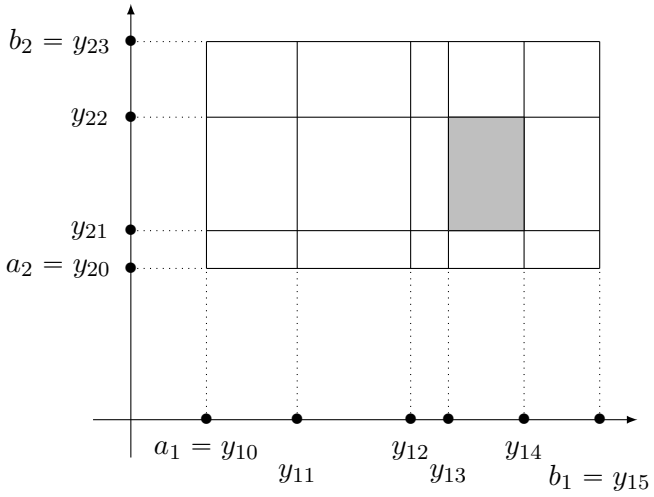


FIGURE 20.16 : Une cellule d'une subdivision d'un pavé de $\mathbb{R}^2$. La cellule grisée est $R_{1,2}$. LabelFigUneCellule

Le lemme 20.162 suggère de définir la mesure d'un ensemble borné pavable $P = \bigcup_{j=1}^{n} R_j$ comme la somme des mesures des pavés disjoints R_j, $j = 1, \dots, n$.

Définition 20.163.
Une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est dite ***application en escalier*** *sur $\mathbb{R}^p$ si*

- *f est une application bornée,*
- *il existe une subdivision σ de $\mathbb{R}^p$ telle que la restriction de f est une application constante sur toute cellule R_k de σ*

$$f_{|_{R_k}} = C_k, \qquad C_k \in \mathbb{R},$$

Une telle subdivision σ est dite ***associée*** *à f.*

Exemple 20.164.
La fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in [0,3] \times [-1,2], \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{20.588}$$

est une application en escalier. Exercice : donner une subdivision de $\mathbb{R}^2$ associée à cette fonction. △

Exemple 20.165.
La fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m^2+n^2}, & \text{si } (x,y) \in [m, m+1] \times [n, n+1], \quad m,\, n \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{20.589}$$

est une application en escalier. Observez que, dans ce cas, il n'existe pas une subdivision finie de $\mathbb{R}^2$ associée à f. △

Remarque 20.166.
Si la subdivision σ est associée à f alors tout raffinement de σ (c'est-à-dire, toute subdivision obtenue en fixant plus de points dans chaque intervalle) a la même propriété.

Si f et g sont deux applications en escalier sur R et σ_f et σ_g sont des subdivisions de R associées respectivement à f et g, alors on peut construire une troisième subdivision de R qui est associée à f et à g en même temps. Soient $\sigma_f = (Y_1, \dots, Y_p)$ et $\sigma_g = (Z_1, \dots, Z_p)$, où $Y_i = (y_{i,j})_{j=1}^{m_i}$ et $Z_i = (z_{i,j})_{j=1}^{n_i}$ sont des subdivisions de l'intervalle $[a_i, b_i]$, pour $i = 1, \dots, p$. La subdivision de $[a_i, b_i]$ obtenue par l'union de Y_i et Z_i est encore une subdivision finie, qu'on appellera $\bar{Y}_i$. La subdivision $\bar{\sigma} = (\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_p)$ de R est un raffinement de σ_f et de σ_g, donc elle est associée à la fois à f et à g.

Cela nous permet de prouver que si f et g sont des applications en escalier, alors $f + g$, fg, $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ et $|f|$ sont des applications en escalier.

20.26.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 20.167.
*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Le **support** de f est la fermeture de l'ensemble des points x tels que $f(x) \neq 0$.*

Définition 20.168.
*Une application en escalier f est dite **intégrable** si son support est compact.*

Soit f une application en escalier sur $\mathbb{R}^p$. Soit σ une subdivision de $\mathbb{R}^p$ associée à f et appelons R_k les cellules de σ, avec $k = (k_1, \dots, k_p)$ dans $K = \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\} \times \dots \times \{1, \dots, n_p\}$. Alors

$$f_{|_{R_k}} = C_k, \qquad C_k \in \mathbb{R}.$$

Définition 20.169.
*On définit l'**intégrale** de f sur $\mathbb{R}^p$ par*

$$\int_{\mathbb{R}^p} f\, dV = \sum_{k \in K} C_k m(R_k).$$

L'intégrale ainsi définie est un nombre réel. La proposition suivante nous dit que l'intégrale est « bien définie », au sens que sa valeur ne dépend pas de la subdivision associée à f qu'on utilise dans le calcul.

Proposition 20.170.
Soit f une application en escalier intégrable sur $\mathbb{R}^p$. Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions de $\mathbb{R}^p$ associées à f. L'intégrale de f ne dépend pas de la subdivision choisie.

On ne donne pas une preuve complète de cette proposition. En fait elle est une conséquence de la formule de réduction introduite dans la suite de ce chapitre.

20.26.4 Intégrales partielles

Soit f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ une fonction continue, nulle hors du pavé borné R. Posons $R = \prod_{i=1}^{p} [a_i, b_i]$, pour fixer les idées. Pour chaque i dans $\{1, \dots, p\}$ fixé, on peut associer à f la fonction F_i de $p-1$ variables définie par

$$F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p) = \int_{a_i}^{b_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p)\, dy.$$

La fonction F_i est l'intégrale partielle de f par rapport à la i-ème variable. En particulier, si $f(x_1, \dots, x_p) = g(x_i)h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p)$ on obtient

$$F_i = \int_{a_i}^{b_i} g(y)h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p)\, dy = h \cdot \int_{a_i}^{b_i} g\, dy.$$

La fonction d'une seule variable qu'on obtient à partir de f en fixant $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p$ et qui associe à x_i la valeur $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p)$, est appelée x_i-ème section de f en $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p$.

Exemple 20.171.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 3y & \text{si } (x, y) \in [9, 10] \times]\pi, 5] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{20.590}$$

Les intégrales partielles de f sont

$$F_1(y) = \int_9^{10} x + 3y\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3xy\right]_{x=9}^{x=10} = \frac{19}{2} + 3y,$$

$$F_2(x) = \int_\pi^5 x + 3y\, dy = \left[xy + \frac{3y^2}{2}\right]_{y=\pi}^{y=5} = x(5 - \pi) + \frac{3}{2}(25 - \pi^2).$$

△

20.26.5 Réduction d'une intégrale multiple

Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un pavé fermé et borné de $\mathbb{R}^2$ et soit f une application en escalier intégrable sur $\mathbb{R}^2$ telle que le support de f soit contenu dans R. On considère la subdivision σ de R définie par les subdivisions

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m = b,$$

$$c = y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n = d.$$

Les cellules de σ sont

$$R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], \qquad i = 0, \ldots, m-1, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

La mesure de R est la somme des mesures des $R_{i,j}$

$$\begin{aligned} m(R) = & \sum_{(i,j)\in\{0,\ldots,m-1\}\times\{0,\ldots,n-1\}} m(R_{i,j}) = \\ & = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i) = \\ & = \sum_{i=0}^{m-1}(x_{i+1} - x_i) \cdot \sum_{j=0}^{n-1}(y_{i+1} - y_i) = \\ & = (b-a) \cdot (d-c). \end{aligned} \tag{20.591}$$

Si f est constante sur chaque cellule de σ on peut écrire f de la forme suivante

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\, \chi_{R_{i,j}}$$

où les $C_{i,j}$ sont des constantes réelles et $\chi_{R_{i,j}}$ est la **fonction caractéristique** de $R_{i,j}$

$$\chi_{R_{i,j}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x, y) \in R_{i,j}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{20.592}$$

Comme (x, y) est dans $R_{i,j}$ si et seulement si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ et $y \in [y_j, y_{j+1}]$, on vérifie que la fonction $\chi_{R_{i,j}}$ est égal au produit des fonctions caractéristiques des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ et $[y_j, y_{j+1}]$

$$\chi_{R_{i,j}}(x, y) = \chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x) \cdot \chi_{[y_j,y_{j+1}]}(y).$$

On peut donc écrire la fonction f de la façon suivante

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\, \chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x) \cdot \chi_{[y_j,y_{j+1}]}(y).$$

Comme on suppose que le support de f est une partie de R, l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^2$ est

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, dV = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\, m(R_{i,j}) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\, (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j). \tag{20.593}$$

Cette intégrale peut être réduite à la composition de deux intégrales partielles. Il suffit de remarquer que la valeur de l'intégrale de la fonction caractéristique d'un intervalle est la longueur de l'intervalle,

$$\begin{aligned} C_{i,j}(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j) = & \\ & = C_{i,j}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x)\, dx\right) \cdot \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \chi_{[y_j,y_{j+1}]}(y)\, dy\right) = \\ & = C_{i,j}\left(\int_a^b \chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x)\, dx\right) \cdot \left(\int_c^d \chi_{[y_j,y_{j+1}]}(y)\, dy\right), \end{aligned} \tag{20.594}$$

et utiliser les propriétés de linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f\,dV &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\left(\int_a^b \chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d \chi_{[y_j,y_{j+1}]}(y)\,dy\right) = \\ &= \int_c^d\int_a^b \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\,\chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x)\cdot\chi_{[y_j,y_{j+1}]}(y)\,dxdy = \\ &= \int_c^d\int_a^b f\,dxdy.\end{aligned} \tag{20.595}$$

De même on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f\,dV &= \int_a^b\int_c^d \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\,\chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x)\cdot\chi_{[y_j,y_{j+1}]}(y)\,dxdy = \\ &= \int_a^b\int_c^d f\,dxdy.\end{aligned} \tag{20.596}$$

En général, on prouve la proposition suivante

Proposition 20.172.
Soit f une application en escalier intégrable sur $\mathbb{R}^p$ et soit R un pavé borné dans $\mathbb{R}^p$ qui contient le support de f. Comme d'habitude, pour fixer les idées nous écrivons $R = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i]$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^p} f(x_1,\dots,x_p)\,dV &= \int_{a_p}^{b_p}\int_{a_{p-1}}^{b_{p-1}}\cdots\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_p)\,dx_1\cdots dx_p = \\ &= \int_{a_{s_p}}^{b_{s_p}}\int_{a_{s_{p-1}}}^{b_{s_{p-1}}}\cdots\int_{a_{s_1}}^{b_{s_1}} f(x_1,\dots,x_p)\,dx_1\cdots dx_p,\end{aligned} \tag{20.597}$$

pour toute permutation $(s_1,\dots,s_p)$ de l'ensemble $\{1,\dots,p\}$.

20.26.6 Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions en escalier intégrables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, et soient a et b dans $\mathbb{R}$.

Linéarité de l'intégrale :

- Additivité : $f+g$ est intégrable et
$$\int_{\mathbb{R}^p}(f+g)\,dV = \int_{\mathbb{R}^p} f\,dV + \int_{\mathbb{R}^p} g\,dV,$$
- Homogénéité : λf est intégrable pour tout réel λ
$$\int_{\mathbb{R}^p}\lambda f\,dV = \lambda\int_{\mathbb{R}^p} f\,dV,$$

Monotonie Si $f \leqslant g$ alors
$$\int_{\mathbb{R}^p} f\,dV \leqslant \int_{\mathbb{R}^p} g\,dV,$$

Inégalité fondamentale
$$\left|\int_{\mathbb{R}^p} f\,dV\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^p}|f|\,dV.$$

Cette dernière inégalité s'obtient de la façon suivante :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^p} f\,dV\right| = \left|\sum_{k\in K} C_k m(R_k)\right| \leqslant \sum_{k\in K}|C_k| m(R_k) = \int_{\mathbb{R}^p}|f|\,dV.$$

Inégalité de Čebičeff Si f est une application en escalier alors pour tout $a > 0$ dans $\mathbb{R}$ l'ensemble $\{x\in\mathbb{R}^p \,:\, |f(x)| \geqslant a\}$ est pavable et borné, et l'inégalité suivante est satisfaite

$$m\left(\{x\in\mathbb{R}^p \,:\, |f(x)|\geqslant a\}\right) \leqslant \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}^p}|f|\,dV.$$

20.26.7 Intégrales multiples, cas général

Nous voulons généraliser la définition d'intégrale multiple au cas des domaines non pavables et de fonctions qui ne sont pas en escalier. Il y a plusieurs méthodes de le faire et ici on ne considère qu'une seule, introduite par Riemann.

Définition 20.173.
Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction.

- *Pour toute application en escalier intégrable f_* telle que $f_* \leqslant f$, l'intégrale de f_* est dit une **somme inférieure** de f.*
- *Pour toute application en escalier intégrable f^* telle que $f^* \geqslant f$, l'intégrale de f^* est dit une **somme supérieure** de f.*

Soient $\sum_* f$ et $\sum^* f$ les ensembles des sommes inférieures et supérieures de f. Grâce à la propriété de monotonie de l'intégrale on sait que si a est dans $\sum_* f$ et b est dans $\sum^* f$ alors $a \leqslant b$.

Définition 20.174.
La fonction f est intégrable (au sens de Riemann) si $\sum_* f$ et $\sum^* f$ ne sont pas vides et

$$\inf \Sigma^* f = I = \sup \Sigma_* f.$$

Dans ce cas, la valeur I est appelée intégrale de f sur $\mathbb{R}^p$.

Remarque 20.175.
Toute fonction intégrable est bornée et à support compact. En effet, si le support de la fonction n'est pas compact alors soit $\sum_* f$ soit $\sum^* f$ doit être vide !

L'intégrale qu'on vient de définir possède toutes les propriétés de l'intégrale pour les fonctions en escalier. Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Il y a des cas où l'intégrabilité d'une fonction n'est pas évidente. Cependant, dans la plupart des exercices et des exemples de ce cours, nous nous aidons avec le critère suivant

Proposition 20.176.
Toute fonction continue à support compact est intégrable.

Cette proposition n'est à priori pas étonnante, vu qu'une fonction continue sur un support compact est bornée (théorème de Weierstrass 7.196).

20.26.8 Réduction d'une intégrale multiple

On n'utilise jamais la définition pour calculer la valeur d'une intégrale multiple. La méthode plus efficace, en pratique, est de réduire l'intégrale à la composition de plusieurs intégrales d'une variable.

fub

Théorème 20.177 (de Fubini)**.**
Soit f une fonction intégrable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Si pour tout x dans $\mathbb{R}$ la section $f(x, \cdot\,)$ est intégrable par rapport à y, alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dV = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

De même, si pour tout y dans $\mathbb{R}$ la section $f(\,\cdot\,, y)$ est intégrable par rapport à x, alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dV = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

ThoSectionINte

En général, on ne peut pas dire que les sections d'une fonction intégrable sont intégrables, donc il faut vraiment se souvenir des hypothèses du théorème 20.177. En dimension plus haute, on a le même résultat

Théorème 20.178.
Soit f une fonction intégrable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Si pour tout $(p-1)$-uple $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p)$ dans $\mathbb{R}^{p-1}$ la section $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot\,, x_{i+1}, \ldots, x_p)$ est intégrable par rapport à x_i, alors

$$\int_{\mathbb{R}^p} f\,dV = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{p-1}} f\,dV \right) dx_i.$$

Si f est une fonction positive et intégrable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ on peut interpréter l'intégrale de f comme le volume du solide au-dessous du graphe de f. Avec cette interprétation, l'intégrale partielle par rapport à x pour $y = y_0$ fixé est l'aire de la tranche qu'on obtient en coupant le solide par le plan $y = y_0$.

Exemple 20.179.
Le premier exemple à faire est celui d'une fonction en escalier intégrable et positive. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in R_1 =]-1,3] \times [4,5] \\ 3 & \text{si } (x,y) \in R_2 =]13,15[\times [0,2[\\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \tag{20.598}$$

L'intégrale de f sur $\mathbb{R}^2$ est $1 \cdot m(R_1) + 3 \cdot m(R_2) = 16$. On voit tout de suite qu'il s'agit de la somme du volume des deux parallélépipèdes de hauteurs respectives 1 et 3 et bases R_1 et R_2. △

Exemple 20.180.
On veut calculer le volume du solide S, borné par le paraboloïde elliptique $x^2 + 2y^2 + z = 16$ et le plan $x = 2$, $x = 0$, $y = 2$ $y = 0$, $z = 0$. On observe que la portion de paraboloïde elliptique qui nous intéresse est le graphe de la fonction $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$ pour (x,y) dans $R = [0,2] \times [0,2]$. La fonction f est continue ainsi que ses sections, donc on peut appliquer le théorème 20.177 et décomposer l'intégrale double en deux intégrales simples :

$$\begin{aligned} &\int_R 16 - x^2 - 2y^2 \, dV = \int_0^2 \int_0^2 f(x,y)\, dxdy = \\ &= \int_0^2 \left[(16 - 2y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=2} dy = \\ &= \left[\left(32 - \frac{8}{3} \right) y - \frac{4y^3}{3} \right]_{x=0}^{x=2} = 64 - \frac{16+32}{3} = 48. \end{aligned} \tag{20.599}$$

Vérifiez, comme exercice, qu'on obtient le même résultat en intégrant d'abord par rapport à y et puis par rapport à x. △

Exemple 20.181.
Dans les hypothèses du théorème 20.177 l'ordre des intégrations partielles ne change pas la valeur de l'intégrale. En fait, si les calculs sont faits par des êtres humains l'ordre d'intégration peut faire une certaine différence comme dans cet exemple. On veut évaluer la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dV$$

où

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin(xy) & \text{si } (x,y) \in [1,2] \times [0,\pi] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{20.600}$$

Les deux sections de $f(x,y) = y\sin(xy)$ sont continues. Si on intègre d'abord par rapport à y on obtient

$$-\int_1^2 \frac{\pi \cos(\pi x)}{x} dx + \int_1^2 \frac{\sin(\pi x)}{x^2} dx,$$

qui n'est pas du tout immédiat, alors que, si on intègre d'abord par rapport à x on obtient

$$\int_0^\pi \cos y - \cos(2y)\, dy.$$

△

20.26.9 Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^2$

On veut évaluer l'intégrale de la fonction $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$ sur son domaine, la boule unité $B((0,0),1)$. La théorie introduite jusqu'ici n'est pas suffisante pour résoudre ce problème, parce que $B((0,0),1)$ n'est pas pavable. Les parties bornées de $\mathbb{R}^p$ sur lesquelles on peut intégrer des fonctions sont dites mesurables (au sens de Riemann) parce que, comme on verra dans la suite, la mesure d'une partie de $\mathbb{R}^p$ est l'intégrale (si il existe) de sa fonction caractéristique.

On peut dire qu'une partie de $\mathbb{R}^p$ est mesurable si son bord est «assez régulier». Dans $\mathbb{R}^2$ il est suffisant que le bord de A soit une réunion finie de courbes paramétrées continues. En particulier, on est très souvent dans un des deux cas suivants

Régions du premier type A est borné et contenu entre les graphes de deux fonctions continues de x

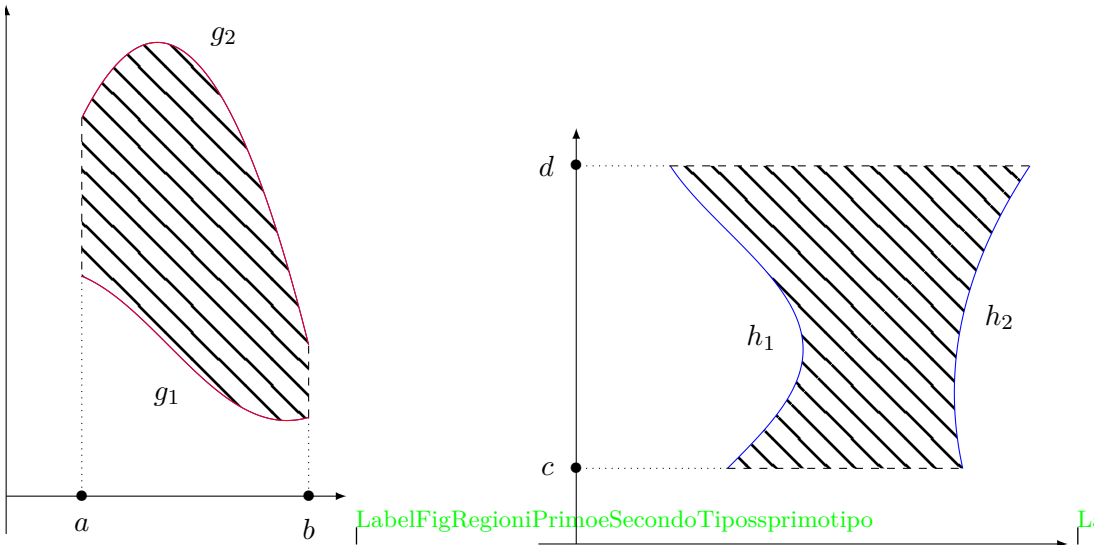
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leqslant x \leqslant b,\, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\},$$

avec g_1 et g_2 continues.

Régions du deuxième type A est borné et contenu entre les graphes de deux fonctions continues de y

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, c \leqslant y \leqslant d,\, h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\},$$

avec h_1 et h_2 continues.



(a) Une region du premier type

(b) Une region du deuxième type

FIGURE 20.17 : Régions du premier et du deuxième type. LabelFigRegioniPrimoeSecondoTipo

Exemple 20.182.
Il y a des régions qui sont des deux types au même temps, comme les boules centrées à l'origine, le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, a)$ et $(b, 0)$, ou la région C délimité par les courbes $y = 2x$ et $y = x^2$. Cette dernière admet les représentations suivantes

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\, x^2 \leqslant y \leqslant 2x\},$$

et

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant y \leqslant 1,\, y/2 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\}.$$

△

Définition 20.183.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le support A est une région du premier ou du deuxième type. On définit la fonction $\bar{f}$ comme

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si } (x, y) \in A, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{20.601}$$

*La fonction f est dite **intégrable** si $\bar{f}$ est intégrable, et la valeur de son intégrale est*

$$\int_A f\, dV = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f}\, dV.$$

Une fonction continue définie sur une région du premier ou du deuxième type est toujours intégrable.
Pour fixer les idées on suppose ici que A est du premier type et contenue dans le pavé borné $R =$

$[a,b]\times[c,d]$. En suivant la définition on obtient

$$\begin{aligned}\int_A f\,dV &= \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f}\,dV \\ &= \int_a^b \int_c^d \bar{f}\,dydx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{g_1(x)} \bar{f}\,dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \bar{f}\,dy + \int_{g_2(x)}^{d} \bar{f}\,dy \right) dx \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f\,dydx.\end{aligned} \tag{20.602}$$

De même, si A est du deuxième type on obtient

$$\int_A f\,dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f\,dxdy. \tag{20.603}$$

Exemple 20.184.
On peut maintenant résoudre notre problème de départ, évaluer l'intégrale de la fonction $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}$ sur $B((0,0),1)$. Nous choisissons de décrire la boule unité de $\mathbb{R}^2$ comme une région du premier type : $B((0,0),1)=\{(x,y)\,:\,x\in[-1,1],\,-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\}$.

$$I=\int_B \sqrt{1-x^2}\,dV=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}dydx \tag{20.604}$$

La première intégrale à effectuer, par rapport à y, est l'intégrale d'une fonction constante. Ne pas oublier que l'on intègre $\sqrt{1-x^2}$ par rapport à y ; c'est bien une constante et l'intégrale consiste seulement à multiplier par y :

$$I=\int_{-1}^{1}\left[y\sqrt{1-x^2}\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx. \tag{20.605}$$

Cela est à nouveau une intégrale simple à effectuer. Le résultat est

$$2\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1}=\frac{8}{3}. \tag{20.606}$$

△

Remarque 20.185.
Toutes les techniques d'intégration à une variable restent valables. Par exemple, lorsqu'une des intégrales est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à zéro, l'intégrale vaut zéro.
NORMooDSNXooFhyHkx

20.186.
Par le lemme 14.175 nous savons que la mesure d'une région bornée de $\mathbb{R}^2$ est l'intégrale de sa fonction caractéristique, si elle existe.

La mesure d'une région bornée de $\mathbb{R}^2$ est dite son **aire**, et celle d'une région bornée de $\mathbb{R}^3$ est son **volume**. Voir aussi la remarque 21.10.

exint

Exemple 20.187.
On veut calculer l'aire de la région de la figure 20.18 définie par

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, x^3-1\leqslant y\leqslant x\}.$$

On considère l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2}\chi_A\,dV=\int_0^1\int_{x^3+1}^{x}1\,dy\,dx=\int_0^1 -x^3+x+1\,dx=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{4}.$$

△

Exemple 20.188.
Parfois la région sur laquelle on veut intégrer peut être décrite indifféremment de deux façons, mais la fonction à intégrer nous force a choisir un ordre particulier. Vérifiez que la fonction $f(x,y)=\sin(y^2)$ sur la région triangulaire de sommets $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$ doit être intégrée d'abord par rapport à x. △

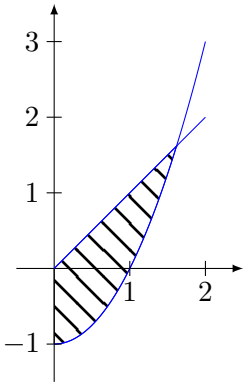


FIGURE 20.18 : La région de l'exemple 20.187. Dans l'exemple, l'image est coupée en $x = 1$. LabelFig:ExampleIntegration

Si une région bornée n'est pas de premier ou de deuxième type on peut normalement la découper en morceaux plus faciles à décrire. On utilise alors la propriété suivante.

Lemme 20.189.
Soit A un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ et soient B_1 et B_2 deux parties de A telles que $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ et $B_1 \cup B_2 = A$. Alors, pour toute fonction f intégrable sur A (et en particulier pour sa fonction caractéristique) on a

$$\int_A f\,dV = \int_{B_1} f\,dV + \int_{B_2} f\,dV.$$

exint2

Exemple 20.190.
La région D que nous voyons sur la figure 20.19 est bornée par la parabole $y^2 = 2x+6$ et la droite $y = x-1$. La région D est une région du deuxième type. Nous pouvons aussi la décrire comme l'union de deux régions du premier type D_1 et D_2,

$$D_1 = \{(x, y) \,:\, -3 \leqslant x \leqslant -1,\, -\sqrt{2x+6} \leqslant y \leqslant \sqrt{2x+6}\},$$

et

$$D_2 = \{(x, y) \,:\, -3 \leqslant x \leqslant -1,\, x - 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x+6}\}.$$

△

20.26.10 Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^3$

Dans ces notes nous n'avons pas l'ambition de traiter d'une façon rigoureuse l'étude des ensembles mesurables de $\mathbb{R}^3$. Comme dans la section précédente on se limitera à considérer des cas particuliers.

primotipo_solida

Définition 20.191.
*Soit E une région de $\mathbb{R}^3$. On dit que E est une **région solide de premier type** si E est contenue entre les graphes de deux fonctions continues de x et y.*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2, u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}.$$

Le sous-ensemble de A de $\mathbb{R}^2$ qui apparaît dans la définition 20.191 est la projection (ou l'ombre) de E sur le plan x-y.

cornet

Exemple 20.192.
La région E donnée par une portion de sphère collée à un cône est une région solide de premier type

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \overline{B\big((0, 0), 1\big)}, \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}. \tag{20.607}$$

L'ombre de E est la boule unité de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z$ est un cône posé sur sa pointe tandis que l'ensemble $z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ est la demi-sphère. L'ensemble E contient les points entre les deux, voir la figure 20.20.

△

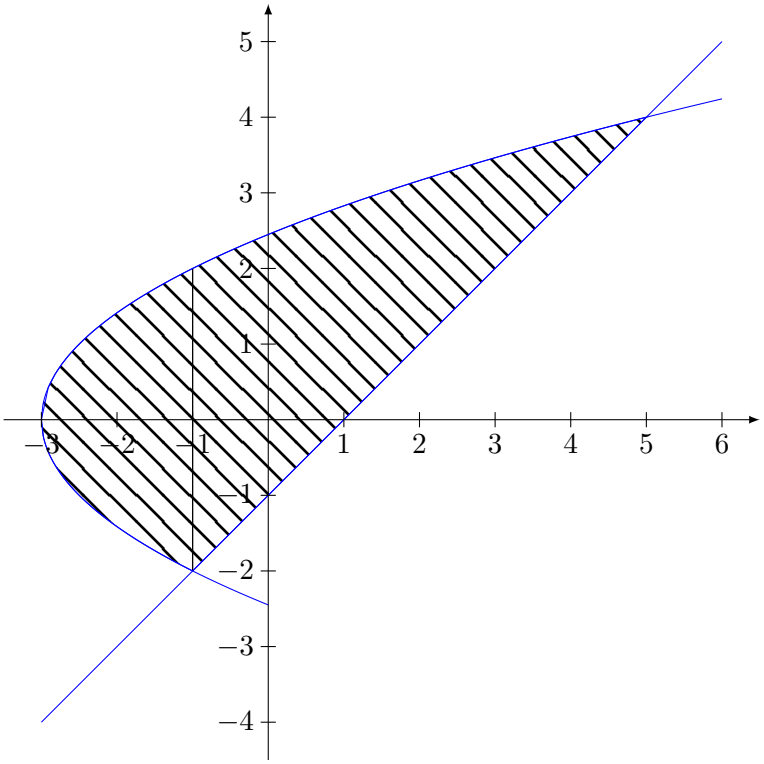


FIGURE 20.19 : La région D de l'exemple 20.190. LabelFigExampleIntegrationdeux

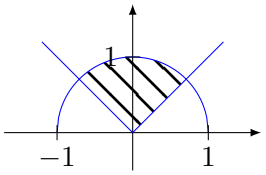


FIGURE 20.20 : Il faut voir ça en trois dimensions. LabelFigCornetGlace

Si la fonction f, à intégrer sur E, et ses sections sont intégrables alors on peut réduire l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_E f(x,y,z)\,dV &= \int_A \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dV = \\ &= \int_A \left(F(x,y,u_2(x,y)) - F(x,y,u_1(x,y)) \right) dV,\end{aligned} \tag{20.608}$$

où F est une primitive de f par rapport à la variable z, c'est-à-dire en considérant x et y comme des constantes. Il faut ensuite évaluer la partie qui reste comme dans la section précédente. Comme le calcul des aires dans $\mathbb{R}^2$, le calcul des volumes dans $\mathbb{R}^3$ est fait par des intégrales. En fait le **volume** d'une région solide dans $\mathbb{R}^3$ est sa mesure.

Définition 20.193.
La mesure d'une région de $\mathbb{R}^3$ est l'intégrale de sa fonction caractéristique.

Soit E une région solide du premier type, nous pouvons évaluer son volume par l'intégrale

$$\int_A \left(u_2(x,y) - u_1(x,y) \right) dV.$$

Parfois c'est plus intéressant de calculer le volume avec la formule de réduction contraire : l'intégrale double d'abord et puis l'intégrale simple par rapport à z. On parle alors de calcul de volume « par tranche ».

Exemple 20.194.
On veut calculer le volume de la boule de rayon a, centrée à l'origine $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2\}$. On peut décrire B par

$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in D_a, -\sqrt{a^2-x^2-y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-x^2-y^2} \right\},$$

où D_a est le disque de rayon a centré en $(0,0)$, donc le volume B sera

$$2\int_{D_a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dV.$$

Cette intégrale est un peu ennuyeuse à calculer. On peut simplifier le calcul en observant que pour $\bar{z}$ fixé dans l'intervalle $[-a,a]$ la section de la boule au niveau $\bar{z}$ est un disque de rayon $\sqrt{a^2-z^2}$. L'aire d'un tel disque est $\pi(a^2+z^2)$. Si on réduit l'intégrale de volume de la façon

$$\int_B 1\,dV=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-z^2}\,dz,$$

on obtient tout de suite la valeur cherchée : le volume de B est $4/3\pi a^3$. △

Exemple 20.195.
On calcule l'intégrale de $f(x,y,z)=z$ sur la pyramide P bornée par les plans $x=0$, $y=0$, $x+y+z=1$, $x+y+z/2=1$. On remarque tout de suite que les plans $x+y+z=1$, $x+y+z/2=1$ se coupent en la droite $x+y=1$, $z=0$ (on se souvient qu'*une* droite dans $\mathbb{R}^3$, c'est *deux* équations). Cela veut dire que la projection de P sur le plan x-y est le triangle T borné par les droites $x=z=0$, $y=z=0$ et $x+y=1$, $z=0$. On décrit donc P par

$$P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,(x,y)\in T,\,1-2x-2y\leqslant z\leqslant 1-x-y\}$$

et T par

$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\,0\leqslant y\leqslant 1-x\},$$

donc l'intégrale de f sur P est

$$\int_P f(x,y,z)\,dV=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{1-2x-2y}^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx=-\frac{1}{24}.$$

Notez que lorsque x et y sont entre 0 et 1, nous avons bien $1-2x-2y<1-x-y$, d'où le fait que nous mettons $1-2x-2y$ dans la borne inférieure de l'intégrale. △

De façon analogue on définit les régions solides du deuxième et du troisième type.

20.26.11 Intégrales de fonctions non bornées sur des ensembles non bornés

Soit $f\colon\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$, une fonction positive. Nous notons $E_r=E\cap B(0,r)$. On dit qu'elle est **intégrable** sur $E\subset\mathbb{R}^n$ si

(1) Pour chaque $r>0$, la fonction $f_r(x)=f(x)\mathbb{1}_{f<r}$ est intégrable sur E_r ;

(2) la limite $\lim_{r\to\infty}\int_{E_r}f_r$ est finie.

Dans ce cas, on pose

$$\int_E f=\lim_{r\to\infty}\int_{E_r}f_r. \tag{20.609}$$

ThoFnTestIntnnBorn

Théorème 20.196.
Soit E mesurable dans $\mathbb{R}^n$ et $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$. Si f est mesurable et si il existe $g\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ intégrable sur E telle que $|f(x)|\leqslant g(x)$ pour tout $x\in E$, alors f est intégrable sur E.

Réciproquement, si f est intégrable sur E, alors f est mesurable.

LemTHBSEs

Lemme 20.197.
Si f est une fonction sur $[a,\infty[$, alors nous avons la formule

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=\int_a^\infty f(x)dx \tag{20.610}$$

au sens où si un des deux membres existe, alors l'autre existe et est égal.

Démonstration. Supposons que le membre de gauche existe. Cela signifie que la fonction

$$\psi(x)=\int_a^x f \tag{20.611}$$

est bornée. Soit M, un majorant. Pour toute fonction simple φ dominée f, on a $\int \varphi \leqslant M$, donc l'ensemble sur lequel on prend le supremum pour calculer $\int_a^\infty f$ est majoré par M et possède donc un supremum. Nous avons donc

$$\int_a^\infty f \leqslant \lim_{b\to\infty} \int_a^b f. \tag{20.612}$$

□

20.26.12 Lemme de Morse

LemNQAmCLo

Lemme 20.198 (Lemme de Morse)**.**
Soit $f \in C^3(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Nous supposons que

(1) $df_0 = 0$

(2) La matrice $H_{kl} = (\partial_{kl} f)(0)$ est non dégénérée et de signature $(p, n-p)$.

Alors il existe un C^1-difféomorphisme φ entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que

(1) $\varphi(0) = 0$,

(2) si $\varphi(x) = u$ alors

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2. \tag{20.613}$$

Une autre façon de dire est qu'il existe un C^1-difféomorphisme local ψ tel que

$$(f \circ \psi)(x) - f(0) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2. \tag{20.614}$$

Démonstration. Nous utilisons le théorème de Taylor avec reste intégral sous la forme de la proposition 20.150 avec $a = 0$:

$$f(x) = x \cdot (\nabla f)(0) + x \cdot Q(x)x \tag{20.615}$$

avec

$$Q(x)_{kl} = \int_0^1 (1-t)(\partial_{kl} f)(tx)dt. \tag{20.616}$$

Par hypothèse sur $df_0 = 0$, le premier terme est nul. En ce qui concerne Q, nous avons

$$Q(0)_{kl} = \int_0^1 (1-t)(\partial_{kl} f)(0) = \frac{1}{2} H_{kl}. \tag{20.617}$$

Étant donné que f est de classe C^2, le théorème de Schwaz 12.370 dit que H est une matrice symétrique. Elle est également inversible par hypothèse.

À partir de là, le lemme 17.118 donne un voisinage V de $Q(0)$ dans l'ensemble S_n des matrices symétriques et une application ϕ de classe C^1

$$\phi\colon V \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \tag{20.618}$$

telle que pour tout $A \in V$,

$$\phi(A)^t Q(0) \phi(A) = A. \tag{20.619}$$

Si on pose $M = \phi \circ Q$, et si x est dans un voisinage de zéro, Q étant continue nous avons $Q(x) \in V$ et donc

$$Q(x) = M(x)^t Q(0) M(x). \tag{20.620}$$

Notons que l'application $M\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est de classe C^1 parce que Q et ϕ le sont.

Nous avons

$$\begin{aligned}
f(x) - f(0) &= x \cdot Q(x)x && \text{(20.621a)}\\
&= x \cdot M(x)^t Q(0) M(x)x && \text{(20.621b)}\\
&= M(x)x \cdot Q(0) M(x)x && \text{cf. justif (20.621c)}\\
&= y(x) \cdot Q(0) y(x) && \text{cf. justif (20.621d)}\\
& && \text{(20.621e)}
\end{aligned}$$

SUBEQooPDUKooHDpkHu
SUBEQooEJGYooRHWmzV

Justifications.

- Pour 20.621c. Voir la proposition 8.185 et le blabla 8.186.

- Pour 20.621d. Nous notons $y(x) = M(x)x = (\phi \circ Q)(x)x$, qui est encore une fonction de classe C^1 parce que la multiplication est une application C^∞.

D'un autre côté le théorème de Sylvester 8.249 nous donne une matrice inversible P telle que

$$Q(0) = P^t \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & \\ & -\mathbb{1}_{n-p} \end{pmatrix} P. \tag{20.622}$$

Et nous posons enfin $u = \varphi(x) = Py(x)$ qui est toujours de classe C^1 et qui donne

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= y \cdot Q(0)y && \text{(20.623a)}\\ &= y \cdot P^t \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix} Py && \text{(20.623b)}\\ &= u \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix} u && \text{(20.623c)}\\ &= u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2. && \text{(20.623d)} \end{aligned}$$

Nous devons maintenant montrer que, quitte à réduire son domaine à un ouvert plus petit, φ est un C^1-difféomorphisme. Dans la chaine qui donne φ, seule l'application

$$\begin{aligned} g\colon U \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto M(x)x \end{aligned} \tag{20.624}$$

est sujette à caution. Nous allons appliquer le théorème d'inversion locale. Nous savons que g est de classe C^1 et donc différentiable ; calculons la différentielle en utilisant la formule (12.715) :

$$dg_0(x) = \frac{d}{dt}\Big[g(tx)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[tM(tx)x\Big]_{t=0} = M(0)x. \tag{20.625}$$

Note que nous avons utilisé la règle de Leibniz pour la dérivée d'un produit, mais le second terme s'est annulé. Donc $dg_0 = M(0) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et g est localement un C^1-difféomorphisme.

Il suffit de restreindre φ au domaine sur lequel g est un C^1-difféomorphisme pour que φ devienne lui-même un C^1-difféomorphisme.

□

Définition 20.199.
*Un point a est un **point critique** de la fonction différentiable f si $df_a = 0$.*

Corolaire 20.200 ([664]).
Les points critiques non dégénérés d'une fonction C^3 sont isolés.

Démonstration. Soit a un point critique non dégénéré. Par le lemme de Morse 20.198, il existe un C^1-difféomorphisme ψ et un entier p tel que

$$(f \circ \psi)(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 + f(a) \tag{20.626}$$

sur un voisinage $\mathcal{U}$ de a. Vue la formule générale $df_x(u) = \nabla f(x) \cdot u$, si x est un point critique de f, alors $\nabla f(x) = 0$. Dans notre cas, les points critiques de $f \circ \psi$ dans $\mathcal{U}$ doivent vérifier $x_i = 0$ pour tout i, et donc $x = a$.

Nous devons nous assurer que la fonction f elle-même n'a pas de points critiques dans $\mathcal{U}$. Pour cela nous utilisons la formule générale de dérivation de fonction composée :

$$\nabla(f \circ \psi)(x) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial y_k}\big(g(x)\big)\nabla g_k(x). \tag{20.627}$$

Si $\psi(x)$ est un point critique de f, alors le membre de droite est le vecteur nul parce que tous les $\partial_k f\big(\psi(x)\big)$ sont nuls. Par conséquent le membre de gauche est également nul, et x est un point critique de $f \circ \psi$. Or nous venons de voir que $f \circ \psi$ n'a pas de points critiques dans $\mathcal{U}$.

Donc f n'a pas de points critiques dans un voisinage d'un point critique non dégénéré. □

20.27 Autres intégrales sympathiques

20.27.1 Intégrale de Wallis

LEMooMGUVooIIQSmC

Lemme 20.201 ([665, 1]).
Nous définissons les fonctions I_n par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} I_0(x) = x & (20.628a)\\ I_1(x) = \cos(x) & (20.628b)\\ I_n(x) = \dfrac{\cos(x)\sin^{n-1}(x)}{n} - \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}(x). & (20.628c) \end{cases}$$

Pour chaque n, la fonction I_n est une primitive de $\sin^n(x)$.
EQooWJMIooSgBbJx
De même en définissant

$$\begin{cases} I_0(x) = x & (20.629a)\\ I_1(x) = \sin(x) & (20.629b)\\ I_n(x) = \dfrac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}(x), & (20.629c) \end{cases}$$

nous avons des primitives de $\cos^n(x)$.

Démonstration. Nous faisons par récurrence. Les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont immédiats. Pour I_n c'est pas trop compliqué non plus : il suffit de dériver en supposant que $I'_{n-2}(x) = \sin^{n-2}(x)$. Voici le calcul :

$$\begin{aligned} I'_n(x) &= \frac{1}{n}\big(-\sin^n(x) + \cos(x)(n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\big) - \frac{n-1}{n}\sin^{n-2}(x) && (20.630a)\\ &= \frac{1}{n}\sin^{n-2}(x)\big(-\sin^2(x) + (n-1)\cos^2(x)\big) - \frac{n-1}{n}\sin^{n-2}(x) && (20.630b)\\ &= \frac{1}{n}\sin^{n-2}(x)\big(-\sin^2(x) + (n-1)\cos^2(x) - n + 1\big) && (20.630c)\\ &= \frac{1}{n}\sin^{n-2}(x)\big(n\cos^2(x) - n\big) && (20.630d)\\ &= \frac{1}{n}\sin^{n-2}(x) n \sin^2(x) && (20.630e)\\ &= \sin^n(x). && (20.630f) \end{aligned}$$

Nous avons prouvé que la dérivée de $I_n(x)$ est bien $\sin^n(x)$.
La formule (20.629) se démontre de la même façon. □

LEMooUOIBooLyMDft

Lemme 20.202 ([666, 667]).
Nous posons

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt. \tag{20.631}$$

Alors :

(1) une formule de récurrence :

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}, \tag{20.632}$$
EQooILMZooBUgJpk

(2) et une formule un peu explicite :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}. \tag{20.633}$$
EQooUYIDooEpHCnP

Démonstration. Le nombre W_n est seulement la seconde intégrale du lemme 20.201, évaluée entre 0 et $\pi/2$. En partant donc de (20.629), nous avons

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx = \left[\frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}(x)dx. \tag{20.634}$$

Le terme aux bords disparaît grâce aux valeurs trigonométriques remarquables[37]. Il reste immédiatement

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}. \tag{20.635}$$

[37] Par exemple la proposition 18.21(10).

À partir de là, nous démontrons (20.633) par récurrence. D'abord pour $n = 0$, c'est l'égalité $W_0 = \pi/2$ qui est correcte parce que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^0(x)dx = \int_0^{\pi/2} 1dx. \tag{20.636}$$

Pour la récurrence elle-même,

$$W_{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2(n+1)} W_{2n} \tag{20.637a}$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \tag{20.637b}$$

$$\text{… pas mal de petits calculs …} \tag{20.637c}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!2^{n+1}\big)^2} \frac{\pi}{2}. \tag{20.637d}$$

Voilà. □

Maintenant, la suite (W_n) se divise en ses termes pairs et ses termes impairs. Pour les pairs, nous avons une formule assez explicite donnée par le lemme 20.202. Pour les termes impairs, nous n'avons rien. Dans tous les cas, nous avons la formule de récurrence

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} \tag{20.638}$$

qui ne sert à rien pour déduire des choses sur les termes impairs à partir de ce que l'on sait des termes pairs.

Sommes-nous perdus ? Non. La situation se débloque grâce au lemme suivant.

LEMooZFBVooQsOuOx

Lemme 20.203.
La suite donnée par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx \tag{20.639}$$

est décroissante.

Démonstration. Vu que l'intégrale est sur $[0, \pi/2]$, le nombre $\cos(x)$ prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Nous avons donc

$$\cos^{n+1}(x) \leqslant \cos^n(x). \tag{20.640}$$

Les intégrales suivent les mêmes inégalités. □

Ce lemme permet de relancer le jeu parce que les termes impairs sont coincés entre les termes pairs, qui décroissent. Les termes impairs doivent donc décroître à la même vitesse. Le lemme suivant met cela en musique.

LEMooAXTEooLBXQuM

Lemme 20.204.
Nous posons

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx \tag{20.641}$$

La fonction $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *définie par* $W_n = \alpha(n)W_{n-1}$ *vérifie* $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 1$.

Démonstration. Parce que nous en aurons besoin, nous triturons d'abord un peu la formule de récurrence (20.632). D'abord nous l'inversons un peu pour avoir

$$W_n = \frac{n+2}{n} W_{n+2}, \tag{20.642}$$

et ensuite nous écrivons

$$W_{n-1} = \frac{n+1}{n} W_{n+1}. \tag{20.643}$$

EQooYINNooBUKUYB

Ne vous posez pas de questions, ça va être utile. Le fait que la suite soit décroissante (lemme 20.203) nous permet d'écrire

$$W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}. \tag{20.644}$$

En y remplaçant W_n par $\alpha(n)W_{n+1}$ et W_{n-1} par (20.643),

$$W_{n+1} \leqslant \alpha(n)W_{n+1} \leqslant \frac{n+1}{n} W_{n+1}. \tag{20.645}$$

Nous simplifions par W_{n+1} et nous trouvons l'encadrement, valable pour tout n :

$$1 \leqslant \alpha(n) \leqslant \frac{n+1}{n}. \tag{20.646}$$

Nous en déduisons par la règle de l'étau que $\alpha(n) \to 1$. □

LEMooWQZAooOXAPQO

Lemme 20.205.
Soit

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx. \tag{20.647}$$

Encore plusieurs choses à dire.

(1) Pour tout n nous avons

$$nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}. \tag{20.648}$$

EQooLOLFooMIwMXN

(2) Nous avons l'équivalence de suites[38]

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{20.649}$$

Démonstration. En deux parties

(1) **La suite constante** Nous posons $K_n = nW_nW_{n-1}$. Grâce aux formules de récurrence (20.632) que nous écrivons sous la forme

$$W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2} \tag{20.650a}$$

$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1}W_{n-1}, \tag{20.650b}$$

nous avons

$$K_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = (n+1)\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n}W_{n-1}W_{n-2} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = K_{n-1}. \tag{20.651}$$

Nous avons montré que $K_{n+1} = K_{n-1}$.

Il nous reste à prouver que $K_1 = K_2 = \frac{\pi}{2}$. Pour cela nous avons immédiatement $W_0 = \frac{\pi}{2}$ ainsi que

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t)dt = 1. \tag{20.652}$$

Pour W_2, il ne faut pas calculer d'intégrales, mais seulement utiliser la formule (20.633). Nous trouvons vite $W_2 = \frac{\pi}{4}$. Donc

$$K_1 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2} \tag{20.653}$$

et

$$K_2 = 2W_2W_1 = \frac{\pi}{2}. \tag{20.654}$$

(2) **L'équivalence de suites** Soit la fonction α définie par $W_n = \alpha(n)W_{n-1}$. Le lemme 20.204 nous dit que $\alpha(n) \to 1$. Nous l'utilisons dans (20.648) :

$$\frac{\pi}{2} = nW_nW_{n-1} = n\alpha(n)W_{n-1}^2. \tag{20.655}$$

Donc

$$W_{n-1}^2 = \frac{\pi}{2n\alpha(n)}, \tag{20.656}$$

et

$$W_{n-1}\sqrt{\frac{1}{\alpha(n)}}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{20.657}$$

Vu que le coefficient $\sqrt{1/\alpha(n)}$ tend vers 1 pour $n \to 1$, nous avons l'équivalence demandée.

□

[38] Définition 9.33.

20.27.2 Formule de Stirling

LEMooDXJOooOGFcIv

Lemme 20.206 ([668]).
Si $n \in \mathbb{N}$ nous avons la formule

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1} \tag{20.658}$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser astucieusement le développement de la proposition 15.114. Nous avons d'une part

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \tag{20.659}$$

et d'autre part,

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}. \tag{20.660}$$

Cela permet de calculer, en utilisant l'associativité de la série[39] EQooYVXHooNDetVx

$$\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \ln(1+t) - \ln(1-t) \tag{20.661a}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + \frac{x^k}{k}\right) \tag{20.661b}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \tag{20.661c}$$

SUBEQooIIOBooXYoHkK

parce que tous les termes pairs s'annulent, tandis que les termes impairs sont doublés. Notez que la somme dans (20.661c) commence à $k=0$, contrairement aux autres qui commencent à 1.

Et là c'est l'astuce : on écrit l'égalité (20.661) avec le t qu'il faut pour que

$$\frac{1+t}{1-t} = 1 + \frac{1}{n}. \tag{20.662}$$

Nous posons donc $t = \frac{1}{2n+1}$ nous avons

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1}, \tag{20.663}$$

ce qu'il fallait. □

LemCEoBqrP

Lemme 20.207 (Formule de Stirling[669, 670, 666, 668, 671]).
Nous avons l'équivalence de suites[40]

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}. \tag{20.664}$$

Démonstration. Nous posons

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \tag{20.665}$$

et $b_n = \ln(a_n)$.

(1) **Une formule pour $b_n - b_{n+1}$.** Nous faisons un beau calcul qui utilise les formules de la proposition 15.98 ainsi que $\ln(e) = 1$: SUBEQSooZTABooBukFGM

$$b_n - b_{n+1} = \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \tag{20.666a}$$

$$= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1/2}}{n^{n+1/2}}\frac{1}{e}\right) \tag{20.666b}$$

$$= \ln\left((\frac{n+1}{n})^{n+1/2}\right) - 1 \tag{20.666c}$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(1+\frac{1}{n}) - 1. \tag{20.666d}$$

[39] Proposition 10.159.
[40] Définition 9.33.

(2) **La suite (b_n) est décroissante** Nous écrivons l'égalité (20.666) en utilisant le lemme 20.206 :

$$b_n - b_{n+1} = (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) - 1 \tag{20.667a}$$
$$= \frac{1}{2}(2n+1)2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1} - 1 \tag{20.667b}$$
$$= (2n+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1} \tag{20.667c}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k}. \tag{20.667d}$$

Notez que le terme $k=0$ s'est simplifié avec le -1. Vu que le tout est une somme de termes positifs, nous avons

$$b_n - b_{n+1} > 0 \tag{20.668}$$

et la suite est décroissante.

(3) **Majoration pour $b_n - b_{n+1}$** Vu que $\frac{1}{2k+1} < 1$, nous pouvons majorer :

$$b_n - b_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^k. \tag{20.669}$$

Nous remarquons que cela est une série géométrique déjà traitée dans la proposition 10.172. Nous faisons un peu de calcul en partant de

$$\sum_{k=1}^{\infty}q^n = \frac{q}{1-q} \tag{20.670}$$

avec $q = \frac{1}{(2n+1)^2}$. Après quelques simplifications,

$$b_n - b_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}\frac{1}{n(n+1)} \tag{20.671}$$

(4) **Le coup de la somme télescopique** Nous avons

$$b_1 - b_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{n-1} - b_n). \tag{20.672}$$

Chacun de ces termes est majoré ; nous avons donc

$$b_1 - b_n < \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m(m+1)} \leqslant \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{4} \tag{20.673}$$

grâce au lemme 10.175 pour la dernière somme.

(5) **La suite b_n est bornée vers le bas**

Vu que $b_1 = 1 - \frac{\ln(2)}{2}$, nous avons

$$b_n > b_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{\ln(2)}{2}. \tag{20.674}$$

En utilisant la majoration de l'exemple 20.152 nous trouvons

$$0.327 \leqslant b_n \leqslant 0.427. \tag{20.675}$$

Cet encadrement n'est pas très important. Le point est que la suite (b_n) soit bornée vers le bas ; savoir que la borne est strictement positive n'est pas indispensable.

(6) **Une limite pour (a_n)** La suite (b_n) est décroissante et bornée vers le bas, donc elle est convergente par le lemme 9.36. Vu que l'exponentielle est une fonction continue[41], la suite $a_n = e^{b_n}$ est également convergente.

Vu que $\lim_{n\to\infty} b_n > 0$, nous avons $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim_{n\to\infty} b_n} > 1$.

[41] Parce qu'elle est dérivable, voir par exemple le théorème 15.88.

L'important est que nous sachions que (a_n) est une suite convergente. Nous notons L sa limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = L. \tag{20.676}$$

Ou encore :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{L\sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1. \tag{20.677}$$

Autrement dit, en posant

$$n! = \alpha(n) L\sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{20.678}$$

EQyiBooFVCCooJbGpsW

nous avons $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 1$.

(7) **Introduction de Wallis** Nous avons déjà parlé dans le lemme 20.202 du nombre

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}. \tag{20.679}$$

Le lemme 20.205 implique que la suite $I_n = W_{2n}$ est équivalente à $\sqrt{\pi/4n}$.

Cela étant dit, nous faisons un gros calcul en remplaçant les factorielles dans W_{2n} par la formule (20.678). Après pas mal de calculs[42], nous trouvons

$$I_n = \frac{\alpha(2n)}{\alpha(n)^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\pi}{2n}. \tag{20.680}$$

Nous avons donc

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{\alpha(2n)}{\alpha(n)^2}\frac{\pi}{\sqrt{n}}\frac{1}{2L}. \tag{20.681}$$

Il existe donc une fonction $\beta(n)$ avec $\beta(n) \to 1$ telle que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} = \beta(n)\frac{\alpha(2n)}{\alpha(n)^2}\frac{\pi}{\sqrt{n}}\frac{1}{2L}. \tag{20.682}$$

En simplifiant par $1/\sqrt{n}$,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \beta(n)\frac{\alpha(2n)}{\alpha(n)^2}\frac{\pi}{2L}. \tag{20.683}$$

Nous prenons à présent la limite $n \to \infty$ en nous rappelant que α et β donnent 1. Après simplifications, nous trouvons

$$L = \sqrt{\pi}. \tag{20.684}$$

(8) **La fin** Nous introduisons la valeur $L = \sqrt{\pi}$ dans l'expression (20.678) de la factorielle :

$$n! = \alpha(n)\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{20.685}$$

La dernière équation est exactement ce qui signifie l'équivalence de suite demandée. □

20.208.
J'ai déjà dit du mal de la formule d'Euler $e^{i\pi} = -1$ dans (18.12). La formule de Stirling est plus intéressante parce qu'elle lie (réellement) les nombres e et π. Mais elle fait aussi intervenir le nombre $\sqrt{2}$, et la fonction factorielle.

La formule de Stirling est également nettement moins triviale à démontrer : la formule d'Euler ne fait intervenir de non trivial que les définitions et propriétés des fonctions trigonométriques. Toutes ces propriétés sont également utilisées pour prouver la formule de Stirling.

[42] Si vous êtes en manque de papier de brouillon, c'est le moment de vous inquiéter.

20.27.3 La fonction sinus cardinal, intégrale de Dirichlet

Définition 20.209.
La fonction ***sinus cardinal*** *est*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 0 \\ \frac{\sin(t)}{t} & sinon. \end{cases} \tag{20.686}$$

Elle sert à plein de choses. Entre autres, le lemme 20.212 montrera que la fonction $x \mapsto |\sin(x)/x|$ a une intégrale sur $\mathbb{R}$ qui vaut ∞. Cela nous permettra de donner un exemple d'une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ (lemme 29.8).

20.210.
Le but que nous nous fixons maintenant est de prouver que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \tag{20.687}$$

Un adage dit que si un théorème est trop long, c'est qu'il n'a pas assez de lemmes. Nous allons faire plein de lemmes.

LEMooMJFBooAjtNjV

Lemme 20.211.
La fonction sinus cardinal est continue.

Démonstration. Elle est continue en zéro parce que le lemme 18.246 nous donne

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1. \tag{20.688}$$

□

Nous commençons par une mauvaise nouvelle.

LEMooEEWSooZwLSAP

Lemme 20.212 ([1])**.**
Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} |\frac{\sin(x)}{x}| dx = \infty. \tag{20.689}$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$ tel que sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta]$, nous ayons $\sin(x) > 0.9$[43] .

Les intervalles $I_k = [\frac{\pi}{2} - \delta + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + \delta + 2k\pi]$ sont disjoints et la fonction que nous intégrons est partout positive. Nous découpons

$$\mathbb{R} = C + \bigcup_{k=0}^{\infty} [\frac{\pi}{2} - \delta + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + \delta + 2k\pi] \tag{20.690}$$

où C est le complémentaire qu'il faut pour faire $\mathbb{R}$.

La σ-additivité de l'intégrale de Lebesgue (proposition 14.211) nous indique que

$$\int_{\mathbb{R}} |\frac{\sin(x)}{x}| = \int_C |\frac{\sin(x)}{x}| + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{I_k} |\frac{\sin(x)}{x}| dx \tag{20.691}$$

Vu que tous les termes sont positifs, nous obtenons une majoration en en supprimant un. Allons-y : SUBEQSooSRAYooF

$$\int_{\mathbb{R}} |\frac{\sin(x)}{x}| dx \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_{I_k} |\frac{\sin(x)}{x}| dx \tag{20.692a}$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{\infty} 0.9 \int_{I_k} \frac{1}{x} dx \tag{20.692b}$$

$$\geqslant 0.9 \sum_{k=0}^{\infty} 2\delta \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \delta + 2k\pi} \tag{20.692c}$$ SUBEQooKMURooVuIpCo

$$\geqslant 1.8\delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi(k+1)} \tag{20.692d}$$ SUBEQooJCQOooYqUCps

$$= \frac{1.8\delta}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}. \tag{20.692e}$$

[43] Ça existe par une astucieuse combinaison du théorème 9.95 des valeurs intermédiaires, de la valeur remarquable $\sin(\pi/2) = 1$ (de (18.42)) et du fait que sin est continue (proposition 18.1).

Justifications :

- Pour (20.692c), nous avons majoré $\frac{1}{x}$ par $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\delta+2k\pi}$ sur I_k.
- Pour (20.692d), nous avons dit que $\frac{\pi}{2}+\delta<2\pi$.

La dernière somme dans (20.692) diverge.

Donc la fonction sinus cardinal n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$. □

La mauvaise nouvelle suivante en est un corolaire immédiat.

LEMooBEQRooHaugKj

Lemme 20.213.
La fonction $t\mapsto\frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0,\infty[$ au sens de Lebesgue.

Démonstration. Le lemme 20.212 nous dit que $\int_0^\infty|f|=\infty$. Dans ce cas, $\int_0^\infty f$ n'existe pas par le lemme 14.188. □

Donc l'intégrale $\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{t}dt$ n'existe pas parce que la définition de l'intégrale de Lebesgue ne permet pas de profiter des compensations qui arrivent entre les valeurs positives et négatives.

Nous définissons donc

$$\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{t}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{\sin(t)}{t}dt. \tag{20.693}$$

EQooWAQLooTFQPbl

Pour chaque b, l'intégrale existe sans problèmes (fonction continue sur le compact $[0,b]$), et les compensations se font. Il n'est pas pas sans espoir que la limite (20.693) existe et vaille un nombre fini.

LEMooTFVZooRAmjUN

Lemme 20.214 ([672]).
La limite

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{\sin(t)}{t}dt \tag{20.694}$$

existe dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Découpage**

Nous découpons l'intervalle $[0,b]$ en morceaux du type $[k\pi,(k+1)\pi]$ et un morceau restant lorsque b n'est pas un multiple de π :

$$[0,b]=\bigcup_{k=0}^{N(b)-1}[k\pi,(k+1)\pi]\cup[N(b)\pi,b] \tag{20.695}$$

où $N(b)$ est un entier bien choisi[44]. En tout cas $\lim_{b\to\infty}N(b)=\infty$.

(2) **Majoration 1**

Pour chaque $b\in\mathbb{R}^+$ nous avons

$$\int_0^b\frac{\sin(t)}{t}dt=\sum_{k=0}^{N(b)}\int_{[k\pi,(k+1)\pi]}\frac{\sin(t)}{t}dt+\int_{[\big(N(b)+1\big)\pi,b]}\frac{\sin(t)}{t} \tag{20.696}$$

Dans le dernier terme, nous majorons $|\sin(t)|\leqslant 1$ et $\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{\big(N(b)+1\big)\pi}$. Cela donne

$$\left|\int_{[\big(N(b)+1\big)\pi,b]}\frac{\sin(t)}{t}\right|\leqslant\frac{b-\big(N(b)+1\big)\pi}{\big(N(b)+1\big)\pi}\leqslant\frac{1}{N(b)+1} \tag{20.697}$$

où nous avons encore majoré $b\leqslant\big(N(b)+2\big)\pi$.

(3) **Majoration 2**

En ce qui concerne les autres termes, sur l'intervalle $[k\pi,(k+1)\pi]$, nous avons $\sin(t)=(-1)^k|\sin(t)|$. Nous avons alors

$$\int_0^b\frac{\sin(t)}{t}dt=\sum_{k=0}^{N(b)}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t}dt+\alpha(b) \tag{20.698}$$

EQooHZPRooFuwRWQ

où $|\alpha(b)|\leqslant\frac{1}{N(b)+1}$; l'important est que $\lim_{b\to\infty}\alpha(b)=0$.

[44] Il me semble que le traitement de ce terme manque dans [672].

(4) **Une suite alternée**

L'inégalité (20.698) nous incite à étudier la série $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ en ayant posé

$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt. \tag{20.699}$$

Nous montrons à présent que la suite (a_k) vérifie les conditions du critère des séries alternées 10.176.

D'abord, $a_{k+1} \leqslant a_k$. En effet en utilisant le changement de variables[45] $u = t - \pi$,

$$a_{k+1} = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u+\pi)|}{u+\pi} du = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+\pi} du < a_k. \tag{20.700}$$

Nous avons utilisé le fait que $|\sin(u+\pi)| = |\sin(u)|$ pour tout u.

De plus, vu que $|\sin(t)| \leqslant 1$ et que $t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, nous avons

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{k\pi} = \frac{(k+1)\pi - k\pi}{k\pi} = \frac{1}{k}. \tag{20.701}$$

Donc $a_k \leqslant \frac{1}{k} \to 0$.

Le critère des séries alternées 10.176 nous dit que

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k < \infty. \tag{20.702}$$

(5) **Conclusion** Nous repartons de (20.698) :

$$\int_0^b \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{k=0}^{N(b)}(-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \alpha(b). \tag{20.703}$$

Cette égalité est valable pour tout $b \in \mathbb{R}^+$. Le passage à la limite $b \to 0$ à droite donne un nombre fini ; donc à gauche aussi, et nous avons prouvé que

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(t)}{t} dt < \infty. \tag{20.704}$$

□

Notre tâche n'est donc pas sans espoir. Au moins l'intégrale que nous cherchons à évaluer est finie.

LEMooARPIooDPSGwR

Lemme 20.215.
Soit $x \in]0, \infty[$. L'intégrale

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt \tag{20.705}$$

existe au sens de Lebesgue usuel.

Démonstration. Vu qu'en $t = 0$ nous avons $\frac{\sin(t)}{t} = 1$, il n'y a pas de problèmes de ce côté. Lorsque $t > 1$ nous avons la majoration

$$|e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}| \leqslant |e^{-tx}|. \tag{20.706}$$

Lorsque t est assez grand, le lemme 15.119 nous donne aussi la majoration

$$|e^{-tx}| \leqslant \frac{1}{t^2}. \tag{20.707}$$

La proposition 14.301(2) implique que $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} < \infty$. Et les majorations font que la proposition 14.176 nous donne le résultat. □

[45] Le théorème 14.282 est toujours bon à citer.

LEMooRDCSooBrWmep

Lemme 20.216 ([672]).
Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt = -\arctan(x) + C \tag{20.708}$$

pour tout $x > 0$.

Démonstration. En permutant dérivée et intégrale, nous allons prouver que $I'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

(1) **Permuter** Nous posons

$$f(x,t) = e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}, \tag{20.709}$$

et nous vérifions les hypothèses du théorème 17.19.

(1a) Pour chaque $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[0,\infty[$, c'est le lemme 20.215.

(1b) Pour $t > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable.

(1c) Nous avons la dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-tx} \sin(t) \tag{20.710}$$

qui vérifie

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leqslant e^{-tx}, \tag{20.711}$$

alors que la fonction $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $[0,\infty[$.

Nous pouvons donc dériver sous l'intégrale et obtenir

$$F'(x) = -\int_0^\infty e^{-xt} \sin(t) dt. \tag{20.712}$$

(2) **Quelques intégrations par partie** Nous posons

$$J(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \sin(t) dt. \tag{20.713}$$

Cette intégrale est une intégrale de Lebesgue toute simple. En effet, posons provisoirement $s(t) = e^{-xt}\sin(t)$. La partie positive de s vérifie $s_+(t) \leqslant e^{-xt}$ et la partie négative vérifie $s_-(t) > -e^{-xt}$. Les deux ont une intégrale qui converge. La définition 14.186 dit alors que J est une intégrale tout à fait propre. Elle serait d'ailleurs mieux écrite sous la forme

$$J(x) = \int_{[0,\infty]} e^{-xt} \sin(t) dt. \tag{20.714}$$

Bref. Tout ça pour dire que nous avons tout à fait le droit de la faire par parties[46], en deux fois.
D'abord en posant $u = e^{-xt}$ et $v' = \sin(t)$ nous avons

$$J(x) = \big[-e^{-xt}\cos(t)\big]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty (-)xe^{-xt}(x)\cos(t)dt = 1 - x\int_0^\infty e^{-xt}\cos(t)dt. \tag{20.715}$$

Nous faisons l'intégrale encore par parties en posant $u = e^{-xt}$ et $v' = \cos(t)$:

$$\int_0^\infty e^{-xt}\cos(t)dt = \big[e^{-xt}\sin(t)\big]_0^\infty - \int_0^\infty (-x)e^{-xt}\sin(t)dt = xJ(x). \tag{20.716}$$

Donc

$$\begin{aligned} J(x) &= 1 - x\int_0^\infty e^{-xt}\cos(t)dt && (20.717a)\\ &= 1 - x\int_0^\infty e^{-xt}\cos(t)dt && (20.717b)\\ &= 1 - x\Big(x\underbrace{\int_0^\infty e^{-xt}\sin(t)dt}_{J(x)}\Big) && (20.717c)\\ &= 1 - x^2 J(x). && (20.717d) \end{aligned}$$

[46] Proposition 20.133.

Voilà qui prouve que $J(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et donc que

$$F'(x) = -J(x) = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{20.718}$$

(3) **Et enfin**

Le théorème 18.39(2) nous dit que la dérivée de la fonction arctan est précisément $1/(1+x)$. Donc F et arctan ont la même dérivée (au signe près). Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(x) = -\arctan(x) + C \tag{20.719}$$

pour tout $x > 0$.

□

LEMooEOYHooVIMCCa

Lemme 20.217.
Nous avons

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2} \tag{20.720}$$

pour tout $x > 0$.

Démonstration. Le but de ce lemme est de fixer la constante laissée arbitraire dans le lemme 20.216. Nous savons qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(x) = -\arctan(x) + C. \tag{20.721}$$

EQooTZGXooUxfAjT

Le but est de prendre la limite $x \to \infty$ des deux côtés.

Par le lemme 18.247, nous avons $|\frac{\sin(t)}{t}| \leqslant 1$ sur $[0, \infty[$. Donc

$$F(x) \leqslant \int_0^\infty e^{-xt}dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-xt}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{x}. \tag{20.722}$$

Vu que $F(x) \leqslant \frac{1}{x}$ pour tout x, nous avons certainement $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.

D'autre part,

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}. \tag{20.723}$$

En passant à la limite dans (20.721), nous avons

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C, \tag{20.724}$$

et donc $C = \pi/2$. □

Nous avons maintenant la formule

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2} \tag{20.725}$$

qui est valable pour tout $x > 0$.

Notre but sera de prendre la limite $x \to 0$ des deux côtés. Vu que arctan est continue, le membre de droite ne pose pas de problèmes et donne $\pi/2$. Pour le membre de gauche, il faut encore permuter une limite et une intégrale.

Pour la suite, nous allons étudier[672]

$$\int_0^\infty (1 - e^{-xt})\frac{\sin(t)}{t}dt. \tag{20.726}$$

Cette intégrale n'existe pas au sens de Lebesgue et est définie par

$$L(x) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b (1 - e^{-xt})\frac{\sin(t)}{t}dt. \tag{20.727}$$

Rien n'indique cependant pour l'instant que cette limite existe.

LEMooZGODooLaBuHo

Lemme 20.218 ([672]).
Soit $x > 0$. Nous posons

$$L_k(x) = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (1 - e^{-tx}) \frac{|\sin(t)|}{t} dt. \tag{20.728}$$

La suite $(L_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait le critère des séries alternées[47]*, c'est-à-dire que cette suite est positive, décroissante à limite nulle.*

Démonstration. Notons que chacune des intégrales $L_k(x)$ est sans problèmes : fonction continue sur un compact. Trois éléments à prouver.

(1) **Positive** Vu que dans toute notre histoire, $x, t > 0$, nous avons $1 - e^{-tx} > 0$ et donc toute la fonction intégrée est positive.

(2) **Tend vers zéro** Vu que $1 - e^{-tx} < 1$, nous avons

$$L_k(x) \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{t} dt \leqslant \pi \frac{1}{k\pi} = \frac{1}{k}. \tag{20.729}$$

Donc $\lim_{k\to\infty} L_k(x) = 0$.

(3) **Décroissante** Nous devons à présent prouver que $L_k(x)$ est décroissante en k lorsque x est fixé.

Nous avons $L_{k+1}(0) = L_k(0)$ pour tout k. Nous allons montrer que $L'_{k+1}(x) < L'_k(x)$ pour tout $x > 0$. De cette façon nous aurons bien $L_{k+1}(x) < L_k(x)$ pour tout k et x.

En permutant (encore) intégrale et dérivée,

$$\begin{aligned}
L'_{k+1}(x) &= \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} e^{-tx} |\sin(t)| dt && \text{(20.730a)}\\
&= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-(u+\pi)x} |\sin(u+\pi)| && \text{(20.730b)}\\
&= e^{-\pi x} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-ux} |\sin(u)| du && \text{(20.730c)}\\
&= e^{-\pi x} L'_k(x). && \text{(20.730d)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (20.730a), permuter dérivée et intégrale ; je ne donne pas tout le détail. Ça a déjà été fait.
- Pour (20.730b), nous avons fait le changement de variables $u = t - \pi$.
- Pour (20.730c), nous avons utilisé le fait que $|\sin(u+\pi)| = |\sin(u)|$ ainsi que $e^{-(u+\pi)x} = e^{-ux}e^{-\pi x}$ par (12.1164).

Nous avons donc prouvé que

$$L'_{k+1}(x) = e^{-\pi x} L'_k(x) < L'_k(x). \tag{20.731}$$

□

LEMooSWFDooGLfwoD

Lemme 20.219.
Pour chaque $x > 0$, nous avons la limite

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k(x) < \infty. \tag{20.732}$$

Démonstration. Nous fixons (provisoirement) b et nous découpons l'intervalle d'intégration comme

$$[0, b] = \bigcup_{k=1}^{N} [k\pi, (k+1)\pi] \cup \big[(N+1)\pi, b\big] \tag{20.733}$$

[47] Théorème 10.176.

où N est une fonction de b ; quelque chose comme $N(b)$ est le plus grand entier tel que $\big(N(b)+1\big)\pi \leqslant b$. Sur chacun des intervalles nous avons $\sin(t) = (-1)^k|\sin(t)|$. Nous avons donc

$$\int_0^b (1-e^{-tx})\frac{\sin(t)}{t}dt = \sum_{k=0}^{N(b)}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(1-e^{-tx})\frac{|\sin(t)|}{t}dt + \int_{(N+1)\pi}^{b}(1-e^{-tx})\frac{\sin(t)}{t}dt \tag{20.734}$$

EQooGBEDooSeuwMN

Le premier terme est $\sum_{k=0}^{N(b)}(-1)^k L_k(x)$, dont nous savons que la limite $b\to\infty$ existe parce que $L_k(x)$ vérifie le critère des séries alternées (lemme 20.218). En ce qui concerne le second terme,

$$\Big|\int_{(N+1)\pi}^{b}(1-e^{-tx})\frac{\sin(t)}{t}\Big| < \frac{b-(N+1)\pi}{(N+1)\pi} < \frac{1}{N(b)+1}. \tag{20.735}$$

La dernière inégalité est le fait que $N(b)$ est choisi pour avoir $b-\big(N(b)+1\big)\pi<\pi$.

Les deux termes de (20.734) ont donc une limite lorsque $b\to\infty$. Nous pouvons donc passer à la limite en sommant les deux limites :

$$\int_0^\infty (1-e^{-tx})\frac{\sin(t)}{t}dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k L_k(x). \tag{20.736}$$

Cette égalité est valable pour chaque $x>0$.

Le fait que la limite soit finie est dans le critère des séries alternées. Pour chaque x, la suite $L_k(x)$ vérifie ce critère par le lemme 20.218. □

LEMooNZVSooDbZCZx

Lemme 20.220.
Nous avons

$$\lim_{x\to 0^+}\int_0^\infty (1-e^{-tx})\frac{\sin(t)}{t}dt = 0. \tag{20.737}$$

Démonstration. La définition de l'intégrale ainsi que le lemme 20.219 nous ont déjà donné

$$\int_0^\infty (1-e^{-tx})\frac{\sin(t)}{t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1-e^{-tx})\frac{\sin(t)}{t}dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k L_k(x) \tag{20.738}$$

ainsi que l'assurance que le tout est un nombre réel fini[48].

(1) **Majoration pour la série alternée**
Nous majorons un peu. Pour $x>0$ et $N\in\mathbb{N}$ nous avons

SUBEQSQooLIGNooNAzpmi

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=0}^{N}(-1)^k L_k(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{N}|L_k(x)| && (20.739a)\\
&= \sum_{k=0}^{N}\Big|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(1-e^{-tx})\frac{|\sin(t)|}{t}dt\Big| && (20.739b)\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N}\int_{k\pi}^{(N+1)\pi}(1-e^{-tx})\frac{|\sin(t)|}{t}dt && (20.739c)\\
&= \int_0^{(N+1)\pi}(1-e^{-tx})\frac{|\sin(t)|}{t}dt && (20.739d)\\
&\leqslant \int_0^{(N+1)\pi} tx\frac{|\sin(t)|}{t}dt && (20.739e)\\
&\leqslant \int_0^{(N+1)\pi} x dt && (20.739f)\\
&= x(N+1)\pi. && (20.739g)
\end{aligned}$$

EQooIIVVooJvHFhS

SUBEQooZPVVooTBZzdl

Justifications :

[48] De toutes façons, il n'existe pas de nombres réels infinis, mais vous voyez ce que je veux dire.

- Pour (20.739b) c'est la définition (20.728).
- Pour (20.739e), c'est le fait que $0 \leqslant 1 - e^{-u} \leqslant u$ pour tout $u \geqslant 0$ ainsi que la sous-additivité de l'intégrale de la proposition 14.194.

(2) **Majoration pour l'intégrale**
Nous fixons $N \in \mathbb{N}$, et nous avons : SUBEQSooSBSJooMAkJPh

$$\Big| \lim_{b\to\infty} \int_0^b (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt \Big| = \Big| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k(x) \Big| \tag{20.740a}$$

$$= \Big| \sum_{k=0}^{N} (-1)^k L_k(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} (-1)^k L_k(x) \Big| \tag{20.740b}$$

$$\leqslant \Big| \sum_{k=0}^{N} (-1)^k L_k(x) \Big| + \Big| \sum_{k=N+1}^{\infty} (-1)^k L_k(x) \Big| \tag{20.740c}$$

$$\leqslant \Big| \sum_{k=0}^{N} (-1)^k L_k(x) \Big| + L_{N+1}(x) \tag{20.740d}$$ SUBEQooYFWDooYKhYtd

$$\leqslant \Big| \sum_{k=0}^{N} (-1)^k L_k(x) \Big| + \frac{1}{N+1} \tag{20.740e}$$ SUBEQooDDRGooNDfxqO

(20.740f)

Justifications :

- Pour (20.740d) c'est le reste du critère des séries alternées, théorème 10.176(3).
- Pour (20.740e) c'est la majoration (20.729) déjà faite.

(3) **Les deux ensemble** Pour chaque N et pour chaque $x > 0$ nous avons, en mettant (20.739) au bout de (20.740) :

$$\Big| \int_0^{\infty} (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt \Big| \leqslant x(N+1)\pi + \frac{1}{N+1}. \tag{20.741}$$

En prenant la limite $x \to 0$ nous trouvons

$$\lim_{x\to 0} \int_0^{\infty} (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt \leqslant \frac{1}{N+1} \tag{20.742}$$

pour tout N. Donc cette limite est nulle :

$$\lim_{x\to 0} \int_0^{\infty} (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt = 0. \tag{20.743}$$

□

Maintenant que nous avons fait plein de lemmes, nous pouvons énoncer notre résultat principal, et le démontrer facilement.

Théorème 20.221 (Intégrale de Dirichlet[672])**.**
Nous avons

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \tag{20.744}$$

Nous avons écrit $\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(t)}{t} dt$ et non $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ parce que cette dernière intégrale n'existe pas vraiment au sens de Lebesgue, voir le lemme 20.213. Dans la suite nous écrirons cependant $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, en gardant en tête que cela n'est défini que via la limite.

Démonstration. Nous nommons D la valeur que nous cherchons. Le lemme 20.214 nous assure que

$$D = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(t)}{t} < \infty. \tag{20.745}$$

Le lemme 20.217 nous donne, quant à lui,

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt=-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}. \tag{20.746}$$

Vu que les deux limites existent, on peut permuter somme et limite[49] :

$$D+\arctan(x)-\frac{\pi}{2}=\lim_{b\to\infty}\Big(\int_0^b\frac{\sin(t)}{t}+\int_0^b e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt\Big) \tag{20.747a}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^b(1-e^{-xt})\frac{\sin(t)}{t}dt. \tag{20.747b}$$

SUBEQooXIUNooPZnCPb

Pour (20.747b), nous avons des fonctions bornées sur un intervalle borné $]0,b[$, donc il n'y a pas de mal à sommer les intégrales.

Donc pour tout $x>0$, nous avons

$$D+\arctan(x)-\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty(1-e^{-xt})\frac{\sin(t)}{t}dt. \tag{20.748}$$

Nous passons à la limite $x\to 0$ en utilisant le lemme 20.220 et le fait que $\arctan(0)=0$ (lemme 18.44) :

$$D-\frac{\pi}{2}=0, \tag{20.749}$$

c'est-à-dire que résultat annoncé. □

[49] C'est une phrase un peu grandiloquente pour dire que $\lim_{b\to a}f(b)-\lim_{b\to a}g(b)=\lim_{b\to a}(f(b)-g(b))$. Ici nous avons $a=\infty$ et les fonctions f et g sont celles définies par les intégrales.

Chapitre 21

Arcs paramétrés

La structure de ce chapitre, comme beaucoup de choses dans le Frido, est fortement liée au choix de présenter toutes les matières dans l'ordre mathématiquement logique. Nous devons donc le placer après la trigonométrie ; les propriétés principales des fonctions trigonométriques étant dans la proposition 18.21, et c'est la proposition 18.59 qui nous permet de dire que $\big(\cos(t),\sin(t)\big)$ décrit le cercle.

Et enfin nous n'avons pas encore calculé la circonférence du cercle, et pour cause : nous n'avons pas encore donné de définition à la longueur d'un chemin dans $\mathbb{R}^2$. C'est pourquoi ce chapitre va aller droit à la longueur avant de donner des exemples.

21.1 Définitions

SecDeExCPar

Définition 21.1.
Un ***arc paramétré*** *dans $\mathbb{R}^p$ est un couple (I,γ) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et γ est une application continue de I dans $\mathbb{R}^p$. Nous disons que (I,γ) est un arc paramétré* ***compact*** *(ou un* ***chemin*** *dans $\mathbb{R}^p$) lorsque I est compact dans $\mathbb{R}$.*

L'intervalle I d'un arc paramétré compact est toujours de la forme $[a,b]$, étant donné que tous les intervalles compacts de $\mathbb{R}$ sont de cette forme. Un **sous arc** de (I,γ) est un arc de la forme (I_0,γ) avec $I_0\subset I$.

La définition 20.75 a déjà dit qu'un chemin dans $\mathbb{R}^n$ est une application continue $\sigma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$.

Si le chemin σ est dérivable, la fonction σ' est la **vitesse** du chemin σ. Si le chemin est deux fois dérivable, la fonction σ'' l'**accélération**.

L'image de σ dans $\mathbb{R}^3$ est ce qu'on appellera la **courbe**.

21.2 Longueur d'arc

SecLongArc

Nous voulons définir et étudier la notion de longueur d'un arc paramétré. Pour cela, le plus raisonnable est d'approcher l'arc par des petits segments de droites (dont les longueurs sont évidentes), et d'extraire la « meilleure » approximation.

Une des notions clefs pour la suite est celle de subdivision d'intervalles. Cette notion sera encore utilisée par la suite à propos des intégrales.

DefSubdivisionIntervalle

Définition 21.2.
Si I est un intervalle d'extrêmes a et b avec $a<b$, nous appelons ***subdivision finie*** *de I un choix de nombres t_i tels que*

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b. \tag{21.1}$$

Nous disons qu'une subdivision σ' est ***plus fine*** *que la subdivision σ si l'ensemble des points de σ est inclus dans celui des points de σ'. Dans ce cas, la subdivision σ' est un* ***raffinement*** *de σ. Nous désignons par $\mathcal{S}(I)$ l'ensemble des subdivisions finies de l'intervalle I.*

Dans la suite, toutes les subdivisions que nous considérons seront des subdivisions finies. Aussi nous parlerons simplement de *subdivisions* sans préciser. Nous allons souvent noter $\sigma=(t_i)_{i=1}^n$ pour désigner la subdivision formée par les nombres t_i. Il faut garder en tête que dans une subdivision, les nombres *sont ordonnés*.

DEFooDNZWooXmxhsU

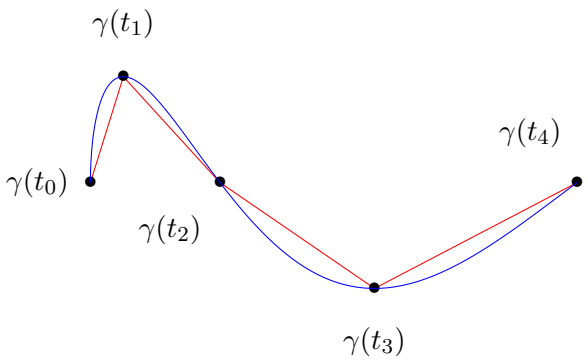


FIGURE 21.1 : La longueur d'un découpage. La somme des longueurs des segments droits est facile à calculer. LabelFigCourbeRectifiable

Définition 21.3.
Soit un arc paramétré compact (I,γ) et une subdivision $\sigma=(t_i)_{i=0}^n$ de $I=[a,b]$. À partir de γ et du découpage σ nous définissons le nombre (voir figure 21.1)

$$l_\sigma(\gamma)=\sum_{i=1}^{n}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|. \tag{21.2}$$

Eqlsigmagammasss

On appelle ***longueur*** *de l'arc γ le nombre*

$$l(\gamma)=\sup_\sigma l_\sigma(\gamma)\in[0,\infty]. \tag{21.3}$$

Nous disons que γ est ***rectifiable*** *lorsque $l(\gamma)<\infty$.*

Lorsque nous voulons spécifier sur quel intervalle nous considérons l'arc, nous noterons $l(I,\gamma)$ au lieu de $l(\gamma)$ pour être plus précis.

Par l'inégalité triangulaire, si σ_1 est plus fine que σ, nous avons

$$l_\sigma(\gamma)\leqslant l_{\sigma_1}(\gamma), \tag{21.4}$$

Comme cela peut être vu sur la figure 21.2.

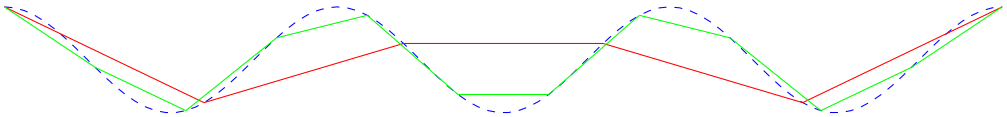


FIGURE 21.2 : Il est visible que la longueur donnée par l'approximation par des petits segments (verts) est plus longue et plus précise que celle donnée par les longs segments (rouge). LabelFigArcLongueurFinesse

PROPooCXLYooRpKDMs

Proposition 21.4.
Si P et Q sont des points de $\mathbb{R}^2$, alors le segment de droite joignant P à Q est le plus court des arcs paramétrés passant par P et Q.

Démonstration. Si γ est un arc paramétré joignant P et Q, la longueur de γ est donné par un supremum dont un des éléments est la longueur du segment de droite. □

Dans la vie réelle, il est souvent difficile et peu pratique de calculer le supremum « à la main ». C'est pourquoi nous allons travailler à exprimer la longueur d'un arc à l'aide d'une intégrale (théorème 21.9).

Lemme 21.5.
Nous avons $l(\gamma)=0$ si et seulement si $\gamma(t)$ est un vecteur constant.

Démonstration. Si l'application $\gamma(t)$ est constante, le résultat est évident. Supposons maintenant que γ ne soit pas constante. Cela signifie qu'il existe t_1 et t_2 dans I tels que $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$. Dans ce cas, si nous prenons le découpage $\sigma=\{a,t_1,t_2,b\}$, la somme (21.2) contient au moins le terme non nul $\|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\|$, et donc $l_\sigma(\gamma)>0$. Par définition du supremum, nous avons alors $l(\gamma)\geqslant l_\sigma(\gamma)>0$. □

Propletautredecop

Proposition 21.6.
Soit (I,γ) un arc paramétré compact.

(1) *Si $\gamma' = (I', \gamma)$ avec $I' \subset I$, alors $l(\gamma') \leqslant l(\gamma)$.*

(2) *Soit $c \in [a, b]$, et considérons les arcs $\gamma_1 = \big([a, c], \gamma\big)$ et $\gamma_2 = \big([c, b], \gamma\big)$. Alors*

$$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2). \tag{21.5}$$

En particulier, γ est rectifiable si et seulement si γ_1 et γ_2 le sont.

Démonstration. (1) Nous notons $I = [a, b]$ et $I' = [a', b']$. Étant donné que $I' \subset I$, nous avons

$$a \leqslant a' < b' \leqslant b. \tag{21.6}$$

Pour chaque subdivision $\sigma_0 : a' = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b'$ de I', nous pouvons construire une subdivision de I en « ajoutant » les points a et b, c'est-à-dire

$$\sigma : a \leqslant t_0 < \ldots < t_n \leqslant b. \tag{21.7}$$

Si nous calculons $l_\sigma(\gamma)$, nous avons tous les termes qui arrivent dans $l_{\sigma_0}(\gamma')$ plus le premier et dernier terme : $\|\gamma(t_0) - \gamma(a)\|$ et $\|\gamma(b) - \gamma(t_n)\|$. Nous avons donc

$$l_{\sigma_0}(\gamma') \leqslant l_\sigma(\gamma) \leqslant \sup_\sigma l_\sigma(\gamma) = l(\gamma). \tag{21.8}$$

Étant donné que pour toute subdivision σ_0 nous avons $l_{\sigma_0}(\gamma') \leqslant l(\gamma)$, en prenant le supremum sur les subdivisions σ_0 de I', nous avons comme annoncé

$$l(\gamma') \leqslant l(\gamma). \tag{21.9}$$

(2) Soit $\sigma = \{t_i\}$ une subdivision de $[a, b]$. Nous considérons les subdivisions σ_1 et σ_2 définies comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &: \{t_i \text{ tel que } t_i < c\} \cup \{c\}, \\ \sigma_2 &: \{t_i \text{ tel que } t_i > c\} \cup \{c\}. \end{aligned} \tag{21.10}$$

L'inégalité triangulaire implique que

$$l_\sigma(\gamma) \leqslant l_{\sigma\cup\{c\}}(\gamma) = l_{\sigma_1}(\gamma_1) + l_{\sigma_2}(\gamma_2) \leqslant l(\gamma_1) + l(\gamma_2). \tag{21.11}$$

Nous avons donc

$$l(\gamma) \leqslant l(\gamma_1) + l(\gamma_2). \tag{21.12}$$

Nous prouvons maintenant l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. Étant donné que $l(\gamma_1)$ est le supremum des quantités $l_{\sigma_1}(\gamma_1)$ lorsque σ_1 parcours toutes les subdivisions possibles, il existe une partition σ_1^ε telle que (idem pour γ_2)

$$\begin{aligned} l_{\sigma_1^\varepsilon}(\gamma_1) + \frac{\varepsilon}{2} &> l(\gamma_1), \\ l_{\sigma_2^\varepsilon}(\gamma_2) + \frac{\varepsilon}{2} &> l(\gamma_2), \end{aligned} \tag{21.13}$$

où σ_1^ε est une subdivision de $[a, c]$ et σ_2^ε en est une de $[c, b]$. En faisant la somme des deux équations (21.13), nous trouvons

$$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) < l_{\sigma_1^\varepsilon}(\gamma_1) + l_{\sigma_2^\varepsilon}(\gamma_2) + \varepsilon = l_{\sigma_1^\varepsilon \cup \sigma_2^\varepsilon}(\gamma) \leqslant l(\gamma) + \varepsilon. \tag{21.14}$$

L'inégalité $l(\gamma_1) + l(\gamma_2) < l(\gamma) + \varepsilon$ étant valable pour tout ε, nous avons

$$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leqslant l(\gamma). \tag{21.15}$$

Cette inégalité, combinée avec l'inégalité (21.12), donne bien $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.

□

21.3 Abscisse curviligne

Définition 21.7.
Soit (I, γ) un arc rectifiable compact avec $I = [a, b]$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon [a, b] &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto l\big([a, t], \gamma\big) \end{aligned} \tag{21.16}$$

*est la **longueur d'arc** de γ.*

Cette fonction nous permet de calculer la distance (suivant la courbe) entre deux points arbitraires parce que si $a \leqslant t < u \leqslant b$, nous avons

$$l\big([t,u],\gamma\big) = \varphi(u) - \varphi(t). \tag{21.17}$$

En effet,

$$\varphi(u) - \varphi(t) = l\big([a,u],\gamma\big) - l\big([a,t],\gamma\big), \tag{21.18}$$

mais en utilisant la proposition 21.6, nous avons

$$l\big([a,u],\gamma\big) = l\big([a,t],\gamma\big) + l\big([t,u],\gamma\big). \tag{21.19}$$

Proposition 21.8.
La longueur d'arc d'un arc rectifiable compact est une fonction continue et croissante.

Démonstration. Soit (I,γ) un arc paramétré rectifiable compact avec $I = [a,b]$. Afin de montrer que φ est croissante, prenons $t \in I$ ainsi que $h > 0$ et montrons que $\varphi(t+h) \geqslant \varphi(t)$. La proposition 21.6 implique que

$$l\big([a,t+h],\gamma\big) = l\big([a,t],\gamma\big) + l\big([t,t+h],\gamma\big), \tag{21.20}$$

c'est-à-dire

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + l\big([t,t+h],\gamma\big) \geqslant \varphi(t). \tag{21.21}$$

Pour la continuité, soit t fixé dans $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$. Il nous faut démontrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si s est dans $[0,\eta]$ alors

$$|\varphi(t+s) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Étant donné que $l\big([t,b],\gamma\big)$ est le supremum des $l_\sigma\big([t,b],\gamma\big)$, il existe une subdivision σ donnée par les points $t, t_1, \cdots, t_{n-1}, b$ telle que

$$l_\sigma\big([t,b],\gamma\big) > l\big([t,b],\gamma\big) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(b) - \varphi(t) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{21.22}$$

La continuité de γ implique qu'il existe un η tel que

$$s \in [0,\eta] \Rightarrow \|\gamma(t+s) - \gamma(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{21.23}$$

Quitte à prendre η encore plus petit, nous supposons que $t + \eta < t_1$. Soit $s \in [0,\eta]$ et considérons la subdivision de $[t,b]$ donnée par $\sigma' = \sigma \cup \{t+s\}$. Étant donné que σ' est plus fine que σ, le nombre $l_\sigma\big([t,b],\gamma\big)$ est inférieur ou égal à $l_{\sigma'}\big([t,b],\gamma\big)$. Nous avons donc les inégalités

$$\begin{aligned}
\varphi(b) - \varphi(t) - \frac{\varepsilon}{2} &\leqslant l_\sigma\big([t,b],\gamma\big) \\
&\leqslant l_{\sigma'}\big([t,b],\gamma\big) \\
&= \big\|\gamma(t+s) - \gamma(t)\big\| + l_{\sigma'\setminus\{t\}}\big([t+s,b]\gamma\big) \\
&\leqslant \|\gamma(t+s) - \gamma(t)\| + \varphi(b) - \varphi(t+s) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \varphi(b) - \varphi(t+s).
\end{aligned} \tag{21.24}$$

Au final, nous avons trouvé que

$$\varphi(t+s) - \varphi(t) \leqslant \varepsilon, \tag{21.25}$$

ce qui prouve que φ est continue au point t. □

En guise de paramètre sur un arc, nous pouvons utiliser la longueur d'arc elle-même. En effet si (I,γ) est un arc de longueur l, nous pouvons donner le même arc avec le couple $\big([0,l],g\big)$ où g est la fonction qui au réel s fait correspondre l'élément $\gamma\big(\varphi^{-1}(s)\big)$ de $\mathbb{R}^n$. Dire

$$P = (\gamma \circ \varphi^{-1})(s) \tag{21.26}$$

revient à dire que le point P est le point sur la courbe sur lequel on tombe après avoir marché une distance s sur la courbe.

Nous allons revenir sur ce « changement de paramètre » plus tard, en particulier dans la section 21.7.

21.3.1 Formule intégrale de la longueur

Nous pouvons voir un chemin γ comme étant la trajectoire d'une particule en fonction du temps. Sa vitesse à l'instant t est le vecteur $\gamma'(t)$, tandis que sa vitesse *scalaire* est le nombre $\|\gamma'(t)\|$. Une question naturelle est de savoir quelle est la longueur de la trajectoire parcourue entre $t=a$ et $t=b$.

Si nous prenons un petit intervalle de temps dt, nous pouvons supposer que le mobile avance à la vitesse constante $\|\gamma'(t)\|$. Cela ferait un trajet parcouru de longueur $\|\gamma'(t)\|dt$. Nous nous attendons donc à une formule de la forme suivante pour la longueur de γ :

$$l(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt. \tag{21.27}$$

EqDefLongueurChemin

Plus explicitement, si $\gamma(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, alors nous aurions la formule

$$l(\gamma)=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt. \tag{21.28}$$

ThoLongueurIntegrale

Théorème 21.9.
Soit (I,γ) un arc paramétré compact de classe $\mathcal{C}^1$. Alors γ est rectifiable et

$$l(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt=\int_\gamma 1, \tag{21.29}$$

EqLongGammalInt

où $I=[a,b]$.

Démonstration. L'égalité avec l'intégrale le long de γ de la fonction 1 est simplement la définition 20.40 de l'intégrale curviligne.

Si $\sigma=\{t_i\}$ est une subdivision de l'intervalle $[a,b]$, alors

$$\begin{aligned} l_\sigma(\gamma)&=\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|\\ &=\sum_{i=1}^n \|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\gamma'(t)dt\|\\ &\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\gamma'(t)\|dt\\ &=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt. \end{aligned} \tag{21.30}$$

Cela prouve déjà que

$$l(\gamma)=\sup_\sigma l_\sigma(\gamma)\leqslant\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt. \tag{21.31}$$

Eq_0208lsigsigmmintifp

Nous devons maintenant prouver l'inégalité inverse.

Notons φ l'abscisse curviligne $\varphi(t)=l\big([a,t],\gamma\big)$. Cette dernière vérifie

$$\varphi(t+h)-\varphi(t)=l\big([t,t+h],\gamma\big)\geqslant\|\gamma(t+h)-\gamma(t)\|, \tag{21.32}$$

et en particulier

$$\left\|\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}\right\|\leqslant\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}. \tag{21.33}$$

Eq_0208intervpvpintfrach

D'autre part, en utilisant (21.31) sur le segment $[t,t+h]$, nous avons

$$\varphi(t+h)-\varphi(t)=l\big([t,t+h],\gamma\big)\leqslant\int_t^{t+h}\|\gamma'(u)\|du. \tag{21.34}$$

Cela nous permet de continuer l'inéquation (21.33) en

$$\left\|\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}\right\|\leqslant\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\leqslant\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|\gamma'(u)\|du. \tag{21.35}$$

Prenons la limite $h \to 0$. À gauche nous reconnaissons la formule de la dérivée, et nous obtenons $\|\gamma'(t)\|$; au centre nous avons $\varphi'(t)$ et à droite, si $n(u)$ représente une primitive de la fonction $u \mapsto \|\gamma'(u)\|$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{n(t+h)-n(t)}{h} = n'(t) = \|\gamma'(t)\|. \tag{21.36}$$

Au final,

$$\|\gamma'(t)\| \leqslant \varphi'(t) \leqslant \|\gamma'(t)\|, \tag{21.37}$$

c'est-à-dire $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\|$ et donc par le théorème fondamental du calcul intégral 14.288,

$$\varphi(t) - \varphi(a) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \tag{21.38}$$

Par construction de la longueur d'arc, $\varphi(a) = 0$ et en posant $t = b$ nous obtenons la relation recherchée :

$$l(\gamma) = \varphi(b) = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du. \tag{21.39}$$

□

RemLongIntUn

Remarque 21.10.
Cela est cohérent avec 20.186, mais il faut garder en tête que $l(\gamma)$ n'est pas la mesure de Lebesgue de l'image de γ dans $\mathbb{R}^2$. Cette dernière est nulle.

Exemple 21.11.
Soient donc a et b deux points de $\mathbb{R}^m$, et γ la droite joignant a à b, c'est-à-dire

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb \tag{21.40}$$

avec $t \in [0,1]$. Le théorème 21.9 nous enseigne que la longueur de ce chemin est

$$l\big([0,1],\gamma\big) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \| -a+b\| = \|b-a\|, \tag{21.41}$$

qui est bien la distance entre a et b. △

Exemple 21.12 (Circonférence du cercle)**.**
Nous savons que l'image de

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \big(R\cos(t), R\sin(t)\big) \end{aligned} \tag{21.42}$$

est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $R > 0$. Et de plus cet arc est de classe C^1 (et même C^∞) par la proposition 18.1. La longueur sera, d'après la formule (21.9)

$$l_\gamma = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = 2\pi R \tag{21.43}$$

grâce à la formule $\sin^2 + \cos^2 = 1$ du lemme 18.4.

Mais tout cela n'est pas satisfaisant parce que nous n'avons pas encore de valeur numérique de π.

Il y a une autre façon de faire en considérant le quart de cercle dont la longueur en fonction de π est vite calculée par

$$l_\gamma = \int_0^{\pi/2} \|\gamma'(t)\| dt = \frac{\pi R}{2}. \tag{21.44}$$

Cette même longueur est calculée en termes de fonctions plus courantes avec le chemin

$$\begin{aligned} \sigma\colon]0,1[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{t}{\sqrt{R^2-t^2}}\right) \end{aligned} \tag{21.45}$$

La longueur s'exprime avec

$$l_\sigma = \int_0^1 \sqrt{\frac{R^2}{R^2+t^2}} dt. \tag{21.46}$$

EQooIIKSooRQMgWY

Notons que le changement de variables $t = R\sin(u)$ permet de retrouver l'expression $l_\sigma = \pi R/2$.

Pour avoir une approximation de π, il est loisible de calculer une approximation numérique de l'intégrale (21.46) (avec $R = 1$) et de l'égaler à $\pi/2$. △

PROPooDMSTooEOFExj

Proposition 21.13.
Soit le cercle $S = \{x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| = 1\}$. Nous considérons la bijection[1] *$\varphi\colon [0,2\pi[\to S$. Soient deux*

[1] Corolaire 18.60.

points $a, b \in S$ ainsi que $\theta_a = \varphi^{-1}(a)$, $\theta_b = \varphi^{-1}(b)$. Nous supposons que $\theta_a \leqslant \theta_b$ et que $\widehat{a(0,0)b} = \theta$[2].

Nous considérons le chemin

$$\begin{aligned}\gamma\colon [\theta_a, \theta_b] &\to S \\ t &\mapsto \big(R\cos(t), R\sin(t)\big).\end{aligned} \tag{21.47}$$

Alors $l(\gamma) = R\theta$[3].

Démonstration. Vu que $\|a\| = \|b\| = R$, la définition de l'angle $\widehat{aob}$ dit que

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\frac{a}{R} = \frac{b}{R}. \tag{21.48}$$

En substituant $a = R\big(\cos(\theta_a), \sin(\theta_b)\big)$ et $b = R\big(\cos(\theta_b), \sin(\theta_b)\big)$ et en faisant une petite multiplication matrice par vecteur :

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta_a) - \sin(\theta)\sin(\theta_a)\\ \sin(\theta)\cos(\theta_a) + \cos(\theta)\sin(\theta_a)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta_b)\\ \sin(\theta_b).\end{pmatrix} \tag{21.49}$$

En utilisant les formules de trigonométrie du lemme 18.14, il vient

$$\begin{cases}\cos(\theta + \theta_a) = \cos(\theta_b) & \text{(21.50a)}\\ \sin(\theta + \theta_a) = \sin(\theta_b). & \text{(21.50b)}\end{cases}$$

La proposition 18.24 nous enseigne alors que $\theta_b = \theta + \theta_a + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Vu que θ_a et θ_b sont entre 0 et 2π, il est obligatoire que $k = 0$ et donc que $\theta_b = \theta_a + \theta$.

Enfin nous calculons la longueur de γ avec le théorème 21.9 qui permet de réduire la longueur à une intégrale : $l(\gamma) = \int_{\theta_a}^{\theta_a+\theta} \|\gamma'(t)\|dt$.

Dans notre cas, $\gamma'(t) = R\big(-\sin(t), \cos(t)\big)$ et donc $\|\gamma'(t)\| = R$. Donc

$$l(\gamma) = \int_{\theta_a}^{\theta_a+\theta} \|\gamma'(t)\|dt = R\theta, \tag{21.51}$$

comme annoncé. □

Exemple 21.14.
Considérons l'arc de cercle de rayon R interceptée par l'angle θ présenté sur la figure 21.3.

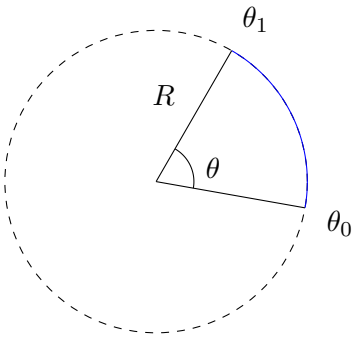


FIGURE 21.3 : Quelle est la longueur de la partie bleue de ce cercle de rayon R? LabelFigAMDUooZZUOqa

Par définition, cette longueur sera

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}dt = R(\theta_1 - \theta_0). \tag{21.52}$$

Le radian comme unité de mesure d'angle est donc l'unité parfaite : elle est la longueur d'arc interceptée (si le rayon est $R = 1$). △

Une conséquence à peine indirecte de ce que nous venons de voir à propos de longueur d'arc de cercle est la proposition suivante[4].

[2] Angle, définition 18.156
[3] Longueur d'arc, définition 21.3.
[4] À mon avis il y a moyen de prouver ça avec un développement limité, mais je ne sais pas trop comment majorer l'erreur sans accepter que x soit arbitrairement proche de y. Si vous savez comment faire, écrivez-moi.

PROPooYMMKooSUBtoo

Proposition 21.15.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$|e^{ix} - e^{iy}| \leqslant |x - y|. \tag{21.53}$$

Démonstration. Évacuons tout de suite la différence entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$: ils sont isométriques. Si vous n'êtes pas convaincu que tout se passe bien, vous pouvez récrire toute la démonstration en écrivant systématiquement $\big(\cos(x), \sin(x)\big)$ au lieu de e^{ix}. Cela serait au passage un bon exercice pour voir que les formules de dérivation fonctionnent bien.

Nous considérons les points e^{ix} et e^{iy} dans $\mathbb{C}$ et deux chemins différents les joignant. Le premier est le segment de droite

$$\begin{aligned} \sigma_1 \colon [0,1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto te^{ix} + (1-t)e^{iy}. \end{aligned} \tag{21.54}$$

Le second est l'arc de cercle

$$\begin{aligned} \sigma_1 \colon [0,1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{i\big(tx+(1-t)y\big)}. \end{aligned} \tag{21.55}$$

Nous avons $\sigma_1'(t) = e^{ix} - e^{iy}$ qui ne dépend pas de t, et donc la longueur est facile à calculer à partir de la formule intégrale du théorème 21.9 :

$$l(\sigma_1) = \int_0^1 |\sigma_1'(t)| = |e^{ix} - e^{iy}|. \tag{21.56}$$

En ce qui concerne le second chemin,

$$\sigma_2'(t) = (x-y)e^{i\big(tx+(1-t)y\big)}. \tag{21.57}$$

Nous avons[5] $|\sigma_2'(t)| = |x - y|$ qui ne dépend pas non plus de t. Donc

$$l(\sigma_2) = |x - y|. \tag{21.58}$$

Étant donné la proposition 21.4 qui dit que le chemin le plus court est le segment de droite,

$$l(\sigma_1) < l(\sigma_2) \tag{21.59}$$

et donc le résultat annoncé. □

21.16.
Si on veut savoir la longueur d'une courbe donnée sous la forme d'une fonction $y = y(x)$, un chemin qui trace la courbe est évidemment donné par

$$\gamma(t) = (t, y(t)), \tag{21.60}$$

et le vecteur tangent au chemin est $\gamma'(t) = (1, y'(t))$. Donc

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + y'(t)^2}, \tag{21.61}$$

et

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2}. \tag{21.62}$$

EqLongFonction

Exemple 21.17.
La longueur de l'hélice

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ \sqrt{5}t \end{pmatrix} \tag{21.63}$$

pour $t \in [0, 4\pi]$ est donnée par

$$l(\sigma) = \int_0^{4\pi} \sqrt{4\sin^2(2t) + 4\cos^2(2t) + 5}dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{9} = 12\pi. \tag{21.64}$$

△

[5] Si vous voulez citer des résultats, lemme 18.11 et proposition 9.104.

Définition 21.18.
*Soit $\sigma_1\colon [a,b]\to\mathbb{R}^3$, un chemin et $\sigma_2\colon [c,d]\to\mathbb{R}^3$, un autre chemin. On dit que ces chemins sont **équivalents** si il existe une fonction $\varphi\colon [a,b]\to[c,d]$ strictement croissante telle que $\sigma_1(t)=\sigma_2\big(\varphi(t)\big)$.*

Deux chemins équivalents parcourent la même courbe dans le même sens. Ils ne le parcourent toutefois pas à la même vitesse. On dit que les chemins sont **opposés** si la fonction φ de la définition est strictement décroissante. Dans ce cas, ils ont la même image, mais parcourue dans le sens opposés. Nous disons que deux chemins équivalents sont un **changement de paramétrage** pour la même courbe.

Dans le cas d'un paramétrage équivalente, nous avons $\varphi(a)=c$ et $\varphi(b)=d$. Les points de départ et d'arrivée des deux paramètres coïncident. Dans le cas d'un paramètre qui va dans le sens opposé par contre nous avons automatiquement $\varphi(a)=d$ et $\varphi(b)=c$.

Proposition 21.19.
La longueur d'une courbe ne dépend pas du paramètre (équivalent ou opposé) choisi.

Démonstration. Soient $\sigma_1\colon [a,b]\to\mathbb{R}^3$ et $\sigma_2\colon [c,d]\to\mathbb{R}^3$ tels que

$$\sigma_1(t)=\sigma_2\big(\varphi(t)\big) \tag{21.65}$$

où $\varphi\colon [a,b]\to[c,d]$ est une bijection strictement monotone. Par définition on a

$$l(\sigma_1)=\int_a^b\|\sigma_1'(t)\|dt. \tag{21.66}$$

Nous pouvons exprimer la dérivée de σ_1 en termes de celle de σ_2 en dérivant la relation (21.65) :

$$\sigma_1'(t)=\varphi'(t)\sigma_2'\big(\varphi(t)\big). \tag{21.67}$$

En ce qui concerne la norme,

$$\|\sigma_1'(t)\|=|\varphi'(t)|\|\sigma_2'(t)\|. \tag{21.68}$$

Notez dans cette relation que $\varphi'(t)$ est un nombre (et non un vecteur). Étant donné que nous avons supposé que φ était monotone, soit elle est monotone croissante et $\|\varphi'(t)\|=\varphi'(t)$ pour tout t, soit elle est monotone décroissante et $\|\varphi'(t)\|=' \varphi(t)$ pour tout t.

Considérons d'abord le premier cas, c'est-à-dire $\|\varphi'(t)\|=\varphi'(t)$. Nous posons $s=\varphi(t)$, $ds=\varphi'(t)dt$. En remplaçant cela dans la formule de la longueur est

$$\begin{aligned}l(\sigma_1)&=\int_a^b\varphi'(t)\|\sigma_2'\big(\varphi(t)\big)\|dt\\&=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\|\sigma_2'(s)\|ds\\&=\int_c^d\|\sigma_2'(s)\|ds\\&=l(\sigma_2).\end{aligned} \tag{21.69}$$

Si nous considérons maintenant un paramétrage strictement décroissante. Dans ce cas, $\varphi'(t)\leqslant 0$ et $\|\varphi'(t)\|=-\varphi'(t)$. Nous posons encore une fois $s=\varphi(t)$, $ds=\varphi'(t)ds$. Ici il ne faut pas oublier que $\varphi(a)=d$ et $\varphi(b)=c$. Le calcul est à part cela le même en faisant attention au singe :

$$\begin{aligned}l(\sigma_1)&=\int_a^b\varphi'(t)\|\sigma_2'\big(\varphi(t)\big)\|dt\\&=-\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\|\sigma_2'(s)\|ds\\&=-\int_d^c\|\sigma_2'(s)\|ds\\&=\int_c^d\|\sigma_2'(s)\|ds\\&=l(\sigma_2).\end{aligned} \tag{21.70}$$

Nous avons changé le signe en changeant l'ordre des bornes. □

21.4 Suite du chapitre

Le grand avantage des arcs paramétrés par rapports aux graphes de fonctions est qu'un arc paramétré peut « faire des retours en arrière », ou bien des auto intersections. Outre les deux exemples typiques de la la figure 21.4, un exemple classique est la droite verticale. Les fonctions $y = ax + b$ permettent de décrire toutes les droites, sauf les droites verticales. Dans le cadre des courbes paramétrées, les droites verticales et horizontales sont sur pied d'égalité. Quelques exemples classiques :

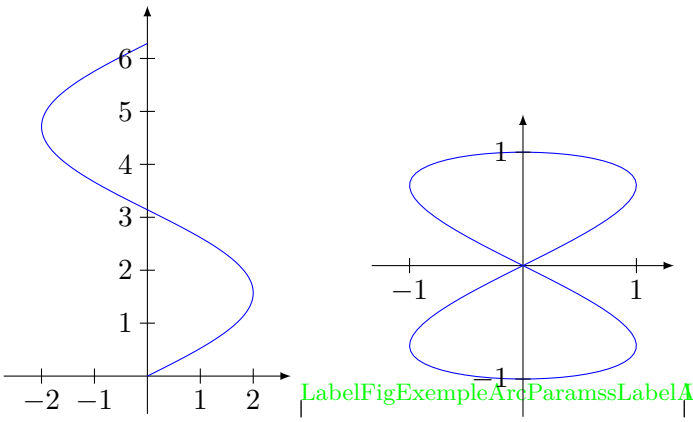
Droite horizontale Une droite horizontale à la hauteur a est donnée par la courbe paramétrée $\gamma(t) = (t, a)$, avec $t \in I = \mathbb{R}$.

Droite verticale Une droite verticale à la distance b de l'origine est donnée par la courbe paramétrée $\gamma(t) = (b, t)$, avec $t \in I = \mathbb{R}$.

PgGrqFnGamma

Graphe d'une fonction Le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donné par l'arc $\gamma(t) = \big(t, f(t)\big)$.

Un cercle Le cercle de rayon R est donné par l'arc $\gamma(t) = \big(R\cos(t), R\sin(t)\big)$.



LabelFigExempleArcParamssLabelArcVide LabelFigExempleArcParamssLabelA

(a) $\gamma(t) = (2\sin(t), t)$, avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (b) $\gamma(t) = (sin(2t), sin(t))$ avec $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$

FIGURE 21.4 : Des exemples d'arcs paramétrées. Ceux ne sont pas des graphes.

LabelFigExempleArcParam

Remarque 21.20.
Afin d'alléger la notation, nous allons le plus souvent désigner l'arc (I, γ) simplement par la fonction γ. Il est cependant toujours *très* important de savoir sur quel intervalle nous considérons le chemin. Cela dépendra le plus souvent du contexte, et nous indiquerons l'intervalle I explicitement lorsqu'une ambigüité est à craindre.

Par exemple, lorsque nous considérons le cercle $\gamma(t) = \big(R\cos(t), R\sin(t)\big)$, le plus souvent l'intervalle de variation de t sera $I = [0, 2\pi]$. Par contre, si nous considérons la droite $\gamma(t) = (t, 2t)$, l'intervalle de variation de t sera naturellement $I = \mathbb{R}$.

21.5 Autres exemples

Exemple 21.21.
Soit $v \in \mathbb{R}^3$ et $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Le chemin

$$\sigma(t) = x_0 + tv \tag{21.71}$$

est une droite. Sa vitesse est $\sigma'(t) = v$. △

Exemple 21.22.
La courbe

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{21.72}$$

avec $t \in [0, 2\pi[$ est le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Notez que si on prend $t \in [0, 4\pi[$, nous avons un *autre* chemin ; c'est le même cercle unité, mais parcouru *deux* fois. Même si le « dessin » (le graphe) des deux est le même, le chemin n'est pas le même.

Le chemin

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi - t) \\ \sin(2\pi - t) \end{pmatrix} \tag{21.73}$$

est le cercle unité parcouru une fois dans le sens inverse. Encore une fois le « dessin » est le même, mais le chemin n'est pas le même. △

Exemple 21.23.
Le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \tag{21.74}$$

est un chemin dont l'image est la parabole d'équation $y = x^2$. △

L'importance de la dérivée du chemin réside en le fait qu'elle donne la tangente. En effet le vecteur $\sigma'(t)$ est tangent au graphe de σ au point $\sigma(t)$.

CorKBEMooRvYAcJ

Corolaire 21.24.
La tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon.

Démonstration. Nous savons que pour un cercle,

$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}. \tag{21.75}$$

Un point général du cercle a pour abscisse $x = R\cos(\theta)$. En remplaçant nous trouvons le coefficient directeur suivant pour la tangente :

$$y'\big(R\cos(\theta)\big) = -\frac{1}{\tan(\theta)}. \tag{21.76}$$

Par conséquent une droite perpendiculaire à la tangente aurait comme coefficient directeur le nombre $\tan(\theta)$. Or cela est bien le coefficient directeur du rayon qui joint le point $(0,0)$ au point $\big(R\cos(\theta), R\sin(\theta)\big)$.

□

Exemple 21.25.
Pour le cercle,

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \tag{21.77}$$

la dérivée est donnée par

$$\sigma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t). \end{pmatrix} \tag{21.78}$$

Le produit scalaire $\sigma(t) \cdot \sigma'(t)$ est nul. Le vecteur $\sigma'(t)$ est donc bien tangent (corolaire 21.24). △

Exemple 21.26.
Le courbe donnée par le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \tag{21.79}$$

est une hélice. Sa vitesse est

$$\sigma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{21.80}$$

Notez que pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}$. △

Remarque 21.27.
Lorsqu'on parle d'une courbe dans l'espace, l'intervalle sur lequel on considère la variation du paramètre est une donné fondamentale. Elle fait partie intégrante de la définition de la courbe.

21.6 Élément de longueur

21.6.1 Élément de longueur : cartésiennes

Étant donné que la longueur d'arc d'une courbe paramétrée (I, γ) est donnée par l'intégrale de $\|\gamma'(t)\|$, il est naturel d'appeler le nombre $\|\gamma'(t)\|\,dt$, **l'élément de longueur** de la courbe γ au point $\gamma(t)$.

En coordonnées cartésiennes dans le plan, une courbe paramétrée est donnée par

$$\gamma(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big), \tag{21.81}$$

et l'élément de longueur est

$$\|x'(t)\|\,dt = \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2}\,dt. \tag{21.82}$$ EqElLongCart

21.6.2 Élément de longueur : polaires (1)

En coordonnées polaires, une courbe est donnée par

$$\gamma(t) = \big(\rho(t), \theta(t)\big), \tag{21.83}$$

et le passage aux cartésiennes se fait via les formules

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos\big(\theta(t)\big) & \text{(21.84a)}\\ y(t) = \rho(t)\sin\big(\theta(t)\big). & \text{(21.84b)} \end{cases}$$

L'élément de longueur se trouve directement en remplaçant $x(t)$ et $y(t)$ dans la formule (21.82). Les dérivées sont données par

$$\begin{aligned} x'(t) &= \rho'(t)\cos\theta(t) - \rho(t)\theta'(t)\sin\theta(t)\\ y'(t) &= \rho'(t)\sin\theta(t) + \rho(t)\theta'(t)\cos\theta(t), \end{aligned} \tag{21.85}$$

et un calcul montre que

$$\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 = \big(\rho'(t)\big)^2 + \big(\rho(t)\big)^2\big(\theta'(t)\big)^2. \tag{21.86}$$ EqElLongEnPolaires

Nous reviendrons plus en détail sur le concept de changement de paramétrage (ici, les polaires) à la section 21.7.

21.6.3 Élément de longueur : polaires (2)

Parfois on utilise θ comme paramètre. L'équation de la courbe est alors donnée en coordonnées polaires sous la forme

$$\rho(\theta) = f(\theta), \tag{21.87}$$ Eqgenereformepolaire

où f est une fonction réelle et il faut comprendre que nous parlons de la courbe $\big(\rho(\theta), \theta\big)$ en coordonnées polaires. En coordonnées cartésiennes, cette courbe est donnée par EqPolaireSemiGen

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos(t) & \text{(21.88a)}\\ y(t) = \rho(t)\sin(t) & \text{(21.88b)} \end{cases}$$

avec t qui parcourt le plus souvent l'intervalle $[0, 2\pi]$. Notez qu'il se peut que le domaine ne soit pas toujours $[0, 2\pi]$; cela peut dépendre des circonstances. Quoi qu'il en soit, la donnée du domaine fait partie de la donnée d'une courbe, et il ne peut donc pas y avoir d'équivoques à ce niveau.

Nous utilisons à nouveau la formule (21.82) en y mettant les valeurs (21.88) :

$$\begin{cases} x'(t) = \rho'(t)\cos(t) - \rho(t)\sin(t) & \text{(21.89a)}\\ y'(t) = \rho'(t)\sin(t) + \rho(t)\cos(t), & \text{(21.89b)} \end{cases}$$

et

$$\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 = \rho'(t)^2 + \rho(t)^2. \tag{21.90}$$ EqElemOngPOldeux

Remarque 21.28.
N'oubliez pas, en utilisant ces formules, que ce qui rentre dans l'intégrale est la *racine carré* de $(x')^2 + (y')^2$.

ExempleLongCercle

Exemple 21.29.
Calculons la circonférence du cercle. En coordonnées polaires, le graphe du cercle correspond à l'équation

$$\big(\rho(t), \theta(t)\big) = (R, t) \tag{21.91}$$

où R est constante (le rayon du cercle) et t va de 0 à 2π. En substituant dans l'équation (21.86), l'élément de longueur à intégrer est seulement

$$\sqrt{R^2} = R \tag{21.92}$$

parce que $\rho'(t) = 0$ et $\theta'(t) = 1$. La longueur du cercle est alors directement donnée par

$$l = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R. \tag{21.93}$$

Nous pouvions aussi faire le calcul en coordonnées cartésiennes. Alors la courbe est donnée par les équations

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos(t) \\ y(t) &= R\sin(t) \end{aligned} \tag{21.94}$$

et $t \in [0, 2\pi]$. La circonférence du cercle est alors

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R. \tag{21.95}$$

△

Remarque 21.30.
Il faut bien comprendre que quand on parle de courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes on pense à une courbe dont le paramètre est, par exemple, t et les équations de la courbe sont $(x(t), y(t))$. Cela ne veut pas dire que x ou y soit le paramètre. Le cas où x ou y est le paramètre est un cas particulier qui est possible seulement pour certaines courbes et notamment pour les graphes. Le cercle de rayon 1 n'est pas un graphe, donc si on veut utiliser x ou y comme paramètre il faut d'abord découper la courbe en deux morceaux, par exemple, la moitié inférieure ($y < 0$) et la moitié supérieure ($y > 0$).

ExCycloLong

Exemple 21.31.
Une **cycloïde** est une courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin(t)) & \text{(21.96a)} \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) & \text{(21.96b)} \end{cases}$$

avec $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Comme montré sur la figure 21.5, la cycloïde donne lieu à un graphe périodique. Il est possible de montrer (le faire) que le premier arc correspond à $t \in [0, 2\pi]$. Nous voulons donc calculer la longueur de l'arc sur cet intervalle.

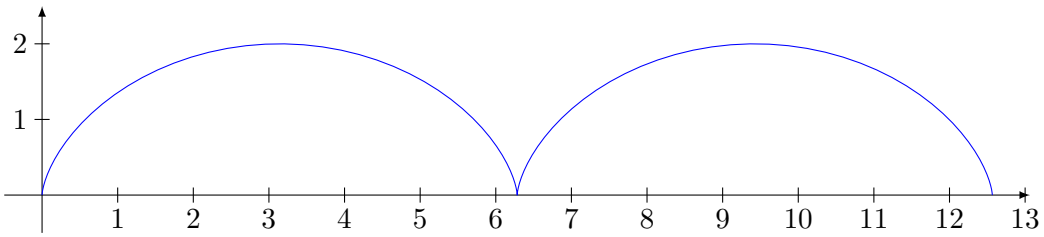


FIGURE 21.5 : La cycloïde de paramètre $a = 1$ entre 0 et 4π.

LabelFigCycloideA

Nous avons $x'(t) = a(1 - \cos(t))$ et $y'(t) = a\sin(t)$, de telle façon que

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = a\sqrt{2 - 2\cos(t)} = a\sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|. \tag{21.97}$$

Eq_0508dlcycloide

La longueur est donc donnée par

$$\int_0^{2\pi} 2a|\sin\frac{t}{2}|dt = 4a\int_0^{\pi} \sin(t)dt = 8a. \tag{21.98}$$

△

Exemple 21.32.
La **cardioïde** est la courbe donnée par

$$\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta)). \tag{21.99}$$

EqCardioide

avec $\theta \in [-\pi, \pi]$. Le nom de cette courbe provient de son graphe illustré à la figure 21.6.

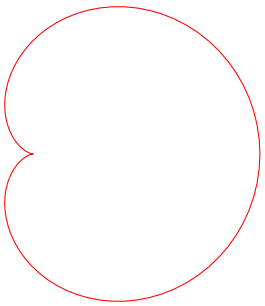


FIGURE 21.6 : Une cardioïde, $\rho = 1 + \cos(\theta)$. LabelFigCardioid

L'équation (21.99) est donnée sous la forme (21.87), c'est-à-dire que $\theta(t) = t$ et $\theta'(t) = 1$, et par conséquent l'élément de longueur est donné par

$$\begin{aligned}(\rho')^2 + (\rho)^2 &= \big(-a\sin(\theta)\big)^2 + a^2\big(1+\cos(\theta)\big)^2 \\ &= a^2\sin^2(\theta) + a^2\big(1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\big) \\ &= a^2\big(1+1+2\cos(\theta)\big) \\ &= 2a^2\big(1+\cos(\theta)\big) \\ &= 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}.\end{aligned} \tag{21.100}$$

La longueur d'arc est donc donnée par

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)2dt = 8a. \tag{21.101}$$

△

21.6.4 Approximation de la longueur par des cordes

Définition 21.33 (Point régulier, birégulier[673])**.**
Soit un arc paramétré (I,γ). Un point $t \in I$ est dit ***régulier*** *si $\gamma'(t) \neq 0$, et il est dit* ***critique*** *si $\gamma'(t) = 0$. Le point $t \in I$ est dit* ***birégulier*** *si les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont linéairement indépendants et non nuls.*

Par extension, nous dirons également que le point $\gamma(t)$ lui-même est régulier, critique ou birégulier. Un arc est dit régulier *lorsque tous ses points sont réguliers.*

Note : dans le lemme 21.71 et ses dépendances, nous utilisons effectivement que l'arc γ est de classe C^2.

Nous savons que la longueur d'une courbe est donnée par le supremum sur toutes les subdivisions de la longueur des cordes correspondantes. De plus l'inégalité triangulaire nous enseigne que plus la subdivision est fine, plus la longueur sera grande. Il est donc naturel de penser que sur un petit intervalle, la longueur de la courbe ne doit pas être très différente de la longueur de la corde correspondante.

La proposition suivante est un énoncé précis et quantitatif de ce fait.

Proposition 21.34.
Soit (I,γ) un arc de classe $\mathcal{C}^1$ et $t_0 \in I$ un point régulier (c'est-à-dire $\gamma'(t_0) \neq 0$). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un $\delta > 0$ tel que on trouve $t, t' \in I \cap (t_0, \delta)$ tels que

$$\left|\int_t^{t'} \|\gamma'(u)\|du - \|\gamma(t) - \gamma(t')\|\right| \leqslant 2\varepsilon|t - t'|. \tag{21.102}$$

Intuitivement, cette proposition signifie qu'au voisinage de t_0, la longueur d'arc est équivalente à celle de la corde.

Démonstration. Par la continuité de γ' (parce que γ est $\mathcal{C}^1$), pour tout ε, il existe un δ tel que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \big\|\gamma'(t) - \gamma'(t_0)\big\| \leqslant \varepsilon. \tag{21.103}$$

Nous considérons la fonction

$$u \mapsto \gamma(u) - \gamma(t_0) - (u - t_0)\gamma'(t_0), \tag{21.104}$$

dont la dérivée (par rapport à u) est

$$\gamma'(u)-\gamma'(t_0). \tag{21.105}$$

Nous y appliquons la formule des accroissements finis entre t et t' choisis dans $I\cap]t_0-\delta,t_0+\delta[$. Il existe un u entre t et t' tel que

$$\begin{aligned}\big\|\gamma(t)-\gamma(t_0)-(t-t_0)\gamma'(t_0)-\gamma(t')+\gamma(t_0)+(t'-t_0)\gamma'(t_0)\big\|&\\ =|t-t'|\|\gamma'(u)-\gamma'(t_0)\|&\\ \leqslant\varepsilon|t-t'|.&\end{aligned} \tag{21.106}$$

En simplifiant ce qui peut être simplifié dans le membre de gauche, nous trouvons

$$\big\|\gamma(t)-\gamma(t')-(t-t')\gamma'(t_0)\big\|\leqslant\varepsilon|t-t'|. \tag{21.107}$$

Le membre de gauche peut être minoré en utilisant la proposition 7.213 :

$$\Big|\|\gamma(t)-\gamma(t')\|-\|(t-t')\gamma'(t_0)\|\Big|\leqslant\varepsilon|t-t'|. \tag{21.108}$$

D'autre part, les inégalités (7.195) montrent que

$$-\|\gamma'(u)-\gamma'(t_0)\|\leqslant\|\gamma'(u)\|-\|\gamma'(t_0)\|\leqslant\|\gamma'(u)-\gamma'(t_0)\|. \tag{21.109}$$

Si de plus u est compris entre t et t', ces inégalités sont encore coincées entre $-\varepsilon$ et ε. En intégrant (21.109) par rapport à u entre t et t', nous obtenons

$$\left|\int_t^{t'}\big\|\gamma'(u)\big\|-(t-t')\big\|\gamma'(t_0)\big\|\right|\leqslant\varepsilon|t-t'|. \tag{21.110}$$

Afin d'alléger les notations pour la ligne suivante, nous notons A le nombre positif $\int_t^{t'}\|\gamma'(u)\|du$. Nous avons

$$\begin{aligned}\Big|A-\|\gamma(t)-\gamma(t')\|\Big|&=\Big|A-|t-t'|\,\|\gamma'(t_0)\|+|t-t'|\,\|\gamma'(t_0)\|-\|\gamma(t)-\gamma(t')\|\Big|\\ &\leqslant\Big|A-|t-t'|\,\|\gamma'(t_0)\|\Big|+\Big||t-t'|\,\|\gamma'(t_0)\|-\|\gamma(t)-\gamma(t')\|\Big|.\end{aligned} \tag{21.111}$$

L'équation (21.108) montre que le second terme est plus petit ou égal à $\varepsilon|t-t'|$. En ce qui concerne le premier terme, étant donné que A est positif,

$$\Big|A-|t-t'|\,\|\gamma'(t_0)\|\Big|\leqslant\Big|A-(t-t')\,\|\gamma'(t_0)\|\Big|\leqslant\varepsilon|t-t'|. \tag{21.112}$$

Au final, l'inéquation (21.111) donne

$$\Big|A-\|\gamma(t)-\gamma(t')\|\Big|\leqslant2\varepsilon\,|t-t'|, \tag{21.113}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

21.7 Arc géométrique

Définition 21.35.
*Soient (I,γ) et (J,g) deux arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^k$. On dit qu'il sont **équivalents** si il existe une bijection $\theta\colon I\to J$ de classe $\mathcal{C}^k$, d'inverse de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $g=\gamma\circ\theta$. Nous notons $\gamma\sim g$ lorsque γ et g sont équivalents (les ensembles I et J sont sous-entendus).*

Le passage d'un paramétrage (I,γ) à une autre (J,g) se fait selon le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle\theta}\uparrow & \nearrow_{g} & \\ J & & \end{array} \tag{21.114}$$

Proposition 21.36.
La relation donnée dans la définition 21.35 est une relation d'équivalence.

Démonstration. Les trois points d'une relation d'équivalence se vérifient en utilisant le fait que θ est inversible, et que l'inverse θ^{-1} jouit des mêmes propriétés de continuité ($\mathcal{C}^k$) que θ.

Réflexivité Nous avons $\gamma \sim \gamma$ avec $\theta = \mathrm{Id}$.

Symétrie Si $\gamma \sim g$, alors nous avons une application θ telle que $g = \gamma \circ \theta$, et donc $\gamma = g \circ \theta^{-1}$, ce qui montre que $g \sim \gamma$.

Transitivité Si $\gamma \sim g$ et $g \sim h$ avec $g = \gamma \circ \theta$ et $h = g \circ \omega$, alors $h = \gamma \circ (\theta \circ \omega)$, ce qui montre que $\gamma \sim h$.

□

Si les arcs (I, γ) et (J, g) sont équivalents, les images dans $\mathbb{R}^n$ sont identiques, et décrivent donc « le même dessin ». Nous allons préciser cette notion plus loin.

Définition 21.37.
Pour cette raison les classes d'équivalences sont appelées des ***arcs géométriques*** *(de classe $\mathcal{C}^k$).*

Si Γ est un arc géométrique, ses représentants sont dits des **paramétrages admissibles** ou, plus simplement *paramétrage*. On dit que l'application $\theta\colon J \to I$ est un **changement de variable**. Nous disons que un arc géométrique est *compact* quand ses représentants sont compacts.

LemChamVarsStriMomnot

Lemme 21.38.
Dans le cas d'un arc $\mathcal{C}^1$, les changements de variables sont strictement monotones (croissants ou décroissants).

Démonstration. Nous considérons (I, γ) et (J, g), deux paramétrages différents du même arc géométrique, et $\theta \in \mathcal{C}^1(J, I)$ le changement de variable. Nous allons noter t la variable sur I et s la variable sur J. Par définition, $\theta\big(\theta^{-1}(t)\big) = t$, et par conséquent,

$$\theta'\big(\theta^{-1}(t)\big)(\theta^{-1})'(t) = 1. \tag{21.115}$$

En particulier $\theta'\big(\theta^{-1}(t)\big)$ ne s'annule pas pour aucune valeur de t. Mais $\theta^{-1}(t)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans J, donc nous avons $\theta'(s) \neq 0$ pour tout $s \in J$. Cela signifie bien que θ est strictement monotone. En effet, θ' étant continue, elle ne peut pas changer de signe sans passer par zéro (théorème 9.95 des valeurs intermédiaires). □

ThoLongArcGeom

Théorème 21.39.
La longueur d'un arc est indépendante de son paramétrage, c'est-à-dire que les représentants d'un arc géométrique compact de classe $\mathcal{C}^1$ ont même longueur.

Démonstration. Nous utilisons les mêmes notations que celles du lemme 21.38. Nous savons déjà que le changement de variable $\theta\colon J \to I$ est strictement monotone. Supposons que θ soit croissante. En effectuant un changement de variable dans l'intégrale qui donne la longueur[6] nous avons

$$\begin{aligned}
l(\gamma) &= \int_I \|\gamma'(t)\| dt \\
&= \int_J \|\gamma'\big(\theta(s)\big)\| \theta'(s) ds \\
&= \int_J \|\gamma'\big(\theta(s)\big)\theta'(s)\| ds \\
&= \int_J \| \frac{d}{ds}(\gamma \circ \theta)(s)\| ds \\
&= \int_J \|g'(s)\| ds \\
&= l(J, g).
\end{aligned} \tag{21.116}$$

□

Définition 21.40.
Nous nommons ***longueur*** *d'un arc géométrique la longueur commune de tous ses représentants. On dit que l'arc géométrique est* ***rectifiable*** *si sa longueur est $< \infty$.*

[6] Théorème 21.9.

21.7.1 Abscisse curviligne et paramétrage normal

SubSecAbsCurv

Définition 21.41.
*Soit (I,γ) un arc paramétré continu rectifiable. Nous appelons **abscisse curviligne** de γ toute application $\phi\colon I\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $t,t'\in I$ avec $t<t'$, nous ayons*

$$l\big([t,t'],\gamma\big)=\big|\phi(t')-\phi(t)\big|. \tag{21.117}$$

*Si il existe un $t_0\in I$ tel que $\phi(t_0)=0$, alors nous disons que t_0 est l'**origine** de l'abscisse ϕ.*

DEFooJJQFooEITCvG

Définition 21.42.
*Un arc paramétré (I,γ_N) continu rectifiable est dit **normal** si l'identité est une abscisse curviligne.*

LEMooLADUooBlHjuT

Lemme 21.43.
Si γ est de classe C^1 et est un paramétrage normal, alors

(1) pour tout choix de t et t' dans I avec $t<t'$, nous avons

$$l\big([t,t'],\gamma_N\big)=t'-t. \tag{21.118}$$

(2) $\|\gamma'(t)\|=1$ pour tout t.

Démonstration. Pour tout x_1,x_2 dans le domaine nous avons

$$l\big([x_1,x_2],\gamma\big)=\int_{x_1}^{x_2}\|\gamma'(t)\|dt=x_2-x_1. \tag{21.119}$$

Cela implique $\|\gamma'(t)\|=1$ pour tout t. En effet, pour fixer les idées, supposons que $\|\gamma'(t)\|>1$ en un point, par continuité, cela reste strictement supérieur à 1 sur un intervalle[7]. L'intégrale sur cet intervalle ne peut alors pas être la taille de l'intervalle. □

ExCerlceRadNorm

Exemple 21.44.
Le cercle unitaire est donné par l'arc

$$\gamma(t)=\big(\cos(t),\sin(t)\big) \tag{21.120}$$

et $t\in[0,2\pi]$. Pour tout choix de t et t' dans $[0,2\pi]$, nous avons

$$l\big([t,t'],\gamma\big)=\int_t^{t'}\sqrt{\sin^2(u)+\cos^2(u)}du=t'-t. \tag{21.121}$$

Les angles exprimés en radians forment donc un paramétrage normal du cercle de rayon 1. △

Lemme 21.45.
Pour un arc paramétré compact, la longueur d'arc est une abscisse curviligne.

Démonstration. Par définition de la longueur d'arc φ, nous avons

$$\varphi(t')-\varphi(t)=l\big([a,t'],\gamma\big)-l\big([a,t],\gamma\big)=\diamondsuit. \tag{21.122}$$

Supposons pour fixer les idées que $t'>t$. En utilisant la proposition 21.6, nous avons

$$l\big([a,t'],\gamma\big)=l\big([a,t],\gamma\big)+l\big([t,t'],\gamma\big), \tag{21.123}$$

et donc après simplification de deux termes,

$$\diamondsuit=l\big([t,t'],\gamma\big), \tag{21.124}$$

ce qui est précisément la propriété demandée pour être une abscisse curviligne. □

PropExisteChmNorm

Proposition 21.46.
Pour tout arc paramétré C^1 sans points critiques, il existe un changement de coordonnées qui rend l'arc normal.

[7] Corolaire 9.91.

Démonstration. Soit (I,γ) un arc de classe $\mathcal{C}^1$. Nous devons montrer qu'il existe un intervalle J et une application $\theta\colon J\to I$ de classe $\mathcal{C}^1$ et d'inverse $\mathcal{C}^1$ tel que l'arc (J,γ_N) soit $\mathcal{C}^1$ où $\gamma_N=\gamma\circ\theta$.

Si $I=[a,b]$, nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}\phi\colon I&\to\mathbb{R}^+\\ t&\mapsto\int_a^t\|\gamma'(u)\|du.\end{aligned}\tag{21.125}$$ EqDevVarPhi

Étant définie par l'intégrale d'une fonction $\mathcal{C}^0$, la fonction ϕ est $\mathcal{C}^1$, et nous avons $\phi'(t)=\|\gamma'(t)\|>0$ pour tout $t\in I$. Vue comme application $\phi\colon[a,b]\to[0,l(\gamma)]$, l'application ϕ est bijective et d'inverse $\mathcal{C}^1$. Voyons cela point par point.

(1) La fonction ϕ est injective parce que strictement croissante.

(2) Elle est surjective parce que $\phi(a)=0$ et $\phi(b)=l(\gamma)$.

(3) La continuité de l'inverse est plus délicate. Soit $s\in[0,l(\gamma)]$ et $\varepsilon>0$. Pour prouver la continuité de ϕ^{-1} en s, nous devons trouver un δ tel que

$$|s-s'|<\delta\Rightarrow\left|\phi^{-1}(s)-\phi^{-1}(s')\right|<\varepsilon.\tag{21.126}$$

Étant donné que s et s' sont dans l'image de ϕ, nous considérons les uniques t et t' tels que $s=\phi(t)$ et $s'=\phi(t')$. La quantité $\phi(t)-\phi(t')$ devient

$$\int_a^t\big\|\gamma'(u)\big\|du-\int_a^{t'}\big\|\gamma'(u)\big\|du=\int_t^{t'}\big\|\gamma'(u)\big\|du.\tag{21.127}$$ EqCondvpemuCont

D'autre part, $\phi^{-1}(s)=t$ et $\phi^{-1}(s')=t'$, donc la condition (21.127) devient

$$\Big|\int_{t'}^t\big\|\gamma'(u)\big\|du\Big|\leqslant\delta\Rightarrow|t-t'|<\varepsilon.\tag{21.128}$$

Cela revient à la continuité des fonctions définies par une intégrale.

(4) La dérivée de son inverse est donnée par[8]

$$(\phi^{-1})'(s)=\frac{1}{\phi'\big(\phi^{-1}(s)\big)}.\tag{21.129}$$

Nous avons vu que ϕ^{-1} et ϕ' étaient continues. La fonction $(\phi^{-1})'$ étant exprimée en termes de ces deux fonctions elle est également continue.

Nous considérons l'arc paramétré (J,γ_N) avec $J=[0,l(\gamma)]$ et

$$\gamma_N(s)=(\gamma\circ\phi^{-1})(s).\tag{21.130}$$

Nous montrons maintenant que ce nouveau paramétrage est normal. Soient $0\leqslant s\leqslant s'\leqslant l(\gamma)$,

$$\begin{aligned}l\big([s,s'],g\big)&=\int_s^{s'}\big\|\gamma_N'(u)\big\|du\\ &=\int_{\phi^{-1}(s)}^{\phi^{-1}(s')}\big\|(\gamma_N'\circ\phi)(t)\big\|\phi'(t)dt\\ &=\int_{\phi^{-1}(s)}^{\phi^{-1}(s')}\big\|(\gamma_N\circ\phi)'(t)\big\|dt\\ &=\int_{\phi^{-1}(s)}^{\phi^{-1}(s')}\big\|\gamma'(t)\big\|dt\\ &=\int_0^{\phi^{-1}(s')}\big\|\gamma'(t)\big\|\,dt-\int_0^{\phi^{-1}(s)}\big\|\gamma'(t)\big\|\,dt\\ &=\phi\big(\phi^{-1}(s')\big)-\phi\big(\phi^{-1}(s)\big)\\ &=s'-s,\end{aligned}\tag{21.131}$$

ce qui prouve que le paramétrage (J,γ_N) est normal. □

[8] Pour obtenir cette formule, dérivez les deux membres de l'équation $\phi\big(\phi^{-1}(s)\big)=s$.

Nous retenons que le paramétrage normal de γ est donné par (J, γ_N) avec $J = [0, l(\gamma)]$ et

$$\gamma_N(s) = (\gamma \circ \phi^{-1})(s) \tag{21.132}$$

où

$$\begin{aligned} \phi\colon I &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \end{aligned} \tag{21.133}$$

Notons aussi que ϕ est une fonction croissante, étant l'intégrale d'une fonction positive.

Exemple 21.47.
Trouvons les coordonnées normales pour la cycloïde donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin(t)), & \text{(21.134a)} \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) & \text{(21.134b)} \end{cases}$$

et $t \in]0, 2\pi[$. Relire l'exemple 21.31.

D'abord nous trouvons ϕ avec la formule (21.133) avec $a = 0$. En utilisant le bout de calcul (21.97), nous avons

$$\phi(t) = 2a \int_0^t \sin \frac{u}{2} du = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right). \tag{21.135}$$

Pour trouver $\phi^{-1}(s)$, nous résolvons l'équation

$$s = \phi\big(\phi^{-1}(s)\big) \tag{21.136}$$

par rapport à $\phi^{-1}(s)$. Dans un premier temps, nous trouvons

$$1 - \frac{s}{4a} = \cos \frac{\phi^{-1}(s)}{2}, \tag{21.137}$$

donc $\frac{\phi^{-1}(s)}{2} = \arccos(\frac{4a-s}{4a})$, et finalement

$$\phi^{-1}(s) = 2 \arccos \left(\frac{4a - s}{4a}\right). \tag{21.138}$$

Il nous reste à injecter cela dans les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ pour trouver $(\gamma_N)_x(s)$ et $(\gamma_N)_y(s)$. D'abord,

$$(\gamma_N)_x(s) = a\big[\phi^{-1}(s) - \sin\big(\phi^{-1}(s)\big)\big]. \tag{21.139}$$

Nous utilisons maintenant la formule trigonométrique $\sin(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ afin de simplifier les expressions :

$$\begin{aligned} (\gamma_N)_x &= a\Big[2 \arccos \left(\frac{4a - s}{4a}\right) - 2 \sin\Big(\arccos \left(\frac{4a - s}{4a}\right)\Big) \cos\Big(\arccos \left(\frac{4a - s}{4a}\right)\Big)\Big] \\ &= a\Big[2 \arccos \left(\frac{4a - s}{4a}\right) - \frac{4a - s}{2a} \sqrt{1 - \left(\frac{4a - s}{4a}\right)^2}\Big] \\ &= 2a \arccos \left(\frac{4a - s}{4a}\right) - \sqrt{8as - s^2}\, \frac{4a - s}{8a} \end{aligned} \tag{21.140}$$

où nous avons utilisé la formule $\sin\big(\arccos(x)\big) = \sqrt{1 - x^2}$. Ensuite, pour obtenir $(\gamma_N)_y$ nous devons calculer

$$(\gamma_N)_y(s) = a\big[1 - \cos\big(\phi^{-1}(s)\big)\big]. \tag{21.141}$$

Encore une fois, il est intéressant d'exprimer le cosinus en termes des angles divisés par deux : $\cos(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

$$\begin{aligned} (\gamma_N)_y &= a\Big[1 - \cos^2 \frac{\phi^{-1}(s)}{2} + \sin^2 \frac{\phi^{-1}(s)}{2}\Big] \\ &= a\Big[2 - 2 \cos^2 \frac{\phi^{-1}(s)}{2}\Big] \\ &= 2a\Big[1 - \left(\frac{4a - s}{4a}\right)^2\Big]. \end{aligned} \tag{21.142}$$

Dans ce paramétrage, $s \in]0, 8a[$. △

Exemple 21.48.
La cardioïde $\rho(\theta) = a\big(1+\cos(\theta)\big)$ avec θ entre $-\pi$ et π. Avant d'utiliser la formule (21.133), nous devons trouver l'élément de longueur de la cardioïde. Étant donné la façon dont l'équation de la cardioïde nous est donnée, l'élément de longueur est donné par[9] (21.90) :

$$\begin{aligned}\|\gamma'(u)\|^2 &= a^2\sin^2(u) + a^2(1+\cos(u))^2\\ &= 2a^2\big(1+\cos(u)\big),\end{aligned} \tag{21.143}$$

et par conséquent[10]

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_0^t \sqrt{2a^2\big(1+\cos(u)\big)}du\\ &= \int_0^t \sqrt{2a^2\Big(1+\cos^2\frac{u}{2}-\sin^2\frac{u}{2}\Big)}du\\ &= 2a\int_0^t \cos\frac{u}{2}du\\ &= 4a\sin\frac{t}{2}.\end{aligned} \tag{21.144}$$

Pour trouver l'inverse, nous résolvons $\phi\big(\phi^{-1}(s)\big) = s$ par rapport à $\phi^{-1}(s)$:

$$\begin{aligned}4a\sin\left(\frac{\phi^{-1}(s)}{2}\right) &= s,\\ \phi^{-1}(s) &= 2\arcsin\left(\frac{s}{4a}\right).\end{aligned} \tag{21.145}$$

Avant d'écrire trop brutalement $\gamma_N(s) = (\gamma\circ\phi^{-1})(s)$, il faut comprendre comment est γ. Nous avons reçu la courbe sous forme polaire, c'est-à-dire

$$\gamma(t) = \big(\gamma_r(t),\gamma_\theta(t)\big) = \Big(a\big(1+\cos(t)\big),t\Big). \tag{21.146}$$

C'est comme cela qu'il faut comprendre la donnée $\rho(\theta) = a\big(1+\cos(\theta)\big)$. Maintenant la formule $\gamma_N(s) = (\gamma\circ\phi^{-1})(s)$ devient

$$\begin{cases}(\gamma_N)_r(s) = \gamma_r\big(\phi^{-1}(s)\big) & \text{(21.147a)}\\ (\gamma_N)_\theta(s) = \gamma_\theta\big(\phi^{-1}(s)\big). & \text{(21.147b)}\end{cases}$$

Étant donné que $\gamma_\theta(t) = t$, la seconde est facile :

$$(\gamma_N)_\theta(s) = 2\arcsin\left(\frac{s}{4a}\right). \tag{21.148}$$

Pour la première,

$$(\gamma_N)_r(s) = a\big[1+\cos\big(2\arcsin\frac{s}{4a}\big)\big] = \frac{16a^2-s^2}{8a}. \tag{21.149}$$

Nous écrivons donc le nouveau paramétrage en coordonnées polaires sous la forme

$$\left(\frac{16a^2-s^2}{8a}, 2\arcsin\frac{s}{4a}\right). \tag{21.150}$$

La question qui arrive maintenant est de savoir quel intervalle parcours la nouvelle variable s. D'après le résultat de l'exemple 21.99, la longueur de la cardioïde est de $8a$ et nous avons donc $s\in[0,8a]$. Cependant, la condition d'existence de arcsin nous interdit d'avoir s plus grand que $4a$ en valeur absolue. Où est le problème ?

Le problème est que nous avons changé l'origine de notre paramètre en donnant $\phi(t)$ comme une intégrale à partir de 0 au lieu de $-\pi$. Cela se voit en regardant de quel point nous partons : en $s=0$ nous sommes sur le point $(2a,0)$ tandis qu'avec le paramètre original, c'est-à-dire $\theta\in[-\pi,\pi]$, nous avons pour $\theta=-\pi$ le point $(0,-\pi)$.

[9] Nous vous déconseillons d'étudier cette formule par cœur. Sachez cependant la retrouver assez vite.
[10] L'utilisation stricte de la formule (21.133) demanderait d'intégrer à partir de $-\pi$. Pour plus de simplicité, nous intégrons à partir de zéro, et nous verrons plus tard comment adapter l'intervalle du nouveau paramètre.

Il se passe donc que si nous commençons à parcourir la cardioïde avec $s = 0$, nous partons du milieu, et nous ne parcourons donc pas tout. Étant donné que le « premier » point de la cardioïde est le point $(0, -\pi)$, le paramètre s commence en $s = -4a$, et nous avons comme intervalle :

$$s \in [-4a, 4a], \tag{21.151}$$

ce qui est en accord avec la conditions d'existence. △

Quel enseignement tirer de cet exemple ? Lorsqu'on calcule $\phi(t)$ pour trouver les coordonnées normales, il y a deux solutions.

(1) Utiliser strictement la formule $\phi(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|du$, en prenant bien comme borne de départ le point de départ de le paramétrage de γ. À ce moment la coordonnée normale construite aura $[0, l(\gamma)]$ comme intervalle de variation.

(2) Faire commencer l'intervalle d'intégration en zéro (ou ailleurs). Un bon choix peut simplifier quelques calculs, mais alors il faudra bien choisir la valeur de départ de la nouvelle coordonnées pour que le « premier » point de la courbe soit correct. Dans ce cas, la longueur de l'intervalle sera quand même $l(\gamma)$. Il n'y a donc pas de problèmes pour trouver la valeur du bout de l'intervalle de variation du paramètre normal.

Dans tous les cas, il faut bien préciser l'intervalle de variation du paramètre lorsqu'on donne une courbe paramétrée.

21.7.2 Tangente à une courbe paramétrée

Définition 21.49.
*Soit (I, γ) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$. Nous disons que la courbe admet une **tangente** en $\gamma(t_0) \in \mathbb{R}^n$ lorsque les deux conditions suivantes sont remplies*

(1) $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$ pour tout t dans un voisinage de t_0 ;

(2) la direction de la droite qui passe par $\gamma(t)$ et $\gamma(t_0)$ admet une limite lorsque $t \to t_0$.

Dans ce cas, la tangente sera la droite passant par le point $\gamma(t_0)$ et dont la direction est donnée par la limite.

Dans cette définition, par **direction** d'une droite, nous entendons le vecteur de norme 1 parallèle à celle-ci sans tenir compte du signe. La tangente sera donc la droite passant par $\gamma(t_0)$ et parallèle au vecteur

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}. \tag{21.152}$$

Évidemment si nous avions écrit $\gamma(t_0) - \gamma(t)$, ça n'aurait pas changé la droite. Par abus de langage, nous parlerons souvent de « la direction u » même lorsque u n'est pas de norme 1.

Formellement, une direction est une classe d'équivalence de vecteurs pour la relation $u \sim v$ si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $u = \lambda v$, mais nous n'aurons pas besoin de cette précision ici.

Sans surprises, la tangente est à peu près toujours donnée par la dérivée lorsqu'elle existe. Plus précisément nous avons le

Théorème 21.50.
Soit (I, γ), un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$) et $t_0 \in I$ tel que

$$\gamma'(t_0) = \gamma''(t_0) = \ldots = \gamma^{(q-1)}(t_0) = 0 \tag{21.153}$$

et

$$\gamma^{(q)}(t_0) \neq 0 \tag{21.154}$$

pour un entier $1 \leqslant q \leqslant k$. Alors γ admet une tangente en $\gamma(t_0)$ de direction $\gamma^{(q)}(t_0)$.

Démonstration. Le développement de $\gamma(t_0)$ en série de Taylor autour de t jusqu'à l'ordre q est

$$\begin{aligned}\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)|t - t_0| + \frac{\gamma' t(t_0)}{2}|t - t_0|^2 + \cdots + \frac{\gamma^{(q)}(t_0)}{q!}|t - t_0|^q \\ + \varepsilon(t)|t - t_0|^q\end{aligned} \tag{21.155}$$

EqDevTaylfttzq

où ε est une application $\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{t\to t_0} \varepsilon(t) = 0$. En utilisant les hypothèses, nous éliminons la majorité des termes dans le développement (21.155) :

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \frac{1}{q!}\gamma^{(q)}(t_0)|t - t_0|^q + \varepsilon(t)|t - t_0|^q. \tag{21.156}$$

La direction de la droite qui joint $\gamma(t)$ à $\gamma(t_0)$ est donc donnée par

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} = \frac{\frac{1}{q!}\gamma^{(q)}(t_0)|t - t_0|^q + \varepsilon(t)|t - t_0|^q}{\|\frac{1}{q!}\gamma^{(q)}(t_0)|t - t_0|^q + \varepsilon(t)|t - t_0|^q\|} \tag{21.157}$$

et la limite lorsque $t \to t_0$ donne $\gamma^{(q)}(t_0)$ comme direction de la tangente.

□

Lorsque le théorème s'applique, le vecteur

$$\tau = \frac{\gamma^{(q)}(t_0)}{\|\gamma^{(q)}(t_0)\|} \tag{21.158}$$

est appelé le **vecteur unitaire tangent** en $\gamma(t_0)$ à l'arc paramétré γ.

CorTgSoCun

Corolaire 21.51.
Si (I, γ) est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ régulier (c'est-à-dire $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t) alors l'arc admet une tangente en tout point et le vecteur unitaire de la tangente est donné par

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \tag{21.159}$$

pour tout t dans I.

CorUnitTgtaugpnorma

Corolaire 21.52.
Si $\gamma = (J, \gamma_N)$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, normal, alors le vecteur unitaire de la tangente au point $\gamma_N(s)$ est donné par $\tau(s) = \gamma'_N(s)$.

Démonstration. Nous devons démontrer que dans le cas d'un paramétrage normal nous avons $\|\gamma'_N(s)\| = 1$ pour tout s. Par définition,

$$l\big([s, s'], g\big) = \int_s^{s'} \|\gamma'_N(u)\|du = s' - s. \tag{21.160}$$

Par conséquent,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_s^{s+h} \|\gamma'_N(u)\|du = \lim_{y\to 0} \frac{s + h - s}{h} = 1. \tag{21.161}$$

Cela implique que $\|\gamma'_N(s)\| = 1$, et donc en particulier que (J, γ_N) est un arc régulier. Le corolaire précédent montre alors que $\tau(s) = \gamma'_N(s)/\|\gamma'_N(s)\| = \gamma'_N(s)$. □

Exemple 21.53.
Considérons la courbe $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, et cherchons la tangente en $t_0 = 0$. En dérivant nous avons successivement

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (t^2, t^3) \\ \gamma'(t) &= (2t, 3t^2) \\ \gamma''(t) &= (2, 6t). \end{aligned} \tag{21.162}$$

En posant $t = 0$, nous trouvons que $\gamma'(0) = 0$ mais $\gamma''(0) = (2, 0) \neq 0$. Le théorème nous dit donc que la direction de la tangente est horizontale. Nous pouvons faire le calcul directement :

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} = \frac{(t^2, t^3)}{\sqrt{t^4 + t^6}} = \frac{(t^2, t^3)}{t^2\sqrt{1 + t^2}} = \frac{(1, t)}{\sqrt{1 + t^2}}, \tag{21.163}$$

dont la limite $t \to 0$ est bien le vecteur horizontal $(1, 0)$.

La figure 21.7 montre quelques tangentes, c'est-à-dire quelques vecteurs dans la direction $\gamma'(t)$ (pour les $t \neq 0$, il ne faut pas aller à la dérivée seconde). Nous remarquons que de part et d'autres du sommet, les vecteurs ne sont pas dirigés dans le même sens. *En tant que vecteurs* de norme 1, ces vecteurs n'ont pas de limites quand $t \to 0$. Ce sont bien les *directions* qui ont une limite, parce que la direction ne tient pas compte du sens.

△

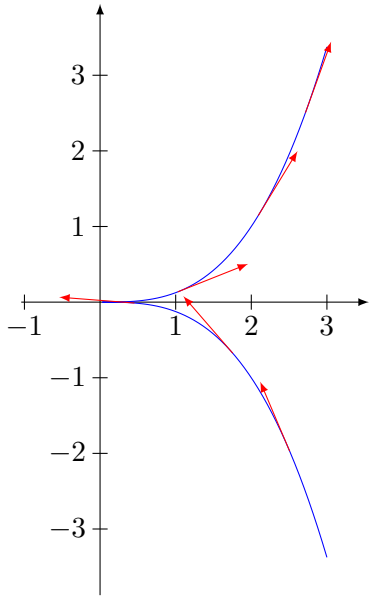


FIGURE 21.7 : Quelques tangentes de la courbe $\gamma(t) = (t^2, t^3)$LabelFigParamTangente

21.8 Un peu de topologie

La proposition 21.54 donne une sorte de théorème des valeurs intermédiaires pour le cas d'une application à valeurs dans un chemin.

PROPooJYGVooShNewy

Proposition 21.54 ([1]).
Soit une application continue et injective $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Nous posons $\Gamma = \gamma\big([0,1]\big)$ sur lequel nous considérons la topologie induite[11] *de $\mathbb{R}^n$.*

Nous supposons que $\gamma^{-1}\colon \Gamma \to [0,1]$ est continue[12]

Nous considérons un chemin $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tel que

(1) α *est continu,*

(2) $\alpha(0) = \gamma(0)$

(3) $\alpha\big([0,1]\big) \subset \Gamma$

(4) $\alpha(1) = \gamma(t_0)$ *pour un certain* $t_0 \in [0,1]$.

Alors pour tout $t \in [0,t_0]$, il existe $u \in [0,1]$ tel que $\alpha(u) = \gamma(t)$.

Démonstration. Nous commençons par montrer que l'application $\alpha\colon [0,1] \to \Gamma$ est encore continue lorsque nous voyons bien l'espace d'arrivée comme Γ muni de sa propre topologie et non comme $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie usuelle.

Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de Γ ; il existe un ouvert $\mathcal{O}'$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap \Gamma$. Vu que α ne prend ses valeurs que dans Γ, nous avons $\alpha^{-1}(\Gamma \cap \mathcal{O}') = \alpha^{-1}(\mathcal{O}')$ et comme α est continue pour la topologie de $\mathbb{R}^n$, la partie $\alpha^{-1}(\mathcal{O}')$ est un ouvert de $[0,1]$.

Nous considérons donc l'application

$$\gamma^{-1} \circ \alpha\colon [0,1] \to [0,1] \tag{21.164}$$

qui est continue et vérifie donc le théorème des valeurs intermédiaires 9.95. Les hypothèses $\alpha(0) = \gamma(0)$ et $\alpha(1) = \gamma(t_0)$ donnent

$$(\gamma^{-1} \circ \alpha)(0) = 0 \tag{21.165a}$$
$$(\gamma^{-1} \circ \alpha)(1) = t_0. \tag{21.165b}$$

Donc pour tout $t \in [0,t_0]$, il existe $u \in [0,1]$ tel que $(\gamma^{-1} \circ \alpha)(u) = t$. En appliquant γ des deux côtés, nous voyons que ce u vérifie $\alpha(u) = \gamma(t)$ comme demandé. □

[11] Définition 7.27.
[12] Je ne suis pas certain que cette hypothèse soit indispensable.

La proposition suivante dit essentiellement que la longueur d'un chemin est minoré par la longueur de son graphe.

PROPooXENVooMvkTZW

Proposition 21.55 ([1]).
Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$. Soit une application continue et injective $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Nous considérons maintenant un second chemin continu $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = b$ et $\alpha([0,1]) \subset \gamma([0,1])$.

Alors la longueur de γ minore celle de α : $l(\gamma) \leqslant l(\alpha)$.

Démonstration. Pour rappel, la longueur d'un chemin est donné par le supremum des longueurs des lignes brisées reliant des points du chemin (définition 21.3). Soit une subdivision σ de $[0,1]$ et la « longueur » correspondante pour γ :

$$l_\sigma(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|. \tag{21.166}$$

Nous allons construite une subdivision de $[0,1]$ pour laquelle la longueur de α sera la même. De cette façon, le supremum pour α sera un supremum sur un ensemble plus grand que celui du supremum pour γ.

Vu que le graphe de α est contenu dans celui de γ, et que les points de départ et d'arrivée sont les mêmes, la proposition 21.54 nous donne que pour tout $t \in [0,1]$, il existe $u \in [0,1]$ tel que $\alpha(u) = \gamma(t)$.

Cela ne suffit pas à considérer une subdivision $(u_i)_{i=1,\dots,n}$ de $[0,1]$ pour laquelle $\alpha(u_i) = \gamma(t_i)$ parce qu'il faut encore que les u_i soient ordonnés. Vu que α n'est pas injective, il n'y a pas de garanties de ce côté. Nous posons :

$$u_i = \min\{x \in [0,1] \text{ tel que } \alpha(x) = \gamma(t_i)\}. \tag{21.167}$$

Montrons que ce minimum existe. Ce minimum existe parce que α étant continue, l'ensemble des x sur lesquels $\alpha(x)$ a une valeur donnée est fermé (le complémentaire est ouvert par le théorème des valeurs intermédiaires). De plus cet ensemble est borné parce qu'il est inclus dans $[0,1]$. Il est donc compact et possède un minimum.

Nous prouvons à présent que $u_{i+1} \geqslant u_i$. Nous avons $\alpha(u_{i+1}) = \gamma(t_{i+1})$ et il existe u dans $[0, u_{i+1}[$ tel que$\alpha(u) = \gamma(t_i)$ (proposition 21.54). Vu que u_i est le minimum de tels u, nous avons $u_i \in [0, u_{i+1}[$. Cela prouve bien que $u_i < u_{i+1}$.

Ces $(u_i)_{i=1,\dots,n}$ forment une subdivision de $[0,1]$ telle que $\alpha(u_i) = \gamma(t_i)$. La longueur associée à la subdivision (u_i) pour α est la même que celle associée à (t_i) pour γ.

Donc $l(\alpha) \geqslant l(\gamma)$. □

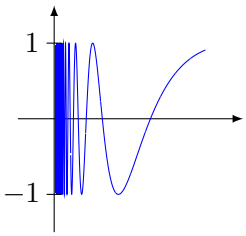


FIGURE 21.8 : La figure de la proposition 21.56.

LabelFigYWxOAkh

PROPooVXDNooPZYKPr

Proposition 21.56 ([1]).
Nous considérons la partie suivante de $\mathbb{R}^2$:

$$A_2 = \big\{\big(t, \sin(1/t)\big)\big\}_{t\in]0,1]} \tag{21.168}$$

qui est dessinée est sur la figure 21.8. Ensuite nous posons

$$A = \big\{(0,0)\big\} \cup A_2. \tag{21.169}$$

La partie A est connexe, mais pas connexe par arcs.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **A_2 est connexe** La partie A_2 est l'image de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon]0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \big(t, \sin(1/t)\big). \end{aligned} \tag{21.170}$$

Vu que f est continue et que son ensemble de départ est connexe, A_2 est connexe (lemme 7.273).

(2) A est connexe Soient deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ dont l'union contient A. Nous supposons que $(0,0) \in \mathcal{O}_1$. Si $\mathcal{O}_1$ contient $B\big((0,0),r\big)$, alors il contient tous les points de la forme $\big(\frac{1}{2k\pi},0\big)$ pour k assez grand. Ces points sont dans A_2.

Vu que $\mathcal{O}_1$ contient des points de A_2, il doit contenir tous les points de A_2 ; sinon les ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ contrediraient la connexité de A_2. Finalement, $A \subset \mathcal{O}_1$ et A est connexe.

(3) **Connexité par arcs : le chemin** Pour faire aller le chemin dans le bon sens, nous considérons

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,1[&\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto f(1-t).\end{aligned} \tag{21.171}$$

Si A était connexe par arcs, il existerait une application continue $\alpha\colon [0,1] \to A$ telle que $\alpha(0) = \big(1,\sin(1)\big) = \gamma(0)$ et $\alpha(1) = (0,0)$.

(4) **Minoration de la longueur de α** Vu que α est continue, ses composantes le sont et vérifient le théorème des valeurs intermédiaires. Pour tout $t \in]0,1[$, il existe $u \in]0,1[$ tel que $\alpha(u) = \gamma(t)$.

Par la proposition 21.55, la longueur de α est minorée par la longueur du chemin γ entre 0 et t_0 pour tout t.

(5) **La longueur de γ** Vu que γ passe une infinité de fois par zéro et par 1, il est possible de construire une subdivision de $]0,1[$ par rapport à la quelle la longueur de γ est arbitrairement grande.

(6) **Conclusion** Donc la longueur de α est minoré par tous les nombres, arbitrairement grand. Autrement dit, la longueur de α est infinie. Mais α étant un chemin continu depuis un compact, cela est impossible.

Nous déduisons qu'un chemin continu liant $\big(1,\sin(1)\big)$ à $(0,0)$ en restant sur A est impossible.

□

21.9 Repère de Frenet

SecFrenet

Dans cette section, nous ne considérons que des courbes dans $\mathbb{R}^3$.

Proptausclataupzero

Proposition 21.57.
Soit $\gamma = (J,\gamma_N)$ un arc paramétré normal de classe $\mathcal{C}^2$. Alors pour toute valeur de s dans J, nous avons

$$\tau(s) \cdot \tau'(s) = 0 \tag{21.172}$$

où $\tau(s) = \gamma_N'(s)$. C'est-à-dire que la dérivée seconde est perpendiculaire à la dérivée première.

Démonstration. Le paramétrage étant normal, nous avons

$$\|\gamma_N'(s)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i'(s)^2 = 1; \tag{21.173}$$

ce qui implique, en dérivant les deux membres, que

$$0 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i'(s)x_i''(s), \tag{21.174}$$

c'est-à-dire exactement $\gamma_N'(s) \cdot \gamma_N''(s) = 0$; d'où la thèse. □

Remarque 21.58.
Si nous n'utilisons pas des coordonnées normales, la proposition 21.57 n'est pas spécialement vraie. Prenons par exemple la courbe qui donne la parabole :

$$\gamma(t) = (t,t^2) \tag{21.175a}$$
$$\gamma'(t) = (1,2t) \tag{21.175b}$$
$$\gamma''(t) = (0,2) \tag{21.175c}$$

Nous avons $\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) = 4t$. Par conséquent, la dérivée seconde n'est la normale à la courbe que en $t = 0$. Cela est une propriété très intéressante des coordonnées normales : la dérivée seconde d'une coordonnées normale donne un vecteur normal à la courbe, c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente.

DefCourbureNormleUnit

Définition 21.59.
Soit $\gamma = (J, \gamma_N)$ un arc paramétré normal de classe $\mathcal{C}^2$.

*(1) Le **vecteur unitaire tangent** est donné par le corolaire 21.51 : $\tau(t) = \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$.*

*(2) La **normale principale** est le vecteur $\tau'(s)$. Le **vecteur unitaire normal** est le vecteur*

$$\nu(s) = \frac{\tau'(s)}{\|\tau'(s)\|} = \frac{\gamma_N''(s)}{\|\gamma_N''(s)\|}. \tag{21.176}$$

Nous déduirons une formule plus pratique en dehors des coordonnées normales en (21.204).

*(3) La **courbure** au point $\gamma_N(s)$ est le réel*

$$c(s) = \|\tau'(s)\| = \|\gamma_N''(s)\|. \tag{21.177}$$

Note : il y a une notion de courbure signée qui sera donnée dans la définition 21.73.

*(4) Le **rayon de courbure** est le réel*

$$R(s) = \frac{1}{c(s)} = \frac{1}{\|\gamma_N''(s)\|}. \tag{21.178}$$

Par la proposition 21.57, nous avons $\nu(s) \cdot \tau(s) = 0$. En combinant toutes les formules, nous avons les différentes expressions suivantes pour le vecteur normal unitaire :

Eq0908nufractauRc

$$\nu(s) = \frac{\gamma_N''(s)}{c(s)} = \frac{\tau'(s)}{\|\tau'(s)\|} = \frac{\tau'(s)}{c(s)} = R(s)\tau'(s) = R(s)\gamma_N''(s). \tag{21.179}$$

Proposition 21.60.
La fonction courbure s'écrit $c = \|\gamma_N' \times \gamma_N''\|$.

Démonstration. Par la proposition 10.47 nous avons :

$$\langle \gamma_N', \gamma_N'' \rangle^2 + \|\gamma_N' \times \gamma_N''\|^2 = \|\gamma_N'\|^2 \|\gamma_N''\|^2 = \|\gamma_N''\|^2 \tag{21.180}$$

parce que, le paramétrage étant normal, $\|\gamma_N'\| = 1$. Mais $\langle \gamma_N', \gamma_N'' \rangle = 0$, donc il reste $\|\gamma_N' \times \gamma_N''\|^2 = \|\gamma_N''\|^2$, d'où

Eqcsnormgpgpps

$$c(s) = \|\gamma_N''(s)\| = \|\gamma_N'(s) \times \gamma_N''(s)\| \tag{21.181}$$

pour chaque s dans J. □

Définition 21.61.
*Soit s un point birégulier (c'est-à-dire $\gamma_N'(s) \neq 0$ et $\gamma_N''(s) \neq 0$) de l'arc normal $\gamma = (J, \gamma_N)$. Le **vecteur unitaire de la binormale** est le vecteur*

$$\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s) \tag{21.182}$$

Par leurs définitions, τ et ν sont unitaires, tandis que la proposition 21.57 montre qu'ils sont également orthogonaux. Les propriétés du produit vectoriel font que β est également unitaire, et simultanément orthogonal à τ et à ν.

Définition 21.62.
*Le repère orthonormal $\{\tau(s), \nu(s), \beta(s)\}$ est le **repère de Frenet** au point $\gamma_N(s)$.*

Lemme 21.63.
Le vecteur unitaire normal est donné par $\nu(s) = \beta(s) \times \tau(s)$.

Démonstration. Ceci est une application de la formule d'expulsion (10.131) et de l'orthonormalité de la base de Frenet :

$$\beta \times \tau = (\tau \times \nu) \times \tau = -(\nu \cdot \tau)\tau + (\tau \cdot \tau)\nu = \nu. \tag{21.183}$$

□

21.9.1 Torsion

Décomposons le vecteur $\beta'(s)$ dans la base de Frenet. Pour cela nous allons utiliser la proposition 8.169 et montrer que $\beta'(s) \cdot \tau(s) = \beta'(s) \cdot \beta(s) = 0$, ce qui voudra dire que, dans la base de Frenet, les composantes de β' le long de τ et β sont nulles. Le vecteur β' sera donc colinéaire à ν.

D'abord, étant donné que la norme de $\beta(s)$ est constante par rapport à s, nous avons

$$0 = \frac{d}{ds}\|\beta(s)\|^2 = 2\beta'(s) \cdot \beta(s). \tag{21.184}$$

Ensuite, nous dérivons la définition $\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s)$ en utilisant la formule de Leibniz (12.490) :

$$\beta'(s) = \tau'(s) \times \nu(s) + \tau(s) \times \nu'(s). \tag{21.185}$$

Mais $\tau'(s) = \gamma_N''(s)$ tandis que $\nu(s) = \frac{\gamma_N''(s)}{\|\gamma_N''(s)\|}$, de telle sorte que $\tau'(s) \times \nu(s) = 0$. Nous restons donc avec $\beta'(s) = \tau(s) \times \nu'(s)$, ce qui prouve que $\beta'(s)$ est perpendiculaire à $\tau(s)$ et donc que $\beta'(s) \cdot \tau(s) = 0$.

Le vecteur $\beta'(s)$ est donc un multiple de $\nu(s)$. Nous notons $t(s)$ le facteur de proportionnalité :

$$\beta'(s) = t(s)\nu(s). \tag{21.186}$$

DefTorsion

Définition 21.64.
*Soit $\gamma = (J, \gamma_N)$ un arc paramétré normal de classe $\mathcal{C}^3$. La **torsion** de γ au point $\gamma_N(s)$ est le réel*

$$t(s) = \|\beta'(s)\| = \|\tau(s) \times \nu'(s)\|. \tag{21.187}$$

*Lorsque $t(s) \neq 0$, le réel $T(s) = \frac{1}{t(s)}$ est le **rayon de torsion** de γ en $\gamma_N(s)$.*

Étant donné que pour chaque s, l'ensemble $\{\tau(s), \nu(s), \beta(s)\}$ est une base, il est naturel de vouloir décomposer leurs dérivées dans cette base. D'abord, par définition de c et de t, nous avons

$$\begin{aligned} \tau'(s) &= c(s)\nu(s) \\ \beta'(s) &= t(s)\nu(s). \end{aligned} \tag{21.188}$$

Il reste à décomposer $\nu'(s)$. Définissons α_τ, α_ν et α_β (qui peuvent dépendre de s) par

$$\nu'(s) = \alpha_\tau\tau(s) + \alpha_\nu\nu(s) + \alpha_\beta\beta(s). \tag{21.189}$$

En vertu de la proposition 8.169, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha_\tau &= \langle \nu'(s), \tau(s)\rangle = -\langle \nu(s), \tau'(s)\rangle = -\langle \nu(s), c(s)\nu(s)\rangle = -c(s), \\ \alpha_\nu &= \langle \nu'(s), \nu(s)\rangle = 0, \\ \alpha_\beta &= \langle \nu'(s), \beta(s)\rangle = -\langle \nu(s), \beta'(s)\rangle = -t(s), \end{aligned} \tag{21.190}$$

où nous avons utilisé le fait que $\langle \nu(s), \nu(s)\rangle = \|\nu(s)\|^2 = 1$. Si nous mettons ces résultats sous forme matricielle, nous avons les **formules de Frenet** :

$$\begin{pmatrix} \tau'(s) \\ \nu'(s) \\ \beta'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c(s) & 0 \\ -c(s) & 0 & -t(s) \\ 0 & t(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(s) \\ \nu(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix}. \tag{21.191}$$

Proposition 21.65.
Si s est un point birégulier, alors la torsion est donnée par

$$t(s) = -\frac{(\gamma_N' \times \gamma_N'') \times \gamma_N'''}{\|\gamma_N'(s) \times \gamma_N''(s)\|^2}. \tag{21.192}$$

Démonstration. Par l'équation (21.179), nous avons $\gamma_N''(s) = c(s)\nu(s)$, et par conséquent

$$\gamma_N'''(s) = c'(s)\nu(s) + c(s)\nu'(s) = c'(s)\nu(s) + c(s)\big[-c(s)\tau(s) - t(s)\beta(s)\big], \tag{21.193}$$

où nous avons utilisé la formule de Frenet pour $\nu'(s)$. Par ailleurs, sachant le corolaire 21.52 et la formule de Frenet pour τ', nous avons

$$\gamma_N' \times \gamma_N'' = \tau(s) \times \tau'(s) = \tau(s) \times c(s)\nu(s) = c(s)\beta(s). \tag{21.194}$$

En combinant les deux dernières équations, et en se souvenant que la base de Frenet et orthonormale,

$$(\gamma_N' \times \gamma_N'') \cdot \gamma_N'''(s) = -c(s)^2 t(s), \tag{21.195}$$

et donc, en remplaçant $c(s)$ par la formule (21.181),

$$t(s) = -\frac{(\gamma_N' \times \gamma_N'') \cdot \gamma_N'''}{\|\gamma_N' \times \gamma_N''\|^2}. \tag{21.196}$$

□

21.10 Hors des coordonnées normales

Remfougnormoupad

Remarque 21.66.
Notons que la définition de τ est donnée pour tout arc $\mathcal{C}^1$ régulier (I,γ) par $\tau(t)=\gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$. La propriété $\tau=\gamma'_N$ n'est valable que lorsque le paramétrage est normal. Les autres définitions ont toutes été données dans le cas d'un paramétrage normal.

La remarque 21.66 nous incite à exprimer toute la base de Frenet en termes de γ lorsque le paramétrage n'est pas normal. Étant donné que nous pouvons toujours faire le changement de variable $\gamma(t)=\gamma_N\big(\phi(t)\big)$ (proposition 21.46), il est possible d'exprimer les vecteurs τ, ν et β ainsi que les réels c et t en fonction de γ et de ses dérivées.

Nous allons maintenant travailler à écrire les formules.

Pour plus de facilité, nous collectons les définitions. Afin d'alléger la notation, nous n'exprimons pas explicitement les dépendances en s :

Vecteur unitaire tangent Par le corolaire 21.52, τ est donné par $\tau=\gamma'_N$.

Vecteur unitaire normal Par la définition 21.59, ν est donné par $\nu=\frac{\tau'}{\|\tau'\|}$.

Vecteur unitaire de la binormale Par la définition 21.59, β est donné par $\beta=\tau\times\nu$.

Courbure Par la définition 21.59, c est donné par $c=\|\tau'\|$.

Torsion Par la définition 21.64, t est donné par $t=\|\beta'\|$.

Le schéma du changement de variable est

EqDiagIJstgvpR
$$\begin{array}{ccc} t\in I & \xrightarrow{\ \gamma\ } & \mathbb{R}^3 \\ {\scriptstyle\phi}\big\downarrow & \nearrow_{\gamma_N} & \\ s\in J & & \end{array} \tag{21.197}$$

La difficulté ne sera pas d'éliminer γ_N de toutes les formules, mais bien de se débarrasser des fonctions ϕ qui arrivent quand nous exprimons γ_N en termes de γ, et en particulier lorsque nous voulons exprimer les dérivées de γ_N en termes de γ et de ses dérivées.

Regardons d'abord comment les dérivées de γ_N s'expriment en termes de γ. En utilisant le fait que $\gamma_N(s)=(\gamma\circ\phi^{-1})(s)$ et que $\|\gamma'_N(s)\|=1$, nous avons

EqgpNgpnNnr
$$\gamma'_N(s)=\frac{\gamma'_N(s)}{\|\gamma'_N(s)\|}=\frac{(\gamma\circ\phi^{-1})'(s)}{\|(\gamma\circ\phi^{-1})'(s)\|}=\frac{\gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)(\phi^{-1})'(s)}{\|\gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)\||(\phi^{-1})'(s)|}=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \tag{21.198}$$

où nous avons utilisé le fait que ϕ^{-1} étant croissante (parce que l'inverse d'une fonction croissante est croissante), $(\phi^{-1})'(s)=|(\phi^{-1})'(s)|$. Pourquoi écrivons nous $|\phi^{-1}(s)|$ et non $\|\phi^{-1}(s)\|$?

Pour la dérivée seconde, nous dérivons la relation (21.198) :

$$\gamma''_N(s)=\frac{\gamma''\big(\phi^{-1}(s)\big)(\phi^{-1})'(s)}{\|\gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)\|}+\gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)\frac{d}{ds}\Big[\|\gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)\|\Big]. \tag{21.199}$$

Le petit calcul suivant va nous permettre de simplifier cette expression :

Eavpemuetfpnorm
$$(\phi^{-1})'(s)=(\phi^{-1})'\big(\phi(t)\big)=\frac{1}{\phi'(t)}=\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}. \tag{21.200}$$

Donc

$$\gamma''_N(s)=\frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}+\gamma'(t)\frac{d}{ds}\Big[\|\gamma'(t)\|\Big] \tag{21.201}$$

où il est entendu que $t=\phi^{-1}(s)$. Avec cette expression, nous ne nous sommes pas encore débarrassés de la fonction ϕ, mais nous allons voir que cela nous sera suffisant.

Pour le vecteur unitaire tangent $\tau(s)$, nous avons donc immédiatement

EqTauavect
$$\tau(s)=\gamma'_N(s)=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}. \tag{21.202}$$

Ici encore il est sous-entendu que le t dans le membre de droite est lié au s du membre de gauche par $t=\phi^{-1}(s)$. Il est donc naturel de nous demander si nous avons gagné quelque chose, étant donné que la formule (21.202) contient encore la fonction ϕ.

Géométriquement, le vecteur $\tau(s)$ est le vecteur normal unitaire de la courbe au point $\gamma_N(s)$. En utilisant les relations du diagramme (21.197), nous avons en réalité $\gamma_N(s) = \gamma_N\big(\phi(t)\big) = \gamma(t)$. Le vecteur $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ représente donc le vecteur normal tangent au point $\gamma(t)$.

Pour calculer la courbure, nous devons d'abord calculer le produit vectoriel

$$\begin{aligned}\gamma'_N(s) \times \gamma''_N(s) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \times \left(\frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} + \gamma'(t) \frac{d}{ds} \Big[\|\gamma'(t)\| \Big] \right) \\ &= \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^3}\end{aligned} \tag{21.203}$$

eqProdvectogpgpp

parce que le deuxième terme dans la parenthèse est un multiple de $\gamma'(t)$, de telle sorte que son produit vectoriel avec $\gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$ soit nul. En prenant la norme,

$$c(s) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}. \tag{21.204}$$

EqCourburetermf

Encore une fois, cette équation nous enseigne que la courbure au point $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ est donnée par le membre de droite, qui ne dépend que de t.

Le vecteur unitaire binormal est donné par $\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s)$. En utilisant (21.202) et (21.179),

$$\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s) = \gamma'_N(s) \times \frac{\gamma''_N(s)}{c(s)}. \tag{21.205}$$

Les formules (21.203) pour le produit vectoriel et (21.204) pour la courbure donnent ensuite

$$\beta(s) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^3} \cdot \frac{1}{c(s)} = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}. \tag{21.206}$$

Cela donne le vecteur unitaire binormal au point $\gamma(t)$ en termes de $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$.

La torsion demande d'utiliser la dérivée troisième de γ_N. Nous avons

$$\begin{aligned}\gamma'''_N(s) &= (\gamma \circ \phi^{-1})'''(s) \\ &= \Big(\gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)(\phi^{-1})'(s) \Big)'' \\ &= \Big(\gamma''\big(\phi^{-1}(s)\big)(\phi^{-1})'(s)^2 + \gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)(\phi^{-1})''(s) \Big)' \\ &= \gamma'''\big(\phi^{-1}(s)\big)(\phi^{-1})'(s)^3 + v \\ &= \frac{\gamma'''\big(\phi^{-1}(s)\big)}{\|\gamma'(t)\|^3} + v \qquad \text{par (21.200)}\end{aligned} \tag{21.207}$$

où v est un élément de $\text{Span}\{\gamma''\big(\phi^{-1}(s)\big), \gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)\}$. Le vecteur v est donc perpendiculaire à $\gamma' \times \gamma''$ et donc à $\gamma'_N \times \gamma''_N$ à cause de la relation (21.203) qui montre que $\gamma' \times \gamma''$ est parallèle à $\gamma'_N \times \gamma''_N$. De ce fait, lorsque nous calculons $(\gamma'_N \times \gamma''_N) \cdot \gamma'''_N$, la partie v de γ'''_N n'entre pas en ligne de compte.

Nous avons donc le calcul suivant, en remplaçant les diverses occurrences de $\gamma'_N \times \gamma''_N$ par sa valeur (21.203) en termes de γ,

$$\begin{aligned}t(s) &= -\frac{(\gamma'_N \times \gamma''_N) \cdot \gamma'''_N}{\|\gamma'_N \times \gamma''_N\|^2} \\ &= -\frac{(\gamma'_N \times \gamma''_N) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'_N \times \gamma''_N\|^2 \, \|\gamma'(t)\|^2} \\ &= -\frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}.\end{aligned} \tag{21.208}$$

Dans cette expression, il est sous-entendu que tous les γ_N sont fonctions de s et tous les γ sont fonction de t où s et t sont liés par $s = \phi(t)$.

Voici un théorème qui résume ce que nous venons de faire.

THOooXOVRooRXtEuU

Théorème 21.67.
Pour tout représentant (I, γ), les éléments métriques (τ, ν, β, c, t) au point $\gamma(t)$ s'expriment en fonction de $\gamma(t)$, $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ et $\gamma'''(t)$.

Lemme 21.68.
Si γ est le graphe de la fonction y alors la courbure de γ est donnée par la formule

$$c\big(\gamma(t)\big) = \frac{|y''(t)|}{\big(1 + y'(t)^2\big)^{3/2}} \tag{21.209}$$

Démonstration. Nous avons :

$$\gamma(t) = \big(t, y(t)\big) \tag{21.210a}$$
$$\gamma'(t) = \big(1, y'(t)\big) \tag{21.210b}$$
$$\gamma''(t) = \big(0, y''(t)\big). \tag{21.210c}$$

Il s'agit maintenant seulement d'utiliser la formule (21.204) en se souvenant comment on calcule un produit vectoriel[13] :

$$\gamma' \times \gamma'' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & y' & 0 \\ 0 & y'' & 0 \end{vmatrix} = y''. \tag{21.211}$$

□

21.11 Tracer des courbes paramétriques dans $\mathbb{R}^2$

SecTracerParmCourbe

Nous allons maintenant voir comment les concepts introduits nous aident à effectivement tracer des courbes dans le plan. Les courbes que nous regardons sont de la forme $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, et nous supposons que ces fonctions soient suffisamment régulières (disons trois fois continument dérivables). Nous ne supposons pas que la courbe soit donnée en coordonnées normales, en particulier, $\gamma''(t)$ n'est pas le vecteur normal en $\gamma(t)$.

La notion clef qui va jouer est le **cercle osculateur** de la courbe γ au point $\gamma(t)$. Sans rentrer dans les détails, disons que c'est le cercle qui « colle » le mieux possible la courbe. Le rayon de ce cercle est le rayon de courbure :

$$R(t) = \frac{\|\gamma(t)\|^3}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}. \tag{21.212}$$

En pratique, le produit vectoriel se calcule comme ceci :

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = (x'y'' - x''y')e_z. \tag{21.213}$$

Le centre du cercle osculateur va se trouver quelque part sur la normale. Le vecteur normal est donné par

$$n(t) = J\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \tag{21.214}$$

où J est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$J\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}. \tag{21.215}$$

Cela nous laisse deux possibilités pour le centre du cercle osculateur : $\gamma(t)+R(t)n(t)$ ou bien $\gamma(t)-R(t)n(t)$. Il faut savoir de quel côté de la courbe est situé le centre du cercle osculateur. Il faut choisir le côté de la concavité, c'est-à-dire le côté de la dérivée seconde.

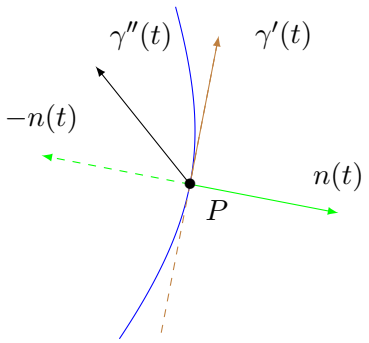


FIGURE 21.9 : De quel côté de $\gamma'(t)$ se trouvent $n(t)$ et $-n(t)$? LabelFigQuelCote

La difficulté maintenant est de savoir qui de $n(t)$ ou $-n(t)$ est du côté de $\gamma''(t)$. Il faut savoir si $n(t)$ est du même côté de la droite tangente que $\gamma''(t)$ ou non. Par construction, si nous regardons la figure 21.9, le

[13] Définition 10.40.

vecteur $n(t)$ sera toujours à gauche de $\gamma'(t)$. Le fait que $\gamma''(t)$ soit à gauche ou à droite de $\gamma'(t)$ est donné par le signe du produit vectoriel $\gamma'(t)\times\gamma''(t)$. Si ce produit vectoriel est positif, il faut choisir $-n(t)$ et si il est négatif, il faut choisir $n'(t)$.

Le truc pour obtenir le signe de $x'y''-x''y'$ est de faire

$$\frac{(\gamma'\times\gamma'')\cdot e_z}{\|\gamma'\times\gamma''\|}. \tag{21.216}$$

Le centre de courbure sera donc situé à la position

$$\Omega(t)=\gamma(t)-n(t)\frac{\|\gamma(t)\|^3}{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|^2}(\gamma'\times\gamma'')\cdot e_z \tag{21.217}$$

Nous pouvons écrire cela plus explicitement en nous souvenant que $\gamma'\times\gamma''=(x'y''-x''y')e_z$, par conséquent $\frac{(\gamma'\times\gamma'')\cdot e_z}{\|\gamma'\times\gamma''\|^2}=\frac{1}{x'y''-x''y'}$. Nous avons

$$\Omega_x(t)=x(t)-y'(t)\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'} \tag{21.218a}$$

$$\Omega_y(t)=y(t)+x'(t)\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}. \tag{21.218b}$$

Quelques exemples de cercles osculateurs sont sur la figure 21.10.

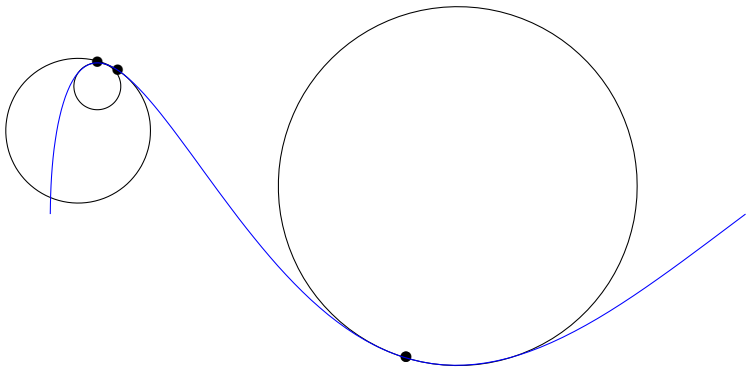


FIGURE 21.10 : Exemple de cercles osculateurs. LabelFigOsculateur

21.12 Courbes planes

Définition 21.69.
*Une courbe $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ est **fermée** si $\gamma(a)=\gamma(b)$. Elle est **simple** si $\gamma(t)\neq\gamma(t')$ dès que $t,t'\in]a,b[$ et $t\neq t'$.*

DEFooSAZTooZGQrQG

Définition 21.70.
Nous disons qu'une courbe fermée est continue, de classe C^1, de classe C^2 ou autre condition de régularité si son extension périodique comme application $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ a cette régularité.

21.12.1 Angle

LEMooUECMooNBDGiR

Lemme 21.71 ([607]).
Soient des courbes régulières γ et σ de classe C^2 de l'intervalle ouvert I vers $\mathbb{R}^2$. Soit $\theta_0\in\mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\gamma'(t_0)\cdot\sigma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|\|\sigma'(t_0)\|}=\cos(\theta_0) \tag{21.219a}$$

$$\frac{\gamma'(t_0)\cdot J\sigma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|\|\sigma'(t_0)\|}=\sin(\theta_0). \tag{21.219b}$$

Alors il existe une unique fonction différentiable $\theta\colon I\to\mathbb{R}$

$$\frac{\gamma'(t)\cdot\sigma'(t)}{\|\gamma'(t)\|\|\sigma'(t)\|}=\cos\big(\theta(t)\big) \tag{21.220a}$$

$$\frac{\gamma'(t)\cdot J\sigma'(t)}{\|\gamma'(t)\|\|\sigma'(t)\|}=\sin\big(\theta(t)\big). \tag{21.220b}$$

Démonstration. Il suffit de prendre

$$f(t) = \frac{\gamma'(t) \cdot \sigma'(t)}{\|\gamma'(t)\|\|\sigma'(t)\|} \tag{21.221}$$

et

$$g(t) = \frac{\gamma'(t) \cdot J\sigma'(t)}{\|\gamma'(t)\|\|\sigma'(t)\|} \tag{21.222}$$

dans la proposition 18.58. Ces courbes sont de classe C^1 parce que γ et σ sont de classe C^2. □

21.12.2 Courbure signée

Nous avons déjà défini la courbure d'une courbe en la définition 21.59. Nous introduisons maintenant la courbure signée qui est propre à la dimension deux.

DEFooTSJXooTIyRXf

Définition 21.72.
*La **structure complexe** sur $\mathbb{R}^2$ est l'application*

$$\begin{aligned} J\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (-y,x). \end{aligned} \tag{21.223}$$

DEFooJFWEooXcIVUs

Définition 21.73.
*La **courbure signée** de la courbe $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ (I est un intervalle dans $\mathbb{R}$) est la fonction*

$$\kappa(t) = \frac{\gamma''(t) \cdot J\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^3} \tag{21.224}$$

EQooWOUQooXrVzGx

où J est la structure complexe de la définition 21.72.

Cette définition est motivée par le fait qu'en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, l'application J revient à l'application $z \mapsto iz$.

Si $v, w \in \mathbb{R}^2$ nous avons formellement

$$v \times w = -(v \cdot Jw)e_3. \tag{21.225}$$

En particulier pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$v \cdot Jv = 0. \tag{21.226}$$

Lemme 21.74.
Soir une courbe régulière $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ et un difféomorphisme $h\colon [c,d] \to [a,b]$. Si nous posons $\sigma = \gamma \circ h$ alors

$$\kappa_\sigma(u) = \operatorname{sgn}\big(h'(u)\big)\kappa_\gamma\big(h(u)\big). \tag{21.227}$$

EQooSQNMooUKGhPd

Démonstration. Nous utilisons la définition (21.224) de la courbure signée. La règle de dérivation en chaine donne :

$$\sigma'(u) = \gamma'\big(h(u)\big)h'(u) \tag{21.228a}$$

$$\sigma''(u) = \gamma''\big(h(u)\big)h'(u)^2 + \gamma'\big(h(u)\big)h''(u). \tag{21.228b}$$

La numérateur de $\kappa_\sigma(u)$ est :

$$(\gamma'' \circ h)h'^2 \cdot J(\gamma' \circ h)h' + h''(\gamma' \circ h) \cdot J(\gamma' \cdot h)h' \tag{21.229}$$

dont le second terme est nul parce que $v \cdot Jv = 0$. Il nous reste donc

$$\kappa_\sigma(u) = \frac{(h')^3}{|h'|^3}\frac{(\gamma'' \circ h) \cdot J(\gamma' \circ h)}{\|\gamma' \circ h\|^3} = \operatorname{sgn}(h')\kappa_\gamma\big(h(u)\big). \tag{21.230}$$

□

LEMooKPORooEGJCRm

Lemme 21.75 ([607]).
Si γ_N est un arc paramétré normal, alors

$$\gamma_N''(s) = \kappa(s)J\gamma_N'(s). \tag{21.231}$$

Démonstration. Vu que le paramétrage est normal, $\gamma'_N \cdot \gamma'_N = 1$, et en dérivant, $\gamma''_N \cdot \gamma'_N = 0$. Donc γ''_N est un multiple de $J\gamma'$. En tenant compte du fait que le paramétrage est normal, la courbure est

$$\kappa(s) = \gamma''_N(s) \cdot J\gamma'(s). \tag{21.232}$$

En y injectant $\gamma''(s) = \lambda(s)J\gamma'(s)$ nous trouvons

$$\kappa(s) = \lambda(s)J\gamma'(s) \cdot J\gamma'(s) = \lambda(s). \tag{21.233}$$

Donc le facteur de proportionnalité est $\kappa(s)$. □

THOooDLDVooFQnLWn

Théorème 21.76.
Soit une courbe $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2.

(1) γ est une partie de droite si et seulement si $\kappa(t) = 0$ pour tout t.

(2) γ est une partie d'un cercle de rayon $r > 0$ si et seulement si $|\kappa(s)| = \frac{1}{r}$.

Démonstration. Si γ est une droite, la dérivée seconde est nulle et la courbure est nulle. Supposons pour la réciproque que $\kappa(t) = 0$ pour tout t. Nous utilisons un paramétrage normal de γ, ce qui ne change pas que la courbure reste nulle. Nous avons par le lemme 21.75 que $\gamma''(s) = 0$ et donc l'existence de $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que $\gamma(t) = at + b$.

Passons au cas du cercle. Si γ est un cercle, le paramétrage normal est

$$\gamma(t) = R\begin{pmatrix}\cos(\frac{t}{R})\\ \sin(\frac{t}{R})\end{pmatrix} \tag{21.234a}$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix}-\sin(\frac{t}{R})\\ \cos(\frac{t}{R})\end{pmatrix} \tag{21.234b}$$

$$\gamma''(t) = -\frac{1}{R}\begin{pmatrix}\cos(\frac{t}{R})\\ \sin(\frac{t}{R})\end{pmatrix}. \tag{21.234c}$$

Avec tout cela nous avons $\kappa(s) = \gamma''(s) \cdot J\gamma'(s) = \frac{1}{R}$.

Nous supposons enfin que $\kappa(t) = 1/R$ et que le paramétrage soit normal (encore une fois, un reparamétrage ne change pas la courbure lorsqu'elle est constante). Nous définissons la courbe

$$\begin{aligned}\beta\colon [b, c] &\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto \gamma(t) + RJ\gamma'(t).\end{aligned} \tag{21.235}$$

Nous avons $\beta'(t) = \gamma'(t) + RJ\gamma''(t)$. Mais par le lemme 21.75 nous avons $\gamma'' = kJ\gamma' = \frac{1}{R}J\gamma'$. Donc

$$\beta'(t) = \gamma'(t) - \gamma'(t) = 0. \tag{21.236}$$

Du coup β est constante : $\beta(t) = a$. Alors $a = \gamma(t) + RJ\gamma'(t)$ et en particulier

$$\|\gamma(t) - a\| = \|RJ\gamma'(t)\| = r. \tag{21.237}$$

Donc effectivement γ reste sur un cercle de rayon r et de centre a. □

DEFooFAENooXWgBmh

Définition 21.77 ([607]).
*La **courbure totale** de la courbe $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ est le nombre*

$$K = \int_a^b \kappa(t)\|\gamma'(t)\|dt \tag{21.238}$$

EQooTIFWooQflQfd

où κ est la courbure signée définie en 21.73.

*Nous nommons aussi **nombre de tours** de γ le nombre* $\mathrm{Turn}(\gamma) = K/2\pi$.

Lemme 21.78.
La courbure signée ne change pas sous reparamétrage positif, et change de signe sous reparamétrage négatif.

Démonstration. Soit la courbe $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ et un difféomorphisme $h\colon [a, b] \to [c, d]$. Il s'agit d'intégrer la relation (21.227) en effectuant le changement de variables $t = h(u)$:

$$K_\gamma = \int_a^b \kappa_\gamma(t)\|\gamma'(t)\|dt \tag{21.239a}$$

$$= \int_c^d \underbrace{\kappa_\gamma\big(h(u)\big)}_{\kappa_\sigma(u)} \|\gamma'\big(h(u)\big)\|h'(u)du. \tag{21.239b}$$

En utilisant le fait que $\sigma'(u)=\gamma'\big(h(u)\big)h'(u)$ nous avons alors

$$K_\gamma=\int_c^d \kappa_\sigma(u)\left\|\frac{\sigma'(u)}{h'(u)}\right\|h'(u)du \tag{21.240a}$$
$$=\int_c^d \kappa_\sigma(u)\|\sigma'(u)\|\frac{h'(u)}{|h'(u)|}du \tag{21.240b}$$
$$=\operatorname{sgn}(h')K_\sigma. \tag{21.240c}$$

□

LEMDEFooLPWJooAnWZjb

Lemme-Définition 21.79 ([607]).
Soit une courbe régulière $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^2$ de classe C^2 et t_0 dans l'intérieur de I. Soit $\theta_0\in\mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}=\big(\cos(\theta_0),\sin(\theta_0)\big). \tag{21.241}$$

Alors il existe une unique fonction différentiable $\theta\colon I\to\mathbb{R}$ telle que $\theta(t_0)=\theta_0$ et

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}=\begin{pmatrix}\cos\big(\theta(t)\big)\\ \sin\big(\theta(t)\big)\end{pmatrix} \tag{21.242}$$

pour tout $t\in I$.

*Cette fonction est l'**angle** de γ déterminé par θ_0.*

Démonstration. Soit $\beta(t)=(t,0)$; alors $\beta'(t)=(1,0)$ et nous avons

$$\gamma'\cdot\beta'=\gamma'_x \tag{21.243a}$$
$$\gamma'\cdot J\beta'=\gamma'_y. \tag{21.243b}$$

Par la proposition 21.71 il existe une unique fonction $\theta\colon I\to\mathbb{R}$ telle que $\theta(t_0)=\theta_0$ et

$$\begin{cases}\cos\big(\theta(t)\big)=\dfrac{\gamma'\cdot\beta'}{\|\gamma'\|\|\beta'\|}=\dfrac{\gamma'_x}{\|\gamma'\|} & (21.244a)\\ \sin\big(\theta(t)\big)=\dfrac{\gamma'\cdot J\beta'}{\|\gamma'\|\|\beta'\|}=\dfrac{\gamma'_y}{\|\gamma'\|}. & (21.244b)\end{cases}$$

Une telle fonction est bien celle que l'on demande ici. □

LEMooWLAUooKetUiW

Lemme 21.80.
Si γ est une courbe régulière de classe C^2, alors sa courbure et son angle vérifient la relation

$$\theta'(t)=\|\gamma'(t)\|\kappa(t). \tag{21.245}$$

Démonstration. Par définition de l'angle (lemme 21.79) nous avons

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}=\big(\cos\theta(t),\sin\theta(t)\big). \tag{21.246}$$

Dérivant cela,

$$\frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|}+\gamma'(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\right)=\theta'(t)\begin{pmatrix}-\sin\big(\theta(t)\big)\\ \cos\big(\theta(t)\big)\end{pmatrix} \tag{21.247a}$$
$$=\theta'(t)J\begin{pmatrix}\cos\big(\theta(t)\big)\\ \sin\big(\theta(t)\big)\end{pmatrix} \tag{21.247b}$$
$$=\theta'(t)\frac{J\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}. \tag{21.247c}$$

Nous prenons le produit scalaire de cette égalité avec $J\gamma'$ en tenant compte du fait que $\gamma'\cdot J\gamma'=0$:

$$\frac{\gamma''\cdot J\gamma'}{\|\gamma'\|}=\frac{\theta'}{\|\gamma'\|}J\gamma'\cdot J\gamma'. \tag{21.248}$$

En remarquant que $Jv\cdot Jv=\|v\|^2$ nous trouvons $\theta'\|\gamma'\|=\|\gamma'\|^2\kappa_\gamma$ et donc

$$\theta'(t)=\|\gamma'(t)\|\kappa_\gamma(t), \tag{21.249}$$

ce qu'il fallait prouver. □

Ce lemme nous fournit la formule attendue pour la courbure totale.

Lemme 21.81 ([607]).
Soit une courbe régulière de classe C^2 $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2$. Sa courbure totale[14] *est donnée par*

$$K=\theta(b)-\theta(a). \tag{21.250}$$

Démonstration. Il suffit de remplacer dans la définition (21.238) de la courbure totale l'intégrande par son expression du lemme 21.80 :

$$K=\int_a^b \kappa(t)\|\gamma'(t)\|dt=\int_a^b \theta'(t)dt=\theta(b)-\theta(a) \tag{21.251}$$

par le théorème 14.288. □

21.12.3 Degré, indice et homotopie

La définition de l'indice d'un chemin par rapport à un point est 26.51.

DEFooTKBUooNVcheO

Lemme-Définition 21.82.
*Soit une application continue $\phi\colon S^1\to S^1$. Un **relèvement** de ϕ est une application continue $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue telle que*

$$\phi\big(\cos(t),\sin(t)\big)=\begin{pmatrix}\cos\big(\varphi(t)\big)\\ \sin\big(\varphi(t)\big)\end{pmatrix}. \tag{21.252}$$

*Le **degré** est l'entier $\deg(\phi)$ tel que*

$$\varphi(2\pi)-\varphi(0)=2\deg(\phi)\pi. \tag{21.253}$$

Ce nombre ne dépend pas du choix du relèvement φ.

Démonstration. Soient φ_1 et φ_2, deux applications qui satisfont les contraintes. Nous avons une fonction continue $n\colon S^1\to\mathbb{R}$ telle que

$$\varphi_1(t)-\varphi_2(t)=2\pi n(t). \tag{21.254}$$

La fonction n ne pouvant prendre que des valeurs entières et étant continue, elle est constante. Par conséquent

$$\varphi_1(2\pi)-\varphi_1(0)=\varphi_2(2\pi)-\varphi_2(0), \tag{21.255}$$

ce que nous voulions. □

DEFooOCUQooUAlbLo

Définition 21.83.
Soit une courbe fermée $\gamma\colon[0,L]\to\mathbb{R}^2$ de classe C^1. Nous posons

$$\Phi_\gamma(t)=\frac{\tilde\gamma'(t)}{\|\tilde\gamma'(t)\|} \tag{21.256}$$

*où $\tilde\gamma(u)=\gamma\big(\frac{L}{2\pi}u\big)$. L'**indice de rotation** de γ est le degré de Φ_γ, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Ind}(\gamma)=\deg(\Phi_\gamma). \tag{21.257}$$

Notons que dans cette définition, Φ_γ n'est rien d'autre que le vecteur unitaire tangent à γ, ramené à $[0,2\pi]$.

PROPooXHSDooDDnlJQ

Proposition 21.84.
Pour une courbe fermée de classe[15] *C^2, l'indice de rotation est égal au nombre de tours.*

Démonstration. Soit $\gamma\colon[0,L]\to\mathbb{R}^2$ une courbe vérifiant les hypothèses. Par définition, $\mathrm{Ind}(\gamma)=\deg(\Phi_\gamma)$ où

$$\Phi_\gamma(t)=\frac{\tilde\gamma'(t)}{\|\tilde\gamma'(t)\|}=\begin{pmatrix}\cos\tilde\theta(t)\\ \sin\tilde\theta(t)\end{pmatrix} \tag{21.258}$$

EQooGTAPooDRCFPG

[14] Définition 21.77.
[15] La dérivée seconde arrive dans la définition de la courbure ; il faudrait donc supposer au moins C^2 pour avoir la continuité de la courbure.

où nous avons noté $\tilde{\theta}$ l'angle tournant[16] de $\tilde{\gamma}$ et θ celui de γ. Vu que $\tilde{\theta}$ vérifie les hypothèses de la définition 21.82 nous pouvons calculer le degré de Φ_γ par

$$\deg(\Phi_\gamma) = \frac{1}{2\pi}\big(\tilde{\theta}(2\pi) - \tilde{\theta}(0)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{\theta}'(s)ds. \tag{21.259}$$

EQooKNCJooTwTBMO

Il faut trouver le lien entre θ et $\tilde{\theta}$. Pour cela nous notons que

$$\frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|} = \frac{\gamma'\left(\frac{L}{2\pi}t\right)}{\|\gamma'\left(\frac{L}{2\pi}\right)\|}. \tag{21.260}$$

En comparant avec (21.258) il vient

$$\tilde{\theta}(t) = \theta\big(\frac{L}{2\pi}t\big) \tag{21.261}$$

et

$$\tilde{\theta}'(s) = \frac{L}{2\pi}\theta'\left(\frac{L}{2\pi}s\right). \tag{21.262}$$

Le changement de variables $t = \frac{L}{2\pi}s$ est donc tout vu dans l'intégrale (21.259) :

$$\deg(\Phi_\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{L}{2\pi}\theta'\big(\frac{L}{2\pi}s\big)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{L}\theta'(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa_\gamma(t)\|\gamma'(t)\|dt = \mathrm{Turn}(\gamma) \tag{21.263}$$

où nous avons aussi utilisé le lemme 21.80 qui donne le lien entre θ' et κ. □

Les définitions à propos d'homotopie sont 20.77 et 20.78.

LEMooTDTAooCRSYzI

Lemme 21.85 ([1]).
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soit un chemin continu $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$. Soit une boule B contenant $\gamma\big([a,b]\big)$ ainsi que le segment joignant $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$.

Alors γ est homotope[17] au segment joignant $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$.

Démonstration. Notons $d\colon [a,b] \to \Omega$ le segment de droite joignant $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$. Nous notons aussi $l_{x,y}$ le segment joignant x à y et paramétré sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} l_{x,y}\colon [0,1] &\to \Omega \\ t &\mapsto (1-t)x + ty. \end{aligned} \tag{21.264}$$

L'homotopie entre γ et d est alors donnée par

$$\begin{aligned} H\colon [0,1]\times[a,b] &\to \Omega \\ (s,t) &\mapsto l_{\gamma(t),d(t)}(s). \end{aligned} \tag{21.265}$$

□

LEMooQNFCooWorCxN

Lemme 21.86 ([235]).
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Tout chemin dans Ω est homotope à extrémités fixées[18] dans Ω à un chemin droit par morceaux.

Démonstration. Nous allons utiliser le lemme 9.23 en considérant $S \subset [a,b]$ définie en disant que $t \in S$ soit si $t = a$ soit si le chemin $\gamma\colon [a,t] \to \Omega$ est homotope à un chemin droit par morceaux à extrémités fixes.

Nous prouvons que S est inductif (définition 9.22).

(1) $\underline{a \in S}$ Le point a est dans S par définition.

(2) **Si** $\underline{t \in S}$ Supposons que $t \in [a,b[\cap S$, et cherchons $s > t$ tel que $[t,s] \subset S$. Considérons une boule $B = B\big(\gamma(t),\delta\big)$ incluse dans Ω. Vu que γ est continue, l'application $u \mapsto |\gamma(t) - \gamma(t+s)|$ est continue. Pour $s = 0$, cette fonction est nulle. Il existe $\epsilon > 0$ tel que cette fonction reste plus petite que δ, et donc tel que

$$\gamma\big([t,t+\epsilon]\big) \subset B\big(\gamma(t),\delta\big) \subset \Omega. \tag{21.266}$$

Le segment de droite $l_{\gamma(t),\gamma(t+\epsilon)}$ est donc dans Ω et la partie $\gamma\colon [t,t+\epsilon] \to \Omega$ est homotope à extrémités fixée à ce segment (lemme 21.85).

En joignant ce segment aux segments de droites homotopes à $\gamma\big([a,t]\big)$, nous avons des segments de droites homotopes à $\gamma\big([a,s]\big)$. Donc $[a,s] \subset S$.

[16] Définition 21.79.
[17] Définition 20.78.
[18] Définition 20.78.

(3) **Si $[a,t[\subset S$** Nous prouvons que $t\in S$. Nous considérons $\delta>0$ tel que $B\big(\gamma(t),\delta\big)\subset\Omega$. Nous considérons également $\epsilon>0$ tel que $t-\epsilon>a$. Par hypothèse, $t-\epsilon\in S$, et il existe une homotopie à extrémités fixées entre des segments de droites et $\gamma\colon[a,t+\epsilon]\to\Omega$. Nous complétons ces segments par le segment $l_{\gamma(t-\epsilon),\gamma(t)}$ et voilà.

Donc S est inductif, et nous en déduisons que $S=[a,b]$. □

PROPooZIAKooHqtnZj

Proposition 21.87 (Homotopie, degré et indice[607])**.**
Il y a deux résultats à ne pas confondre.

ITEMooLEHFooXEyTHY

(1) Si $\phi_i\colon S^1\to S^1$ sont homotopes, alors $\deg(\phi_1)=\deg(\phi_2)$.

(2) Si $\gamma_i\colon[0,L]\to\mathbb{R}^2$ sont homotopes, alors $\mathrm{Ind}(\gamma_1)=\mathrm{Ind}(\gamma_2)$.

Démonstration. Nous allons décomposer la preuve en deux parties.

(1) **Le degré pour les applications $S^1\to S^1$** Soient deux applications homotopes $\gamma_i\colon S^1\to S^1$. Si F est l'homotopie[19] entre γ_0 et γ_1, nous posons $\gamma_u(t)=F(u,t)$ qui est encore une courbe fermée $\gamma_u\colon S^1\to S^1$. Nous pouvons donc considérer le degré de γ_u. C'est un entier n_u qui vérifie

$$\tilde{\gamma}_u(2\pi)-\tilde{\gamma}_u(0)=2\pi n_u. \tag{21.267}$$

Le membre de gauche est une fonction continue de u ; dans le membre de droite n_u ne pouvant prendre que des valeurs entières, elle est alors constante.

(2) **Indice de rotation pour des courbes dans $\mathbb{R}^2$** Soient maintenant γ_0 et γ_1 deux courbes homotopes de $[0,L]$ dans $\mathbb{R}^2$. Par définition, $\mathrm{Ind}(\gamma_i)=\deg(\Phi_{\gamma_i})$. Prouvons alors que Φ_{γ_0} et homotope à Φ_{γ_1}. De cette façon, la première partie de la preuve conclura à

$$\mathrm{Ind}(\gamma_0)=\deg(\Phi_{\gamma_0})=\deg(\Phi_{\gamma_1})=\mathrm{Ind}(\gamma_1). \tag{21.268}$$

Nous savons que

$$\Phi_\gamma=\frac{\gamma'\left(\frac{L}{2\pi}t\right)}{\|\gamma'\left(\frac{L}{2\pi}t\right)\|}, \tag{21.269}$$

donc en posant

$$\Phi_F(u,t)=\frac{\gamma'_u\left(\frac{L}{2\pi}t\right)}{\|\gamma'_u\left(\frac{L}{2\pi}t\right)\|} \tag{21.270}$$

nous avons une homotopie entre Φ_{γ_0} et Φ_{γ_1}.

□

THOooEQWOooBCRMMZ

Théorème 21.88 ([607])**.**
Pour une courbe simple fermée de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2$,

(1) le nombre de tours[20] vaut ±1,

(2) la courbure totale vaut $\pm2\pi$.

Démonstration. Soit une telle courbe γ et son image Γ. Notons tout de suite que les deux points sont équivalents parce que $K=2\pi\,\mathrm{Turn}(\gamma)$.

(1) **Choix d'un point et d'une tangente**

Si ℓ est une droite dans le plan, soit p le point de Γ le plus proche de ℓ. Il n'est peut-être pas unique, mais la parallèle à ℓ passant par p est une tangente à Γ telle que tout Γ se trouve d'un seul côté de ℓ_p. Pour voir cela, il suffit de choisir un système d'axes pour lequel ℓ est l'axe $y=0$. La distance entre ℓ et les points de Γ est donnée par γ_y, et donc les extrémums sont atteints là où $\gamma'_y=0$, c'est-à-dire pour les points sur lesquels la tangente est parallèle à ℓ.

Étant donné qu'il y a (au moins) un maximum et un minimum distincts, nous pouvons choisir le point p de telle sorte que pour tout point $q\in\Gamma$, l'angle du vecteur $q-p$ soit entre α_0 et $\alpha_0+\pi$ et non entre $\alpha_0-\pi$ et α_0. Ce choix revient à choisir p de telle sorte que Γ soit d'un côté ou de l'autre de ℓ_p.

Pour simplifier les notations plus tard nous choisissons ℓ_p horizontale, de telle sorte que $\alpha_0=0$, et que Γ est au dessus de ℓ_p. Les angles des vecteurs $q-p$ pour $q\in\Gamma$ sont donc tous entre 0 et π.

[19] Définition 20.77.
[20] Nombre de tours et courbure totale, définition 21.77.

(2) **Définition de Σ**

Soit L la longueur[21] de γ et β, un paramétrage de γ telle que $\beta(0)=p$. Nous considérons le triangle

$$\mathcal{T}=\{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant L\} \tag{21.271}$$

et l'application sécante $\Sigma\colon\mathcal{T}\to S^1$ définie par

$$\Sigma(t_1,t_2)=\begin{cases}\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} & \text{si } t_1=t_2=t\\ -\frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|} & \text{si } t_1=0 \text{ et } t_2=L\\ \frac{\beta(t_2)-\beta(t_1)}{\|\beta(t_2)-\beta(t_1)\|} & \text{sinon.}\end{cases} \tag{21.272}$$

(3) **Continuité de Σ** Nous devons prouver les limites[22] suivantes :

$$\lim_{\substack{(t_1,t_2)\to(t,t)\\0\leqslant t_1\leqslant t\leqslant t_2\leqslant L}}\frac{\beta(t_1)-\beta(t_2)}{\|\beta(t_1)-\beta(t_2)\|}=\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} \tag{21.273a}$$

$$\lim_{\substack{(t_1,t_2)\to(0,L)\\0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant L}}\frac{\beta(t_1)-\beta(t_2)}{\|\beta(t_1)-\beta(t_2)\|}=-\frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|} \tag{21.273b}$$

Nous commençons par (21.273a) en multipliant et divisant par t_2-t_1 :

$$\frac{\beta(t_2)-\beta(t_1)}{\|\beta(t_2)-\beta(t_1)\|}=\frac{\beta(t_2)-\beta(t_1)}{t_2-t_1}\frac{t_2-t_1}{\|\beta(t_2)-\beta(t_1)\|}. \tag{21.274}$$

Si chacune des limites des deux facteurs existent dans $\mathbb{R}$, la limite du produit sera le produit des limites. Pour le premier facteur nous développons $\beta(t_2)$ autour de $t=t_1$ via la formulation (12.1342) :

$$\beta(t_2)=\beta(t_1)+(t_2-t_1)\beta'(t_1)+\alpha(t_2-t_1) \tag{21.275}$$

où α est une fonction vérifiant $\lim_{t\to0}\alpha(t)/t=0$. Nous avons à calculer la limite de

$$\frac{(t_2-t_1)\beta'(t_1)+\alpha(t_2-t_1)}{t_2-t_1}=\beta'(t_1)+\frac{\alpha(t_2-t_1)}{t_2-t_1}. \tag{21.276}$$

Prendre la limite $(t_1,t_2)\to(t,t)$ donne bien $\beta'(t)$ parce que β est de classe C^1. En ce qui concerne la limite de la deuxième partie, nous allons la faire plus en détail pour la limite (21.273b).

La limite (21.273b). Nous prenons la prolongation périodique de β. Alors si $t_2=L-\epsilon$ nous pouvons écrire $\beta(-\epsilon)$ au lieu de $\beta(t_2)$. Nous développons $\beta(t_1)$ autour de $t=-\epsilon$ (parce que t_1 est petit) :

$$\beta(t_1)=\beta(-\epsilon)+(t_1+\epsilon)\beta'(-\epsilon)+\alpha(t_1+\epsilon). \tag{21.277}$$

Après multiplication et division par $t_1+\epsilon$, la première limite à calculer est celle de

$$\frac{\beta(-\epsilon)-\beta(t_1)}{t_1+\epsilon}=-\beta'(-\epsilon)+\frac{\alpha(t_1+\epsilon)}{t_1+\epsilon}, \tag{21.278}$$

pour $(\epsilon,t_1)\to(0,0)$. Cela donne bien $-\beta'(0)$. La seconde limite à calculer est celle de

$$\frac{t_1+\epsilon}{\|\beta(-\epsilon)-\beta(t_1)\|}=\frac{t_1+\epsilon}{\|-(t_1+\epsilon)\beta'(-\epsilon)-\alpha(t_1+\epsilon)\|}=\frac{t_1+\epsilon}{\|(t_1+\epsilon)\beta'(-\epsilon)+\alpha(t_1+\epsilon)\|}. \tag{21.279}$$

Nous calculons la limite de l'inverse (qui, si elle est non nulle donnera la réponse en inversant à nouveau) en nous souvenant de la formule

$$\big|a-|b|\big|\leqslant|a+b|\leqslant\big|a+|b|\big|. \tag{21.280}$$

Nous avons l'encadrement

$$\frac{\big|(t_1+\epsilon)\beta'(-\epsilon)-|\alpha(t_1+\epsilon)|\big|}{t_1+\epsilon}\leqslant\frac{\|(t_1+\epsilon)\beta'(-\epsilon)+\alpha(t_1+\epsilon)\|}{t_1+\epsilon} \tag{21.281a}$$

$$\leqslant\frac{\big|(t_1+\epsilon)\beta'(-\epsilon)+|\alpha(t_1+\epsilon)|\big|}{t_1+\epsilon} \tag{21.281b}$$

Les limites des deux extrêmes existent et valent $\beta'(0)$; la règle de l'étau 12.246 conclu.

[21] Définition 21.3.

[22] Limite au sens de la définition 7.135, en sachant qu'elle est unique par la proposition 7.138.

(4) **Deux chemins homotopes** Nous considérons dans $\mathcal{T}$ les points $A = (0,0)$, $B = (0,L)$ et $C = (L,L)$. Nous allons considérer le chemin direct de A à C et celui passant via B. Et comme ces chemins doivent être paramétrés de 0 à 2π, il faut faire un peu attention. Nous définissons les chemins

$$\sigma_i \colon S^1 \to S^1 \tag{21.282}$$

par

$$\sigma_1(t) = \Sigma\left(\frac{L}{2\pi}t, \frac{L}{2\pi}t\right) = \frac{\beta'(tL/2\pi)}{\|\beta'(tL/2\pi)\|} = \frac{\tilde{\beta}'(t)}{\|\tilde{\beta}'(t)\|} = \Phi_\beta \tag{21.283a}$$

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} \Sigma(0, \frac{L}{\pi}t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ \Sigma\big(\frac{L}{\pi}(t-\pi), L\big) & \text{si } \pi \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases} \tag{21.283b}$$

où nous avons repris les notations de la définition 21.83. Notons que pour σ_2, en $t = \pi$ les deux expressions donnent

$$\sigma_2(\pi) = \Sigma(0,L) = -\frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|}. \tag{21.284}$$

Ce sont des chemins fermés parce que

$$\sigma_1(2\pi) = \Sigma(L,L) = \frac{\beta'(L)}{\|\beta'(L)\|} = \frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|} = \Sigma(0,0) = \sigma_1(0). \tag{21.285}$$

Notons que dans toutes ces définitions et calculs, nous avons utilisé de façon assez cruciale la définition 21.70 pour définir la dérivée de β en $t = 0$.

Les chemins σ_1 et σ_2 sont homotopes par construction.

(5) **Indices et degrés** La proposition 21.87(1) nous donne $\deg(\sigma_1) = \deg(\sigma_2)$. Nous avons alors la chaine d'égalités

$$\deg(\sigma_2) = \deg(\sigma_1) = \deg(\Phi_\beta) = \mathrm{Ind}(\beta) = \mathrm{Ind}(\gamma) = \mathrm{Turn}(\gamma) \tag{21.286}$$

EQooSXOAooZVOVxc

où les justifications sont :

(5a) $\deg(\sigma_2) = \deg(\sigma_1)$ par homotopie : proposition 21.87.

(5b) $\deg(\sigma_1) = \deg(\Phi_\beta)$ parce que $\sigma_1 = \Phi_\beta$.

(5c) $\deg(\Phi_\beta = \mathrm{Ind}(\beta)$ par définition 21.83 de l'indice.

(5d) $\mathrm{Ind}(\beta) = \mathrm{Ind}(\gamma)$ par invariance de l'indice sous reparamétrage.

(5e) $\mathrm{Ind}(\gamma) = \mathrm{Turn}(\gamma)$ par la proposition 21.84.

Il nous reste à montrer que $\deg(\sigma_2) = \pm 1$.

(6) **La géométrie de σ_2** Notons que par définition les valeurs de $\sigma_2(t)$ sont les vecteurs (unitaires) joignant p aux points de Γ lorsque $0 \leqslant t \leqslant \pi$, et les vecteurs inverses pour $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$. Plus précisément nous avons, si $0 < a < \pi$:

$$\sigma_2(a) = \Sigma(0, \frac{L}{\pi}a) = \frac{\beta(\frac{L}{\pi}a) - \beta(L)}{\|\beta(\frac{L}{\pi}a) - \beta(L)\|} \tag{21.287}$$

et

$$\sigma_2(\pi + a) = \Sigma(\frac{L}{\pi}a, L) = \frac{\beta(L) - \beta(\frac{L}{\pi}a)}{\|\beta(L) - \beta(\frac{L}{\pi}a)\|}. \tag{21.288}$$

En sachant que $\beta(0) = \beta(L)$ nous avons alors

$$\sigma_2(\pi + a) = -\sigma_2(a). \tag{21.289}$$

EQooKMSRooEzWkyL

Notons aussi que le fait que γ soit une courbe simple assure que le numérateur et le dénominateur de σ_2 ne s'annulent pas autrement que pour $t = L$ ou $t = 0$.

(7) **Un relèvement pour σ_2** Ces propriétés motivent cette idée pour le relèvement de σ_2 :

$$\begin{aligned}\theta\colon [0,2\pi[&\to [0,2\pi[\\ t &\mapsto \text{l'angle du vecteur } \sigma_2(t),\end{aligned} \tag{21.290}$$

avec $\theta(2\pi)$ défini par continuité. Nous allons cependant voir, en étant plus prudent, que cette définition n'assure pas la continuité (surtout en $t=\pi$).

Soyons donc plus prudent et construisons θ petit à petit.

Étant donné que ℓ_p est tangente à Γ au point p, la droite ℓ_p est parallèle à $\beta'(0)$, et l'angle entre ℓ_p et $\beta'(0)$ est soit 0 soit π. Donc $\theta(0)$ devrait valoir soit 0 soit π.

Nous commençons par définir ceci :

$$\begin{aligned}\theta\colon [0,\pi[&\to [0,\pi]\\ t &\mapsto \text{angle de } \sigma_2(t) = \arccos\big(\sigma_2(t)_x\big).\end{aligned} \tag{21.291}$$

C'est le choix d'avoir ℓ_p horizontale et Γ au dessus de ℓ_p qui nous assure que pour tout $t\in[0,\pi]$, l'angle de $\sigma_2(t)$ peut être choisi entre 0 et π. De plus cette fonction est continue en tant que partie de la fonction arccos: $[-1,1]\to[0,\pi]$ qui est elle-même continue par le lemme 7.278.

Le fait que θ soit continue est assuré par le fait que σ_2 est C^∞.

(7a) **Si $\theta(0)=0$**
Cela correspond à la situation des vecteurs rouges sur la figure 21.11.
Vu que $\sigma_2(\pi)=-\sigma_2(0)$, l'angle de σ_2 en $t=\pi$ est le supplémentaire de celui en $t=0$. Mais pour $0\leqslant t<\pi$, $\theta(t)$ prend ses valeurs entre 0 et π, le seul supplémentaire de 0 à être disponible est $\theta(\pi)=\pi$ (et non $\theta(\pi)=-\pi$ par exemple). Nous définissons donc $\theta(\pi)=\pi$ pour la continuité.
En ce qui concerne les $\pi<t<2\pi$ nous savons que $\sigma_2(\pi+a)=-\sigma_2(a)$. Les angles sont donc les supplémentaires de ceux pour $0\leqslant t\leqslant\pi$. Pour assurer la continuité en $t=\pi$ nous sélectionnons la place $]\pi,2\pi]$; et nous définissons

$$\begin{aligned}\theta\colon]\pi,2\pi[&\to]\pi,2\pi]\\ t &\mapsto \text{angle de } \sigma_2(t).\end{aligned} \tag{21.292}$$

Le nombre $\theta(2\pi)$ est défini par continuité. Il doit valoir $\theta(2\pi)=2\pi$.
La fonction θ ainsi définie est un relèvement pour σ_2, et le degré peut être calculé :

$$\deg(\sigma_2)=\frac{1}{2\pi}\big(\theta(2\pi)-\theta(0)\big)=1. \tag{21.293}$$

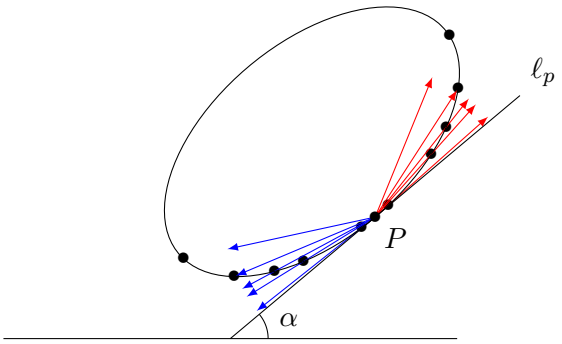


FIGURE 21.11 : Les vecteurs représenant σ_2 dans le cas où $\beta'(0)$ est dans le sens de ℓ_p ou dans le sens inverse. Pour le sport nous avons dessiné la situation avec une droite ℓ quelconque, plutôt que horizontale.

(7b) **Si $\theta(0)=\pi$** Cela correspond à la situation des vecteurs bleus sur la figure 21.11.
Alors $\theta(\pi)=0$ est obligatoire parce qu'il doit être supplémentaire à $\theta(0)$. Les angles atteints par $\sigma_2(t)$ pour $t\in]\pi,2\pi[$ sont encore les complémentaires, mais cette fois la continuité en $t=\pi$ nous impose de les chercher dans $]-\pi,0]$ et nous définissons

$$\begin{aligned}\theta\colon]\pi,2\pi[&\to]-\pi,0]\\ t &\mapsto \text{angle de } \sigma_2(t).\end{aligned} \tag{21.294}$$

Par continuité nous devons avoir $\theta(2\pi) = \theta(\pi) - \pi$ et donc $\theta(2\pi) = -\pi$.

Le degré de σ_2 est alors

$$\deg(\sigma_2) = \frac{1}{2\pi}\big(\theta(2\pi) - \theta(0)\big) = -1. \tag{21.295}$$

(8) **Conclusion**

Nous avons montré que le degré de σ_2 est 1 ou -1, et en remontant les égalités (21.286) nous déduisons que $\mathrm{Turn}(\gamma) = \pm 1$.

□

21.13 Courbes fermées planes

21.13.1 Cercle circonscrit

La proposition suivante est dans le même esprit que l'ellipse de John-Loewer[23].

PROPDEFooCWESooVbDven

Proposition-Définition 21.89 (Cercle circonscrit[674, 1])**.**
*Soit une courbe fermée simple et continue $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Soit Γ son image. Il existe un unique cercle de rayon minimum contenant Γ. Ce cercle est le **cercle circonscrit** à γ.*

Nous nommons C ce cercle circonscrit à γ. Il a les propriétés suivantes :

(1) L'intersection $C \cap \Gamma$ contient au moins deux points distincts.

(2) Tout arc de C plus long que sa moitié intersecte Γ.

Démonstration. Division de la preuve.

(1) **Existence** L'application γ étant continue, l'ensemble Γ est compact (théorème 7.275). Nous considérons l'ensemble Q des formes quadratiques de la forme

$$q_{a,r}(x) = \|a - x\|^2 - r^2 \tag{21.296}$$

avec $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}$. Nous mettons sur cet ensemble la topologie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Le nombre $q_{a,r}(x)$ est continu en a, r et x. Soit A l'ensemble des formes quadratiques de cette forme et vérifiant

$$q\big(\gamma(t)\big) \leqslant 0 \tag{21.297}$$

pour tout $t \in [0,1]$.

Cet ensemble A est non vide parce que Γ est compact et donc borné ; il existe donc une boule qui contient Γ en son intérieur.

Montrons que A est fermé dans Q. Si $q_{a,r} \notin A$ alors il existe t_0 tel que $q_{a,r}\big(\gamma(t_0)\big) > 0$. Par continuité, il existe un voisinage de (a,r) dans $\mathbb{R}^3$ et donc de $q_{a,r}$ dans Q tel que $q_{a',r'}\big(\gamma(t_0)\big)$ reste strictement positif pour tout (a',r') dans ce voisinage. Le complémentaire de A dans Q est ouvert. Donc A est fermé.

L'ensemble

$$B = \{r \geqslant 0 \text{ tel que } \exists\, a \text{ tel que } q_{a,r} \in A\} \tag{21.298}$$

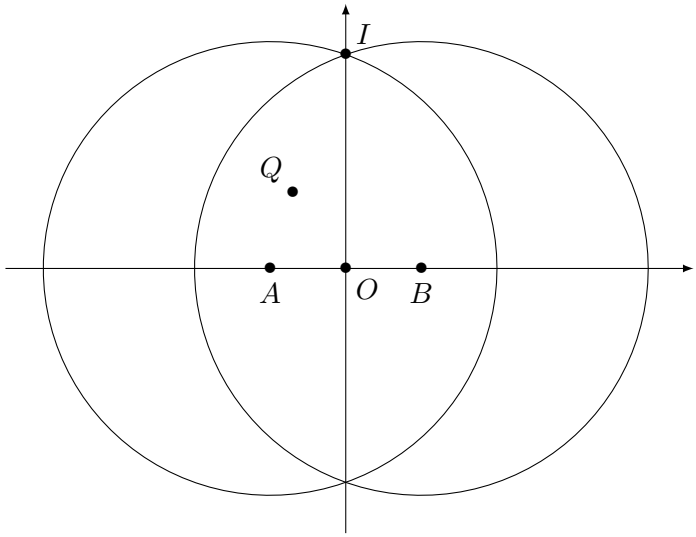
est fermé[24]. La partie B est évidemment borné vers le bas. De plus $r = 0$ n'est pas dans cet ensemble. Il possède donc un minimum strictement positif. Le cercle correspondant donne l'existence.

(2) **Unicité**

En ce qui concerne l'unicité, si Γ est contenu dans les boules $B(a,R)$ et $B(b,R)$ alors

$$\Gamma \subset B(a,R) \cap B(b,R). \tag{21.299}$$

[23] Proposition 17.122.
[24] Lemme 7.376.



Nous choisissons les axes comme indiqué sur le dessin et nous montrons que l'intersection est dans le cercle de centre O et de rayon $\|OI\| < R$. Soit Q un point de l'intersection ; par symétrie il est suffisant de supposer $Q_x < 0$ et $Q_y > 0$. Vu que Q est dans le cercle de centre B et de rayon R, il doit satisfaire

$$(B_x - Q_x)^2 + Q_y^2 < R. \tag{21.300}$$

D'autre part le point I est d'abscisse $I_x = 0$ et d'ordonnée donnée par $I_y^2 = R^2 - B_x^2$.

Nous devons prouver que $Q_x^2 + Q_y^2 \leqslant I_y^2$. Il s'agit simplement de calculer

$$Q_x^2 + Q_y^2 \leqslant Q_x^2 + R^2 - B_x^2 + 2B_xQ_x - Q_x^2 = R^2 - B_x^2 + 2B_xQ_x \leqslant R^2 - B_x^2 = I_y^2 \tag{21.301}$$

parce que $B_x > 0$ et $Q_x < 0$.

Nous concluons que Γ est inclus dans un cercle de rayon plus petit que R et donc que R n'est pas minimum. D'où l'unicité.

(3) **Au moins deux intersections**

Nous nommons C le cercle circonscrit à γ, et nous écrivons, pour $p \in \Gamma$

$$r(p) = d(p, C) \tag{21.302}$$

la distance entre p et C. Cela est une fonction continue sur le compact Γ. Elle atteint donc ses bornes sur Γ.

(3a) **Impossible d'avoir zéro intersection**

Si $C \cap \Gamma = \varnothing$ alors $r(p) > 0$ pour tout p et le minimum est également strictement positif. Soit r_0 ce minimum :

$$r_0 = \min\{d(p, C) \text{ tel que } p \in \Gamma\}. \tag{21.303}$$

Alors le cercle C_2 même centre que C mais de rayon $r_0/2$ n'intersecte pas non plus Γ. En effet soient $p \in \Gamma$ et $s \in C_2$. Nous notons s' le point de C situé sur la demi-droite ps. Nous avons

$$d(p, s) \geqslant d(p, s') - \frac{r_0}{2} \geqslant d(p, C) - \frac{r_0}{2} \tag{21.304a}$$

$$\geqslant r_0 - \frac{r_0}{2} = \frac{r_0}{2} \tag{21.304b}$$

$$> 0. \tag{21.304c}$$

Cela étant valable pour tout $s \in C_2$ (et d étant continue en s sur le compact C_2), nous en déduisons que $d(p, C_2) > 0$ pour tout $p \in \Gamma$. Donc $\Gamma \cap C_2 = \varnothing$.

(3b) **Impossible d'avoir une seule intersection**

Si $C \cap \Gamma = \{q\}$ alors un choix d'axe place le centre de C en $(0, 0)$, le point q en $(1, 0)$ et fixe le rayon de C à 1. Vu que Γ ne coupe C qu'un un seul point, situé tout à droite, il devrait être possible de décaller un peu C pour le « décoller » de q tout en continuant à ne pas toucher Γ en les autres points.

C'est ce que nous allons faire maintenant.

Pour $p \in \Gamma$ nous notons $r(p)$ la distance entre p et le point de C situé sur sa gauche, c'est-à-dire, si $p = (p_x, p_y)$,

$$r(p) = \sqrt{1 - p_y^2} + p_x. \tag{21.305}$$

EQooCWRDooRzwqKi

Cela est encore une fonction continue sur Γ qui atteint son minimum valant r_0. Nous considérons maintenant le cercle C_2 de centre $(\frac{r_0}{2}, 1)$, et nous prouvons que Γ est dans C_2 (au sens dans la boule dont la frontière est C_2) et que $C_2 \cap \Gamma = \varnothing$. Donc C_2 retombe dans un cas que nous avons prouvé être impossible.

Soit $p \in \Gamma$. Si $p \in C_2$, alors $p - (r_0/2, 0) \in C$. Cela est impossible parce que la distance entre p et le point à sa gauche sur C est au moins r_0. Donc $C_2 \cap \Gamma = \varnothing$.

Le point q est dans C_2 parce que $(1, 0) \in B\big((r_0/2, 0), 1\big)$. Par continuité de C_2 et de Γ, tous les points de Γ sont dans C_2. Sinon il y aurait une intersection.

(3c) **Si on en veut plus** Nous avons fini de démontrer qu'il y a au moins deux intersections.

Pour le sport, notez que tout nombre de points d'intersection entre C et Γ est possible à partir de 2. Pour en avoir deux, prendre une ellipse, et pour en avoir plus, prendre des polynômes dont les angles sont un peu modifiés de façon à rester C^1.

(4) **Intersection avec les demi-arcs**

Supposons, en fixant encore les axes, que le cercle circonscrit soit encore centré en $(0, 0)$ et que Γ n'intersecte pas le demi-cercle $x < 0$. Alors pour tout $p \in \Gamma$ la distance entre p et ce demi-cercle est strictement positive. Il y a un minimum r_0. En décalant le centre du cercle de $r_0/2$ vers la droite, nous obtenons un nouveau cercle contenant Γ mais ne l'intersectant pas.

□

21.13.2 Description locale

DEFooVQODooJSNYLw

Définition 21.90.
Une courbe plane différentiable est ***convexe*** *si son graphe est en tout point d'un seul côté de sa tangente.*

LEMooGEVEooHxPTMO

Lemme 21.91 ([1])**.**
Soit une courbe simple, convexe $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ que nous supposons être de classe C^1. Nous notons Γ l'image de γ. Alors Γ est localement le graphe d'une fonction convexe (définition 17.76).

Démonstration. Soit $p \in \Gamma$ et l_p la tangente à Γ en p. Nous considérons un système d'axe centré en p de telle sorte que l_p soit l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées soit dirigé de tel manière que Γ se trouve dans la partie $y > 0$. De plus nous paramétrons γ de telle sorte à avoir $\gamma(0) = p = (0, 0)$.

Vu que $l_p \equiv y = 0$ est la tangente à Γ nous avons $\gamma_y'(0) = 0$ et $\gamma_x'(0) > 0$. Nous en déduisons que $\gamma_x'(t) > 0$ pour tout $t \in B(0, \delta)$ pour δ suffisamment petit. Nous posons alors

$$g(x) = \gamma_y\big(\gamma_x^{-1}(x)\big) \tag{21.306}$$

qui est bien définie parce que γ_x est une bijection entre $B(0, \delta)$ et son image. La fonction g est continue par le théorème de la bijection 12.53, et même dérivable par la proposition 12.211. De plus, vu la formule (12.528), la fonction g^{-1} est de classe C^1 parce que $(g^{-1})'$ est une composée d'applications continues.

(1) **Si g est C^2** Dans ce cas, g'' ne peut pas changer de signe, sinon la tangente coupe le graphe. Par positivité de g (et le fait que $g(0) = g'(0) = 0$), il n'est pas possible d'avoir $g'' < 0$ partout. Donc $g'' \geqslant 0$ partout. Cela prouve que g est convexe par la caractérisation 17.84.

(2) **Si g est seulement de classe C^1** Le graphe de g correspond au graphe de Γ. Nous montrons que g est convexe en utilisant la caractérisation de la proposition 17.89.

La tangente au graphe de g en $x = x_0$, que nous notons l_0, est la tangente à Γ en $t = \gamma_x^{-1}(x_0)$. Le graphe de g, qui est une partie de Γ se trouve donc d'un seule côté de l_0.

Nous nous restreignons g à un compact I et nous considérons la fonction

$$d_a(x) = g(x) - l_a(x) \tag{21.307}$$

qui donne la distance entre le graphe de g et la tangente à g en $x = a$. Cela est une fonction continue en x et en a. Le graphe de g est au dessus de la tangente en $x = 0$ (par construction des axes). Supposons que le graphe de g soit en dessous de la tangente en $x = x_2$. Alors nous avons, pour tout x :

$$\begin{cases} d_0(x) \geqslant 0 & \text{(21.308a)} \\ d_{x_1}(x) \leqslant 0. & \text{(21.308b)} \end{cases}$$

Nous posons

$$s(a) = \sup_{x\in I} d_a(x), \tag{21.309}$$

qui est une fonction continue par la proposition 12.35. L'application s vérifie $s(0) \geqslant 0$ et $s(x_2) \leqslant 0$. Il existe donc $m \in [0, x_2]$ tel que $s(m) = 0$. À ce moment nous avons $g(x) = l_m(x)$ pour tout $x \in I$ et donc g est une droite, et en réalité toutes les inégalités sont des égalités. La fonction g est alors bien convexe (mais pas strictement).

□

21.13.3 Enveloppe convexe

PROPooWZITooTFiWsi

Proposition 21.92 ([675, 1]).
Soit une courbe simple, fermée et convexe $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ que nous supposons être de classe C^2. Nous notons Γ l'image de γ. Alors il existe un convexe D tel que $\partial D = \Gamma$.

Démonstration. Pour $p \in \Gamma$ nous notons l_p la tangente à Γ en p et H_p le demi-plan (fermé) contenant Γ. Nous posons

EQooDYFTooCHRbsD

$$D = \bigcap_{p\in\Gamma} H_p. \tag{21.310}$$

Cet ensemble est convexe comme intersection de convexes[25] et fermé comme intersection de fermés[26]. Nous prouvons que $\Gamma = \partial D$.

L'inclusion $\Gamma \subset \partial D$ est la plus facile. Si $p \in \Gamma$ alors p est dans chacun des H_q et donc dans D. De plus tout voisinage de p contient des points en dehors de H_p, donc p n'est pas dans l'intérieur de D. Ce dernier étant fermé, un point hors de l'intérieur est sur le bord. Ergo $p \in \partial D$.

Pour l'inclusion inverse, soit $p \in \partial D$.

(1) **Il existe q tel que $p \in l_q$** Vu que D est fermé, le point p est dans D, et donc dans tous les H_q. Supposons qu'il soit dans l'intérieur de tous les H_q. Alors nous considérons la fonction

$$r(q) = \frac{d(p, l_q)}{2} \tag{21.311}$$

définie sur Γ. C'est une fonction continue[27] strictement positive définie sur le compact Γ qui possède donc un minimum strictement positif. Si r_0 est ce minimum, alors $B(p, r_0)$ est incluse à tous les H_q, ce qui ferait que p est à l'intérieur de D. Nous concluons à l'existence de $q \in \Gamma$ tel que $p \in l_q$.

(2) **Le point où ça décolle** Nous supposons que $p \notin \Gamma$, sinon ce serait trop facile. Nous paramétrons γ de telle sorte à avoir $q = \gamma(0)$ et nous posons

$$T = \{t \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } l_{\gamma(t)} = l_q\}. \tag{21.312}$$

Cela est un fermé dans $\mathbb{R}$ parce que γ est de classe C^1. Nous posons $t_0 = \inf(T^c)$ et pour tout ϵ suffisamment petit,

$$\begin{cases} l_{\gamma(t_0+\epsilon)} \neq l_q, & \text{(21.313a)} \\ l_{\gamma(t_0-\epsilon)} = l_q. & \text{(21.313b)} \end{cases}$$

La seconde est parce que si $l_{\gamma(t_0-\epsilon)} \neq l_q$ nous aurions $t_0 - \epsilon \in T^c$. Soit $r = \gamma(t_0)$; nous avons $l_r = l_q$ parce que si $l_r \neq l_q$ alors par continuité de γ' nous aurions $l_{r'} \neq l_q$ pour tout $r' \in \gamma\big(B(t_0, \delta)\big)$.

(3) **Graphe d'une fonction strictement convexe** En suivant le lemme 21.91, l'ensemble Γ est localement (autour de r) le graphe d'une fonction convexe au-dessus de l_r. Soit $g\colon B(0,\delta) \to \mathbb{R}^2$ cette fonction convexe.

Soit $\epsilon > 0$. Si $g''(x) = 0$ sur $]0, \epsilon]$ alors g' y est constante. Mais $g'(0) = 0$, ce qui signifierait que sur $[0, \epsilon]$ nous ayons $g'(x) = 0$ et donc $g(x) = 0$. Cela ferait que $l_{r'} \equiv y = 0$ pour tout r' de la forme $(x, 0)$ avec $x \in [0, \epsilon]$ (qui sont des points de Γ). Cela est en contradiction avec la définition de r. Donc il existe un point $x \in [0, \epsilon[$ tel que $g''(x) > 0$.

Rappelons que $p \in l_q$, ce qui fait que p a pour coordonnées $(p_x, 0)$. Nous restreignons δ et ϵ de telle sorte que p_x soit plus grand à la fois que ϵ et δ.

Il existe donc un intervalle $[a, b]$ avec $a, b \geqslant 0$ et $a, b < p_x$ sur lequel g est strictement convexe.

[25] Proposition 7.209.
[26] Lemme 7.6(1).
[27] L'équation de la droite l_q a des coefficients continus parce que γ est de classe C^1.

(4) **La tangente qui tue**

En particulier $g(b) > 0$, de telle sorte que le théorème des accroissements finis 12.216(1) nous donne l'existence de $m \in [0, b]$ tel que la tangente à g en $x = m$ est parallèle au segment joignant $(0, 0)$ à $(b, g(b))$. Cette tangente, que nous nommons l_m, est en dessous de la corde, par stricte convexité. En particulier, son point d'intersection avec $y = 0$ est strictement entre 0 et m.

L'ensemble D est d'un seul côté de l_m. Ce côté est forcément celui de $q = (0, 0)$ (parce que $q \in \Gamma \subset D$), et donc le points de coordonnées $(x, 0)$ avec $x > m$ ne sont pas dans D. Pas de chance, p est un point de ce type.

(5) **La contradiction** Nous avons prouvé que si $p \in \partial D \backslash \Gamma$ alors p n'est pas dans D, ce qui est impossible parce que, l'ensemble D étant fermé, nous avons $\partial D \subset D$.

□

Remarque 21.93.
Bien que cela puisse paraitre évident dès le début, nous ne démontrerons que dans la proposition 21.95 que D est l'enveloppe convexe de Γ.

CORooSXDGooJEmVcf

Corolaire 21.94.
Si $p \in \mathrm{Int}(D)$ alors toute droite passant par p intersecte Γ en exactement 2 points.

Démonstration. Vu que la partie D est bornée, toute droite passant par son intérieur coupe ∂D en au moins deux points (un dans chaque sens, et en utilisant le lemme de passage de douane 7.174).

Soit ℓ une droite passant par p et supposons qu'elle coupe Γ en trois points distincts. Alors au moins deux d'entre eux sont du même côté de p. Soient q_1 et q_2 ces points. Nous avons donc dans l'ordre $p \in \mathrm{Int}(D)$, $q_1 \in \partial D$ et $q_2 \in \partial D$.

Vu que tout Γ est d'un seul côté de ses tangentes, lesdites tangentes ne passent pas par l'intérieur de D. Ni p ni q_2 ne sont sur ℓ_{q_1}, parce que si $q_2 \in \ell_{q_1}$ alors $\ell_{q_1} = \ell$, ce qui est impossible parce que ℓ passe par $p \in \mathrm{Int}(D)$.

Or p et q_2 sont de part et d'autres de ℓ_{q_1}, ce qui est impossible parce que Γ est d'un seul côté de cette droite. □

PROPooOORPooCXrIQi

Proposition 21.95.
Soit D l'ensemble défini en (21.310).

(1) $D = \mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$ ($\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$ désigne l'enveloppe convexe de Γ)

(2) $\partial\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma) = \Gamma$.

Pour la définition d'enveloppe convexe, voir la définition 11.38.

Démonstration. L'ensemble D est un convexe contenant Γ. Donc $\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma) \subset D$. L'inclusion inverse est à prouver.

Soit $x \in D$. Si $x \in \partial D$ alors $x \in \Gamma$ (proposition 21.92) et donc $x \in \mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$. Nous ne devons donc traiter que le cas $x \in \mathrm{Int}(D)$.

Le corolaire 21.94 nous dit que toute droite passant par x coupe Γ en exactement deux points. Soient p et q ces points. Alors $p, q \in \Gamma \subset \mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$. Vu que $\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$ est convexe, tout le segment $[p, q]$ est dans $\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$, et en particulier $x \in \mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$.

Nous passons à la seconde affirmation. Nous savons que $D = \mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$. En prenant le bord des deux côtés, $\partial D = \partial\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$, donc $\Gamma = \partial\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$. □

LEMooUEKQooWhGyKn

Lemme 21.96 (Des tangentes parallèles[676])**.**
Une courbe fermée γ de classe C^1 est convexe si et seulement si elle ne possède pas 3 tangentes parallèles distinctes.

Démonstration. Si le graphe Γ possédait trois tangentes parallèles distinctes, une serait entre les deux autres et le graphe Γ serait de part et d'autres de cette tangente. Dans ce cas, γ n'est pas convexe.

Nous montrons maintenant que si γ n'est pas convexe, alors elle possède trois tangentes parallèles distinctes. Pour $p \in \Gamma$ tel que Γ soit des deux côtés de l_p.

Soient Γ_1 et Γ_2 les parties de Γ délimitées par l_p. Nous notons q_i le point de Γ_i le plus éloigné de la droite l_p, il existe parce que Γ est compact et que la fonction distance à l_p est continue sur Γ. Les points p, q_1 et q_2 sont distincts (sinon l_p ne couperait pas Γ en deux parties).

Montrons que $l_{q_i} /\!\!/ l_p$. Pour cela nous choisissons un système d'axe dans lequel $l_p \equiv y = 0$. Dans ce système, la distance entre $\gamma(t)$ et l_p est $\gamma_y(t)$ et les extrémums de cette fonction ont lieu aux points t tels que $\gamma_y'(t) = 0$, c'est-à-dire aux points sur lesquels la tangente est parallèle à l_p.

À quel moment avons nous utilisé le fait que la courbe soit fermée ? Au moment de dire que le point le plus éloigné devait vérifier $\gamma_y'(t) = 0$. En effet un extrémum peut ne pas vérifier cette condition si il n'est pas à l'intérieur du domaine. Dans notre cas, nous avons $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ qui est fermée : $\gamma(0) = \gamma(1)$. Donc en réalité nous pouvons considérer $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et tous les points du domaine sont intérieurs au domaine. L'extrémum doit donc vérifier la condition d'annulation de la dérivée. □

Exemple 21.97.
Si la courbe n'est pas fermée, alors le lemme 21.96 ne tient pas comme le montre le contre-exemple du graphe de $f(x) = x^3 - x$. Il est non convexe et pourtant ne présente que 2 tangentes parallèles (dans chaque direction). △

LEMooCSXCooIDPiKW

Lemme 21.98.
Soit γ une courbe convexe et ℓ une droite qui intersecte Γ mais qui n'est pas tangente. Alors l'intersection entre ℓ et Γ comprend au maximum 2 points.

Démonstration. Supposons que ℓ coupe Γ en trois points p, q, r (dans cet ordre). Vu que ℓ n'est pas tangente à Γ, la tangente ℓ_q est distincte de ℓ (et intersecte ℓ en l'unique point q). Les points p et r sont dans Γ et sont pourtant de deux côtés différents de ℓ_q. Contradiction avec la convexité de γ. □

La proposition suivante nous dit que si deux points de Γ ont la même tangente, alors entre ces deux points, Γ est le segment de droite les joignant.

PROPooCKTZooIPcUca

Proposition 21.99 ([1]).
Soit $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple et convexe de classe C^1. Si la tangente en $p = \gamma(s_p)$ et la tangente en $q = \gamma(s_q)$ sont identiques (pas seulement parallèles), alors soit

$$\gamma\big([s_p, s_q]\big) = [p, q] \tag{21.314}$$

soit

$$\gamma\big([s_q, L]\big) = [p, q] \tag{21.315}$$

Démonstration. Nous considérons un système d'axe dans lequel $p = (0,0)$, $\ell_p = \ell_q \equiv y = 0$ et tel que $\gamma_y(t) \geqslant 0$ pour tout t. Nous choisissons enfin un paramétrage de γ tel que $p = \gamma(0)$.

Supposons un instant que $\gamma_y\big([0, s_q]\big) = \{0\}$. Nous avons $\gamma_x(0) = p_x = 0$ et $\gamma_x(s_q) = q_x$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 implique que toutes les valeurs entre 0 et q_x sont atteintes par γ_x entre 0 et s_q. Donc tous les points du type $(t, 0)$ avec $0 \leqslant t \leqslant q_x$ sont atteints par $\gamma(t)$ avec $0 \leqslant t \leqslant s_q$. De plus aucun autre point ne peut être atteint parce que γ étant simple, elle ne peut pas faire de retour en arrière.

Nous supposons donc que γ_y n'est pas identiquement nulle sur $[0, s_q]$; il existe donc un s_M avec $0 < s_M < s_q$ qui maximise γ_y sur $[0, s_q]$. La tangente à Γ en $\gamma(s_M)$ est horizontale. Les droites $y = 0$ et $y = \gamma_y(s_M)$ sont donc deux tangentes parallèles à Γ. Par le lemme des tangentes parallèles 21.96, il n'y a pas d'autres tangentes horizontales. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ la droite $y = \frac{1}{n}$ n'est tangente nulle part[28] à Γ.

Par le lemme 21.98, la droite $y = \frac{1}{n}$ ne peut intersecter Γ qu'en seulement deux points. Or le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à γ_y sachant que $\gamma_y(0) = \gamma_y(s_q) = 0$ et $\gamma_y(s_M) > 0$ nous donne a_n, b_n tels que

$$0 < a_n < s_M \tag{21.316a}$$
$$s_M < b_n < s_q \tag{21.316b}$$

et $\gamma_y(a_n) = \gamma_y(b_n) = \frac{1}{n}$. Donc la droite $y = \frac{1}{n}$ intersecte γ deux fois dans $[0, s_q]$. En conséquence de quoi $\gamma_y(t) < \frac{1}{n}$ pour tout $t \in [s_q, L]$. Cela étant valable pour tout n nous avons $\gamma_y\big([s_q, L]\big) = \{0\}$ et nous sommes ramenés essentiellement au premier cas. □

PROPooKHUQooIOUxFw

Proposition 21.100.
Soit une courbe fermée simple γ de classe C^1 et une droite ℓ. Alors il existe au moins deux points distincts q_1, q_2 tels que $\ell_{q_1} /\!\!/ \ell_{q_2} /\!\!/ \ell$ avec $\ell_{q_1} \neq \ell_{q_2}$.

[28] À part $n = 0$ et si par manque de chance, $\gamma_y(s_M)$ est un nombre de la forme $1/n$.

Démonstration. Nous considérons un système d'axes dans lequel la droite ℓ est la droite $y = 0$[29]. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} r\colon \gamma &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto p_y. \end{aligned} \tag{21.317}$$

En tant que fonction continue sur un compact, elle possède un minimum et un maximum. Les extrémums arrivent en $\gamma(s)$ avec $\gamma'_y(s) = 0$, ce qui signifie que les tangentes aux extrémums sont parallèles à ℓ. Vu que le maximum et le minimum ne peuvent pas être égaux (sinon la courbe serait horizontale et pas simple), les tangentes en ces points sont distinctes. □

Corolaire 21.101.
Soit une courbe convexe fermée simple γ de classe C^2. L'ensemble $\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$ est compact.

Démonstration. Nous savons que $\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$ n'est autre que D par la proposition 21.95. Nous savons déjà que D est fermé. Il nous suffit donc de prouver qu'il est borné (théorème de Borel-Lebesgue 9.24). Nous considérons deux droites perpendiculaires et les 4 tangentes correspondantes par la proposition 21.100. Vu que Γ est d'un seul côté de chacune de ces tangentes, elle est contenue dans le rectangle délimité par ces 4 droites. □

21.13.4 Courbure et convexité

SUBSECooNJOLooYuGRjA

À propos de paramétrage normal.

LEMooHMFSooFlhanD

Lemme 21.102.
Soit $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ une courbe simple, fermée de classe C^2 en paramétrage normal. Nous considérons sa fonction d'angle $\theta\colon [0, L] \to \mathbb{R}$.

Alors l'application

$$\begin{aligned} \sigma\colon [0, L] &\to S^1 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos\big(\theta(t)\big) \\ \sin\big(\theta(t)\big) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{21.318}$$

est surjective.

Démonstration. Le théorème 21.88 nous dit que si $\theta(0) = a$ alors $\theta(2\pi)$ ne peut valoir que $a + 2\pi$ ou $a - 2\pi$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors que θ prend toutes les valeurs entre a et $a + 2\pi$ ou $a - 2\pi$. □

PROPooWXUKooPOtPdj

Proposition 21.103 ([676]).
Une courbe fermée simple de classe C^2 est convexe si et seulement si sa courbure est soit toujours positive, soit toujours négative.

Démonstration. Nous considérons la courbe γ munie d'un paramétrage de vitesse 1, c'est-à-dire avec $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout t. Si θ est sa fonction d'angle[30], alors nous avons $\theta' = \kappa$ par le lemme 21.80. Donc la fonction θ est monotone si et seulement si la courbure ne change pas de signe. Nous allons montrer que θ est monotone si et seulement si γ est convexe.

(1) $\Rightarrow$

Nous supposons que θ est monotone et γ non convexe. Soient $p \in \Gamma$ tel que Γ soit des deux côtés de ℓ_p, et soient les points q_1, q_2 donnés par le lemme des tangentes parallèles 21.96 tels que $\ell_p \parallel \ell_{q_1} \parallel \ell_{q_2}$. Parmi les vecteurs tangents en p, q_1 et q_2, deux au moins ont la même direction ; supposons que ce sont q_1 et q_2. C'est-à-dire que si $p = \gamma(s_0)$, $q_1 = \gamma(s_1)$ et $q_2 = \gamma(s_2)$ alors nous avons $\gamma'(s_1) = \gamma'(s_2)$ et donc aussi

$$\theta(s_1) = \theta(s_2) + 2n\pi \tag{21.319}$$

pour un certain n. Mais θ est monotone et la différence entre sa première et sa dernière valeur doit valoir 2π ou -2π par le théorème 21.88. Donc n ne peut valoir que -1, 0 et 1.

Si $n = 0$ alors θ est constante sur $[s_1, s_2]$. Si $n = 1$ alors $\theta(s_1) = \theta(s_2) + 2\pi$ alors que sur toute la courbe, θ ne peut faire que 2π. Donc θ est constant sur $[0, s_1]$ et sur $[s_2, L]$ (où L est le bord de le paramétrage). Si $n = -1$, même conclusion.

[29] Pour bien faire, il faut faire la démonstration en deux parties : une qui montre le cas particulier $\ell \equiv y = 0$, et un second qui en déduit rigoureusement le cas général.
[30] Définition 21.79.

Dans tous les cas, Γ contient une ligne droite, soit de q_1 à q_2, soit de q_2 à q_1. Et dans ces cas nous avons $\ell_{q_1} = \ell_{q_2}$, ce qui est contraire à la construction de q_i.

Nous concluons que γ est convexe.

(2) $\Leftarrow$

Nous supposons que γ est convexe, mais que θ n'est pas monotone. Il existe donc $s_1 < s_0 < s_2$ tels que

$$\theta(s_1) = \theta(s_2) \neq \theta(s_0). \tag{21.320}$$

Et vu le lemme 21.102, il existe s_3 tel que $\gamma'(s_3) = -\gamma'(s_1)$.

Donc en s_1, s_2 et s_3 nous avons trois tangentes parallèles. La proposition 21.96 est alors formelle, γ étant convexe, deux de ces tangentes doivent être identiques.

La proposition 21.99 dit qu'entre deux points dont les tangentes sont identiques, la courbe doit être un segment de droite. Or sur un segment de droite, $\kappa = 0$ et θ est constante.

- La partie $\gamma\big([s_1, s_2]\big)$ ne peut pas être droite parce que nous avions supposé l'existence d'un $s_0 \in]s_1, s_2[$ tel que $\theta(s_1) = \theta(s_2) \neq \theta(s_0)$.
- La partie $\gamma\big([s_1, s_3]\big)$ ne peut pas être droite parce que $\theta(s_3) \neq \theta(s_1)$.
- La partie $\gamma\big([s_2, s_3]\big)$ ne peut pas être droite parce que $\theta(s_2) \neq \theta(s_1)$.

Nous sommes donc devant une contradiction.

Nous en concluons que θ doit être monotone.

□

21.13.5 Théorème des quatre sommets

LEMooELIRooNDVXPh

Lemme 21.104.
Soit une droite ℓ du plan. Il existe $a, c \in \mathbb{R}^2$ avec $c \neq 0$ tels que $z \in \ell$ si et seulement si $(z - a) \cdot c = 0$.

Démonstration. Une droite est paramétrée par $\gamma(t) = p + tq$. En posant $a = p$ et $c = Jq$ nous avons la réponse. En effet nous allons montrer qu'avec ces valeurs de a et c, nous avons $z \in \Gamma$ si et seulement si $(z - a) \cdot c = 0$.

D'abord un point de γ est de la forme $z = \gamma(t) = p + tq$. Nous avons :

$$\big(\gamma(t) - a\big) \cdot c = \big(\gamma(t) - p\big) \cdot Jq = tq \cdot Jq = 0. \tag{21.321}$$

Et dans l'autre sens, si $(z - a) \cdot c = 0$ nous devons prouver que $z \in \Gamma$. Nous avons : $(z - p) \cdot Jq = 0$, ce qui fait que $z - p$ est un multiple de q. Autrement dit : $z - p = \lambda q$ ou encore $z = \alpha q + p$, qui est sur la droite Γ. □

Définition 21.105.
*Un **sommet** d'une courbe est un point d'extrémum local de la courbure.*

THOooFRBBooWKZcfY

Théorème 21.106 (Théorème des quatre sommets[128, 607])**.**
Soit un arc paramétrique $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ fermé, simple et convexe[31] *de classe C^3 et T-périodique.*
Alors γ possède au moins 4 points critiques sur chaque période.

Démonstration. Nous supposons que le paramétrage de γ soit normal.

Si la courbure κ est constante sur une partie ouverte de la (du paramétrage de la) courbe, alors tous les points de cette partie sont des sommets et le théorème est fait. Nous supposons que κ n'est pas constante et en particulier que Γ ne contient ni bouts de droites ni bouts de cercles (théorème 21.76).

La fonction κ étant de classe C^1 sur le compact Γ, elle admet au moins un maximum et un minimum distincts. Vu que ces points sont intérieurs, ils correspondent au changement de signe de κ'. Soient p et q ces points. Pour la simplicité nous supposons que γ est paramétré de telle sorte que $\gamma(0) = p$, et $q = \gamma(s_q)$ avec $0 < s_q < T$.

Nous supposons que p et q sont les seuls points de changement de signe de κ'.

Soit ℓ la droite passant par p et q. Tous les points du segment $[p, q]$ (qui sont dans $\mathcal{C}\text{onv}(\Gamma)$) ne peuvent pas être sur Γ (sinon nous aurions un morceau de droite). Donc certains points sont dans l'intérieur de

[31] Par la proposition 21.103 nous pouvons aussi bien demander à la courbure d'être toujours strictement positive, comme le fait [128].

$\mathcal{C}\text{onv}(\Gamma)$. Donc la droite ℓ passe par l'intérieur de $\mathcal{C}\text{onv}(\Gamma)$ et le corolaire 21.94 nous dit que la droite ℓ ne coupe Γ en seulement deux points.

Par conséquent, les ensembles $\gamma\big([0,s_q]\big)$ et $\gamma\big([s_q,T]\big)$ sont de part et d'autre de Γ. Vu qu'en ces points, κ' change de signe et qu'il ne change de signe en aucun autre points, la fonction κ' est positive d'un côté de ℓ et négative de l'autre.

D'autre part par le lemme 21.104, il existe $a\in\mathbb{R}^2$ et $c\neq 0$ tels que $z\in\ell$ si et seulement si $(z-a)\cdot c=0$. La fonction $z\mapsto (z-a)\cdot c$ est donc positive d'un côté de ℓ et négative de l'autre.

En résumé les fonctions

$$s\mapsto \kappa'(s) \tag{21.322a}$$
$$s\mapsto \big(\gamma(s)-a\big)\cdot c \tag{21.322b}$$

changent de signe en même temps et le produit a donc un signe constant. Ce produit n'est de plus pas nul parce que κ' n'est nul sur aucun intervalle (sinon κ y serait constant et Γ un segment de droite) et $\big(\gamma(s)-a\big)\cdot c$ ne s'annule pour aucun s sauf ceux qui correspondent à p et q.

Nous avons donc

$$0\neq \int_0^T \kappa'(s)\big(\gamma(s)-a\big)\cdot c\,ds \tag{21.323a}$$
$$= \underbrace{\Big[\big(\gamma(s)-a\big)\cdot c\kappa(s)\Big]_0^T}_{A=0} - \int_0^T \kappa(s)\gamma'(s)\cdot c\,ds \tag{21.323b}$$
$$= -\int_0^T \kappa(s)\big(\gamma'(s)\cdot c\big)ds \tag{21.323c}$$
$$= \int_0^T J\gamma''(s)\cdot c\,ds \tag{21.323d}$$
$$= J\int_0^T \gamma''(s)\cdot c\,ds \tag{21.323e}$$
$$= J\big[\gamma'(s)\cdot c\big]_0^T \tag{21.323f}$$
$$= 0. \tag{21.323g}$$

Justifications :

- L'expression A est nulle parce que les valeurs en 0 et en T sont identiques.
- Nous utilisons le lemme 21.75 pour faire $-\kappa(s)\gamma'(s)=J\gamma''(s)$.

Le tout est une contradiction de la forme $0\neq a=0$.

Nous avons donc au moins un troisième point de changement de signe de κ'. Vu que la courbe est périodique, il en faut un nombre pair et donc un quatrième. □

L'exemple de l'ellipse montre qu'il n'y a pas lieu de chercher d'autres extrémums de κ à part les 4 déjà trouvés.

Exemple 21.107.
Nous trouvons les sommets de l'ellipse.

$$\gamma(t)=\big(a\cos(t),b\sin(t)\big) \tag{21.324a}$$
$$\gamma'(t)=\big(-a\sin(t),b\cos(t)\big) \tag{21.324b}$$
$$\gamma''(t)=-\big(a\cos(t),b\sin(t)\big) \tag{21.324c}$$
$$\tag{21.324d}$$

La courbure est

$$\kappa(t)=\frac{\gamma''\cdot J\gamma'}{\|\gamma'\|^3} \tag{21.325a}$$
$$= \frac{-1}{[a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)]^{3/2}}\begin{pmatrix}a\cos(t)\\ b\sin(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-b\cos(t)\\ -a\sin(t)\end{pmatrix} \tag{21.325b}$$
$$= \frac{ab}{[a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)]^{3/2}}. \tag{21.325c}$$

Vu que $ab > 0$, les extrémums de cela sont ceux du dénominateur et il suffit donc d'étudier les extrémums de

$$f(t) = a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t). \tag{21.326}$$

Nous avons

$$f'(t) = 2(a^2 - b^2)\cos(t)\sin(t), \tag{21.327}$$

fonction qui s'annule effectivement 4 fois sur une période. Deux maximums et deux minima. △

21.13.6 Théorème d'Urysohn

LEMooWRLRooCdubfZ

Lemme 21.108.
Soit un espace topologique X. Soit une partie D dense de $[0,1]$. Nous considérons des ouverts $\{U_s\}_{s\in D}$ de X indexés par D. Nous supposons que si $s_1 < s_2$ alors $\bar{U}_{s_1} \subset U_{s_2}$. Enfin pour tout $x \in X$ nous posons

$$A_x = \{s \in D \text{ tel que } x \in U_s\}. \tag{21.328}$$

Alors l'application

$$\begin{aligned} f\colon X &\to [0,1] \\ x &\mapsto \begin{cases} \inf(A_x) & \text{si } x \in \bigcup_{s\in D} U_s \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{21.329}$$

est continue.

Démonstration. Dans la suite nous prenons les conventions suivantes :

$$\bigcup_{s\in\varnothing} U_s = \varnothing \tag{21.330a}$$

$$\bigcap_{s\in\varnothing} U_s = X \tag{21.330b}$$

$$\tag{21.330c}$$

Soit $t \in [0,1]$.

(1) $\{x \text{ **tel que** } f(x) < t\} = \bigcup_{s<t} U_s$ D'abord nous considérons $x \in X$ tel que $f(x) < t$, et nous prouvons que $x \in \bigcup_{\substack{s\in D\\ s<t}} U_s$. Vu que $f(x) = \inf(A_x) < t \leqslant 1$, il existe $s_0 < t$ tel que $s_0 \in A_x$. Pour ce s_0 nous avons $x \in A_{s_0}$, et donc

$$x \in U_{s_0} \subset \bigcup_{\substack{s\in D\\ s<t}} U_s. \tag{21.331}$$

Dans l'autre sens, soient $s_0 < t$ et $x \in U_{s_0}$. Nous avons $s_0 \in A_x$ et donc $f(x) \leqslant s_0 < t$.

(2) $\{x \text{ **tel que** } f(x) \leqslant t\} = \bigcup_{s>t} \bar{U}_s$ Si $t = 1$, alors $\{x \text{ tel que } f(x) \leqslant t\} = X$, et $\bigcap_{s>t} \bar{U}_s = \bigcup_{s\in\varnothing} \bar{U}_s = X$. Supposons que $t < 1$.

Soit $x \in X$ tel que $f(x) \leqslant t$. Vu que $t < 1$ et que D est dense dans $[0,1]$, il existe $s \in D$ tel que

$$s > t \geqslant f(x) = \inf(A_x). \tag{21.332}$$

Donc il existe $a \in A_x$ tel que $a \in]\inf(A_x), s[$. Vu que $a \in A_x$, nous avons $x \in U_a$, et vu que $a < s$, nous avons $\bar{U}_a \subset U_s$. Donc

$$x \in U_a \subset \bar{U}_a \subset U_s. \tag{21.333}$$

Donc $x \in U_s$ pour tout $s > t$ (dans D), et donc $x \in \bigcap_{s>t} \bar{U}_s$. Nous avons donc déjà prouvé que

$$\{x \text{ tel que } f(x) \leqslant t\} \subset \bigcap_{\substack{s\in D\\ s>t}} U_s. \tag{21.334}$$

Nous faisons à présent l'inclusion dans l'autre sens. Soit $x \in \bigcap_{\substack{s\in D\\ s>t}} \bar{U}_s$, et montrons que $f(x) \leqslant t$. Nous avons déjà traité le cas $t = 1$; nous continuous à supposer que $t < 1$.

Soit $\epsilon > 0$ assez petit pour avoir $t + \epsilon < 1$. Vu que D est dense dans $[0,1]$, il existe $s_1, s_2 \in D$ tels que

$$t < s_1 < s_2 < t + \epsilon. \tag{21.335}$$

Par hypothèse $x \in \bar{U}_{s_1}$ et donc

$$x \in \bar{U}_{s_1} \subset U_{s_2}. \tag{21.336}$$

Cela prouve que $s_2 \in A_x$, et nous avons alors

$$f(x) = \inf(A_x) \leqslant s_2 < t + \epsilon. \tag{21.337}$$

Étant donné que ϵ est arbitrairement petit, nous avons $f(x) \leqslant t$.

(3) $\{x$ **tel que** $f(x) < t\}$ **est ouvert pour tout** $t \in \mathbb{R}$ Nous commençons par $t \in [0,1]$. Dans ce cas nous avons vu que

$$\{x \text{ tel que } f(x) < t\} = \bigcup_{\substack{s \in D \\ s < t}} U_s \tag{21.338}$$

qui est une union d'ouverts, et donc qui est ouvert.

Si $t < 0$, alors

$$\bigcup_{s<t} U_s = \bigcup_{s \in \varnothing} U_s = \varnothing, \tag{21.339}$$

est ouvert. Si $t > 1$, alors $\{x \text{ tel que } f(x) < t\} = X$ parce que f prend ses valeurs dans $[0,1]$.

(4) $\{x$ **tel que** $f(x) \leqslant t\}$ **est fermé pour tout** $t \in \mathbb{R}$ Si $t \in [0,1]$, alors nous savons déjà que

$$\{x \text{ tel que } f(x) \leqslant t\} = \bigcup_{s>t} \bar{U}_s \tag{21.340}$$

qui est fermé comme intersection de fermés (lemme 7.6(1)). Vu que f prend ses valeurs dans $[0,1]$, nous avons $\{x \text{ tel que } f(x) < t\} = \varnothing$ lorsque $t < 0$ et $\{x \text{ tel que } f(x) < t\} = X$ lorsque $t > 1$.

f est contiue Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Nous avons,

$$f^{-1}\big(]a,b[\big) = \{f < b\} \setminus \{f \leqslant a\} = \{f < b\} \cap \{f \leqslant a\}^c. \tag{21.341}$$

Mais nous savons que $\{f < b\}$ est ouvert et que $\{f \leqslant a\}$ est fermé. Donc $f^{-1}\big(]a,b[\big)$ est ouvert comme intersection d'ouverts.

La proposition 7.188 dit (entre autres) que les $]a,b[$ forment une base de la topologie de $\mathbb{R}$. La proposition 7.47 dit que cela suffit pour conclure à la continuité de f.

□

THOooKYYEooLFcNpg

Théorème 21.109 (Théorème d'Urysohn[235])**.**
Soit un espace topologique normal X. Soient A et B, des fermés disjoints de X. Il existe une application continue $f\colon X \to [0,1]$ telle que $f|_A = 0$ et $f|_B = 1$.

Démonstration. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$ nous considérons $D_m = \{k/2^m\}_{k=0,\dots,2^m}$, et posons $D = \bigcup_{m=0}^{\infty} D_m$.

(1) D **est dense dans** $[0,1]$ Soient $x \in [0,1]$ et $\epsilon > 0$. Considérons m tel que $1/2^m < \epsilon$. Dans ce cas, il existe $s \in D_m$ tel que $|s - x| < \frac{1}{2^m} < \epsilon$.

(2) **Construction des** U_s Nous allons maintenant construire un ouvert U_s pour chaque $s \in D$. Et nous allons le faire de telle sorte d'avoir $s_1 < s_2 \Rightarrow \bar{U}_{s_1} \subset U_{s_2}$.

(3) **Pour** $s \in D_0$ Nous commençons avec les éléments de $D_0 = \{0,1\}$. D'abord nous posons

$$U_1 = B^c. \tag{21.342}$$

Vu que B est fermé, c'est un ouvert.

Pour construire U_0, nous remarquons que A est un fermé disjoint de B dans l'espace normal X. Il existe donc des ouverts U_0 et U_0' qui séparent A et B, c'est-à-dire tels que $A \subset U_0$, $B \subset U_0'$ et $U_0 \cap U_0' = \varnothing$.

Nous avons $\bar{U}_0 \subset B^c$. En effet si $a \in \bar{U}_0 \cap B$, alors $a \in B$ et donc U_0' est un voisinage ouvert de a. Ce voisinage n'intersectant pas U_0, a n'est pas dans la fermeture de U_0.

Nous avons donc bien la relation

$$\bar{U}_0 \subset B^c = U_1. \tag{21.343}$$

(4) **Récurrence** Nous avons défini U_s pour $s \in D_0$. Pour la récurrence, nous supposons que U_s est défini pour $s \in D_{m-1}$, et qu'ils vérifient la condition. Nous allons construire les U_s pour $s \in D_m$.

Remarquons que $D_{m-1} \subset D_m$. Plus précisément, les éléments de D_m qui ne sont pas dans D_{m-1} sont ceux de la forme $k/2^m$ avec k impair.

Soit donc k impair et considérons $s = k/2^m$. Par hypothèse de récurrence nous avons déjà

$$\bar{U}_{(k-1)/2^m} \subset U_{(k+1)/2^m}. \tag{21.344}$$

Le lemme 7.93 nous permet de considérer un ouvert U tel que

$$\bar{U}_{(k-1)/2^m} \subset U \subset \bar{U} \subset U_{(k+1)/2^m}. \tag{21.345}$$

Nous posons $U_{k/2^m} = U$ et nous prouvons que $\bar{U}_{s_1} \subset U_{s_2}$ dès que $s_1 < s_2$ dans D_m.

Soient $s_1 = k/2^m$ et $s_2 = l/2^m$ avec $k < l$. Il y a quatre possibilités suivant la parité de k et l.

(4a) **Si k et l sont pairs** Alors s_1 et s_2 sont dans D_{m-1} et l'hypothèse de récurrence dit $\bar{U}_{s_1} \subset U_{s_2}$.

(4b) **Si k est impair et l est pair** Nous notons $k = 2k' + 1$ et $l = 2l'$. Vu que $k < l$, nous avons $k' + \frac{1}{2} < l'$. Mais comme k' et l' sont entiers, nous avons $k' + 1 \leqslant l'$. Et nous sommes partis pour le calcul :

$$\begin{aligned}
\bar{U}_{s_1} &= \bar{U}_{k/2^m} && && (21.346a)\\
&\subset U_{(k+1)/2^m} && \text{construction pour } k \text{ pair} && (21.346b)\\
&= U_{(k'+1)/2^{m-1}} && && (21.346c)\\
&\subset U_{l'/2^{m-1}} && \text{hyp. rec. dans } D_{m-1} && (21.346d)\\
&= U_{l/2^m} && && (21.346e)\\
&= U_{s_2}. && && (21.346f)
\end{aligned}$$

(4c) **Si k est pair et l est impair** Laissé aux bons soins du lecteur. J'ai pas vérifié, mais [235] dit que c'est similaire. Écrivez-moi si vous voyez un problème.

(4d) **Si k et l sont impairs** Laissé aux bons soins du lecteur. J'ai pas vérifié, mais [235] dit que c'est similaire. Écrivez-moi si vous voyez un problème.

(5) **Résumé** Nous avons posé $D_m = \{k/2^m\}_{k=0,\dots,2^m}$, et $D = \bigcup_{m=0}^{\infty} D_m$. Nous avons prouvé que D est dense dans $[0,1]$, et nous avons construit, pour chaque $s \in D$ un ouvert U_s de X, de telle façon que

$$\bar{U}_{s_1} \subset U_{s_2} \tag{21.347}$$

pour tout $s_1 < s_2$. Bref, le lemme 21.108 est applicable. Nous posons donc

$$\begin{aligned}
f\colon X &\to [0,1]\\
x &\mapsto \begin{cases} \inf(A_x) & \text{si } x \in \bigcup_{s\in D} U_s\\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{21.348}$$

avec $A_x = \{s \in D \text{ tel que } x \in U_s\}$.

(6) **Ce f est ce qu'il nous fait** Si $x \in B$, alors x n'est pas dans U_1 et donc n'est dans aucun des U_s. Donc $f(x) = 1$.

Si $x \in A$, alors nous avons $x \in U_0$ (parce que $A \subset U_0$). En particulier $0 \in A_x$, et donc $f(x) = \inf(A_x) = 0$.

□

21.110.
Les fractions de la forme $a/2^b$ sont nommées **fractions dyadiques** et nous avons déjà vu qu'elles sont denses dans $\mathbb{R}$ dans le corolaire 1.561.

Chapitre 22

Géométrie hyperbolique

22.1 Inversion

LEMooNLYKooKBMdDk

Lemme-Définition 22.1.
Soit un cercle C et un point A du plan $\mathbb{R}^2$. Soit une droite passant par A et coupant C en deux points P et P' (pas spécialement distincts). Alors le nombre

$$\|AP\|\|AP'\| \tag{22.1}$$

*ne dépend pas du choix de la droite et est nommé la **puissance** du point A par rapport au cercle C.*

22.1.1 Cercles perpendiculaires

Définition 22.2.
*Deux cercles sont **perpendiculaires** lorsque leurs tangentes aux points d'intersection sont perpendiculaires.*

LEMooWMGOooAieUjD

Lemme 22.3 ([1]).
Soient deux cercles perpendiculaires C_1 et C_2. Alors

ITEMooJVYYooSrlSdA

(1) le centre de C_1 est hors de C_2.

ITEMooTQATooNWvllF

(2) Si ℓ est une droite passant par ce le centre de C_1 (nommé O) et si ℓ coupe C_2 en les deux points P et P', alors P et P' sont situés du même côté de O.

Démonstration. Nous nommons O_1 le centre de C_1 ainsi que Q et Q' les points d'intersection de C_1 avec C_2. Si ℓ_Q et $\ell_{Q'}$ sont les tangentes à C_1 en Q et Q', alors ce sont des rayons de C_2 (parce que les cercles sont perpendiculaires). Par conséquent le centre O_2 de C_2 est le point d'intersection $O_2 = \ell_Q \cap \ell_{Q'}$.

Le triangle O_1O_2Q est rectangle en Q et donc $\|O_1O_2\| > \|QO_2\|$. Or le nombre $\|QO_2\|$ est le rayon de C_2, donc O_1 est en dehors de C_2.

Ceci achève de prouver le point (1) ; nous démontrons le point (2). Les points Q et Q' sont sur le cercle C_2, donc tous les points du segment $[QQ']$ sont dans le cercle. Or le centre de C_1 doit être en dehors de C_2 ; il ne peut donc pas être dans le segment $[QQ']$, ce qui prouve que Q et Q' ne sont pas de part et d'autre de O sur la droite (OQQ'). □

PROPooYSVYooOFKxib

Proposition 22.4 ([1]).
Soit un cercle C_1 de centre O et de rayon R.

ITEMooWYIJooAAmXUl

(1) Un cercle C_2 est perpendiculaire à C_1 si et seulement si il existe une droite ℓ passant par O telle que les points d'intersection $\{P, P'\} = \ell \cap C_2$ soient situés du même côté de O et vérifient

$$\|OP\|\|OP'\| = R^2. \tag{22.2}$$

ITEMooYKZOooYZKyhF

(2) Dans ce cas, toutes les droites passant par O et coupant C_2 en deux points P, P' vérifient le fait que P et P' soient du même côté de O et $\|OP\|\|OP'\| = R^2$.

Démonstration. Nous commençons par prouver le point (2). Le fait que les points P et P' soient du même côté de O est le lemme 22.3(2). Pour la relation sur les distances, soit $Q \in C_1 \cap C_2$. Vu que C_1 et C_2 sont perpendiculaires, la droite (OQ) ne coupe C_2 qu'en ce point, et la puissance de O par rapport au cercle C_2 est $\|OQ\|^2 = R^2$.

La même puissance peut être calculée via la droite ℓ :

$$\|OP\|\|OP'\|. \tag{22.3}$$

Donc $\|OP\|\|OP'\| = R^2$.

Soit un cercle C_2 passant par P et P'. Notons que P et P' ne sont pas sur C_1 parce qu'ils ne pourraient pas être alignés avec O. De plus l'un est à l'intérieur de C_1 et l'autre à l'extérieur de C_1. Les cercles C_1 et C_2 possèdent donc deux points distincts d'intersections. La puissance de O par rapport à C_2 est :

$$\|OP\|\|OP'\| = R^2 \tag{22.4}$$

parce que (OP) est une droite coupant C_2 en les points P et P'.

Soit Q un point d'intersection de C_1 et C_2, et Q' l'autre point d'intersection de C_2 avec la droite (OQ). La puissance de O par rapport à C_2 peut également être calculée à partir de cette droite (lemme 22.1) et nous avons

$$\|OQ\|\|OQ'\| = R^2, \tag{22.5}$$

mais $Q \in C_1$, donc $\|OQ\| = R$ et partant $\|OQ'\| = R$. Nous en déduisons que $Q' \in C_1$ également. Or Q' ne peut pas être l'autre point d'intersection de C_1 avec C_2 (sinon O, Q, Q' ne seraient pas alignés). Donc $Q = Q'$ et nous déduisons que la droite (OQ) est tangente à C_2.

Le rayon de C_1 est tangent à C_2. Cela signifie que C_1 est perpendiculaire à C_2. □

22.1.2 Inversion

PROPDEFooVLIWooQgpLQa

Proposition-Définition 22.5 ([609]).
Soit un cercle C de centre O dans $\mathbb{R}^2$. Il existe une unique application

$$i_C \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \tag{22.6}$$

telle que

(1) $i_C(x) = x$ *pour tout* $x \in C$ ITEMooXLZCooEGAxHu

(2) i_C *échange l'intérieur et l'extérieur de* C. ITEMooCPPUooDJIzSk

(3) i_C *laisse invariants les droites et les cercles orthogonales à* C.

*Cette application est l'**inversion** de cercle C.*

Démonstration. Soit P à l'intérieur de C, mais différent de O. Nous notons ℓ la droite (OP) et nous considérons un cercle C_2 passant par P et perpendiculaire à C (existence par la proposition 22.4). Nous avons $\ell \perp C$ (parce que ℓ est un rayon) et $C_2 \perp C$. Donc $i_C(\ell) = \ell$ et $i_C(C_2) = C_2$ par l'exigence (3). Mais comme $P \in \ell \cap C_2$ nous avons aussi

$$i_C(P) \in \ell \cap C_2. \tag{22.7}$$

Mais ℓ et C_2 se coupent en exactement deux points. Vu que $i_C(P)$ doit être hors de C (exigence (2)), avoir $i_C(P) = P$ est impossible. Nous en concluons que $i_C(P)$ doit être l'autre intersection.

Nous avons prouvé que les conditions (2) et (3) fixent l'image d'un point situé dans l'intérieur de C.

Si P est extérieur au cercle C, la même procédure fonctionne : nous considérons la droite $\ell = (OP)$ et un cercle C_2 perpendiculaire à C et passant par P. Encore une fois, ces deux objets sont fixés par i_C, et vu que $i_C(P)$ doit être à l'intérieur de C, il est fixé.

L'unicité est montrée.

En ce qui concerne l'existence, si $P \neq O$, la procédure suivante donne P' :

- Soit la droite $\ell = (OP)$.
- Soit un cercle C_2 perpendiculaire à C et passant par P.
- Le point P' est le point de l'intersection $C_2 \cap \ell$ qui n'est pas P.

Il est aisé de vérifier que poser $i_C(P) = P'$ donne une application qui vérifie toutes les propriétés. □

NORMooUBFQooCzXRJj

22.6.
Nous recopions la construction de l'inversion d'un point par rapport à un cercle. Si C_1 est un cercle de centre O et P est un point différent de O, alors la procédure suivante construit $P' = i_{C_1}(P)$:

- Soit la droite $\ell = (OP)$.

- Soit un cercle C_2 perpendiculaire à C_1 et passant par P.
- Le point P' est le point de l'intersection $C_2 \cap \ell$ qui n'est pas P.

Que se passe-t-il si ℓ et C_2 n'ont qu'une seule intersection ? Alors la droite $\ell = (OP)$ est tangente à C_2. Or de O il n'existent que deux droites tangentes à C_2, et ce sont les rayons passant par les intersections parce que les cercles sont perpendiculaires. En d'autres mots, cette situation se présente lorsque P est sur le cercle C_1. Dans ce cas, $i_{C_1}(P) = P$.

Remarque 22.7.
Lorsque nous disons qu'une inversion « conserve les droites passant par O », il y a pour sous-entendu que nous considérons la droite privée du point O, parce que de toutes façons, l'inversion n'est pas définie sur O.

Nous allons résoudre cet intéressant problème en 23.6.1, en ajoutant le point ∞ à toutes les droites.

Corolaire 22.8.
L'inversion i_C est une involution ($i_C^2 = \mathrm{Id}$).

Démonstration. Soit un cercle C de centre O et un point P. Si C_2 est un cercle perpendiculaire à C passant par P, alors nous avons vu en 22.6 que $P' = i_C(P)$ est l'autre intersection entre C_2 et la droite (OP).

Pour construire l'image de P', il faut un cercle perpendiculaire à C passant par P'. Le cercle C_2 déjà utilisé fait l'affaire. Ensuite, la droite (OP') est la même que la droite (OP). Donc l'image de P' est P. □

Soit C_1 le cercle dans $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon 1. Nous notons $\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la dilatation de rapport R.

PROPooYHQVooVFamhr

Proposition 22.9 ([1]).
Soit C le cercle de rayon R centré en 0 ($C = \alpha(C_1)$). Alors

$$i_{\alpha(C_1)} \circ \alpha = \alpha \circ i_{C_1}. \tag{22.8}$$

Démonstration. Soit $z = re^{i\theta}$; nous devons prouver que

$$i_C\big(\alpha(z)\big) = \alpha\big(i_{C_1}(z)\big). \tag{22.9}$$

Nous avons :

$$i_C\big(\alpha(z)\big) = i_C(Rre^{i\theta}) = R^2\frac{1}{Rr}e^{i\theta} = R\frac{1}{r}e^{i\theta} = \alpha\big(\frac{1}{r}e^{i\theta}\big) = \alpha\big(i_{C_1}(z)\big). \tag{22.10}$$

□

La définition 23.70 pour l'inversion sur $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sera basée sur la proposition suivante.

PROPooEWXNooNshvHq

Proposition 22.10 ([1]).
Soit le cercle de rayon R et de centre $a \in \mathbb{C}$. Alors

$$i_C(z) = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a. \tag{22.11}$$

EQooEQEFooHtJuje

De plus si t_a est la translation de vecteur a, nous avons la décomposition

$$i_{t_a(C_R)} = t_a \circ i_{C_R} \circ t_{-a} \tag{22.12}$$

où C_R est le cercle de rayon R centré en 0.

Démonstration. Si $z \in \mathbb{C}$ et z' est son image par i_C, alors non seulement

$$\|a - z'\|\|a - z\| = R^2, \tag{22.13}$$

mais en plus $a - z' = \lambda(a - z)$ pour un certain $\lambda > 0$. Cela est l'expression du fait que z' est sur la demi-droite qui joint a à z. Nous avons donc

$$\lambda\|a - z\|^2 = R^2 \tag{22.14}$$

et alors

$$\lambda = \frac{R^2}{(a - z)(\bar{a} - \bar{z})}. \tag{22.15}$$

En récrivant $a - z' = \alpha(a - z)$ avec cette valeur de λ nous trouvons

$$a - z' = \frac{R^2}{\overline{a - z}}, \tag{22.16}$$

ce qu'il fallait démontrer.

La décomposition demandée est une simple vérification en utilisant $i_{C_R}(z) = \frac{R^2}{\bar{z}}$ qui découle de la proposition 22.9. □

Avant d'aller plus loin, donnons l'équation d'un cercle dans $\mathbb{C}$. Si C est un cercle de centre ω et de rayon r, alors $z \in C$ si et seulement si $d(z,\omega) = r$. En développant, et en passant au carré sans perte d'information (les deux membres sont positifs), $z \in C$ si et seulement si

$$(z-\omega)(\bar{z}-\bar{\omega}) = r^2. \tag{22.17}$$

En développant nous pouvons aussi écrire l'équation du cercle sous la forme

$$z\bar{z} - z\omega - \bar{z}\omega = r^2 - \omega\bar{\omega}. \tag{22.18}$$

EQooWZVRooXcjOsA

PROPooMIMRooTbQRVI

Proposition 22.11 ([609]).
Soit un cercle C de centre O. L'inversion

$$i_C \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \tag{22.19}$$

transforme

ITEMooNOXMooQYNPnv

(1) les droites passant par O en elles-mêmes ;

(2) les cercles passant par O en des droites ne passant pas par O ;

ITEMooRFPSooGdJdHD

(3) les droites ne passant pas par O en des cercles passant par O ;

(4) les cercles ne passant pas par O en des cercles ne passant pas par O.

Démonstration. Point par point.

(1) Une droite passant par O est une droite perpendiculaire à C. Par le point (3) de la définition 22.5, elle est invariante.

(2) Nous construisons successivement :

- Un cercle C_1 de centre O_1 et passant par O. Le but est de déterminer l'image de ce cercle.
- Le point P de C_1 tel que $[OP]$ en soit un diamètre.
- Le point $P' = i_C(P)$.
- La droite ℓ perpendiculaire à (OP) et passant par P'.

Nous montrons maintenant que $i_C(C_1 \setminus \{O\}) = \ell$. Soit $Q \in C_1 \setminus \{P, O\}$. Nous posons

$$Q' = (QO) \cap \ell. \tag{22.20}$$

Vu que $[OP]$ est un diamètre de C_1 et que $Q \in C_1$, le triangle OPQ est rectangle en Q. Et étant donné que Q' est sur ℓ nous savons que $OP'Q'$ est rectangle en P'.

De plus les angles en O de ces deux triangles sont identiques (parce que c'est l'angle formé par les droites (OQ) et (OP)) ; les triangles OPQ et $QP'Q'$ sont donc semblables et nous pouvons utiliser le théorème de Thalès[1] 12.169 :

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}. \tag{22.21}$$

Donc

$$\|OP\|\|OP'\| = \|OQ\|\|OQ'\|, \tag{22.22}$$

mais P' est l'image de P par l'inversion du cercle C, c'est-à-dire $\|OP\|\|OP'\| = R^2$. Nous en déduisons que

$$\|OQ\|\|OQ'\| = R^2, \tag{22.23}$$

c'est-à-dire que Q' est l'image de Q par i_C, et donc que

$$i_C\big(C_1 \setminus \{O\}\big) \subset \ell. \tag{22.24}$$

EQooPJBGooGeIVQQ

Pour avoir l'inclusion inverse, il faut remarquer que ℓ est parallèle à la tangente à C_1 en O. Donc si $Q \in \ell$, la droite (OQ) intersecte le cercle C_1 en un point Q'. En refaisant le cheminement du résultat (22.24) à l'envers, il est loisible de prouver que $i_C(Q') = Q$ et donc que ℓ est bien incluse à l'image de C_1 par i_C.

[1] Faites bien le dessin : ce n'est pas une situation de Thalès ultra-standard de collège.

(3) Nous commençons par prouver que toutes les droites ne passant pas par O sont des images de cercles passant par O.

Nous considérons :

- une droite ℓ ne passant pas par O.
- la droite d, perpendiculaire à ℓ passant par O
- le point $P' = \ell \cap d$,
- le point $P = i_C(P')$,
- le cercle C_1 dont $[OP]$ est un diamètre.

Par tout ce que nous avons fait jusqu'à présent, la droite ℓ est l'image du cercle C_1. Or si $\|OP\| = r$ alors

$$\|OP'\| = \frac{R^2}{r}. \tag{22.25}$$

Donc quelle que soit la valeur de $\|OP'\|$ dans $]0, \infty[$, il existera un point P tel que le cercle passant par O et P ait pour image la droite perpendiculaire à (OP) passant par $i_C(P)$.

Étant donné que i_C est une involution surjective des cercles passant par O vers les droites ne passant pas par O, elle transforme également toutes les droites ne passant pas par O en un cercle passant par O.

(4) Pour cette partie, nous allons utiliser un peu de géométrie analytique dans $\mathbb{C}^2$.

(4a) **Le cas centré** Nous supposons que C est centré en 0 et de rayon, 1, ce telle sorte que $i_C(z) = 1/\bar{z}$ (proposition 22.10). Soit C_1 un cercle de centre ω et de rayon r, ne passant pas par 0, en particulier tel que $|\omega| \neq r$.
Si $z \in i_C(C_1)$ alors $i_C(z) \in C_1$ et nous avons

$$\big(i_C(z) - \omega\big)\overline{\big(i_C(z) - \omega\big)} = r^2. \tag{22.26}$$

En développant et en multipliant par $z\bar{z}$ nous trouvons

$$\bar{\omega}z + \omega\bar{z} + z\bar{z}(r^2 - \omega\bar{\omega}) = 1. \tag{22.27}$$

EQooCWXSooUziRNr

ou, en posant $s = r^2 - \omega\bar{\omega}$,

$$z\bar{\omega} + \bar{z}\omega + sz\bar{z} = 1. \tag{22.28}$$

En comparant avec l'équation (22.18) d'un cercle, nous voyons qu'il y a de l'espoir de montrer que z est sur un cercle centré en $a = -\omega/s$. En effet, en divisant par s et en substituant a comme il faut, nous trouvons

$$-z\bar{a} - \bar{z}a + a\bar{z} = \frac{1}{s}. \tag{22.29}$$

En ce qui concerne le rayon R, il doit vérifier

$$\frac{1}{s} = R^2 - a\bar{a}, \tag{22.30}$$

ou encore

$$R = \frac{1}{s} + \frac{\omega\bar{\omega}}{s^2}. \tag{22.31}$$

Nous dévons vérifier que $R > 0$. En multipliant par s^2, il s'agit de vérifier que $s + \omega\bar{\omega} \geqslant 0$, ce qui est correct parce que $s + \omega\bar{\omega} = r^2$.
En résumé, si $z \in i(C_1)$ alors z est dans le cercle C_2 de centre $-\frac{\omega}{s}$ et de rayon R. Nous voysons que ce cercle ne passe pas par 0 par exemple directement sur l'équation (22.27) qui, pour $z = 0$ donne $0 = 1$.
Nous avons prouvé que $i(C_1) \subset C_2$. Pour prouver l'inclusion inverse, vu que i est une involution, il faut prouver $i(C_2) \subset C_1$. Pour cela nous écrivons l'équation qui donne $i(z) \in C_2$ et en développant nous devons conclure que $z \in C_1$. Nous ne le faisons pas ici.

(4b) **Le cas de rayon non unité**
Si C est un cercle quelconque, nous écrivons l'inversion du cercle C via la formule (22.11). Si $z \in i_C(C_1)$ alors $i(z) \in C_1$ et nous pouvons écrire

$$\big(i(z) - a\big)\big(\overline{i(z)} - \bar{a}\big) = R^2. \tag{22.32}$$

De là il faut déduire que z est sur un cercle ne passant pas par 0. Bons calculs…

□

[2] Principalement parce que je ne comprends pas le raisonnement fait dans [609].

Chapitre 23

Espaces projectifs

Sur les espaces projectifs : [677].

Définition 23.1.
*Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps commutatif $\mathbb{K}$. Nous définissons sur $E \setminus \{0\}$ la relation d'équivalence $u \sim v$ si et seulement si $u = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. Cette relation est la relation de **colinéarité**. L'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$ est l'**espace projectif** de E et sera noté $P(E)$.*
DEFooTPPMooTDxNpg

Définition 23.2.
*Si $\dim E = 2$, l'ensemble $P(E)$ est la **droite projective**, et si $\dim E = 3$ nous parlons du **plan projectif**.*

Étant donné que tous les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions $n+1$ sont isomorphes à $\mathbb{K}^{n+1}$, nous noterons $P_n(\mathbb{K})$ ou P_n l'espace projectif $P(\mathbb{K}^{n+1})$. PgNotimesjNtMoW

Exemple 23.3.
Si $n = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'espace projectif est l'ensemble des droites vectorielles dans le plan usuel. Il y en a une pour chaque point du type $(x, 1)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et ensuite une horizontale, passant par le point $(1, 0)$. Nous avons donc

$$P_1(\mathbb{R}) = \{(1, 0)\} \cup \{(x, 1) \text{ tel que } x \in \mathbb{R}\}. \tag{23.1}$$

Le point $(1, 0)$ est dit « point à l'infini ». △

23.1 Sous-espaces projectifs

Un **sous-espace projectif** de $P(E)$ est une partie de la forme $P(F)$ où F est un sous-espace vectoriel de E.
PropuqpWVx

Proposition 23.4.
Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors

$$P(F) \cap P(G) = P(F \cap G) \tag{23.2}$$

et nous avons

$$\dim P(F) + \dim P(G) = \dim P(F + G) + \dim P(F \cap G). \tag{23.3}$$
EqNAdWfN

Démonstration. Nous avons

$$P(F) = \{[v] \text{ tel que } v \in F\} \tag{23.4}$$

où les crochets signifient la classe par rapport à la relation de colinéarité. Nous avons alors

$$P(F) \cap P(G) = \{[v] \text{ tel que } v \in F \cap G\} = P(F \cap G). \tag{23.5}$$

Cela prouve le premier point.

En ce qui concerne l'équation (23.3), en considérant $\dim P(E) = \dim E - 1$ nous devons prouver l'égalité

$$\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G) \tag{23.6}$$

concernant les dimensions des espaces vectoriels usuelles. Si nous considérons une base de E telle que $B_1 = \{e_1, \ldots, e_{k_1}\}$ est une base de $F \cap G$, $B_2 = \{e_{k_1+1}, \ldots, e_{k_2}\}$ complète B_1 en une base de F et $B_3 = \{e_{k_2+1}, \ldots, e_n\}$ complète $B_1 \cup B_2$ en une base de G.

Nous avons alors

$$\dim F + \dim G = 2\operatorname{Card}(B_1) + \operatorname{Card}(B_2) + \operatorname{Card}(b_3) \tag{23.7a}$$
$$\dim(F + G) = \operatorname{Card}(B_1) + \operatorname{Card}(b_2) + \operatorname{Card}(B_3) \tag{23.7b}$$
$$\dim(F \cap G) = \operatorname{Card}(B_1). \tag{23.7c}$$

De là la relation (23.3) se déduit immédiatement. □

Théorème 23.5 (incidence)**.**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que

$$\dim P(F) + \dim P(G) \geqslant \dim P(E). \tag{23.8}$$

Alors $P(F) \cap P(G) \neq \varnothing$.

Démonstration. En utilisant les hypothèses et la proposition 23.4 nous avons

$$\dim P(E) + \dim P(G) = \dim P(F + G) + \dim P(F \cap G) \geqslant \dim P(E). \tag{23.9}$$

En passant aux espaces vectoriels correspondants,

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) \geqslant \dim(E) + 1. \tag{23.10}$$

Mais nous avons aussi $\dim(F+G) \leqslant \dim(E)$ et par conséquent $\dim(F\cap G) \geqslant 1$. Au final, $\dim P(F\cap G) \geqslant 0$. Cela prouve que $P(F \cap G)$ contient au moins un élément (nous rappelons que lorsqu'un espace projectif contient un seul élément, sa dimension est zéro). □

Exemple 23.6.
Soient les plans $\Pi_1 \equiv x = 0$ et $\Pi_2 \equiv y = 0$. Nous avons

$$P(\Pi_1) = \{[0, y, 1]\} \cup \{[0, 1, 0]\} \tag{23.11a}$$
$$P(\Pi_2) = \{[x, 0, 1]\} \cup \{[1, 0, 0]\} \tag{23.11b}$$

où le crochet signifie la classe pour la colinéarité. Ces deux droites projectives ont comme point d'intersection le point $[0, 0, 1]$. △

Définition 23.7.
*Un **hyperplan projectif** est un sous-espace projectif de $P(E)$ de la forme $P(V)$ où V est un hyperplan de E.*

DEFooBBMBooSVgTnn

Définition 23.8.
*Soit E un espace vectoriel de dimension au moins 3. Nous disons que $d \subset P(E)$ est une **droite projective** de $P(E)$ si $d = P(D)$ pour un plan vectoriel $D \subset E$.*

*Nous disons que trois points de $P(E)$ sont **alignés** lorsqu'il existe une droite projective les contenant.*

23.9.
Dans la définition 23.8 nous voyons $P(D)$ comme inclus dans $P(E)$ dès que D est un sous-espace vectoriel de E. Cela est possible parce que si la direction de $v \in D$, c'est-à-dire la classe $[v]$ est également une direction dans E.

Le lemme suivant peut paraitre idiot, mais ce qui serait surement idiot est de l'utiliser sans s'en rendre compte.

Lemme 23.10.
Deux points dans $P(E)$ sont toujours alignés.

Démonstration. Soient deux points $A, B \in P(E)$. Si $A = \pi(a)$ et $B = \pi(b)$ alors le plan D passant par a, b et 0 est vectoriel et $P(D)$ contient A et B.

Note : si a, b et 0 sont trois points alignés, alors $A = B$. Il suffit de prendre les points a, c et 0 où $c \in E$ est un point quelconque non aligné avec 0 et a. Nous avons de toutes façons $A = B = \pi(a)$. □

Lemme 23.11.
Trois points distincts A, B, C dans $P(E)$ sont alignés si et seulement si il existe trois points non alignés $a, b, c \in E$ tels que

(1) le plan passant par a, b et c est vectoriel (c'est-à-dire passe par 0),

(2) $A = \pi(a)$, $B = \pi(b)$, et $C = \pi(c)$.

Démonstration. Deux implications à montrer.

(1) **Sens direct** Soient A, B, C distincts et alignés dans $P(E)$. Alors il existe un plan vectoriel D tel que $A, B, C \in P(D)$.

La condition $A \in P(D)$ implique qu'il existe $a \in D$ tel que $A = \pi(A)$. Idem pour B et C. Les points a, b et c ainsi construits sont distincts parce que A, B et C sont distincts. Si par malheur ces trois points étaient alignés, ce n'est pas grave : il suffit de remplacer a par λa avec $\lambda \neq 0$ pour qu'ils ne le soient plus (cette manipulation ne change pas le fait que le nouveau choix de point a reste dans D parce que D est vectoriel). Nous avons donc trois points non alignés a, b et c tous contenus dans D. Le plan D répond à la question.

(2) **Sens réciproque**

Soient a, b et c non alignés dans E tels que $A = \pi(a)$, $B = \pi(b)$ et $C = \pi(c)$. Le plan D les contenant tous trois est vectoriel par hypothèse. Nous avons $A, B, C \in P(D)$ et donc A, B et C sont alignés dans $P(E)$.

□

Proposition 23.12.
Soit $H = P(V)$ un hyperplan projectif de $P(E)$ et soit m hors de H. Alors toute droite projective passant par m coupe H en un et un seul point.

Démonstration. Si $\dim E = n$ nous avons $\dim V = n - 1$. Soit $d = P(D)$ une droite projective passant par m, c'est-à-dire que D est de dimension 2 dans E. Si $D \subset V$ alors $m \in P(D) \subset P(V)$; or nous avons demandé que m soit hors de $P(V)$. Par conséquent D n'est pas inclus dans V et en particulier $\dim(D+V) = \dim(E)$.

Nous recopions la formule (23.3) pour notre cas :

$$\underbrace{\dim d}_{=1} + \underbrace{\dim H}_{=n-2} = \underbrace{\dim P(D+V)}_{=n-1} + \dim P(D \cap V). \tag{23.12}$$

Nous avons donc $\dim P(D \cap V) = 0$, ce qui signifie que l'ensemble $P(D \cap V) = P(D) \cap P(V) = d \cap H$ contient un et un seul point. □

23.2 Espace projectifs comme « complétés » d'espaces affines

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $P(E)$ la droite projective correspondante, et soit $\{e_1, e_2\}$ une base de E. Nous considérons la droite affine $d \equiv y = 1$. Nous avons la bijection

$$\begin{aligned} \phi\colon d \cup \{\infty\} &\to P(E) \\ (x,1) &\mapsto \text{la droite vectorielle passant par } (x,1) \\ \infty &\mapsto \text{la droite vectorielle passant par } (1,0). \end{aligned} \tag{23.13}$$

EqyrfDLz

Lemme 23.13.
Si nous munissons l'ensemble $d \cup \{\infty\}$ de la topologie compactifiée d'Alexandrov[1]*, la bijection (23.13) est un homéomorphisme.*

Soient maintenant les plans affines dans l'espace vectoriel E de dimension 3

$$\Pi_1 \equiv z = 0 \tag{23.14a}$$
$$\Pi_2 \equiv z = 1. \tag{23.14b}$$

Une droite (vectorielle) de E coupe Π_2 en un et un seul point, sauf si elle est contenue dans Π_1. Nous avons donc une bijection

$$\begin{aligned} \phi\colon P(E) &\to \Pi_2 \cup P(\Pi_1) \\ d &\mapsto \begin{cases} \Pi_2 \cap d & \text{si cette intersection est non vide} \\ d & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{23.15}$$

[1] Définition 7.185.

La droite projective $P(\Pi_1)$ est la droite à l'infini du plan projectif $P(E)$. Nous voyons que le plan projectif $P(E)$ peut être vu comme un plan affine (Π_2) « complété » par une droite affine $P(\Pi_1)$. Cette dernière droite est elle-même une droite affine complétée par un point à l'infini.

Nous pouvons généraliser cette démarche en considérant un espace affine $\mathcal{E}$ de direction E sur le corps $\mathbb{K}$. Nous construisons $F = E \times \mathbb{K}$ et nous considérons un repère affine sur F tel que $E \equiv x_{n+1} = 0$. Nous pouvons donc identifier $\mathcal{E}$ à l'hyperplan affine d'équation $x_{n+1} = 1$ dans F.

Une droite vectorielle de F non contenue dans E coupe $\mathcal{E}$ en un unique point ; nous avons donc une bijection

$$\mathcal{E} \cup P(E) \to P(F). \tag{23.16}$$

Dans ce cadre, $P(E)$ est l'hyperplan à l'infini et nous disons que $P(E)$ est la **complétion projective** de $\mathcal{E}$.

Exemple 23.14.
Nous considérons les plans affines

$$\Pi_1 \equiv z = 0 \tag{23.17a}$$
$$\Pi_2 \equiv z = 1 \tag{23.17b}$$

et nous avons la bijection

$$P(E) = \Pi_2 \cup P(\Pi_1). \tag{23.18}$$

Un plan vectoriel D a deux possibilités : soit il coupe Π_2 en une droite, soit il est égal à Π_1. Si $D \cap \Pi_2 = d$ (d est une droite affine), alors nous avons

$$P(D) = d \cup \{\infty_D\}, \tag{23.19}$$

ce qui justifie la terminologie comme quoi $P(D)$ est une droite dans $P(E)$. △

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et le plan projectif $P(E)$. Nous avons deux types de droites projectives :

(1) D'abord nous avons la droite à l'infini, donnée[2] par $P(z = 0)$.

(2) Ensuite nous avons toutes les droites affines du plan $z = 1$. Chacune de ces droites est complétée par un point à l'infini.

ExempMyTmFp

Exemple 23.15.
Étudions un peu le second type de droites. D'abord si deux droites sont parallèles, leurs points à l'infini sont identiques. Prenons par exemple les droites $d = \{z = 1, x = 1\}$ et $d' = \{z = 1, x = 2\}$. Elles décrivent les directions des vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{23.20}$$

En normalisant, ce sont les vecteurs

$$\frac{1}{\sqrt{2+y^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{5+y^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{23.21}$$

et toutes deux tendent vers le vecteur $(0, 1, 0)$ pour $y \to \infty$. △

Lemme 23.16.
Deux droites d'un plan projectif ont toujours une intersection.

Démonstration. Si les deux droites sont des droites affines non parallèles, le résultat est évident. Si elles sont parallèles, alors l'intersection est donnée par le point à l'infini comme indiqué dans l'exemple 23.15.

Supposons que d est la droite à l'infini tandis que d' est une droite affine. Dans notre représentation usuelle du plan affine, la droite à l'infini d a contient les vecteurs $(1, y, 0)$ et le point à l'infini $(0, 1, 0)$. La droite affine d' a pour équation paramétriques

$$\begin{cases} x = at + c & (23.22a) \\ y = bt + d & (23.22b) \\ z = 1. & (23.22c) \end{cases}$$

[2] Dans notre représentation usuelle du plan projectif $z = 1$.

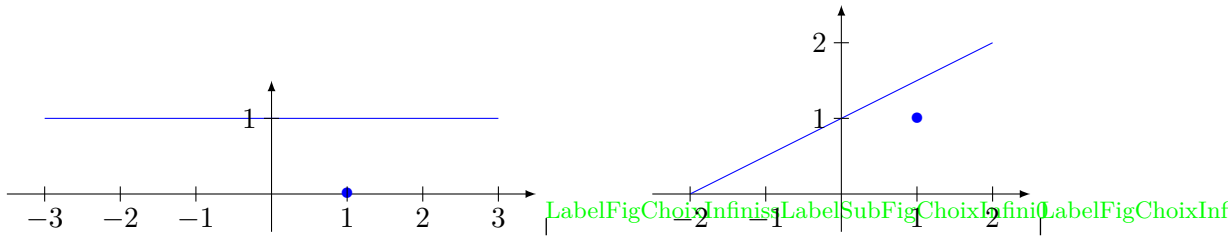
Les directions données par la droite d' sont donc

$$\frac{1}{a^2t^2+b^2t^2+c^2+d^2}\begin{pmatrix}at+c\\bt+d\\1\end{pmatrix} \tag{23.23}$$

Son point à l'infini est la direction du vecteur $(a,b,0)$, qui est bien un point de la droite à l'infini (éventuellement son point à l'infini[3]). □

La plupart du temps nous considérons le plan projectif comme étant le plan affine $z=1$ de l'espace affine de dimension 3 complété par la droite affine $x=1, z=0$, elle-même complétée par le point $(0,1,0)$. Ce n'est évidemment pas la seule manière. Tout plan peut être considéré comme le plan à l'infini et pour une droite projective, tout point peut être considéré comme point à l'infini.

Sur la figure 23.1(a), le point à l'infini est la direction $(1,0)$ tandis que la direction $(1,1)$ n'a rien de spécial. À l'inverse sur la figure 23.1(b), la direction à l'infini est $(1,1)$ tandis que la direction $(1,0)$ est une direction usuelle.



(a) Ici le point à l'infini est la direction $(1,0)$.

(b) Ici le point à l'infini est la direction $(1,1)$.

FIGURE 23.1 : Deux façons de voir la droite projective. Étant donné que les points de la droite projective doivent être interprétés comme des directions (des classes d'équivalence), en réalité les deux dessins représentent les mêmes ensembles. LabelFigChoixInfini

Remarque 23.17.
Du point de vue de la topologie, si nous mettons celle de la compactification d'Alexandrov, tous les points de la droite projective sont équivalents.

Du point de vue de la géométrie différentielle, c'est la même chose. En effet nous pouvons mettre sur la droite projective un système de deux cartes en pensant aux angles. La première sur $]-a,a[$ avec par exemple $a<\pi/4$. La seconde carte serait $]a/2,\pi[$. Dans ce cas la direction $\theta=0$ semble jouer un rôle spécial, mais il n'en est rien.

Nous pouvons également considérer les cartes $]\pi/4-a,\pi/4+a[$ et $]\pi/4+a/2,5\pi/4[$. Dans ces cartes, c'est plutôt le point $\theta=\pi/4$ qui semble différent (encore qu'il soit bien centré dans une carte).

23.3 Théorème de Pappus

Théorème 23.18.
Soient deux droites d et d' dans un plan affine. Soient $A,B,C\in d$ et $A',B',C'\in d'$ tels que $AB'\parallel BA'$ et $BC'\parallel B'C$. Alors $AC'\parallel A'C$.

Démonstration. Si d et d' ne sont pas parallèles nous considérons o, le point d'intersection. Les relations de parallélisme des hypothèses impliquent qu'il existe λ_1 et λ_2 tels que

$$\begin{cases} A=\lambda_1 B & (23.24a)\\ B'=\lambda_1 A' & (23.24b)\end{cases}$$

et

$$\begin{cases} B'=\lambda_2 C' & (23.25a)\\ C=\lambda_2 B. & (23.25b)\end{cases}$$

En substituant nous trouvons

$$\begin{cases} C=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}A & (23.26a)\\ A'=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}C', & (23.26b)\end{cases}$$

[3] D'accord, aller chercher le point à l'infini de la droite à l'infini, c'est chercher loin, mais n'empêche que ça existe.

ce qui implique que $A'C \parallel AC'$.

Si les droites d et d' sont parallèles, alors nous avons les translations

$$\begin{cases} B = A + x & (23.27a) \\ A' = B' + x & (23.27b) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} B = C + y & (23.28a) \\ C' = B' + y, & (23.28b) \end{cases}$$

ce qui montre que

$$\begin{cases} C = A + x - y & (23.29a) \\ A' = C' + x - y, & (23.29b) \end{cases}$$

et donc que $A'C \parallel AC'$. □

Le théorème suivant est une version projective.

Théorème 23.19.
Soient d et d' deux droites projectives d'un plan projectif. Soient $A, B, C \in d$ et $A', B', C' \in d'$. Alors les points $B'C \cap C'B$, $C'A \cap A'C$ et $A'B \cap B'A$ sont alignés.

Démonstration. Soient $E = B'C \cap C'B$ et $E' = C'A \cap A'C$. Ces deux points existent parce que deux droites projectives distinctes ont toujours un unique point d'intersection. Nous allons prendre EE' comme droite à l'infini et prouver que le point $A'B \cap B'A$ est dessus. Étant donné que le point d'intersection de $B'C$ et $C'B$ est à l'infini nous avons $B'C \parallel C'B$ (cela est un exemple de la flexibilité de la notion de parallélisme en géométrie projective). De la même façon nous avons $C'A \parallel A'C$.

Par le théorème de Pappus affine nous avons alors $A'B \parallel B'A$ et par conséquent le point d'intersection est sur la droite à l'infini, c'est-à-dire sur la droite EE'. □

23.4 Homographies

23.4.1 Homographies

DEFooKWSMooXvOeEP

Définition 23.20.
Soient E et F deux espaces vectoriels avec leurs projections naturelles

$$\pi_E : E \setminus \{0\} \to P(E) \quad (23.30a)$$
$$\pi_F : F \setminus \{0\} \to P(F). \quad (23.30b)$$

*Une application $g : P(E) \to P(F)$ est une **homographie** si il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\bar{g} : E \to F$ tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \xrightarrow{\bar{g}} & F \setminus \{0\} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} \\ P(E) & \xrightarrow[g]{} & P(F) \end{array} \quad (23.31)$$

commute, c'est-à-dire si il existe $\bar{g} : E \to F$ telle que

$$\pi_F\big(\bar{g}(v)\big) = g\big(\pi_E(v)\big) \quad (23.32)$$

EQooSEFWooRpjLxt

pour tout $v \in E$.

Lemme 23.21.
Si $\bar{g} : E \to F$ est linéaire et si $\ker \bar{g} = \{0\}$ alors l'application g définie par

$$g\big(\pi_E(v)\big) = \pi_F\big(\bar{g}(v)\big) \quad (23.33)$$

EqRlGIJW

est une homographie.

Démonstration. Nous devons simplement vérifier que l'équation (23.33) définit bien une application. Soient $v, w \in E$ tels que $\pi_E v = \pi_E w$; nous devons montrer que

$$\pi_F \bar{g} v = \pi_F \bar{g} w. \tag{23.34}$$

L'équation (23.34) sera vérifiée si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{g}v = \lambda \bar{g} w$, c'est-à-dire si et seulement si $\bar{g}(v - \lambda w) = 0$. Étant donné que nous supposons que le noyau de $\bar{g}$ est réduit à $\{0\}$, l'équation (23.34) sera vérifiée si et seulement si $v = \lambda w$, ce qui signifie exactement $\pi_E(v) = \pi_E(w)$. □

La proposition suivante donne les premières propriétés des homographies.

Proposition 23.22.
Quelques propriétés des homographies.

(1) Une homographie est bijective.

(2) Si deux espaces projectifs sont homographes, alors ils ont même dimension.

(3) L'ensemble des homographies $P(E) \to P(E)$ est un groupe (pour la composition).

(4) Une homographie conserve l'alignement des points.

Démonstration. Nous considérons une homographie $g\colon P(E) \to P(F)$, et $\bar{g}$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels correspondant.

(1) Pour l'injectivité, si $g\big([v]\big) = g\big([w]\big)$ alors en utilisant la définition d'une homographie, $\pi_F \bar{g} v = \pi_F \bar{g} w$, ce qui implique que $\bar{g}v = \lambda \bar{g} w$, et donc $v = \lambda w$, ce qui signifie $[v] = [w]$.

Pour la surjectivité, un élément général de $P(F)$ prend la forme $\pi_F \bar{g} v$ pour un certain $v \in E$. Nous avons $g\big(\pi_E v\big) = \pi_F \bar{g} v$. Par conséquent l'élément $\pi_F \bar{g} v$ est bien dans l'image de g.

(2) Une homographie $P(E) \to P(F)$ n'existe que si il existe un isomorphisme $E \to F$. Les dimensions sont donc automatiquement égales.

(3) Il suffit de vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon P(E) &\to P(E) \\ \pi_F \bar{g} v &\mapsto \pi_E v \end{aligned} \tag{23.35}$$

est bien définie et donne l'inverse de g.

(4) Soient les points A, B, C alignés dans $P(E)$; ils correspondent à des directions de E qui sont données par des vecteurs situés sur la même droite affine. Autrement dit, il existe trois points $a, b, c \in E$ situés sur la même droite affine tels que $A, B, C = \pi_E(a, b, c)$. Les images par g sont données par $\pi_F \bar{g} a$, $\pi_F \bar{g} b$, et $\pi_F \bar{g} c$.

Étant donné qu'un isomorphisme d'espaces vectoriels conserve l'alignement affin, les points $\bar{g}a$, $\bar{g}b$ et $\bar{g}c$ sont alignés dans F. Cela implique que les projections par π_F sont alignés dans $P(F)$.

□

23.4.2 Le groupe projectif

Définition 23.23.
Le groupe des homographies de l'espace $P(E)$ est le ***groupe projectif****, noté* $\mathrm{PGL}(E)$.

Nous avons une surjection naturelle

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(E) &\to \mathrm{PGL}(E) \\ \bar{g} &\mapsto g \end{aligned} \tag{23.36}$$

qui s'avère être un morphisme de groupes.

Proposition 23.24.
Nous avons l'isomorphisme de groupes

$$\frac{\mathrm{GL}(E)}{\{\textit{homothéties}\}} \simeq \mathrm{PGL}(E). \tag{23.37}$$

Démonstration. Nous devons prouver que le noyau de l'application (23.36) est constitué des homothéties. Considérons un automorphisme d'espace vectoriel $f: E \to E$ dont l'homographie associée est l'identité, et prouvons que f est une homothétie. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E\setminus\{0\} & \xrightarrow{f} & E\setminus\{0\} \\ {\scriptstyle\pi_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_E} \\ P(E) & \xrightarrow[\mathrm{Id}]{} & P(E). \end{array} \tag{23.38}$$

Pour tout vecteur $v \in E$ nous avons $\pi_E(v) = \pi_E\big(f(v)\big)$. Cela implique qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) = \lambda v$. Tous les vecteurs de E sont donc des vecteurs propres de f. Cela n'est possible que si toutes les valeurs propres sont identiques, c'est-à-dire que f est une homothétie. □

23.4.3 Repères projectifs

Définition 23.25 ([678]).
*Des éléments $\{P_i\}_{i\in I}$ sont **projectivement independents** si en choisissant $v_i \in \pi^{-1}(P_i)$ nous obtenons des vecteurs $\{v_i\}_{i\in I}$ linéairement indépendants.*

DEFooPZKFooDBXtEn

Définition 23.26.
*Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$. Un **repère projectif** de $P(E)$ est la donnée de $n+2$ points $m_0, \dots, m_{n+1}$ tels que*

(1) les vecteurs m_i, $i \neq 0$, sont les images d'une base $\{e_i\}$ de E

(2) $m_0 = \pi_E(e_1 + e_2 + \dots + e_{n+1})$.

Note que si $m_k = \pi_E(v_k)$ $(k = 0, \dots, n+1)$, alors tout choix de $n+1$ vecteurs parmi les v_k est une base de E.

Exemple 23.27.
Un repère projectif de l'espace $P(\mathbb{R}^3)$ est par exemple les éléments $\{m_i\}_{i=1,\dots,3}$ donnés par

$$m_1 = \pi(e_1) \tag{23.39a}$$
$$m_2 = \pi(e_2) \tag{23.39b}$$
$$m_3 = \pi(e_3) \tag{23.39c}$$
$$m_0 = \pi(e_1 + e_2 + e_3). \tag{23.39d}$$

△

Exemple 23.28.
Pour $P(\mathbb{C}^2)$, un repère projectif possible est $m_1 = [1, 0]$, $m_2 = [0, 1]$, $m_0 = [1, 1]$. △

23.29.
Pourquoi voulons nous des repères projectifs ? Pourquoi demander un quatrième élément alors que trois devraient suffire ? Le fait est que si E est de dimension 3, nous voudrions pouvoir identifier E et $P(\mathbb{R}^3)$.

Plus précisément, si E est de dimension $n+1$ et possède une base $\{f_i\}_{i=1,\dots,n+1}$, il existe un unique isomorphisme d'espaces vectoriels $E \to \mathbb{R}^{n+1}$ qui envoie cette base sur la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. La base de E étant fixée, nous pouvons donner à un point de E les coordonnées de son image dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par cet isomorphisme *qui est unique*.

Dans le cas des espaces projectifs, nous voudrions avoir une unique homographie $\phi: P(E) \to P(\mathbb{R}^{n+1})$ qui permet de donner à un point $A \in P(E)$ les coordonnées de $\pi^{-1}\big(\phi(A)\big)$. Bien entendu ce dernier n'est pas un élément bien défini de $\mathbb{R}^{n+1}$ parce qu'il y a toute une droite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ qui se projettent sur $\phi(A)$.

L'idée d'imposer un point de plus est la bonne. Si nous imposons un point de plus, nous pouvons dire que les coordonnées de $A \in P(E)$ sont celles dans $\mathbb{R}^{n+1}$ de l'élément de $\pi^{-1}\big(\phi(A)\big)$ dont la dernière coordonnée est par exemple 1.

Nous allons maintenant mettre ça en musique.

D'abord nous donnons un exemple de non unicité.

Exemple 23.30.
Soit un espace vectoriel E de dimension 2 et une base $\{b_1, b_2\}$ de E. Nous considérons également l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\{e_1, e_2\}$.

Soit une homographie $\phi\colon P(E) \to P(\mathbb{R}^2)$ telle que

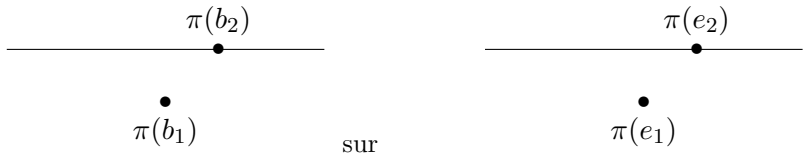
$$\phi\big(\pi(b_i)\big) = \pi(e_i) \tag{23.40}$$

EQooPMARooXGuKDD

pour $i = 1, 2$. Nous allons facilement construire une autre homographie qui vérifie les mêmes conditions.

L'idée est la suivante. L'espace $P(E)$ peut être vu comme la droite complétée $\{(x, 1)\}_{x\in\mathbb{R}} \cup \{(1, 0)\}$ et l'espace $P(\mathbb{R}^2)$ également. Une homographie respectant (23.40) doit envoyer le $(1, 0)$ de E vers le $(1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ et le $(1, 1)$ de E vers le $(1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$. Mais en ce qui concerne le reste de la droite, l'homographie peut la parcourir à la vitesse qu'elle veut.

Il faut envoyer



Soit donc une homographie $\phi\colon P(E) \to P(\mathbb{R}^2)$, et nous définissons

$$\begin{aligned} \phi'\colon P(E) &\to P(\mathbb{R}^2) \\ \pi(xb_1 + yb2) &\mapsto \phi\big(\pi(xb_1 + \lambda y b_2)\big) \end{aligned} \tag{23.41}$$

pour un certain $\lambda \neq 1$. En ce qui concerne le relèvement, l'application $\bar{\phi}'\colon E \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\bar{\phi}'(xb_1 + yb_2) = \bar{\phi}(xb_1 + \lambda y b_2) \tag{23.42}$$

est bien définie et vérifie

$$\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \bar{\phi}' = \phi' \circ \pi_E. \tag{23.43}$$

Donc ϕ' est une homographie. De plus

$$\phi'\big(\pi(b_1)\big) = \phi\big(\pi(b_1)\big) \tag{23.44a}$$
$$\phi'\big(\pi(b_2)\big) = \phi\big(\pi(\lambda b_2)\big) = \phi\big(\pi(b_2)\big) \tag{23.44b}$$

parce que $\pi(\lambda b_2) = \pi(b_2)$.

Nous n'avons donc pas l'unicité. △

C'est pour rétablir cette unicité que nous demandons d'avoir un point de plus pour avoir un repère projectif. De cette façon nous aurons une unique homographie $\phi\colon P(E) \to P(\mathbb{R}^{n+1})$ vérifiant $\phi\big(\pi_E(b_i)\big) = \pi_{\mathbb{R}^{n+1}}(e_i)$ pour tout $i = 0, \dots, n+1$.

Lemme 23.31.
Soit un espace vectoriel E de dimension $n+1$ muni de deux bases $\{e_i\}_{i=1,\dots,n+1}$ et $\{f_i\}_{i=1,\dots,n+1}$. Soit un repère projectif $\{m_0, m_i\}_{i=1,\dots,n+1}$ de $P(E)$.

Si $\pi(e_i) = \pi(f_i) = m_i$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$ et si

$$\pi(e_1 + \dots + e_{n+1}) = \pi(f_1 + \dots + f_{n+1}) \tag{23.45}$$

alors les deux bases sont proportionnelles : il existe λ tel que $f_i = \lambda e_i$ pour $i = 1, \dots, n+1$.

Démonstration. Nous avons $\pi(e_i) = \pi(f_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$. Donc pour chaque $i = 1, \dots, n+1$ il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $e_i = \lambda f_i$. Nous devons voir que les λ_i sont en réalité tous égaux.

Pour cela nous avons aussi l'égalité pour $i = 0$:

$$\pi(e_1 + \dots + e_{n+1}) = \pi(f_1 + \dots + f_{n+1}), \tag{23.46}$$

ce qui donne un $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $e_1 + \dots + e_{n+1} = \mu(f_1 + \dots + f_{n+1})$, c'est-à-dire

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = \mu f_1 + \dots + \mu f_{n+1}. \tag{23.47}$$

Du fait que les f_i forment une base, cette égalité impose à tous les λ_i d'être égal à μ. □

THOooTXPVooJGigne

Théorème 23.32 ([679]).
Soient $P(E)$ et $P(F)$ deux espaces projectifs de dimensions n.

ITEMooRSIWooXbEnlT

(1) Une homographie $P(E) \to P(F)$ envoie un repère projectif sur un repère projectif.

ITEMooQXQXooDyIsxsh

(2) Si $(m_0, \dots, m_{n+1})$ est un repère projectif de $P(E)$, si $(m'_0, \dots, m'_{n+1})$ est un repère projectif de $P(F)$ alors il existe une unique homographie $g\colon P(E) \to P(F)$ telle que $g(m_i) = m'_i$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n+1$

Démonstration. Un point à la fois.

(1) **(1)**

Soit une homographie $\phi\colon P(E) \to P(F)$ et un repère projectif $\{m_0, m_1, \dots, m_{n+1}\}$ de $P(E)$. Nous posons $m'_i = \phi(m_i)$ pour tout $i = 0, \dots, n+1$. Nous devons prouver que ces m'_i forment un repère projectif de $P(F)$.

D'abord pour $i = 1, \dots, n+1$ nous avons $m'_i = \phi\big(\pi_E(e_i)\big) = \pi_F\big(\bar{\phi}(e_i)\big)$, mais $\{\bar{\phi}(e_i)\}_{i=1,\dots,n+1}$ est une base de F parce que $\bar{\phi}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Donc oui : les m'_i $(i = 1, \dots, n+1)$ sont les projetés d'une base de F.

Nous posons au passage $f_i = \bar{\phi}(e_i)$. En ce qui concerne m_0 nous savons que $m_0 = \pi_E(e_1 + \dots + e_{n+1})$ et

$$m'_0 = \phi\big(\pi_E(e_1 + \dots + e_{n+1})\big) = \pi_F\big(\bar{\phi}(e_1 + \dots + e_{n+1})\big) = \pi_F(f_1 + \dots + f_{n+1}), \tag{23.48}$$

ce qui termine de montrer que $\{m'_i\}_{i=0,\dots,n+1}$ est un repère projectif de $P(F)$.

(2) **(2)**

Soient un repère projectif $(m_0, \dots, m_{n+1})$ de $P(E)$ et un repère projectif $(m'_0, \dots, m'_{n+1})$ de $P(F)$. Nous choisissons des bases $\{e_i\}$ de E et $\{f_i\}$ de F telles que

$$m_i = \pi_E(e_i) \tag{23.49a}$$
$$m'_i = \pi_F(f_i) \tag{23.49b}$$

pour $i = 1, \dots, n+1$ et

$$m_0 = \pi_E(e_1 + \dots + e_{n+1}) \tag{23.50a}$$
$$m'_0 = \pi_F(f_1 + \dots + f_{n+1}). \tag{23.50b}$$

Nous considérons un isomorphisme d'espace vectoriel $\bar{\phi}\colon E \to F$ tel que $\bar{\phi}(e_i) = f_i$ pour tout i, et nous voulons définir $\phi\colon P(E) \to P(F)$ par

EQooRMYIooKcPZwD

$$\phi\big(\pi_E(v)\big) = \pi_F\big(\bar{\phi}(v)\big). \tag{23.51}$$

Cela est bien défini parce que si $\pi_E(v) = \pi_E(w)$ alors $w = \lambda v$ et

$$\pi_F\big(\bar{\phi}(\lambda v)\big) = \pi_F\big(\lambda\bar{\phi}(v)\big) = \pi_F\big(\bar{\phi}(v)\big). \tag{23.52}$$

L'application définie par (23.51) est une homographie qui envoie m_i sur m'_i pour tout $i = 0, \dots, n+1$. Ceci prouve la partie « existence » du point (2).

Pour l'unicité, soient des homographies

$$\phi_1\colon P(E) \to P(F) \tag{23.53a}$$
$$\phi_2\colon P(E) \to P(F) \tag{23.53b}$$

telles que $\phi_1(m_i) = \phi_2(m_i)$ pour tout $i = 0, \dots, n+1$. Soit aussi une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n+1}$ de E adaptée au repère projectif, c'est-à-dire $m_i = \pi_E(e_i)$ pour $i = 1, \dots, n+1$ et $\pi_E(e_1 + \dots + e_{n+1}) = m_0$. Nous considérons aussi les isomorphismes d'espaces vectoriels $\bar{\phi}_1$ et $\bar{\phi}_2$. Avec tout ce beau monde nous avons

$$\phi_1(m_i) = \pi_E\big(\bar{\phi}_1(e_i)\big) \tag{23.54a}$$
$$\phi_2(m_i) = \pi_E\big(\bar{\phi}_2(e_i)\big). \tag{23.54b}$$

Mais nous savons que $\phi_1(m_i) = \phi_2(m_i)$, donc nous savons que $\pi_E\big(\bar{\phi}_1(e_i)\big) = \pi_E\big(\bar{\phi}_2(e_i)\big)$, ce qui nous fait conclure que

$$\bar{\phi}_1(e_i) = \lambda_i\bar{\phi}_2(e_i) \tag{23.55}$$

pour certaines constantes $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Le même raisonnement appliqué à m_0 nous donne un $\mu \in \mathbb{K}$ tel que

$$\bar{\phi}_1(e_1) + \ldots + \bar{\phi}_1(e_{n+1}) = \mu\big(\bar{\phi}_2(e_1) + \ldots + \bar{\phi}_2(e_{n+1})\big). \tag{23.56}$$

En mettant l'un dans l'autre :

$$\lambda_1\bar{\phi}_2(e_1) + \ldots + \lambda_{n+1}\bar{\phi}_2(e_{n+1}) = \mu\big(\bar{\phi}_2(e_1) + \ldots + \bar{\phi}_2(e_{n+1})\big). \tag{23.57}$$

Sachant que $\{\bar{\phi}_2(e_i)\}_{i=1,\ldots,n+1}$ est une base de F et nous souvenant de l'unicité de la décomposition d'un élément dans une base[4], nous en déduisons que tous les λ_i doivent être égaux à μ. Donc pour tout $v \in E$ nous avons $\bar{\phi}_1(v) = \lambda\bar{\phi}_2(v)$.

Cela a pour conséquence que $\phi_1 = \phi_2$.

□

23.33.
Si nous avons une droite projective, trois points sont nécessaires pour créer un repère et donc pour construire une homographie de la droite sur elle-même. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $P(E)$ la droite projective qui lui est associée. Soit une homographie $f\colon P(E) \to P(E)$ et $\bar{f}\colon E \to E$, l'isomorphisme d'espaces vectoriels associé (par $f \circ \pi_E = \pi_E \circ \bar{f}$). Si $\{e_1, e_2\}$ est une base de E alors l'application $\bar{f}$ a une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(2, \mathbb{K}) \tag{23.58}$$

avec $\det A \neq 0$ parce que $\bar{f}$ est un isomorphisme.

La plupart des points de $P(E)$ sont représentés par des points de la forme $(z, 1)$. Nous voudrions savoir quelle est la direction représentée par le point $\bar{f}(z, 1)$; c'est-à-dire que nous voudrions savoir $f([z, 1])$ sous la forme $[z', 1]$ (si possible). Nous avons

$$\bar{f}(z, 1) = (a_{11}z + a_{12}, a_{21}z + a_{22}). \tag{23.59}$$

Nous posons $\lambda = a_{21}z + a_{22}$ et nous avons

$$\bar{f}(z, 1) = \lambda\left(\frac{a_{11}z + a_{12}}{\lambda}, 1\right). \tag{23.60}$$

Il y a plusieurs possibilités suivant les valeurs de λ et de z.

(1) Si $\lambda = 0$ c'est que nous avons $\bar{f}(z, 1) = (a_{11}z + a_{12}, 0)$. L'application f envoie donc le point $(z : 1)$ sur le point à l'infini.

(2) Si $\lambda \neq 0$, alors f envoie le point $(z : 1)$ vers un autre point « normal ».

(3) Si le point de départ est le point à l'infini alors $\bar{f}(1, 0) = (a_{11}, a_{21})$. Cela peut être le point à l'infini ou non selon les valeurs des a_{ij}.

Dans tous les cas si nous posons

$$\begin{cases} \varphi_f(z) = \dfrac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}} & \text{(23.61a)} \\ \varphi_f(\infty) = \dfrac{a_{11}}{a_{21}} & \text{(23.61b)} \end{cases}$$

alors nous avons

$$\bar{f}(z, 1) = \big(\varphi_f(z), 1\big). \tag{23.62}$$

Si nous prenons la convention que $\frac{1}{0} = \infty$ et que $(\infty, 0)$ est le point à l'infini, alors cette application φ_f donne bien toutes les valeurs de f, y compris les cas à l'infini.

LEMooXNKOooBKhzyt

Lemme 23.34 ([680]).
Trois points distincts d'une droite projective forment un repère projectif.

[4] Proposition 4.7.

Démonstration. Soit une droite projective $d = P(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps $\mathbb{K}$. Soient trois points distincts A, B et C de d. Nous avons $a, b, c \in E$ tels que $A = \pi(a)$, $B = \pi(b)$ et $C = \pi(c)$. Vu que $A \neq B$, les vecteurs a et b ne sont pas proportionnels et la partie $\{a, b\}$ est libre dans E. Autrement dit, c'est une base[5].

Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $c = \alpha a + \beta b$. De plus α et β ne sont pas nuls parce que $C \neq A$ et $C \neq B$. En prenant $a' = \alpha a$, $b' = \beta b$ et $c' = c$ nous avons : $A = \pi(a')$, $B = \pi(b')$, $C = \pi(c')$ en même temps que $\{a', b'\}$ est une base de E et $c' = a' + b'$. Donc A, B, C est un repère projectif de $d = P(E)$. □

CORooRFCZooGZiQBJ

Corolaire 23.35 ([681]).
Soient E et F des espaces vectoriels de dimension 2. Soient A_i $(i = 1, 2, 3)$ des points distincts sur $P(E)$ et B_i distincts sur $P(F)$. Alors il existe une unique homographie $P(E) \to P(F)$ portant A_i sur B_i pour tout $i = 1, 2, 3$.

Démonstration. Il s'agit de mettre en conjonction le lemme 23.34 qui dit que les A_i forment un repère projectif de $P(E)$ (idem : les B_i forment un repère projectif de $P(F)$) et le théorème 23.32(2) qui dit que l'une va sur l'autre part une unique homographie. □

23.4.4 Identifications $P(\mathbb{K}^2)$ vers $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$

Pour rappel, une droite projective est l'espace projectif modelé sur un espace vectoriel de dimension deux (définition 23.8).

NORMooUQRUooOMIzJD

23.36.
Nous allons faire un usage assez intense de bijections entre $P(\mathbb{K}^2)$ et $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Une possible est

$$\begin{aligned} \varphi_0 \colon P(\mathbb{K}^2) &\to \mathbb{K} \cup \{\infty\} \\ [k_1, k_2] &\mapsto \begin{cases} \frac{k_1}{k_2} & \text{si } k_2 \neq 0 \\ \infty & \text{si } k_2 = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{23.63}$$

EQooSIJDooTHPYMb

Notons que nous utilisons ici le fait que $\mathbb{K}$ soit commutatif, sinon il aurait fallu choisir $k_1 k_2^{-1}$ ou $k_2^{-1} k_1$ au lieu d'écrire gentiment k_1/k_2.

CORooFJSCooNOeAel

Corolaire 23.37.
Soit une bijection $\varphi \colon P(\mathbb{K}^2) \to \hat{\mathbb{K}}$. Les points $\{\varphi^{-1}(\infty), \varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(1)\}$ forment un repère projectif de $P(\mathbb{K}^2)$.

Démonstration. Il s'agit seulement d'une application du lemme 23.34.

Juste pour l'amusement, nous allons le prouver explicitement pour la bijection $\varphi = \varphi_0$ donnée en (23.63). Un repère projectif est la définition 23.26. Nous avons

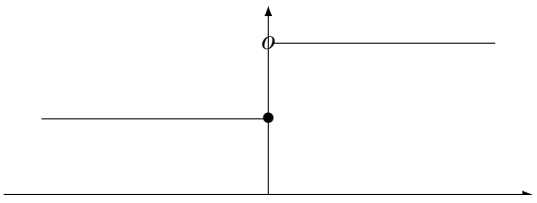
$$\varphi_0^{-1}(\infty) = [1, 0] = \pi_{\mathbb{K}^2}\big((1, 0)\big) \tag{23.64a}$$
$$\varphi_0^{-1}(0) = [0, 1] = \pi_{\mathbb{K}^2}\big((0, 1)\big) \tag{23.64b}$$
$$\varphi_0^{-1}(1) = [1, 1] = \pi_{\mathbb{K}^2}\big((1, 1)\big) \tag{23.64c}$$

Les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ forment un base de $\mathbb{K}^2$ et nous avons bien $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$. Donc le tout vérifie bien la définition d'un repère projectif. □

D'autre part, comme il est plus agréable de travailler avec $\hat{\mathbb{K}}$ qu'avec $P(\mathbb{K}^2)$ nous avons envie de voir $\hat{\mathbb{K}}$ comme un espace projectif (qu'il n'est pas). Il y a cependant nombre d'autres identifications possibles. En voici un autre :

$$\begin{aligned} \varphi_1 \colon P(\mathbb{K}^2) &\to \hat{\mathbb{K}} \\ [k_1, k_2] &\mapsto \begin{cases} \frac{k_2}{k_1} & \text{si } k_1 \neq 0 \\ \infty & \text{si } k_1 = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{23.65}$$

Vous en voulez une plus compliquée ? En voici une pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, basée sur le dessin suivant :



[5] Il convient de citer ici la proposition 4.19.

La bijection associée est :

$$\begin{aligned}\varphi_d\colon P(\mathbb{R}^2) &\to \hat{\mathbb{R}}\\ [k_1,k_2] &\mapsto \begin{cases} \frac{k_1}{k_2} & \text{si } k_1k_2 \leqslant 0\\ 2\frac{k_1}{k_2} & \text{si } k_1k_2 > 0\\ \infty & \text{si } k_2 = 0. \end{cases}\end{aligned} \tag{23.66}$$

EQooMIGCooAtXPaS

Pour mettre un peu d'ordre dans toutes ces identifications possibles, nous introduisons une classe.

DEFooMLQUooGwvQMh

Définition 23.38.
Pour une bijection $\varphi\colon P(\mathbb{K}^2) \to \hat{\mathbb{K}}$ nous définissons

$$A(\varphi) = \{\varphi_a\colon P(\mathbb{K}^2) \to \hat{\mathbb{K}} \text{ tel que } \varphi_a^{-1}\circ\varphi \text{ soit une homographie }\} \tag{23.67}$$

Les classes sont assez larges parce que pour toute homographie $\phi\colon P(\mathbb{K}^2) \to P(\mathbb{K}^2)$, nous avons $\varphi\circ\phi^{-1} \in A(\varphi)$. Mieux, nous avons le lemme suivant.

Lemme 23.39.
L'application

$$\begin{aligned}\psi\colon A(\varphi) &\to \mathrm{PGL}(\mathbb{K}^2)\\ \varphi_a &\mapsto \varphi_a^{-1}\circ\varphi\end{aligned} \tag{23.68}$$

est une bijection.

Démonstration. Pour rappel, $\mathrm{PGL}(E)$ est le groupe des homographies de E, voir la définition 23.23.

(1) **Surjectif** Si $\phi \in \mathrm{PGL}(\mathbb{K}^2)$ nous avons $\phi = \psi(\varphi\circ\phi^{-1})$.

(2) **Injectif** Si $\psi(\varphi_a) = \psi(\varphi_b)$ alors

$$\varphi_a^{-1}\circ\varphi = \varphi_b^{-1}\circ\varphi, \tag{23.69}$$

d'où nous déduisons $\varphi_a^{-1} = \varphi_b^{-1}$ parce que φ est une bijection.

□

23.4.5 Birapport

23.40.
Tout le monde semble définir le birapport en identifiant $P(\mathbb{K}^2)$ à $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{K}\cup\{\infty\}$. Bien entendu, personne ne semble s'être attribué la mission d'expliciter la dépendance du birapport en le choix de l'identification. Je le fais à la définition 23.42.

Mais cette définition dépend du choix d'identification $\varphi\colon P(\mathbb{K}^2) \to \hat{\mathbb{K}}$, comme le montre l'exemple 23.44. J'ai donc défini des classes d'identifications possibles $A(\varphi)$ en 23.38. Et je démontre la proposition 23.45 que si $\varphi_a \in A(\varphi)$ alors les birapports construits à partir de φ et φ_a sont identiques.

Question : pourquoi personne ne semble faire ce travail ? En quoi l'identification φ_0 que tout le monde utilise est plus canonique qu'une autre ? Est-ce que l'on peut décrire simplement les classes $A(\varphi)$? Le groupe qui conserve le birapport associé à φ est-il isomorphe au groupe qui conserve le birapport associé à φ' ? Quels que soient φ et φ' ?

Suis-je la seule personne au monde à m'être demandé si le birapport était un objet canonique ?

23.41.
Une utilisation très intéressante du birapport dans la vidéo « The Cross-Ratio » de numberphile : https://www.youtube.com/watch?v=ffvojZONF_A

DEFooBFSKooDwzwmO

Proposition-Définition 23.42.
*Soit une droite projective $d = P(E)$ et trois points distincts A, B et C sur cette droite. Soit une bijection $\varphi\colon P(\mathbb{K}^2) \to \hat{\mathbb{K}}$. Si X est un point de d alors nous nommons le **birapport** de X par rapport à A, B et C l'élément de $\hat{\mathbb{K}}$ donné par*

$$[A,B,C,X]_\varphi = (\varphi\circ\phi)(X) \tag{23.70}$$

où $\phi\colon d \to P(\mathbb{K}^2)$ est l'unique homographie telle que

SUBEQooYWMSooYlFKQv

$$\phi(A) = \varphi^{-1}(\infty) \tag{23.71a}$$
$$\phi(B) = \varphi^{-1}(0) \tag{23.71b}$$
$$\phi(C) = \varphi^{-1}(1). \tag{23.71c}$$

Démonstration. Nous devons prouver qu'il existe effectivement une unique homographie vérifiant les conditions (23.71).

(1) A, B, C **est un repère projectif de** $P(E)$ Voir le lemme 23.34.

(2) $\varphi^{-1}(\infty), \varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(1)$ **est un repère projectif de** $P(\mathbb{K}^2)$ Lemme 23.34 ou corolaire 23.37 au choix.

(3) **Conclusion** Le théorème 23.32(2) nous donne existence et unicité d'une homographie $P(E) \to P(\mathbb{K}^2)$ envoyant le premier repère sur le second.

□

Remarque 23.43.
La majorité des sources ne parlent pas de la dependence du birapport en le choix de φ parce que tout le monde ne semble ne considérer que $\varphi = \varphi_0$ définie en (23.63). Il est cependant naturel de se demander si la définition dépend effectivement du choix de φ. La réponse est oui : ça dépend du choix.

EXooYCOYooWFSfUv

Exemple 23.44 (Une autre identification qui ne va pas bien)**.**
Nous montrons que l'identification $\varphi_d \colon P(\mathbb{K}^2) \to \hat{\mathbb{K}}$ donnée en (23.66) ne donne pas lieu au même birapport que celui de φ_0.

Nous travaillons le birapport sur la droite projective la plus simple : $P(\mathbb{K}^2)$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Prenons pour la simplicité $A = [1, 0]$, $B = [0, 1]$ et $C = [1, 1]$. Alors l'homographie demandée dans la définition de $[., ., ., .]_{\varphi_0}$ est $\phi_0 = \mathrm{Id}$. Par conséquent,

$$\big[A, B, C, [k_1, k_2]\big]_{\varphi_0} = (\varphi_0 \circ \phi_0)[k_1, k_2] = \varphi_0[k_1, k_2] = \frac{k_1}{k_2}. \tag{23.72}$$

En ce qui concerne le birapport défini par φ_d nous avons

$$\varphi_d^{-1}(\infty) = [1, 0] \tag{23.73a}$$
$$\varphi_d^{-1}(0) = [0, 1] \tag{23.73b}$$
$$\varphi_d^{-1}(1) = [1, 2], \tag{23.73c}$$

de telle sorte que nous cherchons une homographie $\phi_d \colon P(\mathbb{K}^2) \to P(\mathbb{K}^2)$ telle que

$$\phi_d[1, 0] = [1, 0] \tag{23.74a}$$
$$\phi_d[0, 1] = [0, 1] \tag{23.74b}$$
$$\phi_d[1, 1] = [1, 2] \tag{23.74c}$$

L'homographie $\phi_d[k_1, k_2] = [k_1, 2k_2]$ convient et nous avons

$$\big[A, B, C, D, [k_1, k_2]\big]_{\varphi_d} = (\varphi_d \circ \phi_d)[k_1, k_2] = \varphi_d[k_1, 2k_2] = \frac{k_1}{2k_2} \tag{23.75}$$

dès que $k_1 k_2 < 0$. Nous avons donc bien trouvé

$$[A, B, C, X]_{\varphi_0} \neq [A, B, C, X]_{\varphi_d}. \tag{23.76}$$

△

Le birapport n'est pas un objet tout à fait canonique parce qu'il dépend effectivement du choix de l'identification entre $P(\mathbb{K}^2)$ et $\hat{\mathbb{K}}$.

PROPooTFMQooIOQGvs

Proposition 23.45.
Soit une bijection $\varphi \colon P(\mathbb{K}^2) \to \hat{\mathbb{K}}$. Si $\varphi_a \in A(\varphi)$[6] alors les birapports construits sur φ et φ_a coïncident.

Démonstration. Soient trois points distincts $A, B, C \in P(E)$, et $X \in P(E)$. Nous avons

$$[A, B, C, X]_\varphi = (\varphi \circ \phi)(X) \tag{23.77}$$

où $\phi \colon P(E) \to P(\mathbb{K}^2)$ est l'unique homographie telle que

$$\phi(A) = \varphi^{-1}(\infty) \tag{23.78a}$$
$$\phi(B) = \varphi^{-1}(0) \tag{23.78b}$$
$$\phi(C) = \varphi^{-1}(1). \tag{23.78c}$$

[6] $A(\varphi)$ définie en 23.38.

Et

$$[A,B,C,X]_{\varphi_a} = (\varphi_a \circ \phi_a)(X) \tag{23.79}$$

où $\phi_a : P(E) \to P(\mathbb{K}^2)$ est l'unique homographie telle que

$$\phi_a(A) = \varphi_a^{-1}(\infty) \tag{23.80a}$$
$$\phi_a(B) = \varphi_a^{-1}(0) \tag{23.80b}$$
$$\phi_a(C) = \varphi_a^{-1}(1). \tag{23.80c}$$

Il est facile de voir que $\phi_a = \varphi_a^{-1} \circ \varphi\phi$. En effet, cela est une homographie parce que $\varphi_a \in A(\varphi)$, et parce que la composée d'homographies est une homographie. De plus,

$$(\varphi_a^{-1} \circ \varphi \circ \phi)(A) = (\varphi_a^{-1} \circ \varphi)\phi^{-1}(\infty) = \varphi_a(\infty) \tag{23.81a}$$
$$(\varphi_a^{-1} \circ \varphi \circ \phi)(B) = (\varphi_a^{-1} \circ \varphi)\phi^{-1}(0) = \varphi_a(0) \tag{23.81b}$$
$$(\varphi_a^{-1} \circ \varphi \circ \phi)(C) = (\varphi_a^{-1} \circ \varphi)\phi^{-1}(1) = \varphi_a(1). \tag{23.81c}$$

Au final nous avons :

$$[A,B,C,X]_{\varphi_a} = (\varphi_a \circ \varphi_a^{-1} \circ \varphi \circ \phi)(X) = (\varphi \circ \phi)(X) = [A,B,C,X]_{\varphi}. \tag{23.82}$$

□

Remarque 23.46.
Tout le monde semble ne considérer que l'identification usuelle $\varphi_0 : P(\mathbb{K}^2) \to \hat{\mathbb{K}}$ donnée par $\varphi_0[k_1,k_2] = k_1/k_2$. Toute la discussion concernant la dépendance du birapport en le choix de l'identification (y compris la définition des classes $A(\varphi)$) peut être sautée en disant qu'on ne considéra que φ_0.

Et c'est ce que nous allons faire : sauf avis contraire, nous utiliserons le birapport associé à l'identification φ_0.

LEMooCOFTooVGKdVO

Lemme 23.47 ([679])**.**
Nous avons

$$[A,B,C,X]_{\varphi} = \begin{cases} \infty & \text{si et seulement si } X = A \\ 0 & \text{si et seulement si } X = B \\ 1 & \text{si et seulement si } X = C. \end{cases} \tag{23.83}$$

Démonstration. Par définition $[A,B,C,X]_{\varphi} = \varphi \circ \phi(X)$. Nous avons donc équivalence entre les affirmations suivantes :

- $[A,B,C,X]_{\varphi} = \infty$
- $(\varphi \circ \phi)(X) = \infty$
- $\phi(X) = \varphi^{-1}(\infty)$
- $\phi(X) = \phi(A)$
- $A = X$

parce que ϕ et φ sont des bijections.

Le même raisonnement tient pour les deux autres. □

PROPooKQZRooVCXPLW

Proposition 23.48.
Autres petites propriétés faciles … Soit une droite projective $d = P(E)$ et trois points distincts $A, B, C \in d$.

ITEMooOIPZooQFFYIn

(1) Les points A, B, C et X sont distincts si et seulement si $[A,B,C,X] \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$.

ITEMooBEBEooVfiJXY

(2) Pour tout $k \in \hat{\mathbb{K}}$, il existe un unique $X \in d$ tel que $[A,B,C,X] = k$.

Démonstration. Notons pour le point (1) que l'énoncé demande déjà que A, B et C soient distincts. Sinon le birapport n'est pas défini.

(1) **(1)**

Les points A, B et C sont distincts par hypothèse. Vu le lemme 23.47, pour que X soit distincts de A, B et C il faut et il suffit que le birapport ne soit ni ∞ ni 1 ni 0. Donc $\mathbb{K} \setminus \{0,1\}$.

(2) **(2)**

Nous avons $[A, B, C, X] = \phi(X)$ où $\phi\colon P(E) \to P(\mathbb{K}^2)$ est une homographie et donc une bijection par la proposition 23.22(1). Donc oui, pour tout éléments de $P(\mathbb{K}^2)$ il existe un unique élément de $P(E)$ dont le birapport par rapport à A, B et C soit cet élément.

Notons encore une fois que nous avons identifié $P(\mathbb{K}^2)$ à $\hat{\mathbb{K}}$ par la bijection (23.63). □

PROPooMGYDooHqSoJs

Proposition 23.49 ([679]).
Nous considérons deux droites projectives d et d' ainsi que 4 points sur chacune. Nous les nommons $A_1, A_2, A_3, A_4 \in d$ et $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 \in d'$. Nous supposons que A_1, A_2, A_3 sont distincts et que A'_1, A'_2, A'_3 également. Alors il y a équivalence entre

ITEMooIDKBooXHnNDi

(1) Il existe une homographie $\phi\colon d \to d'$ telle que $\phi(A_i) = A'_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$,

ITEMooCDWAooIckJwT

(2) égalité des birapports :

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = [A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]. \tag{23.84}$$

Dans ce cas, l'homographie est unique.

Démonstration. Nous divisons la preuve en trois parties évidentes.

(1) **(1) implique (2)**

Nous avons une homographie $\mu'\colon d' \to \hat{\mathbb{K}}$ telle que $\mu'(A'_1) = \infty$, $\mu'(A'_2) = 0$ et $\mu'(A'_3) = 1$. En composant[7] avec l'homographie $\phi\colon d \to d'$ de l'hypothèse nous avons une homographie $\mu' \circ \phi\colon d \to \hat{\mathbb{K}}$ qui vérifie

$$(\mu' \circ \phi)(A_1) = \mu'(A'_1) = \infty \tag{23.85a}$$
$$(\mu' \circ \phi)(A_2) = \mu'(A'_2) = 0 \tag{23.85b}$$
$$(\mu' \circ \phi)(A_3) = \mu'(A'_3) = 1, \tag{23.85c}$$

ce qui signifie que $\mu' \circ \phi$ est l'homographie qui définie le birapport sur d. Par conséquent

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = (\mu' \circ \phi)(A_4) = \mu'(A'_4) = [A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]. \tag{23.86}$$

(2) **(2) implique (1)**

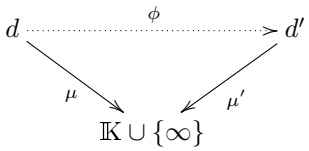
La partie $\{A_1, A_2, A_3\}$ est un repère projectif de d par le lemme 23.34. Idem pour $\{A'_1, A'_2, A'_3\}$. Nous considérons les homographies $\mu\colon d \to \hat{\mathbb{K}}$ et $\mu'\colon d' \to \hat{\mathbb{K}}$ définissant les birapports par rapport à ces repères. Ces homographies vérifient, en utilisant l'hypothèse :

$$\mu(A_4) = [A_1, A_2, A_3, A_4] = [A'_1, A'_2, A'_3, A'_4] = \mu'(A'_4). \tag{23.87}$$

Et de plus

$$\mu(A_1) = [A_1, A_2, A_3, A_1] = \infty = \mu'(A'_1) \tag{23.88a}$$
$$\mu(A_2) = [A_1, A_2, A_3, A_2] = 0 = \mu'(A'_2) \tag{23.88b}$$
$$\mu(A_3) = [A_1, A_2, A_3, A_3] = 1 = \mu'(A'_3). \tag{23.88c}$$

Autrement dit : $\mu(A_i) = \mu'(A'_i)$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$. Nous nous inspirons de ce diagramme :



(23.89)

La composée $\phi = \mu'^{-1} \circ \mu$ vérifie

$$(\mu'^{-1} \circ \mu)(A_i) = A'_i \tag{23.90}$$

pour tout i, et est une homographie.

[7] Proposition 23.22(3), la composition est encore une homographie.

(3) **Unicité**

Le fait qu'une homographie vérifiant $\phi(A_i) = A'_i$ pour $i = 1, 2, 3$ soit unique découle du fait qu'il existe une unique homographie portant un repère projectif sur un autre. A fortiori la condition $\phi(A_4) = A'_4$ ne retire rien à l'unicité.

□

Théorème 23.50 ([679]).
Une bijection entre deux droites projectives est une homographie si et seulement si elle conserve le birapport.

Démonstration. Chacun des deux sens séparément.

(1) $\Rrightarrow$

Soit une homographie $\phi: d \to d'$ entre deux droites projectives. Nous devons prouver que pour tout choix 4 points A, B, C, X dans d (dont A, B et C sont distincts) nous avons

$$[A, B, C, X] = [\phi(A), \phi(B), \phi(C), \phi(X)]. \tag{23.91}$$

EQooVFIOooCdumAe

Nous nommons $\mu: d \to \hat{\mathbb{K}}$ l'homographie qui donne le birapport sur d par rapport à A, B et C, et $\mu': d' \to \hat{\mathbb{K}}$ celle qui donne le birapport sur d' par rapport à $\phi(A)$, $\phi(B)$, $\phi(C)$. Voici un diagramme de la situation :

$$\begin{array}{ccc} d & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & d' \\ & {\scriptstyle\mu}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\mu'} & \\ & \mathbb{K} \cup \{\infty\} & \end{array} \tag{23.92}$$

Nous prouvons maintenant que $\mu' = \mu \circ \phi^{-1}$. En effet :

$$(\mu \circ \phi^{-1})\big(\phi(A)\big) = \mu(A) = \infty \tag{23.93a}$$
$$(\mu \circ \phi^{-1})\big(\phi(B)\big) = \mu(B) = 0 \tag{23.93b}$$
$$(\mu \circ \phi^{-1})\big(\phi(C)\big) = \mu(C) = 1. \tag{23.93c}$$

Par conséquent le birapport à droite dans (23.91) peut se calculer à l'aide de $\mu \circ \phi^{-1}$:

$$[\phi(A), \phi(B), \phi(C), \phi(X)] = \mu'\big(\phi(X)\big) = (\mu \circ \phi^{-1})\big(\phi(X)\big) = \mu(X) = [A, B, C, X]. \tag{23.94}$$

La première implication est prouvée.

(2) $\Lleftarrow$

Soit une bijection $f: d \to d'$ conservant le birapport, ainsi que trois points distincts A, B et C dans d. Vu que f est une bijection les points $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ sont distincts dans d'. Par le lemme 23.34 et le théorème 23.32(2), il existe une unique homographie $\phi: d \to d'$ telle que $\phi(A) = f(a)$, $\phi(B) = f(B)$ et $\phi(C) = f(C)$. Pour tout $X \in d$ nous avons

SUBEQSooVCSBooWvQLfh

$$\begin{aligned} [f(A), f(B), f(C), f(X)] &= [A, B, C, X] && \text{(23.95a)} \\ &= [\phi(A), \phi(B), \phi(C), \phi(X)] && \text{(23.95b)} \\ &= [f(A), f(B), f(C), \phi(X)]. && \text{(23.95c)} \end{aligned}$$

SUBEQooIYQKooJFpnyo

SUBEQooWYUPooQMZrrU

Justifications :

- (23.95a) parce que f conserve le birapport par hypothèse.
- (23.95b) parce que ϕ conserve le birapport étant une homographie (c'est le premier sens du présent théorème)

Nous nommons $\mu': d' \to \hat{\mathbb{K}}$ l'homographie donnant le birapport par rapport aux points $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$. Alors le résultat (23.95) se lit

$$\mu'\big(f(X)\big) = \mu'\big(\phi(X)\big). \tag{23.96}$$

Mais comme μ' est une bijection (proposition 23.22(1)) cela implique $f(X) = \phi(X)$. Vu que nous avons fait ce raisonnement pour un X quelconque dans d nous avons $f = \phi$, ce qui prouve que f est une homographie.

□

Lemme 23.51.
Soient a, b, c distincts sur la droite projective $D = P(E)$. Soient $x, y \in E$ tels que $\pi_E(x) = a$, $\pi_E(y) = b$, $\pi_E(x + y) = c$. Alors

$$d = \pi_E(\lambda x + \mu y) \tag{23.97}$$

si et seulement si

$$[a, b, c, d] = \pi_{\mathbb{K}^2}(\lambda, \mu). \tag{23.98}$$

Démonstration. Étant donné que a et b sont distincts, les vecteurs x et y forment une base de E. Soit $f\colon E \to \mathbb{K}^2$ un isomorphisme qui envoie (x, y) sur e_1, e_2 où e_i sont les vecteurs de base de $\mathbb{K}^2$. Ensuite nous considérons $g\colon P(E) \to P(\mathbb{K}^2)$, l'homographie associée à f. Par définition $g\big(\pi_E z\big) = \pi_{\mathbb{K}^2}\big(f(z)\big)$. Par f nous avons

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{23.99}$$

Donc par g nous avons

$$a \mapsto \infty \quad b \mapsto 0. \tag{23.100}$$

Nous avons aussi $f(\lambda x + \mu y) = (\lambda, \mu)$ et

$$\begin{aligned} g(c) &= g\big(\pi_E(x + y)\big) && \text{(23.101a)} \\ &= \pi_F f(x + y) && \text{(23.101b)} \\ &= \pi_F(f(x) + f(y)) && \text{(23.101c)} \\ &= \pi_F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{(23.101d)} \\ &= 1. && \text{(23.101e)} \end{aligned}$$

La dernière égalité est le fait que la direction $(1, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ est représentée par le point $x = 1$ sur la droite $y = 1$ qui est notre « représentation » de la droite affine. L'application g a donc toutes les propriétés qu'il faut pour être l'application qui définit le birapport. Nous avons donc bien $g(d) = [a, b, c, d]$.

D'une part si $d = \pi_E(\lambda x + \mu y)$ alors

$$g(d) = \pi_{\mathbb{K}^2} f(\lambda x + \mu y) = \pi_{\mathbb{K}^2}(\lambda, \mu). \tag{23.102}$$

Dans l'autre sens si $[a, b, c, d] = \pi_{\mathbb{K}^2}(\lambda, \mu)$ alors supposons que $g(d) = \pi_{\mathbb{K}^2}(\lambda, \mu)$ avec $d = \pi_E(v)$ alors

$$g\pi_E v = \pi_{\mathbb{K}^2} f(v), \tag{23.103}$$

ce qui implique $f(v) = \alpha(\lambda, \mu)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{K}$. Par conséquent $v = \alpha(\lambda x + \mu y)$ et $d = \pi_E(\lambda x + \mu y)$. □

23.5 Coordonnées homogènes

Soit E un espace vectoriel de dimension $n + 1$ et une base $\{e_0, \dots, e_n\}$ de E. Soit $M \in P(E)$ et $u \in E$ un élément engendrant M. Au point M nous voudrions associer les coordonnées $(x_0, \dots, x_n)$ de u dans E. Notons que toutes les coordonnées de u ne sont jamais nulles en même temps parce que u doit indiquer une direction. Nous savons par ailleurs que les coordonnées $(x_0, \dots, x_n)$ indiquent le même point de $P(E)$ que les coordonnées $(x'_0, \dots, x'_n)$ si et seulement si $x_i = \lambda x_i$.

DEFooLWMHooMWxAFq

Définition 23.52.
*La classe d'équivalence de $(x_0, \dots, x_n)$ est la **coordonnée homogène** de M. Nous la notons $(x_0 : \dots : x_n)$.*

Si nous avons une base $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^n$ nous associons à $M \in P(E)$ les coordonnées $(X : Y : T)$. Mais si on prend la base $\{2e_1, e_2, \dots, e_n\}$, les coordonnées du même point deviennent $(X/2 : Y : T)$ alors que du point de vue de l'espace projectif, rien n'a été changé : la classe de e_1 est la même que celle de $2e_1$. Les coordonnées homogènes[8] ne sont donc pas intrinsèques.

[8] Définition 23.52.

23.5.1 Curiosité : matrice de translation

Si E est un espace vectoriel, l'espace projectif $P(E)$ est l'ensemble des classes d'équivalence dans E pour la relation $v \sim \lambda v$ pour tout $\lambda \neq 0$.

Il se fait que l'étude de $\mathbb{R}^3$ peut être fait à partir de $\mathbb{R}^4$ en considérant les coordonnées homogènes sur $P(\mathbb{R}^4)$. Plus précisément, nous considérons

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}^3 &\to P(\mathbb{R}^4)\\ (x,y,z) &\mapsto \big[(x,y,z,1)\big].\end{aligned} \tag{23.104}$$

Cela est injectif mais pas surjectif parce que les éléments de la forme $[(x,y,z,0)]$ ne sont pas atteints. Ces éléments sont alors dits « à l'infini » .

Nous aurions pu placer $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ de nombreuses autres manières ; chacune aurait donné une notion différente de « point à l'infini ».

Nous allons maintenant montrer une petite curiosité qui a une grande importance en informatique, lors de la manipulation d'objets 3D. Nous considérons la bijection

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^4\\ (x,y,z) &\mapsto (x,y,z,1).\end{aligned} \tag{23.105}$$

Soit l'opérateur de translation $T_a\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. En considérant la matrice

$$T_a^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & 0 & a_y \\ 0 & 0 & 1 & a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{23.106}$$

nous avons

$$T_a = \varphi^{-1} \circ T_a^h \circ \varphi. \tag{23.107}$$

Autrement dit, ce passage de $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^4$ permet de voir les translations comme des matrices, et c'est bien pratique.

Si $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une rotation, la matrice correspondante sur $\mathbb{R}^4$ est

$$R^h = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{23.108}$$

Elle se combine assez bien avec une translation parce que le produit donne

$$T_a^h R^h = \begin{pmatrix} & R & & \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{23.109}$$

C'est-à-dire que la translation et la rotation restent assez visible dans la matrice composée.

Note : pour la composition $R^h T_a^h$, c'est beaucoup moins vrai.

23.5.2 Dualité

Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$. Une forme linéaire non nulle est un élément de E^*, mais aussi un représentant d'un élément de $P(E^*)$.

Le noyau d'une forme linéaire ω est un hyperplan. Le noyau de la forme linéaire $\lambda\omega$ étant le même hyperplan, l'hyperplan est donné par toute la classe de ω dans $P(E^*)$. Nous avons donc une bijection

$$P(E^*) \leftrightarrow \{\text{hyperplans vectoriels de } E\}. \tag{23.110}$$

Soit un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ à partir de laquelle nous construisons la base duale $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ de l'espace dual E^*. À un élément $m \in P(E^*)$ nous associons la droite

$$H_m = \{(X:Y:T) \text{ tel que } m(X,Y,T) = 0\} \tag{23.111}$$

dans $P(E)$. Si les coordonnées homogènes de m étaient $(u:v:w)$ alors l'équation de la droite H_m est

$$uX + vY + wT = 0. \tag{23.112}$$

Eqezgpmk

En effet si $\omega \in E^*$ est un représentant de m alors $\omega = \lambda(ue_1^* + ve_2^* + we_3^*)$ et l'équation (23.112) est indépendante de λ ainsi que du choix du représentant dans E du point $(X : Y : T)$ dans $P(E)$.

Si les points m_1 et m_2 sont distincts dans $P(E^*)$, ils donnent deux droites $m_1(X, Y, T) = 0$ et $m_2(X, Y, T) = 0$. Les points de la droite qui joint m_1 à m_2 dans $P(E^*)$ sont de la forme $\lambda m_1 + \mu m_2$ et ils sont associés à l'équation

$$\lambda m_1(X, Y, T) + \mu m_2(X, Y, T) = 0 \tag{23.113}$$

qui sont encore des droites dans $P(E)$. Toutes ces droites passent par le point d'intersection des droits associées à m_1 et m_2. Nous avons donc

$$\bigcap_{\lambda,\mu} H_{\lambda m_1 + \mu m_2} = H_{m_1} \cap H_{m_2}. \tag{23.114}$$

Lemme 23.53.
L'application

$$\begin{aligned} P(E^*) &\to \{\textit{droites dans } P(E)\} \\ m &\mapsto H_m \end{aligned} \tag{23.115}$$

est une bijection.

Démonstration. Une droite dans $P(E)$ est donnée en coordonnées homogènes par une équation $aX + bY + cT = 0$. Cette droite est décrite par le point $(a : b : c)$ dans $P(E^*)$. Ce dernier correspond à la direction de la forme $ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$. Cela prouve que l'application est surjective.

Pour l'injectivité, si $m_1 \neq m_2$ dans $P(E^*)$, les formes ω_1 et ω_2 associées dans E^* ne sont pas multiples l'une de l'autre. Donc les équations

$$a_1X + b_1Y + z_1T = 0 \tag{23.116}$$

et

$$a_2X + b_2Y + z_2T = 0 \tag{23.117}$$

n'ont pas de solutions communes et décrivent donc des droites distinctes. □
LemjXywjH

Lemme 23.54.
Trois points distincts m_1, m_2 et m_3 dans $P(E^*)$ sont alignés si et seulement si les droites H_{m_1}, H_{m_2} et H_{m_3} sont distinctes et concourantes.

Démonstration. Supposons avoir trois points alignés, c'est-à-dire

$$m_3 = m_1 + \mu(m_2 - m_1). \tag{23.118}$$
EqXyfbmF

Soit $X : Y : T$ le point d'intersection de H_{m_1} avec H_{m_2}. Alors $m_1(X, Y, T) = m_2(X, Y, T) = 0$. En tenant compte de (23.118) nous avons alors évidemment $m_3(X, Y, T) = 0$.

Supposons maintenant que les trois droites H_{m_i} soient concourantes. Nous avons donc un point $(X : Y : T)$ dans $P(E)$ tel que $m_i(X, Y, T) = 0$. Si m_i est la classe de $a_ie_1^* + b_ie_2^* + c_ie_3^*$ alors nous avons le système

$$\begin{cases} a_1X + b_1Y + c_1T = 0 & \text{(23.119a)} \\ a_2X + b_2Y + c_2T = 0 & \text{(23.119b)} \\ a_3X + b_3Y + c_3T = 0. & \text{(23.119c)} \end{cases}$$

Afin que cela ait une solution non triviale nous devons avoir

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0, \tag{23.120}$$

c'est-à-dire que les points (a_i, b_i, c_i) soient alignés. □

En tenant compte de ce qui a été dit, une droite dans $P(E^*)$ est constituée de points qui fournissent des droites concourantes dans $P(E)$. Donc une droite de $P(E^*)$ se caractérise par un point de $P(E)$ (l'intersection) de la façon suivante. Un point $M_d \in P(E)$ donne lieu à un **faisceau de droites** passant par M_d. Chacune de ces droites donne lieu à un point de $P(E^*)$ et tous ces points sont alignés. Nous avons ainsi construit la droite d dans $P(E^*)$ correspondante au point M_d de $P(E)$.

23.5.3 Polynômes

Soit l'espace projectif de dimension n avec ses coordonnées homogènes $(X_0 : \dots : X_n)$. Nous considérons l'espace affine $H \equiv X_n = 1$ dans l'espace vectoriel E de dimension $n+1$. Nous considérons pour H un repère affine ayant pour origine le point $(0, \dots, 0, 1)$. Considérons un polynôme homogène P sur le corps $\mathbb{K}$. L'équation

$$P(X_0, \dots, X_n) = 0 \tag{23.121}$$

sur l'espace vectoriel E descend immédiatement à l'espace projectif : étant donné que P est homogène nous avons $P(u) = 0$ si et seulement si $P(\lambda u) = 0$.

Nous essayons de décrire l'ensemble A des points de $P(E)$ satisfaisant $P(X_0, \dots, X_n) = 0$. Nous savons que les éléments de $P(E)$ ont chacun un représentant soit dans H soit sur la droite à l'infini. Ceux de A ayant un représentant dans H sont d'équation

$$Q(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0 \tag{23.122}$$

où Q est le polynôme donné par $Q(x_0, \dots, x_{n-1}) = P(x_0, \dots, x_{n-1}, 1)$. Les points de A ayant un représentant sur la droite à l'infini s'obtiennent par l'équation

$$R(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0 \tag{23.123}$$

où R est le polynôme donné par $R(x_0, \dots, x_{n-1}) = P(x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$.

Exemple 23.55.
Nous considérons la conique projective

$$X^2 - XT - Y^2 - T^2 = 0. \tag{23.124}$$ EqnLeQIN

Elle est décomposée en deux parties : une dans l'espace affine « normale » et une à l'infini. La première s'obtient en posant $T = 1$ dans (23.124) :

$$x^2 - x - y^2 - 1 = 0. \tag{23.125}$$ EqdGHzqJ

L'autre est obtenue en posant $T = 0$:

$$x^2 - y^2 = 0. \tag{23.126}$$

La partie à l'infini est donc composée de deux points : $(1 : 1 : 0)$ et $(1 : -1 : 0)$.

Le graphique de l'équation (23.125) est donné à la figure 23.2. Nous y voyons que les asymptotes sont effectivement données par les directions $(1, 1)$ et $(1, -1)$ dans le plan.

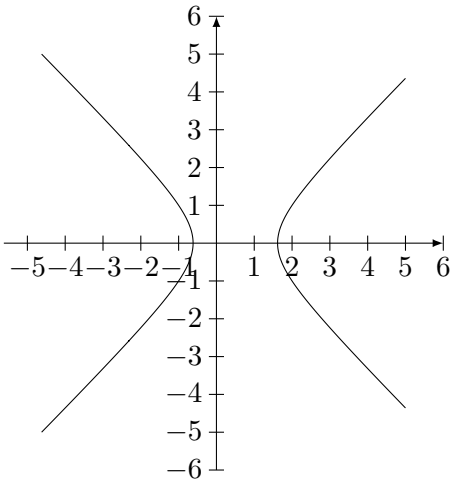


FIGURE 23.2 : Le graphique de $x^2 - x - y^2 - 1 = 0$. LabelFigProjPoly

△

Nous pouvons tenter de faire l'exercice inverse : considérer une conique dans $\mathbb{R}^2$, la voir comme une partie d'une conique dans l'espace projectif et trouver les points à l'infini qui la complètent.

Exemple 23.56.
La droite projective usuelle est donnée par la droite affine $y - 1 = 0$. L'homogénéisation donne $y - z = 0$ et par conséquent la partie à l'infini est donnée par $y = 0$, c'est-à-dire la direction $(1, 0)$ comme il se doit. △

Exemple 23.57.
Prenons la conique

$$x^2 + xy + y^3 - 2 = 0. \tag{23.127}$$

D'abord nous homogénéisons cette équation pour la voir dans $\mathbb{R}^3$:

$$x^2z + xyz + y^3 - 2z^3 = 0. \tag{23.128}$$

Les points à l'infini sont ceux qui correspondent à $z = 0$, c'est-à-dire la droite donnée en coordonnées homogènes par $(1 : 0 : 0)$. △

23.6 La sphère de Riemann $P_1(\mathbb{C})$

DEFooSZGNooTzFYbh

Définition 23.58.
*La **sphère de Riemann** est l'espace projectif modelé sur $\mathbb{C}^2$: en vertu des notations données à la page 1899, c'est*

$$P_1(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}^2). \tag{23.129}$$

L'ensemble $P_1(\mathbb{C})$ est le quotient $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence de $\mathbb{C}$-colinéarité dans $\mathbb{C}^2$.

LEMooKWZDooEIraSJ

Lemme 23.59.
L'application

EQooKJIZooZjhzuU

$$\begin{aligned}\varphi_0\colon P_1(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C}\cup\{\infty\}\\ [z_1,z_2] &\mapsto \begin{cases}\frac{z_1}{z_2} & si\ z_2\neq 0\\ \infty & si\ z_2=0\end{cases}\end{aligned} \tag{23.130}$$

est une bijection qui respecte la conjugaison complexe : $\varphi_0\big([z_1,z_2]^*\big) = \varphi_0\big([z_1,z_2]\big)^*$.

Démonstration. Notons d'abord que la définition a un sens parce que si un représentant que $[z_1, z_2]$ est de la forme $(z, 0)$ alors ils sont tous de cette forme. L'affirmation « $z_1 \neq 0$ dans $[z_1, z_2]$ » a donc un sens.

(1) **Injectif** Supposons $\varphi_0\big([z_1,z_2]\big) = \varphi_0\big([t_1,t_2]\big)$.
Si les deux membres sont égaux à ∞ alors nous avons $z_2 = t_2 = 0$, et alors avec $\lambda = z_1/t_1$ nous avons $(z_1, z_2) = \lambda(t_1, t_2)$, ce qui prouve que $[z_1, z_2] = [t_1, t_2]$.
Si les deux membres sont égaux à zéro alors $z_1 = t_1 = 0$ et le même raisonnement tient.
Sinon nous avons $z_1/z_2 = t_1/t_2$ où tous les nombres sont non nuls. Cela donne

$$z_2 = \frac{t_2}{t_1}z_1, \tag{23.131}$$

et donc

$$\frac{t_1}{z_1}(z_1, z_2) = (t_1, t_2), \tag{23.132}$$

qui montre qu'au niveau des classes, $[z_1, z_2] = [t_1, t_2]$.

(2) **Surjectif**
Nous avons

$$\infty = \varphi_0\big([1,0]\big) \tag{23.133}$$

et si $z \neq \infty$ nous avons $z = \varphi_0\big([z,1]\big)$.

□

23.6.1 Éléments de géométrie dans $P_1(\mathbb{C})$

SUBSECooQPRLooAjMNqp

Étant donné que nous sommes partis pour faire de la géométrie dans $\mathbb{C}$ et même dans $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, autant nous armer des équations de cercles et de droites dans $\mathbb{C}$, ainsi que de quelques notions adjacentes.

Remarque 23.60.
La définition 23.2 parle de plan et de droites projectives. Ici nous ne sommes pas dans ce cadre parce que nous travaillons sur $P_1(\mathbb{C})$ où $\mathbb{C}$ n'est certainement pas un espace de dimension 3. Les droites dont nous allons parler ne sont pas des droites projectives avec leur point à l'infini.

23.6.1.1 Équation complexe d'une droite

L'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^2$ est $d \equiv ax + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et a, b non nuls en même temps. En posant $z = x + iy$ nous voulons exprimer l'équation en termes de z au lieu de x et y. Nous avons[682]

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \tag{23.134}$$

et nous pouvons écrire $d \equiv a(z + \bar{z}) - ib(z - \bar{z}) = 2c$, ou encore $d \equiv (a - bi)z + (a + ib)\bar{z} = 2c$. En posant $\omega = a + bi \in \mathbb{C}^*$ et $k = 2c \in \mathbb{R}$ nous avons l'équation

$$\bar{\omega}z + \omega z = k. \tag{23.135}$$

EQooPRCPooVyrHME
DEFooAQSMooWNOzAI

Définition 23.61.
*Une **droite** est une partie de $\hat{\mathbb{C}}$ de la forme*

$$d(\omega, k) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \bar{\omega}z + \omega\bar{z} = k\} \cup \{\infty\} \tag{23.136}$$

avec $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{R}$.

Dans $\hat{\mathbb{C}}$, toutes les droites contiennent le point ∞.

PROBooZHHTooIFNwxR

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 23.62
La proposition 22.11 montre que toute inversion transforme un cercle-droite en un cercle-droite, nonobstant d'accepter de prolonger toute droite par ∞.

Est-ce que l'on peut dire que toutes les droites contiennent le point ∞ ?

En donnant ∞ à toutes les droites et à aucun cercle, la proposition 22.11 fonctionne partout en posant $i_C(O) = \infty$ et $i_C(\infty) = O$.

De plus en pensant à la projection stéréographique, ce serait logique : quelle que soit la direction dans laquelle un point s'éloigne de $z = 0$, son image par l'inverse de la projection stéréographique s'approche du pôle nord.

23.6.1.2 Équation complexe d'un cercle

Un cercle de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon r a pour équation $|z - \omega| = r$, et nous avons les équivalences suivantes :

$$|z - \omega| = r \Leftrightarrow |z - \omega|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) = r^2 \Leftrightarrow r\bar{r} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2. \tag{23.137}$$

Donc un cercle de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}$ a pour équation

$$z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2. \tag{23.138}$$

EQooDIFRooKRZZoi
DEFooAUDJooVqLDhe

Définition 23.63.
*Un **cercle** dans $\hat{\mathbb{C}}$ est une partie de la forme*

$$C(\omega, r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2\} \tag{23.139}$$

avec $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}$.

Dans la sphère de Riemann, aucun cercle ne contient le point ∞.

Exemple 23.64.
Trouvons le centre et le rayon du cercle d'équation

$$\bar{\omega}z + \omega\bar{z} = kz\bar{z} \tag{23.140}$$

avec $k \neq 0$. En divisant par k et en posant $\sigma = \omega/k$ nous avons :

$$z\bar{z} - \bar{\sigma}z - \sigma\bar{z} = 0. \tag{23.141}$$

Cela est un cercle de centre σ et de rayon $|\sigma|$. En effet si $z \in \mathbb{C}$ vérifie cette équation,

$$|z - \sigma|^2 = (z - \sigma)(\bar{z} - \bar{\sigma}) = \underbrace{z\bar{z} - \bar{\sigma}z - \sigma\bar{z}}_{=0} + |\sigma|^2 = |\sigma|^2, \tag{23.142}$$

c'est-à-dire que tous les points de $\mathbb{C}$ qui vérifient l'équation donnée sont à la distance $|\sigma|$ de σ. En particulier $z = 0$ est sur le cercle. △

23.6.1.3 Cercle-droite

Une chose de bien avec les équations complexes, c'est que nous pouvons écrire les droites et les cercles avec le même type d'équations.

LEMooHKHOooHpBuBZ

Lemme-Définition 23.65 ([682]).
*Un **cercle-droite** est l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que*

$$az\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = k \tag{23.143}$$

EQooUJAKooEVQNqa

avec $a, k \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$.

(1) Si $a = 0$, cela est une droite ;

(2) si $a \neq 0$, cela est un cercle.

(3) Un cercle-droite peut être l'ensemble vide.

Démonstration. Si $a = 0$ alors nous tombons tout de suite sur l'équation (23.135). Si $a \neq 0$ alors nous pouvons diviser par a, poser $\sigma = \omega/a$ et $l = k/a$ pour obtenir

$$z\bar{z} - \bar{\sigma}z - \sigma\bar{z} = l, \tag{23.144}$$

EQooNBILooArHPCG

qui est l'équation (23.138) d'un cercle … ou pas tout à fait. En effet, (23.144) serait l'équation du cercle de centre σ et de rayon r donné par $l = r^2 - |\sigma|^2$, c'est) dire

$$r^2 = l + |\sigma|^2, \tag{23.145}$$

alors que rien n'assure que le nombre $l + |\sigma|^2$ soit positif. Dans le cas où c'est positif, nous avons bien un cercle. Sinon c'est l'ensemble vide. □

REMooBMAEooHDvNID

Remarque 23.66.
Lorsque nous parlons de cercle-droite, nous parlons de partie de $\mathbb{C}$ et non de $\hat{\mathbb{C}}$ parce que l'équation (23.143) a du mal à traiter le cas $z = \infty$. À cause du fait que nous avons décider de donner le point ∞ à toutes les droites, la fusion des notions de droites et de cercles n'est pas totale ; en tout cas pas en une seule équation.

EXooKFBIooOJKjGL

Exemple 23.67 ([682]).
Soit le cercle de centre $\omega = ir$ et de rayon r. Quelle que soit la valeur de $r > 0$, ce cercle passe par le point 0 et l'axe réel lui est tangent. L'équation de ce cercle est :

$$z\bar{r} + irz - ir\bar{z} = 0. \tag{23.146}$$

Vu que $ir \neq 0$ nous pouvons diviser et obtenir

$$\frac{z\bar{z}}{ir} + z - \bar{z} = 0. \tag{23.147}$$

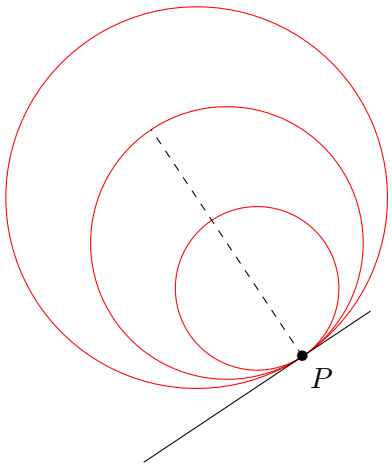
En faisant tendre r vers ∞ nous obtenons $z - \bar{z} = 0$, c'est-à-dire l'équation de la droite réelle.

Cela explique pourquoi il est souvent dit qu'une droite est un cercle dont le rayon est à l'infini. △

NORMooCXVJooMTMqEU

23.68.
Notons que l'exemple 23.67 est générique : prenez une droite ℓ, un point P sur ℓ, et considérez un cercle dont le centre est situé sur la perpendiculaire à ℓ passant par P, et dont le rayon est tel que le cercle passe par P. En prenant $|\omega - P| \to \infty$, l'équation du cercle devient celle de la droite ℓ.

Cela est particulièrement pratique lorsque nous travaillons dans $\hat{\mathbb{C}}$ parce nous y avons une notion précise du point à l'infini. Notons que (peut-être contre-intuitivement), il existe un seul point à l'infini dans $\hat{\mathbb{C}}$. Et ce point est le centre de tous les cercles que l'on veut transformer en droites. Cela pose évidemment la question de savoir comment on définit précisément un cercle dont le centre est réellement ∞.



23.6.1.4 Rotation-homothétie

Définition 23.69.
*Une **rotation-homothétie** est une application $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ de la forme $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Le nom provient du fait que si λ est réel, alors $z \mapsto \lambda z$ est une vraie homothétie, et si $\lambda = e^{i\theta}$ alors $z \mapsto e^{i\theta}z$ est une vraie rotation. Pour une valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ générique, l'application $z \mapsto \lambda z$ est une composée des deux.

23.6.1.5 Application linéaire

SSUBSooRBCWooSCIQEL

Nous nous en voudrions de ne pas parler d'applications linéaires lorsque nous parlons de géométrie sur $\hat{\mathbb{C}}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Lorsque nous parlons de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f\colon \hat{\mathbb{C}} &\to \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \alpha z + \beta, \end{aligned} \tag{23.148}$$

nous entendons implicitement que $f(\infty) = \infty$.

23.6.1.6 Inversion

SSUBSooPOUNooTPilbE

L'inversion d'un cercle de $\mathbb{R}^2$ est définie par la proposition 22.5. De nombreuses propriétés y sont décrites, y compris son écriture complexe dans la proposition 22.10. Tout cela était du temps de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{C}$, mais maintenant nous sommes dans $\hat{\mathbb{C}}$ et nous voulons plus.

DEFooIUTZooWRaXts

Définition 23.70 ([682]).
*Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}^*$. L'**inversion** de centre ω et de **puissance** R^2 est l'application*

$$\begin{aligned} i\colon \hat{\mathbb{C}} &\to \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \begin{cases} \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{\omega}} + \omega & si\ z \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\} \\ \infty & si\ z = \omega \\ \omega & si\ z = \infty. \end{cases} \end{aligned} \tag{23.149}$$

Notons que grâce aux conventions type $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$, nous pouvons nous contenter de la première formule pour tout $z \in \hat{\mathbb{C}}$, et nous n'avons en réalité pas besoin de décrire $i(\infty)$ et $i(\omega)$ séparément.

Exemple 23.71.
L'inversion de cercle de centre 0 et de rayon 1 est l'application $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$, que l'on prolonge avec $0 \mapsto \infty$ et $\infty \mapsto 0$. △

23.6.2 Homographies

La notion d'homographie est la définition 23.20. Pour une homographie $\phi\colon P_1(\mathbb{C}) \to P_1(\mathbb{C})$ nous avons un isomorphisme d'espace vectoriel $\bar{\phi}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Vue la bijection (23.130), nous voulons plutôt travailler avec $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qui est un ensemble avec lequel nous sommes plus familier. Nous allons donc travailler avec

$$\begin{aligned} &\tilde{\phi}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \\ &\tilde{\phi} = \varphi_0 \circ \phi \circ \varphi_0^{-1}. \end{aligned} \tag{23.150}$$

PROPooTZJBooPpowOo

Proposition 23.72.
L'application $\phi = \varphi_0^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ \varphi_0$ est une homographie de $P(\mathbb{C}^2)$ si et seulement si l'application $\tilde{\phi}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ est de la forme

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{23.151}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$.

Par convention nous posons $z/0 = \infty$ dès que $z \neq 0$; en particulier $\tilde{\phi}(\infty) = a/c$ et $\tilde{\phi}(-d/c) = \infty$.

Démonstration. Nous séparons la condition suffisante de la condition nécessaire.

(1) $\Rightarrow$ La condition $\pi \circ \bar{\phi} = \phi \circ \pi$ (de (23.32)) nous dit que

$$\big[\bar{\phi}(z_1, z_2)\big] = \phi\big([z_1, z_2]\big), \tag{23.152}$$

et comme $\bar{\phi}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel nous avons $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifiant $ad - cb \neq 0$ pour lesquels

$$\bar{\phi}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix}. \tag{23.153}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors nous avons

$$\tilde{\phi}(z) = (\varphi_0 \circ \phi)[z, 1] = \varphi_0\Big(\big[\bar{\phi}(z, 1)\big]\Big) = \varphi_0\big([az + b, cz + d]\big) = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{23.154}$$

EQooNWVZooUClQSd

Il est important de comprendre que cette formule fonctionne pour tout $z \in \mathbb{C}$. En effet nous pourrions avoir un doute sur $z = -d/c$. D'abord si $c = 0$ alors $d \neq 0$ et ce problème n'existe pas : le dénominateur est toujours non nul. Nous avons donc seulement un doute lorsque $c \neq 0$. Dans ce cas,

$$\tilde{\phi}(-d/c) = \frac{-\frac{ad}{c} + b}{0}. \tag{23.155}$$

Mais $c \neq 0$, donc le numérateur est non nul. Or lorsque $z \neq 0$ nous avons posé $z/0 = \infty$, donc dans notre cas,

$$\tilde{\phi}(-d/c) = \infty \tag{23.156}$$

automatiquement, et cela est encodé dans la formule (23.154).

Il nous reste à déterminer $\tilde{\phi}(\infty)$. Nous avons :

$$\tilde{\phi}(\infty) = (\varphi_0 \circ \phi)\big([1, 0]\big) = \varphi_0\big[\bar{\phi}(1, 1)\big] = \varphi_0\big([a, c]\big) = \begin{cases} a/c & \text{si } c \neq 0 \\ \infty & \text{si } c = 0 \end{cases} \tag{23.157}$$

où la distinction entre les deux cas n'est pas fondamentale parce que si $c = 0$ alors $a \neq 0$ et $a/c = \infty$.

(2) $\Leftarrow$

En notant $Z = [z_1, z_2]$ (pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$) nous avons

$$\phi\big([z_1, z_2]\big) = \varphi^{-1}\left(\frac{a\varphi_0(Z) + b}{c\varphi_0(Z) + d}\right) = \big[a\varphi_0(Z) + b, c\varphi_0(Z) + d\big]. \tag{23.158}$$

Nous définissons $\bar{\phi}$ par son action sur les vecteurs de base : $\bar{\phi}(1, 0) = (a, c)$ et $\bar{\phi}(0, 1) = (b, d)$. Nous avons bien l'isomorphisme d'espace vectoriel $\bar{\phi}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dont nous avons besoin pour la définition 23.20. D'abord le fait que $ad - cb$ soit non nul assure que le $\bar{\phi}$ ainsi défini est bien bijectif[9]. Et de plus ce $\bar{\phi}$ vérifie la condition

$$\begin{aligned}
\pi\big(\bar{\phi}(z_1, z_2)\big) &= \pi\big((az_1, cz_1) + (bz_2, dz_2)\big) && \text{(23.159a)}\\
&= [az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2] && \text{(23.159b)}\\
&= \big[a\varphi_0(Z) + b, c\varphi_0(Z) + d\big] && \text{(23.159c)}\\
&= \phi\big(\pi(z_1, z_2)\big). && \text{(23.159d)}
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la notion de classe pour diviser par z_2 et faire apparaitre $\varphi_0(Z)$.

[9] Si vous n'en êtes pas convaincu, écrivez la matrice de l'application qui envoie $(1, 0)$ sur (a, c) et $(0, 1)$ sur (b, d), et demandez-vous sous quelle condition elle est inversible.

□

Remarque 23.73.
En prenant les conventions relativement claires $\infty \times a = \infty$ (pour $a \neq 0$) et $\infty \pm a = \infty$ (avec $a \neq \infty$), alors tout est dans la formule

$$\bar{\phi}(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{23.160}$$

avec $ad - cb \neq 0$. Il n'y a pas besoin de traiter séparément le cas $z = \infty$ ou $z = -d/c$.

DEFooAMQHooPFUgIa

Définition 23.74.
*Nous aimons tellement l'identification $\varphi_0 \colon P(\mathbb{C}^2) \to \hat{\mathbb{C}}$ que nous allons parler d'**homographie** sur $\hat{\mathbb{C}}$ pour les applications $\tilde{\phi}$ de la forme*

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{23.161}$$

avec $ad - cb \neq 0$.

NORMooCVYKooYvjIeE

23.75.
La proposition 23.72 nous indique que les homographies de $\hat{\mathbb{C}}$ sont de la forme $\phi = \varphi_0^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ \varphi_0$ pour une homographie $\phi \colon P(\mathbb{C}^2) \to P(\mathbb{C}^2)$.

PROPooSQFOooRginjJ

Proposition 23.76 ([682])**.**
L'application $h \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ associée à une homographie est soit linéaire, soit de la forme $h = l_1 \circ \iota \circ l_2$ où l_i sont linéaires et ι est l'application $z \mapsto 1/z$.

Démonstration. Commençons par une remarque : lorsque nous parlons d'une application linéaire, c'est au sens de la note 23.6.1.5 qui explique qu'une application linéaire sur $\mathbb{C}$ est automatiquement prolongée à $\hat{\mathbb{C}}$ par $f(\infty) = \infty$.

Soit donc l'application

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{23.162}$$

Si $c = 0$, alors c'est une application linéaire et la preuve est terminée. Nous supposons que $c \neq 0$. Nous posons

$$l_2(z) = cz + d, \tag{23.163}$$

et ensuite $l_1(z) = \alpha z + \beta$ avec α et β à déterminer. Un peu de calcul :

$$(l_1 \circ \iota \circ l_2)(z) = l_1\left(\frac{1}{cz+d}\right) = \frac{\alpha + \beta cz + \beta d}{cz+d}, \tag{23.164}$$

et en imposant que cela soit égal à $\frac{az+b}{cz+d}$ nous trouvons $\beta = a/c$ et $\alpha = b - ad/c$. Il est vite vérifié que ces choix donnent le bon résultat. □

NORMooMMKOooQlzjqJ

23.77.
Vu que les applications linéaires sont des composées d'une translation et d'une rotation-homothétie, et que l'application i est une composée d'une inversion $z \mapsto 1/\bar{z}$ et d'une réflexion $z \mapsto \bar{z}$, toutes les homographies sont des composées des éléments suivants :

- inversion[10] $z \mapsto 1/\bar{z}$, prolongée par $i(\infty) = 0$ et $i(0) = \infty$;
- réflexion $z \mapsto \bar{z}$;
- translation $z \mapsto z + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$;
- rotation-homothétie $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Toutes ces opérations sont prolongées à $\hat{\mathbb{C}}$ par $1/\infty = 0$, $\lambda \cdot \infty = \omega$ (si $\lambda \neq 0$) et $\infty + \lambda = \infty$. Nous ne définissons pas $0 \cdot \infty$ et $\infty - \infty$.

Certes nous pouvons construire des homographies à partir d'ingrédients dont la conjugaison complexe. Il ne faudrait cependant pas déduire que cette conjugaison est une homographie.

LEMooGDDJooBpJlUf

Lemme 23.78.
La conjugaison complexe n'est pas une homographie.

[10] Oui, c'est l'inversion de la géométrie hyperbolique, voir 23.6.1.6.

Démonstration. Si elle l'était nous aurions des nombres $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et

$$\frac{az + b}{cz + d} = \bar{z} \tag{23.165}$$

EQooJMAZooVcJIAP

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

En posant $z = 0$ nous avons déjà $b/d = 0$, c'est-à-dire $b = 0$. Avec $z = 1$ nous trouvons alors $a/(c+d) = 1$, c'est-à-dire

$$a = c + d. \tag{23.166}$$

(1) **Si $ci + d \neq 0$**

Dans ce cas nous pouvons évaluer (23.165) en $z = i$ et avoir $a = -ci + d$. Mais comme nous avions déjà $a = c + d$ nous déduisons $c = 0$. Nous restons donc avec

$$\frac{a}{d} z = \bar{z} \tag{23.167}$$

pour tout z. En prenant $z = 1$ puis $z = i$, il est vite remarqué que cela n'est pas possible.

(2) **Si $ci + d = 0$**

Nous rappelons que $ad \neq 0$. Nous écrivons l'équation avec $z = -i$ pour trouver

$$\frac{-ai}{-ci + d} = i, \tag{23.168}$$

qui donne immédiatement $a = ci - d$. Nous avons donc les trois équations

$$\begin{cases} c = id & \text{(23.169a)} \\ a = ci - d & \text{(23.169b)} \\ a = c + d. & \text{(23.169c)} \end{cases}$$

Une tentative de résolution tombe rapidement sur une impossibilité (en substituant la première dans les deux autres et en comparant les deux valeurs de a par exemple).

□

La proposition suivante ressemble à s'y méprendre à la proposition 22.11, mais elle diffère en deux points. D'abord elle ne traite que de l'inversion par rapport à l'origine, mais surtout, elle traite le point $z = \infty$. C'est un avantage de travailler sur $\hat{\mathbb{C}}$ plutôt que sur $\mathbb{R}^2$.

PROPooEAKXooUIqWEv

Proposition 23.79 (Inversion de cercles et de droites)**.**
L'inversion dans $\hat{\mathbb{C}}$ envoie

(1) une droite passant par 0 sur elle-même

(2) une droite ne passant pas par 0 sur un cercle passant par 0.

(3) un cercle ne passant pas par 0 en un cercle ne passant pas par 0.

(4) un cercle passant par 0 en une droite ne passant pas par 0.

Démonstration. Décomposition en tous les cas possibles.

(1) **Droite passant par 0**

La façon la plus simple de traiter la droite passant par 0 est de l'écrire sous forme paramétrique :

$$z(t) = te^{i\theta} \tag{23.170}$$

pour θ fixé et $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. En appliquant l'inversion :

$$\iota\big(z(t)\big) = \frac{1}{(te^{i\theta})^*} = \frac{1}{t} e^{i\theta}. \tag{23.171}$$

Notons que les cas particuliers fonctionnent : pour $t = 0$ nous avons le point ∞ et pour $t = \infty$ nous avons 0.

(2) **Droite ne passant pas par 0**

Une droite ne passant par par $z = 0$ est un ensemble de la forme

$$d(\omega, k) = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } \bar{\omega}z + \omega\bar{z} = k\} \cup \{\infty\} \tag{23.172}$$

avec $k \neq 0$. Étant donné que ι est une bijection et même une involution nous avons $z \in \iota\big(d(\omega, k)\big)$ si et seulement si $\tau(z) \in d(\omega, k)$. L'équation est donc, pour $z \neq 0$:

$$\frac{\bar{\omega}}{z} + \frac{\omega}{\bar{z}} = k. \tag{23.173}$$

Et comme $z \neq 0$ nous pouvons multiplier par $z\bar{z}$ pour trouver $\bar{z}\bar{\omega} + z\omega = kz\bar{z}$. Donc

$$\iota\big(d(\omega, k)\big) = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } \bar{z}\bar{\omega} + z\omega = kz\bar{z}\} \cup \{0\}. \tag{23.174}$$

Dans l'ensemble, nous pouvons renommer z et $\bar{z}$ pour avoir une forme plus symétrique. De plus il se fait que $z = 0$ vérifie l'équation donnée ; nous pouvons donc lever la condition $z \in \mathbb{C}^*$ et ne plus ajouter $\{0\}$ à côté :

$$\iota\big(d(\omega, k)\big) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \bar{\omega}z + \omega\bar{z} = kz\bar{z}\}. \tag{23.175}$$

Cela est l'équation d'un cercle passant par l'origine (définition 23.63).

(3) **Cercle ne passant pas par 0**

Nous considérons le cercle $C(\omega, r)$ avec $r^2 \neq |\omega|^2$. Il ne contient ni ∞ ni 0 et nous avons alors

$$\iota\big(C(\omega, r)\big) = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } \frac{1}{z\bar{z}} - \bar{\omega}\frac{1}{\bar{z}} - \omega\frac{1}{z} = r^2 - |\omega|^2\}. \tag{23.176}$$

Vu que z n'est jamais nul nous pouvons multiplier l'équation par $z\bar{z}$:

$$\iota\big(C(\omega, r)\big) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \big(|\omega|^2 - r^2\big)z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = -1\}. \tag{23.177}$$

Le coefficient $|\omega|^2 - r^2$ est non nul par hypothèse et cet ensemble est un cercle par le lemme 23.65. Il ne passe manifestement pas par $z = 0$.

(4) **Cercle passant par 0**

Le cercle passe par 0, et donc son image par ∞. Nous écrivons alors

$$\iota\big(C(\omega, |\omega|)\big) = \iota\big(C(\omega, |\omega|) \setminus \{0\}\big) \cup \{\infty\}. \tag{23.178}$$

Nous avons

$$C(\omega, |\omega|) \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = 0\}, \tag{23.179}$$

et un calcul usuel donne

$$\iota\big(C(\omega, |\omega|) \setminus \{0\}\big) = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } 1 - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = 0\}, \tag{23.180}$$

et donc

$$\iota\big(C(\omega, |\omega|)\big) = d(\omega, 1), \tag{23.181}$$

en nous souvenant que le point ∞ est contenu dans $d(\omega, 1)$.

□

PROPooYFJBooAWxFIs

Proposition 23.80.
Une homographie conserve l'ensemble des droites et cercles de $\hat{\mathbb{C}}$.

Attention : cela ne veut pas dire qu'une homographie transforme une droite en une droite et un cercle en un cercle. Ça veut dire qu'une homographie transforme une droite en une droite ou un cercle et un cercle en une droite ou un cercle.

Démonstration. Nous savons par la proposition 22.11 et 23.77 que les homographies se décomposent en inversion, réflexion, translation et rotation-homothétie.

À part pour l'inversion, tout est clair comment ça fonctionne hein. En ce qui concerne l'inversion, nous avons la proposition 23.79 qui donne déjà toutes les réponses.

□

23.81.
Les homographies préservent les angles, c'est l'objet du théorème suivant. Il ne faudrait cependant pas croire que si A, B et C sont trois points distincts, l'angle entre $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ est le même que celui entre $\overline{f(A)f(C)}$ et $\overline{f(B)f(C)}$ dès que f est une homographie. Cela serait préserver les angles globalement, c'est-à-dire préserver les angles lorsque les points sont déplacés par f.

Nous allons regarder les angles locaux, c'est-à-dire lorsque les points sont déplacés par df.

Définition 23.82.
Nous disons qu'une application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ préserve localement les angles non orientés lorsque

$$\cos\big(df_a(u), df_a(v)\big) = \cos(u, v) \tag{23.182}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^2$ et $u, v \in \mathbb{R}^2$. Ici il est mieux de penser à $u, v \in T_a\mathbb{R}^2$ pour qui sait les espaces tangents en géométrie différentielle.

Voir la définition de l'angle 18.53.

Théorème 23.83.
Les homographies de $P(\mathbb{C}^2)$ préservent localement les angles non orientés.

Démonstration. En ce qui concerne les translations, dilatations et rotations, les choses sont claires. Vérifions pour l'inversion, qu'il faut interpréter dans $\mathbb{R}^2$. Pour $z = x + iy$ nous avons

$$\iota(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{23.183}$$

Nous devons donc étudier la fonction

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{x}{r^2}, -\frac{y}{r^2}\right) \end{aligned} \tag{23.184}$$

où nous avons posé $r^2 = x^2 + y^2$ pour simplifier les notations.

Soient deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$ et un point $a \in \mathbb{R}^2$. Nous devons prouver que

$$\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{dF_a(u) \cdot dF_a(v)}{\|dF_a(u)\|\|dF_a(v)\|}. \tag{23.185}$$

EQooRXSJooFnLVLC

Pour cela, nous pourrions calculer dF_a et passer en coordonnées polaires[679] mais nous préférons faire les calculs à la dure parce que nous avons Sage avec nous.

Nous notons A la matrice de dF en $a = (x, y)$ et nous avons

$$Au \cdot Av = A^tAu \cdot v \tag{23.186}$$

ainsi que $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{A^tAu \cdot u}$, de telle sorte qu'il devienne urgent de calculer A^tA. Voici le calcul :

```
var('y')

# les fonctions coordonnées
F1(x,y)=x/(x**2+y**2)
F2(x,y)=-y/(x**2+y**2)

# La matrice différentielle :
A=matrix( [  [F1.diff(x).simplify_full(),F1.diff(y).simplify_full()],[F2.↩
    diff(x).simplify_full(),F2.diff(y).simplify_full()]   ] )

# Quelqu'un peut expliquer pourquoi ceci ne fonctionne pas ?
# A=matrix( [  [F1.diff(x),F1.diff(y)],[F2.diff(x),F2.diff(y)]   ] ).↩
    simplify_full()

# A^tA
S=A.transpose()*A
S=S.simplify_full()      # Mais ça, ça marche !!
print(S)
```

tex/sage/sageSnip009.sage

Le résultat est que

$$A^tA = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^4} \end{pmatrix} = \frac{1}{r^4}\,\mathrm{Id}\,. \tag{23.187}$$

La vérification de (23.185) est alors immédiate. □

23.6.3 Birapport

Nous introduisons maintenant quelque chose qui s'appelle le « birapport » et qui n'est à priori pas du tout lié au birapport défini en 23.42.

DEFooQYHVooMZwQMB

Définition 23.84 (Birapport dans $\hat{\mathbb{C}}$[609])**.**
*Soient $a, b, c, x \in \hat{\mathbb{C}}$ où a, b et c sont distincts. Le **birapport** de ces quatre nombres est l'élément de $\hat{\mathbb{C}}$ donné par, si $a, b, c \neq \infty$:*

$$[a, b, c, x] = \frac{(a-c)(b-x)}{(b-c)(a-x)}, \tag{23.188}$$

EQooQJWZooQXKslh

et

$$[\infty, b, c, x] = \frac{b-x}{b-c} \tag{23.189a}$$

SUBEQooNSONooYUhuzB

$$[a, \infty, c, x] = \frac{a-c}{a-x} \tag{23.189b}$$

$$[a, b, \infty, x] = \frac{b-x}{a-x} \tag{23.189c}$$

23.85.
Notons la « logique » des cas particuliers. Pour le premier, si $a \to \infty$ tandis que les autres restent dans $\mathbb{C}$ alors $a - c$ et $a - x$ deviennent du même ordre de grandeur et se simplifient. Il reste les deux autres parties de la fraction.

C'est cette même logique qui, partant de $[a, b, \infty, x] = \frac{b-x}{a-x}$ donne

$$[a, b, \infty, \infty] = 1 \tag{23.190}$$

comme il se doit si nous avons l'intention de ressembler au lemme 23.47.

L'objet « birapport » introduit ici est évidemment lié au birapport sur $P(\mathbb{C}^2)$ défini plus haut. Le lien est la proposition suivante.

PROPooLKQQooEOrjwC

Proposition 23.86.
Soit l'application $\varphi_0 \colon P(\mathbb{C}^2) \to \hat{\mathbb{C}}$ définie en 23.36. Si $A, B, C, X \in P(\mathbb{C}^2)$ alors

$$[A, B, C, X]_{\varphi_0} = [\varphi_0(A), \varphi_0(B), \varphi_0(C), \varphi_0(X)]. \tag{23.191}$$

EQooEOZZooMRHJfH

Cela est une égalité dans $\hat{\mathbb{C}}$.

Démonstration. Nous écrivons $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$ avec $a_1, a_2, b_2, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Par définition $[A, B, C, X]_{\varphi_0} = (\varphi_0 \circ \phi)(X)$ où $\phi \colon P(\mathbb{C}^2) \to P(\mathbb{C}^2)$ est l'unique homographie telle que

SUBEQSooTFWTooRn

$$\phi[a_1, a_2] = [1, 0] \tag{23.192a}$$

$$\phi[b_1, b_2] = [0, 1] \tag{23.192b}$$

$$\phi[c_1, c_2] = [1, 1] \tag{23.192c}$$

Une des difficultés de cette preuve va être de calculer ce ϕ. D'abord nous pouvons introduire $\tilde{\phi} = \varphi_0 \circ \phi \circ \varphi_0^{-1}$ qui est obligatoirement (proposition 23.72) de la forme

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}. \tag{23.193}$$

Nous allons imposer les relations (23.192) pour déterminer les coefficients α, β, γ et δ.

D'abord

$$(\varphi_0^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ \varphi_0)\big([a_1, a_2]\big) = (\varphi_0^{-1} \circ \tilde{\phi})(a_1/a_2) \tag{23.194a}$$

$$= \varphi_0^{-1}\left(\frac{\alpha\frac{a_1}{a_2} + \beta}{\gamma\frac{a_1}{a_2} + \delta}\right) \tag{23.194b}$$

$$= \big[\alpha\frac{a_1}{a_2} + \beta, \gamma\frac{a_1}{a_2} + \delta\big]. \tag{23.194c}$$

Égaler cela à $[1,0]$ donne

$$\begin{cases} \alpha\frac{a_1}{a_2}+\beta\neq 0 & (23.195a)\\ \gamma\frac{a_1}{a_2}+\delta=0. & (23.195b)\end{cases}$$

Donc nous avons déjà

$$\tilde{\phi}(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma(z-\frac{a_1}{a_2})}=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma\big(z-\varphi_0(A)\big)}. \tag{23.196}$$

En y imposant la contrainte $(\varphi_0^{-1}\circ\tilde{\phi}\circ\varphi_0)([b_1,b_2])=[0,1]$ nous trouvons les contraintes

$$\begin{cases} \gamma\big(\varphi_0(B)-\varphi_0(A)\big)\neq 0 & (23.197a)\\ \beta=-\alpha\varphi_0(B). & (23.197b)\end{cases}$$

Nous avons décidé d'écrire $\varphi_0(A)$ au lieu de a_1/a_2 à la fois pour un soucis de simplification d'écriture et dans le but de ressembler à (23.191). En substituant :

$$\tilde{\phi}(z)=\frac{\alpha\big(z-\varphi_0(B)\big)}{\gamma\big(z-\varphi_0(A)\big)}. \tag{23.198}$$

La condition pour $[c_1,c_2]$ donne

$$\big[\alpha\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(B)\big),\gamma\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(A)\big)\big]=[1,1], \tag{23.199}$$

ce qui donne

$$\alpha\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(B)\big)=\gamma\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(A)\big). \tag{23.200}$$

Nous avons alors

$$\gamma=\alpha\frac{\varphi_0(C)-\varphi_0(B)}{\varphi_0(C)-\varphi_0(A)}, \tag{23.201}$$

et les α se simplifient dans la formule pour $\tilde{\phi}$:

$$\tilde{\phi}(z)=\frac{\big(z-\varphi_0(B)\big)\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(A)\big)}{\big(z-\varphi_0(A)\big)\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(B)\big)}. \tag{23.202}$$

Par la proposition 23.72, l'application $\varphi_0^{-1}\circ\tilde{\phi}\circ\varphi_0$ est une homographie. Nous pouvons donc calmement calculer le birapport $[A,B,C,X]_{\varphi_0}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}[A,B,C,X]_{\varphi_0}&=(\varphi_0\circ\phi)(X) && (23.203a)\\ &=(\varphi_0\circ\varphi_0^{-1}\circ\tilde{\phi}\circ\varphi_0)(X) && (23.203b)\\ &=\tilde{\phi}\big(\varphi_0(X)\big) && (23.203c)\\ &=\frac{\big(\varphi_0(X)-\varphi_0(B)\big)\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(A)\big)}{\big(\varphi_0(X)-\varphi_0(A)\big)\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(B)\big)} && (23.203d)\\ &=[\varphi_0(A),\varphi_0(B),\varphi_0(C),\varphi_0(A)]. && (23.203e)\end{aligned}$$

□

PROPooQGPFooReNaGq

Proposition 23.87.
Les homographies de $\hat{\mathbb{C}}$ conservent le birapport.

Démonstration. Ici le mot « homographie » réfère à la définition 23.74 et le birapport à 23.84. Soient $a,b,c,x\in\hat{\mathbb{C}}$ et une homographie $\tilde{\phi}\colon\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$. Il existe une homographie $\phi\colon P(\mathbb{C}^2)\to P(\mathbb{C}^2)$ telle que $\tilde{\phi}=\varphi_0\circ\phi\varphi_0^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned}\big[\tilde{\phi}(a),\tilde{\phi}(b),\tilde{\phi}(c),\tilde{\phi}(x)\big]&=\big[(\phi\circ\varphi_0^{-1})(a),(\phi\circ\varphi_0^{-1})(b),(\phi\circ\varphi_0^{-1})(c),(\phi\circ\varphi_0^{-1})(x),\big]_{\varphi_0} && (23.204a)\\ &=\big[\varphi_0^{-1}(a),\varphi_0^{-1}(b),\varphi_0^{-1}(c),\varphi_0^{-1}(x),\big]_{\varphi_0} && (23.204b)\\ &=[a,b,c,x]. && (23.204c)\end{aligned}$$

Justifications :

- Identification des birapports sur $P(\mathbb{C}^2)$ et sur $\hat{\mathbb{C}}$, proposition 23.86.

- Invariance du birapport sur les homographies (dans $P(\mathbb{C}^2)$), proposition 23.49.

□
PROPooSGCJooLnOLCx

Proposition 23.88.
Soient des points a, b, c, x dans $\hat{\mathbb{C}}$ avec a, b, c distincts. Ils sont alignés ou cocycliques si et seulement si $[a, b, c, x] \in \hat{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Nous allons faire plusieurs cas. Mais dans tous les cas vous pouvez relire la définition des angles orientés 18.146 et la partie sur les angles dans les nombres complexes 18.10.11.

(1) **Tous les points sont distincts et dans $\mathbb{C}$**

D'une part, nous savons que le nombre complexe $re^{i\theta}$ est réel si et seulement si $\theta \in [0]_\pi$, et d'autre part l'argument du birapport (23.188) est

$$[\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}] + [\overrightarrow{xb}, \overrightarrow{xa}]. \tag{23.205}$$

Le birapport est réel si et seulement si

$$[\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}] - [\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}] \in [0]_\pi. \tag{23.206}$$

À gauche nous avons une classe modulo 2π et à droite une classe modulo π. L'égalité signifie qu'il y a un représentant du membre de gauche qui appartient au membre de droite. Si vous aimez faire très attention à ce que signifient les notations, voici trois manières d'écrire la condition, par ordre croissant de précision :

$$[\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}] - [\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}] = [0]_\pi, \tag{23.207a}$$
$$[\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}] - [\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}] \in [0]_\pi, \tag{23.207b}$$
$$[\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}] - [\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}] \subset [0]_\pi. \tag{23.207c}$$
SUBEQooEAGIooIKdPQV

Nous avons donc que le birapport est réel si et seulement si la condition (23.207c) est vérifiée. D'après le théorème 18.154, cette dernière condition est équivalente à dire que les points a, b, c et x sont alignés.

(2) **Pas quatre points distincts, dans $\mathbb{C}$**

Nous supposons encore que a, b, c et x sont dans $\mathbb{C}$. Mais nous supposons que x est un de a, b ou c. Vu que par hypothèse a, b et c sont distincts, c'est le seul cas à considérer dans la catégorie des 4 points non distincts.

Trois points sont toujours alignés ou cocycliques[11]. Donc nous devons seulement montrer que dans ce cas le birapport est toujours dans $\hat{\mathbb{R}}$. Par définition,

- Si $x = a$ alors $[a, b, c, x] = \infty$,
- Si $x = b$ alors $[a, b, c, x] = 0$,
- Si $a = c$ alors $[a, b, c, x] = 1$.

Dans tous les cas de figure le birapport est dans $\hat{\mathbb{R}}$.

À ce niveau de la preuve nous devons encore vérifier les cas où a, b, c ou x valent ∞. Si l'un de a, b ou c est ∞ et si x l'est aussi, alors, comme ∞ est aligné avec tout, nous avons seulement une droite passant par deux points. Il nous faut donc seulement regarder les cas où un seul des 4 points est ∞.

(1) **Si $a = \infty$** Le birapport est alors (par (23.189a))

$$[\infty, b, c, x] = \frac{b - x}{a - x}, \tag{23.208}$$

qui est un nombre à priori complexe dont le dénominateur est supposé non nul parce que le cas $a = x$ est déjà traité. L'argument de ce nombre est dans la classe de l'angle orienté

$$\arg\left(\frac{b - x}{a - x}\right) \in [\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}]. \tag{23.209}$$

Le birapport est réel si et seulement si le membre de gauche est dans $[0]_\pi$. Et cela est justement le cas où le membre de droite donne des points alignés.

Les cas $b = \infty$, $c = \infty$ et $x = \infty$ se traitent de la même manière. □

[11] Si ils ne sont pas alignés, prendre la médiatrice du segment $[a, b]$ et celle de $[b, c]$, et l'intersection vous donnera le centre d'un cercle passant par a, b et c.

23.6.4 Division harmonique

Définition 23.89.
*Nous disons que les éléments a, b, c et x de $\hat{\mathbb{C}}$ sont en **division harmonique** lorsque $[a,b,c,x]=-1$.*
NORMooUWYDooAZTTWu

23.90.
Une chose qui sera utile par la suite est de remarquer que $[a,b,c,\infty]=-1$ lorsque $c=\frac{a+b}{2}$.

Nous allons maintenant voir comment, pour $a,b,c\in\mathbb{C}$ donnés nous pouvons construire x tels que a,b,c,x soient en division harmonique. Vu que trois points sont soit cocycliques soit alignés nous divisons la construction en deux parties.

Notons que si nous trouvons une construction qui donne un point x vérifiant $[a,b,c,x]=-1$ alors nous prouvons au passage que la construction ne dépend pas des choix intermédiaires parce que il n'existe qu'un unique x tel que $[a,b,c,x]=-1$ lorsque a,b,c sont donnés.

LEMooAEDTooKsUoPw

Lemme 23.91 ([683, 684])**.**
Soient a,b,c cocycliques dans $\mathbb{C}$. Nous nommons $\mathcal{C}$ le cercle contenant a, b et c ainsi que T_a et T_b les tangentes à $\mathcal{C}$ en a et b. Soit $m=T_a\cap T_b$ et la droite $L=(mc)$. Alors le point

$$x=(mc)\cap\mathcal{C} \tag{23.210}$$

vérifie $[a,b,c,x]=-1$.

Si $m=\infty$ (arrive lorsque $T_a\parallel T_b$) alors en guise de L nous prenons la parallèle à T_a passant par c.

Démonstration. Nous séparons les cas suivant que $m=\infty$ ou non.

(1) $\underline{m=\infty}$

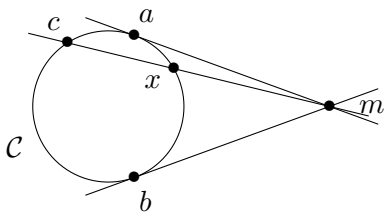
Les tangentes à $\mathcal{C}$ en a et en b sont parallèles, c'est-à-dire que ces points sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$. Les homographies préservent le birapport (proposition 23.87), et les rotations, dilatations et translations sont des homographies (voir 23.77).

Nous pouvons donc nous ramener au cas où $\mathcal{C}$ est centré en 0 et de rayon 1 avec $a=i$ et $b=-i$. Dans ce cas, $c=e^{i\theta}$. Vu que x est donné par l'intersection entre le cercle et la droite horizontale passant par c nous avons $x=e^{i(\pi-\theta)}$. Le birapport se calcule explicitement :

$$[a,b,c,x]=\frac{(i-e^{i\theta})(-i-e^{i(\pi-\theta)})}{(-i-e^{i\theta})(i-e^{i(\pi-\theta)})}=-1. \tag{23.211}$$

(2) $\underline{m\neq\infty}$

Nous sommes dans la situation suivante où à une translation près nous supposons $x=0$:



Nous allons prouver que dans ce cas, $[a,b,c,x]=-1$. Pour cela nous considérons l'inversion de centre x (qui est $x=0$ par translation). Soit $\tilde{\phi}$ cette homographie. Elle conserve le birapport, il nous allons voir que calculer $[\tilde{\phi}(a),\tilde{\phi}(b),\tilde{\phi}(c),\tilde{\phi}(x)]$ se révèle être plus facile[12].

Nous nommons $A=(am)$, $B=(bm)$, $C=(cm)$ et $\mathcal{C}$, le cercle. Nous allons maintenant faire intensément usage de la proposition 23.79. Nous avons :

- $\tilde{\phi}(A)$ est un cercle passant par 0.
- $\tilde{\phi}(B)$ est un cercle passant par 0.
- $\tilde{\phi}(C)$ est la droite C.
- $\tilde{\phi}(\mathcal{C})$ est une droite ne passant pas par 0.

[12] Si vous n'avez peur d'aucun calculs, il suffit de poser $a=e^{i\theta}$, $b=e^{-i\theta}$ et $c=e^{i\sigma}$ et vous êtes théoriquement capable de calculer les coordonnées de tous les points, y compris de x en termes de θ et σ. Ensuite le calcul du birapport est explicite.

Les droites A et B se coupent en m et en ∞ (qui sont des points distincts). Donc les cercles $\tilde{\phi}(A)$ et $\tilde{\phi}(B)$ se coupent en 0 et $\tilde{\phi}(m)$, aucun de ces deux points n'est sur la droite $\tilde{\phi}(\mathcal{C})$.

Par tangence, la droite A et le cercle $\mathcal{C}$ se coupent en un seul point (a). Donc $\tilde{\phi}(A)$ coupe $\tilde{\phi}(\mathcal{C})$ en un seul point, $\tilde{\phi}(a)$. Idem pour le cercle $\tilde{\phi}(B)$.

Nous avons donc que les cercles $\tilde{\phi}(A)$ et $\tilde{\phi}(B)$ sont tangents à la droite $\tilde{\phi}(\mathcal{C})$ et se coupent en exactement deux points distincts (qui sont donc du même côté de la droite).

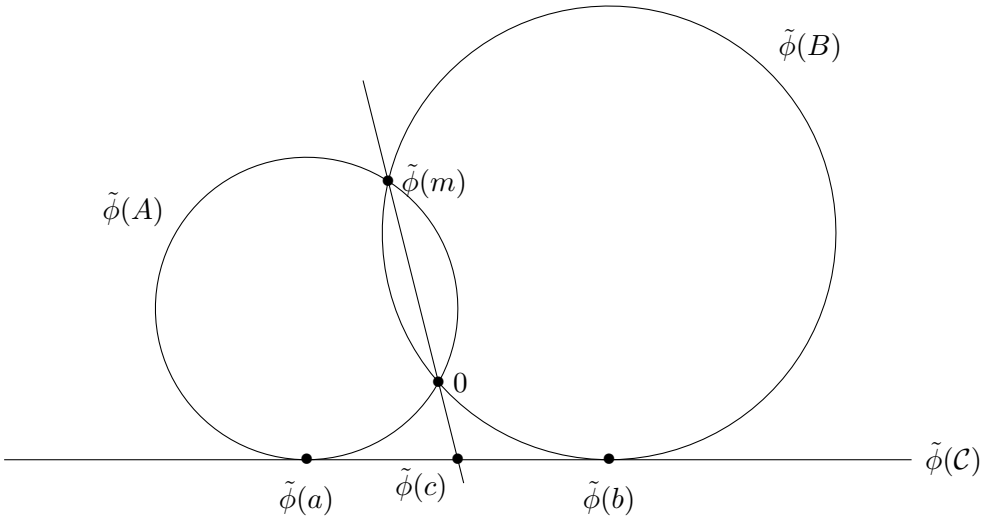
Nous nous intéressons à la droite $\tilde{\phi}(C)$. C'est une droite parce que c'est l'image d'une droite passant par 0. Elle passe par 0, par $\tilde{\phi}(c)$ et $\tilde{\phi}(m)$. Le fait qu'elle passe par 0 et $\tilde{\phi}(m)$ fait que c'est la droite passant par les deux intersections des cercles. Vu que $c \in \mathcal{C} \cap C$, le point d'intersection $\tilde{\phi}(C) \cap \tilde{\phi}(\mathcal{C})$ est $\tilde{\phi}(c)$.

Quelle est la puissance du point $\tilde{\phi}(c)$ par rapport au cercle $\tilde{\phi}(A)$? En la calculant avec la droite $\tilde{\phi}(C)$, qui intersecte les deux cercles aux points déjà étudiés, la puissance est :

$$k = d\big(\tilde{\phi}(c), 0\big) \times d\big(\tilde{\phi}(c), \tilde{\phi}(m)\big). \tag{23.212}$$

Vu que ces points sont également sur le cercle $\tilde{\phi}(B)$, la puissance de $\tilde{\phi}(c)$ par rapport à ce second point est la même.

Tout cela justifie le dessin suivant[13] :



Mais la droite passant par $\tilde{\phi}(a)$ et $\tilde{\phi}(c)$ (qui est tangente au cercle) permet également de calculer cette puissance :

$$k = d\big(\tilde{\phi}(a), \tilde{\phi}(c)\big). \tag{23.213}$$

Idem pour la puissance par rapport à l'autre cercle :

$$k = d\big(\tilde{\phi}(b), \tilde{\phi}(c)\big). \tag{23.214}$$

Nous en déduisons que $\tilde{\phi}(c)$ est le milieu entre $\tilde{\phi}(a)$ et $\tilde{\phi}(b)$.

Du coup

$$\big[\tilde{\phi}(a), \tilde{\phi}(b), \tilde{\phi}(c), \tilde{\phi}(x)\big] = \big[\tilde{\phi}(a), \tilde{\phi}(b), \tilde{\phi}(c), \infty\big] = -1 \tag{23.215}$$

en vertu de ce que nous avons raconté en 23.90.

□
LEMooYBTHooABWkeo

Lemme 23.92 ([684]).
Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ colinéaires. Soit m un point hors de cette droite. Nous considérons une droite issue de c coupant $[ma]$ en p et $[mb]$ en q.

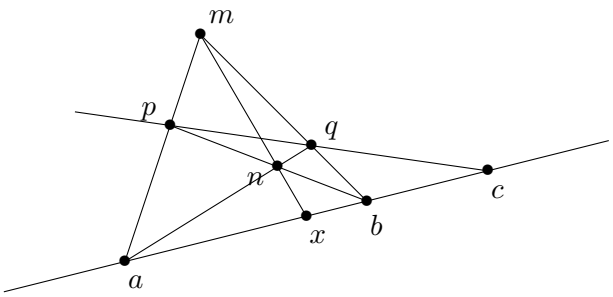
Nous construisons $n = (aq) \cap (pb)$ et finalement $x = (mn) \cap (ab)$.

À la fin nous avons

$$[a, b, c, x] = -1. \tag{23.216}$$

[13] Bien que ce ne soit pas strictement nécessaire à la preuve, est-ce que vous savez si les deux cercles ont le même rayon ? Et si par hasard la droite $\big(\tilde{\phi}(m)\tilde{\phi}(c)\big)$ n'arrive pas perpendiculairement à $\tilde{\phi}(\mathcal{C})$?

Démonstration. Commençons par un dessin de la situation :



Les points a, b et m ne sont pas alignés, et nous pouvons les utiliser comme repère barycentrique (voir 11.51 pour savoir en deux mots ce que c'est). Nous nommons (α,β,γ) les coordonnées de n dans ce système, c'est-à-dire que

$$\alpha\overrightarrow{na}+\beta\overrightarrow{nb}+\gamma\overrightarrow{nm}=0. \tag{23.217}$$

Dans notre contexte, nous pouvons voir le vecteur $\overrightarrow{st}$ comme une façon d'écrire le nombre $t-s$. Par la proposition 11.58 nous savons les coordonnées barycentriques de p, x et q en regardant le triangle acb. Voici les coordonnées et les relations qu'elles signifient : SUBEQSooKKIXooZbWyHe

$$n=(\alpha,\beta,\gamma), \qquad \alpha\overrightarrow{na}+\beta\overrightarrow{nb}+\gamma\overrightarrow{nm}=0 \tag{23.218a}$$
$$p=(\alpha,0,\gamma), \qquad \alpha\overrightarrow{pa}+\gamma\overrightarrow{pm}=0 \tag{23.218b}$$
$$q=(0,\beta,\gamma), \qquad \beta\overrightarrow{qb}+\gamma\overrightarrow{qm}=0 \tag{23.218c}$$
$$x=(\alpha,\beta,0). \qquad \alpha\overrightarrow{xa}+\beta\overrightarrow{xb}=0. \tag{23.218d}$$

SUBEQooRUUDooDGsMoq

Nous voudrions maintenant voir les coordonnées de c. Nous posons $c=(\lambda,\mu,\sigma)$:

$$\lambda\overrightarrow{ca}+\mu\overrightarrow{cb}+\sigma\overrightarrow{cm}=0. \tag{23.219}$$

EQooZKBSooZQzqrV

Mais a, b et c sont alignés, donc $\overrightarrow{ca}$ et $\overrightarrow{cb}$ sont colinéaires, alors que $\overrightarrow{cm}$ n'est pas aligné avec les deux autres. L'annulation (23.219) demande donc l'annulation séparément

$$\begin{cases} \sigma\overrightarrow{cm}=0 & \text{(23.220a)}\\ \lambda\overrightarrow{ca}+\mu\overrightarrow{cb}=0. & \text{(23.220b)} \end{cases}$$

SUBEQooOTAOooQLndsd

Nous en déduisons que $\sigma=0$ et aussi que λ et μ ne sont pas nuls. Nous posons arbitrairement $\lambda=1$ parce que les coordonnées barycentriques sont définies à coefficient multiplicatif près.

Nous imposons à présent le fait que p, q et c sont alignés. Pour cela nous devons faire apparaitre les vecteurs $\overrightarrow{pq}$, $\overrightarrow{pc}$, $\overrightarrow{pc}$. Vu le dessin et les relations disponibles (23.218) le mieux est d'utiliser les relations de Chasles (proposition 11.5) pour faire $\overrightarrow{ca}=\overrightarrow{cp}+\overrightarrow{pa}$ et $\overrightarrow{cb}=\overrightarrow{cq}+\overrightarrow{qb}$. La relation (23.220b) devient :

$$\overrightarrow{cp}+\overrightarrow{pa}+\mu(\overrightarrow{cq}+\overrightarrow{qb})=0. \tag{23.221}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{cp}$ et $\overrightarrow{cq}$ sont alignés, donc nous les écrivons ensemble. Les vecteurs $\overrightarrow{pa}$ et $\overrightarrow{qb}$ se transforment en utilisant les relations (23.218) :

$$\overrightarrow{cp}+\mu\overrightarrow{cq}-\frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{pm}-\mu\frac{\gamma}{\beta}\overrightarrow{qm}. \tag{23.222}$$

Enfin nous voulons faire la somme du terme $\overrightarrow{pm}$ avec le terme $\overrightarrow{qm}$. D'abord on change le signe :

$$\overrightarrow{cp}+\mu\overrightarrow{cq}-\frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{pm}+\frac{\mu\gamma}{\beta}\overrightarrow{mq} \tag{23.223}$$

ensuite nous écrivons

$$\frac{\mu\gamma}{\beta}=\frac{\mu\gamma}{\beta}+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}, \tag{23.224}$$

et

$$\overrightarrow{cp}+\mu\overrightarrow{cq}-\frac{\gamma}{\alpha}(\overrightarrow{pm}+\overrightarrow{mq})+\left(\frac{\mu\gamma}{\beta}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\overrightarrow{mq}=0. \tag{23.225}$$

Tout cela pour

$$\overrightarrow{cp}+\mu\overrightarrow{cq}-\frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{pq}+\left(\frac{\mu\gamma}{\beta}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\overrightarrow{mq}=0. \tag{23.226}$$

Le dernier terme n'est pas colinéaire aux deux premiers et s'annule donc séparément :

$$\frac{\mu\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0. \tag{23.227}$$

Cela donne $\mu = -\beta/\alpha$.

Au final nous avons

$$\overrightarrow{ca} - \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{cb} = 0 \tag{23.228}$$

et donc

$$\alpha\overrightarrow{ca} - \beta\overrightarrow{cb} = 0, \tag{23.229}$$

EQooWKBWooEWhDjM

ce qui donne les coordonnées $(\alpha, -\beta, 0)$ pour le point c.

Vu que nous somme dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}$, ce que nous notons $\overrightarrow{AB}$ n'est rien d'autre que la différence $B - A$ dans $\mathbb{C}$[14]. La relation (23.229) signifie donc

$$\alpha(a - c) = \beta(b - c). \tag{23.230}$$

Nous avons alors :

$$\frac{a - c}{b - c} = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{23.231}$$

Par ailleurs, la relation (23.218d) à propos des coordonnées de x donne

$$\frac{a - x}{b - x} = -\frac{\beta}{\alpha}. \tag{23.232}$$

En égalisant les deux valeurs de β/α nous trouvons :

$$\frac{a - c}{b - c} = \frac{x - a}{b - x}, \tag{23.233}$$

ce qui donne (via un petit jeu de signes)

$$\frac{(c - a)(x - b)}{(c - b)(x - a)} = -1. \tag{23.234}$$

C'est cela que nous voulions. □

23.6.5 Groupe circulaire

Nous avons vu que les homographies préservent l'ensemble des cercles et droites. Nous pouvons nous demander quel est le groupe maximum préservant l'ensemble des cercles et droites.

Définition 23.93.
*Le **groupe circulaire** de $\mathbb{C}$ est le groupe de transformations de $\hat{\mathbb{C}}$ engendré*[15] *par les homographies*[16] *et la conjugaison complexe. Le groupe circulaire de l'espace projectif est l'ensemble des applications de la forme $\varphi_0^{-1} \circ f \circ \varphi_0$ où f est un élément du groupe circulaire de $\mathbb{C}$.*

Vu le lemme 23.78, la conjugaison complexe n'est pas une homographie. Donc cette définition n'est pas stupide : le groupe circulaire est strictement plus grand que le groupe des homographies.

LEMooOPOMooWZLSeH

Lemme 23.94.
Soit une application $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fixant 1 et 0 et préservant les divisions harmoniques (c'est-à-dire tel que son prolongement à $\hat{\mathbb{C}}$ donné par $\alpha(\infty) = \infty$ préserve les divisions harmoniques). Alors α est un automorphisme de corps[17].

Démonstration. Nous savons que si $a, b, c \in \mathbb{C}$ nous avons $c = (a + b)/2$ si et seulement si $[a, b, c, \infty] = -1$. Vu que α préserve les divisions harmoniques nous avons équivalence entre les affirmations suivantes :

$$c = \frac{a + b}{2} \tag{23.235a}$$

$$[a, b, c, \infty] = -1 \tag{23.235b}$$

$$[\alpha(a), \alpha(b), \alpha(c), \alpha(\infty)] = -1 \tag{23.235c}$$

$$\frac{\alpha(a) + \alpha(b)}{2} = \alpha(c). \tag{23.235d}$$

[14] Les mauvaise langues diront que tout le chapitre sur les espaces affines, et surtout la partie sur les barycentres ne sont rien d'autres que le snobisme d'écrire $\overrightarrow{xy}$ au lieu de $y - x$. C'est aussi une facilité d'écriture.
[15] Définition 1.432.
[16] Homographie de $\hat{\mathbb{C}}$: définition 23.74.
[17] Définition 1.98.

Donc α préserve les milieux : pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ nous avons

$$\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\alpha(a)+\alpha(b)}{2}. \tag{23.236}$$

En particulier, cette relation avec $b = 0$ donne (parce que $\alpha(0) = 0$) : $\alpha(a/2) = \alpha(a)/2$. Nous avons au final, en utilisant cela en conjonction avec (23.236) :

$$\frac{\alpha(a)+\alpha(b)}{2} = \alpha\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\alpha(a+b)}{2}. \tag{23.237}$$

Cela démontre déjà que

$$\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b). \tag{23.238}$$

En particulier $\alpha(-a) = \alpha(0-a) = \alpha(0) - \alpha(a) = -\alpha(a)$.

Nous passons maintenant à la démonstration du fait que $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$. Pour tout a différent de 0 et ± 1 nous avons

$$[a, -a, a^2, 1] = \frac{(a-a^2)(-a-1)}{(-a-a^2)(a-1)} = -1. \tag{23.239}$$

Et en prenant $\alpha(a)$ en guise de a nous avons aussi

$$[\alpha(a), -\alpha(a), \alpha(a)^2, \alpha(1)] = -1. \tag{23.240}$$

Vu que α préserve les divisions harmoniques, l'équation (23.239) donne aussi

$$\big[\alpha(a), \alpha(-a), \alpha(a^2), \alpha(1)\big] = -1, \tag{23.241}$$

c'est-à-dire

$$\big[\alpha(a), -\alpha(a), \alpha(a^2), 1\big] = -1. \tag{23.242}$$

Comparant (23.240) avec (23.242) et en tenant compte de l'unicité du birapport[18] nous avons

$$\alpha(a^2) = \alpha(a)^2. \tag{23.243}$$

Avec cela nous pouvons y aller en remarquant que

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \tag{23.244}$$

Nous appliquons α à cette dernière équations en tenant compte de ce que nous savons déjà

$$\alpha(ab) = \left(\frac{\alpha(a)+\alpha(b)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha(a)-\alpha(b)}{2}\right)^2 = \alpha(a)\alpha(b). \tag{23.245}$$

□

Théorème 23.95 ([684, 685])**.**
Le groupe circulaire de $\mathbb{C}$ est le groupe des bijections $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ préservant l'ensemble des cercles-droites.

Démonstration. L'inclusion dans un sens est facile : les homographies conservent l'ensemble des cercles et droites par la proposition 23.80. Et la conjugaison complexe aussi.

Soit une bijection $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ préservant les cercles-droites. Nous supposons dans un premier temps que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(\infty) = \infty$.

(1) **Pour f vérifiant $f(0, 1, \infty) = 0, 1, \infty$**

Si $\mathcal{C}$ est un cercle alors $f(\mathcal{C})$ est un cercle ou une droite, mais vu que $\mathcal{C}$ ne contient pas ∞, l'ensemble $f(\mathcal{C})$ ne le contient pas non plus. Donc f transforme un cercle en un cercle et une droite en une droite.

(1a) **f préserve les divisions harmoniques**

Soient a, b, c, x dans $\hat{\mathbb{C}}$ tels que $[a, b, c, x] = -1$. Nous allons prouver que $[f(a), f(b), f(c), f(x)] = -1$.

[18] C'est-à-dire que si trois éléments du birapport sont donnés, le quatrième est fixé. C'est une variation sur la thème de la proposition 23.48(2).

Si a, b et c sont colinéaires, nous suivons la construction du lemme 23.92. Soit m hors de la droite (ab) et une droite D passant par c et coupant $[ma]$ en p et $[mb]$ en q. Nous posons $n = (pb) \cap (qa)$. Alors $x = (mn) \cap (ac)$.

L'application f est une bijection qui respecte les intersectons, les tangences, les cercles et les droites). Le point $f(m)$ est hors de la droite $\big(f(a)f(b)\big)$. La droite $f(D)$ passe par $f(c)$ et coupe les segments $[f(m)f(a)]$ en $f(p)$ et $[f(m)f(b)]$ en $f(q)$. Alors nous avons

$$f(n) = \big(f(p)f(b)\big) \cap \big(f(q)f(a)\big) \tag{23.246}$$

et aussi

$$f(x) = \big(f(m)f(n)\big) \cap \big(f(a)f(c)\big) \tag{23.247}$$

Donc $f(x)$ se construit à partir de $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ en suivant la même construction que x à partir de a, b et c. Nous en concluons que $[f(a), f(b), f(c), f(x)] = -1$.

Si a, b et c sont cocycliques, le même raisonnement, en suivant le lemme 23.91 nous donne le même résultat.

(1b) **f est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$**

C'est le lemme 23.94.

(1c) **Et enfin ...**

Notre application f est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$ qui fixe $\mathbb{R}$ parce qu'elle laisse invariante les droites dans $\mathbb{C}$. Donc la proposition 6.6 nous dit que f est soit l'identité soit la conjugaison complexe. Dans les deux cas, f est dans le groupe circulaire.

(2) **Pour f plus générale**

Nous ne supposons plus que f fixe 0, 1 et ∞. En tout cas les nombres $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(\infty)$ sont distincts parce que f est une bijection. Nous pouvons considérer une homographie[19] $\phi\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ telle que $\phi(1) = f^{-1}(1)$, $\phi(0) = f^{-1}(0)$ et $\phi(\infty) = f^{-1}(\infty)$. Dans ce cas l'application

$$g = f \circ \phi \tag{23.248}$$

vérifie $g(1) = 1$, $g(0) = 1$ et $g(\infty) = \infty$ tout en continuant à transformer un cercle-droite en un cercle-droite. Donc $f \circ \phi$ est soit l'identité soit la conjugaison complexe. Avec ça, l'application

$$f = g \circ \phi^{-1} \tag{23.249}$$

est la composée d'une homographie avec soit l'identité soit la conjugaison complexe. Elle est donc dans le groupe circulaire.

□

23.6.6 Action du groupe modulaire

Le **demi-plan de Poincaré** est l'ensemble

$$P = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Im(z) > 0\}. \tag{23.250}$$

Le **groupe modulaire** est le quotient de groupes

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \frac{\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})}{\mathbb{Z}_2}. \tag{23.251}$$

Ce sont donc les matrices au signe près de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{23.252}$$

où a, b, c et d sont entiers tels que $ad - cb = 1$.

[19] Attention : ici nous parlons d'homographies de $\hat{\mathbb{C}}$, pas de $P(\mathbb{C}^2)$. L'existence d'une telle application demande de composer le corolaire 23.35 avec l'application φ_0 et la définition 23.74 et 23.75.

ThoItqXCm

Théorème 23.96 ([686]).
Le groupe modulaire agit fidèlement (définition 2.31) sur le demi-plan de Poincaré par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{23.253}$$

EqVXvwlR

L'ensemble $D = D_1 \cup D_2$ avec

$$D_1 = \{z \in P \text{ tel que } |z| > 1, -\frac{1}{2} \leqslant \Re(z) < \frac{1}{2}\} \tag{23.254a}$$

$$D_2 = \{z \in P \text{ tel que } |z| = 1, -\frac{1}{2} \leqslant \Re(z) \leqslant 0\} \tag{23.254b}$$

est un domaine fondamental (définition 2.38) de cette action.

De plus si nous notons

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{23.255}$$

alors pour tout $z \in P$, il existe $A \in \mathrm{gr}(S,T)$ telle que $A * z \in D$.

Démonstration. Nous divisions la preuve en plusieurs étapes.

(1) **Bien définie**

D'abord il faut remarquer que l'action (23.253) est bien définie par rapport au quotient : $A * z = (-A) * z$. La vérification est immédiate.

(2) **Interne**

Montrons que si $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ et $z \in P$ alors $A * z \in P$. Nous avons

$$A * z = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{a|z|c + azd + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}, \tag{23.256}$$

et donc en décomposant $z = \Re(z) + i\Im(z)$,

$$\Im(A*z) = \Im\left(\frac{azd+bc\bar{z}}{|cz+d|^2}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\Im(z) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2} \tag{23.257}$$

où nous avons tenu compte de $ad - bc = 1$. Donc l'action respecte la (stricte) positivité de la partie imaginaire.

(3) **Action**

Nous vérifions maintenant que la formule donne bien une action : $A * (B * z) = (AB) * z$. Cela est un bon calcul :

$$A * (B * z) = A * \left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) \tag{23.258a}$$

$$= \frac{a\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) + b}{c\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) + d} \tag{23.258b}$$

$$= \frac{a(a'z+b') + b(c'z+d')}{c(a'z+b') + d(c'z+d')} \tag{23.258c}$$

$$= \frac{(aa'+bc')z + (ab'+bd')}{(ca'+dc')z + (cb'+dd')} \tag{23.258d}$$

$$= \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ a'c+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix} * z \tag{23.258e}$$

$$= (AB) * z. \tag{23.258f}$$

(4) **Fidèle**

Soit $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ tel que pour tout $z \in P$ nous ayons

$$\frac{az+b}{cz+d} = z. \tag{23.259}$$

Alors nous avons

$$cz^2 + (d-a)z + b = 0. \tag{23.260}$$

Cela est donc un polynôme en z qui s'annule sur un ouvert[20] (le demi-plan de Poincaré). Il doit donc être identiquement nul, donc $c = b = a - d = 0$. Si vous n'y croyez pas, écrivez pour $z = \epsilon i$ (avec $\epsilon > 0$) :

$$-c\epsilon^2 + \epsilon(d-a)i + b = 0 \tag{23.261}$$

pour tout ϵ. Le fait d'avoir $c\epsilon^2 = b$ pour tout ϵ implique que $c = b = 0$. Donc A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \tag{23.262}$$

avec la contrainte supplémentaire que $ad = 1$, les nombres a et b étant entiers. Nous avons donc soit $a = d = 1$ soit $a = d = -1$. Étant donné le quotient par $\mathbb{Z}_2$, ces deux possibilités donnent le même élément de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

(5) **Les orbites intersectent D**

Soit $z \in P$. Nous devons trouver $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ tel que $A * z \in D$. Nous savons déjà que

$$\Im(A * z) = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2}. \tag{23.263}$$

Nous notons $\mathcal{O}_z$ l'orbite de z sous le groupe modulaire et nous posons

$$I_z = \{\Im(u) \text{ tel que } u \in \mathcal{O}_z\} = \{\Im(A * z) \text{ tel que } A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})\}, \tag{23.264}$$

l'ensemble des parties imaginaires des éléments de l'orbite de z. Nous allons montrer que cet ensemble est borné vers le haut en montrant que la quantité $|cz + d|$ ne peut, à z donné, prendre qu'un nombre fini de valeurs plus grandes que $\Im(z)$[21]. Nous cherchons donc les couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz+d| < 1$.

Nous avons $\Im(cz + d) = c\Im(z)$, donc $|cz + d| \geqslant |c\Im(z)|$, mais il n'y a qu'un nombre fini de $c \in \mathbb{Z}$ tels que $|c\Im(z)| < 1$. De la même façon, pour la partie réelle nous avons

$$\Re(cz + d) = c\Re(z) + d, \tag{23.265}$$

et pour chaque c, il n'y a qu'un nombre fini de $d \in \mathbb{Z}$ qui laissent cette quantité plus petite que 1 (en valeur absolue).

Donc I_z possède un maximum. Soit $A_1 \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ tel que $\Im(A_1 * z) = \max I_z$. Nous notons $z_1 = A_1 * z$, et que nous n'avons à priori pas l'unicité. Nous allons maintenant agir sur z_1 avec l'élément

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23.266}$$

pour ramener z_1 dans le domaine D. Si $u \in P$ nous avons $T * u = u + 1$ et donc

$$T^n * u = u + n. \tag{23.267}$$

Vu que D est de largeur 1, il existe un n (éventuellement négatif) tel que

$$\Re(T^n * z_1) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[. \tag{23.268}$$

Notons qu'ici le fait d'être ouvert d'un côté et fermé de l'autre joue de façon essentielle (pour l'unicité aussi). Nous notons $z_2 = T^n * z_1$.

Supposons un instant que $|z_2| < 1$. Nous considérons l'élément

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{23.269}$$

qui fait

$$\Im(S * z) = \frac{\Im z}{|z|^2}. \tag{23.270}$$

[20] On ne peut pas dire que $b = 0$ simplement en justifiant qu'on l'obtient en posant $z = 0$ parce que $z = 0$ n'est pas dans le demi-plan de Poincaré.

[21] Bien que cela ne soit pas indispensable pour la preuve, remarquons que I_z ne comprend qu'une quantité au plus dénombrable de valeurs. Le fait que, à z donné, la quantité $|cz + d|^2$ puisse être rendue aussi grande que l'on veut est évident. Donc I_z est borné vers le bas par zéro (qui n'est pas atteint, mais qui est une valeur d'adhérence).

Donc si $|z_2| < 1$ alors $\Im(S * z_2) > \Im(z_2)$, ce qui contredit la maximalité de $\Im(z_2)$ dans I_z. Nous en déduisons que $|z_2| \geqslant 1$.

Si $|z_2| > 1$, alors $z_2 \in D_1$ et c'est bon. Si $|z_2| = 1$, alors il faut encore un peu travailler. Si $z_2 \pm 1$ est à l'intérieur du disque, alors en agissant avec T ou T^{-1} nous retrouvons la même contradiction que précédemment. En écrivant $z_2 = e^{i\theta}$, nous devons donc avoir $2\cos(\theta) \leqslant 1$ ou encore $|\Re(z_2)| \leqslant \frac{1}{2}$. Donc si $\Re(z_2) \leqslant 0$ alors $z_2 \in D_2$.

Le dernier cas à traiter est $\Re(z_2) \in]0, \frac{1}{2}]$, c'est-à-dire $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$. Dans ce cas l'action avec S ramène l'angle dans la bonne zone parce que $S * z = -\frac{1}{z}$ et donc $S * (\rho e^{-i\theta}) = -\frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$.

(6) **Unicité**

Nous voulons à présent montrer que si $z \in D$, alors $A * z$ n'est plus dans D (sauf si $A = \pm\mathbb{1}$). Nous supposons que $z \in D$ et $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ soient tels que $A * z \in D$, et nous prouvons qu'alors soit nous arrivons à une contradiction soit nous arrivons à $A = \mathbb{1}$. Pour cela nous allons décomposer en de nombreux cas.

(6a) Nous commençons par $\Im(A * z) \geqslant \Im(z)$. Dans ce cas nous avons $|cz + d| \leqslant 1$ et en particulier $|c||\Im(z)| \leqslant 1$. Étant donné que le point de D qui a la partie imaginaire la plus petite est $-\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}i$, nous trouvons $|c| \leqslant 2/\sqrt{3}$. Vu que c doit être entier, nous avons trois cas : $c = -1, 0, 1$.

(6a.i) Soit $c = 0$. Alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et la condition de déterminant est $ad = 1$, ce qui signifie $a = d = 1$ (la possibilité $a = b = -1$ est « éliminée » le quotient par $\mathbb{Z}_2$ définissant $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$). La matrice A doit alors être de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23.271}$$

et $A * z = z + b$. Si $z \in D$, alors le seul $z + b$ à être (peut-être) encore dans D est $b = 0$, mais alors A est l'identité.

(6a.ii) Soit $c = 1$. Alors la condition $|cz + d| \leqslant 1$ nous donne trois possibilités[22] : $d = -1, 0, 1$.

A. Si $d = -1$, alors nous devons avoir $|z - 1| \leqslant 1$. Il est instructif de faire un dessin, mais le point d'intersection entre les cercles $|z| = 1$ et $|z - 1| = 1$ est le point $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, qui n'est pas dans D. Bref, il n'y a pas de points dans D vérifiant $|z - 1| \leqslant 1$.

B. Si $d = 1$, alors (et c'est maintenant que la dissymétrie de D intervient) nous avons le point

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{23.272}$$

qui est dans D et qui vérifie $|z + 1| \leqslant 1$. Voyons à quoi ressemble la matrice A dans ce cas. Son déterminant est $a - b = 1$. Nous écrivons donc

$$A = \begin{pmatrix} b + 1 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{23.273}$$

et en tenant compte du fait que $z\bar{z} = |z + 1| = 1$, nous calculons

$$A * z = \frac{(b + 1)z + b}{z + 1} \tag{23.274a}$$

$$= \frac{(bz + z + b)(\bar{z} + 1)}{|z + 1|^2} \tag{23.274b}$$

$$= z + b + 1. \tag{23.274c}$$

La seule façon de ne pas quitter D est d'avoir $b = -1$, mais alors nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{23.275}$$

et $A * z = z$. Donc au final z est quand même le seul de son orbite à être dans D. Notons au passage cette très intéressante propriété du point

$$z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \tag{23.276}$$

[22] Je ne rigolais pas quand je disais qu'on allait avoir de nombreux cas.

C'est un point de qui vérifie $z_0 = A * z_0$ pour un élément non trivial A de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. L'existence d'un tel élément est ce qui va nous coûter un peu de sueur pour prouver que $PSL(2,\mathbb{Z})$ est engendré par S et T.

C. Le cas $d = 0$ nous fait écrire $1 = \det A = -b$, donc $b = -1$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23.277}$$

Nous avons alors $A * z = a - \frac{1}{z}$. De plus la condition $|z| \leqslant 1$ revient à $|z = 1|$. Pour les nombres complexes de module 1, l'opération $z \to -1/z$ est la symétrie autour de l'axe des imaginaires purs. Le seul à ne pas sortir de D est le fameux $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, qui revient sur lui-même avec $a = -1$.

Nous passons à la possibilité $c = -1$. Dans ce cas la matrice est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & d \end{pmatrix}, \tag{23.278}$$

et nous revenons au cas $c = 1$ en prenant $-A$ au lieu de A.

(6b) Nous passons au cas $\Im(A * z) < \Im(z)$. Nous récrivons cette condition avec

$$\Im(A * z) < \Im\big(A^{-1} * (A * z)\big). \tag{23.279}$$

Si nous supposons que z et A sont tels que z et $A * z$ soient tous deux dans D, alors $z' = A * z$ est un élément de D tel que

$$\Im(z') < \Im(A^{-1} * z'). \tag{23.280}$$

Or nous avons vu qu'aucun élément de D vérifiant cette condition n'existait sans être trivial (celui qui ne bouge pas). Pour cela il suffit d'appliquer tout ce que nous venons de dire avec A^{-1} au lieu de A.

(7) **Quelques conclusions**

Après avoir passé tous les cas en revue, le fameux point $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ est l'unique point de D à accepter une matrice non triviale $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ telle que $z_0 = A * z_0$.

Nous remarquons aussi que tous les points de P sont ramenés dans D par une matrice obtenue comme produit de T, S, T^{-1} et S^{-1}.

□

CorJQwgNp

Corolaire 23.97 ([687]).
Les matrices S et T génèrent le groupe modulaire au sens où toute matrice de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ *s'écrit comme*

$$T^{m_1} S^{p_1} \dots T^{m_k} S^{p_k} \tag{23.281}$$

pour un certain k et des nombres $m_i, p_i \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{gr}(S,T)$.

Démonstration. Soit z, un point de D autre que z_0. Alors si $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est non trivial nous avons $A * z$ hors de D. Du coup, comme vu dans la démonstration du théorème 23.96, il existe $B \in \mathrm{gr}(S,T)$ tel que $B * (A * z) \in D$. Vu que D ne contient qu'un seul point de chaque orbite, nous avons

$$B * A * z = z, \tag{23.282}$$

et donc $BA = \pm\mathbb{1}$, ce qui prouve que[23] $A = B^{-1}$, c'est-à-dire que $A \in \mathrm{gr}(S,T)$. □

[23] Dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, nous n'avons pas besoin de mettre $\pm$ parce qu'il est compris dans la définition.

Chapitre 24

Analyse vectorielle

24.1 Le théorème de Green

Soit un champ de vecteurs

$$F(x,y,z)=\begin{pmatrix}F_1(x,y,z)\\F_2(x,y,z)\\F_2(x,y,z)\end{pmatrix}\tag{24.1}$$

et un chemin $\sigma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3$ donné par

$$\sigma(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}.\tag{24.2}$$

Nous avons défini la circulation de F le long de σ par

$$\begin{aligned}\int_\sigma F\cdot d\sigma&=\int_a^b F\big(\sigma(t)\big)\cdot\sigma'(t)dt\\&=\int_a^b\Big[F_1\big(\sigma(t)\big)x'(t)+F_2\big(\sigma(t)\big)y'(y)+F_3\big(\sigma(t)\big)z'(t)\Big]dt\\&=\int_\sigma F_1dx+F_2dy+F_3dz.\end{aligned}\tag{24.3}$$

La dernière ligne est juste une notation compacte[1]. Elle sert à se souvenir qu'on va mettre x' à côté de F_1, y' à côté de F_2 et z' à côté de F_3. L'avantage de cette notation est qu'on peut écrire d'autres combinaisons.

Si f et g sont deux fonctions sur $\mathbb{R}^3$, nous pouvons écrire

$$\int_\sigma fdy+gdz.\tag{24.4}$$

Cela signifie

$$\int_a^b\Big[f\big(\sigma(t)\big)y'(t)+g\big(\sigma(t)\big)z'(t)\Big]dt.\tag{24.5}$$

Soit D une région du plan et σ, son contour que nous prenons, par convention[2], dans l'orientation trigonométrique, comme indiqué sur la figure 24.1. Nous supposons également que le domaine D n'a pas de trous intérieurs.

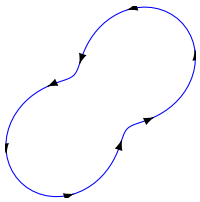


FIGURE 24.1 : Un contour avec son orientation. LabelFigVDFMooHMmFZr

Nous notons par $\sigma=\partial D$ le bord de D, c'est-à-dire le contour dont nous venons de parler.

[1] Il y aurait beaucoup de choses à dire là-dessus, mais la vie est trop courte pour parler de formes différentielles, et c'est dommage.

[2] Il y aurait beaucoup de choses à dire sur ça aussi, mais…

Théorème 24.1 (Théorème de Green)**.**
Soient $P, Q\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \tag{24.6}$$

EqThoGreen

Pour rappel, l'intégrale du membre de gauche signifie

$$\int_a^b \Big[P\big(\sigma(t)\big)\sigma'_x(t) + Q\big(\sigma(t)\big)\sigma'_y(t) \Big] dt. \tag{24.7}$$

Ce n'est d'ailleurs rien d'autre que l'intégrale du champ de vecteurs $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$.

Corolaire 24.2.
L'aire du domaine D est donnée par

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (x dy - y dx). \tag{24.8}$$

Démonstration. L'intégrale $\int_{\partial D}(x dy - y dx)$ se traite avec le théorème de Green où l'on pose $P = -y$ et $Q = x$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} -y dx + x dy &= \int_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_D 2 \, dx dy. \end{aligned} \tag{24.9}$$

La dernière ligne est bien le double de la surface. □

Exemple 24.3.
Calculons (encore une fois) l'aire du disque de rayon R. Il s'agit de calculer l'intégrale

$$I = \frac{1}{2} \int_\sigma (x dt - y dx) \tag{24.10}$$

où σ est le cercle donné par

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} \tag{24.11}$$

Le calcul est

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underbrace{R\cos(\theta)}_{x} \underbrace{R\cos(\theta)}_{y'} - \underbrace{R\sin(\theta)}_{y} \underbrace{(-R\sin(\theta))}_{x'} \, d\theta \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi R^2. \end{aligned} \tag{24.12}$$

△

Exemple 24.4.
Calculons l'aire de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \tag{24.13}$$

dont le bord est donné par

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) & \text{(24.14a)} \\ y(t) = b\sin(t). & \text{(24.14b)} \end{cases}$$

Le terme $x dy$ devient $a\cos(t) b\cos(t) = ab\cos^2(t)$ et le terme $y dx$ devient $b\sin(t)(-a\sin(t)) = -ab\sin^2(t)$. L'intégrale qui donne la surface est donc

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab = \pi ab. \tag{24.15}$$

△

Le théorème de Green peut être mis sous une autre forme.

ThoGreenVecto

Théorème 24.5 (Théorème de Green, forme vectorielle)**.**
Si G est un champ de vecteurs sur D, nous avons

$$\int_{\partial D} G \cdot d\sigma = \int_D (\nabla \times G) \cdot dS \tag{24.16}$$

EqGreenVecto

où le second membre est le flux de $\nabla \times G$ sur la surface D.

Démonstration. Analysons le membre de droite. Nous savons que D est une surface dans le plan $\mathbb{R}^2$. Le vecteur normal à la surface est donc simplement le vecteur (constant) e_z. Le produit scalaire $(\nabla \times F) \cdot dS$ est donc $(\nabla \times F) \cdot e_z$ et se réduit à la troisième composante du rotationnel, c'est-à-dire

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}. \tag{24.17}$$

Cela est bien le membre de droite de l'équation (24.6). Le membre de gauche de cette dernière est bien le membre de gauche de (24.16). □

ExempleGreenSqL

Exemple 24.6.

Soit le champ de vecteurs $F(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y+x \end{pmatrix}$, et soit à calculer

$$\int_D \nabla \times F \cdot dS \tag{24.18}$$

où D est la région comprise entre les courbes $y = x^2$ et $y = x$ pour $x \geqslant 0$ (voir la figure 24.2).

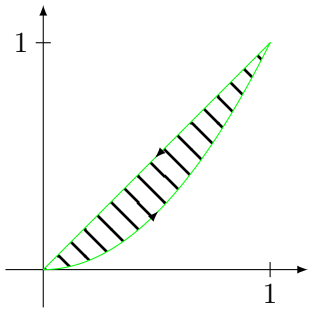


FIGURE 24.2 : Le contour d'intégration pour l'exemple 24.6

LabelFigLLVMooWOkvAB

Nous pouvons calculer cette intégrale directement en calculant le rotationnel de F :

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-2xy \end{pmatrix}. \tag{24.19}$$

Par conséquent l'intégrale à effectuer est

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (1-2xy)dy = \frac{1}{12}. \tag{24.20}$$

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y)=1-2*x*y
sage: f.integrate(y,x**2,x).integrate(x,0,1)
(x, y) |--> 1/12
```

L'autre façon de calculer l'intégrale est d'utiliser le théorème de Green et de calculer la circulation de F le long de ∂D :

$$I = \int_{\partial D} F \cdot \sigma. \tag{24.21}$$

Le chemin $\sigma = \partial D$ est composé de la parabole $y = x^2$ et du segment de droite $x = y$. Attention : il faut respecter l'orientation. Nous avons

$$\sigma_1(t) = (t, t^2) \tag{24.22}$$

et

$$\sigma_2(t) = (1 - t, 1 - t). \tag{24.23}$$

Notez bien que le second chemin est $(1 - t, 1 - t)$ et non (t, t) parce qu'il faut le parcourir dans le bon sens (voir le dessin).

Commençons par le premier chemin :

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= (t, t^2) \\ \sigma_1'(t) &= (1, 2t) \\ F\big(\sigma_1(t)\big) &= \begin{pmatrix} t^5 \\ t + t^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{24.24}$$

et par conséquent

$$F\big(\sigma_1(t)\big) \cdot \sigma_1'(t) = t^5 + 2t^2 + 2t^3, \tag{24.25}$$

et le premier morceau de la circulation vaut

$$\int_{\sigma_1} F \cdot d\sigma_1 = \int_0^1 t^5 + 2t^2 + 2t^3 = \frac{4}{3}. \tag{24.26}$$

Pour le second chemin :

$$\begin{aligned} \sigma_2(t) &= (1 - t, 1 - t) \\ \sigma_2'(t) &= (-1, -1) \\ F\big(\sigma_2(t)\big) &= \begin{pmatrix} (1 - t)^3 \\ 2(1 - t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{24.27}$$

Par conséquent

$$F\big(\sigma_2(t)\big) \cdot \sigma_2(t) = -(1 - t)^2 - 2(1 - t). \tag{24.28}$$

Le second morceau de la circulation est par conséquent

$$\int_0^1 -(1 - t)^2 - 2(1 - t)dt = -\frac{5}{4}. \tag{24.29}$$

La circulation de F le long de σ est donc égale à

$$\frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12}. \tag{24.30}$$

Comme prévu, nous obtenons le même résultat. △

24.2 Théorème de la divergence dans le plan

24.2.1 La convention de sens de parcours

Soient D, un domaine dans le plan et un paramétrage

$$\begin{aligned} \sigma\colon [a, b] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{24.31}$$

un paramétrage du bord ∂D de D. La normale à σ est perpendiculaire à la tangente, donc la normale extérieure de norme 1 vaut

$$n = \frac{\big(y'(t), -x'(t)\big)}{\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}} \quad \text{ou} \quad n = -\frac{\big(y'(t), -x'(t)\big)}{\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}}. \tag{24.32}$$

Comment faire le choix ?

Nous prenons comme convention que le sens *du chemin* doit être tel que le vecteur normal extérieur soit

$$n = \frac{\big(y'(t), -x'(t)\big)}{\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}}. \tag{24.33}$$

Donc si le chemin σ donne lieu à un vecteur n pointant vers l'intérieur, il faut utiliser le chemin qui va dans le sens contraire : $\tilde{\sigma}(t) = \sigma(1 - t)$.

Les vecteurs tangents et normaux d'un contour sont dessinés sur la figure 24.3.

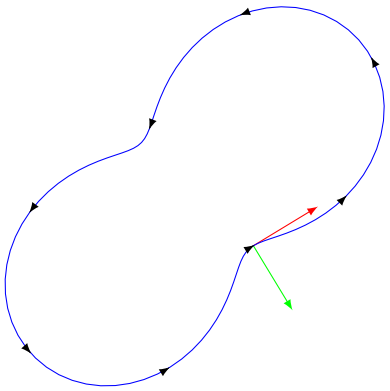


FIGURE 24.3 : Le champ de vecteurs tangents est dessiné en rouge tandis qu'en vert nous avons le champ de vecteurs normaux extérieurs. LabelFigDDCTooYscVzA

24.2.2 Théorème de la divergence

Théorème 24.7 (Théorème de la divergence)**.**
Soit F un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. Le flux de F à travers le bord de D est égal à l'intégrale de la divergence de F sur D. En formule :

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_D \nabla \cdot F \, dxdy. \tag{24.34}$$

Démonstration. Tant $F \cdot n$ que $\nabla \cdot F$ sont des fonctions. Le membre de gauche est donc l'intégrale d'une fonction sur un chemin et le membre de droite est l'intégrale d'une fonction sur une surface. Notre convention de sens de parcours du chemin permet d'écrire le produit scalaire $F \cdot n$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F \cdot n &= \frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\sigma'\|}(F_x y' - F_y x') \\ &= \frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \sigma'. \end{aligned} \tag{24.35}$$

Par conséquent, la *fonction*

$$F \cdot n \tag{24.36}$$

est la même que la *fonction*

$$\frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \sigma'. \tag{24.37}$$

L'intégrale de cette dernière fonction sur le chemin σ est

$$\begin{aligned} I &= \int_\sigma F \cdot n \\ &= \int_\sigma \frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \sigma' \\ &= \int_a^b \frac{1}{\|\sigma'(t)\|} \begin{pmatrix} -F_y\big(\sigma(t)\big) \\ F_x\big(\sigma(t)\big) \end{pmatrix} \cdot \sigma'(t)\|\sigma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \sigma'(t) dt. \end{aligned} \tag{24.38}$$

Cette dernière intégrale est la circulation du champ de vecteurs $\begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix}$ sur le chemin σ. Le théorème de Green 24.5 nous enseigne que la circulation le long d'un chemin est égale au flux du rotationnel à travers la surface. Par conséquent,

$$I = \int_D \left(\nabla \times \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \right) \cdot dS = \int_D \nabla \cdot F \, dxdy \tag{24.39}$$

□

24.3 Théorème de Stokes

Nous nous mettons maintenant dans $\mathbb{R}^3$, et nous y considérons une surface paramétrée S donc le bord est ∂S.

THOooIRYTooFEyxif

Théorème 24.8 (Théorème de Stokes)**.**
Alors le flux du rotationnel de F à travers S est égal à la circulation de F le long du bord. En formule :

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot d\sigma. \tag{24.40}$$

Nous pouvons nous donner une idée du pourquoi ce théorème est vrai. D'abord, si la surface est plate, cela est exactement le théorème de Green 24.5. Supposons maintenant que le bord reste plat, mais que la surface se déforme un petit peu. Le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{24.41}$$

est tout autant le bord du disque plat de rayon 1 que celui de la demi-sphère

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}. \tag{24.42}$$

Le champ de vecteur que nous considérons est $G = \nabla \times F$. Il a un certain flux à travers le disque plat, et ce plus est égal à la circulation de F sur σ. Quel est le flux de G à travers la demi-sphère ? Étant donné que $\nabla \cdot G = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$, le champ de vecteurs G est incompressible, de telle façon que tout ce qui rentre dans la demi-sphère doit en sortir. Le flux de G à travers la demi-sphère doit par conséquent être égal à celui à travers le disque plat.

Exemple 24.9.
Soit C l'intersection entre le cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et le plan $x + y + z = 1$. Calculer la circulation de

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ -z^3 \end{pmatrix} \tag{24.43}$$

le long de C.

Au lieu de calculer directement

$$\int_C F \cdot d\sigma, \tag{24.44}$$

nous allons calculer

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS \tag{24.45}$$

où S est une surface dont C est le bord. Cette intégrale est à calculer avec la formule (20.294).

La première chose à faire est de trouver une surface dont le bord est C et en trouver un paramétrage ϕ. Le plus simple est de prendre le graphe du plan sur le cercle $x^2 + y^2 + 1$. Un paramétrage de cette surface est simplement

$$\begin{aligned} \phi\colon D &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{24.46}$$

où D est le disque de rayon 1. Étant donné que cela paramètre le plan $x+y+z-1 = 0$, le vecteur normal est $n = e_x + e_y + z_z$. Nous pouvons cependant calculer ce vecteur normal en suivant la recette usuelle. D'abord les vecteurs tangents sont

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{24.47}$$

Et le vecteur normal est donné par le produit vectoriel :

$$\begin{aligned} n &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \times \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= e_x + e_y + e_z. \end{aligned} \tag{24.48}$$

Ensuite, le rotationnel de F est donné par

$$\nabla \times F = 3(x^2 + y^2)e_z. \tag{24.49}$$

Par conséquent,

$$\nabla \times F \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \times \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = 3(x^2 + y^2). \tag{24.50}$$

L'intégrale à calculer est donc

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times F \cdot dS &= \int_D (\nabla \times F)\big(\phi(x,y)\big) \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \times \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) dxdy \\ &= 3\int_D (x^2 + y^2)dxdy. \end{aligned} \tag{24.51}$$

Cette dernière intégrale est l'intégrale d'une fonction sur le disque de rayon 1. Elle s'effectue en passant aux coordonnées polaires :

$$3\int_D (x^2 + y^2)dxdy = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2)r\,dr = \frac{3\pi}{2}. \tag{24.52}$$

△

24.4 Théorème de Gauss

Soit V une partie de $\mathbb{R}^3$ délimitée par une surface S sur laquelle nous considérons la normale extérieure. Soit F un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$.

Théorème 24.10 (Théorème de la divergence ou de Gauss)**.**
Le flux d'un champ de vecteur F à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence sur le volume correspondant :

$$\int_{\partial V} F \cdot dS = \int_V \nabla \cdot F\,dxdydz. \tag{24.53}$$

Ce théorème signifie que la quantité de fluide qui s'accumule dans le volume (le flux est ce qui rentre moins ce qui sort) est égale à l'intégrale de $\nabla \cdot F$ sur le volume, alors que nous savons que, localement, la quantité $\nabla \cdot F(x,y,z)$ est la quantité de fluide qui s'accumule au point (x,y,z).

Remarque 24.11.
Ce théorème ne fonctionne qu'avec des surfaces fermées. Essayer de l'appliquer au calcul de flux à travers des surfaces ouvertes n'a pas de sens parce qu'une surface ouverte ne délimite pas un volume.

24.12.
La formule de la divergence peut être utilisée comme intégration par partie. Si u est une fonction et F un champ de vecteurs, $\nabla(uF) = \nabla(u) \cdot F + u\nabla \cdot F$ et alors

$$\int_{\partial V} uF \cdot n = \int_V \nabla(uF) = \int_V u\nabla \cdot F + \int_V F \cdot \nabla u \tag{24.54}$$

où n est le champ de vecteurs normal extérieur à V. En remettant les termes dans un ordre qui ressemble plus à l'intégration par partie :

$$\int_V F \cdot \nabla u = \int_{\partial V} uF \cdot n - \int_V u\nabla F. \tag{24.55}$$

EQooRUCKooUUrgxI

Exemple 24.13.
Calculer le flux du champ de vecteurs

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} \tag{24.56}$$

à travers la sphère de rayon 1 centrée à l'origine. Nous utilisons le théorème de la divergence

$$\int_S F \cdot n\, dS = \int_B \nabla \cdot F\, dxdydz \tag{24.57}$$

où S est la sphère et B est la boule (la sphère pleine). La divergence de F se calcule :

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2 + 2x + 2y. \tag{24.58}$$

L'intégrale est donc en trois termes :

$$\begin{aligned} \int_B 2 = 2\text{Volume(B)} = \frac{8\pi}{3} \\ \int_B y\, dxdydz = 0 \\ \int_B z\, dxdydz = 0. \end{aligned} \tag{24.59}$$

△

Dans certains cas le théorème de Gauss permet de simplifier le calcul de l'intégrale d'une fonction sur une surface.

Exemple 24.14.
Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_{\partial B} (x^2 + y + z) dS, \tag{24.60}$$

c'est-à-dire l'intégrale de la fonction $x^2 + y + z$ sur la sphère. Le vecteur normal à la sphère est

$$n = xe_x + ye_y + ze_z. \tag{24.61}$$

Étant donné que nous sommes sur la sphère de rayon 1, ce vecteur est même normé. La fonction que nous regardons n'est rien d'autre que $F \cdot n$ avec

$$F = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{24.62}$$

Nous pouvons donc simplement intégrer $\nabla \cdot F$ sur toute la boule :

$$I = \int_B \nabla \cdot F\, dxdydz = \int_B 1\, dxdudz = \frac{4\pi}{3}. \tag{24.63}$$

△

24.5 Coordonnées curvilignes

24.5.1 Base locale

Nous connaissons déjà les coordonnées sphériques et cylindriques sur $\mathbb{R}^3$. Ce sont des systèmes « un peu courbes ». Il en existe bien entendu de nombreux autres (sinon ce ne serait pas drôle), et nous allons faire une étude un peu générale de ces systèmes de **coordonnées curvilignes**. Des coordonnées curvilignes sur $\mathbb{R}^3$ est n'importe quel[3] système qui permet de repérer un point de $\mathbb{R}^3$ à partir de trois nombres.

Il s'agit donc d'un ensemble de trois applications

$$x_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}. \tag{24.64}$$

[3]Nous n'entrons pas dans les détails de régularité.

Les coordonnées cylindriques sont

$$\begin{cases} x_1(r,\theta,z) = r\cos\theta & (24.65a)\\ x_2(r,\theta,z) = r\sin\theta & (24.65b)\\ x_3(r,\theta,z) = z & (24.65c) \end{cases}$$

Soit donc un système général $q = (q_1, q_2, q_3)$ et

$$M(q) = \begin{pmatrix} x_1(q)\\ x_2(q)\\ x_3(q) \end{pmatrix}. \tag{24.66}$$

Si nous fixons q_2 et q_3 et que nous laissons varier q_1, nous obtenons une courbe[4] dont nous pouvons considérer le vecteur vitesse, c'est-à-dire le vecteur tangent. En chaque point nous avons ainsi trois vecteurs

$$\frac{\partial M}{\partial q_i}(q). \tag{24.67}$$

Nous disons que le système de coordonnées curviligne est **orthogonal** si ces trois vecteurs sont orthogonaux. Dans la suite nous supposerons que c'est toujours le cas.

Nous posons

$$h_i = \left\| \frac{\partial M}{\partial q_i} \right\| \tag{24.68}$$

et nous considérons les trois vecteurs normés

$$e_i = h_i^{-1} \frac{\partial M}{\partial q_i}. \tag{24.69}$$ EqDefeihMq

Les trois vecteurs $\{e_1, e_2, e_3\}$ forment une base orthonormée dite **base locale**. Ce sont des vecteurs liés[5] au point M.

24.5.2 Importance de l'orthogonalité

Nous avons dit que nous nous restreignons au cas où les vecteurs e_i sont orthogonaux. En termes de produits scalaires, cela signifie

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}. \tag{24.70}$$

Nous en étudions maintenant quelques conséquences. L'équation (24.69) peut s'écrire plus explicitement sous la forme

$$e_i = \sum_k h_i^{-1} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} 1_k. \tag{24.71}$$

Notez que pour chaque k et i, la quantité $h_i^{-1}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}$ est un simple nombre. Nous allons les mettre dans une matrice :

$$A_{ki} = h_i^{-1} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}. \tag{24.72}$$

Cela nous donne le changement de base

$$e_i = \sum_k A_{ki} 1_k. \tag{24.73}$$ EqChmBaseeisAkiAk

Le produit $e_i \cdot e_j$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} e_i \cdot e_j &= \sum_{kl} A_{ki}A_{lj} \underbrace{1_k \cdot 1_l}_{=\delta_{kl}}\\ &= \sum_{kl} A_{ki}A_{lj}\delta_{kl}\\ &= \sum_k A_{ki}A_{kj}\\ &= \sum_k (A^T)_{ik}A_{kj}. \end{aligned} \tag{24.74}$$

[4] Dans le cas des sphériques, c'est une demi-droite horizontale d'angle q_2 et de hauteur q_3.

[5] En géométrie différentielle on dira que ce sont des éléments de l'espace tangent, mais c'est une toute autre histoire.

Or cela doit valoir δ_{ij}. Par conséquent

$$A^T = A^{-1}. \tag{24.75}$$

Le fait que les coordonnées curvilignes considérées soient orthogonales s'exprime donc par la fait que la matrice de changement de base est une matrice orthogonale.

Cette circonstance nous permet d'inverser le changement de base (24.73) en multipliant cette équation par $(A^{-1})_{il}$ des deux côtés et en faisant la somme sur i :

$$\sum_i (A^{-1})_{il} e_i = \sum_{kl} \underbrace{A_{ki}(A^{-1})_{il}}_{=\delta_{kl}} 1_k, \tag{24.76}$$

par conséquent

$$\sum_i (A^T)_{il} e_i = 1_l, \tag{24.77}$$

et

$$1_l = \sum_i A_{li} e_i = \sum_i h_i^{-1} \frac{\partial x_l}{\partial q_i} e_i. \tag{24.78}$$ EqChamvarunlAei

Armés de cette importante formule, nous pouvons exprimer les quantités que nous connaissons dans la base canonique en termes de la base locale.

Une autre conséquence du fait que e_1, e_2 et e_3 est une base orthonormée est que, éventuellement en réordonnant les vecteurs, on a

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3 \\ e_2 \times e_3 &= e_1 \\ e_3 \times e_1 &= e_2 \end{aligned} \tag{24.79}$$

Ces trois relations s'écrivent en une seule avec

$$e_i \times e_j = \sum_k \epsilon_{ijk} e_k \tag{24.80}$$

où

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i,j,k \text{ ne sont pas tous différents} \\ 1 & \text{si } ijk \text{ se ramène à 123 par un nombre pair de transpositions} \\ -1 & \text{si } ijk \text{ se ramène à 123 par un nombre impair de transpositions} \end{cases} \tag{24.81}$$

est le **symbole de Levi-Civita**. La formule du produit vectoriel peut également être utilisée à l'envers sous la forme

$$e_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ijk}\, e_i \times e_j. \tag{24.82}$$ Eqekeitimesei

Le symbole de Levi-Civita possède de nombreuses formules. En voici certaines, facilement démontrables en considérant tous les cas :

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = \delta_{kl}|\epsilon_{ijk}|. \tag{24.83}$$

Grâce aux symboles de Levi-Civita, le produit mixte des vecteurs de base a une belle forme :

$$e_l \cdot (e_i \times e_j) = \sum_k \epsilon_{ijk} e_l \times e_k = \sum_k \epsilon_{ijk}\delta_{lk} = \epsilon_{ijl}. \tag{24.84}$$ EqProdMixteepsilonCicivr

24.5.3 Coordonnées polaires

Les coordonnées curvilignes polaires sont données par

$$M(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}, \tag{24.85}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial M}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{24.86}$$

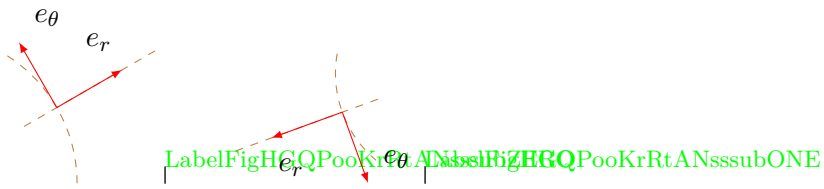
Nous avons les normes $h_r = 1$ et $h_\theta = r$, et donc les vecteurs de la base locale en (r,θ) sont

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \cos(\theta)e_x + \sin(\theta)e_y \tag{24.87}$$

ainsi que

$$e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = -\sin(\theta)e_x + \cos(\theta)e_y. \tag{24.88}$$

Ces vecteurs sont représentés à la figure 24.4. Notez qu'il y en a une paire différente en chaque point.



(a) Base locale. (b) Base locale.

FIGURE 24.4 : En brun, les lignes que le point suivrait si on ne variait qu'une coordonnées polaires à la fois. Les vecteurs rouges sont les vecteurs e_r et e_θ. LabelFigHGQPooKrRtAN

24.5.4 Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont les mêmes que les coordonnées polaires à part qu'il faut écrire

$$M(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}, \tag{24.89}$$

et nous avons le vecteur de base supplémentaire

$$e_z = \frac{\partial M}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{24.90}$$

parce que $h_z = 1$.

24.5.5 Coordonnées sphériques

Les coordonnées curvilignes sphériques sont données par

$$M(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \rho\cos(\theta) \end{pmatrix}, \tag{24.91}$$

dont les dérivées sont données par

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \rho} &= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial M}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\rho\sin(\theta) \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial M}{\partial \varphi} &= \begin{pmatrix} -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{24.92}$$

Les normes de ces vecteurs sont $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ et $h_\varphi = \rho\sin(\theta)$. Les vecteurs de la base locale en (ρ,θ,φ) sont donc

$$\begin{aligned} e_\rho &= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \\ e_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{24.93}$$

24.5.6 Gradient en coordonnées curvilignes

Soit $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ une fonction sur $\mathbb{R}^3$. Nous pouvons la composer avec les coordonnées curvilignes q pour obtenir la fonction

$$\tilde{f}(q_1,q_2,q_3) = f\big(x_1(q),x_2(q),x_3(q)\big). \tag{24.94}$$

Nous disons que $\tilde{f}$ est l'expression de f dans les coordonnées q. Nous savons déjà comment calculer le gradient de f en coordonnées cartésiennes :

$$F(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y,z) \\ \partial_y f(x,y,z) \\ \partial_z f(x,y,z) \end{pmatrix}. \tag{24.95}$$

Cela est un vecteur lié au point (x,y,z). Notre objectif de bonheur dans la vie serait d'exprimer les coordonnées de ce vecteur dans la base $\{e_1,e_2,e_3\}$. En d'autres termes, nous voudrions trouver les nombres $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$ et $\tilde{F}_3$ tels que

$$F(x,y,z)=F\big(x(q),y(q),z(q)\big)=\tilde{F}_1e_1+\tilde{F}_2e_2+\tilde{F}_3e_3. \tag{24.96}$$

Ces nombres seront des fonctions de (q_1,q_2,q_3).

Par définition,

$$\nabla f=\sum_l\frac{\partial f}{\partial x_l}1_l. \tag{24.97}$$

En remplaçant 1_l par sa valeur en termes des e_i par la formule (24.78),

$$\begin{aligned}\nabla f&=\sum_l\frac{\partial f}{\partial x_l}1_l\\&=\sum_l\frac{\partial f}{\partial x_l}\sum_i h_i^{-1}\frac{\partial x_l}{\partial q_i}e_i\\&=\sum_{il}\frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial q_i}e_i\\&=\sum_i\frac{1}{h_i}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial q_i}e_i.\end{aligned} \tag{24.98}$$

Plus explicitement,

$$\nabla f\big(x(q),y(q),z(q)\big)=\sum_i\frac{1}{h_i(q)}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial q_i}(q)e_i \tag{24.99}$$ EqGradientenCurviligne

où

$$h_i(q)=\left\|\frac{\partial M}{\partial q_i}(q)\right\|. \tag{24.100}$$

Le plus souvent nous n'allons pas noter explicitement la dépendance de h_i en q.

24.5.6.1 Coordonnées sphériques

Nous pouvons exprimer le gradient d'une fonction en coordonnées sphériques en utilisant la formule (24.99) :

$$\nabla\tilde{f}(\rho,\theta,\varphi)=\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\rho}e_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{\rho\sin(\theta)}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\varphi}e_\varphi. \tag{24.101}$$ EqGradientSpherique

Cette expression peut paraitre peu pratique parce que les vecteurs e_ρ, e_θ et e_φ eux-mêmes changent en chaque point. Elle est effectivement peu adaptée au dessin, mais elle est très pratique pour des fonctions ayant des symétries.

Exemple 24.15.
Le potentiel de la gravitation est la fonction

$$V(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{24.102}$$

En coordonnées sphériques elle s'écrit

$$\tilde{V}(\rho,\theta,\varphi)=\frac{1}{\rho}. \tag{24.103}$$

En voilà une fonction qu'elle est facile à dériver, contrairement à V ! En suivant la formule (24.101), nous avons immédiatement

$$\nabla\tilde{V}=-\frac{1}{\rho^2}e_\rho. \tag{24.104}$$

Nous voyons immédiatement que cela est un champ de vecteurs dont la norme diminue comme le carré de la distance à l'origine et qui est en permanence dirigé vers l'origine. △

24.5.7 Divergence en coordonnées curvilignes

Nous savons que

$$\nabla \tilde{f} = \sum_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_j} e_j. \tag{24.105}$$

Nous pouvons en particulier considérer la fonction $f(q) = q_i$. De la même manière que nous avions noté x_i la fonction $x \mapsto x_i$, nous notons q_i la fonction $q \mapsto q_i$. Le gradient de cette fonction est donné par

$$\nabla q_i = \sum_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} e_j, \tag{24.106}$$

mais $\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$, donc

$$\nabla q_i = \frac{e_i}{h_i}, \tag{24.107}$$

ou encore

$$e_i = h_i \nabla q_i. \tag{24.108}$$

Cela n'est pas étonnant : la direction dans laquelle la coordonnées q_i varie le plus est le vecteur e_i qui donne la tangente à la courbe obtenue lorsque *seul* q_i varie.

Commençons par calculer la divergence de e_i. En utilisant la formule (24.82),

$$\nabla \cdot e_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \nabla \cdot (e_i \times e_j). \tag{24.109}$$

Nous avons, en utilisant les règles de Leibniz de la proposition 12.520,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (e_i \times e_j) &= \nabla \cdot (h_i \nabla q_i \times h_j \nabla q_j) \\ &= \nabla(h_i h_j) \cdot \big(\nabla q_i \times \nabla q_j\big) + h_i h_j \nabla \cdot \big(\nabla q_i \times \nabla q_j\big) \\ &= \nabla(h_i h_j) \cdot \big(\nabla q_i \times \nabla q_j\big) \\ &\quad + h_i h_j \nabla q_j \cdot \big(\underbrace{\nabla \times \nabla q_i}_{=0}\big) \\ &\quad + h_i h_j \nabla q_i \cdot \big(\underbrace{\nabla \times \nabla q_j}_{=0}\big) \end{aligned} \tag{24.110}$$

Cela nous fait

$$\nabla \cdot e_k = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \frac{\nabla(h_i h_j)}{h_i h_j} \cdot (e_i \times e_j). \tag{24.111}$$

parce que $\nabla q_i = h_i^{-1} e_i$. Nous pouvons développer le gradient qui intervient :

$$\nabla(h_i h_j) = \sum_l \frac{1}{h_l} \frac{\partial}{\partial q_l}(h_i h_j) e_l. \tag{24.112}$$

Nous voyons donc arriver le produit mixte $e_l \cdot (e_i \times e_j)$. En utilisant la formule (24.84), cela s'exprime directement sous la forme ϵ_{ijl}.

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \nabla \cdot e_k &= \frac{1}{2} \sum_{ijl} \frac{1}{h_i h_j h_l} \frac{\partial}{\partial q_l}(h_i h_j) \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ijl} \delta_{kl} |\epsilon_{ijk}| \frac{\partial}{\partial q_l}(h_i h_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{|\epsilon_{ijk}|}{h_i h_j h_k} \frac{\partial}{\partial q_k}(h_i h_j). \end{aligned} \tag{24.113}$$

EqFragradekdyi

Par exemple,

$$\nabla \cdot e_1 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3). \tag{24.114}$$

Nous devons maintenant chercher le gradient d'un champ général

$$F(q) = \sum_k F_k(q) e_k. \tag{24.115}$$

La première chose à faire est d'utiliser la formule de Leibniz :

$$\nabla \cdot F = \sum_k \nabla F_k(q) \cdot e_k + \sum_k F_k(q) \nabla \cdot e_k. \tag{24.116}$$

EqLeibnbablaFek

Afin d'alléger les notations, nous allons nous concentrer sur le terme numéro k et ne pas écrire la somme. Si i et j sont les nombres tels que $\epsilon_{ijk} = 1$, alors ce que la formule (24.113) signifie, c'est que

$$\nabla \cdot e_k = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_k}(h_i h_j). \tag{24.117}$$

Nous savons déjà par la formule (24.99) que

$$\nabla F_k = \sum_l \frac{1}{h_l} \frac{\partial F_k}{\partial q_l} e_l, \tag{24.118}$$

par conséquent

$$\nabla F_k \cdot e_k = \sum_l \frac{1}{h_l} \frac{\partial F_k}{\partial q_l} \delta_{kl} = \frac{1}{h_k} \frac{\partial F_k}{\partial q_k}. \tag{24.119}$$

Pour obtenir cela nous avons utilisé le fait que $e_l \cdot e_k = \delta_{lk}$. Le terme numéro k de la somme (24.116) est donc

$$\frac{1}{h_k} \frac{\partial F_k}{\partial q_k} + \frac{F_k}{h_k h_i h_j} \frac{\partial (h_i h_j)}{\partial q_k} = \frac{1}{h_i h_j h_k} \frac{\partial (F_k h_i h_j)}{\partial q_k} \tag{24.120}$$

où il est entendu que i et j représentent les nombres tels que $\epsilon_{ijk} = 1$.

Au final, nous avons

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{ijk} |\epsilon_{ijk}| \frac{\partial (F_k h_i h_j)}{\partial q_k}. \tag{24.121}$$

Ici, la somme sur i et j consiste seulement à sélectionner les termes tels que i et j ne sont pas k. En écrivant la somme explicitement,

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3 h_1 h_2) \right]. \tag{24.122}$$

24.5.7.1 Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, nous avons déjà vu que $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_z = 1$. La divergence est donc donnée par

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(r F_z) \right]. \tag{24.123}$$

EqDivEnCylonf

Par exemple si

$$F(r, \theta, z) = r e_\theta + e_z, \tag{24.124}$$

nous avons

$$(\nabla \cdot F)(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(r) + \frac{\partial}{\partial z}(r) \right] = 0. \tag{24.125}$$

Cela est logique parce que $r e_\theta$ est à peu près le champ dont nous avons parlé dans l'exemple (12.517), qui était à divergence nulle. En réalité, le champ dont on parlait dans cet exemple était exactement $-e_\theta$. Le champ e_z est également à divergence nulle parce qu'il est constant.

24.5.7.2 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, nous avons $h_\rho = 1$, $h_\theta = r$ et $h_\varphi = r \sin\theta$, donc

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \sin\theta F_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin\theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho F_\varphi) \right]. \tag{24.126}$$

si $F(\rho, \theta, \varphi) = F_\rho e_\rho + F_\theta e_\theta + F_\varphi e_\varphi$.

24.5.8 Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales

Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Le **laplacien** de f est donné par

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f). \tag{24.127}$$

En utilisant les formules données, nous avons

$$\Delta f = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{24.128}$$

Dans cette expression, la fonction f est donnée comme fonction de q_1, q_2 et q_3.

En coordonnées cylindriques, cela s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.\end{aligned} \tag{24.129}$$

Dans cette expression, f est fonction de r, θ et z.

En coordonnées sphériques, cela devient

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\right]. \tag{24.130}$$ EqLaplaceSphe

Dans cette expression, f est fonction de ρ, θ et φ.

24.5.9 Rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales

Nous voulons calculer le rotationnel de $F(q) = \sum_k F_k(q)e_k$. Pour cela nous commençons par écrire $e_k = h_k\nabla q_k$ et nous utilisons la formule de la proposition 12.520(3) avec F_kh_k en guise de f :

$$\begin{aligned}\nabla \times F_ke_k &= \nabla \times (F_kh_k\nabla q_k)\\ &= F_kh_k\underbrace{\nabla \times (\nabla q_k)}_{=0} + \nabla(F_kh_k) \times \nabla q_k\\ &= \frac{1}{h_k}\nabla(F_kh_k) \times e_k.\end{aligned} \tag{24.131}$$

Nous utilisons à présent la formule (24.99) du gradient et le formule $e_j \times e_k = \sum_l \epsilon_{jkl}e_l$:

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_ke_k) &= \sum_j \frac{1}{h_jh_k}\frac{\partial}{\partial q_j}(F_kh_k)e_j \times e_k\\ &= \sum_{jl} \frac{1}{h_jh_k}\epsilon_{jkl}\frac{\partial}{\partial q_j}(F_kh_k)e_l.\end{aligned} \tag{24.132}$$

Le rotationnel s'écrit donc

$$\nabla \times F = \sum_{jkl} \frac{1}{h_jh_k}\epsilon_{jkl}\frac{\partial}{\partial q_j}(F_kh_k)e_l. \tag{24.133}$$

Devant e_1 par exemple nous avons seulement les termes $j = 2$, $k = 3$ et $j = 3$, $k = 2$. Étant donné que $\epsilon_{231} = 1$ et $\epsilon_{321} = -1$, le coefficient de e_1 sera simplement

$$\frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(F_3h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(F_2h_2)\right). \tag{24.134}$$

La formule complète devient

$$\begin{aligned}\nabla \times \sum_k F_ke_k = &\frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(F_3h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(F_2h_2)\right)e_1\\ &+ \frac{1}{h_1h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_3}(F_1h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(F_3h_3)\right)e_2\\ &+ \frac{1}{h_2h_1}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(F_2h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(F_1h_1)\right)e_3.\end{aligned} \tag{24.135}$$

24.5.9.1 Coordonnées cylindriques

En utilisant $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_z = 1$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_r e_r + F_\theta e_\theta + F_z e_z) = &\frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (F_\theta r)}{\partial z}\right) e_r \\ &+ \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) e_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial (F_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) e_z.\end{aligned} \tag{24.136}$$ EqRotationnelCylin

24.5.9.2 Coordonnées sphériques

En utilisant $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ et $h_\varphi = \rho \sin\theta$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_\rho e_\rho + F_\theta e_\theta + F_\varphi e_\varphi) = &\frac{1}{\rho \sin\theta}\left(\frac{\partial (F_\varphi) \sin\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right) e_\rho \\ &+ \frac{1}{\rho \sin\theta}\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial (F_\varphi \rho \sin\theta)}{\partial \rho}\right) e_\theta \\ &+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_\theta \rho}{\partial \rho} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) e_\varphi.\end{aligned} \tag{24.137}$$

Note : dans le premier terme, il y a une simplification par ρ.

24.6 Les formules

24.6.1 Coordonnées polaires

Les vecteurs de base :

$$e_r = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} = \cos(\theta) e_x + \sin(\theta) e_y \tag{24.138a}$$

$$e_\theta = \begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} = -\sin(\theta) e_x + \cos(\theta) e_y. \tag{24.138b}$$

Le gradient :

$$\nabla \tilde{f}(r,\theta) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) e_\theta. \tag{24.139}$$

La divergence :

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta)\right]. \tag{24.140}$$ EqgRxJKd

Le rotationnel :

$$\nabla \times (F_r e_r + F_\theta e_\theta) = \left(\frac{\partial (F_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) e_z. \tag{24.141}$$ EqtBnoCw

Notons que le rotationnel n'existe pas vraiment en deux dimensions. Ici nous avons vu le champ $F(r,\theta)$ comme un champ dans $\mathbb{R}^3$ ne dépendant pas de z et n'ayant pas de composante z. Le résultat est un rotationnel qui est dirigé selon l'axe z.

24.6.2 Coordonnées cylindriques

Les vecteurs de base : idem qu'en coordonnées polaires, et on ajoute e_z sans modifications.

Le gradient :

$$\nabla \tilde{f}(r,\theta,z) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta,z) e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta,z) e_\theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(r,\theta,z) e_z. \tag{24.142}$$

La divergence :

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(r F_z)\right]. \tag{24.143}$$

Le rotationnel :

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_r e_r + F_\theta e_\theta + F_z e_z) = &\frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (F_\theta r)}{\partial z}\right) e_r \\ &+ \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) e_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial (F_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) e_z.\end{aligned} \tag{24.144}$$

Note : les formules concernant les coordonnées polaires se réduisent de celles-ci en enlevant toutes les références à z.

24.6.3 Coordonnées sphériques

Les vecteurs de base :

$$\begin{aligned}e_r = \begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\varphi)\\ \cos(\theta)\sin(\varphi)\\ -\sin(\theta)\end{pmatrix}, \\ e_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\ \cos(\varphi)\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{24.145}$$

Le gradient :

$$\nabla \tilde{f}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} r_\varphi. \tag{24.146}$$

La divergence :

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \sin\theta F_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin\theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho F_\varphi)\right]. \tag{24.147}$$

Le rotationnel :

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_\rho e_\rho + F_\theta e_\theta + F_\varphi e_\varphi) = &\frac{1}{\rho \sin\theta}\left(\frac{\partial (F_\varphi)\sin\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right) e_\rho \\ &+ \frac{1}{\rho \sin\theta}\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial (F_\varphi \rho \sin\theta)}{\partial \rho}\right) e_\theta \\ &+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_\theta \rho}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}\right) e_\varphi.\end{aligned} \tag{24.148}$$

Chapitre 25

Espaces de Hilbert

25.1 Espaces de Hilbert

DEFooKSDFooGIBtrG

Définition 25.1.
*Soit un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Son **dual topologique**, noté E', est l'ensemble des formes linéaires continues de E vers $\mathbb{K}$.*

PROPooQFTSooPFfbCc

Proposition 25.2 ([688]).
Soient des espaces vectoriels normés X et Y ainsi qu'une forme sesquilinéaire $\phi: X \times Y \to \mathbb{C}$. L'espace $X \times Y$ est muni de la topologie produit[1]*. Il y a équivalence des faits suivants.*

ITEMooWMFBooOWPzgP

(1) ϕ est continue.

ITEMooSFQZooHNcWwH

(2) ϕ est continue en $(0,0)$

ITEMooWSWQooSYzOol

(3) $\sup\{|\phi(x,y)| \text{ tel que } \|x\|, \|y\| \leqslant 1\} < \infty$.

ITEMooRKHQooMVXlYD

(4) Il existe $C \geqslant 0$ telle que

$$|\phi(x,y)| \leqslant C\|x\|\|y\| \tag{25.1}$$

pour tout $(x,y) \in X \times Y$.

ITEMooLWDCooLIGVDs

(5) ϕ est bornée

Dans le cas où ϕ vérifie ces propriétés, alors nous posons

$$\mathcal{A} = \{|\phi(x,y)| \text{ tel que } \|(x,y)\| \leqslant 1\} \tag{25.2}$$

et

$$\mathcal{B} = \{\beta \geqslant 0 \text{ tel que } |\phi(x,y)| \leqslant \beta\|x\|\|y\|, \forall x,y\} \tag{25.3}$$

et nous avons

$$\|\phi\| = \sup(\mathcal{A}) = \min(\mathcal{B}). \tag{25.4}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) ⇒ (2)** Une application est continue si et seulement si elle est continue en tout point (théorème 7.263).

(2) **(2) ⇒ (3)** Pour rappel, nous avons mis sur $X \times Y$ la topologie produit. Le lemme 7.283 nous indique que cette topologie est la même que la topologie de la norme produit.

Bref, nous supposons que ϕ est continue en $(0,0)$ et nous prouvons que

$$\sup\{|\phi(x,y)| \text{ tel que } \|x\|, \|y\| \leqslant 1\} < \infty. \tag{25.5}$$

Nous y allons par contradiction. Supposons que pour n dans $\mathbb{N}$ il existe $(x_n, y_n) \in X \times Y$ tels que $\|x_n\|, \|y_n\| \leqslant 1$ et $|\phi(x_n, y_n) > n^2|$. En posant $v_n = x_n/n$ et $w_n = y_n/n$, nous avons

$$\|v_n\| \leqslant \frac{\|x_n\|}{n} \leqslant \frac{1}{n}, \tag{25.6}$$

[1] Quand on ne précise pas, un produit est toujours muni de la topologie produit 7.63.

et la même chose pour $\|w_n\|$. Nous avons $(v_n, w_n) \xrightarrow{X\times Y} (0,0)$ et donc, par continuité de ϕ en $(0,0)$ nous avons $\phi(v_n, w_n) \xrightarrow{\mathbb{C}} \phi(0,0) = 0$. Mais

$$|\phi(v_n, w_n)| = \frac{1}{n^2}|\phi(x_n, y_n)| \geqslant \frac{1}{n^2}n^2 = 1. \tag{25.7}$$

Donc nous n'avons pas $|\phi(v_n, w_n)| \to 0$.

(3) **(3) ⇒ (4)** Nous notons

$$M = \sup\{|\phi(x,y)| \text{ tel que } \|x\|, \|y\| \leqslant 1\} < \infty, \tag{25.8}$$

et nous allons prouver que $|\phi(x,y)| \leqslant M\|x\|\|y\|$.

Si $x = 0$ ou si $y = 0$, c'est évident ; nous supposons donc que x et y sont tous deux non nuls. Nous posons $v = x/\|x\|$ et $w = y/\|y\|$. Nous avons alors

$$|\phi(x,y)| = \|x\|\|y\||\phi(v,w)| \leqslant \|x\|\|y\|M. \tag{25.9}$$

(4) **(4) ⇒ (5)** La norme de ϕ est le nombre

$$\|\phi\| = \sup_{\substack{(x,y)\in X\times Y\\ \|(x,y)\|=1}} |\phi(x,y)|, \tag{25.10}$$

que nous devons prouver être fini. Les éléments (x,y) sur lesquels porte le supremum vérifient

$$1 = \|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}, \tag{25.11}$$

et donc vérifient $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$. En utilisant (4), nous avons donc

$$\|\phi\| = \sup_{\|(x,y)\|=1} |\phi(x,y)| \leqslant \sup_{\|(x,y)\|=1} C\|x\|\|y\| \leqslant C. \tag{25.12}$$

(5) **(5) ⇒ (1)** Il nous reste à prouver que si ϕ est bornée, alors elle est continue. Soit une suite convergente $(x_n, y_n) \xrightarrow{X\times Y} (x,y)$. Nous allons prouver que $\phi(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{C}} \phi(x,y)$. Ce sont les majorations usuelles :

$$\begin{aligned}
|\phi(x_n,y_n) - \phi(x,y)| &\leqslant |\phi(x_n,y_n) - \phi(x_n,y)| + |\phi(x_n,y) - \phi(x,y)| && \text{(25.13a)}\\
&= |\phi(x_n, y_n - y)| + |\phi(x_n - x, y)| && \text{(25.13b)}\\
&\leqslant \|\phi\|\|x_n\|\|y_n - y\| + \|\phi\|\|x_n - x\|\|y\| && \text{(25.13c)}\\
&\to 0. && \text{(25.13d)}
\end{aligned}$$

Enfin nous supposons que toutes ces conditions équivalentes, et nous prouvons que $\|\phi\| = \sup(\mathcal{A}) = \min(\mathcal{B})$.

(1) $\|\phi\| = \sup(\mathcal{A})$ En posant

$$\mathcal{C} = \{|\phi(x,y)| \text{ tel que } \|(x,y)\| = 1\}, \tag{25.14}$$

nous avons, par définition, $\|\phi\| = \sup(\mathcal{C})$. Étant donné que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, nous avons $\sup(\mathcal{C}) \leqslant \sup(\mathcal{A})$. Faisons l'inégalité dans l'autre sens. Soit $|\phi(x,y)| \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire $\|(x,y)\| \leqslant 1$. En posant $v = x/\|x\|$ et $w = y/\|y\|$ nous avons $|\phi(v,w)| \in \mathcal{C}$ et surtout $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$. Donc

$$|\phi(v,w)| = \frac{1}{\|x\|\|y\|}|\phi(x,y)| \geqslant |\phi(x,y)|. \tag{25.15}$$

Donc tout élément de $\mathcal{C}$ est majoré par un élément de $\mathcal{A}$. Donc $\sup(\mathcal{A}) \geqslant \sup(\mathcal{C})$.

(2) $\|\phi\| \in \mathcal{B}$ Soit $(x,y) \in X \times Y$. Étant donné que $\|x/\|x\|\| = 1$ nous avons

$$\left|\phi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right| \leqslant \sup_{\|(v,w)\|=1} |\phi(v,w)| = \|\phi\|. \tag{25.16}$$

En multipliant les deux côtés par $\|x\|\|y\|$ nous trouvons

$$|\phi(x,y)| \leqslant \|\phi\|\|x\|\|y\|, \tag{25.17}$$

et donc $\|\phi\| \in \mathcal{B}$.

(3) $\|\phi\|$ **minore** $\mathcal{B}$

Nous montrons que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, nous avons $\alpha \leqslant \beta$. En effet si $\alpha \in \mathcal{A}$, alors $\alpha = |\phi(x,y)|$ pour un certain $(x,y) \in X \times Y$ vérifiant $\|(x,y)\| = 1$. Mais $\beta \in \mathcal{B}$ signifie que $|\phi(x,y)| \leqslant \beta\|x\|\|y\|$. Nous avons donc

$$\alpha = |\phi(x,y)| \leqslant \beta\|x\|\|y\| \leqslant \beta \tag{25.18}$$

parce que $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$.

□

DefORuBdBN

Définition 25.3.
Un espace ***préhilbertien*** *est*

- *soit un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire*[2]*,*
- *soit un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien*[3]*.*

Un ***espace de Hilbert*** *est un espace préhilbertien qui est complet*[4] *pour la norme induite par son produit (scalaire ou hermitien), c'est-à-dire tel que*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{25.19}$$

pour tout élément x.

Dans les deux cas nous considérons la topologie métrique dérivant du produit.

Dans les cas de dimension finie, les espaces vectoriels normés sont automatiquement complets par la proposition 7.346.

La différence entre un espace de Hilbert et un espace de Banach est que dans le cas d'un espace de Hilbert, nous demandons que la norme dérive d'un produit scalaire.

PropTdupIG

Proposition 25.4.
Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert réel, alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle. \tag{25.20}$$

Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert complexe alors

EqrbBlkK

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle. \tag{25.21}$$

Dans les deux cas nous avons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{25.22}$$

Dans un espace vectoriel de dimension infinie, tous les opérateurs linéaires ne sont pas continus.

Exemple 25.5.
Soit un espace vectoriel V engendré par la base $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et l'application linéaire $T\colon V \to V$ donnée par

$$Te_k = ke_k. \tag{25.23}$$

Nous allons montrer que l'image inverse de la boule unité ouverte $\mathcal{O}$ n'est pas ouverte. En effet si (ϵ_k) est une suite de réels strictement positifs tendant vers zéro, les vecteurs

$$a_k = \left(\frac{1}{k} + \epsilon_k\right) e_k \tag{25.24}$$

sont hors de $T^{-1}\mathcal{O}$ parce que

$$Ta_k = (1 + k\epsilon_k)e_k. \tag{25.25}$$

Mais la suite (a_k) converge vers 0 qui fait partie de $T^{-1}\mathcal{O}$. Donc le complémentaire de $T^{-1}\mathcal{O}$ n'est pas fermé, ce qui prouve que $T^{-1}\mathcal{O}$ n'est pas ouvert. △

[2] Définition 8.163.
[3] Définition 8.171.
[4] Définition 7.311.

PROPooMSAYooONHLYq

Proposition 25.6 ([1]).
Soit un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ tel qu'il existe une bijection linéaire isométrique $\Phi : \mathscr{H} \to E$. Alors en posant

$$\langle \alpha, \beta \rangle_E = \langle \Phi^{-1}(\alpha), \Phi^{-1}(\beta) \rangle_{\mathscr{H}}, \tag{25.26}$$

l'espace E devient un espace de Hilbert.

Démonstration. Le fait que $\langle ., . \rangle_E$ soit un produit scalaire (hermitien) lorsque $\langle ., . \rangle_{\mathscr{H}}$ l'est est une conséquence de la linéarité de Φ. Il donne la norme parce que

$$\sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \sqrt{\langle \Phi^{-1}(\alpha), \Phi^{-1}(\alpha) \rangle} = \|\Phi^{-1}(\alpha)\| = \|\alpha\| \tag{25.27}$$

parce que Φ^{-1} est une isométrie.

Pour voir que E est complet, soit une suite (α_k) de τ-Cauchy dans E. Nous devons prouver qu'elle converge. Nous posons $x_k = \Phi^{-1}(\alpha_k)$.

Commençons par voir que (x_k) est τ-Cauchy dans $\mathscr{H}$. Soit un voisinage V de 0 dans $\mathscr{H}$. Nous posons $U = \Phi(V)$. Vu que (α_k) est τ-Cauchy, il existe $N > 0$ tel que $\alpha_k - \alpha_l \in U$ dès que $k, l > N$. Du coup, si $k, l > N$ nous avons aussi $x_k - x_l = \Phi^{-1}(\alpha_k - \alpha_l) \subset \Phi^{-1}(U) = V$. Cela prouve que (x_k) est τ-Cauchy.

Vu que $\mathscr{H}$ est complet, il existe $x \in \mathscr{H}$ tel que $x_k \xrightarrow{\mathscr{H}} x$. Montrons que $\alpha_k \xrightarrow{E} \Phi(x)$.

Soit $\epsilon > 0$ et $N > 0$ tel que $\|x_k - x\| < \epsilon$ dès que $k \geqslant N$. Alors nous avons aussi

$$\|\alpha_k - \Phi(x)\| = \|\Phi(x_k) - \Phi(x)\| = \|\Phi(x_k - x)\| = \|x_k - x\| < \epsilon \tag{25.28}$$

où nous avons utilisé le fait que Φ était linéaire et une isométrie. □

25.1.1 Sous-espace vectoriel fermé ???

Nous verrons que beaucoup de résultats demandent un sous-espace vectoriel *fermé*. Une question légitime est : est-ce qu'il existe des sous-espaces vectoriels qui ne soient pas fermés ? En dimension finie, tous les sous-espaces vectoriels sont fermés[5], mais cela n'est pas vrai en dimension infinie.

Soit en effet une partie libre infinie $A = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. L'ensemble $\mathrm{Span}(A)$ des combinaisons linéaires d'éléments de A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$, mais il n'est pas fermé.

En effet, supposons pour simplifier les notations que $\|v_i\| = 1$ pour tout i. Alors nous considérons la combinaison

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k v_k \tag{25.29}$$

où les α_k sont suffisamment décroissants pour assurer les convergences[6]. Le vecteur a n'est pas dans $\mathrm{Span}(A)$, mais la suite $a_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$ est dans $\mathrm{Span}(A)$ et converge vers a : $a_n \xrightarrow{\mathscr{H}} a$. En effet,

$$\|a_n - a\| = \| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k v_k \| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k| \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{25.30}$$

Vous voulez des détails sur la dernière limite ? Vu que la somme $\sum_k |\alpha_k|$ converge, la suite des sommes de queues de suites[7] converge vers zéro :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k| = 0. \tag{25.31}$$

25.2 Théorème de la projection

Voir la version plus simple dans 18.104.

ThoProjOrthuzcYkz

Théorème 25.7 (Projection sur partie fermée convexe[689, 690]).
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, $x \in \mathscr{H}$, et C un sous-ensemble fermé convexe de $\mathscr{H}$.

(1) Les deux conditions suivantes sur $y \in \mathscr{H}$ sont équivalentes :

[5] Proposition 7.229.
[6] Par exemple $\alpha_k = 1/k^2$ si les v_k sont orthonormaux.
[7] On se comprend hein.

ETsfYCSItemi
ETsfYCSItemii
(1a) $\|x-y\| = \inf\{\|x-z\| \text{ tel que } z \in C\}$,
(1b) pour tout $z \in C$, $\operatorname{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leqslant 0$.

(2) Il existe un unique $y \in \mathscr{H}$, noté $y = \texttt{proj}_C(x)$ vérifiant ces conditions.

Démonstration. Nous commençons par prouver l'existence et l'unicité d'un élément dans C vérifiant la première condition. Ensuite nous verrons l'équivalence.

Nous nommons d l'infimum en question de la première condition.

Existence Soit (y_n) une suite dans C telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = \inf\{\|z-y\| \text{ tel que } z \in C\} = d. \tag{25.32}$$

Nous allons montrer que cette suite peut être choisie de Cauchy. Elle convergera donc dans $\mathscr{H}$ parce que ce dernier est complet. Mais C étant supposé fermé dans $\mathscr{H}$, la limite appartiendra à C. Soient $r, s \in \mathbb{N}$. D'abord nous avons

$$\begin{aligned}\|y_r - y_s\|^2 &= \langle y_r - y_s + x - x, y_r - y_s + x - x\rangle &\text{(25.33a)}\\ &= \|y_r - x\|^2 + \|y_s - x\|^2 - 2\langle y_r - x, y_s - x\rangle. &\text{(25.33b)}\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}4\left\|\frac{y_r+y_s}{2} - x\right\|^2 &= \langle y_r + y_s - 2x, y_r - y_s - 2x\rangle &\text{(25.34a)}\\ &= \|y_r - x\|^2 + \|y_s - x\|^2 + 2\langle y_r - x, y_s - x\rangle. &\text{(25.34b)}\end{aligned}$$

Si nous égalisons les valeurs de $2\langle y_r - x, y_s - x\rangle$ nous trouvons

$$\|y_r - y_s\|^2 = -4\left\|\frac{y_r+y_s}{2} - x\right\|^2 + 2\|y_r - x\|^2 + 2\|y_s - x\|^2. \tag{25.35}$$ EqiqCyUa

La distance infimum étant d, nous pouvons choisir y_n de telle façon à avoir

$$\|y_n - x\| \leqslant d + \frac{1}{n}. \tag{25.36}$$

D'autre part étant donné que C est convexe, $(y_r + y_s)/2$ est dans C et nous avons

$$\left\|\frac{y_r+y_s}{2} - x\right\| \geqslant d. \tag{25.37}$$

En mettant ces majorations dans (25.35) nous trouvons

$$\|y_r - y_s\|^2 \leqslant -4d + 2\left(d + \frac{1}{r}\right) + 2\left(d + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}. \tag{25.38}$$

La suite (y_n) est donc de Cauchy et la limite est un élément de C. Prouvons que cet élément y réalise l'infimum. Pour cela nous avons les inégalités

$$d \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x-y_n\| + \|y_n - y\|. \tag{25.39}$$

En prenant le limite $n \to \infty$ nous trouvons

$$d \leqslant \|x-y\| \leqslant d. \tag{25.40}$$

Unicité Même preuve que pour le théorème en dimension finie 12.150.

(1a)⇒ (1b) Même preuve que pour le théorème en dimension finie 12.150.

(1b)⇒ (1a) Même preuve que pour le théorème en dimension finie 12.150.

□

PropAXJpCe

Proposition 25.8.
Soit C une partie convexe et fermée de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Alors pour tout $x_1, x_2 \in \mathscr{H}$ nous avons

$$\| \texttt{proj}_C(x_1) - \texttt{proj}_C(x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\|. \tag{25.41}$$

En particulier la projection est une application continue.

Démonstration. Nous posons $y_1 = \texttt{proj}_C(x_1)$ et $y_2 = \texttt{proj}_C(x_2)$. Par la partie (1b) du théorème 25.7, nous avons, pour tout $z, z' \in C$ les inégalités

$$\operatorname{Re}\langle x_1 - y_1, z - y_1\rangle \leqslant 0 \tag{25.42a}$$
$$\operatorname{Re}\langle x_2 - y_2, z' - y_2\rangle \leqslant 0. \tag{25.42b}$$

En prenant $z = y_2$ et $z' = y_1$ et en sommant nous trouvons

$$\operatorname{Re}\langle (x_1 - y_1) + (y_2 - x_2), y_2 - y_1\rangle \leqslant 0. \tag{25.43}$$

Nous pouvons maintenant calculer

$$\begin{aligned}
\|y_1 - y_2\|^2 &= \operatorname{Re}\|y_1 - y_2\| \\
&= \operatorname{Re}\langle y_1 - y_2, (y_1 - x_1) + x_1 - x_2 + (x_2 - y_2)\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle + \operatorname{Re}\langle y_2 - y_1, (x_1 - y_1) + (y_2 - x_2)\rangle \\
&\leqslant \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \\
&\leqslant \big|\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle\big| \\
&\leqslant \|y_1 - y_2\|\|x_1 - x_2\|.
\end{aligned} \tag{25.44}$$

En simplifiant par $\|y_1 - y_2\|$[8] nous trouvons le résultat

$$\|y_1 - y_2\| \leqslant \|x_1 - x_2\|. \tag{25.45}$$

□

ThoMXwOjb

Théorème 25.9 (Projection orthogonale)**.**
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et K, un sous-espace vectoriel fermé non réduit à $\{0\}$ et $x \in \mathscr{H}$. L'élément $y = \texttt{proj}_K(x)$ est l'unique élément de K tel que

$$x - y \in K^\perp. \tag{25.46}$$

De plus l'application $x \mapsto \texttt{proj}_K(x)$ est linéaire, continue et de norme 1.

L'élément y ainsi défini est la **projection orthogonale** de x sur K et sera noté $\texttt{proj}_K(f)$.

Démonstration. La continuité de la projection est donnée par la proposition 25.8.

Soit z un élément de K tel que $\langle z - x, a\rangle = 0$ pour tout $a \in K$. Nous avons

$$\|x - a\|^2 = \|z - x\|^2 + \|a - z\|^2 + 2\underbrace{\langle z - x, a - z\rangle}_{=0} \tag{25.47a}$$
$$\geqslant \|z - x\|^2. \tag{25.47b}$$

Le produit scalaire est nul parce que $a - z \in K$. La distance $\|z - x\|$ est donc bien la plus petite distance entre x et les éléments de K.

Dans l'autre sens, nous supposons que $y \in K$ minimise la distance à x dans K. Par hypothèse pour tout a et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la différence

$$\|(y + \lambda a) - x\|^2 - \|y - x\|^2 \tag{25.48}$$

est positive. En développant les produits scalaires nous trouvons la conditions suivante

$$\lambda^2\|a\|^2 + 2\lambda\langle a, y - x\rangle \geqslant 0 \tag{25.49}$$

qui doit être vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En tant que polynôme du second degré en λ, cela n'aura pas deux racines réelles distinctes uniquement si $\langle a, y - x\rangle = 0$.

[8] Si c'est nul, alors la preuve est évidente.

Nous montrons maintenant la linéarité de la projection orthogonale. Soient $x_1, x_2 \in \mathscr{H}$. L'élément $y = \texttt{proj}_K x_1 + \texttt{proj}_K x_2$ satisfait à la condition d'orthogonalité : pour tout $z \in K$,

$$\langle x_1 + x_2 - \texttt{proj}_K x_1 - \texttt{proj}_K x_2, z\rangle = \langle x_1 - \texttt{proj}_K x_1, z\rangle + \langle x_2 - \texttt{proj}_K x_2, z\rangle = 0. \tag{25.50}$$

Étant donné que K est un sous-espace vectoriel, la condition de minimalité est automatiquement vérifiée (seconde partie du théorème 25.7).

En ce qui concerne la norme opérateur de $\texttt{proj}_K$, la décomposition de $x \in \mathscr{H}$ en composantes dans K et $K^\perp$ est

$$x = x + (x - \texttt{proj}_K x). \tag{25.51}$$

Étant deux parties orthogonales nous avons

$$\|\texttt{proj}_K x\|^2 = \|x\|^2 - \|x - \texttt{proj}_K x\|^2. \tag{25.52}$$

En prenant $\|x\| = 1$ nous trouvons $\|\texttt{proj}_K x\|^2 \leqslant 1$ et par conséquent $\|\texttt{proj}_K\| \leqslant 1$. Mais d'autre part en prenant $x \in K$ nous avons automatiquement $\|\texttt{proj}_K\| \geqslant 1$. □

Proposition 25.10.
Soit $\mathscr{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{F}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$ et K l'ensemble de fonctions $\mathcal{F}$-mesurables dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Si $f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est positive, alors $\texttt{proj}_K f$ est positive (presque partout).

Démonstration. L'ensemble $A = \{\texttt{proj}_K f < 0\}$ est dans $\mathcal{F}$. En effet

$$A = (\texttt{proj}_K f)^{-1}(]-\infty, 0[) \tag{25.53}$$

alors que, par construction, $\texttt{proj}_K f$ est $\mathcal{F}$-mesurable. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est alors $\mathcal{F}$-mesurable (c'est-à-dire $1_A \in K$) et nous avons

$$0 \leqslant \int_\Omega f\mathbb{1}_A = \int_\Omega \texttt{proj}_K f\,\mathbb{1}_A \leqslant 0. \tag{25.54}$$

Étant donné que nous avons supposé $f \geqslant 0$ nous avons alors $\mu(A) = 0$. D'où le fait que $\texttt{proj}_K f$ est presque partout positive. □

25.3 Systèmes orthogonaux et bases

Dans cette partie nous noterons $\mathbb{K}$ le corps de base de l'espace $\mathscr{H}$. Seuls deux cas sont envisagés : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Pour chaque $x \in \mathscr{H}$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\Phi_y\colon \mathscr{H} &\to \mathbb{K}\\ x &\mapsto \langle x, y\rangle.\end{aligned} \tag{25.55}$$

EQooMWZAooZUFKQs

Ce sont des applications continues.

25.3.1 Orthogonal d'une partie

DEFooXUXQooMmDnhW

Définition 25.11.
*Soit une partie A de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$. L'**orthogonal** de A est l'ensemble*

$$A^\perp = \{v \in \mathscr{H} \text{ tel que } \langle v, x\rangle = 0 \forall x \in A\}. \tag{25.56}$$

PropdpaMpH

Proposition 25.12.
Si $\mathscr{H}$ est un préhilbert et si $A \subset \mathscr{H}$, alors l'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{H}$.

Démonstration. L'application Φ_x définie en (25.55) est continue pour chaque $x \in \mathscr{H}$ et par conséquent l'ensemble $\ker \Phi_x = \Phi_x^{-1}(\{0\})$ est fermé. L'ensemble

$$A^\perp = \bigcap_{x\in A} \ker \Phi_x \tag{25.57}$$

est donc fermé. □

ThowZyaiz

Théorème 25.13.
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé de $\mathscr{H}$. Alors

(1) Nous avons la décomposition
$$\mathscr{H} = F \oplus F^{\perp}. \tag{25.58}$$
EqxXJvrG

(2) La projection sur F par rapport à la somme directe (25.58) est la projection $\texttt{proj}_F$ du théorème de projection.
ItemThowZyaizii

(3) La décomposition (25.58) est topologique.

Proposition 25.14.
Si F est un sous-espace de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ alors on a $F^{\perp\perp} = \bar{F}$.

Démonstration. Nous savons par la proposition 25.12 que $F^{\perp}$ est fermé, par conséquent le théorème 25.13 donne la somme directe
$$\mathscr{H} = F^{\perp} \oplus F^{\perp\perp}. \tag{25.59}$$
Mais $\bar{F}$ étant également fermé nous avons la somme directe
$$\mathscr{H} = \bar{F} \oplus (\bar{F})^{\perp}. \tag{25.60}$$
Montrons que $(\bar{F})^{\perp} = F^{\perp}$. En effet si $x \in F^{\perp}$ et si $y \in \bar{F}$, alors il existe une suite y_n dans F qui converge vers y. Pour chaque n nous avons $\langle x, y_n \rangle = 0$ et donc $\langle x, y \rangle = 0$ par continuité du produit scalaire.

Nous avons donc
$$\mathscr{H} = F^{\perp} \oplus F^{\perp\perp} = \bar{F} \oplus F^{\perp}. \tag{25.61}$$
Mais $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$ (prendre une suite). Les espaces $\bar{F}$ et $F^{\perp\perp}$ étant tous deux des supplémentaires de $F^{\perp}$, nous déduisons qu'ils doivent être égaux. □

PropqiWonByiBmc

Proposition 25.15.
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$. Alors F est dense si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

Démonstration. Nous savons que
$$\mathscr{H} = F^{\perp} \oplus \bar{F}. \tag{25.62}$$
Donc nous avons $\mathscr{H} = \bar{F}$ si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$. □

Pour vérifier si un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert est dense, il suffit donc de montrer que son orthogonal est réduit à zéro.

25.3.2 Dual, théorème de représentation de Riesz

LemjYVcHE

Lemme 25.16.
L'application linéaire
$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathscr{H} &\to \mathcal{L}(\mathscr{H}, \mathbb{K}) \\ y &\mapsto \Phi_y \end{aligned} \tag{25.63}$$
est une isométrie : nous avons $\|\Phi_y\| = \|y\|$.

De plus pour chaque y, l'application Φ_y est continue.

Démonstration. En utilisant la définition de la norme opérateur et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\|\Phi_y\| = \sup_{\|x\|=1} \|\Phi_y(x)\| = \sup |\langle x, y \rangle| \leqslant \sup \|x\|\|y\| = \|y\|. \tag{25.64}$$
Par conséquent $\|\Phi_y\| \leqslant \|y\|$. Mais d'autre part le fait que $\Phi_y(y) = \|y\|^2$ montre que $\|\Phi_y\| \geqslant \|y\|$.

En ce qui concerne la continuité de Φ_y, elle est garantie par le fait que c'est une application linéaire bornée via la proposition 10.85. □

Définition 25.17.
*Le **dual** de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est l'ensemble*
$$\mathscr{H}' = \{f\colon \mathscr{H} \to \mathbb{K} \text{ linéaire et continue}\}. \tag{25.65}$$

Notons que dans le contexte des espaces de Hilbert nous demandons la continuité des éléments du dual parce qu'elle n'est pas automatique par la linéarité dans les cas de dimension infinie. En principe nous devrions préciser dual *topologique*, mais nous ne le ferons pas systématiquement lorsque le contexte parle clairement de topologie (ce qui est le cas lorsqu'on parle d'espaces de Hilbert). De temps en temps le dual *algébrique* d'un espace est noté E^* ; dans ce cas la continuité n'est pas demandée.

ThoQgTovL

Théorème 25.18 (Théorème de représentation de Riesz, thème 21)**.**
Soit un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'application

$$\begin{aligned}\Phi\colon \mathscr{H} &\to \mathscr{H}'\\ y &\mapsto \Phi_y\end{aligned} \tag{25.66}$$

est une bijection isométrique.

Démonstration. Nous savons du lemme 25.16 que Φ est une isométrie. Nous devons seulement montrer que Φ est surjective. L'application nulle est dans l'image de Φ. Soit $f \in \mathscr{H}'$ non nulle. Par continuité nous savons que $F = \ker(f)$ est fermé, donc

$$\mathscr{H} = \ker(f) \oplus (\ker f)^\perp \tag{25.67}$$

EQooFUCWooUnYcZG

par le théorème 25.13.

(1) **Une base adaptée**
Nous considérons une base de $\mathscr{H}$ adaptée à la décomposition 25.67, c'est-à-dire

- $(u_s)_{s\in S}$ une base de $\ker f$,
- $(v_t)_{t\in T}$ une base de $(\ker f)^\perp$.

(2) $(\ker f)^\perp \cap \ker(f) = \{0\}$
Si $v \in (\ker f)^\perp$ alors pour tout $w \in \ker(f)$ nous avons $\langle v, w\rangle = 0$. En particulier si v lui-même est dans $\ker(f)$ alors $\langle v, v\rangle = 0$ et $v = 0$.

(3) **Une base encore plus adaptée** Si v est non nul dans $(\ker f)^\perp$, alors $f(v) \neq 0$ (sinon il serait dans l'intersection entre $\ker(f)$ et $(\ker f)^\perp$). Mais $f(v) \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ implique que $f(\mathbb{K}v) = \mathbb{K}$, c'est-à-dire que $\{f(v)\}$ est une base de $\text{Image}(f)$ (l'image de f est $\mathbb{K}$).
Le théorème du rang (théorème 4.49) assure alors que

$$\{v\} \cup \{u_s\}_{s\in S} \tag{25.68}$$

est une base de $\mathscr{H}$ avec $v \in (\ker f)^\perp$ et $u_s \in \ker f$. Nous choisissons v pour avoir $\|v\| = 1$.

(4) **Existence**
Nous pouvons maintenant prouver l'existence de y tel que $\Phi_y = f$. Prouvons qu'en posant $y = \overline{f(v)}v$ nous avons $\Phi_y = f$. Pour cela, un peu de calcul :

$$\Phi_y(v) = \langle v, y\rangle = f(v)\langle v, v\rangle = f(v) \tag{25.69a}$$
$$\Phi_y(u_s) = \langle u_s, y\rangle = 0. \tag{25.69b}$$

Par conséquent Φ_y et f coïncident sur une base de $\mathscr{H}$.

(5) **Unicité**
En ce qui concerne l'unicité, d'abord si $\Phi_y = f$ alors nous devons avoir $y \in (\ker f)^\perp$ et par conséquent $y = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous avons alors

$$\Phi_y(v) = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle = \bar{\lambda}. \tag{25.70}$$

Pour que cela soit égal à $f(v)$, nous fixons $\lambda = \overline{f(v)}$.

□

Notons que nous avons réellement utilisé le théorème du rang pour l'unicité. Si nous ne demandions pas l'unicité, alors nous n'avions pas besoin du fait que $\dim(\ker f)^\perp = 1$, et nous aurons donc pu parler de formes plus générales à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.

25.3.3 Séparabilité

DEFooSFOJooGICSbT

Définition 25.19.
Un espace topologique est ***séparable*** *si il possède une partie dénombrable dense.*

DEFooQVPHooJaSWyF

Définition 25.20 ([691])**.**
Si E est un espace vectoriel normé nous disons que Δ est une partie ***totale*** *de E si* Span(Δ) *est dense dans E. Attention : nous rappelons que* Span(Δ) *est l'ensemble des combinaisons linéaires* finies *d'éléments de Δ.*

PROPooZMWHooVwvNBY

Proposition 25.21.
Un espace vectoriel normé est séparable si et seulement si il possède une partie totale dénombrable.

Démonstration. Si Δ est une partie dénombrable de E, alors le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\text{Span}_{\mathbb{Q}}\Delta$ est dénombrable, et sa fermeture est la même que celle de $\text{Span}_{\mathbb{K}}\Delta$. □

Définition 25.22.
Une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{H}$ indicée par un ensemble quelconque I est un ***système orthonormé*** *si*

(1) $\|u_i\| = 1$ *pour tout* $i \in I$,

(2) $u_i \perp u_j$ *pour tout* $i \neq j$.

Notons que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormé dénombrable alors en utilisant les formules de la proposition 25.4, nous avons

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2. \tag{25.71}$$

EqCLQbMy

Exemple 25.23.
Dans l'ensemble $L^2(a,b)$ avec $b-a=L$ l'ensemble des fonctions

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \exp(\frac{2\pi}{L} int) \tag{25.72}$$

EqxNXguH

avec $n \in \mathbb{Z}$ forme un système orthonormé. En effet

$$\langle e_n, e_n \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b \exp(\frac{2\pi}{L} int) \exp(-\frac{2\pi}{L} int) = 1 \tag{25.73}$$

et

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{\frac{2\pi}{L}(n-m)t} dt = 0. \tag{25.74}$$

Dans cette intégrale nous utilisons le fait que $b = a + (b-a)$ pour simplifier les expressions en cours de calcul.

La famille (25.72) est le **système trigonométrique** de $L^2(a,b)$. On en parle aussi dans [651]. △

PROPooMOQRooCPFnPC

Proposition 25.24.
Une partie orthonormée est libre.

Démonstration. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée de $\mathscr{H}$ et une combinaison linéaire *finie* nulle :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k u_k = 0. \tag{25.75}$$

Nous développons la somme en utilisant les formules de la proposition 25.4 :

$$0 = \| \sum_k a_k u_k \|^2 = \sum_k |a_k|^2 \|u_k\|^2 + 2 \sum_{k<l} \langle a_k u_k, a_l u_l \rangle. \tag{25.76}$$

La famille étant orthonormée, les choses se simplifient en

$$\sum_k |a_k|^2 = 0, \tag{25.77}$$

ce qui signifie que $a_k = 0$ pour tout k. □

Avant de continuer nous devons définir comment nous calculons des sommes sur des ensembles quelconques. Si I est un ensemble et si pour chaque $i \in I$ nous avons un nombre réel positif a_i, alors nous définissons

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{\substack{J\subset I\\ J \text{ fini}}} \sum_{j\in J} a_j. \tag{25.78}$$

Cela est discuté dans la section 10.10.

PropHKqVHj

Proposition 25.25 (Inégalités de Bessel)**.**
Soit $\mathscr{H}$ un préhilbert. Si $(u_i)_{i\in I}$ est un système orthonormé et si $x \in \mathscr{H}$, alors

EQooWCYZooOPzGaw

$$\sum_{i\in I} \big|\langle x, u_i\rangle\big|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{25.79}$$

Démonstration. Les éléments de la somme étant des réels positifs, la proposition 10.132 fonctionne pour décrire les sommes.

Posons $c_i(x) = \langle x, u_i\rangle$. Pour toute partie finie $J \subset I$ nous avons

$$0 \leqslant \Big\|x - \sum_{j\in J} c_j(x)u_j\Big\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\sum_j \langle x, c_j(x)u_j\rangle + \sum_j |c_j(x)|^2. \tag{25.80}$$

Mais en tenant compte du fait que

$$\langle x, c_j(x)u_j\rangle = \overline{c_j(x)}\langle x, u_j\rangle = |c_j(x)|^2, \tag{25.81}$$

nous restons avec

EqvwXWEA

$$\|x - \sum_{j\in J} c_j(x)u_j\| = \|x\|^2 - \sum_{j\in J} |c_j(x)|^2. \tag{25.82}$$

Finalement,

$$\sum_{j\in J} |c_j(x)|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{25.83}$$

Ayant cette inégalité pour toute partie finie de I, nous l'avons encore pour le supremum. □

PROPooWTOZooYZdlml

Proposition 25.26.
Soit $\mathscr{H}$ un préhilbert et une famille orthonormée $(u_i)_{i\in I}$. Si

EqitrzXi

$$x = \sum_{i\in I} \xi_i u_i \tag{25.84}$$

alors $\xi_i = \langle x, u_i\rangle$.

Démonstration. Nous appliquons l'application Φ_{u_k} du théorème de représentation de Riesz[9] à l'équation (25.84).

Si I est dénombrable, alors permuter Φ_{u_k} avec la somme consiste à invoquer la continuité, et permuter la limite des sommes partielles avec Φ_{u_k} (l'application Φ_{u_k} est continue parce qu'isométrique).

Sinon, il faut utiliser la proposition 10.146. Il faut donc montrer que la famille $\Phi_{u_k}\big(\xi_i u_i\big)$ est sommable. Cela est fort vrai parce que cette famille ne contient en réalité qu'en seul élément non nul, celui avec $i = k$, qui vaut ξ_k. Au final nous avons :

$$\langle x, u_k\rangle = \sum_{i\in I} \Phi_{u_k}(\xi_i u_i) = \xi_k. \tag{25.85}$$

□

25.3.4 Base hilbertienne

DEFooADQXooFoIhTG

Définition 25.27.
*Une **base orthonormée** est une famille dénombrable orthonormée et totale*[10]*. Cela sera souvent aussi appelé une **base hilbertienne**.*

25.28.
Cette définition demande quelques remarques.

[9] Théorème 25.18.
[10] Définition 25.20

(1) La notion de base hilbertienne n'est pas la même notion de base qu'en algèbre. En effet pour avoir une base algébrique d'un espace vectoriel, nous demandons que les éléments soient des combinaisons linéaires *finies* des éléments de la base, tandis qu'ici en demandant que la partie soit totale nous demandons simplement que les combinaisons linéaires finies soient denses.

(2) Nous allons voir qu'un espace de Hilbert est généré par les sommes *infinies* de vecteurs d'une base hilbertienne avec des coefficients qui forment une suite dans ℓ^2.

(3) Nous ne demandons pas que la famille soit libre ? La belle affaire. Une famille orthogonale est toujours libre, proposition 25.24.

(4) Nous verrons dans la proposition 25.37 que toute base hilbertienne est maximale (définition 25.33), c'est-à-dire que si $\langle x, b\rangle = 0$ pour tout b dans la base, alors $x = 0$.

LEMooHWOBooQJKdTD

Lemme 25.29 ([692]).
Si $\mathcal{E}$ est une base hilbertienne[11] *de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et si $x \in \mathscr{H}$ alors l'ensemble*

$$\{e \in \mathcal{E} \text{ tel que } \langle x, e\rangle \neq 0\} \tag{25.86}$$

est au plus dénombrable.

Démonstration. Notons qu'ici, $\mathscr{H}$ n'est pas supposé séparable. Nous savons par l'inégalité de Bessel (25.79) que

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} |\langle x, e\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{25.87}$$

Donc si $\epsilon > 0$ est donné, l'ensemble $\{e \in \mathcal{E} \text{ tel que } |\langle x, e\rangle| > \epsilon\}$ est fini. Or

$$\{e \in \mathcal{E} \text{ tel que } \langle x, e\rangle \neq 0\} = \{e \in \mathcal{E} \text{ tel que } |\langle x, e\rangle| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{e \in \mathcal{E} \text{ tel que } |\langle x, e\rangle| > \frac{1}{n}\}. \tag{25.88}$$

Bref, cet ensemble est une union dénombrable d'ensembles finis. Il est donc dénombrable. □

Remarque 25.30.
Le lemme 25.29 ne signifie pas que la base $\mathcal{E}$ doive être dénombrable. Il signifie seulement que pour chaque x séparément, seule une partie dénombrable de $\mathcal{E}$ est nécessaire.

CORooFROTooNupAQs

Corolaire 25.31 ([692]).
Si un espace de Hilbert possède une base hilbertienne dénombrable, alors toutes ses bases hilbertiennes sont dénombrables.

Démonstration. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des bases hilbertiennes de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$, en supposant que $\mathcal{E}$ soit dénombrable. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ nous avons $\langle f, e\rangle \neq 0$ pour au moins un $e \in \mathcal{E}$, sinon en vertu de la décomposition (25.84) de f dans la base $\mathcal{E}$, nous aurions $f = 0$. Nous avons donc

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{e\in\mathcal{E}} \{f \in \mathcal{F} \text{ tel que } \langle f, e\rangle \neq 0\}, \tag{25.89}$$

EQooKRTFooNABXnH

alors que le lemme 25.29 indique que chacun des ensembles de l'union est au plus dénombrable. La partie $\mathcal{F}$ est donc une union dénombrable d'ensemble dénombrables. Elle est dénombrable. □

Remarque 25.32.
En travaillant un peu plus sur la notion de cardinalité, le corolaire 25.31 indique que toutes les bases hilbertiennes ont même cardinalité. En effet en laissant tomber l'hypothèse de dénombrabilité sur $\mathcal{E}$, l'inclusion (25.89) donne que $\mathcal{F}$ est une union de $\mathrm{Card}(\mathcal{E})$ ensembles dénombrables et est alors de cardinalité $\mathrm{Card}(\mathcal{E})$.

DEFooRFATooDRKWoJ

Définition 25.33.
*Une partie orthonormale B est **maximale** si le seul $x \in \mathscr{H}$ vérifiant $\langle x, b\rangle = 0$ pour tout $b \in B$ est $x = 0$.*

LEMooXIECooCAQeJN

Lemme 25.34 ([1, 693]).
Tout espace de Hilbert possède une partie orthonormale maximale.

[11] Définition 25.27.

Démonstration. Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{O}$, l'ensemble de parties orthonormales de $\mathscr{H}$, ordonné[12] par l'inclusion. Cet ensemble est inductif. En effet soit une partie totalement ordonnée $\{A_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{O}$: chaque A_i est une partie orthonormale de $\mathscr{H}$, et de plus pour $i,j\in I$ nous avons soit $A_i\subset A_j$ soit $A_j\subset A_i$. Nous pouvons considérer

$$A=\bigcup_{i\in I}A_i. \tag{25.90}$$

Cela est encore une partie orthonormée de $\mathscr{H}$ parce que si $x,y\in A$, alors il existe $i,j\in I$ tels que $x\in A_i$ et $y\in A_j$. Vu que $\{A_i\}_{i\in I}$ est totalement ordonné nous supposons pour fixer les idées que $A_i\subset A_j$. Alors x et y sont dans A_j qui est une partie orthonormée ; nous en déduisons que $\langle x,y\rangle=0$ et donc que A est une partie orthonormée. C'est-à-dire : $A\in\mathcal{O}$. Par ailleurs, A est un majorant de $\{A_i\}_{i\in I}$ pour l'inclusion parce que $A_i\subset A$ pour tout i.

Nous avons prouvé que $\mathcal{O}$ est un ensemble inductif. Le lemme de Zorn 1.37 nous dit alors que $\mathcal{O}$ possède un élément maximum. Cet élément est une partie orthonormale incluse dans aucune autre partie orthonormale. C'est-à-dire qu'il est une partie orthonormale maximale au sens de la définition 25.33. □

PROPooENTIooIplRAS

Proposition 25.35 ([693]).
Si un espace de Hilbert possède une partie orthonormale maximale dénombrable, alors toutes les parties orthonormales sont dénombrables (ou finies).

Démonstration. Soit B une partie orthonormale maximale, et A une partie orthonormale. Pour chaque $b\in B$ nous notons

$$A(b)=\{a\in A\text{ tel que }\langle a,b\rangle\neq 0\}\cup\{0\}. \tag{25.91}$$

Un élément de A qui ne serait dans aucun des $A(b)$ serait perpendiculaire à tous les éléments de B, et serait donc l'élément nul. Mais l'élément nul est dans tous les $A(b)$; donc nous avons

$$A\subset\bigcup_{b\in B}A(b). \tag{25.92}$$

Or par l'inégalité de Bessel, l'ensemble $A(b)$ est dénombrable. Par conséquent A est inclus dans une union dénombrable d'ensembles dénombrables ; A est dénombrable. □

Le fait que tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne est vrai. Nous allons démontrer ce résultat d'abord pour les espaces séparables et ensuite, indépendamment, en général. Si vous vous la sentez de maîtriser la proposition 25.37, vous pouvez sauter la 25.36.

PROPooDRFBooWTcunC

Proposition 25.36.
Tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne.

Démonstration. Vu que nous supposons avoir un espace de Hilbert séparable, il possède une partie totale dénombrable par la proposition 25.21. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle partie. Quitte à supprimer les v_i qui sont combinaisons linéaires des précédents, nous pouvons supposer que cette partie est libre. Nous considérons l'espace vectoriel

$$F_n=\text{Span}\{v_1,\dots,v_n\}. \tag{25.93}$$

Sur F_n nous pouvons appliquer un procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée $\{u_1,\dots,u_n\}$ de F_n au sens usuel. En considérant F_{n+1} et en recommençant, les vecteurs $u_1,\dots,u_n$ ne changent pas, mais nous obtenons un vecteur u_{n+1}.

Nous construisons ainsi une suite (u_n) qui est alors orthonormée au sens des espaces de Hilbert. Nous devons encore prouver qu'il s'agit d'un ensemble total. Cela est simplement dû au fait que tout élément de $\text{Span}\{v_n\}$ est contenu dans $\text{Span}\{u_n\}$ parce que Span ne considère que des combinaisons linéaires finies. □

PROPooLDXFooRaxBsI

Proposition 25.37 ([693]).
À propos de parties orthonormales maximales.

ITEMooVUFXooDrVwum

(1) Une partie d'un espace de Hilbert est orthonormale maximale[13] *si et seulement si elle est une base hilbertienne.*

ITEMooZFENooQnSlrv

(2) Tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne.

[12] Définition 1.23.
[13] Définition 25.33.

Démonstration. Soit une partie orthonormale maximale B et la fermeture de son espace engendré : $F = \overline{\text{Span}(B)}$. Pour que B soit une base, nous devons démontrer que $F = \mathscr{H}$. Pour cela nous considérons $x \in \mathscr{H}$ et nous utilisons le théorème de projection orthogonale 25.9 pour mentionner le fait que

$$x - \texttt{proj}_F(x) \perp F \tag{25.94}$$

Cela dit que $x - \texttt{proj}_F(x)$ est un vecteur orthogonal en particulier à tous les éléments de B ; par maximalité nous avons $x - \texttt{proj}_F(x) = 0$, c'est-à-dire $x = \texttt{proj}_F(x)$ ou encore $x \in F$. Cela prouve que $F = \mathscr{H}$.

Note : pour être pointilleux, nous aurions dû travailler non avec $x - \texttt{proj}_F(x)$, mais avec le vecteur normalisé à 1.

En ce qui concerne le second point, nous invoquons le lemme 25.34 pour dire que tout espace de Hilbert possède une partie orthonormale maximale. Ensuite la première partie de cette proposition nous dit que cette dernière est une base hilbertienne. □

PROPooEYRSooCRPjdK

Proposition 25.38 (Unicité de la décomposition dans une base hilbertienne[1])**.**
Soit un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ muni d'une base hilbertienne $\{u_i\}_{i\in I}$. Alors :

(1) Si

$$\sum_{i\in I} a_i u_i = 0, \tag{25.95}$$

alors $a_i = 0$ pour tout $i \in I$.

(2) Si $\sum_{i\in I} a_i u_i = \sum_{i\in I} b_i u_i$, alors $a_i = b_i$ pour tout i dans I.

Démonstration. Supposons que $\sum_i a_i u_i = 0$. La proposition 25.26 nous dit alors que

$$a_j = \langle \sum_i a_i u_i, u_j \rangle = \langle 0, u_j \rangle = 0. \tag{25.96}$$

Pour la même raison, si

$$x = \sum_{i\in I} a_i u_i = \sum_{i\in I} b_i u_i, \tag{25.97}$$

alors, pour chaque $i \in I$, nous avons $a_i = \langle x, u_i \rangle$ et $b_i = \langle x, u_i \rangle$, c'est-à-dire $a_i = b_i$. □

Voici un petit résumé de ce que nous avons vu en termes de dénombrabilité et séparabilité.

THOooMKNFooVrCNGA

Théorème 25.39.
Pour un espace de Hilbert, les choses suivantes sont équivalentes.

ITEMooSJKVooFIIbwg

(1) L'espace est séparable[14]*.*

ITEMooQIZLooYdtYqF

(2) L'espace possède au moins une base hilbertienne[15] *dénombrable.*

ITEMooHYSXooOubwUy

(3) Toutes les bases hilbertiennes sont dénombrables.

ITEMooMZICooNBAVum

(4) Toute partie libre est dénombrable.

Démonstration. Plein de résultats à citer …

(1) **(1) implique (2)**
est la proposition 25.36.

(2) **(2) implique (3)**
est la proposition 25.31.

(3) **(3) implique (4)**
Le procédé de Gram-Schmidt met en bijection une partie libre avec une partie orthonormale (qui engendre le même espace, mais c'est une autre affaire). Or lorsque l'espace de Hilbert possède une base dénombrable, toutes les parties orthonormales sont dénombrables par la proposition 25.35.

[14] Définition 25.19.
[15] Définition 25.27.

(4) **(4) implique (1)** La proposition 25.37(2) dit que tout espace de Hilbert possède des bases hilbertiennes. Une telle base est forcément une partie libre parce que toute famille orthonormale est libre (proposition 25.24), et donc dénombrable par hypothèse. À ce point nous avons montré que notre espace de Hilbert possédait une base hilbertienne dénombrable. Cela implique qu'il est séparable par la proposition 25.21.

□
RemfdJcQF

Remarque 25.40.
À mon avis il doit exister un théorème de complétion de base hilbertienne disant que si on a une famille orthonormée, alors elle se prolonge en base. Utilisant cela, nous trouvons une nouvelle démonstration de la proposition 25.25 en disant que la somme sur la « partie de base » est plus petite que la somme sur la « base complète ».

25.41.
Vu que nous n'avons l'intention de ne travailler qu'avec des espaces de Hilbert séparables et que toutes leurs bases sont dénombrables, nous n'allons travailler qu'avec des bases dénombrables, et donc des systèmes orthonormés dénombrables. Nous allons conventionnellement les indicer par $\mathbb{N}$.

La proposition suivante explique que la notion de projection est compatible avec la décomposition d'un vecteur dans un système orthonormé.

Proposition 25.42.
Soit $(u_k)_{k\geqslant 1}$ un système orthonormé d'un préhilbert $\mathscr{H}$. Soient

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k \tag{25.98}$$

et

$$F = \text{Span}\{u_1, \dots, u_n\}. \tag{25.99}$$

Alors

$$\texttt{proj}_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k. \tag{25.100}$$

Démonstration. Nous allons dans un premier temps montrer que

$$y = x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k \tag{25.101}$$

est dans $F^\perp$. Pour cela nous calculons

$$\langle x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k, u_j \rangle = \langle \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k u_k, u_j \rangle = 0 \tag{25.102}$$

où nous avons utilisé la continuité du produit scalaire pour permuter la somme (infinie) et le produit. Étant donné que $y \in F^\perp$ nous avons $\texttt{proj}_F y = 0$ par le point (2) du théorème 25.13.

D'autre part $\texttt{proj}_F y$ peut être calculé selon

$$\texttt{proj}_F y = \texttt{proj}_F x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \texttt{proj}_F u_k \tag{25.103}$$

tandis que $\texttt{proj}_F u_k = u_k$ lorsque $1 \leqslant k \leqslant n$. Par conséquent l'annulation de $\texttt{proj}_F y$ donne

$$\texttt{proj}_F x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k, \tag{25.104}$$

donc le résultat. □
ThooRArDp

Théorème 25.43 (Meilleure approximation)**.**
Soit $\{u_i\}_{i\in I}$ une famille orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Alors pour tout $x \in \mathscr{H}$ et pour tout J fini dans I et pour toute famille de nombres complexes $(a_j)_{j\in J}$ nous avons

$$\| \sum_{j\in J} \langle x, u_j \rangle u_j - x \| \leqslant \| \sum_{j\in J} a_j u_j - x \|. \tag{25.105}$$

Ce théorème exprime le fait que les nombres $\langle x, u_i\rangle$ sont les meilleurs coefficients à mettre devant les u_i pour approximer x.

Corolaire 25.44.
Soit $\{u_i\}_{i\in I}$ une famille orthonormée de $\mathscr{H}$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$ et pour toutes parties finies J, K de I avec $J \subset K$ nous avons

$$\| \sum_{j\in K} \langle x, u_j\rangle u_j - x\| \leqslant \| \sum_{j\in J} \langle x, u_j\rangle u_j - x\|. \tag{25.106}$$

Ce corolaire exprime le fait que plus on prend de termes de la forme $\langle , u_i\rangle u_i$, mieux c'est.

PropzaKXHq

Proposition 25.45.
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et (u_n) un système orthonormé dans $\mathscr{H}$. Si $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans ℓ^2 alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n \tag{25.107}$$

converge dans $\mathscr{H}$.

Autrement dit l'application

$$\begin{aligned} S\colon \mathscr{H} &\to \ell^2 \\ x &\mapsto \big(\langle x, u_n\rangle\big)_{n\geqslant 1} \end{aligned} \tag{25.108}$$

est surjective.

Démonstration. Nous allons montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$ est de Cauchy, c'est-à-dire que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{k=n}^{n+p} \xi_k u_k \Big\| = 0 \tag{25.109}$$

est uniforme en p. Cela est un corolaire de la formule (25.71) parce que

$$\Big\| \sum_{k=n}^{n+p} \xi_k u_k \Big\|^2 = \sum_{k=n}^{n+p} |\xi_k|^2. \tag{25.110}$$

Mais si (ξ_n) est dans ℓ^2, pour tout ϵ, il existe N tel que si $n > N$ alors le membre de droite est inférieur à ϵ indépendamment de p. □

25.3.5 Décomposition dans une base hilbertienne

Étant donné une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, nous notons

$$c_k(x) = \langle x, u_k\rangle. \tag{25.111}$$

Dans le théorème suivant (et d'ailleurs partout), les sommes sur I sont prises au sens de la définition 10.128.

ThoyAjoqP

Théorème 25.46 (Décomposition dans une base orthogonale)**.**
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable $\{u_i\}_{i\in I}$ une base orthonormée (I est un ensemble dénombrable quelconque).

ItemQGwoIxi

(1) Pour tout $x \in \mathscr{H}$ nous avons

EqPUPTXJ

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, u_i\rangle u_i \tag{25.112}$$

où la somme est prise au sens de la définition 10.128. En particulier, la somme converge de façon commutative.

(2) Si $\{e_i\}_{i\in I}$ est une famille orthonormée qui satisfait la décomposition (25.112) pour tout $x \in \mathscr{H}$ alors $\{e_i\}$ est une base hilbertienne.

(3) Nous avons l'identité de ***Plancherel***

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, u_i\rangle|^2. \tag{25.113}$$

Le point (5) nous indiquera que cette égalité est en fait suffisante pour dire que nous avons une base.

(4) *Nous avons l'identité de* ***Parseval***

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, u_i\rangle\overline{\langle y, u_i\rangle}. \tag{25.114}$$

EqHZxjtKt

ItemQGwoIx

(5) *Si $\{u_i\}$ est une famille de vecteurs unitaires vérifiant l'identité de Plancherel, alors c'est une base hilbertienne.*

(6) *Si $\{u_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne, la suite $n \mapsto |\langle x, u_n\rangle|$ appartient à $\ell^2(I)$.*

Démonstration. (1) Étant donné que le système $\{u_i\}_{i\in I}$ est total, nous pouvons considérer une suite de combinaisons linéaires finies des u_i qui converge vers x. Nous écrivons

$$x_n = \sum_{x\in J_n} a_{n,k}u_j \tag{25.115}$$

et $x_n \to x$ dans $\mathscr{H}$. Les ensembles J_n sont des sous-ensembles finis de I. Nous pouvons les choisir de telle sorte que $J_n \subset J_{n+1}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$. Ce choix correspond à éventuellement prendre $a_{n,j} = 0$ pour toutes les valeurs de j « en trop ».

Soit $\epsilon > 0$ et N tel que $\|x_n - x\| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Nous allons montrer que pour tout J fini tel que $J_N \subset J$ nous avons $\|\sum_{j\in J}\langle x, u_j\rangle u_j - x\| < \epsilon$. Étant donné que

$$\sum_{j\in J_N}\langle x, u_j\rangle u_j = \sum_{j\in J} a_j u_j \tag{25.116}$$

avec

$$a_j = \begin{cases}\langle x, u_j\rangle & \text{si } j \in J_N\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases} \tag{25.117}$$

le théorème de meilleure approximation 25.43 nous enseigne que

$$\|\sum_{j\in J}\langle x, u_j\rangle u_j - x\| \leqslant \|\sum_{j\in J_N}\langle x, u_j\rangle u_j - x\| < \epsilon \tag{25.118}$$

par conséquent la somme $\sum_{i\in I}\langle x, u_i\rangle u_i$ converge vers x au sens général, et en particulier commutativement.

Les sommes étant commutatives (en particulier $x = \sum_{i\in I}\langle x, u_i\rangle u_i$), et les bases hilbertiennes étant dénombrables, nous ne perdons aucune généralité en ne considérant que des bases indexées par $\mathbb{N}$.

(2) Nous devons montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires finies est dense dans $\mathscr{H}$. Par hypothèse, pour tout ϵ, il existe un ensemble fini J tel que

$$\|\sum_{j\in J}\langle x, u_j\rangle u_j - x\| < \epsilon. \tag{25.119}$$

Cela prouve la densité dont nous avions besoin.

(3) La norme étant une fonction continue, elle commute avec les sommes infinies, de telle sorte que l'égalité de Plancherel donne

$$\|x\|^2 = \|\sum_{i\in I}\langle x, u_i\rangle u_i\|^2. \tag{25.120}$$

Le système des u_i étant orthonormé,

$$\|x\|^2 = \|\sum_{i\in I}\langle x, u_i\rangle u_i\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x, u_i\rangle|^2. \tag{25.121}$$

(4) Au tour de Parseval. Nous commençons par prouver que la somme du membre de droite converge. En utilisant l'inégalité $|zz'| \leqslant |z|^2 + |z'|^2$ (valable pour $z, z' \in \mathbb{C}$) et Plancherel, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}|\langle x, u_i\rangle\overline{\langle y, u_i\rangle}| &\leqslant \sum_{i\in I}|\langle x, u_i\rangle|^2 + |\langle y, u_i\rangle|^2\\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2.\end{aligned} \tag{25.122}$$

Nous en déduisons que la famille $\langle x, u_i\rangle\overline{\langle y, u_i\rangle}$ est (commutativement) sommable en utilisant la proposition 10.142. Par ailleurs nous savons que

$$x = \sum_{i\in I} c_i(x)u_i \tag{25.123a}$$

$$y = \sum_{i\in I} c_i(y)u_i, \tag{25.123b}$$

et le produit scalaire étant une forme bilinéaire continue,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\langle c_i(x)u_i, \overline{c_j(y)u_j}\rangle \tag{25.124a}$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_i(x)\overline{c_j(y)}\delta_{ij} \tag{25.124b}$$

$$= \sum_{i\in I} c_i(x)\overline{c_i(y)}. \tag{25.124c}$$

(5) Nous utilisons l'égalité de Plancherel avec $x = u_j$:

$$\|u_j\|^2 = \|u_j\|^2 + \sum_{i\in I\setminus\{j\}} |\langle u_j, u_i\rangle|^2. \tag{25.125}$$

Par conséquent $\langle u_j, u_i\rangle = 0$ dès que $i \neq j$. Cela prouve que le système $\{u_i\}_{i\in I}$ est orthonormé.

Nous devons encore prouver que le système est total. Pour cela nous repartons de l'équation (25.82) que nous avions déduites dans la démonstration de l'inégalité de Bessel :

$$\|x - \sum_{j\in J} c_j(x)u_j\| = \|x\|^2 - \sum_{j\in J} |c_j(x)|^2. \tag{25.126}$$

Par hypothèse le membre de droite peut être rendu aussi petit que l'on veut en prenant J grand (mais fini) dans I. Le membre de gauche indique alors que le système $\{u_i\}_{i\in I}$ est total.

(6) L'identité de Plancherel signifie entre autres que si $x \in \mathscr{H}$ alors $\sum_{i\in I} |\langle x, u_i\rangle|^2$ converge. Du coup la suite $(\langle x, u_i\rangle)_{i\in I}$ est dans $\ell^2(I)$.

□

Remarque 25.47.
Nous avons décidé d'indexer les bases hilbertiennes par $\mathbb{N}$; cela est légitime parce que les sommes sont commutatives. Il ne faut cependant pas perdre de vue qu'en pratique l'ensemble naturel avec lequel on indexe une base est parfois $\mathbb{Z}$. Un tel cas est donné par la base trigonométrique de L^2. Indexer cette dernière par $\mathbb{N}$ plutôt que par $\mathbb{Z}$ serait une contorsion inutile.

Remarque 25.48.
L'égalité de Parseval est la raison pour laquelle les physiciens écrivent souvent

$$\mathrm{Id} = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n\rangle\langle u_n| \tag{25.127}$$

dans les livres de mécanique quantique par exemple. Dans certains[694], nous lisons même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq|q\rangle\langle q| = \hat{I}. \tag{25.128}$$

Notons que ces personnes travaillent avec un espace de Hilbert dont la base n'est pas dénombrable. Pour dire que la physique, ça n'utilise pas des mathématiques pour rire !

Remarque 25.49.
Par définition une base orthonormée est donc une partie dénombrable dont l'espace vectoriel engendré est dense. Un espace de Hilbert possédant une base orthonormée est donc séparable. C'est ce fait qui nous pousse à ne considérer que des espaces de Hilbert séparables ; nous n'allons donc pas étudier ce qu'il se passerait par exemple en considérant l'espace vectoriel librement engendré par les éléments de $\mathbb{R}$.

Exemple 25.50.
L'identité de Parseval (25.114), dans le cas de l'espace des fonctions continues périodiques de période 2π signifie qu'en posant

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)e^{-ins}, \tag{25.129}$$

nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(s)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2. \tag{25.130}$$

EqMIuCSfz

△

CorQETwUdF

Corolaire 25.51.
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et (u_n) une base orthonormée. L'application

$$\begin{aligned} S\colon \mathscr{H} &\to \ell^2 \\ x &\mapsto \big(\langle x, u_n\rangle\big)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned} \tag{25.131}$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

De plus l'isomorphisme réciproque est

$$\begin{aligned} S^{-1}\colon \ell^2 &\to \mathscr{H} \\ (\xi_n) &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n. \end{aligned} \tag{25.132}$$

Démonstration. Nous devons prouver que l'application est bijective et qu'elle vérifie

$$S(x)\cdot S(y) = \langle x, y\rangle \tag{25.133}$$

où le point dénote le produit dans ℓ^2.

Pour la surjectivité, si $(\xi_n) \in \ell^2$ alors nous savons que la somme $\sum_n \xi_n u_n$ converge par la proposition 25.45 et par conséquent (ξ_n) est l'image par S de ce vecteur de $\mathscr{H}$.

Pour l'injectivité, si $S(x) = S(y)$ alors

$$x = \sum_n \langle x, u_n\rangle u_n = \sum_n \langle y, u_n\rangle u_n = y \tag{25.134}$$

en utilisant la décomposition (25.112).

Le fait que S soit une isométrie est contenu dans Parseval. □

PROPooPVQIooPcEFSe

Proposition 25.52 ([1]).
Soit un espace de Hilbert séparable $\mathscr{H}$, un sous-espace vectoriel fermé V et une base orthonormée $\{b_i\}_{i\in I}$ de $\mathscr{H}$. En posant $v_i = \texttt{proj}_V(b_i)$ alors

$$C = \overline{\text{Span}\{b_i - v_i\}} \tag{25.135}$$

est l'orthogonal de V.

Démonstration. Juste pour rappel, lorsque nous écrivons $v_i = \texttt{proj}_V(b_i)$, nous parlons de la projection orthogonale du théorème 25.9. Donc tous les vecteurs $b_i - v_i$ sont dans $V^\perp$. En passant aux limites, $C \subset V^\perp$.

Soit $x \in V^\perp$ que nous décomposons dans la base $\{b_i\}_{i\in I}$ comme $x = \sum_{i\in I} x_i b_i$. Posons $c_i = b_i - v_i = b_i - \texttt{proj}_V(b_i)$. Alors d'une part

$$0 = \texttt{proj}_V(x) = \sum_i x_i \,\texttt{proj}_V(b_i) = \sum_i x_i(b_i - c_i). \tag{25.136}$$

Nous avons utilisé la continuité de $\texttt{proj}_V$ pour permuter avec la somme. D'autre part,

$$x = \sum_i x_i b_i = \sum_i x_i(b_i - c_i + c_i) = \underbrace{\sum_i x_i(b_i - c_i)}_{=0} + \sum_i x_i c_i \in C. \tag{25.137}$$

Notons que pour la dernière appartenance, il est important de prendre la fermeture pour définir C. □

Proposition 25.53 ([1, 695]).
Toute partie orthonormée d'un espace de Hilbert séparable se prolonge en une base hilbertienne.

Démonstration. Soit une partie orthonormée $\{u_i\}_{i\in I}$ de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Nous mentionnons que cette partie est libre et donc, par le théorème 25.39, dénombrable[16]. Montrons pour commencer que la partie $V = \overline{\text{Span}\{u_i\}_{i\in I}}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$.

(1) **Vectoriel** Soit $v, w \in V$ et $\epsilon > 0$. Il existe $a \in \text{Span}\{u_i\}$ tel que $\|a - v\| < \epsilon$ et $b \in \text{Span}\{u_i\}$ tel que $\|b - w\| < \epsilon$. Dans ce cas,

$$\|v + w - (a + b)\| \leqslant 2\epsilon. \tag{25.138}$$

Cela prouve que $v + w \in V$. Nous procédons de même pour λv.

(2) **Fermé** Par construction.

L'orthogonal[17] de V est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$, et nous pouvons donc en considérer une base hilbertienne $C = \{c_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Nous prétendons que $C \cup U$ est une base hilbertienne[18] de $\mathscr{H}$.

(1) **$C \cup U$ est libre** Bing ! Il ne faut pas le démontrer : ça ne fait pas partie de la définition d'une base hilbertienne.

(2) **$C \cup U$ est générateur** Bang ! Il ne faut pas le démontrer : ça ne fait pas partie de la définition d'une base hilbertienne.

(3) **$C \cup U$ est orthogonal** Ah, voilà quelque chose à démontrer. Nous devons vérifier que les produits sont nuls. Soient $u, v \in U$ et $a, b \in C$. Nous avons :

- $\langle u, v\rangle = 0$ par hypothèse.
- $\langle u, a\rangle = 0$ parce que les éléments de C sont orthogonaux à V et que $u_i \in V$.
- $\langle a, b\rangle = 0$ parce que C est une base hilbertienne de $V^\perp$.

(4) **$C \cup U$ est dénombrable**

L'ensemble C est dénombrable parce que c'est une base hilbertienne. Quant à $\{u_i\}_{i\in I}$, nous avons déjà mentionné le fait qu'il doive être dénombrable. L'union deux parties dénombrables est dénombrable.

(5) **$C \cup U$ est total**

Nous devons prouver que $\overline{\text{Span}(C \cup U)} = \mathscr{H}$ parce qu'il y a bien la fermeture qui intervient dans la définition 25.20. Pour cela nous utilisons la proposition 25.15. Si $x \in \mathscr{H}$ alors nous avons

$$x = \texttt{proj}_V(x) + \big(x - \texttt{proj}_V(x)\big) = \sum_{i\in I} x_i u_i + \sum_{\alpha\in A} x_\alpha c_\alpha \tag{25.139}$$

pour des coefficients x_i et x_α. Notons que I et A sont deux ensembles différents. Aucun des x_α n'est un des x_i, ni inversement. Supposons que $x \in \text{Span}(C \cup U)^\perp$; alors

$$0 = \langle x, u_j\rangle = \sum_{i\in I} x_i \underbrace{\langle u_i, u_j\rangle}_{=\delta_{ij}} + \sum_{\alpha\in A} \underbrace{\langle c_\alpha, u_j\rangle}_{=0} = x_j. \tag{25.140}$$

Donc $x_j = 0$. En faisant de même avec $0 = \langle x, c_\beta\rangle = x_\beta$ nous déduisons $x = 0$.

□

PROPooZQIAooUEWLtg

Proposition 25.54 ([1]).
Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert séparable de base hilbertienne $\{e_i\}_{i\in I}$, alors $\mathscr{H}'$ est un espace de Hilbert séparable dont une base hilbertienne est donnée par les formes

$$\begin{aligned} \alpha_i \colon \mathscr{H} &\to \mathbb{C} \\ e_j &\mapsto \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{25.141}$$

Démonstration. C'est la proposition 25.6 qui fait tout. □

[16] Avec un peu de mauvaise foi, vous pouvez quand même dire que cela n'implique pas que I lui-même soit dénombrable, mais vous pouvez le supposer pour fixer les idées.
[17] Voir la définition 25.11 et la proposition 25.52.
[18] Définition 25.27.

25.3.6 Digression sur les normes opérateurs

subsecaeSywF

Le théorème 25.46 nous indique que si $\{u_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne, alors pour tout $x \in \mathscr{H}$ nous avons

$$\texttt{proj}_{u_i}(x) = \langle x, u_i\rangle u_i, \tag{25.142}$$

et donc

$$\sum_{i\in I} \texttt{proj}_{u_i} x = x. \tag{25.143}$$

Nous ne pouvons cependant pas conclure que

$$\sum_{i\in I} \texttt{proj}_{u_i} = \mathrm{Id} \tag{25.144}$$

EqyKDzNl

au sens de la norme opérateur de la définition 10.67. En effet en prenant $I = \mathbb{N}$, l'égalité (25.144) demanderait d'avoir

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{N} \texttt{proj}_{u_i} - \mathrm{Id} \right\|_{\infty} = 0, \tag{25.145}$$

or pour tout N, le vecteur u_{N+1} réalise

$$\sum_{i=1}^{N} \texttt{proj}_{u_i}(u_{N+1}) - u_{N+1} = -u_{N+1}. \tag{25.146}$$

Par conséquent pour tout N nous avons

$$\sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{N} \texttt{proj}_{u_i} x - x \right\| \geqslant 1. \tag{25.147}$$

Nous ne pouvons donc pas dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \texttt{proj}_{u_i} = \mathrm{Id} \tag{25.148}$$

au sens de la norme opérateur.

Nous avons cependant la convergence au sens faible.

Proposition 25.55.
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$. Au sens de la topologie faible sur l'espace des opérateurs nous avons

$$\sum_{i=1}^{\infty} \textit{proj}_{u_i} = \mathrm{Id}\,. \tag{25.149}$$

Démonstration. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathscr{H}$, en vertu de la décomposition (25.112) nous avons

$$\sum_{i=1}^{N} \texttt{proj}_{u_i}(x) - x = \sum_{i=N+1}^{\infty} \langle x, u_i\rangle u_i. \tag{25.150}$$

Par l'orthonormalité de la base nous avons

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \|\langle x, u_i\rangle u_i\| = \sum_{i=N+1}^{\infty} |\langle x, u_i\rangle|, \tag{25.151}$$

dont la limite $N \to \infty$ est zéro étant donné que la suite $i \mapsto |\langle x, u_i\rangle|$ est dans $\ell^2(\mathbb{R})$ par le théorème 25.46. □

25.3.7 Applications linéaires et continuité

Nous avons déjà vu dans l'exemple 10.86 que la fonction

$$\begin{aligned} f\colon H &\to H \\ e_k &\mapsto k e_k \end{aligned} \tag{25.152}$$

EqCJVooJQuXdN

n'était pas continue en zéro alors qu'elle est linéaire. Nous allons maintenant voir qu'elle est un contre-exemple à la proposition 12.321. Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \frac{d}{dt}\Big[f(x+te_j)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[\sum_k k(x_k + t\delta_{jk})e_k\Big]_{t=0} = je_j. \tag{25.153}$$

où nous avons permuté la somme et la dérivée en considérant la suite de fonctions $f_k(t) = k(x_k + tu_k)e_k$. Donc $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x)$ existe et est continue sur un voisinage de $x = 0$ (c'est même constant). Nous savons pourtant que la fonction f n'est pas différentiable en zéro parce que non continue.

L'endroit qui coince dans la preuve de la proposition 12.321 est l'introduction des « contres-termes » dans l'équation (12.872). En effet les contre-termes à ajouter seraient

$$l(x) = \frac{d}{dt}\Big[f\big(a + s(x-a)\big)\Big]_{t=0} \tag{25.154}$$

qui ici serait

$$l\big(\sum_k x_k e_k\big) = \frac{d}{dt}\Big[f\big(t\sum_k x_k e_k\big)\Big]_{t=0} = \sum_k x_k e_k, \tag{25.155}$$

dont la convergence est plus que douteuse.

Notons que les dérivées directionnelles n'existent pas toutes, loin s'en faut : si $u \in H$ nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x) = \frac{d}{dt}\Big[f(x+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[\sum_k k(x_k + tu_k)e_k\Big]_{t=0} = \sum_k k u_k e_k \tag{25.156}$$

EQooWNLOooJNRUMQ

La convergence de la dernière somme n'est pas garantie pour tout u.

Exemple 25.56.
Soit un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. L'application

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathscr{H} &\to \mathbb{C}\\ e_i &\mapsto 1\end{aligned} \tag{25.157}$$

n'est pas continue.

Nous considérons les vecteurs $y_n = \sum_{i=1}^n e_i$ et nous posons $x_n = y_n/\|y_n\|$. Nous avons

$$\|y_n\|^2 = \langle y_n, y_n\rangle = \sum_{i,j}^n \langle e_i, e_j\rangle = n, \tag{25.158}$$

donc $\|y_n\| = \sqrt{n}$, et

$$\phi(x_n) = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}. \tag{25.159}$$

L'application ϕ n'est donc pas bornée et pas continue non plus. △

PROPooWHZKooEXEIrV

Proposition 25.57.
Soient deux espaces de Hilbert séparables[19] $\mathscr{H}_1$ *et* $\mathscr{H}_2$*. Soit une base orthonormée* $\{e_i\}_{i\in I}$ *où* I *est dénombrable. Si* $\Phi\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ *est une bijection linéaire continue, alors*

$$\Phi\big(\sum_{i\in I} x_i e_i\big) = \sum_{i\in I} x_i \Phi(e_i). \tag{25.160}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Vu que $\sum_{i\in I} x_i e_i$ est une somme convergente[20], il existe une partie finie J de I telle que pour tout K fini contenant J,

$$\|\sum_{j\in K} x_j e_j - x\| < \epsilon. \tag{25.161}$$

Vu que Φ est une isométrie linéaire, nous avons

$$\|\sum_{j\in K} x_j \Phi(e_j) - \Phi(x)\| < \epsilon, \tag{25.162}$$

et donc bien l'égalité

$$\sum_{i\in I} x_i \Phi(e_i) = \Phi(x). \tag{25.163}$$

□

[19] Donc à base dénombrable, voir 25.39.
[20] Définition 10.128.

La proposition suivante donne une formule pour l'inverse du Φ du théorème de représentation de Riesz 25.18 lorsque nous avons une base hilbertienne.

Proposition 25.58.
Soit un espace de Hilbert séparable $\mathscr{H}$. Si $\phi \in \mathscr{H}'$, alors

$$\Phi^{-1}(\phi) = \sum_{i\in I} \phi(e_i)e_i \tag{25.164}$$

EQooRLJEooTaUtWy

dès que $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$.

Démonstration. Nous considérons la base des $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ de $\mathscr{H}'$. Remarquez au passage que $\alpha_i = \Phi_{e_i}$. Nous avons $\phi = \sum_{i\in I} \phi_i\alpha_i$ pour certains $\phi_i \in \mathbb{C}$ (qui valent $\phi_i = \phi(e_i)$, ça a son importance pour la suite). En utilisant la proposition 25.57 pour permuter Φ et la somme nous avons le calcul suivant :

$$\phi = \sum_{i\in I} \phi_i\alpha_i = \sum_{i\in I} \phi_i\Phi(e_i) = \sum_{i\in I} \Phi(\phi_i e_i) = \Phi\big(\sum_{i\in I} \phi_i e_i\big) = \Phi(\sum_{i\in I} \phi(e_i)e_i). \tag{25.165}$$

En résulté :

$$\phi = \Phi(\sum_{i\in I} \phi(e_i)e_i), \tag{25.166}$$

et donc la formule (25.164). □

25.4 Théorème de Kochen-Specker

Le théorème suivant est central en mécanique quantique. La démonstration provient de [696] et de Wikipédia. Nous allons démontrer complètement le théorème seulement pour les espaces de Hilbert de dimension plus grande ou égale à 4.

THOooRHHPooQbcDAe

Théorème 25.59 (Kochen-Specker[696])**.**
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert de dimension plus grande ou égale à 3. Une fonction v sur l'ensemble des opérateurs de $\mathscr{H}$ ne peut pas satisfaire aux conditions suivantes :

(1) Si A et B sont compatibles, alors $v(A + B) = v(A) + v(B)$,

(2) Si A et B sont compatibles, alors $v(AB) = v(A)v(B)$.

*Ici nous disons que deux opérateurs sont **compatibles** lorsqu'ils possèdent une base hilbertienne commune de vecteurs propres.*

Démonstration. Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$. Nous notons $\texttt{proj}_i$ l'opérateur de projection sur l'espace (fermé) engendré par u_i. Ce sont des opérateurs compatibles deux à deux parce que la base $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base commune de vecteurs propres[21].

D'abord nous devons avoir $v(\mathbb{1}) = 1$. En effet pour tout opérateur A, nous avons

$$v(A) = v(A\mathbb{1}) = v(A)v(\mathbb{1}). \tag{25.167}$$

Pour peu que $v(A) \neq 0$, cela nous fait $v(\mathbb{1}) = 1$.

En vertu du théorème 25.46, un vecteur $x \in \mathscr{H}$ se décompose en $x = \sum_n \langle x, u_n\rangle u_n$, et nous avons

$$\texttt{proj}_i\, x = \langle x, u_i\rangle u_i. \tag{25.168}$$

EqFFuXyq

En effet le théorème de la projection orthogonale 25.9 nous enseigne que $\texttt{proj}_i\, x$ serait l'unique vecteur de la forme λu_i tel que $\lambda u_i - x \perp u_i$. Il est facile de vérifier que le vecteur proposé par (25.168) vérifie cette propriété.

Une conséquence est que

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \texttt{proj}_i\right)(x) = x. \tag{25.169}$$

Par conséquent, par hypothèse du théorème nous devons avoir

$$\sum_i v(\texttt{proj}_i) = v(\mathbb{1}) = 1. \tag{25.170}$$

EqUeZHJH

[21] Pour les besoins de la physique, nous remarquons que ces opérateurs sont des opérateurs hermitiens qui commutent, mais ça ne joue pas ici.

Étant donné que les projections sont idempotentes,

$$v(\mathtt{proj}_i) = v(\mathtt{proj}_i^2) = v(\mathtt{proj}_i)^2 \tag{25.171}$$

et donc $v(\mathtt{proj}_i)$ doit valoir zéro ou un. Mais la relation (25.170) donne une forte contrainte sur le choix de 0 et de 1. En effet, parmi les $v(\mathtt{proj}_i)$, un et un seul doit valoir 1, les autres doivent valoir 0.

Refaisant le raisonnement pour une autre base orthonormale hilbertienne, nous trouvons que les valeurs de v sur les opérateurs de projection sur les différentes directions doivent être choisies de telle façon que tout choix de base hilbertienne orthogonale contienne exactement un 1 et le reste de zéros.

Nous voudrions maintenant insister sur un point. Le problème de déterminer de façon cohérente les valeurs 0 ou 1 pour tous les $v(\mathtt{proj}_i)$ revient à attacher 0 ou 1 à tous les *rayons* de $\mathscr{H}$ de façon que toute base orthogonale de $\mathscr{H}$ contienne exactement un 1. Un rayon est une direction, c'est-à-dire une classe d'équivalence $x \sim \lambda x$. Si nous décidons de nommer « blanc » les rayons attachés à la valeur 0 et « noirs » ceux attachés à la valeur 1, le problème se réduit à colorer la boule unité de façon compatible.

Soit $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une base orthogonale de $\mathscr{H}$ numérotée de telle sorte que $v(u_0) = 1$ et $v(u_k) = 0$ pour $k \neq 0$. Nous allons maintenant nous particulariser au cas de dimension supérieure ou égale à 4. Si R est une rotation dans le plan $\mathrm{Span}\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$, alors l'ensemble

$$\{Ru_0, Ru_1, Ru_2, Ru_3, u_k\}_{k\geqslant 4} \tag{25.172}$$

est encore une base orthogonale de $\mathscr{H}$ et nous avons encore $v(u_k) = 0$ pour $k \geqslant 4$. Par conséquent un et un seul des vecteurs Ru_0, Ru_1, Ru_2 ou Ru_3 est colorié en noir ; les trois autres étant blancs. Le problème est maintenant complètement réduit à la dimension 4. Note : pour réduire à la dimension 3, on procède de même, mais pour conclure, il faut travailler plus.

Nous allons construire 9 bases orthogonales de $\mathbb{R}^4$ à partir de 18 vecteurs, chacun arrivant dans exactement deux des bases. Ils sont donnés dans le tableau suivant :

0	1	0	0	0	0	1	1	1	−1	1	−1	−1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	−1	−1	1	1	1	−1	1	1	−1
0	0	0	1	0	0	1	−1	1	−1	1	1	1	1	−1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	−1	−1	1	1	1	1	−1	1	1	−1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	−1
1	0	0	1	0	0	−1	0	0	0	0	−1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	−1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
−1	0	0	−1	0	0	0	−1	1	1	−1	0	−1	0	0	−1	1	1

Chaque case de ce table représente un rayon de $\mathbb{R}^4$; il y en a 18 différents, chacun écrit deux fois. Une simple vérification montre que chaque colonne est un système orthogonal. La preuve du théorème de Kochen-Specker revient à montrer que nous ne pouvons pas colorier ce tableau de façon cohérente. En effet, étant donné que chaque vecteur est écrit deux fois, le tableau doit contenir un nombre pair de cases blanches et un nombre pair de cases noires.

Par ailleurs chaque colonne étant un système orthogonal, chaque colonne contient exactement une case noire ; il y a donc exactement neuf cases noires dans le tableau, ce qui est impossible.

□

25.5 Théorème de Lax-Milgram

DEFooUNOKooCitMjL

Définition 25.60.
Une forme bilinéaire $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ sur un espace vectoriel normé V est ***coercitive*** *si il existe $\alpha > 0$ tel que $a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|^2$ pour tout $u \in V$.*

THOooLLUXooHyqmVL

Théorème 25.61 (Lax-Milgram[697])**.**
Soit un espace de Hilbert réel V muni de différentes choses.

(1) L'application linéaire $L\colon V \to \mathbb{R}$ qui est bornée sur V. Nous notons $\|L\|$ sa norme.

(2) La forme bilinéaire continue a sur $V \times V$.

(3) La forme a est coercitive[22]*.*

Alors

(1) Il existe $M > 0$ tel que $|a(u,v)| \leqslant M\|u\|\|v\|$ pour tout $u, v \in V$.

[22] Définition 25.60.

(2) *Le problème qui consiste à chercher $u \in V$ tel que $a(u,v) = L(v)$ pour tout $v \in V$ admet une unique solution. De plus cette solution vérifie l'inégalité*

$$\|u\| \leqslant \frac{\|L\|}{\alpha} \tag{25.173}$$

EQooUAYSooKYyQBU

Démonstration. Évacuons deux points faciles avant de commencer les choses sérieuses. D'abord L est continue par la proposition 10.85. Ensuite, l'existence du M est donnée par la proposition 25.2.

Maintenant nous commençons.

(1) **Reformulation en équation linéaire** La forme L est continue et donc dans le dual V' ; le théorème de Riesz 25.18 nous donne donc $f \in V$ tel que

$$L(v) = \langle f, v \rangle \tag{25.174}$$

pour tout $v \in V$. De plus si $w \in V$ est fixé, l'application $b_w \colon v \mapsto a(w,v)$ est linéaire et bornée parce que

$$\|b_w\| = \sup_{\|v\|=1} |b_w(v)| = \sup_{\|v\|=1} |a(w,v)| \leqslant M\|w\|\|v\| = M\|w\|. \tag{25.175}$$

Encore une fois, b_w étant continue et linéaire, elle est dans V' et Riesz nous fournit un élément $A(w) \in V$ tel que

$$b_w(v) = \langle A(w), v \rangle \tag{25.176}$$

pour tout $v \in V$.

Le problème variationnel $a(u,v) = L(v)$ est équivalent à $\langle A(u), v\rangle = \langle f, v\rangle$. L'ensemble des solutions de cette dernière est égal à l'ensemble des solutions de l'équation

$$A(u) = f. \tag{25.177}$$

EQooLPMPooMVuYUX

(2) **A est linéaire**

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $w, z \in V$. Nous avons pour tout $v \in V$:

$$\begin{aligned}
\langle A(\alpha w + \beta z), v\rangle &= a(\alpha w + \beta z, v) && \text{(25.178a)}\\
&= \alpha a(w,v) + \beta a(z,v) && \text{(25.178b)}\\
&= \alpha\langle A(w), v\rangle + \beta\langle A(z), v\rangle && \text{(25.178c)}\\
&= \langle \alpha A(w) + \beta A(z), v\rangle. && \text{(25.178d)}
\end{aligned}$$

Étant donné que nous avons égalité pour tout $v \in V$ nous en déduisons que $A(\alpha w + \beta z) = \alpha A(w) + \beta A(z)$, ce qui signifie que A est linéaire.

(3) **Une autre propriété de A** Nous déduisons une majoration de $\|A(v)\|^2$ lorsque ce n'est pas nul. Pour ce faire,

$$\begin{aligned}
\|A(v)\|^2 &= \langle A(v), A(v)\rangle && \text{(25.179a)}\\
&= a(v, A(v)) && \text{(25.179b)}\\
&\leqslant M\|v\|\|A(v)\|. && \text{(25.179c)}
\end{aligned}$$

En simplifiant, $\|A(v)\| \leqslant M\|v\|$. Et donc

$$\|A(v)\|^2 \leqslant M^2\|v\|^2. \tag{25.180}$$

EQooBQAHooAZBdAW

(4) **Une contraction**

Nous allons choisir une valeur de $\rho > 0$ telle que l'application

$$T \colon w \mapsto w - \rho\big(A(w) - f\big) \tag{25.181}$$

soit une contraction[23]. Nous avons $T(w) - T(w') = w - w' - \rho\big(A(w - w')\big)$ et donc

$$\begin{aligned}
\|T(w) - T(w')\|^2 &= \|w - w'\|^2 + \rho^2\|A(w - w')\|^2 - 2\rho\langle A(w - w'), w - w'\rangle && \text{(25.182a)}\\
&= \|w - w'\|^2 + \rho^2\|A(w - w')\|^2 - 2\rho a(w - w', w - w'). && \text{(25.182b)}
\end{aligned}$$

[23] Définition 17.33.

Vu que le dernier terme arrive avec un signe moins, pour majorer l'expression, il faut minorer ce terme, c'est-à-dire utiliser $a(w-w',w-w')\geqslant\alpha\|w-w-w'\|$. Et en même temps nous utilisons (25.180) pour le second terme. Au final pour pouvons factoriser $\|w-w'\|$ et

$$\|T(w)-T(w')\|\leqslant\|w-w'\|\big(1+\rho^2M^2-2\rho\alpha\big).\tag{25.183}$$

Pout que T soit contractante, il faut $0<P(x)<1$ avec $P(x)=M^2x^2-2\alpha x+1$. Le minimum de ce polynôme est obtenu en $x=\frac{\alpha}{M^2}$ (la formule du $x_{min}=-b/2a$) et vaut $1-\frac{\alpha^2}{M^2}<1$. Vu que par ailleurs $\lim_{x\to\infty}P(x)=+\infty$, et que ce polynôme passe par au moins une valeur strictement inférieure à 1, nous savons qu'il existe un x tel que $0<P(x)<1$. En donnant à ρ cette valeur, l'application T est une contraction.

(5) **Point fixe et conclusion** L'ensemble des solutions du problème (25.177) est égal à l'ensemble des points fixes de $T(v)=v-\rho\big(A(v)-f\big)$.

L'application $T\colon V\to V$ est contractante et V est métrique et complet. Ergo le théorème de point fixe de Picard 17.34 s'applique et il existe un unique point fixe $u\in V$ pour l'application T. Ce point fixe est l'unique solution de notre problème initial.

(6) **La majoration**

Nous savons que pour tout $v\in V$, la relation $a(u,v)=L(v)$ est vérifiée. En particulier pour $v=u$ nous avons

$$a(u,u)=L(u).\tag{25.184}$$

D'un côté nous utilisons $a(u,u)\geqslant\alpha\|u\|^2$ et de l'autre, $L(u)\leqslant\|L\|\|u\|$:

$$\alpha\|u\|^2\leqslant\|L\|\|u\|\tag{25.185}$$

et donc

$$\|u\|\leqslant\frac{\|L\|}{\alpha}.\tag{25.186}$$

Notons que $L(u)$ et $a(u,u)$ sont positifs.

□

EXooTTBDooUNhBOc

Exemple 25.62 ([698]).
La borne $\|u\|\leqslant\|L\|/\alpha$ est optimale au sens où il existe des cas d'égalité. En effet nous pouvons considérer

$$a(u,v)=s\langle u,v\rangle\tag{25.187}$$

et

$$L(v)=\langle f,v\rangle\tag{25.188}$$

pour un certain $s>0$ et $f\in V$. L'application L n'est autre que Φ_f dont nous avons abondamment parlé autour du théorème de représentation de Riesz 25.18. Le lemme 25.16 nous apprend que L est une application bornée (et donc continue) de norme $\|L\|_{V'}=\|f\|_V$.

L'application $a\colon V\times V\to\mathbb{R}$ est continue par la proposition 10.96. Elle est coercive parce que

$$a(u,u)=s\|u\|^2.\tag{25.189}$$

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram 25.61 sont réunies et il existe un unique élément $u\in V$ tel que $a(u,v)=L(v)$ pour tout v. Cet élément n'est autre que

$$u=\frac{1}{s}f.\tag{25.190}$$

Nous avons alors $\|u\|=\frac{1}{s}\|f\|$.

Mais s est la constante de coercivité de a et $\|f\|$ est la norme de L. Cette dernière affirmation est contenue dans le fait que Φ est une isométrique dans le lemme 25.16. En reprenant les notations du théorème, nous avons l'égalité

$$\|u\|=\frac{\|L\|}{\alpha},\tag{25.191}$$

ce qui signifie que l'inégalité du théorème est dans un certain sens optimale. △

PROPooFEOZooTNPcBJ

Proposition 25.63.
Soit un espace de Hilbert réel V et une application $a\colon V\times V\to\mathbb{R}$ coercive et continue.

L'application $\phi\colon V'\to V$ qui à L fait correspondre l'unique solution u de $a(u,v)=L(v)$ est

(1) *bien définie,*

(2) *linéaire,*

(3) *continue.*

Démonstration. Le fait que ϕ soit bien définie est le théorème de Lax-Milgram 25.61.

L'application ϕ dont nous parlons ici est une application entre deux espaces normés. Soient $L_1, L_2 \in V'$; nous définissons $u_1 = \phi(L_1)$ et $u_2 = \phi(L_2)$. Nous avons

$$a(u_1, v) = L_1(v) \tag{25.192a}$$
$$a(u_2, v) = L_2(v) \tag{25.192b}$$

pour tout $v \in V$. Par bilinéarité de a nous avons aussi

$$a(u_1 + u_2, v) = (L_1 + L_2)(v). \tag{25.193}$$

Vu que $L_1 + L_2$ est également bornée, $u_1 + u_2 = \phi(L_1 + L_2)$. Pour le même type de raisons, si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$a(\lambda u, v) = (\lambda L)(v), \tag{25.194}$$

c'est-à-dire que $\phi(\lambda L) = \lambda\phi(L)$.

Donc ϕ est linéaire. Pour la continuité, il suffit de s'assurer que ϕ est bornée. Pour cela nous utilisons la majoration (25.173) et la définition de la norme d'une application linéaire :

$$\|\phi\| = \sup_{\|L\|=1} \|\phi(L)\| \leqslant \sup_{\|L\|=1} \frac{1}{\alpha}\|L\| = \frac{1}{\alpha}. \tag{25.195}$$

Donc ϕ est bornée et par voie de conséquence continue (proposition 10.85). □

Un problème est bien posé au sens de Hadamard si la solution est unique et dépend continument des données ; nous ne rentrerons pas plus dans les détails pour l'instant : nous en reparlerons dans la définition 33.14 mais sachez qu'il existe en fin de compte autant de Hadamard qu'il y a de contextes dans lequel le mot « problème » a un sens.

Ce que dit la proposition 25.63 est que, a étant donné, le problème qui consiste à résoudre $a(u, v) = L(v)$ est bien posé au sens de Hadamard, au moins par rapport à L.

Théorème 25.64 (Lax-Milgram version symétrique[697])**.**
Nous considérons les mêmes hypothèses que celles du théorème de Lax-Milgram, c'est-à-dire un espace de Hilbert réel V muni de différentes choses.

(1) *L'application linéaire $L\colon V \to \mathbb{R}$ qui est bornée sur V. Nous notons C sa norme.*

(2) *La forme bilinéaire continue a sur $V \times V$. Nous considérons $M > 0$ tel que $|a(u, v)| \leqslant M\|u\|\|v\|$ pour tout $u, v \in V$.*

(3) *La forme a est coercitive.*

Nous supposons de plus que a est symétrique.

Alors un élément $u \in V$ est tel que $a(u, w) = l(w)$ pour tout $w \in V$ si et seulement si il minimise la ***fonctionnelle d'énergie***

$$J(w) = \frac{1}{2}a(w, w) - l(w). \tag{25.196}$$

Démonstration. Nous séparons les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Soit u, un élément vérifiant $a(u, w) = l(w)$ pour tout $w \in V$. Soit aussi un élément quelconque $w \in V$, et montrons que $J(u + w) \geqslant J(u)$ (tout élément de V peut être écrit sous la forme $u + w$). Nous avons :

$$J(u + w) = \frac{1}{2}\big(a(u, u) + a(u, w) + a(w, u) + a(w, w)\big) - l(u) - l(w) \tag{25.197a}$$
$$= J(u) + \underbrace{a(u, w) - l(w)}_{=0} + \frac{1}{2}a(w, w) \tag{25.197b}$$
$$= J(u) + \frac{1}{2}a(w, w) \tag{25.197c}$$

Vu que a est coercive, le second terme est positif et nous avons

$$J(u+w) \geqslant J(u), \tag{25.198}$$

ce qu'il fallait.

(2) $\Leftarrow$

Soit $u \in V$, un élément minimisant la fonctionnelle J. Nous fixons $w \in V$ et considérons la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(\epsilon) = J(u+\epsilon w). \tag{25.199}$$

En développant un peu et en regroupant les termes,

$$g(\epsilon) = J(u) + \epsilon\big(a(u,w) - l(w)\big) + \frac{\epsilon^2}{2}a(w,w). \tag{25.200}$$

EQooHGDOooUMCRda

Cela est une fonction éminemment continue et dérivable ; en réalité c'est un bête polynôme de degré deux. Vu que u minimise J, pour tout $\epsilon \neq 0$ nous avons $g(\epsilon) \geqslant g(0)$ ou encore : $\epsilon = 0$ est minimum local (et même global) de g. Le polynôme (25.200) prend son minimum en $\epsilon = 0$ si et seulement si

$$a(u,w) - l(w) = 0. \tag{25.201}$$

Vous ne me croyez pas ? Faites $g'(\epsilon) = 0$ ou bien reprenez la formule du $-b/2a$ pour le sommet d'une parabole, en tenant compte que $a(w,w) \neq 0$. Notons qu'ici encore le fait que a soit coercive joue parce que c'est cela qui nous permet d'affirmer que la parabole a un minimum et non un maximum.

□

Chapitre 26

Analyse complexe

ChapICHIooXbLccl

26.1 Fonctions holomorphes

La dérivée complexe est discutée à la section 12.31, et la définition d'une fonction holomorphe est 12.331.

26.1.1 Équations de Cauchy-Riemann

Notons que la formule (12.917) donne un **développement limité** pour les fonctions holomorphes. Si f est holomorphe en z_0 alors si z est dans un voisinage de z_0, il existe une fonction $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\lim_{t\to 0} s(t)/t = 0$ et

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + s(|z - z_0|). \tag{26.1}$$ EqptwBFG

26.1 (Quelque (abus de) notations)**.**
Nous utilisons l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x + iy. \end{aligned} \tag{26.2}$$

Nous notons

$$\partial_x f = \partial_1(f \circ \varphi) \tag{26.3a}$$
$$\partial_y f = \partial_2(f \circ \varphi). \tag{26.3b}$$

Avec ces définitions, nous introduisons les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial z} = \partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{26.4a}$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{26.4b}$$ SUBEQooNYQKooYdLOzB

La raison de ces définitions est d'avoir l'égalité

$$f'(z_0) = (\partial_z f)(z_0) \tag{26.5}$$

que nous verrons dans la proposition 26.3.

Si f est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable représentée par la fonction $F = P + iQ$, les équations de Cauchy-Riemann signifient que $\Delta P = \Delta Q = 0$, c'est-à-dire que les composantes de la fonction f sont harmoniques[1].

PropkwIQwg

Proposition 26.2 ([1])**.**
Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Nous considérons une application $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'écrivant sous la forme $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ où $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des applications réelles.

Nous avons équivalence entre :

ITEMooEFBVooGFENJw

(1) f est $\mathbb{C}$-dérivable.

ITEMooXHZPooTqtLXc

(2) f est différentiable et sa différentielle est une similitude[2] (définition 12.333).

[1] Une fonction u est harmonique si $\Delta u = 0$.
[2] En réalité ce qui est une similitude, c'est la matrice de $\varphi \circ df_{z_0} \circ \varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(3) f est différentiable et vérifie EqmblExI ITEMooTFRIooWrkkvG

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} & (26.6a) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & (26.6b) \end{cases}$$

ITEMooHKAFooDFdgni

(4) f est différentiable et $\partial_{\bar{z}} f = 0$.

Si ces conditions sont remplies, nous avons

$$df_{z_0}(z) = \big(\partial_x u + i\partial_x v\big)(x_0, y_0)z \tag{26.7}$$ EQooYVAJooCjdHvX

Les équations (26.6) *sont les équations de* ***Cauchy-Riemann****.*

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **(1) ⇔ (2)** C'est la proposition 12.337.

(2) **(2) ⇒ (3)** Par hypothèse f est différentiable. Nous allons calculer $df_{z_0}(z)$. Nous notons $z_0 = x_0 + iy_0$ et nous utilisons une des formules du lemme 12.280 : SUBEQSooCFAXboSQOMUu

$$\begin{aligned} df_{z_0}(x+iy) &= \frac{d}{dt}\left[u(x_0+tx, y_0+ty) + iv(x_0+tx, y_0+ty)\right]_{t=0} && (26.8a) \\ &= x(\partial_x u)(x_0,y_0) + y(\partial_y u)(x_0,y_0) \\ &\quad + ix(\partial_x v)(x_0,y_0) + iy(\partial_y v)(x_0,y_0) && (26.8b) \\ &= x\big((\partial_x u)(x_0,y_0) + i(\partial_x v)(x_0,y_0)\big) \\ &\quad + iy\big((\partial_y v)(x_0,y_0) - i(\partial_y u)(x_0,y_0)\big) && (26.8c) \end{aligned}$$ SUBEQooQSLGooFbxYcq

Étant donné que la différentielle est linéaire, les coefficients de x et de iy doivent être égaux :

$$(\partial_x u)(x_0,y_0) + i(\partial_x v)(x_0,y_0) = (\partial_y v)(x_0,y_0) - i(\partial_y u)(x_0,y_0). \tag{26.9}$$

En égalisant les parties réelles et imaginaires, nous trouvons les relations (26.6).

Maintenant que nous savons que les deux coefficients dans (26.8c) sont identiques nous avons

$$df_{z_0}(z) = (\partial_x u + u\partial_x v)(x_0,y_0)z, \tag{26.10}$$

c'est-à-dire que nous avons prouvé (26.7) au passage.

(3) **(3) ⇒ (4)** Il suffit de vérifier en utilisant la définition 26.4b, et en remplaçant $\partial_y u$ et $\partial_y v$ par ce qu'on peut d'après (26.6) :

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}(u+iv) &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u+iv) && (26.11a) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_x u + i\partial_x v + i\partial_y u - \partial_y v) && (26.11b) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_x u + i\partial_x v - i\partial_x v - \partial_x u) && (26.11c) \\ &= 0. && (26.11d) \end{aligned}$$

(4) **(4) ⇒ (1)** Nous démontrons (4) ⇒ (2). Nous avons déjà montré que (2) implique (1). Nous posons $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ et nous allons calculer $df_{z_0}(x+iy)$ en reprenant le calcul déjà fait dans (26.8). Pour alléger les notations, nous notons

$$\begin{aligned} \alpha &= (\partial_x u)(x_0,y_0) \quad \beta = (\partial_x v)(x_0,y_0) \\ \gamma &= (\partial_y u)(x_0,y_0) \quad \delta = (\partial_y v)(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{26.12}$$

Nous avons :

$$df_{z_0}(x+iy) = x(\alpha+i\beta) + iy(\delta - i\gamma) = \alpha x + \gamma y + i(\beta x + \delta y). \tag{26.13}$$

Donc

$$(\varphi \circ df_{z_0} \circ \varphi^{-1})(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha x + \gamma y \\ \beta x + \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{26.14}$$

Par ailleurs, l'hypothèse $\partial_{\bar{z}} = 0$ donne les équations (26.6), c'est-à-dire $\delta = \alpha$ et $\gamma = -\beta$. La matrice de $(\varphi \circ df_{z_0} \circ \varphi^{-1})$ est donc $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ qui est une similitude

□
PROPooKXEQooBPjWAH

Proposition 26.3 ([1]).
Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 nous avons

$$f'(z_0) = (\partial_z f)(z_0). \tag{26.15}$$

Démonstration. La proposition 12.337 dit déjà que $f'(z_0)z = (df_{z_0})(z)$. Nous devons montrer que $(\partial_z f)(z_0)z = (df_{z_0})(z)$. Pour cela nous calculons un peu en utilisant la définition de ∂_z et les relations (26.6) :

$$\begin{aligned}(\partial_z f)(z_0) &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u+iv)(x_0,y_0) && \text{(26.16a)}\\ &= \frac{1}{2}(\partial_x u + i\partial_x v - i\partial_y u + \partial_y v)(x_0,y_0) && \text{(26.16b)}\\ &= \frac{1}{2}(\partial_x u + i\partial_x v + i\partial_x v + \partial_x u)(x_0,y_0) && \text{(26.16c)}\\ &= (\partial_x u + i\partial_x v)(x_0,y_0). && \text{(26.16d)}\end{aligned}$$

L'équation (26.7) nous permet de terminer :

$$(\partial_z f)(z_0) = (\partial_x u + i\partial_x v)(x_0,y_0) = df_{z_0} \tag{26.17}$$

au sens où df_{z_0} est l'opérateur sur $\mathbb{C}$ qui consiste à multiplier par ce qui est à gauche. □
PROPooAGGMooIVQFQB

Proposition 26.4 (Cauchy-Riemann en coordonnées polaires[1, 699]).
Soit une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que nous supposons être $\mathbb{C}$-dérivable dans un voisinage de $r_0 e^{i\theta_0}$ (r_0 et θ_0 sont des réels). Nous posons

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{C}\\ r,\theta &\mapsto f(re^{i\theta}).\end{aligned} \tag{26.18}$$

Alors
ITEMooRTYYooSTgTAQ

(1) La fonction $\tilde{f}$ admet des dérivées partielles dans les deux directions en (r_0,θ_0).
ITEMooDHXTooBjxwjY

(2) Les dérivées partielles de $\tilde{f}$ sont liées par la relation

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}(r_0,\theta_0) = ir_0\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r_0,\theta_0). \tag{26.19}$$

ITEMooUUXTooZoDMHI

(3) La fonction $\tilde{f}$ est de classe C^∞.

Démonstration. Nous considérons les fonctions réelles u et v donnant les parties réelles et imaginaires de f :

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y). \tag{26.20}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r_0,\theta_0) = &\frac{\partial u}{\partial x}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)\cos(\theta_0)\\ &+\frac{\partial u}{\partial y}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)\sin(\theta_0)\\ &+i\frac{\partial v}{\partial x}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)\cos(\theta_0)\\ &+i\frac{\partial v}{\partial y}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)\sin(\theta_0)\end{aligned} \tag{26.21}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}(r_0,\theta_0) = &-\frac{\partial u}{\partial x}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)r_0\sin(\theta_0)\\ &+\frac{\partial u}{\partial y}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)r_0\cos(\theta_0)\\ &-\frac{\partial v}{\partial x}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)r_0\sin(\theta_0)\\ &+i\frac{\partial v}{\partial y}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)r_0\cos(\theta_0).\end{aligned} \tag{26.22}$$

Nous exprimons tout en termes de $\partial_y v$ et $\partial_x v$ en utilisant les équations de Cauchy-Riemann de la proposition 26.2 ainsi que la formule $\cos(\theta)+i\sin(\theta)=e^{i\theta}$ du lemme 18.11. Pour simplifier les notations, nous notons $a_0=\big(r_0\cos(\theta_0),r_0\sin(\theta_0)\big)\in\mathbb{R}^2$. Après quelques calculs :

$$(\partial_r\tilde{f})(r_0,\theta_0)=e^{i\theta_0}\frac{\partial v}{\partial y}\big(r_0\cos(\theta_0),r_0\sin(\theta_0)\big)+ie^{i\theta_0}\frac{\partial v}{\partial x}\big(r_0\cos(\theta_0),r_0\sin(\theta_0)\big) \tag{26.23a}$$

$$=e^{i\theta_0}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(a_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a_0)\right), \tag{26.23b}$$

et

$$(\partial_\theta\tilde{f})(r_0,\theta_0)=r_0e^{i\theta_0}\left(i\frac{\partial v}{\partial y}(a_0)-\frac{\partial v}{\partial x}(a_0)\right) \tag{26.24}$$

En comparant les deux, nous trouvons

$$(\partial_\theta\tilde{f})(r_0,\theta_0)=r_0i(\partial_r\tilde{f})(r_0,\theta_0). \tag{26.25}$$

□

PROPooCHUEooYsGcQK

Proposition 26.5.
Si $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est holomorphe, alors nous avons

$$df_{z_0}=(\partial_z f)(z_0) \tag{26.26}$$

au sens où l'opérateur linéaire $df_{z_0}\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est l'opération de multiplication par le nombre complexe $(\partial_z f)(z_0)$.

Démonstration. Soit $f(x+iy)=f_1(x,y)+if_2(x,y)$ une fonction holomorphe[3]. Les fonctions réelles f_1 et f_2 sont assujetties aux équations de Cauchy-Riemann de la proposition 26.2 :

$$\begin{cases}\partial_x f_1=\partial_y f_2 & (26.27a)\\ \partial_x f_2=-\partial_y f_1. & (26.27b)\end{cases}$$

Nous avons, en recourant à un petit abus de notation entre $f_i\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $f_i\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}$:

$$df_{z_0}(u)=\frac{d}{dt}\Big[f(z_0+tu)\Big]_{t=0} \tag{26.28a}$$

$$=\frac{d}{dt}\Big[f_1(z_0+tu)+if_2(z_0+tu)\Big]_{t=0} \tag{26.28b}$$

$$=\partial_x f_1u_1+\partial_y f_1u_2+i\big(\partial_x f_2u_1+\partial_y f_2u_2\big) \tag{26.28c}$$

$$=\begin{pmatrix}\partial_x f_1 & \partial_y f_1\\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \tag{26.28d}$$

$$=\begin{pmatrix}\partial_x f_1 & \partial_y f_1\\ -\partial_y f_1 & \partial_x f_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}. \tag{26.28e}$$

En utilisant le lemme 12.334 nous reconnaissons la matrice de multiplication par le nombre $\partial_x f_1-i\partial_y f_1$. Or justement,

$$\partial_z f=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)f=\frac{1}{2}\big(\partial_x f_1+i\partial_x f_2-i\partial_y f_1+\partial_y f_2\big), \tag{26.29}$$

qui se réduit à $\partial_x f_1-i\partial_y f_1$ lorsque nous y appliquons les équations de Cauchy-Riemann. □

26.1.2 Intégrale sur un chemin dans $\mathbb{C}$

DEFooBPLJooZwsmxi

Définition 26.6.
Si nous avons une application $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ et une fonction $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, nous définissons

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b(f\circ\gamma)(t)\gamma'(t)dt \tag{26.30}$$

pour tous les couples (f,γ) pour lesquels le membre de droite a un sens.

[3] Définition 12.331.

26.7.
Vous noterez que cette définition n'est pas exactement la même que celle 20.40 d'une intégrale curviligne en analyse réelle. Cette dernière demande de prendre la norme de γ', alors qu'ici nous la gardons telle quelle. D'ailleurs, gardez en tête que γ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$. Donc $\gamma'(t)$ peut très bien être un nombre complexe.

PROPooCUBTooZDcdHX

Proposition-Définition 26.8 (Intégrale sur un chemin C^1 par morceaux)**.**
Soit un chemin C^1 par morceaux $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{C}$. Nous considérons deux subdivisions $a=t_1<t_2<\ldots<t_n=b$ et $a=u_1<u_2<\ldots<u_m=b$ telles que γ soit de classe C^1 sur les intervalles $]t_i,t_{i+1}[$ et $]u_j,u_{j+1}[$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\gamma\colon]t_i,t_{i+1}[\to\mathbb{C}} f=\sum_{j=1}^{m-1}\int_{\gamma\colon]u_j,u_{j+1}[\to\mathbb{C}} f. \tag{26.31}$$

Cette valeur est notée

$$\int_\gamma f. \tag{26.32}$$

26.1.3 Intégrales sur des chemins fermés

LemtpEOmi

Lemme 26.9.
Si g est une fonction continue dans un ouvert $\Omega\subset\mathbb{C}$ et si g admet une primitive complexe sur Ω alors

$$\int_\gamma g(z)dz=0 \tag{26.33}$$

pour tout chemin fermé γ de classe C^1 contenu dans Ω.

Démonstration. Nommons G une primitive de g. Par définition,

$$\begin{aligned}\int_\gamma g&=\int_\gamma G' && (26.34a)\\ &=\int_0^1 G'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt && (26.34b)\\ &=\int_0^1 (G\circ\gamma)'(t)dt && (26.34c)\\ &=G(\gamma(1))-G\big(\gamma(0)\big) && (26.34d)\\ &=0 && (26.34e)\end{aligned}$$

parce que le chemin est fermé : $\gamma(0)=\gamma(1)$. □

LemwbwbUR

Lemme 26.10 (Goursat[601])**.**
Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur Ω, holomorphe sur Ω moins éventuellement un point (nommé $z_1\in\Omega$). Soit T, un triangle[4] fermé inclus dans Ω. Alors nous avons

$$\int_{\partial T} f(z)dz=0. \tag{26.35}$$

Démonstration. Nous notons $\gamma=\partial T$. Dans la suite nous allons définir une suite de triangles $T^{(n)}$ et nous noterons $\gamma_n=\partial T^{(n)}$ avec une orientation que nous allons expliquer. Pour commencer nous posons $T^{(0)}=T$ et $\gamma_0=\partial T^{(0)}$.

Nous considérons le cas $z_1\notin T$, et nous posons

$$c=l(\gamma)^{-2}\Big|\int_\gamma f\Big|. \tag{26.36}$$

Notre objectif est de montrer que $c=0$. Soit A,B,C les trois sommets du triangle ; nous divisons le triangle de la façon suivante. D'abord nous considérons les points A',B',C' respectivement milieux de BC, AC et AB. En traçant le triangle $A'B'C'$, nous construisons quatre triangles que nous nommons $T_i^{(0)}$. Le théorème de Thalès[5] assure que le périmètre de chacun des quatre triangles est la moitié du périmètre du grand triangle T.

[4] Nous considérons ici le triangle « plein ».
[5] Théorème 12.169.

Sur T nous choisissons l'orientation ABC. De façon à être « compatible », nous choisissons les orientations $AC'B'$, $BA'C'$ et $A'CB'$. La somme de ces trois triangles donne T plus le triangle $A'C'B'$. Par conséquent nous choisissons sur le triangle central l'orientation (inverse) $A'B'C'$ de façon à avoir

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial T_i^{(0)}} f. \tag{26.37}$$

Cela implique que pour au moins un des quatre triangles (disons $T_k^{(0)}$ pour fixer les idées) nous ayons

$$\int_{\partial T_k^{(0)}} f \geqslant \frac{1}{4} \int_{\partial T^{(0)}} f \tag{26.38}$$

Nous notons $T^{(1)}$ ce triangle. Comme noté précédemment nous avons

$$l(\partial T^{(1)}) = \frac{1}{2} l(\partial T^{(0)}), \tag{26.39}$$

et donc

$$l(\gamma_1)^{-2} \left| \int_{\gamma_1} f \right| = 4 l(\gamma_0)^{-2} \left| \int_{\gamma_1} f \right| \geqslant 4 l(\gamma_0)^{-2} \frac{1}{4} \left| \int_{\gamma_0} f \right| = c. \tag{26.40}$$

En répétant le procédé nous construisons une suite de triangles $T^{(n)}$ qui satisfont toujours

$$l(\partial T^{(n)}) = \frac{1}{2^n} l(\partial T^{(0)}). \tag{26.41}$$

Ces triangles forment une suite de fermés emboités dont le diamètre tend vers zéro. Leur intersection contient donc exactement un point (lemme 17.125) que nous nommons z_0 (et qui appartient évidemment à Ω). Étant donné que f est holomorphe nous utilisons le développement limité (26.1) autour de z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + s(|z - z_0|)(z - z_0) \tag{26.42}$$

avec $\lim_{t \to 0} s(t) = 0$. Nous posons $g(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ et nous considérons $\epsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon |z - z_0| \tag{26.43}$$

pour tout $|z - z_0| < \alpha$. Le α à choisir pour obtenir cet effet est celui qui donne $s(|z - z_0|) < \epsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $l(\gamma_n) < \alpha$ pour tout $n > N$. D'autre part, deux points dans un triangle sont toujours à distance moindre que la longueur d'un côté, donc pour tout $z \in T^{(n)}$ nous avons $|z - z_0| < \alpha$ et par conséquent pour tout z dans $T^{(n)}$ nous avons

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon |z - z_0|. \tag{26.44}$$

Notons que la fonction g est une dérivée : c'est la dérivée de la fonction

$$G(z) = z f(z_0) + \frac{1}{2} f'(z_0)(z - z_0)^2. \tag{26.45}$$

Par conséquent nous avons

$$\int_{\gamma_n} g = 0 \tag{26.46}$$

par le lemme 26.9. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_n} f \right| &= \left| \int_{\gamma_n} (f - g) \right| && \text{(26.47a)} \\ &\leqslant l(\gamma_n) \max\{|f(z) - g(z)| \text{ tel que } z \in T^{(n)}\} && \text{(26.47b)} \\ &\leqslant \epsilon l(\gamma_n)^2, && \text{(26.47c)} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$c \leqslant l(\gamma_n)^{-2} \left| \int_{\gamma_n} f \right| \leqslant \epsilon, \tag{26.48}$$

ce qui signifie que $c = 0$ parce que ϵ est arbitraire. Nous avons donc prouvé le lemme de Goursat dans le cas où le point de non holomorphie z_1 est en dehors de T.

Si z_1 est sur un côté, disons sur le côté AB, alors nous considérons un vecteur $v \in \mathbb{C}$ tel que $T_\epsilon = T + \epsilon v$ ne contienne z_1 pour aucun ϵ. Le vecteur $v = z_1 - C$ fait par exemple l'affaire. En vertu du point précédent nous avons

$$\int_{\partial T_\epsilon} f = 0 \tag{26.49}$$

pour tout $\epsilon > 0$. Étant donné que la fonction f est continue (y compris en z_1), l'intégrale sur ∂T est également nulle.

Si maintenant le point z_1 est à l'intérieur de T nous décomposons T en trois triangles ayant z_1 comme sommet commun. Si nous considérons les orientations Az_1C, ABz_1 et BCz_1, alors nous avons

$$\int_T f = \int_{Az_1C} f + \int_{ABz_1} f + \int_{BCz_1} f, \tag{26.50}$$

alors que par le point précédent les trois intégrales du membre de droite sont nulles. □

PrpopwQSbJg

Proposition 26.11 ([601]).
Soient Ω un ouvert étoilé et f une fonction holomorphe sur Ω sauf éventuellement en un point z_1 où f est seulement continue. Alors si γ est un chemin fermé dans Ω, nous avons

$$\int_\gamma f = 0. \tag{26.51}$$

PropRZCKeO

Proposition 26.12.
Si $f(z) = \sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, alors f est $\mathbb{C}$-dérivable et nous pouvons dériver terme à terme dans la boule ouverte $B(0, R)$.

Démonstration. Cela est exactement la proposition[6]15.50. □

26.1.4 Homotopie entre applications

DEFooPJKLooCvgxsu

Définition 26.13 (homotopie entre applications).
*Soient des espaces topologiques X et Y. Deux applications continues $f_1, f_2 \colon X \to Y$ sont **homotopes** si il existe une application continue $H \colon [0,1] \times X \to Y$ telle que pour tout $x \in X$ nous avons*

$$H(0, x) = f_1(x) \tag{26.52a}$$
$$H(1, x) = f_2(x). \tag{26.52b}$$

LEMooMGFZooGOaGYl

Lemme 26.14.
La relation « être homotope à[7] » est une relation d'équivalence sur $C(X, Y)$.

Démonstration. Pour obtenir $f \sim f$, il suffit de prendre $H(s, x) = f(x)$.

Si $f \sim g$, nous considérons l'homotopie $H \colon [0,1] \times X \to Y$. Alors l'application

$$\begin{aligned} M \colon [0,1] \times X &\to Y \\ (t, x) &\mapsto H(1 - t, x) \end{aligned} \tag{26.53}$$

est une homotopie pour $g \sim f$.

Si $f \sim g$ et $g \sim f$, nous avons les applications continues H et M telles que

$$H(0, x) = f(x) \qquad H(1, x) = g(x) \tag{26.54a}$$
$$M(0, x) = g(x) \qquad M(1, x) = h(x). \tag{26.54b}$$

L'application

$$\begin{aligned} S \colon [0,1] \times X &\to Y \\ (t, x) &\mapsto \begin{cases} H(2t, x) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ M(2t - 1, x) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \end{aligned} \tag{26.55}$$

Nous vérifions que S est continue en vérifiant la valeur en $t = 1/2$. De plus

$$S(0, x) = H(0, x) = f(x) \tag{26.56}$$

et

$$S(1, x) = M(2 - 1, x) = M(1, x) = h(x). \tag{26.57}$$

□

[6] Je ne suis pas convaincu que ça s'applique à $\mathbb{C}$.
[7] Définition 26.13.

LEMooMJKEooCaVhjD

Lemme 26.15 ([1]).
Soient des espaces topologiques X et Y. Si Y est connexe par arcs, alors toutes les applications constantes $X \to Y$ sont homotopes.

Démonstration. Soient les applications constantes $u(x) = u_0$ et $v(x) = v_0$. Étant donné que Y est connexe par arcs, il existe une application continue $\gamma\colon [0,1] \to Y$ telle que $\gamma(0) = u_0$ et $\gamma(1) = v_0$. Alors l'application

$$\begin{aligned} H\colon [0,1] \times X &\to Y \\ (t,x) &\mapsto \gamma(t) \end{aligned} \tag{26.58}$$

est une homotopie entre les applications u et v. □

PROPooNABDooFtKukO

Proposition 26.16 ([235]).
Soit un compact K de $\mathbb{R}^n$. Deux applications $f, g\colon K \to \mathbb{C}^*$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ si et seulement si f/g est homotope à la fonction

$$\begin{aligned} u\colon K &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto 1. \end{aligned} \tag{26.59}$$

Démonstration. Supposons que $H\colon [0,1]\times K \to \mathbb{C}^*$ est une homotopie entre f et g. Dans ce cas, l'application

$$\begin{aligned} M\colon [0,1] \times K &\to \mathbb{C}^* \\ (t,x) &\mapsto \frac{H(t,x)}{g(x)} \end{aligned} \tag{26.60}$$

est une homotopie entre f/g et u. En effet

$$M(0,x) = \frac{H(0,x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{26.61}$$

et

$$M(1,x) = \frac{H(1,x)}{g(x)} = 1 = u(x). \tag{26.62}$$

Dans l'autre sens, si H est une homotopie entre f/g et u, alors l'application $M(t,x) = H(t,x)g(x)$ est une homotopie entre f et g. □

26.1.5 Intégrale et homotopie

LEMooOFCEooIsuchR

Lemme 26.17 ([235]).
Soit un rectangle fermé $R \subset \mathbb{R}^2$. Si l'application $H\colon R \to \Omega$ est continue, alors pour toute fonction continue $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ nous avons

$$\int_{\partial H} f = 0 \tag{26.63}$$

où ∂H désigne la frontière de $H(R)$ dans $\mathbb{C}$, et l'intégrale est celle de la définition 26.8.

Démonstration. La frontière ∂H peut être décomposée en 4 parties de classe C^1 :

(1)

$$\begin{aligned} \alpha_1\colon [0,1] &\to \Omega \\ t &\mapsto H(t,a), \end{aligned} \tag{26.64}$$

(2)

$$\begin{aligned} \alpha_2\colon [a,b] &\to \Omega \\ t &\mapsto H(1,t) \end{aligned} \tag{26.65}$$

(3)

$$\begin{aligned} \alpha_3\colon [0,1] &\to \Omega \\ t &\mapsto H(1-t,b) \end{aligned} \tag{26.66}$$

(4)

$$\begin{aligned} \alpha_4\colon [a,b] &\to \Omega \\ t &\mapsto H\big(0,b+a-t\big). \end{aligned} \tag{26.67}$$

Étudions les diverses parties α_i.

(1) **Pour α_2** Première observation : $\alpha_2 = \gamma_1$.

(2) **Pour α_4** Nous avons $\alpha_4 = \gamma_0(b + a - t)$ et donc

$$\int_{\alpha_4} f = \int_a^b (f \circ \alpha_4)(t)\alpha_4'(t) = -\int_a^b (f \circ \gamma_0)(b + a - t)\gamma_0'(b + a - t). \tag{26.68}$$

EQooFWIQooJALDpO

Nous utilisons le changement de variables[8]

$$\begin{aligned} \phi\colon [a, b] &\to [a, b] \\ t &\mapsto b + a - t. \end{aligned} \tag{26.69}$$

Le jacobien $|J_\phi|$ est égal à 1 et donc nous continuons (26.68) de la façon suivante :

$$\int_{\alpha_4} f = -\int_a^b (f \circ \gamma_0)\big(\phi(t)\big)\gamma'\big(\phi(t)\big)dt \tag{26.70a}$$

$$= -\int_a^b (f \circ \gamma_0)(t)\gamma_0'(t)dt \tag{26.70b}$$

$$= -\int_{\gamma_0} f. \tag{26.70c}$$

(3) **Lien entre α_1 et α_3** Il y a deux possibilités : soit γ_1 et γ_2 sont des lacets, soit ce sont des chemins normaux.

(3a) **Si ils sont des lacets** Alors pour tout s, l'application

$$\begin{aligned} \Gamma_s\colon [a, b] &\to C \\ t &\mapsto H(s, t) \end{aligned} \tag{26.71}$$

est un lacet. En particulier $H(s, a) = H(s, b)$. Donc $\alpha_3(t) = H(1 - t, b) = \alpha_1(1 - t)$. Dans ce cas nous avons

$$\int_{\alpha_3} f = \int_a^b f\big(\alpha_3 t\big)\alpha_3'(t) \tag{26.72a}$$

$$= \int_a^b f\big(\alpha_1(1 - t)\big)(-)\alpha_1'(1 - t) \tag{26.72b}$$

$$= -\int_a^b (f \circ \alpha_1)(t)dt \qquad \text{chm. var. } \phi(t) = 1 - t \tag{26.72c}$$

$$= -\int_{\alpha_1} f. \tag{26.72d}$$

Nous avons alors le calcul

$$0 = \int_{\partial H} f = \int_{\alpha_1} f + \int_{\gamma_1} f + \underbrace{\int_{\alpha_3} f}_{-\int_{\alpha_1} f} - \int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_0} f. \tag{26.73}$$

Le lemme est prouvé.

(3b) **Si γ_0 et γ_1 sont des chemins** Dans ce cas nous avons une homotopie à extrémités fixées. Donc α_1 et α_3 sont des chemins constants, et les intégrales dessus sont nulles et

$$0 = \int_{\partial H} f = \underbrace{\int_{\alpha_1} f}_{=0} + \int_{\gamma_1} f + \underbrace{\int_{\alpha_3} f}_{=0} - \int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_0} f. \tag{26.74}$$

Et le lemme est prouvé.

□

[8] Théorème 14.282(3).

THOooVTFXooBgvVyD

Théorème 26.18 (Cauchy, version homotopique[235, 700]).
Soit un ouvert Ω dans $\mathbb{C}$. Soit une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Supposons que l'une des deux conditions suivantes soit respectée :

ITEMooESDVooFgVarr

(1) Les chemins $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ sont homotopes à extrémités fixées.

(2) Les lacets $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ sont homotopes.

Alors

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f. \tag{26.75}$$

Démonstration. Considérons l'homotopie $H : [0, 1] \times [a, b] \to \Omega$. Étant donné que $[0, 1] \times [a, b]$ est un rectangle dans $\mathbb{R}^2$, le lemme 26.17 nous indique que

$$\int_{\partial H} f = 0. \tag{26.76}$$

□

CorGZXzuZR

Corolaire 26.19 ([700]).
Soient $a \in \mathbb{C}$ ainsi que deux chemins γ_1 et γ_2 homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Alors $\text{Ind}(\gamma_1, a) = \text{Ind}(\gamma_2, a)$.

26.1.6 Théorème de Tietze (espace normal)

LEMooCLVAooTaNGJk

Lemme 26.20 ([235]).
Soit un espace topologique normal[9] X. Soient $M \in \mathbb{R}^+$ et A fermé dans X, et une application continue $f : A \to [-M, M]$.

Il existe une application continue $g : X \to [-M/3, M/3]$ telle que pour tout $x \in A$,

$$|f(x) - g(x)| < \frac{2M}{3}, \tag{26.77}$$

Démonstration. Nous divisons A en trois parties :

$$A_- = f^{-1}\big([-M, -M/3]\big), \tag{26.78a}$$
$$A_+ = f^{-1}\big([M/3, M/3]\big), \tag{26.78b}$$
$$A_0 = f^{-1}\big([-M/3, M/3]\big). \tag{26.78c}$$

Les parties A_+ et A_- sont fermées parce que f est continue. D'autre part, X est normal, de telle sorte que le théorème d'Urysohn 21.109 s'applique.

Nous considérons donc une application continue $g_1 : X \to [0, 1]$ telle que $g_1^{-1}(A_-) = \{0\}$ et $g_1^{-1}(A_+) = \{1\}$. Nous posons alors

$$g(x) = \left(\frac{2M}{3}\right) g_1(x) - \frac{M}{3}. \tag{26.79}$$

Vérification des propriétés de g.

(1) **g est continue** Parce que g_1 est continue.

(2) **g prend ses valeurs dans $[-M/3, M/3]$** Parce que g_1 prend ses valeurs dans $[0, 1]$ et que $t \mapsto (2M/3)t - M/3$ est croissante.

(3) **$|f(x) - g(x)|$ sur A** Si $x \in A_-$, alors $g_1(x) = 0$ et donc $g(x) = -M/3$. Donc

EQooEUOKooFLRJjz

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - M/3| \leqslant 2M/3 \tag{26.80}$$

parce que $f(x) \in [-M/3, M/3]$.

Si $x \in A_+$, alors $g_1(x) = 1$ et donc $g(x) = M/3$. Même fin de raisonnement qu'en (26.80).

Si $x \in A_0$, alors $f(x) \in [-M/3, M/3]$ et $g(x) \in [-M/3, M/3]$ et donc encore $|f(x) - g(x)| \leqslant 2M/3$.

□

[9] Définition 7.90.

LEMooSKSNooEdgFcR

Lemme 26.21 ([235]).
Soient un espace topologique normal X ainsi qu'un fermé A dans X. Nous considérons une fonction continue $f\colon A\to[-M,M]$.

Il existe une application $g\colon X\to[-M,M]$ continue prolongeant f.

Démonstration. Nous allons commencer par construire une suite d'applications $g_i\colon X\to\mathbb{R}$ telles que ITEMooGAIVooQYBCZj

(1) Pour tout $x\in A$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^{r}ng_i(x)\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n M \tag{26.81}$$

ITEMooOLNAooEJPdbV

(2) Pour tout $x\in X$ et pour tout i,

$$|g_i(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^i\frac{M}{2}. \tag{26.82}$$

Nous commençons par construire g_1 à partir du lemme 26.20 appliqué à la fonction f. Nous avons donc une application $g_1\colon X\to[-M/3,M/3]$ telle que

$$|f(x)-g_1(x)|\leqslant\frac{2M}{3} \tag{26.83}$$ EQooGXUIooWnATPw

pour tout $x\in A$. Vu que g_1 prend ses valeurs dans $[-M/3,M/3]$, elle vérifie la condition (2). De plus (26.83) montre que la condition (1) est vérifiée pour $n=1$.

Et c'est parti pour la récurrence. Nous supposons avoir des applications g_i pour $i=1,\dots,k$ qui vérifient la condition (2), et telles que la condition (1) est satisfaite pour $n=1,\dots,k$. Nous allons maintenant construire g_{k+1}.

Nous posons

$$\begin{aligned}h_k\colon A&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto f(x)-\sum_{i=1}^{k}g_i(x).\end{aligned} \tag{26.84}$$

Par hypothèse de récurrence, la fonction h_k ne prend pas n'importe quelles valeurs dans $\mathbb{R}$, mais

$$h_k\colon A\to\Big[-\left(\frac{2}{3}\right)^k M,\left(\frac{2}{3}\right)^k M\Big]. \tag{26.85}$$

Nous construisons g_{k+1} à partir de ce h_k et du lemme 26.20. Nous avons donc

$$g_{k+1}\colon X\to\Big[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k M,\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k M\Big] \tag{26.86}$$

vérifiant

$$|h_k(x)-g_{k+1}(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}M. \tag{26.87}$$

La condition (1) est donc maintenant vérifiée jusqu'à $n=k+1$. Nous vérifions la condition (2) pour $i=k+1$. Simple calcul :

$$|g_{k+1}(x)|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k M=\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\frac{M}{2}. \tag{26.88}$$

Et voilà pour la définition des applications g_i.

Vu que $2/3<1$, la série $\sum_{i=1}^{\infty}\|g_i\|_\infty$ converge normalement (définition 10.119). Notons g la somme. Le lemme 10.150 donne alors la convergence uniforme $g_i\xrightarrow{unif}g$, et le théorème 12.394 nous assure que g est continue sur X.

En ce qui concerne la norme de g, nous avons, en utilisant la formule (10.470) avec $q=2/3$,

$$\|g\|_\infty\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i\frac{M}{2}\leqslant M. \tag{26.89}$$

Donc $|g(x)|\leqslant M$ pour tout $x\in X$.

Enfin nous vérifions que g prolonge f. Soit $x \in A$. Prenez la limite $n \to \infty$ dans l'inégalité

$$|f(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n M. \tag{26.90}$$

Nous trouvons que $|f(x) - g(x)| = 0$. □

THOooXKGWooFUYlux

Théorème 26.22 (Théorème de Tietze)**.**
Soit une partie fermée A de l'espace normal X. Si la fonction $f\colon A \to \mathbb{R}$ est continue, alors elle se prolonge en une fonction continue $g\colon X \to \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous supposons dans un premier temps que f prenne ses valeurs dans $]-M, M[$. À fortiori, elle prend ses valeurs dans $[-M, M]$ et le lemme 26.21 dit qu'il existe un prolongement continu $g\colon X \to [-M, M]$. Nous allons construire à partir de là un prolongement continu $h\colon X \to]-M, M[$ de f.

Nous posons

$$B = g^{-1}\big(\{-M, M\}\big). \tag{26.91}$$

Étant donné que $f(A) \subset]-M, M[$, nous avons $B \cap A = \varnothing$. De plus A est fermé par hypothèse et B est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{-M, M\}$ par l'application continue g. Nous pouvons donc appliquer le théorème d'Urysohn 21.109.

Nous considérons donc une application $g_1\colon X \to [0, 1]$ telle que $g_1 = 0$ sur B et $g_1 = 1$ sur A. Enfin nous posons $h = gg_1$. Cette application prend ses valeurs dans $]-M, M[$, est continue et si $x \in A$ nous avons

$$h(x) = g(x)g_1(x) = f(x) \times 1 = f(x). \tag{26.92}$$

Ceci règle la question si f prend ses valeurs dans $]-M, M[$.

Nous considérons à présent le cas général $f\colon A \to \mathbb{R}$. Soit un homéomorphisme $\phi\colon \mathbb{R} \to]-M, M[$ (par exemple via la proposition 12.203). Nous considérons

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon A &\to]-M, M[\\ x &\mapsto (\phi \circ f)(x). \end{aligned} \tag{26.93}$$

Nous lui appliquons le premier cas pour avoir une fonction $\tilde{g}\colon X \to]-M, M[$ qui prolonge $\tilde{f}$. Il suffit maintenant de poser

$$\begin{aligned} g\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\phi^{-1} \circ \tilde{g})(x). \end{aligned} \tag{26.94}$$

Cela est une application continue et si $x \in A$, nous avons

$$g(x) = (\phi^{-1} \circ \tilde{g})(x) = (\phi^{-1} \circ \tilde{f})(x) = (\phi^{-1} \circ \phi \circ f)(x) = f(x). \tag{26.95}$$

□

Corolaire 26.23.
Soit un fermé A dans un espace normal X. Si $f\colon A \to \mathbb{C}$ est continue, alors elle se prolonge en une fonction continue $g\colon X \to \mathbb{C}$.

Démonstration. Les parties réelles et imaginaires de f sont continues. Il suffit de leur appliquer le théorème de Tietze 26.22. □

26.2 Logarithme complexe

26.2.1 La fonction argument

Nous savons la définition 18.6 de l'exponentielle complexe.

Définition 26.24.
*Un **logarithme** de $\alpha \in \mathbb{C}$ est une solution de l'équation $e^z = \alpha$.*

Notons bien que cela définit *un* logarithme, et non *le* logarithme.

LEMooUMESooJVzeDb

Lemme 26.25.
Si z_1 et z_2 sont des logarithmes de α alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 = z_2 + 2ik\pi$.

Démonstration. Nous commençons par déterminer les logarithmes de $\alpha = 1$. Nous avons besoin de $e^{a+bi} = 1$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Nous avons

$$e^a e^{bi} = 1, \tag{26.96}$$

et en prenant la norme nous trouvons $|e^a| = 1$, ce qui donne $a = 0$. Ensuite $e^{bi} = 1$, qui signifie $b = 2k\pi$. Les logarithmes de 1 sont donc les nombres de la forme $2ik\pi$.

Soient maintenant z_1 et z_2 des logarithmes de α. Alors $e^{z_1} = e^{z_2}$, donc[10] $e^{z_1 - z_2} = 1$, ce qui signifie que $z_1 - z_2$ est un logarithme de 1. Donc il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 - z_2 = 2ik\pi$. □

Remarque 26.26.
Jusqu'ici nous n'avons pas donné de conditions donnant l'existence d'un logarithme. Nous avons seulement supposé des existences et donné des propriétés sur ces hypothétiques objets.

Définition 26.27 ([701]).
*Si $z \in \mathbb{C}^*$ nous définissons la **valeur principale** de son argument le nombre $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que*

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{26.97}$$

Nous le notons $\arg(z)$.

NORMooOGHNooYriCBH

26.28.
Il ne faut pas se ruer sur $\arg(x + iy) = \arctan(y/x)$. Pour rappel, la fonction arctan a été définie dans le théorème 18.39, et elle prend ses valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$. La formule $v(x, y) = \arctan(y/x)$ n'est donc valable que pour $x > 0$. Les valeurs sont :

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geqslant 0 \\ -\pi + \arctan(y/x) & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0. \end{cases} \tag{26.98}$$

EQooPJVFooSEKTny

Pour $x > 0$ nous avons $\arg(x + iy) = \arctan(y/x)$ parce que justement la fonction arctan prend ses valeurs en particulier entre $-\pi$ et π. Pour $x < 0$ et $y > 0$ nous avons $\arg(x + iy) = \pi + \arctan(y/x)$ (dans ce cas, $\arctan(y/x) < 0$) et si $x < 0$, $y < 0$ nous avons $\arg(x + iy) = -\pi + \arctan(y/x)$.

NORMooMRBEooVtTcIA

26.29 (Les dérivées partielles de la fonction argument)**.**
Vu que nous en aurons besoin plusieurs fois, nous calculons maintenant les dérivées partielles de la fonction

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \arg(x + iy). \end{aligned} \tag{26.99}$$

Nous commençons par la dérivée $\partial_x \varphi(x, y)$. Et il y a de nombreux cas à séparer.

(1) $\underline{x > 0}$

Nous avons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\arctan(y/(x + \epsilon)) - \arctan(y/x)}{\epsilon}, \tag{26.100}$$

qui n'est autre que la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(y/x)$. Nous pouvons la calculer facilement avec le théorème 18.39(2) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{26.101}$$

(2) $\underline{x < 0}$

Nous avons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\pm\pi + \arctan(y/(x + \epsilon)) - \big(\pm\pi + \arctan(y/x)\big)}{\epsilon} \tag{26.102}$$

où les signes $\pm$ dépendent du signe de y. De toutes façons, les termes en π se simplifient et le calcul est le même que celui du cas $x > 0$. Encore une fois nous avons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{26.103}$$

[10] C'est facile de dire « donc ». Il faut surtout citer la proposition 18.9(2).

(3) $\underline{x = 0}$

Nous devons calculer

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\arg(\epsilon + iy) - \arg(iy)}{\epsilon}. \tag{26.104}$$

Il y a quatre cas d'après les signes de ϵ (séparer limite à gauche et à droite) et y.

Si $\epsilon > 0$ et $y > 0$ alors nous avons à faire le calcul

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\arctan(y/\epsilon) - \pi/2}{\epsilon} \tag{26.105}$$

qui se traite par la règle de L'Hôpital. Cela donne $-1/y$.

Les trois autres cas ne se distinguent que par des constantes au numérateur, lesquelles disparaissent en appliquant la règle de L'Hôpital[11]. Au final,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y) = -\frac{1}{y}. \tag{26.106}$$

Nous avons calculé jusqu'ici :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \tag{26.107}$$

EQooAOJPooOryUBR

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En particulier vous avez noté que cette dérivée partielle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Nous calculons à présent la dérivée partielle par rapport à y :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\arg(x + iy + i\epsilon) - \arg(x + iy)}{\epsilon}. \tag{26.108}$$

(1) $\underline{x > 0}$

Nous avons à calculer

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\arctan\frac{y+\epsilon}{x} - \arctan\frac{y}{x}}{\epsilon}, \tag{26.109}$$

qui n'est autre que la dérivée de la fonction $t \mapsto \arctan\frac{t}{x}$ en $t = y$. Résultat :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{26.110}$$

(2) $\underline{x < 0 \text{ et } y \neq 0}$

Le calcul à faire est :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\pm\pi + \arctan\frac{y+\epsilon}{x} - \left(\pm\pi + \arctan\frac{y}{x}\right)}{\epsilon} \tag{26.111}$$

Une chose importante à remarquer est que dans le calcul de la limite nous pouvons supposer que y et $y + \epsilon$ aient le même signe, quelle que soit la valeur et le signe de ϵ (assez petit). C'est pour cela que les deux termes $\pm\pi$ arrivent avec le même signe des deux côtés de la différence, et se simplifient. Nous tombons sur une limite déjà faite et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \tag{26.112}$$

(3) $\underline{x < 0 \text{ et } y = 0}$

Vu que $x < 0$ nous avons $\arg(x) = \pi$ et nous devons calculer

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\arg(x + i\epsilon) - \pi}{\epsilon}. \tag{26.113}$$

La limite $\epsilon \to 0^+$ est classique et donne $1/x$.

Mais la limite $\epsilon \to 0^-$ n'existe pas :

$$\lim_{\epsilon\to 0^-} \frac{-\pi + \arctan(\epsilon/x) - \pi}{\epsilon} \tag{26.114}$$

[11] Nonobstant le fait que ces constantes se mettent bien pour avoir un vrai cas d'indétermination 0/0, sinon la règle de L'Hôpital ne s'applique pas.

n'existe pas.

Donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,0) \tag{26.115}$$

n'existe pas pour $x<0$.

(4) $x=0$ **et** $y\neq 0$

Le calcul est immédiat

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\arg(iy+i\epsilon)-\arg(iy)}{\epsilon}=0, \tag{26.116}$$

donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,y)=0. \tag{26.117}$$

En ce qui concerne la continuité, nous avons que $\partial_y\varphi$ est continue partout sauf sur la demi-droite $\{(x,0)$ tel que $x\leqslant 0\}$ où elle n'existe pas.

26.2.2 Une définition possible du logarithme

DEFooWDYNooYIXVMC

Définition 26.30.
Nous définissons la fonction ***logarithme*** *par*

$$\begin{aligned}\ln\colon \mathbb{C}^*&\to\mathbb{C}\\ z&\mapsto \ln\big(|z|\big)+i\arg(z)\end{aligned} \tag{26.118}$$

où le ln *à droite est le logarithme usuel sur* $\mathbb{R}^+$.

Remarque 26.31.
Cette fonction généralise le logarithme déjà vu sur $]0,\infty[\subset\mathbb{R}$. En effet pour des valeurs de z dans cette partie nous avons $\arg(z)=0$ et $|z|=z$.

Lemme 26.32.
Le nombre $\ln(z)$ *est un logarithme de* z.

Démonstration. Nous avons

$$e^{\ln(z)}=e^{\ln|z|}e^{i\arg(z)}=|z|e^{i\arg(z)}=z. \tag{26.119}$$

Nous avons utilisé le fait que $e^{\ln(x)}=x$ pour $x\in\mathbb{R}^+$ et $|z|e^{i\arg(z)}=z$ par définition de la fonction arg. □

Notons que si on avait pris d'autres conventions pour définir arg, nous aurions eu d'autres définitions possibles de ln.

Exemple 26.33.
Nous avons

$$\ln(-1)=\ln(1)+i\arg(-1). \tag{26.120}$$

Mais $\ln(1)=0$ et $\arg(-1)=\pi$ (et non $-\pi$), donc

$$\ln(-1)=i\pi. \tag{26.121}$$

C'est cette définition du logarithme qui est prise par Sage, et c'est cela qui lui permet de donner la primitive de $1/x$ comme $\ln(x)$ et non $\ln(|x|)$, parce que Sage connaît les logarithmes de nombres réels négatifs :

```
1
2
3  SageMath version 7.3, Release Date: 2016-08-04
4  Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
5  Type "help()" for help.
6
7 sage: ln(-1)
8 I*pi
9 sage: f(x)=1/x
```

```
sage: f.integrate(x)
x |--> log(x)
```

tex/sage/sageSnip010.sage

△

Nous avons jusqu'ici défini une fonction sur $\mathbb{C}^*$ qui fait correspondre à chaque nombre complexe un de ses logarithmes. Il reste quelques questions à régler :

- Est-ce que cette fonction est continue ? Holomorphe ? (réponses : non et non)
- Si non, est-ce qu'il y avait moyen de trouver une définition plus efficace ? (réponse : non)

LEMooMUOIooCnoWwq

Lemme 26.34.
La fonction ln *n'est pas continue sur* $]-\infty,0]$.

Démonstration. Attention à bien comprendre l'énoncé. La fonction

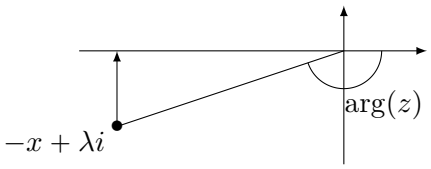
$$\begin{aligned} f\colon]-\infty,0[&\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned} \tag{26.122}$$

est continue. D'ailleurs c'est $\ln(x) = \ln(|x|) + i\pi$. Ce dont il est question dans l'énoncé, c'est de la fonction ln vue comme fonction sur $\mathbb{C}^*$.

Soit $x > 0$ dans $\mathbb{R}$; nous avons

$$\ln(-x) = \ln(x) + i\pi. \tag{26.123}$$

Cependant $\lim_{\substack{\lambda\to 0^-\\ \lambda\in\mathbb{R}}} \ln(-x+\lambda i)$ va valoir $\ln(|x|) - i\pi$. En effet lorsque $\lambda < 0$ est petit, l'argument de $-x+\lambda i$ se rapproche de $-\pi$ (et non de π).



Donc

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0^-\\ \lambda\in\mathbb{R}}} \ln(-x+\lambda i) = \lim \ln(|x+\lambda i|) + i\arg(-x+\lambda i) = \ln(|x|) - i\pi. \tag{26.124}$$

Nous n'avons donc pas continuité de la fonction logarithme comme fonction sur $\mathbb{C}^*$. □

THOooWUXOooYKvLbJ

Théorème 26.35.
La restriction

$$\ln\colon \mathbb{C}\setminus]-\infty,0] \to \mathbb{C} \tag{26.125}$$

est holomorphe.

Démonstration. Nous allons utiliser la proposition 12.337 et considérer la fonction

$$\begin{aligned} F\colon S &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \big(\ln(|x+iy|), \arg(x+iy)\big) \end{aligned} \tag{26.126}$$

où $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \text{ tel que } x \leqslant 0\}$. Nous devons vérifier que F est différentiable et que sa différentielle en un point de S est une similitude.

Nous posons

$$u(x,y) = \ln\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) \tag{26.127}$$

et

$$v(x,y) = \arg(x+iy). \tag{26.128}$$

Les dérivées partielles de u ne sont pas très compliquées :

```
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: u(x,y)=ln(sqrt(x**2+y**2))
sage: u.diff(x)
(x, y) |--> x/(x^2 + y^2)
```

tex/sage/sageSnip011.sage

c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \tag{26.129a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}. \tag{26.129b}$$

Pour celles de v par contre, il faut se poser des questions, par exemples résister à la tentation d'écrire $v(x,y) = \arctan(y/x)$ et lire 26.28.

Nous avons déjà calculé les dérivées partielles de v dans 26.29, et nous avons vu qu'elles étaient continues sur $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite.

Vu que les dérivées partielles sont continues, le théorème 12.320 nous dit que F est différentiable. La matrice de la différentielle est alors la matrice des dérivées partielles

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \tag{26.130}$$

qui a la forme requise (12.910) pour que la proposition 12.337 nous assure que ln soit $\mathbb{C}$-dérivable, c'est-à-dire holomorphe. □

26.2.3 Pas plus de continuité

Bon. La fonction logarithme que nous avons définie est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ privé d'une demi-droite

$$U = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \leqslant 0\}. \tag{26.131}$$

EQooDOELooBQpPyG

Et elle n'est pas continue sur U ; elle y est cependant continue « par le haut ». Pouvons-nous faire mieux ? Nous allons maintenant prouver quelques résultats d'impossibilité de faire mieux que holomorphe partout sauf une partie pas si petite que ça.

Proposition 26.36.
Il n'existe pas de fonctions continues $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ telle que $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Démonstration. Pour tout z, le nombre $f(z)$ est un logarithme de z. Or $\ln(z)$ en est également un. Donc par le lemme 26.25

$$f(z) = \ln(z) + 2ik(z)\pi \tag{26.132}$$

pour une certaine fonction $k\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{Z}$. Sur le domaine d'holomorphie de ln, les fonctions ln et f étant continues, la fonction k l'est aussi. Mais une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est constante (son domaine est connexe).

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$f(z) = \ln(z) + 2ik\pi \tag{26.133}$$

au moins pour tout $z \in \mathbb{C}^* \setminus U$. Une telle fonction ne peut pas être continue sur U parce que ln ne l'est pas. □

Ok. Pas continue sur tout $\mathbb{C}$. Mais continue sur un peu plus que $\mathbb{C}$ privé de toute une demi-droite ? La proposition suivante répond que bof.

Proposition 26.37.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $S(0,r)$ (le cercle centré en 0 et de rayon $r > 0$). Il n'existe pas de fonction continue $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in \Omega$.

Démonstration. Encore une fois, pour tout $z \in \Omega$ nous avons

$$f(z) = \ln(z) + 2i\pi k(z) \tag{26.134}$$

pour une certaine fonction $k\colon \Omega \to \mathbb{Z}$. Nous considérons la demi-droite U de (26.131). Sur $\Omega \setminus U$, la fonction ln est continue et k doit également l'être. Donc k est constante sur les composantes connexes de $\Omega \setminus U$.

Vu que $S(0,r)$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules centrées en des points de $S(0,r)$. En prenant le minimum des rayons de ces boules, nous voyons que Ω contient une couronne

$$\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } r - \delta \leqslant |z| \leqslant r + \delta\}. \tag{26.135}$$

Soit le point $x_0 = -r$. C'est un point de Ω contenu dans U. Nous allons prouver que $B(x_0,\delta) \setminus U$ est dans une seule composante connexe de Ω.

Soit un point $z_1 \in B(x_0,\delta)$ situé au-dessus de U, et z_2 un point de $B(x_0,\delta)$ situé en dessous de U. Le cercle $S(0,r)$ coupe $B(x_0,\delta)$ en deux points : un au-dessus et un en-dessous de U. On peut lier z_1 au point de « sortie » supérieur de $S(0,r)$ en restant dans $B(x_0,\delta)$; ce point est ensuite relié en suivant le cercle au point d'entrée inférieur du cercle dans $B(x_0,\delta)$. Ce dernier point est lié à z_2 par un chemin restant dans la boule.

Tout cela pour dire que z_1 et z_2 sont dans la même composante connexe de Ω et que $k(z_1) = k(z_2)$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$f(z) = \ln(z) + 2ik\pi \tag{26.136}$$

sur $B(x_0,\delta) \setminus U$. Une telle fonction f ne peut pas être continue. □

26.2.4 Pas d'unicité : autres déterminations de l'argument

NORMooFCDOooFDzAjp

26.38.
Nous avons pris la fonction d'argument $\arg\colon \mathbb{C} \to]-\pi,\pi]$. Il y en a évidemment beaucoup d'autres de possibles. Par exemple pour $\alpha \in \mathbb{R}$ nous pouvons considérer

EQooNKKDooQuJxXe

$$\arg_{\alpha^+}\colon \mathbb{C} \to]\alpha, \alpha + 2\pi] \tag{26.137}$$

ou

$$\arg_{\alpha^-}\colon \mathbb{C} \to [\alpha, \alpha + 2\pi[. \tag{26.138}$$

En posant

$$\ln_{\alpha^\pm}(z) = \ln(|z|) + i \arg_{\alpha^\pm}(z) \tag{26.139}$$

nous avons une fonction réciproque de l'exponentielle définie sur $\mathbb{C}^*$ et holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ privé d'une demi-droite D_α (dépendante de la valeur de α).

La différence entre $\ln_{\alpha^+}$ et $\ln_{\alpha^-}$ est seulement la valeur sur la demi-droite de non-holomorphie. L'une sera semicontinue d'un côté et l'autre, de l'autre côté.

Remarque 26.39.
La fonction $\arg_{0^-}$ a déjà été utilisée en 18.5.2 pour écrire un inverse de la fonction

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0,2\pi[&\to S^1 \\ t &\mapsto e^{it}. \end{aligned} \tag{26.140}$$

Définition 26.40 ([654])**.**
Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$. Nous disons que la fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est une ***détermination*** *sur Ω si elle est continue et vérifie*

$$e^{f(z)} = z \tag{26.141}$$

pour tout $z \in \Omega$.

Les différents résultats vus jusqu'ici montrent qu'il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Définition 26.41.
La ***détermination principale*** *du logarithme est la restriction de notre logarithme 26.30*

$$\begin{aligned} \ln\colon \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \ln(|z|) + i \arg(z) \end{aligned} \tag{26.142}$$

à l'ouvert $\mathbb{C}^* \setminus U$ où U est la demi-droite $\operatorname{Re}(z) \leqslant 0$, $\operatorname{Im}(z) = 0$ de $\mathbb{C}$.

REMooFBLLooDnkmjR

Remarque 26.42.
Beaucoup de sources[702] ne définissent pas $\ln_{\alpha^\pm}$ sur la droite D_α. C'est-à-dire qu'ils notent $\ln_\alpha$ notre fonction $\ln_{\alpha^+}$ restreinte à $\mathbb{C}^* \setminus D_\alpha$. Dans ce cas, les fonctions $\ln_{\alpha^+}$ et $\ln_{\alpha^-}$ sont identiques[12].

Cette remarque est importante parce que certains vont vous dire « le logarithme n'est pas défini sur la demi-droite » ; de leur point de vue, la fonction que nous avons définie est une prolongation (non continue) à U du logarithme, qui est continu.

(1) Certaines personnes pourraient vous dire que notre logarithme « n'est pas bien défini parce que si on fait le tour dans un sens ou dans l'autre nous n'obtenons pas la même valeur pour $\ln(z)$ lorsque z est sur U ». Et cela avec des arguments aussi forts que « 2π et 0, c'est le même point ».

Nous préférons être bien clairs[13] sur ce point : notre fonction ln est parfaitement définie sur $\mathbb{C}^*$ et 2π n'est pas la même chose que zéro. En particulier $\arg(e^{2i\pi}) = 0$ et $\arg(e^{-i\pi}) = \pi$ et non $-\pi$.

(2) Il n'en reste pas moins que Sage donne $\ln(-1) = i\pi$ et que nous avons choisi de faire de même, parce que le Frido n'est pas un cours d'agrégation, mais un texte qui donne quelques éléments de mathématique dans le but d'utiliser Sage efficacement.

(3) Tout ceci pour dire que si vous utilisez ce livre pour l'agrégation, vous devriez sérieusement considérer l'option de ne pas donner du logarithme la définition donnée ici, mais bien sa restriction.

En fait notre logarithme est maximum pour la propriété « être une réciproque de l'exponentielle » alors que beaucoup de monde préfère avoir une fonction maximale pour la propriété « être réciproque de l'exponentielle tout en étant continue ».

De toutes les fonctions ayant le droit de vouloir être appelée « logarithme », celle que nous avons choisie (un peu arbitrairement) pour s'appeler « logarithme » et accaparer de la notation « ln » est $\ln_{\pi^+}$. Elle est d'une certaine manière celle qui arrive le plus naturellement.

En effet si nous pensons au logarithme népérien $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que nous voulons prolonger sur $\mathbb{R}$, nous devons poser

$$\ln(-x) = \ln(-1) + \ln(x) \tag{26.143}$$

pour $x > 0$. Que peut valoir $\ln(-1)$? Il doit vérifier $e^{\ln(-1)} = -1$. La première valeur qui nous tombe sous la main est $\ln(-1) = \pi$. Bien entendu, d'autres possibilités existent, comme $\ln(-1) = 2017\pi$ par exemple.

26.2.5 Pas d'unicité : développement en série

Pour $z_0 \in \mathbb{C}^*$ nous pouvons écrire un développement en série de la réciproque de l'exponentielle autour de z_0. La fonction ainsi définie est holomorphe sur la boule $B(z_0, |z_0|)$ et diverge en dehors de cette boule.

Voilà encore une fonction « logarithme » pour chaque point de $\mathbb{C}^*$. Nous nommons $\ln_{z_0}$ la fonction

$$\ln_{z_0}\colon B(z_0, |z_0|) \to \mathbb{C} \tag{26.144}$$

donnée par la série.

En général nous n'avons pas $\ln_{z_1} = \ln_{z_2}$ sur l'intersection des disques de convergence. Si c'était le cas, de proche en proche nous pourrions construire une fonction continue réciproque du logarithme sur $\mathbb{C}^*$, ce qui est impossible.

26.2.6 Pas d'unicité : laquelle choisir ?

Bon. Pour chaque demi-droite D nous avons une détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^* \setminus D$. Et pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$ nous en avons une sur $B(z_0, |z_0|)$.

En pratique, quel logarithme choisir ? Cela dépend du problème.

Si vous avez besoin ou envie de travailler avec des séries entières, le mieux est de choisir une détermination donnée par un développement autour d'un point bien choisi par rapport à votre problème.

Si vous avez surtout besoin d'holomorphie, et que vous en avez besoin sur un grand domaine, vous devriez choisir une détermination sur un des ensembles $\mathbb{C}^* \setminus D_\alpha$ en choisissant α de telle sorte que la demi-droite maudite ne passe pas par la zone sur laquelle vous travaillez.

Dans tous les cas, vous devez préciser très explicitement la détermination choisie. Dans ce texte, sauf mention du contraire, nous utiliserons la détermination principale, et même son extension (non continue) à $\mathbb{C}^*$. Lorsque nous aurions besoin d'holomorphie, nous préciserons que nous considérons la restriction.

[12] Cela n'est pas tout à fait évident ; vous devriez y penser.
[13] Est-ce qu'il faut vraiment un pluriel ici ?

26.2.7 Logarithme comme primitive

Tout le monde sait[14] que le logarithme $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$. Qu'en est-il dans le cas complexe ? Tout d'abord précisons que nous ne comptons pas encore parler d'intégrale sur $\mathbb{C}$, mais seulement d'intégrales sur $\mathbb{R}$ d'une fonction à valeur complexes.

PROPooNIJVooKueuYJ

Proposition 26.43.
Si $z \in \mathbb{C}$ alors

$$\int \frac{1}{x+z}dx = \ln(x+z) \tag{26.145}$$

EQooAHYXooTPGXDS

Démonstration. Il est important de comprendre que la formule (26.145) est un abus de notation pour dire que si nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{C}\\ x &\mapsto \ln(x+z)\end{aligned} \tag{26.146}$$

alors nous avons $\varphi'(x) = \frac{1}{x+z}$. Ici la dérivation est une dérivation sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale est une intégrale sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire « composante par composantes ». La fonction φ se décompose en partie réelle et imaginaire qui sont à dériver séparément :

$$\varphi(x) = \ln(|x+z|) + i\arg(x+z). \tag{26.147}$$

(1) **Si z est imaginaire pur**

Nous posons $z = \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. D'abord nous avons

$$\frac{1}{x+\lambda i} = \frac{x}{x^2+\lambda^2} - i\frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}. \tag{26.148}$$

La partie réelle de $\varphi(x)$ est

$$\varphi_1(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+\lambda^2}\right), \tag{26.149}$$

dont la dérivée est

$$\varphi_1'(x) = \frac{x}{x^2+\lambda^2}, \tag{26.150}$$

qui correspond bien à la partie réelle de $\frac{1}{x+\lambda i}$.

En ce qui concerne la partie imaginaire, $\varphi_2(x) = \arg(x+\lambda i)$, et sa dérivée n'est rien d'autre que la dérivée partielle par rapport à x de la fonction argument, déjà calculée en (26.107) :

$$\varphi_2'(x) = \frac{-\lambda}{x^2+\lambda}. \tag{26.151}$$

Cela est bien la partie imaginaire de $\frac{1}{x+\lambda i}$.

Notons que nous n'avons pas de problèmes sur la demi-droite des réels négatifs parce que nous ne considérons au final que la dérivée partielle par rapport à x de la fonction argument, laquelle existe et est continue, même sur cette partie.

(2) **Pour z quelconque**

Soit $z = s + \lambda i$ avec $s, \lambda \in \mathbb{R}$. En posant $\varphi_0(x) = \ln(x+\lambda i)$ nous avons $\varphi(x) = \varphi_0(x+s)$ et donc

$$\varphi'(x) = \varphi_0'(x+s) = \frac{1}{x+s+\lambda i} = \frac{1}{x+z}. \tag{26.152}$$

Tout va bien.

□

EXooAKEDooZgjocX

Exemple 26.44.
Un petit calcul d'intégrale, que nous avions déjà faite dans l'exemple 20.100 (avec la méthode de Rothstein-Trager). En passant par une décomposition en fractions simples :

$$\int \frac{1}{x^3+x} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1/2}{x-i} - \frac{1/2}{x+i}\right) \tag{26.153a}$$

$$= \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x-i) - \frac{1}{2}\ln(x+i) \tag{26.153b}$$

$$= \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1). \tag{26.153c}$$

SUBEQooRNQLooScfSlG

[14] Proposition 15.97.

Attention aux justifications. Il n'est pas vrai en général dans le cas de nombres complexes a et b que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. En effet, pour la partie réelle, ça passe parce que $|ab| = |a||b|$. Mais en ce qui concerne la partie imaginaire,

$$\arg(ab) \neq \arg(a) + \arg(b) \tag{26.154}$$

lorsque la somme dépasse les bornes de $]-\pi, \pi]$. Le passage à (26.153c) fonctionne parce que dans le cas particulier des nombres $x+i$ et $x-i$, les arguments se somment à zéro : $\arg(x+i) + \arg(x-i) = 0$. △

26.2.8 Logarithme sur un chemin

DEFooBBGFooCEdsFR

Définition 26.45 (logarithme continu)**.**
Soient un espace topologique X, et une application $f\colon X \to \mathbb{C}^*$. Nous disons que $g\colon X \to \mathbb{C}^*$ est un ***logarithme*** *de f si pour tout $x \in X$ nous avons*

$$f(x) = \exp\big(g(x)\big). \tag{26.155}$$

DEFooOCDGooGyvvWi

Définition 26.46 (Détermination du logarithme)**.**
Soit un chemin[15] *$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}^*$. Nous disons qu'une application $g\colon \gamma\big([a,b]\big) \to \mathbb{C}^*$ est une* ***détermination du logarithme*** *sur γ si*

$$\exp\big((g \circ \gamma)(t)\big) = \gamma(t) \tag{26.156}$$

pour tout $t \in [a,b]$.

THOooUPANooMiECqe

Théorème 26.47.
Tout chemin dans $\mathbb{C}^*$ admet une détermination continue du logarithme[16]*, et si l est une détermination sur le chemin γ, nous avons*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = l\big(\gamma(b)\big) - l\big(\gamma(a)\big). \tag{26.157}$$

Le théorème de Borsuk parle de lien entre logarithme continu et homotopie de fonctions à la fonction constante. Il s'applique donc bien de concert avec la proposition 26.16 qui dit que si f et g sont homotopes, alors f/g est homotope à une constante.

THOooTCUMooEByCKg

Théorème 26.48 (Théorème de Borsuk[235])**.**
Soient un compact K de $\mathbb{R}^n$ ainsi qu'une application continue $f\colon K \to \mathbb{C}^*$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

ITEMooKZYDooKoEEbl

(1) f admet un logarithme continu[17]*.*

ITEMooXVNXooVAHklr

(2) f est homotope à l'application constante $u\colon K \to \mathbb{C}^*$, $u(z) = 1$.

ITEMooQDHXooObjxLA

(3) f admet une extension continue $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^*$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **(1) ⇒ (3)** Soit un logarithme continu $g\colon K \to \mathbb{C}$ de f. Vu que K est fermé, le théorème de Tietze 26.22 dit que g possède une extension continue $\tilde{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Nous posons

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto \exp\big(\tilde{g}(x)\big). \end{aligned} \tag{26.158}$$

L'application $\tilde{f}$ est continue parce que exp et $\tilde{g}$ le sont. Elle est une extension de f parce que si $x \in K$, nous avons

$$\tilde{f}(x) = \exp\big(\tilde{g}(x)\big) = \exp\big(g(x)\big) = f(x) \tag{26.159}$$

parce que $\tilde{g}(x) = g(x)$ et g est un inverse de exp.

(2) **(3) ⇒ (2)** Soit une extension continue $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^*$ de f. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous posons

$$\begin{aligned} H\colon [0,1] \times K &\to \mathbb{C}^* \\ (t,x) &\mapsto \tilde{f}\big((1-t)x + tx_0\big). \end{aligned} \tag{26.160}$$

[15] Définition 20.75.
[16] Définition 26.46.
[17] Définition 26.45.

L'application H est continue, et pour $x \in K$ elle vérifie $H(0,x) = \tilde{f}(x) = f(x)$ ainsi que $H(1,x) = \tilde{f}(x_0)$.

Donc f homotope à l'application constante $\tilde{f}(x_0)$. Vu que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, toutes les applications constantes sont homotopes[18]. Donc f est homotope à $\tilde{f}(x_0)$ qui est homotope à u. L'homotopie étant une relation d'équivalence[19], f est homotope à u.

(3) **(2) ⇒ (1)** Nous considérons l'homotopie $H\colon [0,1]\times K \to \mathbb{C}^*$ entre f et u. En particulier pour tout $x \in K$ nous avons $H(0,x) = f(x)$ et $H(1,x) = 1$.

La partie $[0,1]\times K$ est compacte[20] et $|H|$ y est continue. Donc elle atteint ses bornes. Mais elle prend ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$; donc

$$\inf_{x,t} |H(x,t)| > 0. \tag{26.161}$$

Et d'ailleurs cet infimum est un minimum. Nous considérons la norme suivante sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$:

$$\|(t,x)\|_\infty = \max\big(|t|,|x|\big). \tag{26.162}$$

Toutes les normes étant équivalentes[21] sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, nous pouvons caractériser la compacité, la continuité et tout ça en termes de cette norme. L'application H est uniformément continue[22]. Soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\|(t,x)-(s,y)\|_\infty < \eta$ alors $\|H(t,x)-H(s,y)\| < \epsilon$.

Soient un entier $n > \frac{1}{\eta} + 1$, $x \in K$ et $k \in \{0,\dots,n\}$. Nous avons

$$\big\|(\frac{k}{n},x) - (\frac{k+1}{n},x)\big\|_\infty = \big\|(-\frac{1}{n},0)\big\| = \frac{1}{n} < \eta. \tag{26.163}$$

Nous avons donc également

$$\big|H(\frac{k}{n},x) - H(\frac{k+1}{n},x)\big| < \epsilon. \tag{26.164}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} F_k\colon K &\to \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto H\big(\frac{k}{n},x\big). \end{aligned} \tag{26.165}$$

Cette application est continue sur K et pour tout $x \in K$ nous avons SUBEQSooLJIJooYkxyMO

$$\big|\frac{F_k(x)}{F_{k+1}(x)} - 1\big| = \big|\frac{F_k(x) - F_{k+1}(x)}{F_{k+1}(x)}\big| \tag{26.166a}$$

$$= \big|\frac{H(\frac{k}{n},x) - H(\frac{k+1}{n},x)}{H(\frac{k+1}{n},x)}\big| \tag{26.166b}$$

$$< \frac{\epsilon}{|H(\frac{k+1}{n},x)|}. \tag{26.166c}$$

Pour rappel, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel qu'en posant $n > \frac{1}{\eta} + 1$ nous avons (26.166). Nous choisissons ϵ tel que $0 < \epsilon < \inf_{(t,x)} |H(t,x)|$, de telle sorte à avoir

$$\big|\frac{F_k(x)}{F_{k+1}(x)} - 1\big| < \frac{\epsilon}{|H(\frac{k+1}{n},x)|} < 1. \tag{26.167}$$

La fonction $\ln\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ est continue sur $B(1,1)$[23]. Donc la fonction

$$\begin{aligned} h_k\colon K &\to \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto \ln\left(\frac{F_k(x)}{F_{k+1}(x)}\right) \end{aligned} \tag{26.168}$$

est continue. Nous posons

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{F_k}{F_{k+1}}\right), \tag{26.169}$$

[18] Lemme 26.15.
[19] Lemme 26.14.
[20] Théorème 7.368.
[21] Équivalence de normes, théorème 10.61.
[22] Théorème de Heine 12.80.
[23] Le logarithme est celui défini en 26.30 et sa continuité est le théorème 26.35.

qui est également continue sur K. Cette fonction g est un logarithme continu de f sur K parce que[24]

$$\exp\big(g(x)\big) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \ln\Big(\frac{f_k(x)}{F_{k+1}(x)}\Big)\right) \tag{26.170a}$$
$$= \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\ln\big(\frac{F_k(x)}{F_{k+1}(x)}\big)\right) \tag{26.170b}$$
$$= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{F_k(x)}{F_{k+1}(x)} \tag{26.170c}$$
$$= \frac{F_0(x)}{F_n(x)} \tag{26.170d}$$
$$= \frac{H(0,x)}{H(1,x)} \tag{26.170e}$$
$$= \frac{f(x)}{1} \tag{26.170f}$$
$$= f(x). \tag{26.170g}$$

□
CORooXOOZooUJMKxu

Corolaire 26.49 ([235]).
Soit un compact convexe K de $\mathbb{R}^n$. Toute application continue $K \to \mathbb{C}^*$ admet un logarithme continu.

Démonstration. Soit une application continue $f\colon K \to \mathbb{C}^*$. Soit $x_0 \in K$. Vu que K est convexe, f est homotope à la fonction constante $f(x_0)$. Par arc-connexité de $\mathbb{C}^*$, l'application f est alors homotope à la fonction constante 1.

Le théorème de Borsuk 26.48 nous dit alors que f admet un logarithme continu. □
LEMooJNPTooScfSvA

Lemme 26.50.
Si K est compact dans $\mathbb{C}$, alors la partie $\mathbb{C} \setminus K$ possède exactement une composante connexe non bornée.

Démonstration. La partie K étant compacte, elle est bornée. Il existe donc $r > 0$ tel que $K \subset B(0,r)$. Soit $A = \mathbb{C} \setminus B(0,r)$. Cela est une partie connexe de $\mathbb{C}$ et est donc contenue dans une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$. Il y a donc existence d'une composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$.

Pour l'unicité, les autres composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus K$ sont contenues dans $B(0,r)$ et sont donc bornées. □

26.2.9 Lacets, indice et homotopie

DEFooLFBNooGlvJmp

Proposition-Définition 26.51 ([703]).
*Soit γ un chemin fermé[25] dans $\mathbb{C}$ que nous supposons continu et C^1 par morceaux[26]. L'**indice** de la courbe γ est la fonction*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_\gamma\colon \mathbb{C} \setminus \gamma &\to \mathbb{Z} \\ z &\mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\omega}{\omega - z}. \end{aligned} \tag{26.171}$$

Alors :
ITEMooHYHMooWcaJxP

(1) La fonction Ind_γ prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$.

(2) Elle est continue sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

(3) La fonction indice est constante sur chaque composante connexe[27] de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

(4) Elle est nulle sur les composantes non bornées de $\mathbb{C} \setminus \gamma$[28].

Démonstration. Point par point.

[24] Dans le calcul suivant, nous utilisons entre autres la formule $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ de la proposition 18.9(2).
[25] Par abus de langage, nous désignerons par γ à la fois le chemin et son image.
[26] Définition 20.37
[27] Définition 7.104.
[28] Elle a une seule telle composante par le lemme 26.50, mais ce n'est pas important ici.

(1) **Prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$**

Explicitons l'intégrale sur $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{C}$:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt. \tag{26.172}$$

Note. Comme γ n'est peut-être pas dérivable en certains points, en réalité nous n'avons pas une intégrale entre a et b, mais une somme d'intégrales entre a_i et b_i avec $a_0=a$ et $b_n=b$. Nous nommons S l'ensemble de ces points.

Nous allons calculer l'exponentielle de ce qui est dans l'intégrale en posant

$$\begin{aligned}\varphi\colon [a,b]&\to\mathbb{C}\\ u&\mapsto\exp\left(\int_a^u\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt\right).\end{aligned} \tag{26.173}$$

Nous savons par le lien entre primitive et intégrale (proposition 14.287) que la dérivée de $x\mapsto\int_0^x f$ est f elle-même. Nous pouvons donc facilement dériver φ :

$$\varphi'(u)=\frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z_0}\exp\left(\int_a^u\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt\right)=\frac{\gamma'(u)\varphi(u)}{\gamma(u)-z_0}. \tag{26.174}$$

EQooHEAWooCWnNLZ

Cette égalité est vraie pour tout $u\in[a,b]$ sauf en un nombre fini de points (les points de S). Nous considérons maintenant

$$\begin{aligned}f\colon [a,b]&\to\mathbb{C}\\ t&\mapsto\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z_0},\end{aligned} \tag{26.175}$$

et nous dérivons :

$$f'(t)=\frac{\varphi'(t)\big(\gamma(t)-z_0\big)-\varphi(t)\gamma'(t)}{\big(\gamma(t)-z_0\big)^2} \tag{26.176a}$$

$$=\frac{\varphi'(t)}{\gamma(t)-z_0}-\frac{\varphi(t)\gamma'(t)}{\big(\gamma(t)-z_0\big)^2}. \tag{26.176b}$$

Nous y injectons l'expression (26.174) de φ' :

$$f'(t)=\frac{\gamma'(t)\varphi(t)}{\big(\gamma(t)-z_0\big)^2}-\frac{\varphi(t)\gamma'(t)}{\big(\gamma(t)-z_0\big)^2}=0. \tag{26.177}$$

Comme f est continue[29] sur $[a,b]$ et de dérivée nulle partout sauf sur S, elle est constante sur $[a,b]$. Nous avons donc $f(t)=f(a)$ pour tout t, c'est-à-dire

$$\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z_0}=\frac{1}{\gamma(a)-z_0}. \tag{26.178}$$

Nous pouvons isoler de là une valeur pour $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)=\frac{\gamma(t)-z_0}{\gamma(a)-z_0}. \tag{26.179}$$

C'est le moment de calculer $\varphi(b)$. Dans le calcul suivant, nous utilisons $\gamma(a)=\gamma(b)$:

$$\varphi(b)=\frac{\gamma(b)-z_0}{\gamma(a)-z_0}=\frac{\gamma(b)-z_0}{\gamma(b)-z_0}=1. \tag{26.180}$$

Nous avons prouvé que

$$\exp\left(\int_a^b\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt\right)=1. \tag{26.181}$$

Pour qu'une exponentielle soit égale à 1, il faut que ce qui se trouve dedans soit égal à $2ik\pi$ pour un certain k. Il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que

$$\int_a^b\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt=2i\pi k. \tag{26.182}$$

Pour cette valeur de k nous avons $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)=k$.

(2) **Une borne pour $|\gamma'|$** L'application γ est C^1 par morceaux[30]. La restriction $\gamma'\colon[a_i,b_i]\to\mathbb{C}$ est

[29] Fait important : nous utilisons la continuité de f, pas de l'indice. Nous n'avons pas encore démontré que l'indice est une fonction continue.

[30] Nous utilisons ici crucialement le fait que les morceaux sont fermés.

continue sur un compact et est donc bornée. Pour chaque i nous avons donc une borne M_i pour $|\gamma' j|$. En nommant M le maximum des ces bornes M_i nous avons $\gamma'(t) < M$ pour tout $t \in [a,b]$.

(3) **L'indice est ponctuellement continu** Nous utilisons le théorème 17.15 avec l'application

$$\begin{aligned} f\colon [a,b] \times \mathbb{C} \setminus \gamma &\to \mathbb{C} \\ (t,z) &\mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}. \end{aligned} \tag{26.183}$$

Sauf que non. Il ne va pas être possible de majorer cette fonction uniformément en z, comme il le faudrait pour remplir la condition (3). La raison est que quand z s'approche de γ, le dénominateur n'est pas contrôlé.

Nous allons donc restreindre le domaine de f. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Vu que γ est continue et que $[a,b]$ est compact, la fonction $t \mapsto 1/(\gamma(t)-z_0)$ atteint une borne inférieure. Disons que cette borne est atteinte pour $t = t_0$. Nous considérons $r < d\big(z_0, \gamma(t_0)\big)$ et nous prenons une borne M pour $|\gamma'|$. Nous avons alors, pour tout t que

$$\frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)-z_0|} < \frac{M}{r}. \tag{26.184}$$

Le z_0 étant fixé, la fonction constante M/r majore f uniformément en t. La théorème de continuité sous l'intégrale 17.15 dit alors que l'indice est continue en z_0.

(4) **Continuité globale** La fonction indice étant continue en chaque point de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, elle est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma$ (théorème 7.263).

(5) **Sur les composantes connexes** Soit une composante connexe C de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. L'application Ind_γ est continue et à valeurs entières sur C. La proposition 7.271 dit alors que l'indice est constant sur C.

(6) **Nulle sur la non bornée** En majorant $|\gamma'|$ par M, nous avons

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)-z_0|} \leqslant \frac{M}{2\pi} \int_a^b \frac{dt}{|\gamma(t)-z_0|}. \tag{26.185}$$

Soit $\epsilon > 0$ assez petit pour que $\epsilon M(b-a)/2\pi < 1$. Vu que γ est bornée, il existe $R > 0$ tel que $\gamma(t) \in B(0,R)$ pour tout t. Nous considérons r assez grand pour que $r - R > 1/\epsilon$.

Comme nous étudions Ind_γ sur une composante non bornée, nous considérons $|z_0| > r$. Avec ça nous avons $|\gamma(t) - z_0| > r - R$ et donc

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)| \leqslant \frac{M}{2\pi} \int_a^b \epsilon dt = \frac{M(b-a)}{2\pi}\epsilon < 1. \tag{26.186}$$

La dernière inégalité est un choix de ϵ fait au départ.

Étant donné que $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}$, nous avons forcément $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = 0$. Et comme l'indice est constant sur les composantes connexe, il est nul partout.

□

PROPooXWULooFZgHfL

Proposition 26.52.
Soit $p \in \mathbb{C}$. Soit un chemin $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{p\}$. Quelques hypothèses :

(1) Il existe une demi-droite D d'origine p et tel que $\gamma^{-1}(D)$ est fini.

(2) Le chemin γ traverse D en tout point de $\gamma^{-1}(D)$.

(3) Soit n^+ le nombre de points de $\gamma^{-1}(D)$ où γ traverse positivement D et n^- idem négativement.

Alors

$$\mathrm{Ind}(\gamma, p) = n^+ - n^-. \tag{26.187}$$

PROPooEKFHooOWcIMk

Proposition 26.53 ([235]).
Soient $p \in \mathbb{C}$ ainsi que deux chemins $\gamma_1, \gamma_2\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{p\}$. Si γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{p\}$. Alors

$$\mathrm{Ind}(\gamma_1, p) = \mathrm{Ind}(\gamma_2, p). \tag{26.188}$$

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}\setminus\{p\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{z-p}. \end{aligned} \tag{26.189}$$

La partie $\mathbb{C}\setminus\{p\}$ est ouverte. Le théorème 26.18 d'invariance de l'intégrale par homotopie nous indique que

$$\mathrm{Ind}(\gamma_1,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f=\mathrm{Ind}(\gamma_2,p). \tag{26.190}$$

□

DefECnFJQp

Définition 26.54.
*Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets en $x_0\in X$ (un espace topologique), une **équivalence d'homotopie** est une application $f\colon [0,1]\times[0,1]\to X$ telle que*

(1) $f(0,t)=\gamma_1(t)$ pour tout t ;

(2) $f(1,t)=\gamma_2(t)$ pour tout t ;

(3) pour chaque $t\in[0,1]$, l'application $s\mapsto f(s,t)$ est continue ;

(4) pour chaque $s\in[0,1]$, l'application $t\mapsto f(s,t)$ est un lacet basé en x_0.

LEMooMEICooOOGzdf

Lemme 26.55.
Si γ est un cercle de centre $z_0\in\mathbb{C}$ et de rayon r, alors

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=\begin{cases} 1i & \text{si } z\in B(z_0,r)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{26.191}$$

Démonstration. La seconde ligne provient directement de la proposition 26.51. Pour la première, le cercle γ se paramètre par

$$\gamma(\theta)=z_0+re^{i\theta}. \tag{26.192}$$

Nous commençons par calculer $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$. Il vaut

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\omega}{\omega-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta=1. \tag{26.193}$$

Nous considérons maintenant un point $p\in B(z_0,r)$ et nous calculons $\mathrm{Ind}_\gamma(p)$. D'abord si σ est le cercle $\sigma(t)=\gamma(t)+p-z_0=re^{it}+p$ de rayon r centré en p, nous avons

$$\mathrm{Ind}_\sigma(p)=1 \tag{26.194}$$

par ce que nous venons de voir.

Ensuite les chemins σ et γ sont homotopes dans $\mathbb{C}\setminus\{p\}$. En effet nous posons

$$H(u,t)=(1-u)\gamma(t)+u\sigma(t). \tag{26.195}$$

Nous avons

$$H(u,t)-p=(1-u)z_0+re^{it}+(u-1)p=(1-u)(z_0-p)+re^{it}. \tag{26.196}$$

En termes de modules, nous avons d'une part

$$|(1-u)(z_0-p)|\leqslant|z_0-p|<r \tag{26.197}$$

et $|re^{it}|=r$. Donc la somme des deux ne peut pas faire zéro. Nous avons donc bien $H(u,t)\neq p$ pour tout $u\in[0,1]$ et pour tout $t\in[0,2\pi]$.

Les chemins γ et σ étant homotopes dans $\mathbb{C}\setminus\{p\}$, la proposition 26.53 dit que

$$\mathrm{Ind}_\gamma(p)=\mathrm{Ind}_\sigma(p)=1. \tag{26.198}$$

□

PROPooGAOIooFTOuli

Proposition 26.56 ([235]).
Soit un intervalle $J \subset \mathbb{R}$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathcal{L}(J,\mathbb{C}^*) &\to \mathbb{Z}\\ \gamma &\mapsto \mathrm{Ind}(\gamma,0)\end{aligned} \tag{26.199}$$

où $\mathcal{L}(J,\mathbb{C}^*)$ est l'ensemble des lacets $J \to \mathbb{C}^*$ sur lequel nous considérons la loi de groupe multiplicatif tandis que nous considérons la loi additive sur $\mathbb{Z}$. Nous avons :

ITEMooKCRIooSEyhlp

(1) ψ est effectivement à valeurs dans $\mathbb{Z}$,

(2) ψ est un morphisme de groupes surjectif.

ITEMooZFXTooDCXTVU

(3) Le noyau de ψ est

$$\ker(\psi) = \{\textit{lacets homotopes dans } \mathbb{C}^* \textit{ à un lacet constant}\}. \tag{26.200}$$

Démonstration. Pour (1), c'est la proposition 26.51(1).

Soient deux lacets γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{C}^*$. Le théorème 26.47 nous permet de considérer des logarithmes continus $l_i\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ le long de γ_i. L'application $l_1 + l_2$ est une détermination du logarithme le long de $\gamma_1\gamma_2$ parce que[31]

$$\exp\big(l_1(t) + l_2(t)\big) = \exp\big(l_1(t)\big)\exp\big(l_2(t)\big) = \gamma_1(t)\gamma_2(t). \tag{26.201}$$

(1) **Morphisme** Nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(\gamma_1\gamma_2,0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b f\big((\gamma_1\gamma_2)(t)\big)(\gamma_1\gamma_2)'(t)dt && (26.202a)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1\gamma_2}\frac{dz}{z} && (26.202b)\\ &= (l_1+l_2)(b) - (l_1+l_2)(a) && (26.202c)\\ &= \big(l_1(b) - l_1(a)\big) + \big(l_2(b) - l_1(a)\big) && (26.202d)\\ &= \mathrm{Ind}(\gamma_1,0) + \mathrm{Ind}(\gamma_2,0). && (26.202e)\end{aligned}$$

Nous avons prouvé que $\psi(\gamma_1\gamma_2) = \psi(\gamma_1) + \psi(\gamma_2)$, et donc que ψ est un morphisme.

(2) **Surjection** Nous considérons le lacet

$$\begin{aligned}\gamma\colon [a,b] &\to \mathbb{C}^*\\ t &\mapsto \exp\big(2i\pi kt(b-a)\big),\end{aligned} \tag{26.203}$$

et nous montrons que $\psi(\gamma) = k$. D'abord nous remarquons que

$$\gamma'(t) = \gamma(t)\frac{2i\pi k}{(b-a)}, \tag{26.204}$$

et ensuite nous calculons :

$$\begin{aligned}\psi(\gamma) &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{1}{\gamma(t)}\gamma'(t)dt && (26.205a)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\int_a^b}\gamma(t)\frac{2\pi ik}{(b-a)}\gamma(t)dt && (26.205b)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{2i\pi k}{(b-a)}dt && (26.205c)\\ &= k. && (26.205d)\end{aligned}$$

(3) **Noyau** Notons pour la simplicité

$$\mathcal{H} = \{\text{lacets homotopes dans } \mathbb{C}^* \text{ à un lacet constant}\}. \tag{26.206}$$

[31] Nous ne nous lasserons jamais de citer la proposition 18.9(2).

Nous notons u le chemin constant $u(t)=1$. Nous avons $\psi(u)=0$ parce que, en notant $f(z)=1/z$,

$$\mathrm{Ind}(u,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_u f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 f\big(u(t)\big)u'(t)dt=0 \tag{26.207}$$

parce que $u'(t)=0$ pour tout t. Nous avons donc $u\in\ker(\psi)$. Si $\gamma\in\mathcal{H}$, alors, utilisant le théorème de Cauchy homotopique 26.18(2), nous avons $\mathrm{Ind}(\gamma,0)=\mathrm{Ind}(u,0)=0$. Donc $\mathcal{H}\subset\ker(\psi)$.

Soient $\gamma\in\ker(\psi)$ et une détermination continue l du logarithme le long de γ. Nous avons

$$0=\psi(\gamma)=l(b)-l(a). \tag{26.208}$$

Nous posons

$$\begin{aligned}H\colon [0,1]\times[a,b]&\to\mathbb{C}^*\\(s,t)&\mapsto\exp\big(sl(a)+(1-s)l(t)\big).\end{aligned} \tag{26.209}$$

Cette application continue vérifie $H(0,t)=e^{l(t)}=\gamma(t)$ et $H(1,t)=e^{l(a)}=\gamma(a)$. Donc elle est une homotopie entre γ et le chemin constant $\gamma(a)$. Encore par Cauchy homotopique, $\psi(\gamma)=0$ parce que ψ est nul sur les chemins constants.

□

LEMooCTIBooNRAyZH

Lemme 26.57 ([1]).
Si γ est un lacet dans $\mathbb{C}\setminus\{p\}$, alors

$$\mathrm{Ind}(\gamma,p)=\mathrm{Ind}(\gamma-p,0) \tag{26.210}$$

PROPooPRIIooKWCHBZ

Proposition 26.58 ([235]).
Soient $p\in\mathbb{C}$ ainsi que deux lacets γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{C}\setminus\{p\}$. Si

$$\mathrm{Ind}(\gamma_1,p)=\mathrm{Ind}(\gamma_2,p), \tag{26.211}$$

alors γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $\mathbb{C}\setminus\{p\}$.

Démonstration. Vu que γ_1 ne passe pas par p, nous pouvons considérer le chemin

$$\begin{aligned}\gamma\colon [a,b]&\to\mathbb{C}^*\\t&\mapsto\frac{\gamma_0(t)-p}{\gamma_1(t)-p}.\end{aligned} \tag{26.212}$$

En posant $\sigma_i(t)=\gamma_i(t)-p$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(\gamma,0)&=\mathrm{Ind}(\sigma_0\sigma_1^{-1},0) && && (26.213a)\\&=\mathrm{Ind}(\sigma_0,0)+\mathrm{Ind}(\sigma_1^{-1},0) && \text{prop. 26.56} && (26.213b)\\&=\mathrm{Ind}(\sigma_0,0)-\mathrm{Ind}(\sigma_1,0) && && (26.213c)\\&=\mathrm{Ind}(\gamma_0,p)-\mathrm{Ind}(\gamma_1,p) && \text{lem. 26.57} && (26.213d)\\&=0. && && (26.213e)\end{aligned}$$

Vu que l'indice de γ est nul, ce chemin est homotope dans $\mathbb{C}^*$ au chemin constant u par la proposition 26.56(3). Soit une homotopie $H\colon[0,1]\times[a,b]\to\mathbb{C}^*$ entre γ et u. Et nous posons

$$\begin{aligned}S\colon [0,1]\times[a,b]&\to\mathbb{C}^*\\(s,t)&\mapsto\big(\gamma_1(t)-p\big)H(s,t).\end{aligned} \tag{26.214}$$

Cette application est une homotopie entre

$$t\mapsto S(0,t)=\big(\gamma_2(t)-p\big)H(0,t)=\big(\gamma_2(t)-p\big)\gamma(t)=\gamma_1(t)-p \tag{26.215}$$

et

$$t\mapsto S(1,t)=\big(\gamma_2(t)-p\big)H(1,t)=\big(\gamma_2(t)-p\big)u(t)=\gamma_2(t)-p. \tag{26.216}$$

Donc $S+p$ est une homotopie entre γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{C}\setminus\{p\}$. □

PROPooCFMFooXjlhfV

Proposition 26.59 ([235]).
Soit un espace topologique X localement connexe par arcs. Soit une application continue $f\colon X\to\mathbb{C}^*$. Il y a équivalence entre

(1) f admet un logarithme continu.

(2) Pour tout lacet γ dans X, nous avons $\mathrm{Ind}(f\circ\gamma,0)=0$.

26.2.10 Théorème de Cauchy et analycité

Cette sous-section veut prouver le théorème de Cauchy.

ThoUHztQe

Théorème 26.60 (Formule de Cauchy)**.**
Soient Ω ouvert dans $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Soit $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset \Omega$. Alors pour tout $z \in B(z_0, r)$ nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega. \tag{26.217}$$

EqPzUABM

Démonstration. Soit $z \in B(z_0, r)$. Considérons la fonction

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{f(\omega)-f(z)}{\omega-z} & \text{si } \omega \neq z \\ f'(z) & \text{si } \omega = z. \end{cases} \tag{26.218}$$

Cette fonction est holomorphe sur $B(z_0, r) \setminus \{z\}$ et continue en z. Elle vérifie donc la proposition 26.11 et nous avons

$$\int_\gamma g = 0 \tag{26.219}$$

où γ est le cercle de centre z_0 et de rayon r. Nous avons donc

$$0 = \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} - \int_\gamma \frac{f(z)}{\omega - z}, \tag{26.220}$$

et ayant déjà calculé la seconde intégrale dans l'exemple 26.55 nous en déduisons

$$\int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = 2\pi i f(z), \tag{26.221}$$

ce qu'il fallait. □

ThomcPOdd

Théorème 26.61.
Soient Ω ouvert dans $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur Ω. Soient encore $z_0 \in \Omega$ et r_0 tels que $B(z_0, r_0) \subset \Omega$. Alors :

ITEMooYWSOooHJtxGr

(1) Sur $B(z_0, r_0)$, la fonction f s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{26.222}$$

(2) Nous avons

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega \tag{26.223}$$

où $\gamma = \partial B(z_0, r)$ avec $|z - z_0| < r < r_0$.

ItemMRRTooMChmuZ

(3) En particulier f est infiniment dérivable.

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $|z - z_0| < r < r_0$. La formule de Cauchy (théorème 26.60) nous dit que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \tag{26.224}$$

où $\gamma = \partial B(z_0, r)$. Nous pouvons paramétrer ce chemin par $\omega = z_0 + re^{i\theta}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z} rie^{i\theta} d\theta \tag{26.225a}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{1 - e^{-i\theta}(z - z_0)/r} d\theta. \tag{26.225b}$$

Nous pouvons développer l'intégrante en puissance de $(z - z_0)$ en utilisant la formule 15.511. Ici le rôle de x est tenu par

$$e^{-i\theta}(z - z_0)/r \tag{26.226}$$

dont le module est bien plus petit que 1, par hypothèse sur r. Nous avons donc

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}f(z_0+re^{i\theta})e^{-in\theta}r^{-n}(z-z_0)^n d\theta. \tag{26.227}$$

L'art est maintenant de permuter la somme et l'intégrale. Pour cela nous remarquons que ce qui se trouve dans la somme est majoré en module par

$$M\left|\frac{z-z_0}{r}\right|^n \tag{26.228}$$

où M est le maximum de $|f|$ sur γ. La borne (26.228) ne dépend pas de θ ; par conséquent la convergence de la somme est uniforme en θ par le critère de Weierstrass (théorème 12.396). Le théorème 15.1 s'applique[32] et nous pouvons permuter la somme avec l'intégrale.

Ce que nous trouvons est que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{26.229}$$

où

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})e^{-in\theta}r^{-n}d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}}. \tag{26.230}$$

Cette formule est valable pour $|z-z_0|<r$. Sur cette boule, la fonction est donc une série entière. La proposition 15.207 nous permet donc d'affirmer que f est partout infiniment continument dérivable (parce que en chaque point on a un voisinage sur lequel c'est vrai), et d'identifier les coefficients (qui, eux, ne sont valables que localement) sous la forme

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{26.231}$$

□

Corolaire 26.62.
Soit une application $f\colon B_{\mathbb{C}}(0,R)\to\mathbb{C}$ ainsi que des (a_n) dans $\mathbb{C}$ tels que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{26.232}$$

pour tout $z\in B(0,r)$.

Alors $a_0=f(0)$ et $a_1=f'(0)$.

Démonstration. En posant $z=0$ à droite dans (26.232) nous trouvons tout de suite $f(0)=a_0$. En ce qui concerne a_1, nous passons par la proposition 15.207[33] nous dit que sur $B(0,r)$, l'application f est de classe C^∞ et que

$$df_z(u)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}u. \tag{26.233}$$

Notez que dans le théorème 15.206, il est dit $\alpha_n(x-x_0)^{n-1}$ qui est l'application linéaire qui à $u\in\mathbb{C}$ fait correspondre $\alpha_n(x-x_0,\dots,x-x_0,u)$. Dans notre cas, ce qui joue le rôle de α_n est l'application $(z_1,\dots,z_n)\mapsto a_nz_1,\dots,z_n$.

Ce qui nous dit la relation (12.911), c'est que, si f est différentiable[34], le lien entre dérivée et différentielle est que la différentielle est l'application qui consiste à multiplier par la dérivée. Bref, nous avons

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}. \tag{26.234}$$

En posant $z=0$ nous trouvons bien $f'(0)=a_1$. □

Corolaire 26.63.
Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω telle que pour toute boule $B(a,r)$ contenue dans Ω, nous ayons

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)}\frac{f(\xi)}{\xi-a}d\xi. \tag{26.235}$$

Alors f est holomorphe.

[32] Étant donné que nous savions déjà que la somme était une fonction intégrable, nous sommes loin d'avoir utilisé toute la puissance du théorème.

[33] Qui infiniment plus général que ce dont nous avons besoin, mais qui fait quand même bien le boulot.

[34] C'est le cas de notre f, comme nous venons de le dire.

Démonstration. Il suffit de recopier la démonstration du théorème 26.61 pour savoir que f se développe en série de puissances et est donc en particulier dérivable. □

Le fait qu'une fonction holomorphe soit C^∞ comme dit dans la proposition 26.61 permet de démonter un résultat de dérivation sous l'intégrale, qui dépend de pouvoir majorer la différentielle.

PROPooZCLYooUaSMWA

Proposition 26.64.
Soit une fonction continue $g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Nous supposons que pour tout t, la fonction $z\mapsto g(t,z)$ est $\mathbb{C}$-dérivable (définition 12.330) et différentiable. Soit B compact dans $\mathbb{R}$ et la fonction

$$G(z)=\int_B g(t,z)dt. \tag{26.236}$$

que nous supposons exister pour tout z.

Alors

$$G'(z)=\int_B g'(t,z)dt \tag{26.237}$$

où le prime réfère à la $\mathbb{C}$-dérivée par rapport à la variable z à t fixé.

Démonstration. Nous fixons $z\in\mathbb{C}$ et nous considérons la suite de fonctions

$$g_i(t)=\frac{g(t,z+\epsilon_i)-g(t,z)}{\epsilon_i} \tag{26.238}$$

où ϵ_i est une suite de nombres complexes tendant vers zéro ($\epsilon_i\xrightarrow{\mathbb{C}}0$). Si la limite existe et ne dépend pas de la suite choisie, alors $\lim_{i\to\infty}g_i(t)=g'(t,z)$. Et vu que g est supposée dérivable, c'est le cas.

Nous avons aussi, par linéarité de l'intégrale :

$$G'(z)=\lim_{i\to\infty}\int_B g_i(t)dt. \tag{26.239}$$

La difficulté est de permuter la limite et l'intégrale. Pour cela nous allons utiliser la convergence dominée de Lebesgue (théorème 14.207). Afin de majorer $|g_i(t)|$ par une fonction intégrable en t (uniformément en i), nous exploitons le théorème des accroissements finis, théorème 10.337. En notant dg la différentielle de g par rapport à z à t fixé, pour chaque t et chaque i nous avons

$$|g(t,z+\epsilon_i)-g(t,z)|\leqslant\sup_{\xi\in[z,z+\epsilon_i]}\|dg_\xi\|\|\epsilon_i\|. \tag{26.240}$$

Vu que z est fixé et que ξ est dans le compact $[z,z+\epsilon_i]$ et que dg est continue (parce que la $\mathbb{C}$-dérivabilité implique la continuité de la différentielle parce que nous avons l'analycité par le théorème 26.61), nous pouvons majorer $\|dg_\xi\|$ par une constante $M_i(z)$ qui dépend à priori de i et de z.

Heureusement, nous pouvons prendre a fortiori le supremum sur $\overline{B(z,|\epsilon_i|)}$ (qui est tout autant compact) et supposer que $|\epsilon_i|$ est strictement décroissante ; de toutes façons, il y a un maximum parce que $|\epsilon_i|\to0$. Dans ce cas, il suffit de prendre le supremum de $\|dg_\xi\|$ pour $\xi\in\overline{B(z,|\epsilon_1|)}$ et ça contente tout le monde.

Quoi qu'il en soit nous avons une constante $M(z)$ telle que

$$|g(t,z+\epsilon_i)-g(t,z)|\leqslant M(z)\|\epsilon_i\| \tag{26.241}$$

et donc $|g_i(t)|\leqslant M(z)$. La constante (par rapport à t) $M(z)$ est évidemment intégrable sur le compact B et nous pouvons permuter la limite avec l'intégrale :

$$G'(z)=\lim_{i\to\infty}\int_B g_i(t)dt=\int_B\lim_{i\to\infty}g_i(t)dt=\int_B g'(t,z)dt. \tag{26.242}$$

□

PropZOkfmO

Proposition 26.65.
Une fonction continue f est holomorphe si et seulement si la 1-forme différentielle $f(z)dz$ est localement exacte.

Démonstration. Si f est holomorphe, alors nous avons vu que f était différentiable et que $df_z=f(z)dz$ par la formule 12.923.

Dans le sens inverse, supposons que $f(z)dz$ est localement exacte, et soit F telle que $dF=f(z)dz$. Ce que nous allons faire est montrer que la dérivée de F existe et vaut f. En effet, la définition de la différentielle nous dit que

$$\lim_{h\to0}\left|\frac{F(z+h)-F(z)-dF_z(h)}{h}\right|=0. \tag{26.243}$$

La limite vaut évidemment encore zéro si nous enlevons les modules :

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z) - f(z)h}{h} \tag{26.244a}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z). \tag{26.244b}$$

Donc $F' = f$. Cela montre que F est $\mathbb{C}$-dérivable et donc holomorphe. En conséquence du théorème 26.61, la fonction F est infiniment dérivable et f l'est alors aussi. La fonction f est donc holomorphe[35]. □

26.2.11 Théorème de Brouwer en dimension 2

Pour d'autres versions du théorème de Brouwer, voir la sous-section 20.5.1.

ThoLVViheK

Théorème 26.66 (Brouwer en dimension 2[128])**.**
Soit $\mathcal{B} = \overline{B(0,1)}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$. Alors toute application continue de $\mathcal{B}$ dans elle-même admet un point fixe.

Démonstration. Supposons que la fonction $f \in C^0(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ n'admette pas de points fixes sur $\mathcal{B} = \overline{B(0,1)}$. Pour $x \in \mathcal{B}$ nous notons $g(x)$ l'intersection entre $\partial\mathcal{B}$ et la demi-droite allant de $f(x)$ vers x. C'est bien parce que f n'a pas de points fixes que g est bien définie.

En reprenant le même début de la preuve de la proposition 20.30 nous savons que la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \overline{B(0,1)} &\to \partial B(0,1) \\ x &\mapsto \lambda(x)\big(x - f(x)\big) + f(x) \end{aligned} \tag{26.245}$$

est continue. De plus $g(x) = x$ sur $\partial B(0,1)$. Nous allons montrer qu'une telle fonction[36] ne peut pas exister.

Pour $s \in [0,1]$ nous paramétrons le cercle $\partial B(0,s)$ par

$$\begin{aligned} x_s\colon [0,1] &\to \partial B(0,s) \\ t &\mapsto \big(s\cos(2\pi t), s\sin(2\pi t)\big). \end{aligned} \tag{26.246}$$

Ensuite nous considérons les chemins

$$\begin{aligned} \gamma_s\colon [0,1] &\to \partial B(0,1) \\ t &\mapsto g \circ x_s(t). \end{aligned} \tag{26.247}$$

L'application γ_s est continue et $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$. Les chemins γ_s sont des lacets ; nous nous intéressons maintenant à l'indice au point 0 de γ_0 et γ_1. D'une part $\gamma_0(t) = g(0)$ (lacet constant) et $\gamma_1(t) = e^{2i\pi t}$ (parce que $g(x) = x$ sur le bord). Nous avons donc, en utilisant l'indice de la définition 26.51,

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)}dt = 0, \tag{26.248}$$

alors que

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{2i\pi e^{2i\pi t}}{e^{2i\pi t}}dt = 1. \tag{26.249}$$

Nous considérons l'homotopie

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1]\times[0,1] &\to \overline{B(0,1)} \\ (s,t) &\mapsto \gamma_s(t) = (g\circ x_s)(t). \end{aligned} \tag{26.250}$$

Nous avons $g(0) \neq 0$ parce que g prend ses valeurs sur le bord. Vu que c'est une équivalence d'homotopie[37] entre γ_1 et γ_2, les indices devraient être égaux par le corolaire 26.19. □

[35] Dire que la dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe est un raisonnement classique.
[36] Qui est nommée *rétraction* de la sphère sur elle-même.
[37] Définition 26.54

26.2.12 Principe des zéros isolés

LEMooYYZQooClmOgG

Lemme 26.67.
Si f est une fonction holomorphe[38] sur le compact K, alors il existe un polynôme P_f et une fonction holomorphe h_f ne s'annulant pas sur K telles que $f = h_f P_f$.

Démonstration. Soit une fonction f vérifiant les conditions. Si f est identiquement nulle, alors il suffit de prendre $P_f = 0$ et c'est fait. Nous supposons donc que f n'est pas identiquement nulle.

(1) **Quantité finie de racines**

D'abord f ne peut s'annuler qu'un nombre fini de fois sur K. Sinon, on pourrait considérer une suite des racines[39] de f dans K. Vu qu'une suite dans un compact contient une sous-suite convergente (théorème 7.194), la fonction f aurait un point d'accumulation de racines. Alors le principe des zéros isolés (théorème 17.136) nous donne un ouvert sur lequel f est nulle et donc le corolaire 17.137 nous dit que f est identiquement nulle.

(2) **Autour d'une racine**

Bref, la fonction f possède un nombre fini de racines sur K. Soit z_0 l'une d'elles.

Par le théorème 26.61(1), nous avons, sur un voisinage de z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{26.251}$$

En particulier, $0 = f(z_0) = a_0$. Donc $a_0 = 0$. Soit k, le plus petit naturel pour lequel $a_k \neq 0$. Nous avons

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \tag{26.252}$$

avec $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^n$.. Vu que $a_k \neq 0$ nous avons $g(z_0) \neq 0$. Montrons à présent que g est holomorphe sur un voisinage de z_0. Vu que la série définissant g est une sous-série d'une série convergente sur un voisinage, elle converge sur un voisinage et la proposition 26.12 nous dit que g est $\mathbb{C}$-dérivable. C'est-à-dire holomorphe par définition.

(3) **Autour de toutes les racines**

Soient (z_i) les racines (en nombre fini). Pour chaque i nous avons une boule $B(z_i, r_i)$ sur laquelle $f = P_i g_i$ où P_i est un polynôme de la forme $(z - z_i)^k$ et g_i est holomorphe sur $B(z_i, r_i)$. Nous définissons la fonction suivante :

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{\prod_k P_k(z)} & \text{si } z \neq z_i \\ \frac{g_i}{\prod_{k \neq i} P_k(z)} & \text{si } z = z_i. \end{cases} \tag{26.253}$$

Cette fonction ne s'annule jamais. Mais est-elle holomorphe ?

Si $z \neq z_i$ (sous-entendu : pour tout i), alors sur un voisinage, $h = f / \prod P_k$ qui est un quotient de fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc holomorphe sur ce voisinage par le lemme 12.339.

Pour les autres notons que pour tout $z \in B(z_i, r_i)$,

$$h = \frac{g_i}{\prod_{k \neq i} P_k}. \tag{26.254}$$

Cela est encore un quotient dont le dénominateur ne s'annule pas[40].

(4) **La réponse**

Nous avons, pour tout $z \in K$:

$$f(z) = h(z) \prod_k P_k(z). \tag{26.255}$$

□

[38] Définition 12.332.
[39] Notez l'utilisation de la proposition 1.204 que je vous invite à ne pas considérer comme une trivialité absolue.
[40] Nous avons choisi les r_i de telle sorte que les boules ne s'intersectent pas.

Afin de détendre l'atmosphère, nous allons laisser tomber l'analyse quelques instants et prouver un résultat d'algèbre.

PROPooVWRPooGQMenV

Proposition 26.68 ([1, 704]).
L'anneau des fonctions holomorphes sur un compact[41] *donné de* $\mathbb{C}$ *est principal*[42].

Démonstration. Nous nommons A l'ensemble des fonctions holomorphes sur le compact K, et J un idéal de A.

(1) **A est un anneau**

Le point délicat de la définition 1.92 est le fait que la somme et le produit d'éléments de A sont des éléments de A parce que les résultats type « la somme de deux fonctions holomorphes est holomorphes sont valides sur des ouverts alors que nous sommes ici sur un compact. Soient f et g dans A ; nous nommons Ω_f et Ω_g des ouverts contenant K tels que f est holomorphe sur Ω_f et g sur Ω_g.

L'ensemble $\Omega_f \cap \Omega_g$ est un ouvert (intersection d'ouverts) contenant K et sur lequel f et g sont holomorphes. Donc $f+g$ et fg y sont holomorphes.

(2) **Engendré par des polynômes**

Pour chaque $f \in J$ nous écrivons $f = P_f h_f$ en vertu de la décomposition donnée par le lemme 26.67. Vu que h_f ne s'annule pas, $1/h_f$ est encore holomorphe sur K et nous déduisons que $P_f = f/h_f$ est dans J. La partie

$$S = \{P_f \text{ tel que } f \in J\} \tag{26.256}$$

est génératrice de J parce que, par construction, tous les éléments de J sont des produits d'éléments de S par des fonctions holomorphes sur K (donc, des éléments de A). Mais tous les éléments de S sont dans J, donc $(S) = J$.

(3) **Un polynôme pour tous les engendrer**

Soit M, l'idéal de $\mathbb{C}[X]$ engendré par S. Attention : J est l'idéal de A engendré par S. Mais l'idéal de $\mathbb{C}[X]$ engendré par S est peut-être autre chose. Vu que $\mathbb{C}$ est un corps, le lemme 3.98 dit que $\mathbb{C}[X]$ est principal. Donc M est un idéal principal de $\mathbb{C}[X]$ et nous avons un polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$M = \mathbb{C}[X]p. \tag{26.257}$$

Si vous avez compris le chausse trappe, vous saurez pourquoi il faut écrire $M = \mathbb{C}[X]p$ et non utiliser l'écriture plus simple « $M = (p)$ ».

(4) $A\mathbb{C}[X] = A$

L'inclusion $A \subset A\mathbb{C}[X]$ est dûe au fait que $1 \in \mathbb{C}[X]$, et l'autre inclusion est le fait que $\mathbb{C}[X] \subset A$ alors que A est un anneau.

(5) **Suite des opérations**

Nous avons :

$$J = AS \subset A\mathbb{C}[X]p. \tag{26.258}$$

Voilà une inclusion de montrée. Reste à faire l'autre.

Vu que $p \in J$ nous avons aussi $Ap \subset J$. Et donc

$$A\mathbb{C}[X]p = Ap \subset J. \tag{26.259}$$

Avec ces deux inclusions, $J = A\mathbb{C}[X]p = Ap$. Donc J est engendré par un seul élément et est principal.

□

[41] Être holomorphe sur un compact signifie qu'il existe une extension holomorphe à un ouvert contenant le compact.
[42] Définition 1.349

26.2.13 Prolongement de fonctions holomorphes

PropDRnYkKP

Proposition 26.69.
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$ ($a \in \Omega$). Nous supposons qu'il existe $r > 0$ tel que f est bornée sur $B(a,r) \cap \Omega$. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.

Le théorème de prolongement de Riemann 26.91 donnera plus d'informations.

Démonstration. Nous définissons la fonction $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a. \end{cases} \tag{26.260}$$

Sur $\Omega \setminus \{a\}$, la fonction g est holomorphe (produit de fonctions holomorphes), et elle est continue en a. Par conséquent elle est holomorphe sur Ω. Nous la développons en série entière sur une boule $B(a,r)$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{26.261}$$

Nous avons $g(a) = c_0 = 0$. Nous posons

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(z-a)^n. \tag{26.262}$$

Si $z \neq a$, alors $\varphi(z) = f(a)$ parce que $\varphi(z) = g(z)/(z-a)$. Mais φ est continue en a, et donc holomorphe en a.

La fonction φ est par conséquent un prolongement holomorphe de f en a. □

26.2.14 Théorème de Runge

Le théorème que nous allons prouver n'est en réalité qu'une partie de ce qui est usuellement appelle le théorème de Runge.

ThoMvMCci

Théorème 26.70 (Théorème de Runge)**.**
Soit K, un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\complement K$ soit connexe. Si $a \in \complement K$ alors la fonction

$$\varphi_a(z) = \frac{1}{z-a} \tag{26.263}$$

est limite uniforme de polynômes sur K.

Démonstration. Nous considérons $P(K)$, l'adhérence des polynômes sur K pour la norme uniforme (sur K). Nous devons montrer que pour tout $a \in \complement K$, la fonction φ_a est dans $P(K)$. Pour cela nous considérons l'ensemble

$$A = \{a \in \complement K \text{ tel que } \varphi_a \in P(K)\} \tag{26.264}$$

et nous allons montrer qu'il est à la fois non vide, ouvert et fermé dans le connexe $\complement K$.

Je répète : nous allons prouver l'ouverture et la fermeture *pour la topologie de* $\complement K$. Nous n'allons pas prouver que A est un ouvert de $\mathbb{C}$. Ce qui sera par conséquent prouvé est que $A = \complement K$.

(1) **Non vide** Soit $R = \sup_{z\in K} |z|$ et $a \in \complement K$ tel que $|a| > R$. Nous avons

$$\varphi_a(z) = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{z}{a}-1} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{a^{k+1}}. \tag{26.265}$$

Ici la convergence de la série et sa limite sont assurées par le fait que $|z/a| < 1$ par choix de R et a. La suite de polynômes

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{a^{k+1}} \tag{26.266}$$

converge uniformément sur $B(0,R)$ et en particulier sur K. Donc $P_n \to \varphi_a$.

(2) **Fermé**

Nous allons montrer que la fermeture de A (dans $\complement K$) est incluse dans A, et donc qu'elle est égale à A et donc que A est fermé. Par le lemme 7.34, la fermeture de A dans $\complement K$ est l'ensemble $\bar{A}\cap\complement K$ où $\bar{A}$ est la fermeture de A au sens usuel.

Bref, soit $a\in\bar{A}\cap\complement K$, et montrons que $\varphi_a\in\overline{P(K)}$. Vu que $P(K)$ est déjà une fermeture, nous aurons en fait $\varphi_a\in P(K)$ et donc $a\in A$, ce qui signifierait que $\bar{A}\cap\complement A=A$ et donc que A est fermé.

Au travail.

Soit $(a_n)\in A$ une suite convergente vers a. Soit aussi $d=d(a,K)$; on a $d>0$ parce que K est compact et a est hors de K alors le complémentaire de K est ouvert. Nous choisissons en plus la suite a_n pour avoir $|a_n-a|<\frac{d}{2}$; au pire on prend la queue de suite. Soit $z\in K$; nous avons

$$|\varphi_{a_n}(z)-\varphi_a(z)|=\left|\frac{1}{z-a_n}-\frac{1}{z-a}\right|=\left|\frac{a_n-a}{(z-a_n)(z-a)}\right|. \tag{26.267}$$

Vu que $a_n\in B(a,\frac{d}{2})$ et que $z\in K$ et $d=d(a,K)$ nous avons $|a_n-z|\geqslant\frac{d}{2}$; et aussi $|a-z|\geqslant\frac{d}{2}$. Nous pouvons donc majorer (26.267) par

$$|\varphi_{a_n}(z)-\varphi_a(z)|\leqslant 2\frac{|a_n-a|}{d^2}. \tag{26.268}$$

Donc nous avons

$$\|\varphi_a-\varphi_{a_n}\|_K\leqslant 2\frac{|a_n-a|}{d^2}\to 0 \tag{26.269}$$

où la norme $\|.\|_K$ est la norme supremum sur K. Donc $a\in\overline{P(K)}=P(K)$ et A est fermé.

(3) **Ouvert** Vu que K est compact, il est fermé et donc $\complement K$ est ouvert. Par conséquent, ainsi que précisé dans l'exemple 7.41, les ouverts de $\complement K$ sont les ouverts de $\mathbb{C}$ contenus dans $\complement K$. Afin de prouver que A est ouvert, nous prenons $a\in A$ et nous cherchons une boule (au sens de $\mathbb{C}$) autour de a qui serait incluse dans A.

Soit donc $h\in\mathbb{C}$ « petit » dans un sens que nous allons préciser plus tard. Encore une fois nous posons $d=d(a,K)$. Nous avons

$$\varphi_{a+h}(z)=\frac{1}{z-a-h}=\frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{h}{z-a}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{(z-a)^{k+1}}. \tag{26.270}$$

Déjà ici nous demandons $h<\sup_{z\in K}|z-a|$. Puisque $|z-a|>d$, nous avons alors

$$|\varphi_{a+h}(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{d^{k+1}}<\infty. \tag{26.271}$$

Cela pour dire que la somme à droite de (26.270) converge bien pourvu que h soit bien petit. Nous pouvons donc poursuivre :

$$\varphi_{a+h}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{(z-a)^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}h^k\varphi_a(z)^{k+1}. \tag{26.272}$$

Nous montrons maintenant que la convergence de la somme (26.272) est en réalité uniforme en z. En effet

$$\left|\varphi_{a+h}(z)-\sum_{k=0}^{N}h^k\varphi_a(z)^{k+1}\right|=\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}h^k\varphi_a(z)^{k+1}\right| \tag{26.273a}$$

$$\leqslant\sum_{k=N+1}^{\infty}|h|^k|\varphi_a(z)|^{k+1}. \tag{26.273b}$$

Étant donné que φ_a est continue sur le compact K, elle y est majorée en module ; on peut même être plus précis :

$$|\varphi_a(z)|=\frac{1}{|z-a|}\leqslant\frac{1}{d}. \tag{26.274}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\left|\varphi_{a+h}(z)-\sum_{k=0}^{N}h^k\varphi_a(z)^{k+1}\right|\leqslant\frac{1}{d}\sum_{k=N+1}^{\infty}\left|\frac{h}{d}\right|^k. \tag{26.275}$$

Étant donné que la somme $\sum_{k=0}^{\infty}|h/d|^k$ converge, la limite $N\to\infty$ est nulle et nous avons

$$\lim_{N\to\infty}\|\varphi_{a+h}-\sum_{k=0}^{N}h^k\varphi_a^{k+1}\|_K=0. \tag{26.276}$$

Pour avoir $\varphi_{a+h}\in P(K)$, il faut encore savoir si les fonctions φ_a^k sont dans $P(K)$ pour tout k. Dans ce cas pour chaque N la somme sera encore dans $P(K)$ et φ_{a+h} sera limite uniforme d'éléments de $P(K)$.

Par hypothèse, $\varphi_a\in P(K)$; soit P_n une suite de polynômes qui converge uniformément vers φ_a. Nous allons montrer qu'alors la suite de polynômes P_n^k converge uniformément vers φ_a^k. Soit n tel que $\|P_n-\varphi_a\|_K\leqslant\epsilon$ et utilisons le produit remarquable

$$a^k-b^k=(a-b)\sum_{i=0}^{k-1}a^ib^{k-1-i} \tag{26.277}$$

pour obtenir

$$|P_n(z)^k-\varphi_a(z)^k|\leqslant|P_n(z)-\varphi_a(z)|\sum_{i=0}^{k-1}|P_n(z)^i\varphi_a(z)^{k-1-i}|. \tag{26.278}$$

Vu que P_n et φ_a sont continues sur le compact K, on peut majorer la somme par une constante M, et il restera

$$|P_n(z)^k-\varphi_a(z)^k|\leqslant M|P_n(z)-\varphi_a(z)|, \tag{26.279}$$

ou encore

$$\|P_n^k-\varphi_a^k\|\leqslant M\epsilon. \tag{26.280}$$

Cela prouve que $\varphi_a^k\in P(K)$ et donc que φ_{a+h} est limite uniforme (sur K) d'éléments de $P(K)$ et donc fait partie de $P(K)$ lui aussi.

Ceci achève de prouver que A est ouvert dans $\complement K$.

(4) **Conclusion**

L'ensemble A est non vide, ouvert et fermé dans $\complement K$, donc il est égal à $\complement K$. Le théorème est ainsi démontré.

□

26.3 Intégrales de fonctions holomorphes

Nous commençons par le lemme technique.

LemNAnweA

Lemme 26.71 ([601]).
Soit f une fonction holomorphe sur $B(z_0,r_0)$. Pour tout $z\in B(z_0,r)$ (avec $r<r_0$) nous avons

$$|f'(z)|\leqslant\frac{r}{\big(r-|z-z_0|\big)^2}\max\big\{f(z_0+re^{i\theta})\big\}_{\theta\in\mathbb{R}}. \tag{26.281}$$

Démonstration. Par translation nous pouvons supposer que $z_0=0$. Étant donné que f est holomorphe, elle admet un développement en séries entières

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{26.282}$$

et nous notons $M = \max\{f(z) \text{ tel que } z \in \overline{B(0,r)}\}$. Nous avons $r^n|a_n| \leqslant M$. Par conséquent

$$|f'(z)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| \tag{26.283a}$$

$$\leqslant \frac{1}{r}\sum r^n |a_n| n \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} \tag{26.283b}$$

$$< \frac{M}{r}\sum n\left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1}. \tag{26.283c}$$

À ce point nous devons utiliser la série de l'exemple 15.164. Nous avons alors

$$|f'(z)| \leqslant \frac{M}{r}\frac{1}{\left(1-\frac{|z|}{r}\right)^2} = \frac{Mr}{(r-|z|)^2}. \tag{26.284}$$

□

26.3.1 Holomorphie sous l'intégrale

26.72.
Notez une grande différence entre les théorèmes 26.73 et 17.19 : la condition (17.76) demande de contrôler l'intégrabilité de la dérivée de f, alors que la condition (26.286) demande de contrôler l'intégrabilité de f elle-même. Oh oui, on voudrait faire de l'analyse, mais ces fonctions holomorphes … tellement déloyal !!
ThopCLOVN

Théorème 26.73 (Holomorphie sous l'intégrale[601])**.**
Soit un espace mesuré (Ω, μ), un ouvert A dans $\mathbb{C}$ et une fonction $f\colon A \times \Omega \to \mathbb{C}$. Nous voulons étudier la fonction

$$F(z) = \int_\Omega f(z,\omega)d\mu(\omega) \tag{26.285}$$

pour tout $z \in A$. Nous supposons que

(1) la fonction $f(.,\omega)$ est holomorphe sur A pour chaque ω.

(2) La fonction $f(z,.)$ est mesurable sur (Ω,μ).

(3) Pour tout compact $K \subset A$, il existe une fonction $g_K\colon \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $|f(z,\omega)| \leqslant g_K(\omega)$ et telle que

$$\int_\Omega g_K(\omega)d\mu(\omega) \tag{26.286}$$

EQooYILMooAlBQof

existe.

Alors la fonction F est holomorphe et

$$F'(z) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(z,\omega)d\mu(\omega). \tag{26.287}$$

Démonstration. Soient $z_0 \in A$ et $r > 0$ tels que $K = \overline{B(z_0,r)} \subset A$. Pour chaque $\omega \in \Omega$ nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f_\omega\colon \overline{B(z_0,r)} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z,\omega). \end{aligned} \tag{26.288}$$

Étant donné que $\overline{B(z_0,r)}$ est compacte, la fonction $|f_\omega|$ est majorée par un nombre que nous notons $f_K(\omega)$ qui est indépendant de z (pour autant que $z \in K$). Nous désignons par $S(z_0,r)$ la frontière de la boule $B(z_0,r)$. Étant donné que la majoration est valable sur $\overline{B(z_0,r)}$, nous avons en particulier

$$|f_\omega(z)| \leqslant f_K(\omega) \tag{26.289}$$

pour tout $z \in S$. En utilisant la lemme 26.71 nous avons

$$|f'_\omega(z)| \leqslant \frac{r}{(r-|z-z_0|)^2}\max\{f(z_0+re^{i\theta})\}_{\theta\in\mathbb{R}} \tag{26.290a}$$

$$\leqslant \frac{rf_K(\omega)}{(r-|z-z_0|)^2}. \tag{26.290b}$$

Cette majoration est valable pour tout $z \in B(z_0, r)$. Si nous supposons de plus que $z \in B(z_0, r/2)$ nous avons

$$|f'(z)| \leqslant \frac{rf_K(\omega)}{\left(r - \frac{r}{2}\right)^2} = \frac{4}{r} f_K(\omega). \tag{26.291}$$

Étant donné que la boule $B(z_0, r/2)$ est convexe, la fonction f_ω est lipschitzienne et pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < r/2$ nous avons

$$\left| \frac{f_\omega(z_0 + h) - f_\omega(z_0)}{h} \right| \leqslant \frac{4f_K(\omega)}{r}. \tag{26.292}$$

Soit maintenant une suite (h_n) qui converge vers 0 dans $\mathbb{C}$. Nous considérons la suite de fonctions correspondantes

$$g_n(\omega) = \frac{f(z_0 + h_n, \omega) - f(z_0, \omega)}{h_n}. \tag{26.293}$$

Cette suite de fonctions vérifie la convergence ponctuelle

$$g_n(\omega) \to \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, \omega). \tag{26.294}$$

De plus g_n est une fonction (de ω) dominée par $\frac{4f_K}{r}$ qui est intégrable. Par conséquent le théorème de la convergence dominée[43] nous indique que

$$\int_\Omega g_n(\omega) d\mu(\omega) \to \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, \omega) d\mu(\omega), \tag{26.295}$$

tandis que

$$F'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(z_0 + h_n) - F(z_0)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(\omega) d\mu(\omega). \tag{26.296}$$

□

26.74.
Dans le corolaire suivant, l'intégrale sur $\partial B(z, r)$ est une intégrale sur un chemin.

CorNxTjEj

Corolaire 26.75.
Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant la fermeture de la boule $B(z_0, r)$, alors pour tout z dans $B(z_0, \rho)$ ($\rho < r$) les dérivées de f s'expriment par la formule suivante :

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi. \tag{26.297}$$

EQooBPIQooNhOTtB

Démonstration. Nous faisons par récurrence.

(1) **Pour la dérivée première** Soit $\rho < r$. Nous utilisons le théorème 26.60 pour écrire

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{26.298}$$

Ensuite nous dérivons sous l'intégrale en appliquant le théorème 26.73 à la fonction

$$\begin{aligned} g\colon B(z_0, \rho) \times \partial B(z_0, r) &\to \mathbb{C} \\ (z, \xi) &\mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z}. \end{aligned} \tag{26.299}$$

Étant donné que f est holomorphe, la fonction g est continue et donc bornée sur tout compact $K \subset A$ par une constante M (qui dépend du compact choisi). D'autre part, nous avons toujours $|\xi - z| > r - \rho$ et donc

$$|g(z, \xi)| \leqslant \frac{M}{r - \rho}. \tag{26.300}$$

La fonction constante $g_K = \frac{M}{r-\rho}$ est évidemment intégrable. Le théorème conclut que f est holomorphe (cela, nous le savions déjà[44]), et

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi. \tag{26.301}$$

[43] Lebesgue, théorème 14.207.

[44] Et cela fournit une preuve alternative à la réciproque du théorème de Cauchy : une fonction continue qui vérifie la formule de Cauchy est holomorphe.

(2) **Les dérivées suivantes** Pour la récurrence[705] nous supposons que

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2i\pi}\int_{\partial B(z_0,r)}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}d\xi, \tag{26.302}$$

et nous tentons de calculer $f^{(k+1)}(z)$. Pour cela nous paramétrons l'intégrale de façon très usuelle :

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})}{(re^{it}-z)}ire^{it}dt. \tag{26.303}$$

Nous permettons de permuter la $\mathbb{C}$-dérivation (par rapport à z) et l'intégrale en vertu de la proposition 26.64 appliquée à la fonction

$$g(t,z)=\frac{f(re^{it})}{(re^{it}-z)^{k+1}}ire^{it}. \tag{26.304}$$

Cela donne

$$f^{(k+1)}(z)=\frac{k!}{2i\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{it})ire^{it}\frac{k+1}{(re^{it}-z)^{k+1}}dt=\frac{(k+1)!}{2i\pi}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+2}}d\xi. \tag{26.305}$$

□

THOooSULFooHTLRPE

Théorème 26.76.
Si f est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $B(z_0,R)$ alors

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{26.306}$$

et cette série converge uniformément sur tout compact.

Démonstration. Sans perte de généralité nous supposons que $z_0=0$. La formule de Cauchy (théorème 26.60) fournit, pour $z\in B(0,R)$,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{1-(z/\xi)}\frac{d\xi}{\xi}. \tag{26.307}$$

En particulier notons que $z\in B(0,R)$ alors que ξ est sur le bord de cette boule ouverte. Donc $|\xi|>|z|$ pour tous les ξ et z qui interviennent. Nous utilisons la série géométrique

$$\frac{1}{1-(z/\xi)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\xi}\right)^n. \tag{26.308}$$

(1) **Permuter une intégrale et une somme** En utilisant la mesure de comptage[45] sur $\mathbb{N}$ (qui est σ-finie), nous pouvons écrire

$$\int_{\partial B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^nf(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi=\int_{\partial B}\left(\int_{\mathbb{N}}g(\xi,n)dm(n)\right)d\xi \tag{26.309}$$

EQooWOLOooFHSrsx

où

$$\begin{aligned}g\colon\partial B\times\mathbb{N}&\to\mathbb{C}\\(\xi,n)&\mapsto\frac{z^nf(\xi)}{\xi^{n+1}}.\end{aligned} \tag{26.310}$$

Nous allons permuter les intégrales en utilisant le théorème de Fubini, selon la procédure décrite en 14.306. Nous commençons par l'intégrale sur $\mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{N}}|g(n,\xi)|=|\frac{f(\xi)}{\xi}|\sum_{n\in\mathbb{N}}|\frac{z}{\xi}|^n=\frac{1}{R}|f(\xi)|\frac{1}{1-|z|/R}. \tag{26.311}$$

EQooLQLOooKiSAKH

Ici nous avons utilisé $|\xi|=R$. Notons que z est fixé depuis longtemps à l'intérieur de la boule de rayon R de telle sorte que $|z/\xi|$ est une constante strictement inférieure à 1.

[45] Définition 14.264.

L'intégrale sur $\xi \in \partial B$ n'a pas à être effectuée explicitement : nous nous contentons de prouver qu'elle est finie. La fonction f est continue sur le compact ∂B. Cela parce que B est une boule fermée dans l'ouvert Ω sur lequel f est continue. Au final l'expression à droite de (26.311) est bornée sur le compact ∂B et son intégrale donne un nombre fini.

Tout ceci pour invoquer le corolaire 14.304 qui nous indique que $g \in L^1(\mathbb{N} \times \partial B)$.

Une fois g intégrable sur l'espace produit $\mathbb{N} \times \partial B$, nous pouvons utiliser Fubini 14.305 pour permuter les intégrales.

Une fois la somme et l'intégrale permutées, nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B} \frac{z^n f(\xi)}{\xi^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \right) z^n. \tag{26.312}$$

EqXSgZGw

Nous devons maintenant montrer que ce qui se trouve dans la grande parenthèse vaut $f^{(n)}(0)/n!$. Cela est immédiat en comparant avec la formule (26.297).

□

ThoRckxes

Proposition 26.77 (Morera [706]).
Soit Ω ouvert dans $\mathbb{C}$ et f continue. Si

$$\int_{\partial T} f = 0 \tag{26.313}$$

pour tout triangle (plein) T contenu dans Ω, alors f est holomorphe sur Ω.

Démonstration. Il est suffisant de prouver que f est holomorphe sur toute boule ouverte $B(a, r)$ incluse dans Ω. Nous posons, pour tout $z \in B(a, r)$,

$$F(z) = \int_{[a,z]} f, \tag{26.314}$$

et nous considérons le chemin triangulaire $a \to z \to z + h \to a$ où $h \in \mathbb{C}$ est choisi assez petit pour que $z + h \in B(a, r)$. L'intégrale sur le triangle étant nulle, nous avons

$$0 = \int_{a \to z} f + \int_{z \to z+h} f + \int_{z+h \to a} f, \tag{26.315}$$

c'est-à-dire

$$F(z + h) - F(z) = \int_{z \to z+h} f. \tag{26.316}$$

En paramétrant le chemin par $z + th$ avec $t \in [0, 1]$, et en tenant compte de la remarque 20.44,

$$F'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} \tag{26.317a}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z + th) h dt, \tag{26.317b}$$

ce qui prouve que F est dérivable et $F' = f$. Par définition (12.331), F est holomorphe, et donc C^∞ par le théorème 26.61. Du coup f est également C^∞ et donc en particulier holomorphe. □

26.3.2 Mesure de Radon

Soit un compact K de $\mathbb{C}$. Le lemme 12.384 nous dit que $\big(C(K), \|.\|_\infty\big)$ est complet. Mais cela n'est pas vraiment utile pour l'instant. Je dis ça juste pour le garder dans un coin de la tête.

DEFooTLRKooGbKkAj

Définition 26.78.
*Une **mesure de Radon** sur un compact K de $\mathbb{C}$ est une forme linéaire continue sur $\big(C(K), \|.\|_\infty\big)$. Si μ est une mesure de Radon, on définit la **transformée de Cauchy** de μ par*

$$\begin{aligned} \hat{\mu} \colon \mathbb{C} \setminus K &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto -\frac{1}{\pi} \mu(f_z) \end{aligned} \tag{26.318}$$

où, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus K$ nous avons défini la fonction f_z par

$$\begin{aligned} f_z \colon K &\to \mathbb{C} \\ \xi &\mapsto \frac{1}{\xi - z}. \end{aligned} \tag{26.319}$$

EQooNHTLooWkIofe

26.79.
Les fonctions f_z sont définies pour $z \in \mathbb{C} \setminus K$, et elles sont définies sur K. Donc il n'y a pas de danger que $\xi = z$ dans le dénominateur de (26.319). De plus si f_z est définie (c'est-à-dire si $z \in \mathbb{C} \setminus K$), alors f_{z+h} est également définie tant que $h \in \mathbb{C}$ n'est pas trop grand parce que $\mathbb{C} \setminus K$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

ThoJVNTzn

Théorème 26.80.
Si μ est une mesure de Radon[46] *sur K alors $\hat{\mu}$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable*[47] *sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ et nous avons*

$$\hat{\mu}^{(n)}(z) = -\frac{n!}{\pi}\mu\left(\frac{1}{(\xi - z)^{n+1}}\right). \tag{26.320}$$

Démonstration. Calculons la dérivée complexe de $\hat{\mu}$. Si la limite existe, nous avons

$$\hat{\mu}'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{\hat{\mu}(z+h) - \hat{\mu}(z)}{h}. \tag{26.321}$$

Nous allons nous concentrer sur ce qui est dans la limite pour montrer qu'elle existe, et pour calculer la valeur. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\mu}(z+h) - \hat{\mu}(z)}{h} &= -\frac{1}{\pi}\frac{\mu(f_{z+h}) - \mu(f_z)}{h} && \text{(26.322a)}\\
&= -\frac{1}{\pi}\mu\left(\frac{f_{z+h} - f_z}{h}\right) && \mu \text{ est linéaire} \quad \text{(26.322b)}\\
&= -\frac{1}{\pi}\mu\left(\frac{1}{(\xi - z - h)(\xi - z)}\right) && \text{(26.322c)}
\end{aligned}$$

où la dernière ligne est un abus de notations pour dire que μ est appliquée à la fonction $\xi \mapsto 1/(\xi - z - h)(\xi - z)$.

Histoire d'éviter de regretables abus de notations, nous introduisons la fonction

$$\begin{aligned}
\phi_{z,h} \colon K &\to \mathbb{C}\\
\xi &\mapsto \frac{1}{(\xi - z - h)(\xi - z)},
\end{aligned} \tag{26.323}$$

ainsi que la famille

$$\begin{aligned}
f_{z,n} \colon K &\to \mathbb{C}\\
\xi &\mapsto \frac{1}{(\xi - z)^n}.
\end{aligned} \tag{26.324}$$

Ce que nous avons montré est que

$$\frac{\hat{\mu}(z+h) - \hat{\mu}(z)}{h} = -\frac{1}{\pi}\mu(\phi_{z,h}). \tag{26.325}$$

De plus nous avons la convergence

$$\phi_{z,h} \overset{\left(C(K),\|.\|_\infty\right)}{\longrightarrow} f_{z,2} \tag{26.326}$$

lorsque $h \to 0$. Vu que μ est continue, nous pouvons permuter la limite avec μ et avoir :

$$\hat{\mu}'(z) = \lim_{h\to 0} \mu(\phi_{z,h}) = -\frac{1}{\pi}\mu(f_{z,2}). \tag{26.327}$$

Cela prouve le résultat pour $n = 1$.

Pour le reste, vous faites une récurrence[48]. □

Cette théorie permet de fournir une démonstration plus technologique du corolaire 26.75.

Lemme 26.81.
Si f est holomorphe sur Ω et si B est une boule fermée dans Ω alors pour tout $z \in \mathrm{Int}(B)$ nous avons

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi}\int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi. \tag{26.328}$$

[46] Définition 26.78.
[47] Définition 12.330.
[48] Je n'ai pas vérifié. Faites-le et écrivez-moi pour me dire si c'est bon.

Démonstration. Appliquer le théorème 26.80 à la mesure de Radon

$$\mu(\phi) = \int_{\partial B} \phi(\xi) d\xi. \tag{26.329}$$

□

Tout ce petit monde à propos de la mesure de Radon permet également de redémontrer que

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \right) = f^{(n)}(0)/n!, \tag{26.330}$$

comme nous l'avons déjà fait autour de l'équation (26.312). Nous utilisons le théorème de Radon 26.80 à la mesure

$$\mu(\phi) = \int_{\partial B} \phi(\xi) d\xi. \tag{26.331}$$

La transformée de Cauchy est

$$\hat{\mu}(z) = -\frac{1}{\pi} \mu \left(\frac{1}{\xi - z} \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{\xi - z} d\xi, \tag{26.332}$$

EqTzkmeL

et le théorème assure que

$$\hat{\mu}^{(n)}(z) = -\frac{n!}{\pi} \mu \left(\frac{1}{(\xi - z)^{n+1}} \right) = -\frac{n!}{\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \tag{26.333}$$

En comparant la formule (26.332) avec la formule de Cauchy nous voyons que $\hat{\mu}(z) = -2if(z)$. Par conséquent

$$f^{(n)}(z) = -\frac{1}{2i} \hat{\mu}^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{1}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \tag{26.334}$$

et

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{1}{\xi^{n+1}} d\xi. \tag{26.335}$$

26.4 Conditions équivalentes à l'holomorphie

Nous nous proposons de lister les conditions que nous avons vues être équivalentes à l'holomorphie.

THOooOGOCooUalFaG

Théorème 26.82.
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Les conditions suivantes sont équivalentes.

ItemOtPcTb

(1) f est holomorphe.

ItemHWRnxx

(2) Pour tout triangle (plein) T contenu dans Ω, $\int_T f = 0$.

ItempBBPVv

(3) f est $\mathbb{C}$-dérivable.

ItemmLhzbB

(4) f est C^∞

ItemCCrSrLj

(5) $\partial_{\bar{z}} f = 0$; ce sont les équations de Cauchy-Riemann.

ItemEvxRSn

(6) La 1-forme différentielle $f(z)dz$ est localement exacte.

ItemVSCHtY

(7) Pour toute boule $B(a, r)$ contenue dans Ω nous avons

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{z - a} dz. \tag{26.336}$$

La fonction f est holomorphe en z_0 si et seulement si il existe un voisinage $B(z_0, r)$ de z_0 et des nombres a_k tels que sur la boule,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{26.337}$$

Dans ce cas, f est holomorphe sur toute la boule.

Démonstration. (1) implique (2) est le lemme de Goursat 26.10. (2) implique (1) est le théorème de Morera 26.77.

(3) est la définition de l'holomorphie, définition 12.331.

(4) implique (1) est un a fortiori sur la définition. (1) implique (4) est contenu dans le théorème de développement en série entière 26.61.

L'équivalence entre (5) et l'holomorphie est le théorème 26.2.

L'équivalence entre (6) et (1) est la proposition 26.65.

L'équivalence entre (1) et (7) est d'une part le théorème 26.61 et d'autre part le corolaire 26.63.

En ce qui concerne la dernière affirmation, si f est holomorphe en z_0, alors le théorème 26.61(1) donne la série. Si au contraire nous avons la série, la proposition 26.12 nous donne le résultat grâce au point (3). □

26.5 Limites, séries et dérivée

PROPooKHBHooAIsbCG

Proposition 26.83 ([707]).
Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Soit une suite (f_n) de fonctions holomorphes sur Ω. Nous supposons que f_n converge uniformément sur tout compact vers une fonction f.

Alors

(1) f est holomorphe.

(2) Pour tout $k \geqslant 1$ nous avons $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformément sur tout compact.

PROPooMIDPooUgSXRp

Proposition 26.84 ([1]).
Soit une suite $(f_n : \Omega \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions holomorphes. Si la série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{26.338}$$

converge uniformément, la fonction f est holomorphe sur ω.

De plus

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z). \tag{26.339}$$

26.6 Singularités, pôles et méromorphe

DEFooKWDUooVPvtpy

Définition 26.85.
*Si f est holomorphe[49] sur un ouvert Ω, alors une **singularité** de f est un point isolé du bord de Ω.*

*(1) La singularité est **effaçable** si la fonction f s'y prolonge en une fonction holomorphe.*

*(2) La singularité a est **isolée** si f est holomorphe sur $B(a,r) \setminus \{a\}$.*

DEFooUIJTooUJPiDG

Définition 26.86 (pôle d'une fonction[1, 708]).
*Soient un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ ainsi que $a \in \Omega$. La fonction $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ a un **pôle d'ordre** n en a si il existe $r > 0$ et une fonction holomorphe $g : B(a,r) \to \mathbb{C}$ telle que*

(1) $g(a) \neq 0$

(2) pour tout $z \in B(a,r) \setminus \{a\}$ nous avons

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}. \tag{26.340}$$

Lemme 26.87.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous notons U_n l'ensemble des racines n^e de l'unité[50] dans $\mathbb{C}$. La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \mathrm{U}_n &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{z^n - 1} \end{aligned} \tag{26.341}$$

est holomorphe et possède un pôle d'ordre 1 en chaque point de U_n.

[49] Définition 12.331.
[50] Voir la définition 19.1 et le lemme 19.2.

Démonstration. Le fait que f soit holomorphe est simplement le fait que sur le domaine, le dénominateur est un bête polynôme qui ne s'annule pas.

Nous énumérons $\mathrm{U}_n = \{\xi_i\}_{i=1,\dots,n}$. Prouvons que ξ_k est un pôle d'ordre 1 de f. La première égalité du lemme 19.20 donne $z^n - 1 = \prod_i (z - \xi_i)$. D'abord nous considérons $r > 0$ tel que $B(\xi_k, r) \cap \mathrm{U}_n = \{\xi_k\}$.

Nous posons

$$\begin{aligned} g_k \colon B(\xi_k, r) \setminus \{\xi_k\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{\prod_{i \neq k}(z - \xi_i)}. \end{aligned} \tag{26.342}$$

Cela est bien une fonction holomorphe et nous avons

$$f(z) = \frac{g_k(z)}{(z - \xi_k)}. \tag{26.343}$$

□

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 26.88
Je ne suis pas certain que la proposition suivante soit vraie. Écrivez-moi si vous avez un avis.
PROPooKXXSooGzbmeo

Proposition 26.89.
La fonction

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases} \tag{26.344}$$

est continue sur un voisinage de zéro dans $\mathbb{C}$.
PROPooQJDCooYwmkRS

Proposition 26.90.
Une singularité de f est un pôle si et seulement si

$$\lim_{z \to Z} f(z) = \infty. \tag{26.345}$$

Le théorème suivant complète la proposition 26.69.
ThoTLQOEwW

Théorème 26.91 (Prolongement de Riemann[709])**.**
Soient un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, un point $a \in \Omega$ et une fonction holomorphe $f \colon \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$. Nous supposons que a est une singularité[51] *de f. Les points suivants sont équivalents.*
ITEMooMLXJooMfuifN

(1) la singularité a est effaçable[52] *;*
ITEMooBWPEooEltHAa

(2) f possède un prolongement continu en a ;
ITEMooEAUOooIWcxHS

(3) il existe un voisinage épointé de a sur lequel f est bornée ;
ITEMooETRWooDTTpxs

(4) $\lim_{z \to a}(z - a)f(z) = 0$.

Démonstration. En plusieurs implications.

(1) **(1) implique (2)** La fonction f admet même un prolongement holomorphe.

(2) **(2) implique (3)** Soit un prolongement continu $\tilde{f} \colon B(a, r) \to \mathbb{C}$ de f. La restriction $\tilde{f} \colon \overline{B(a, r/2)} \to \mathbb{C}$ est continue sur un compact et donc bornée[53] tout en étant égale à f sur $B(a, r/2) \setminus \{a\}$.

(3) **(3) implique (4)** Nous supposons que $f \colon B(a, r) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ est bornée. Disons $|f(z)| < A$. Alors pour tout $z \in B(a, r) \setminus \{a\}$ nous avons

$$|(z - a)f(z)| \leqslant A|z - a| \tag{26.346}$$

Or $\lim_{z \to a} A(z - a)$ existe et vaut zéro. Donc $\lim_{z \to a} |(z - a)f(z)|$ existe et vaut également zéro.

[51] Singularité et singularité effaçable : définition 26.85.
[52] Définition 26.85.
[53] Théorème 7.196.

(4) **(4) implique (1) si $a = 0$**

Nous commençons par supposer que $a = 0$, et nous posons $D = B(0, r) \setminus \{0\}$. La fonction $f\colon D \to \mathbb{C}$ est holomorphe et vérifie $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$.

Nous considérons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} g\colon B(0,r) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ z^2 f(z) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{26.347}$$

La fonction g est holomorphe sur D parce que f l'est. Voyons que g est dérivable en zéro. Pour tout z sur un voisinage,

$$\frac{g(z) - g(0)}{z} = \frac{z^2 f(z)}{z} = zf(z). \tag{26.348}$$

Or par hypothèse $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$ donc $g'(0) = 0$, et g est holomorphe en 0 (c'est la définition 12.331 d'une fonction holomorphe). Bref, g est holomorphe sur $B(0, r)$.

Nous pouvons donc développer g en série entière[54] dans un voisinage $B(0, r)$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{26.349}$$

En utilisant le 26.62, $a_0 = g(0) = 0$ et $a_1 = g'(0) = 0$. Donc en réalité

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n. \tag{26.350}$$

Considérons la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{26.351}$$

avec $b_n = a_{n+2}$. Le lemme 15.17 dit que son rayon de convergence est le même que celui de g. Donc la fonction

$$\begin{aligned} h\colon B(0,r) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2} \end{aligned} \tag{26.352}$$

est holomorphe.

Par ailleurs, sur la partie D (qui ne contient pas $z = 0$) nous pouvons écrire

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2} \tag{26.353}$$

et donc

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2}. \tag{26.354}$$

Autrement dit $f = h$ sur D, et h en est un prolongement holomorphe.

(5) **(3) implique (4)**

Nous posons $g(z) = f(z + a)$. Nous avons

$$\lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z\to 0} zf(z + a) = \lim_{z\to a} (z - a)f(z) = 0. \tag{26.355}$$

Le changement de variable dans la limite est le lemme 7.230. Donc le premier cas s'applique à g et nous avons un prolongement holomorphe $\tilde{g}\colon B(0, r) \to \mathbb{C}$ de g. La fonction donnée par $\tilde{f}(z) = \tilde{g}(z - a)$ prolonge f.

□

[54] Théorème 26.61.

DEFooRMLGooGzRfgn

Définition 26.92 (Fonction méromorphe[710]).
*Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\{p_i\}$ une suite de points dans $\mathcal{U}$ sans points d'accumulation (éventuellement il y a un nombre fini de p_i). Si la fonction f est holomorphe sur $\mathcal{U}\setminus\{p_i\}$ et si chaque p_i est un point régulier ou un pôle de f, alors nous disons que f est **méromorphe** sur $\mathcal{U}$.*

LEMooCSAFooTYasYM

Lemme 26.93.
Soient $0<a<b<\infty$. Nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t)=\frac{n}{t}y(t) & (26.356a)\\ y(a)=y_a & (26.356b)\end{cases}$$

pour la fonction $y\colon]a,b[\to\mathbb{R}$.
L'unique solution est

$$y(t)=\frac{y_a}{a^n}t^n. \tag{26.357}$$

EQooKPYIooMHPIRP

Note : $a\neq 0$ de toutes façons, donc pas de problèmes.

Démonstration. En termes du théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39, nous avons $y'(t)=f\big(t,y(t)\big)$ avec

$$\begin{aligned} f\colon]a,b[\times\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ (t,y)&\mapsto\frac{n}{t}y.\end{aligned} \tag{26.358}$$

Cette fonction f est lipschitzienne et tout ce qu'on veut parce que $t=0$ est hors de son domaine ; la régularité de f peut être étudiée sur le compact $[a/2,b]$.

Un calcul direct vérifie que la solution proposée (26.357) est bien une solution. Le théorème de Cauchy-Lipschitz dit qu'elle est unique. □

26.94.
Vous voulez savoir comment on trouve la solution $y(t)=Kt^n$? Allez, on vous la fait un peu détendue, sans trop regarder les détails. D'abord,

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{n}{t}. \tag{26.359}$$

Nous intégrons des deux côtés :

$$\int_a^x\frac{y'(t)}{y(t)}dt=n[\ln(t)]_a^x. \tag{26.360}$$

EQooWCQRooKqifVj

À gauche nous posons $u(t)=\ln\big(y(t)\big)$ et nous avons

$$\int_a^x\frac{y'(t)}{y(t)}dt=\int_a^x u'(t)dt=[u(t)]_a^x=\ln\big(y(x)\big)-\ln\big(y(a)\big). \tag{26.361}$$

Nous mettons ça à la place du membre de gauche de (26.360), nous mettons toutes les constantes dans un L (en ne nous posant aucune question sur le fait que ce soit positif, nul, que ça peut rentrer dans un logarithme ou non) et :

$$\ln\big(y(x)\big)=n\ln(x)+L=\ln\big(Kx^n\big). \tag{26.362}$$

où $K=e^L$. Et voila.

LEMooCESMooJRqFvG

Lemme 26.95 ([1]).
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Si $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ est méromorphe sur tout compact de Ω, alors f est méromorphe sur Ω.

Démonstration. Soit $z_0\in\Omega$. En prenant une suite exhaustive[55] de compacts pour $\mathbb{C}$ et en prenant les intersections avec Ω, il existe un compact K tel que $z_0\in\mathrm{Int}(K)\subset\Omega$. Vu que f est méromorphe sur K, le point z_0 n'est pas un point d'accumulation des pôles de f. Cela étant valable pour tout $z_0\in\Omega$, nous en déduisons que f n'a pas de points d'accumulation de pôles. Donc f est méromorphe. □

PropPUZTQKl

Proposition 26.96 ([238]).
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$ une suite de fonctions méromorphes telles que pour tout compact K de Ω il existe $N_K\geqslant 0$ tel que

[55] Lemme 7.359.

(1) f_n *n'a pas de pôle*[56] *dans* K *dès que* $n \geqslant N_K$ *;*

(2) la série $\sum_{n\geqslant N_K} f_n$ *converge uniformément sur* K*.*

Alors

ITEMooZKACooLKHmaj

(1) La fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{26.363}$$

est méromorphe[57] *sur* Ω *et ses pôles sont dans l'union de ceux des* f_n*.*

ITEMooRRCWooHXgpoc

(2) Nous pouvons permuter la somme et la dérivée :

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z) \tag{26.364}$$

pour tout z *en dehors des pôles.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soit un compact K dans Ω. Les applications $(f_n)_{n\geqslant N_K}$ sont holomorphes sur K. Donc l'application

$$g_K(z) = \sum_{n\geqslant N_K} f_n(z) \tag{26.365}$$

est holomorphe comme limite uniforme de fonctions holomorphes (proposition 26.84).

La somme finie

$$h_K(z) = \sum_{n=0}^{N_K-1} f_n(z) \tag{26.366}$$

est méromorphe. Donc la somme

$$f(z) = h_K(z) + g_K(z) \tag{26.367}$$

est méromorphe sur K et ses pôles sont parmi les pôles des $(f_n)_{n\leqslant N_K}$. Elle est donc méromorphe sur Ω par le lemme 26.95.

(2) **Pour (2)** Nous notons P l'ensemble de tous les pôles des f_n. C'est un ensemble sans point d'accumulation. Donc $\Omega \setminus P$ est encore un ouvert. Soit un compact K dans $\Omega \setminus P$. La fonction

$$\begin{aligned} g\colon K &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n\geqslant N_K} f_n(z) \end{aligned} \tag{26.368}$$

est holomorphe comme précédemment. Par la proposition 26.84, elle vérifie

$$g'(z) = \sum_{n\geqslant N_K} f_n'(z). \tag{26.369}$$

En tant que somme finie, la fonction $h(z) = \sum_{n=0}^{N_K-1} f_n$ est également holomorphe sur K. Au final la série complète $f(z) = g(z) + h(z)$ est holomorphe sur K et peut être dérivée terme à terme :

EQooFYIBooSzXGVj

$$f'(z) = g'(z) + h'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z). \tag{26.370}$$

Le tout étant valable pour tout compact dans l'ouvert $\Omega \setminus P$, la fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus P$ et la formule (26.370) est valable sur $\Omega \setminus P$.

□

[56] Définition 26.86.
[57] Définition 26.92.

26.7 Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne

Le théorème 26.102 peut être vu soit comme un dénombrement de solutions d'une certaine équation diophantienne, soit comme partition d'un entier en parts fixées. Avant de nous lancer dans sa démonstration, nous prouvons un certain nombre de lemmes qui vont traiter des aspects combinatoires de la preuve.

Soit $n, N \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{N}^N$. Nous considérons les ensembles suivants :

$$V_n(N) = \{x \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } \sum_{i=1}^{N} x_i = n\}, \tag{26.371a}$$

$$W_n(a, N) = \{y \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } y \cdot a = n\}, \tag{26.371b}$$

$$V_n(N)_a = \{x \in V_n(N) \text{ tel que } a_i \mid x_i \, \forall i = 1, \dots, N\}. \tag{26.371c}$$

L'ensemble $V_n(N)$ avait déjà été rencontré en (15.67).

LEMooLKCAooCeDnSj

Lemme 26.97.
L'application

$$\begin{aligned} \psi \colon W_n(a, N) &\to V_n(N)_a \\ (y_1, \dots, y_N) &\mapsto (y_1 a_1, \dots, y_N a_N) \end{aligned} \tag{26.372}$$

(1) est bien définie, c'est-à-dire qu'elle prend effectivement ses valeurs dans $V_n(N)_a$,

(2) est une bijection.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Bien définie** Soit $y \in W_n(a, N)$. Nous avons $\psi(y)_i = a_i y_i$. Le nombre a_i divise donc bien $\psi(y)_i$ et $\sum_{i=1}^{N} \psi(y)_i = n$.

(2) **Injective** Si $\psi(y) = \psi(y')$, alors pour tout i nous avons $y_i a_i = y'_i a_i$, et donc $y_i = y'_i$. La fonction ψ est donc bien injective.

(3) **Surjective** Soit $x \in V_n(N)_a$. Vu que $a_i \mid x_i$, il existe $y_i \in \mathbb{N}$ tel que $x_i = a_i y_i$. On vérifie que $y \in W_n(a, N)$ et que $\psi(y) = x$.

□
LEMooOPXHooHzoHrm

Lemme 26.98.
Pour $i = 1, \dots, N$, nous posons

$$\begin{aligned} b_i \colon \mathbb{N}^N &\to \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \mid x_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{26.373}$$

Nous avons

$$\sum_{x \in V_n(N)} \prod_{i=1}^{N} b_i(x) = \operatorname{Card}\big(W_n(a, N)\big). \tag{26.374}$$

Démonstration. Nous décomposons la somme en $V_n(N)_a$ et son complémentaire dans $V_n(N)$:

$$\sum_{x \in V_n(N)} \prod_{i=1}^{N} b_i(x) = \sum_{x \in V_n(N)_a} \prod_{i=1}^{N} b_i(x) + \sum_{x \in V_n(N) \setminus V_n(N)_a} \prod_{i=1}^{N} b_i(x) \tag{26.375a}$$

$$= \sum_{x \in V_n(N)_a} 1 + \sum_{x \in V_n(N) \setminus V_n(N)_a} 0 \tag{26.375b}$$

SUBEQooLMBGooIfxigy

$$= \operatorname{Card}\big(V_n(N)_a\big) \tag{26.375c}$$

$$= \operatorname{Card}\big(W_n(N, a)\big) \tag{26.375d}$$

SUBEQooBBOIooBHDgYF

Justifications :

- Pour (26.375b). Si $x \in V_n(N)_a$, alors $a_i \mid x_i$ pour tout i, et donc $b_i(x) = 1$ pour tout i. Si au contraire $x \in V_n(N) \setminus V_n(N)_a$, il existe un i tel que a_i ne divise pas x_i et donc tel que $b_i(x) = 0$.
- Pour (26.375d). Les deux ensembles sont en bijection par le lemme 26.97.

□
LEMooRJOKooPJGVTr

Lemme 26.99.
Soit $s \geqslant 1$. La série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{ns} \tag{26.376}$$

a un rayon de convergence égal à 1. Pour $z \in B(0,1)$ nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{ns} = \frac{1}{1-z^s}. \tag{26.377}$$
EQooIRAZooKQoZnp

Démonstration. Pour un $z \in \mathbb{C}$ fixé, nous avons $z^{ns} = (z^s)^n$[58]. Nous appelons donc la proposition 10.172 avec $q = z^s$.

Si $|z| < 1$, alors $|z^s| < 1$ et la proposition 10.172 nous dit que la série converge. Si au contraire $|z| > 1$, alors $|z^s| > 1$ et la série diverge.

Le corolaire 15.19 conclut que le rayon de convergence est bien 1.

La valeur (26.377) est également une partie de la proposition 10.172. □
LEMooVMLEooCzPuKy

Lemme 26.100.
Si $a, b \in \mathbb{C}$, si $N \in \mathbb{N}$ et si $p \in \mathbb{N}$ avec $p < N$, nous posons

$$a_n = a\frac{(n+N-1)!}{n!} \tag{26.378}$$

et

$$b_n = b\frac{(n+p-1)!}{n!}. \tag{26.379}$$

Nous avons $a_n \sim a_n + b_n$.

Démonstration. Nous posons $\alpha(n) = (a_n + b_n)/a_n$ et nous prouvons que $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 1$. Pour ce faire,

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}\frac{(n+p-1)!}{n!}\frac{n!}{(n+N-1)!} \tag{26.380a}$$
$$= \frac{b}{a}\frac{(n+p-1)!}{(n+N-1)!} \tag{26.380b}$$
$$= \frac{b}{a}\frac{(n+p-1)!}{(n+p-1)!\prod_{k=n+p}^{n+N-1} k} \tag{26.380c}$$
$$= \frac{b}{a}\prod_{k=n+p}^{n+N-1}\frac{1}{k} \tag{26.380d}$$
$$\leqslant \frac{b}{a}\frac{1}{n+p}, \tag{26.380e}$$

et nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 0, \tag{26.381}$$

de telle sorte que $\lim_{n\to\infty}\alpha(n) = 1$. □
LEMooTGHHooZHZsgE

Lemme 26.101.
Si $N \in \mathbb{N}$, nous avons équivalence des suites

$$\frac{(n+N-1)!}{n!} \sim n^{N-1}. \tag{26.382}$$

Démonstration. Sachez que dans $\prod_{i=a}^{b}$, il y a $b-a+1$ facteurs, et non $b-a$ comme on pourrait naïvement

[58] Vu qu'ici n et s sont entiers, c'est pas profond ça. Il ne faut pas invoquer la proposition générale 12.432.

le croire. Cela dit, nous avons le calcul

$$\frac{(n+N-1)!}{n!n^{N-1}} = \left(\prod_{k=n+1}^{n+N-1} k\right)\frac{1}{n^{N-1}} \tag{26.383a}$$

$$= \prod_{k=n+1}^{n+N-1}\frac{k}{n} \tag{26.383b}$$

$$= \prod_{k=1}^{N-1}\frac{n+k}{n}. \tag{26.383c}$$

Donc la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+N-1)!}{n!n^{N-1}} = 1. \tag{26.384}$$

□
THOooQDYWooCOiUMb

Théorème 26.102 ([1, 137, 485, 711, 128]).
Soient $N \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}^N$ tel que $\operatorname{pgcd}(a_1,\dots,a_N) = 1$. Nous posons

$$W_n(a,N) = \{y \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } y \cdot a = n\}. \tag{26.385}$$

Nous avons alors[59]

$$\operatorname{Card}\big(W_n(a,N)\big) \sim \frac{1}{\prod_{k=1}^N a_k}\frac{n^{N-1}}{(N-1)!}. \tag{26.386}$$

Démonstration. Pour chaque $i = 1,\dots,N$, nous considérons la série entière

$$s_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{ka_i}. \tag{26.387}$$

dont le rayon de convergence vaut 1 par le lemme 26.99. Nous nous apprêtons à faire le produit de Cauchy multiple de la proposition 15.31 ; nous posons donc

$$b_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i|k \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases} \tag{26.388}$$

et nous écrivons toutes les séries s_i sous la forme

$$s_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{ik}z^k. \tag{26.389}$$

La proposition 15.31 nous assure que si $|z| < 1$, le produit $\prod_{i=1}^N s_i(z)$ peut être écrit sous la forme de la série entière
SUBEQooYESHooChEKGm

$$\prod_{i=1}^N s_i(z) = \sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{x\in V_s(N)}\prod_{i=1}^N b_{ix_i}\right)z^s \tag{26.390a}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{x\in V_s(N)}\prod_{i=1}^N b_i(x)\right)z^s \tag{26.390b}$$
SUBEQooEEHKooPSrpiT

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\operatorname{Card}\big(W_s(a,N)\big)z^s \tag{26.390c}$$
SUBEQooULBCooSTuHvy

Justifications :

- Pour (26.390b). Notation b_i du lemme 26.98.
- Pour (26.390c). Utilisation du lemme 26.98

[59] Équivalence de suites, définition 9.33.

D'autre part, le lemme 26.99 nous permet d'écrire

$$f(z)=\prod_{i=1}^{N}s_i(z)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-z^{a_i}}. \tag{26.391}$$

Notre but sera d'écrire ce produit sous forme de série entière est d'identifier les coefficients avec ceux que l'on trouve dans (26.390c).

(1) $m_\omega=N$ **si et seulement si** $\omega^{a_i}=1$ Nous montrons à présent que ω est un pôle d'ordre N de f si et seulement si $\omega^{a_1}=\dots=\omega^{a_N}=1$.

(1a) **Un polynôme** Nous considérons le polynôme

$$P(X)=\prod_{i=1}^{N}(1-X^{a_i})=(-1)^N\prod_{i=1}^{N}\prod_{\omega\in\mathrm{U}_{a_i}}(X-\omega) \tag{26.392}$$

où, pour la seconde égalité, nous avons utilisé le lemme 19.20. En posant $\mathrm{U}=\bigcup_{i=1}^{N}\mathrm{U}_{a_i}$ nous écrivons encore

$$P(X)=(-1)^N\prod_{\omega\in\mathrm{U}}(X-\omega)^{m_\omega} \tag{26.393}$$

où $m_\omega=\mathrm{Card}\{i \text{ tel que } \omega\in\mathrm{U}_{a_i}\}$. Cela pour dire que, pour $|z|<1$,

$$f(z)=\frac{1}{P(z)}=\frac{(-1)^N}{\prod_{\omega\in\mathrm{U}}(z-\omega)^{m_\omega}}. \tag{26.394}$$

(1b) **Sens $\Rightarrow$** Si ω est un pôle d'ordre N, alors $N=m_\omega=\{i \text{ tel que } \omega\in\mathrm{U}_{a_i}\}$. Donc $\omega\in\mathrm{U}_{a_i}$ pour tout i, c'est-à-dire que $\omega^{a_i}=1$ pour tout i.

(1c) **Sens $\Leftarrow$** Dans l'autre sens, si $\omega^{a_i}=1$ pour tout i, alors $m_\omega=N$ et ω est un pôle d'ordre N.

Nous pouvons continuer.

(2) $m_\omega=N$ **si et seulement si** $\omega=1$ Nous savons que $\omega=1$ est un pôle d'ordre N parce que $1\in\mathrm{U}_{a_i}$ pour tout i. Dans l'autre sens, si ω est d'ordre N, alors nous venons de voir que $\omega^{a_i}=1$ pour tout i.

Vu que les a_i sont premiers entre eux, le théorème de Bézout 3.59 nous donne des entiers u_i tels que $\sum_{i=1}^{N}u_ia_i=1$. Nous avons alors

$$\omega=\omega^{u\cdot a}=\prod_{i=1}^{N}(\omega^{a_i})^{u_i}=1. \tag{26.395}$$

Donc les pôles de f différents de 1 sont d'ordre strictement inférieur à N.

(3) **Décomposition en éléments simples** Décomposons un peu l'expression de $f(z)$ en repartant de (26.392) :

$$\begin{aligned}
f(z)&=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{1-z^{a_i}} && \text{(26.396a)}\\
&=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{-\prod_{\omega\in\mathrm{U}_{a_i}}(z-\omega)} && \text{(26.396b)}\\
&=(-1)^N\prod_{i=1}^{N}\prod_{\omega\in\mathrm{U}_{a_i}}\frac{1}{z-\omega} && \text{(26.396c)}\\
&=(-1)^N\prod_{i=1}^{N}\sum_{\omega\in\mathrm{U}_{a_i}}\frac{\lambda_{\omega,i}}{z-\omega} && \text{(26.396d)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (26.396b). Lemme 19.20 ; vous noterez le signe de différence.
- Pour (26.396d). Lemme 19.15 pour la décomposition en éléments simples.

(4) **Isoler le terme $\omega = 1$** Nous notons $\mathrm{U} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{U}_{a_i}$. Chaque U_{a_i} contient $\omega = 1$. L'expression (26.396d) contient donc un terme en $\frac{1}{(z-1)^N}$. Tous les autres ω de U ne sont présents que dans au maximum $N-1$ des U_{a_i}. Nous avons donc

$$f(z) = \frac{A}{(z-1)^N} + \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{\omega \in \mathrm{U}} \frac{B_{p,\omega}}{(z-\omega)^p} \tag{26.397}$$

avec $B_{p,\omega} \in \mathbb{C}$.

(5) **Une belle lampée de factorielles** Le lemme 15.53(3) permet d'écrire f avec des séries entières :

$$\begin{aligned} f(z) = {} & \frac{A}{(N-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+N-1)!}{s!} z^s \\ & + \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{\omega \in \mathrm{U}} \frac{(-1)^p B_{p,\omega}}{(p-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+p-1)!}{s!} \frac{z^s}{\omega^{s+p+1}} \end{aligned} \tag{26.398}$$

qui est valable pour $z \in B(0,1)$.

(6) **Ce qu'on en fait** Pour rappel, l'équation (26.390) nous dit que

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathrm{Card}\big(W_s(a,N)\big) z^s. \tag{26.399}$$

Nous allons donc identifier le coefficient de z^n dans (26.398) avec $\mathrm{Card}\big(W_n(a,N)\big)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\big(W_n(a,N)\big) = {} & \frac{A}{(N-1)!} \frac{(n+N-1)!}{n!} \\ & + \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{\omega \in \mathrm{U}} \frac{(-1)^p B_{p,\omega}}{(p-1)!} \frac{(n+p-1)!}{n!} \frac{1}{\omega^{n+p+1}}. \end{aligned} \tag{26.400}$$

Voici une belle suite (par rapport à n) dont nous devons étudier le comportement asymptotique.

(7) **Des équivalences** Le lemme 26.100 nous permet de supprimer tous les termes autres que celui qui contient A :

$$\mathrm{Card}\big(W_n(a,N)\big) \sim \frac{A}{(N-1)!} \frac{(n+N-1)!}{n!}. \tag{26.401}$$

Notez que, à gauche, nous avons une suite dans $\mathbb{N}$ et à droite, une suite dans $\mathbb{C}$ (il n'y a pas de raisons à priori que A soit entier ou réel). Cela n'a pas d'importance ; ça n'empêche pas les suites d'être équivalentes.

Le lemme 26.101 donne maintenant

$$\mathrm{Card}\big(W_n(a,N)\big) \sim \frac{A}{(N-1)!} n^{N-1}. \tag{26.402}$$

Cela est déjà très bien parce que ça donne la vitesse de croissance en fonction de N et n. Mais puisque nous sommes perfectionistes, nous allons encore déterminer la valeur de A.

(8) **La valeur de A** Pour déterminer la valeur de A, l'astuce est de considérer la fonction $z \mapsto f(z)(1-z)^N$:

$$f(z)(1-z)^N = (1-z)^N \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-z^{a_i}} \tag{26.403a}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \frac{1-z}{1-z^{a_i}} \tag{26.403b}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1+\ldots+z^{a_i-1}}. \tag{26.403c}$$

Justifications :

- Pour (26.403c). C'est le lemme 3.124(2).

La dernière expression montre qu'il n'y a pas de mal à prendre la limite $z \to 1$; elle vaut

$$\lim_{z\to 1} f(z)(1-z)^N = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i}. \tag{26.404}$$

Mais en partant d'autre part de (26.397), nous avons

$$f(z)(1-z)^N = A + \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{\omega\in \mathrm{U}} \frac{B_{p,\omega}(1-z)^N}{(z-\omega)^p}. \tag{26.405}$$

Vu que $N > p$, la limite $z \to 0$ existe et vaut zéro dans tous les éléments de la somme, y compris les éléments avec $\omega = 1$. Donc

$$\lim_{z\to 1} f(z)(1-z)^N = A. \tag{26.406}$$

Nous savons donc que

$$A = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i}. \tag{26.407}$$ EQooJMALooUrXJZc

En remettant la valeur (26.407) dans l'équivalence (26.402), nous trouvons le résultat demandé. □

Exemple 26.103.
Pour $p = 1$, l'équation est $\alpha x = n$, qui possède au maximum une solution, quel que soit n. Et de plus pour avoir une solution il faut et suffit que α divise n, c'est-à-dire que n soit un multiple de α. Il n'y a que un nombre sur α à être multiple de α. D'où le comportement en $\frac{1}{\alpha}$.

Pour $p = 2$, c'est l'équation (3.53) déjà étudiée. Il y a une famille à un paramètre de solutions dont seulement un certain nombre sont positives. À priori, le nombre de solutions positives croît linéairement en n. △

26.104.
Si vous aimez les séries génératrices. Si vous aimez l'idée de mettre toute l'information d'un problème dans les coefficients d'une série puis de trouver des réponses en les manipulant, vous pouvez regarder *introduction à la théorie analytique des nombres*[712].

Cette vidéo explique comment payer n euros avec des pièces et des billets de valeur données. On pourrait croire que cela est exactement le résultat du théorème 26.102. Il n'en est rien parce que l'hypothèse de pgcd du théorème n'est pas du tout réalisée par les pièces et billets actuellement en circulation.

Du coup, je ne sais pas si ce théorème est intéressant au sens de la définition 0.2.

26.8 Fonctions d'Euler

ThoZJYooWKfbVz

Théorème 26.105 (Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler[128])**.**
Nous considérons la formule

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{26.408}$$

Alors

(1) Cette formule définit une fonction holomorphe sur

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(z) > 0\}. \tag{26.409}$$

(2) La fonction $\Gamma\colon \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ admet un unique prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, lequel a des pôles sur les entiers négatifs.

Démonstration. (1) **Holomorphie sous l'intégrale**

Pour étudier l'holomorphie de la fonction Γ sur $\mathcal{P}$ nous utilisons le théorème 26.73.

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \mathcal{P} \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{C} \\ (z,t) &\mapsto e^{-t} t^{z-1} \end{aligned} \tag{26.410}$$

et nous commençons par montrer que c'est holomorphe en z pour chaque $t > 0$ fixé. Nous le vérifions par le critère de $\partial_{\bar{z}} f = 0$[60] et en nous souvenant que $t^i = e^{\ln(t^i)} = e^{i\ln(t)}$. Nous obtenons rapidement que

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0. \tag{26.411}$$

Le fait que la fonction $t \mapsto g(z,t)$ soit mesurable pour tout z est d'accord.

Et enfin soit K compact dans $\mathcal{P}$. Il faut trouver une fonction $g_K(t)$ intégrable sur $[0,\infty[$ telle que pour tout $z \in K$ et $t \in [0,\infty[$ nous ayons $|g(z,t) \leqslant g_K(t)|$. Pour cela nous majorons séparément les parties $t \in]0,1[$ et $t \geqslant 1$.

Soit donc K compact dans $\mathcal{P}$; nous posons $M = \max_{z\in K} \Re(z)$ et $\epsilon = \min_{z\in K} \Re(z)$.

Si $t \in]0,1[$ alors nous avons

$$e^{-t}t^{z-1} = e^{-t}e^{(z-1)\ln(t)}, \tag{26.412}$$

de telle façon à que que

$$\begin{aligned}
|e^{-t}t^{z-1}| &\leqslant |e^{(x-1+iy)\ln(t)}| && \text{(26.413a)}\\
&= |e^{(\Re(z)-1)\ln(t)}| && \text{(26.413b)}\\
&= |t^{\Re(z)-1}| && \text{(26.413c)}\\
&\leqslant |t^{\epsilon-1}| && \text{(26.413d)}\\
&= \frac{1}{t^{1-\epsilon}}. && \text{(26.413e)}
\end{aligned}$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $]0,1[$.

Nous considérons maintenant $t \geqslant 1$. Dans ce cas nous avons

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{\Re(z)-1} \leqslant e^{-t}t^{M-1}. \tag{26.414}$$

Cette dernière fonction est un produit d'une exponentielle décroissante avec un polynôme. C'est donc intégrable entre 1 et l'infini.

La fonction g_K que nous considérons est donc

$$g_K(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{1-\epsilon}} & \text{si } t < 1 \\ \text{borné} & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant b \\ e^{-t}t^{M-1} & \text{si } t > b. \end{cases} \tag{26.415}$$

Cela est une fonction intégrable sur $]0,\infty[$ et qui majore g uniformément en z sur le compact K de $\mathcal{P}$. Le théorème 26.73 nous permet donc de conclure que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty g(z,t)dt \tag{26.416}$$

est holomorphe en z sur $\mathcal{P}$ et que

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial z}(z,t)dt. \tag{26.417}$$

(2) **En deux morceaux** Nous passons maintenant à la seconde partie du théorème. Pour $z \in \mathcal{P}$ nous coupons l'intégrale en deux :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \tag{26.418}$$

(3) **Première partie** Nous commençons par parler de la première partie : $\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt$ dans laquelle nous voulons utiliser le développement en série de l'exponentielle e^{-t}. Nous devons donc traiter

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1}dt. \tag{26.419}$$

[60] Théorème 26.2.

Nous allons permuter la somme avec l'intégrale à l'aide du théorème de Fubini 14.305 en posant la fonction

$$g(n,t)=\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1} \tag{26.420}$$

et en considérant le produit entre la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ et la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que nous étudions

$$\int_0^1\int_{\mathbb{N}} g(n,t)dndt. \tag{26.421}$$

Pour permuter il suffit de prouver que $|g|$ est intégrable pour la mesure produit, c'est-à-dire que

$$\int_0^1\int_{\mathbb{N}}\left|\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1}\right|<\infty. \tag{26.422}$$

Nous avons $|t^z|=t^{\Re(z)}$, donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{t^{n+z-1}}{n!}\right|=t^{\Re(z)-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=t^{\Re(z)-1}e^t. \tag{26.423}$$

Étant donné que nous avons fixé $z\in\mathcal{P}$, nous avons $\Re(z)-1>-1$ et donc $t^{\Re(z)-1}$ est intégrable entre 0 et 1 (proposition 14.301). La partie e^t se majore sur $[0,1]$ par une constante quelconque. Nous avons donc payé le droit d'inverser la somme et l'intégrale :

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}[t^{n+z}]_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}. \tag{26.424}$$

Nous avons donc l'intéressante formule suivante, valable pour tout $z\in\mathcal{P}$:

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}+\int_1^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{26.425}$$

(4) **Prolongation de la première partie** Nous voudrions montrer maintenant que la fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-z)} \tag{26.426}$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles en les entiers négatifs. Pour cela nous considérons la suite de fonctions

$$f_n(z)=\frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \tag{26.427}$$

et nous allons utiliser la proposition 26.96. Si $n\geqslant 0$, la fonction f_n est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $z=-n$. Soit K compact de $\mathbb{C}$ et N_K tel que $K\subset\overline{B(0,N_K)}$. Pour $n\geqslant N_K+1$, la fonction f_n n'a pas de pôle dans K et de plus pour tout $z\in K$ nous avons

$$|z+n|=|z-(-n)|\geqslant\big|n-|z|\big|\geqslant n-|z|\geqslant n-N_K, \tag{26.428}$$

et par conséquent

$$|f_n(z)|\leqslant\frac{1}{n!(n-N)}, \tag{26.429}$$

ou pour le dire de façon plus snob :

$$\|f_n\|_{\infty,K}\leqslant\frac{1}{n!(n-N)}, \tag{26.430}$$

dont la série converge. Cela signifie que la série $\sum_{n\geqslant N}f_n$ converge normalement[61] sur K, donc la fonction

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z) \tag{26.431}$$

est une fonction méromorphe dont les pôles sont ceux des f_n, c'est-à-dire les entiers négatifs (proposition 26.96).

[61] Définition 10.119.

(5) **La seconde partie**

Nous allons à présent prouver que la fonction

$$h(z) = \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \tag{26.432}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour cela nous considérons la fonction de deux variables $f(z,t) = e^{-t}t^{z-1}$ et nous utilisons le théorème d'holomorphie sous l'intégrale 26.73. D'abord pour z_0 fixé dans $\mathbb{C}$ nous avons

$$\int_1^\infty |e^{-t}t^{z_0-1}| \leqslant \int_1^\infty e^{-t}t^{\Re(z_0)-1}dt, \tag{26.433}$$

donc l'intégrale converge parce que c'est polynôme contre exponentielle. Par ailleurs pour chaque t_0 fixé sur $[0,\infty[$, la fonction $z \mapsto e^{-t_0}t_0^{z-1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ comme en témoigne le calcul suivant :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)t_0^{x+iy-1} = 0. \tag{26.434}$$

Et enfin si K est compact dans $\mathbb{C}$ nous avons

$$|f(z,t)| = |e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}|t^{\Re(z)-1}| \leqslant e^{-t}t^{M-1} \tag{26.435}$$

où $M = \max_{z\in K}\Re(z)$. Nous en déduisons que la fonction

$$z \mapsto \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \tag{26.436}$$

est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(6) **Conclusion**

Au final nous avons prouvé que la fonction Γ d'Euler admet le prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ donné par

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{26.437}$$

□

26.8.1 Euler et factorielle

Proposition 26.106.
Nous avons la formule $\Gamma(n) = (n-1)!$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Nous partons de la formule

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt \tag{26.438}$$

que nous intégrons par partie en posant

$$\begin{aligned} u &= t^{n-1} & u' &= (n-1)t^{n-2} \\ v &= e^{-t} & v' &= -e^{-t}. \end{aligned} \tag{26.439}$$

Les termes au bord s'annulent (ici il y a un passage à la limite qui n'est pas écrit) et nous trouvons

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty (n-1)e^{-t}t^{n-2}dt = (n-1)\Gamma(n-1). \tag{26.440}$$

Pour conclure il suffit de remarquer que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} = -[e^{-t}]_0^\infty = 1. \tag{26.441}$$

□

26.9 Exponentielle et logarithme complexe

26.9.1 Propriétés de l'exponentielle

Proposition 26.107.
Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé. La fonction

$$\begin{aligned} E\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{tz} \end{aligned} \tag{26.442}$$

est C^∞, sa dérivée est

$$E'(t) = ze^{tz}. \tag{26.443}$$

La fonction E est développable en série entière (voir définition 15.154) sur $\mathbb{R}$ en $t = 0$ et

$$e^{tz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^n. \tag{26.444}$$

Démonstration. Nous fixons $z \in \mathbb{C}$. Par définition 18.6, la série suivante est e^{tz} :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^n. \tag{26.445}$$

Cette série a un rayon de convergence infini et la fonction f est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons la dériver terme à terme :

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} n t^{n-1} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} = ze^{tz}. \tag{26.446}$$

□
THOooNGOIooEECfAv

Théorème 26.108.
La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes.

(1) exp *est holomorphe*[62].

(2) $(e^z)' = e^z$.

(3) L'exponentielle est développable en série entière,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{26.447}$$

et la série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Démonstration. En tant que application $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, la fonction

$$E(x, y) = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{26.448}$$

est C^∞. De plus nous avons

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x, y) = e^{x+iy} = E(x, y) \tag{26.449a}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}(x, y) = iE(x, y), \tag{26.449b}$$

et par conséquent la fonction E vérifie les équations de Cauchy-Riemann.

Si r est fixé, par le critère d'Abel appliqué à la suite $r^n/n!$ nous savons que la série $\sum z^n/n!$ converge normalement sur le compact $B(0, r)$. □

[62] Définition 12.331.

26.9.2 Intégrale de Fresnel

Nous allons calculer l'**intégrale de Fresnel**

$$\int_0^\infty e^{-ix^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\pi/4} \tag{26.450}$$

en suivant la démarche présentée par Wikipédia[713]. Nous commençons par prouver que l'intégrale est convergente en nous contentant de justifier la convergence de

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx. \tag{26.451}$$

Pour chaque $a > 0$ fixé, l'intégrale $\int_0^a \sin(x^2)dx$ ne pose pas de problèmes. Le lemme 20.197 nous permet de passer à la limite ; nous devons donc seulement calculer

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b \sin(x^2)dx \tag{26.452}$$

où a est une constante strictement positive. Nous effectuons une intégration par partie en posant

$$u = \frac{1}{x} \qquad u' = -\frac{1}{x^2} \tag{26.453a}$$

$$v' = x\sin(x^2) \qquad v = \frac{1-\cos(x^2)}{2}. \tag{26.453b}$$

Notons que la primitive v a été choisie pour avoir $v(0) = 0$. Nous avons

$$\int_a^b \sin(x^2)dx = \left[\frac{1-\cos(x^2)}{2x}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos(x^2)-1}{2x^2}dx \tag{26.454}$$ EqOdeKye

Pour le premier terme nous avons

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1-\cos(x^2)}{2x}\right]_a^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1-\cos(b^2)}{2b} - \frac{1-\cos(a^2)}{2a} = -\frac{1-\cos(a^2)}{2a}. \tag{26.455}$$

C'est borné. Pour le second terme de (26.454), la fonction

$$\frac{\cos(x^2)-1}{2x^2} \tag{26.456}$$

est majorée par la fonction $1/x^2$ qui est intégrable entre a et ∞.

Nous allons calculer l'intégrale demandée en passant par la fonction

$$f(x) = e^{-x^2} \tag{26.457}$$

définie sur le plan complexe. Nous l'intégrons sur le chemin $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$ indiqué à la figure 26.1.

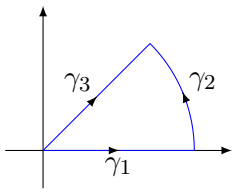


FIGURE 26.1 : Chemin d'intégration pour l'intégrale de Fresnel. LabelFigCheminFresnel

Ces chemins sont donnés par

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0,R] &\to \mathbb{C}\\ t &\mapsto t,\end{aligned} \tag{26.458}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 : [0,\frac{\pi}{4}] &\to \mathbb{C}\\ t &\mapsto Re^{it},\end{aligned} \tag{26.459}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3 : [0,R] &\to \mathbb{C}\\ t &\mapsto te^{i\pi/4}.\end{aligned} \tag{26.460}$$

Tout d'abord la fonction f est bien holomorphe par le critère du théorème 26.2. Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ se fait simplement en posant $f(x,y) = e^{-(x+iy)^2}$. Le calcul est usuel :

```
--------------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.8, Release Date: 2012-01-20                             |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.            |
--------------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y)=exp(-(x+I*y)**2)
sage: A=f.diff(x)+I*f.diff(y)
sage: A.simplify_full()
(x, y) |--> 0
```

Nous avons donc

$$0 = \int_\gamma f = \underbrace{\int_0^R e^{-t^2}dt}_{I_1(R)} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} e^{-R^2e^{2it}}Rie^{it}dt}_{I_2(R)} + \underbrace{\int_0^R e^{-t^2e^{i\pi/2}}e^{i\pi/4}dt}_{I_3(R)}. \tag{26.461}$$ EqfaoRgU

L'intégrale est nulle pour tout R en vertu de la proposition 26.11. L'intégrale I_1 est une gaussienne et nous avons

$$\lim_{R\to\infty} I_1(R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{26.462}$$

par l'exemple 14.308. Nous montrons maintenant que $\lim_{R\to\infty}|I_2(R)| = 0$[63]. D'abord nous majorons en prenant la norme puis nous effectuons le changement de variables $u = 2t$:

$$|I_2(R)| \leqslant \int_0^{\pi/4} Re^{-R^2\cos(2t)}dt \tag{26.463a}$$

$$= \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\cos(u)}du. \tag{26.463b}$$

Nous savons que le graphe du cosinus est concave : il reste au dessus de la droite que joint $(0,1)$ à $(\frac{\pi}{2},0)$. Du coup $\cos(u) \geqslant 1 - \frac{2}{\pi}u$ et par conséquent

$$e^{-R^2\cos(u)} \leqslant e^{-R^2(1-\frac{2}{\pi}u)} = e^{R^2(\frac{2}{\pi}u-1)}. \tag{26.464}$$

Nous effectuons l'intégrale

$$|I_2(R)| \leqslant \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2}e^{\frac{2R^2}{\pi}u}du \tag{26.465a}$$

$$= \frac{R}{2}e^{-R^2}\left[\frac{\pi}{2R^2}e^{2R^2u/\pi}\right]_0^{\pi/2} \tag{26.465b}$$

$$= \frac{\pi}{4R} - \frac{\pi e^{-R^2}}{4R}, \tag{26.465c}$$

et nous avons bien $\lim_{R\to\infty}|I_2(R)| = 0$. Nous passons à la troisième intégrale. En tenant compte que $e^{i\pi/2} = i$, nous avons

$$I_3(R) = -\int_0^R e^{-\gamma_3(t)^2}e^{i\pi/4}dt \tag{26.466a}$$

$$= -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-t^2}e^{2i\pi/4} \tag{26.466b}$$

$$= -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-it^2}. \tag{26.466c}$$

En passant à la limite $R \to 0$, de l'équation (26.461) il ne reste que

$$0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-it^2}dt, \tag{26.467}$$

ce qui signifie que

$$\int_0^\infty e^{-it^2}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2(1+i)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\pi/4}. \tag{26.468}$$

[63] Il y a moyen de démontrer cela via le lemme de Jordan[714]. Nous donnons ici une démonstration moins technologique.

26.10 Théorème de Weierstrass

ThoArYtQO

Théorème 26.109 (Théorème de Weierstrass[715]).
Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ que nous supposons converger uniformément sur tout compact vers f. Alors f est holomorphe sur Ω et pour tout k nous avons

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)} \tag{26.469}$$

uniformément sur tout compact.

Dit en peu de mots, la limite uniforme d'une suite de fonctions holomorphes est holomorphe, et on peut permuter la limite avec la dérivation.

Démonstration. Chacune des fonctions f_n étant holomorphes, si $a \in \Omega$ et r est tel que $B(a,r) \subset \Omega$, nous avons par la formule de Cauchy 26.60 :

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} d\xi \tag{26.470}$$

pour tout z dans un boule $B(a,\rho)$ incluse dans $B(a,r)$. Étant donné que le cercle ∂B est compact, elle y est majorée par une constante M. Montrons que de plus nous pouvons choisir M de telle façon à avoir $|f_n(\xi)| \leqslant M$ pour tout n et tout ξ en même temps. D'abord nous utilisons la continuité de la limite f sur le compact ∂B pour poser $A = \max_{z\in\partial B}|f(z)|$. Ensuite nous considérons un $\epsilon > 0$ et N tel que $\|f_n - f\|_{\partial B} \leqslant \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Nous savons maintenant que

$$\{|f_n(\xi)| \text{ tel que } n \geqslant N, \xi \in \partial B\} \tag{26.471}$$

est majoré par $A + \epsilon$. Nous posons enfin

$$B = \max_{n\leqslant N}\max_{\xi\in\partial B}|f_n(z)|, \tag{26.472}$$

et alors le nombre $M = \max\{A+\epsilon, B\}$ majore $|f_n(\xi)|$ pour tout n et tout $\xi \in \partial B$.

De plus pour tout $\xi \in \partial B$ et pour tout z dans la petite boule, nous avons $|\xi - z| > r - \rho$, donc la fonction dans l'intégrale est majorée par une constante ne dépendant ni de n ni de ξ. Nous pouvons donc permuter l'intégrale et la limite sur n :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{\xi - z}. \tag{26.473}$$

Cela implique que la fonction f est holomorphe par le corolaire 26.63.

Nous voudrions maintenant parler des dérivées des f_n et de f. Pour cela nous voulons permuter l'intégrale et les dérivées, ce qui est fait au corolaire 26.75 :

$$f_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)}\frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{k+1}}d\omega. \tag{26.474}$$

Nous voulons la convergence sur tout compact contenu dans l'ouvert Ω. Pour ce faire, nous allons considérer un compact $K \subset \Omega$ et prouver la convergence uniforme dans toute boule de la forme $B(z_0,r)$ avec $z_0 \in K$ et $B(z_0,r) \subset \Omega$. Pour chaque tel couple (z_0,r), nous aurons un $N_{(z_0,r)} \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_{(z_0,r)}$,

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_{B(z_0,r)} \leqslant \epsilon. \tag{26.475}$$

Vu que ces boules $B(z_0,r)$ forment un recouvrement de K par des ouverts, nous pouvons en retirer un sous-recouvrement fini et prendre, comme N, le maximum des $N_{(z_0,r)}$ correspondants. Pour ce N nous aurons

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_K \leqslant \epsilon. \tag{26.476}$$

Au travail !

Pour $z \in B(z_0,r)$ nous considérons $r' > r$ tel que $B(z_0,r') \subset \Omega$ et nous avons

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r')}\frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}d\xi\right| \tag{26.477a}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(z_0,r')}\frac{|f_n(\xi) - f(\xi)|}{|r - r'|^{k+1}}d\xi. \tag{26.477b}$$

Nous avons pris ce r' de telle manière que $|\xi - z|$ soit borné par le bas par $|r - r'|$; sinon la majoration que nous venons de faire ne marche pas. Étant donné que $f_n \to f$ uniformément, nous pouvons considérer n assez grand pour que le numérateur soit plus petit que ϵ indépendamment de ξ et de z. Donc pour un n assez grand,

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{2\pi r'}{|r - r'|^{k+1}} \tag{26.478}$$

pour tout $z \in B(z_0, r)$. Donc nous avons convergence uniforme $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ sur cette boule. Par l'argument de compacité donné plus haut, nous avons la convergence uniforme sur tout compact. □

26.11 Analyse complexe en plusieurs variables

Définition 26.110 ([716])**.**
Nous définissons le ***polydisque*** *centré en $a \in \mathbb{C}^n$ et de « rayons » $r \in \mathbb{C}^n$ par*

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } |z_j - a_j| < r_j \, \forall j = 1, \ldots, n\}. \tag{26.479}$$

Définition 26.111.
Pour une fonction $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, nous notons

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) f. \tag{26.480}$$

Définition 26.112 ([716])**.**
Soit un ouvert[64] *D dans $\mathbb{C}^n$. Nous disons que $f : D \to \mathbb{C}$ est* ***holomorphe*** *si*

(1) *f est continue sur D,*

(2) *pour tout $z \in D$ et pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, le nombre $\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)$ existe et est fini.*

Définition 26.113 ([717])**.**
Soient des ouverts B_1 et B_2 dans $\mathbb{C}^n$. Nous disons que $f : B_1 \to B_2$ est ***biholomorphe*** *si*

(1) *f est holomorphe,*

(2) *f est une bijection entre B_1 et B_2,*

(3) *f^{-1} est holomorphe.*

THOooNBGZooHuGtxW

Théorème 26.114 (Inversion locale, version holomorphe)**.**
Soient des ouverts B_1 et B_2 dans $\mathbb{C}^n$. Nous considérons une fonction holomorphe $f : B_1 \to B_2$. Soit $z_0 \in B_1$ et $w_0 = f(z_0)$. Il y a équivalence entre

(1) $\det(df_{z_0}) \neq 0$

(2) *Il existe un voisinage U de z_0 dans B_1 et V de w_0 dans B_2 tels que la restriction $f : U \to V$ est biholomorphe.*

[64] La topologie sur $\mathbb{C}^n$ est celle de la norme définie en 10.31.

Chapitre 27

Analyse fonctionnelle

27.1 Théorème d'isomorphisme de Banach

ThofQShsw

Théorème 27.1 (théorème d'isomorphisme de Banach[718]).
Une application linéaire continue et bijective entre deux espaces de Banach est un homéomorphisme[1].

Démonstration. Soit une application linéaire bijective et continue $f\colon E \to F$ entre deux espaces de Banach. En particulier elle est surjective, et le théorème de l'application ouverte 10.197 s'applique : f est une application ouverte.

Vu que f est bijective et ouverte, la proposition 10.193 implique que f^{-1} est continue. L'application f est donc continue d'inverse continue. Elle est donc un homéomorphisme. □

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 27.2
Il est donné dans [719] un exemple d'application linéaire et bijective dont l'inverse n'est pas continue. Si un jour vous le mettez au propre, faites-m'en profiter en m'envoyant une photo de votre feuille.

27.2 Théorème d'Ascoli

PropDGsPtpU

Proposition-Définition 27.3 (Application compacte[467]).
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

ITEMooAFNXooUGbZsh

(1) L'image d'un borné de E par f est relativement compacte[2] *dans F.*

ItemJIkpUbLii

(2) L'image par f de la boule unité fermée est relativement compacte dans F.

ITEMooQKISooBpyyee

(3) Si (x_n) est une suite bornée dans E, alors nous pouvons en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $y_n = f\big(x_{\varphi(n)}\big)$ converge dans F.

Une application vérifiant les conditions équivalentes de la proposition 27.3 est dite ***compacte****.*

Démonstration. En trois parties.

(1) **(1) ⇒ (2)** La boule unité fermée est bornée, et donc son image est relativement compacte.

(2) **(2) ⇒ (3)** Soient (x_n) bornée dans E, et soit M, une borne. Nous avons donc

$$z_n = f\left(\frac{x_n}{M}\right) \in f\big(B(0,1)\big) \subset \overline{f\big(B(0,1)\big)}. \tag{27.1}$$

Par hypothèse, la partie $\overline{f\big(B(0,1)\big)}$ est compacte ; la suite (z_n) est contenue dans ce compact. Nous en déduisons que (z_n) admet une sous-suite convergente. Soit donc $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$f\left(\frac{x_{\varphi(n)}}{M}\right) \to y. \tag{27.2}$$

Vu que f est linéaire, nous avons aussi $f\big(x_{\varphi(n)}\big) \to My$.

[1] Définition 7.51.
[2] Relativement compact, définition 7.129.

(3) **(3) ⇒ (1)** Soit une partie bornée A de F. Nous prouvons que $\overline{f(A)}$ est compact. Pour cela nous considérons une suite (y_n) dans $\overline{f(A)}$. Soit $\epsilon_k \to 0$. Pour chaque n, l'élément y_n est dans la fermeture de $f(A)$, c'est-à-dire qu'il existe un élément de $f(A)$ dont la distance à y_n est plus petite que ϵ_n. Bref, il existe une suite (x_n) dans A telle que

$$\|f(x_n) - y_n\| \leqslant \epsilon_k. \tag{27.3}$$

La suite (x_n) est bornée parce qu'elle est contenue dans A. Donc il existe une sous-suite $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$f\big(x_{\varphi(n)}\big) \to y \tag{27.4}$$

pour un certain $y \in \overline{f(A)}$. Le fait que y soit dans $\overline{f(A)}$ est dû au fait que la suite $n \mapsto f(x_n)$ est une suite dans $f(A)$; donc la limite est dans la fermeture de $f(A)$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \|y_{\varphi(n)} - y\| &\leqslant \|y_{\varphi(n)} - f\big(x_{\varphi(n)}\big)\| + \|f\big(x_{\varphi(n)}\big) - y\| && \text{(27.5a)}\\ &\leqslant \epsilon_k + \|f\big(x_{\varphi(n)}\big) - y\| \to 0. && \text{(27.5b)} \end{aligned}$$

Donc la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge vers $y \in \overline{f(A)}$. Nous avons montré que toute dans $\overline{f(A)}$ possédait une sous-suite convergente dans $\overline{f(A)}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.194 conclut que $\overline{f(A)}$ est compact et donc que $f(A)$ est relativement compact.

□

LEMooQCJTooNmMXEC

Lemme 27.4 ([1]).
Soient un espace métrique (E, d) ainsi qu'un espace compact K. Nous considérons la distance uniforme d_∞ sur $C^0(K, E)$. L'application d'évaluation

$$\begin{aligned} \varphi\colon \big(C^0(K,E), d_\infty\big) &\to (E, d)\\ f &\mapsto f(x). \end{aligned} \tag{27.6}$$

est continue.

Démonstration. Soit $y \in E$. Tout ouvert contenant y contient une boule $B(y, r)$. Nous montrons que $\varphi^{-1}\big(B(y,r)\big)$ est ouverte. Soit $f_0 \in \varphi^{-1}\big(B(y,r)\big)$. Nous allons trouver un $\epsilon > 0$ tel que $B(f_0, \epsilon) \subset \varphi^{-1}\big(B(y,r)\big)$. Les éléments f_0, x et y sont fixés, et nous avons $d\big(f_0(x), r\big) < r$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que[3]

$$d\big(f_0(x), y\big) < \alpha < r. \tag{27.7}$$

Nous choisissons $\epsilon < r - \alpha$ et nous calculons un peu :

$$\begin{aligned} d\big(g(x), y\big) &\leqslant d\big(g(x), f_0(x)\big) + d\big(f_0(x), y\big) && \text{(27.8a)}\\ &= \epsilon + d\big(f_0(x), y\big) && \text{(27.8b)}\\ &< \epsilon + \alpha && \text{(27.8c)}\\ &< r. && \text{(27.8d)} \end{aligned}$$

Donc $B(f_0, \epsilon) \subset \varphi^{-1}\big(B(y,r)\big)$.

Cela étant fait, nous prouvons que φ est continue. Soit un ouvert A de E. Pour montrer que $\varphi^{-1}(A)$ est ouvert dans $C^0(K, E)$, nous considérons $f_0 \in \varphi^{-1}(A)$ et nous allons trouver un ouvert S tel que $f_0 \in S \subset \varphi^{-1}(A)$.

Nous avons $f_0(x) \in A$; nous considérons une boule $B\big(f_0(x), r\big) \subset A$, et nous allons trouver un ouvert $S \subset C^0(K, E)$ tel que $f_0 \in S \subset \varphi^{-1}(A)$. La partie A étant ouverte dans le métrique E nous pouvons considérer $r > 0$ tel que $B\big(f_0(x), r\big) \subset A$. □

LEMooKWGOooKzqDud

Lemme 27.5 ([1]).
Soient des espaces topologiques X et Y. Nous considérons la topologie de la norme uniforme sur $C^0(X, Y)$. Soit une partie A de $C^0(X, Y)$. Si $f \in \mathrm{Adh}_{C^0(X,Y)}(A)$, alors $f(x) \in \mathrm{Adh}_Y\big(A(x)\big)$.

Démonstration. Si $f \in \mathrm{Adh}(A)$, alors il existe une suite (f_n) dans A telle que $f_n \xrightarrow{C^0(X,Y)} f$, et donc telle que $f_n(x) \xrightarrow{Y} x$. Vu que chacun des $f_n(x)$ est dans $A(x)$, nous avons bien $f(x) \in \mathrm{Adh}_Y\big(A(x)\big)$. □

[3] Par exemple par le lemme 1.556(1).

PROPooCGBHooCpKycz

Proposition 27.6 ([291]).
Soient des espaces topologiques X et Y. Nous considérons une suite équicontinue d'applications $f_n\colon X\to Y$ telle que $f_n \xrightarrow{simple} f$. Alors la convergence est uniforme sur tout compact.

ThoKRbtpah

Théorème 27.7 (Théorème d'Ascoli[720]).
Soient un espace topologique compact K et un espace métrique (E,d). Nous considérons la topologie de la distance uniforme[4] sur $C^0(K,E)$. Une partie A de $C^0(K,E)$ est relativement compacte[5] si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

(1) A est équicontinu[6],

(2) $\forall x\in K$, l'ensemble $A(x)=\{f(x) \text{ tel que } f\in A\}$ est relativement compact dans E.

Démonstration. Attention, ça va être un peu long.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $A\subset C^0(K,E)$ est relativement compact. Nous notons B un compact contenant A. Soit $x\in K$. L'application d'évaluation

$$\begin{aligned}\varphi\colon \big(C^0(K,E),d_\infty\big)&\to (E,d)\\ f&\mapsto f(x).\end{aligned}\tag{27.9}$$

est continue par le lemme 27.4. La partie B est compacte dans $C^0(K,E)$. Donc $B(x)=\varphi(B)$ est compacte dans E par le théorème 7.275. Vu que $A(x)\subset B(x)$ nous avons montré que $A(x)$ est relativement compact.

Nous devons montrer que A est équicontinu. Nous prouvons que B est équicontinu en x en utilisant la caractérisation du lemme 7.373. Vu que B est compact, il existe un nombre fini de $f_0,\dots,f_n\in B$ tels que

$$B\subset\bigcup_{k=0}^{n}B(f_i,\epsilon)\tag{27.10}$$

où $B(f_i,\epsilon)$ est la boule dans $\big(C^0(K,E),d_\infty\big)$. Chacune des f_i est continue en x ; donc il existe un voisinage V_i de x tel que $d\big(f_i(x),f_i(y)\big)<\epsilon$ pour tout $y\in V_i$. Nous posons

$$V=\bigcap_{i=1}^{n}V_i\tag{27.11}$$

qui, en tant que réunion finie d'ouverts contenant x, est un ouvert contenant x. Pour $f\in B$ et $y\in V$ nous avons

$$d\big(f(x),f(y)\big)\leqslant d\big(f(x),f_j(x)\big)+d\big(f_j(x),f_j(y)\big)+d\big(f_j(y),f(y)\big)<3\epsilon.\tag{27.12}$$

(2) $\Leftarrow$ En plusieurs parties. Nous considérons l'adhérence B de A dans $C^0(K,E)$.

(2a) **A est précompact** Nous montrons que A est précompact (définition 7.147). Soit $\epsilon>0$. Étant donné que A est équicontinu, pour chaque $x\in K$, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que

$$d\big(f(y),f(x)\big)<\epsilon\tag{27.13}$$

pour tout $y\in U_x$ et pour tout $f\in A$. Les parties $\{U_x\}_{x\in K}$ forment un recouvrement du compact K par des ouverts. Il existe donc $x_1,\dots,x_n\in K$ tels que $U_{x_1},\dots,U_{x_n}$ recouvrent K.

Nous posons

$$L=A(x_1)\cup\dots\cup A(x_n).\tag{27.14}$$

La partie L est relativement compacte parce qu'elle est contenue dans $B_{x_1}\cup\dots B(x_n)$ qui est relativement compact comme union de relativement compacts.

(2a.i) **Les parties C_a**
Par relative compacité, il existe une partie finie J de E telle que

$$L\subset\bigcup_{s\in J}B(s,\epsilon).\tag{27.15}$$

[4] Définition 7.276.
[5] Sa fermeture est compacte, définition 7.129.
[6] Définition 7.371.

Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in J^n$ nous posons

$$C_a = \{f \in C^0(K,E) \text{ tel que } \forall i = 1, \dots, n \forall y \in U_{x_i}, d\big(f(y), a_i\big) < 2\epsilon\}. \tag{27.16}$$

Notons que J^n étant fini, il existe seulement une quantité finie de telles parties.

(2a.ii) **Les C_a recouvrent A** Nous vérifions maintenant que les $\{C_a\}_{a\in J^n}$ recouvrent A. Soit $f \in A$. Vu que $f(x_i) \in A(x_i) \subset L$ nous avons $f(x_i) \in B(s_i, \epsilon)$ pour un certain $s_i \in J \subset E$. Nous considérons l'élément $s = (s_1, \dots, s_n) \in J^n$. Nous prouvons que $f \in C_s$. En effet soit $i = 1, \dots, n$ et $y \in U_{s_i}$. Nous avons

$$d\big(f(y), s_i\big) \leqslant d\big(f(y), f(x_i)\big) + d\big(f(x_i), s_i\big). \tag{27.17}$$

D'abord $d\big(f(x_i), s_i\big) \leqslant \epsilon$ parce que s_i a été choisi pour que $f(x_i) \in B(s_i, \epsilon)$. Ensuite $d\big(f(y), f(x_i)\big) \leqslant \epsilon$ parce que $y \in U_{x_i}$. Bref, $d\big(f(y), s_i\big) \leqslant 2\epsilon$ et $f \in C_s$.

(2a.iii) **A est précompact** Chacun des C_a est contenu dans une boule de taille 2ϵ. Donc A est recouvert par un nombre fini de boules de rayon 2ϵ.

(2b) **B est précompact** Pour rappel, B est l'adhérence de A dans $C^0(K,E)$. La proposition 7.148 dit que B est précompacte en tant qu'adhérence du précompact A.

(2c) **B est complet** Soit une suite de Cauchy (f_n) dans $\mathrm{Adh}_{C^0(K,E)}(A)$. Alors, étant donné le lemme 27.5, pour chaque $x \in K$, la suite $\big(f_n(x)\big)$ est une suite dans $\mathrm{Adh}_E\big(A(x)\big)$. Montrons qu'elle est même une suite de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n \geqslant N$, alors $d_\infty(f_m, f_n) < \epsilon$. Pour de tels N, m, n nous avons

$$d\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leqslant \sup_{y\in K} d\big(f_n(y), f_m(y)\big) = d_\infty(f_m, f_n) < \epsilon. \tag{27.18}$$

La partie $A(x)$ étant relativement compacte, elle est contenue dans un compact S de E. Il se fait que S est complet par la proposition 7.315. Donc $f_n(x)$ converge dans E. Nous notons $f(x)$ cette limite. Cela nous définit une application $f\colon K \to E$.

Nous avons $f_n \xrightarrow{simple} f$, mais n'indique pour l'instant que $f \in C^0(K,X)$ et encore moins que $f_n \xrightarrow{C^0(K,X)} f$. C'est ce que nous voyons maintenant.

D'après la proposition 27.6, la convergence est uniforme sur tout compact. Or justement $f_n \to f$ est une convergence simple sur le compact K. Donc c'est une convergence uniforme et la limite est continue par la proposition 12.382. La convergence uniforme étant également celle de $C^0(K,E)$, nous avons bien $f_n \xrightarrow{C^0(K,E)} f$. Et donc $f \in \mathrm{Adh}_{C^0(K,E)}(A)$ parce que $f_n \in \mathrm{Adh}_{C^0(K,E)}(A)$ pour chaque n.

Cela montre que B est complet.

(2d) **B est compact** Nous savons que B est précompact et complet. La proposition 7.149 dit qu'alors B est compact.

(2e) **Conclusion** Vu que l'adhérence de A est compacte, nous déduisons que A est précompact.

□

La version suivante du théorème de Banach-Steinhaus est énoncée de façon *ad hoc* pour fonctionner avec l'espace $\mathscr{D}(K)$ des fonctions de classe C^∞ à support dans le compact K. Un énoncé un peu plus fort est donné dans le cadre des espaces de Fréchet dans [260].

ThoNBrmGIg

Théorème 27.8 (Banach-Steinhaus avec des seminormes[1]).
Soit (E,d) un espace vectoriel métrique complet dont la topologie est également[7] *donnée par une famille $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i\in I}$ de seminormes. Soit $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une famille d'applications linéaires continues $T_\alpha\colon E \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in E$ nous ayons*

$$\sup_{\alpha\in A} \big|T_\alpha(x)\big| < \infty. \tag{27.19}$$

Alors il existe une constante $K > 0$ et un sous-ensemble fini $J \subset I$ tels que pour tout $x \in E$ et pour tout $\alpha \in A$ nous ayons

EqIFNGhtr

$$\big|T_\alpha(x)\big| \leqslant K \max_{j\in J} p_j(x). \tag{27.20}$$

[7] Au sens où les ouverts sont les mêmes.

Démonstration. Pour chaque $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nous posons

$$\Omega_k = \{x \in E \text{ tel que } \sup_{\alpha \in A} \left|T_\alpha(x)\right| > k\}. \tag{27.21}$$

Ces ensembles sont des ouverts (pour la même raison que dans la preuve du théorème 10.188) et leur union est E en entier parce que par hypothèse $\sup_{\alpha\in A} \left|T_\alpha(x)\right| < \infty$.

(1) **Les Ω_k ne sont pas tous denses** Le théorème 7.420 nous dit que (E, d) est un espace de Baire. Supposons que les Ω_k sont tous denses. Dans ce cas, l'intersection des Ω_k est également dense (c'est la définition 7.418 d'un espace de Baire), et en particulier non vide.

Soit $x_0 \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$. Nous avons

$$\sup_{\alpha\in A} \left|T_\alpha(x_0)\right| = \infty, \tag{27.22}$$

ce qui contredirait l'hypothèse. Donc les Ω_k ne sont pas tous denses.

(2) **Un non dense** Soit $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que Ω_{k_0} n'est pas dense dans E. Il existe donc $x_0 \in E$ et un ouvert $\mathcal{O}$ autour de x_0 n'intersectant pas Ω_{k_0}.

(3) **Topologie**

Parlons de topologie sur E. L'ouvert $\mathcal{O}$ est un d-ouvert et donc un $\mathcal{P}$-ouvert, lequel contient une $\mathcal{P}$-boule ouverte[8]. Cette dernière boule n'est pas spécialement une d-boule, mais c'est un d-ouvert.

(4) **Une majoration**

Il existe dont J fini dans I et $\rho > 0$ tels que $B_J(x_0, \rho) \subset \mathcal{O}$ et donc tels que

$$B_J(x_0, \rho) \cap \Omega_{k_0} = \varnothing. \tag{27.23}$$

Donc pour tout $z \in B_J(x_0, \rho)$ nous avons

$$\sup_{\alpha\in A} \left|T_\alpha(z)\right| \leqslant k_0. \tag{27.24}$$

Si maintenant $y \in B_J(0, \rho)$, nous avons $y = (x_0 + y) - x_0$ et donc

$$\begin{aligned} \left|T_\alpha(y)\right| &= \left|T_\alpha(x_0 + y) - T_\alpha(x_0)\right| && (27.25a)\\ &\leqslant \left|T_\alpha(x_0 + y)\right| + \left|T_\alpha(x_0)\right| && (27.25b)\\ &\leqslant k_0 + C. && (27.25c) \end{aligned}$$

Justifications.

- $x_0 + y \in B_J(x_0, \rho)$, donc $\left|T_\alpha(x_0 + y)\right| \leqslant k_0$.
- nous avons posé $C = \sup_{\alpha\in A} \left|T_\alpha(x_0)\right|$

(5) **Sur la boule unité** En divisant par ρ, pour $y \in B_J(0, 1)$ nous avons

$$\left|T_\alpha(y)\right| \leqslant \rho^{-1}(k_0 + C). \tag{27.26}$$

EQooOVHIooSonnig

(6) **Un bon élément dans la boule unité** Pour n'importe quel $x \in E$ nous avons

$$\frac{x}{\max_{j\in J} p_j(x)} \in B_J(0, 1). \tag{27.27}$$

Nous pouvons donc appliquer (27.26) à cet élément :

$$\left|T_\alpha\left(\frac{x}{\max_{j\in J} p_j(x)}\right)\right| \leqslant \rho^{-1}(k_0 + C). \tag{27.28}$$

Utilisant encore la linéarité de T_α nous trouvons ce que nous devions trouver :

$$\left|T_\alpha(x)\right| \leqslant \max_{j\in J} p_j(x)\rho^{-1}(k_0 + C) = K \max_{j\in J} p_j(x) \tag{27.29}$$

en posant $K = \rho^{-1}(k_0 + C)$.

[8] Définition 7.397.

□
CorPGwLluz

Corolaire 27.9 ([1, 221]).
Soit $\big(X, \{p_i\}_{i\in I}\big)$, un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ seminormé qui est

(1) localement compact[9]*,*

(2) métrisable et complet.

Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'application linéaires continues $X \to \mathbb{C}$ telles que pour tout $x \in X$ il existe[10] *$\alpha_x \in \mathbb{C}$ tel que*

$$T_j x \xrightarrow{\mathbb{C}} \alpha_x. \tag{27.30}$$

Si nous posons $Tx = \alpha_x$ alors

ItemAEOtOMLi

(1) L'application T est linéaire et continue.

ITEMooEVIXooBpaWOc

(2) Si $x_k \xrightarrow{X} x$, alors

$$|T_k(x_k) - T(x_k)| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{27.31}$$

ITEMooJYOVooPIkHBo

(3) Pour tout compact K dans X nous avons

$$\sup_{x\in K} |T_k x - Tx| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{27.32}$$

ItemAEOtOMLiii

(4) si $x_k \to x$ dans X alors

$$T_k x_k \xrightarrow{\mathbb{C}} Tx. \tag{27.33}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Linéaire** Vu que X est seminormé et que $\mathbb{C}$ est un corps valué, la proposition 7.400 nous indique que X est un espace vectoriel topologique et la proposition 7.260 nous dit que la limite de suite est une opération linéaire. Pour $x, y \in X$ nous pouvons donc faire

$$\begin{aligned}
T(x+y) &= \lim_{j\to\infty} \big(T_j(x+y)\big) && (27.34a)\\
&= \lim_{j\to\infty} \big(T_j(x) + T_j(y)\big) && (27.34b)\\
&= \lim_{j\to\infty} T_j(x) + \lim_{j\to\infty} T_j(y) && (27.34c)\\
&= T(x) + T(y). && (27.34d)
\end{aligned}$$

De même nous avons

$$\begin{aligned}
T(\lambda x) &= \lim_{k\to\infty} \big(T_j(\lambda x)\big) && (27.35a)\\
&= \lim_{j\to\infty} \big(\lambda T_j(x)\big) && (27.35b)\\
&= \lambda \lim_{j\to\infty} T_j(x) && (27.35c)\\
&= \lambda T(x). && (27.35d)
\end{aligned}$$

(2) **Séquentiellement continue** Nous prouvons que T est séquentiellement continue[11]. Soit une suite $x_k \xrightarrow{X} x$. Nous voulons utiliser le théorème de Banach-Steinhaus 27.8. L'ensemble $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est un ensemble d'applications linéaires continues. De plus, si $x \in X$, la suite $k \mapsto T_k(x)$ est une suite convergente dans $\mathbb{C}$; elle est donc bornée :

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |T_k(x)| < \infty. \tag{27.36}$$

Le théorème de Banach-Steinhaus nous dit qu'il existe un $C > 0$ et J fini dans I tels que pour tout k et pour tout x nous ayons

$$|T_k(x)| \leqslant C \max_{j\in J} p_j(x). \tag{27.37}$$

[9] Définition 7.181.
[10] L'unicité des α_x et donc le fait que tout le reste ait un sens provient de l'hypothèse de séparabilité et la proposition 7.82.
[11] Définition 7.150

Un seul $i \in J$ nous suffira. Soient donc $C > 0$ et $i \in I$ tels que $|T_k(x)| \leqslant Cp_i(x)$ pour tout x. Vu que le module est une opération continue sur $\mathbb{C}$, elle commute avec la limite et nous pouvons faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} |T(x)| &= |\lim_{k\to\infty} T_k(x)| && (27.38a)\\ &= \lim_{k\to\infty} |T_k(x)| && (27.38b)\\ &\leqslant \lim_{k\to\infty} Cp_i(x) && (27.38c)\\ &= Cp_i(x). && (27.38d) \end{aligned}$$

Avec ça nous pouvons prouver que T est séquentiellement continue. Soit $x_k \xrightarrow{X} 0$. En utilisant la proposition 7.399 nous avons :

$$|T(x_k)| \leqslant Cp_i(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \tag{27.39}$$

Donc $|T(x_k)| \to 0$ et T est séquentiellement continue en zéro. Vu que T est linéaire, elle est séquentiellement continue partout.

(3) **Continue** Vu que l'espace X est métrisable, la proposition 7.157 conclut que T est continue.

(4) **Point (2)**

Nous passons à la preuve de (2). Supposons que $x_k \xrightarrow{X} x$. Voici des majorations avec justifications juste en-dessous :

$$\begin{aligned} |T_k(x_k) - T(x_k)| &\leqslant |T_k(x_k) - T_k(x)| + |T_k(x) - T(x_k)| && (27.40a)\\ &= |T_k(x_k - x)| + |T_k(x) - T(x_k)| && (27.40b)\\ &\leqslant Cp_i\big(x_k - x\big) + |T_k(x) - T(x_k)| && (27.40c)\\ &\leqslant C\epsilon + |T_k(x) - T(x_k)| && (27.40d)\\ &\leqslant C\epsilon + |T_k(x) - T(x)| + |T(x) - T(x_k)| && (27.40e)\\ &\leqslant (C+2)\epsilon. && (27.40f) \end{aligned}$$

SUBEQooQLXIooSvvNcx
SUBEQooVLNVooQVsQno
SUBEQooHSTIooJgfChZ

Justifications :

- Pour (27.40c). C'est le théorème de Banach-Steinhaus 27.8 qui nous assure l'existence d'un $i \in I$ et d'une $C \in \mathbb{R}^+$ qui donne la majoration.
- Pour (27.40d). Nous nous sommes fixé un $\epsilon > 0$ et nous avons pris k assez grand. Pour la topologie des seminormes, la convergence $y_k \xrightarrow{X} y$ implique la limite $p_i(y_k - y) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ pour toutes les seminormes, et en particulier pour celle donnée par le théorème de Banach-Steinhaus.
- Pour (27.40f). D'une part, par hypothèse et par définition de T, nous avons $T_k(x) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(x)$ et d'autre part par continuité séquentielle de T et par convergence de $x_k \xrightarrow{X} x$ nous avons $T(x_k) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(x)$.
  En prenant k encore plus grand, nous avons toutes les majorations en même temps.

Nous avons donc bien

$$|T_k(x_k) - T(x_k)| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{27.41}$$

(5) **Point (3)** Nous nous lançons dans la preuve du point (3). En vertu du point (1), l'application

$$\begin{aligned} S_k\colon K &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto |T_k(x) - T(x)| \end{aligned} \tag{27.42}$$

est continue. Vu que K est un compact, le théorème 7.196, nous indique qu'il existe x_k tel que

$$|T_k(x_k) - T(x_k)| = \sup_{x\in K} |T_k(x) - T(x)|. \tag{27.43}$$

Nous considérons la suite

$$a_k = |T_k(x_k) - T(x_k)| \tag{27.44}$$

et nous allons montrer que

- toutes les sous-suites convergentes de (a_k) convergent vers 0.

- la suite (a_k) est contenue dans un compact de $\mathbb{R}$.

Ensuite le corolaire 7.344 terminera.

(5a) **Toutes les sous-suites convergentes** Soit $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que la suite $b_k = a_{\varphi(k)}$ soit convergente. Nous allons trouver une sous-suite qui converge vers 0. La suite $k\mapsto a_{\varphi(k)}$ est une suite dans le compact K ; elle contient donc une sous-suite convergente. Soit donc $\psi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que $k\mapsto a_{(\varphi\circ\psi)(k)}$ soit convergente. Nous étudions la sous-suite $c_k = b_{\psi(k)}$ et nous allons prouver que $c_k\to 0$.

Pour ne pas mourir sous les notations, nous posons $\sigma=\varphi\circ\psi$. Nous avons donc $x_{\sigma(k)}\xrightarrow{X} x$, et donc $|T_{\sigma(k)}(x_{\sigma(k)})-T(x_{\sigma(k)})|\xrightarrow{\mathbb{R}}0$ par le point (2).

Donc la suite $a_{\varphi(k)}$ qui est convergente contient une sous-suite qui converge vers 0. La suite $a_{\varphi(k)}$ converge donc vers 0.

(5b) **Dans un compact** Nous allons prouver que $|T_k(x_k)-T(x_k)|$ est bornée. Supposons que ce ne soit pas le cas. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, il existe un k tel que $|T_k(x_k)-T(x_k)|>n$. En numérotant bien, il existe une application $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que

$$|T_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)})-T(x_{\varphi(k)})|>k. \tag{27.45}$$ EQooRGVOooXJDkQy

La suite $k\mapsto x_{\varphi(k)}$ est une suite dans le compact K. Elle admet une sous-suite convergente. En nommant $x_{\sigma(k)}$ cette sous-suite, nous avons $x_{\sigma(k)}\xrightarrow{X}x$, et nous nous avons encore $|T_{\sigma(k)}(x_{\sigma(k)})-T(x_{\sigma(k)})|\xrightarrow{\mathbb{R}}0$.

Ouais mais bon. Une suite qui vérifie (27.45) ne peut pas avoir une sous-suite convergente. Contradiction.

(6) **Point (4)** Nous avons la majoration

$$|T_kx_k-Tx|\leqslant|T_kx_k-Tx_k|+|Tx_k-T_x|. \tag{27.46}$$

Par le point (2), le premier terme tend vers zéro. La continuité de T (point (1)) s'occupe du deuxième terme.

□

27.3 Espaces de Lebesgue L^p

SecVKiVIQK

27.3.1 Généralités

DEFooKMJQooXeaUtp

Définition 27.10.
*Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré. Deux fonctions à valeurs complexes f et g sur cet espaces sont dites **équivalentes** et nous notons $f\sim g$ si elles sont μ-presque partout égales. Nous notons $[f]$ la classe de f pour cette relation.*

Nous allons souvent noter f indifféremment pour la fonction f et un des représentants de la classe de f. Toutefois, lorsque la distinction sera importante, nous essayerons de faire faire l'effort de distinguer la fonction f de sa classe $[f]$.

Lemme 27.11.
Une classe contient au maximum une seule fonction continue.

Démonstration. Soient deux fonctions continues f_1 et f_2 avec $f_1(a)\neq f_2(a)$. Si $|f_1(a)-f_2(a)|>\delta$ alors il existe un ϵ tel que $|f_1(x)-f_1(a)|>\delta$ pour tout $x\in B(a,\epsilon)$. En particulier $f_1\neq f_2$ sur $B(a,\epsilon)$. Cette dernière boule est de mesure de Lebesgue non nulle ; ergo f_1 et f_2 ne sont pas dans la même classe. □

DEFooTHIDooWYzBtn

Définition 27.12.
Pour $p\geqslant 1$, nous introduisons l'opération

$$\|f\|_p=\left(\int_\Omega|f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \tag{27.47}$$ EQooBDBXooCHRmpo

et nous notons $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω telles que $\|f\|_p<\infty$.

27.13.
Le fait que f doive être mesurable pour être dans L^p est bien dans la définition de L^p, et non une propriété qui pourrait être déduite de la finitude de l'intégrale (27.47).

Soit $\Omega = \mathbb{R}$ muni de ses boréliens ou même de sa tribu de Lebesgue et de la mesure de Lebesgue. Si A est une partie bornée non mesurable (exemple 14.157), alors nous considérons un borné mesurable K contenant A et la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ -1 & \text{si } x \in K \setminus A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{27.48}$$

Nous avons alors $|f| = \mathbb{1}_K$. Vu que K est borné, $\int_{\mathbb{R}} |f| = \mu(K)$ ne présente pas de problèmes. Donc f serait un élément de $L^1(\mathbb{R})$ sans être mesurable.

Pour éviter cela, nous incluons la mesurabilité dans la définition de $\mathcal{L}^p$.

LEMooHVZGooRwHXMk

Lemme 27.14 ([1]).
L'ensemble $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. Pour rappel, nous ne considérons les choses que pour $p \geqslant 1$. Le fait que si $f \in L^p$, alors $\lambda f \in L^p$ est évident. Ce qui est moins immédiat, c'est le fait que $f + g \in L^p$ lorsque f et g sont dans L^p. Cela découle d'une part du fait que la fonction $\varphi\colon x \mapsto x^p$ est convexe sur les positifs (lemme 17.87), de telle sorte que

$$\varphi\left(\frac{|a| + |b|}{2}\right) \leqslant \frac{\varphi(|a|) + \varphi(|b|)}{2}, \tag{27.49}$$

ou encore

$$(|a| + |b|)^p \leqslant 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p) \tag{27.50}$$

EqZFSduFa

Et d'autre part, nous savons que pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (proposition 9.108(1)). Donc

EQooKRMEooSLHU

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f + g|^p d\mu &= \int_\Omega |f(\omega) + g(\omega)|^p d\mu(\omega) && \text{(27.51a)}\\
&\leqslant \int_\Omega \big(|f(\omega)| + |g(\omega)|\big)^p d\mu(\omega) && \text{(27.51b)}\\
&\leqslant 2^{p-1} \int_\Omega \big(|f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p\big) d\mu(\omega) && \text{(27.51c)}\\
&= 2^{p-1}\big(\|f\|_p^p + |g|_p^p\big). && \text{(27.51d)}
\end{aligned}$$

Donc si f et g sont dans $\mathcal{L}^p$, alors $f + g$ est dans $\mathcal{L}^p$. □

27.15.
Il est à noter que nous ne considérons que des valeurs $p \geqslant 1$, précisément parce que la fonction $x \mapsto |x|^p$ n'est pas convexe lorsque $p < 1$.

Dans le même ordre d'idées, si $p \geqslant 1$, alors le $q \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{27.52}$$

est également $q \geqslant 1$. Cela est important pour un certain nombres de théorèmes qui vont venir, en particulier l'inégalité de Hölder (27.102).

Si vous en voulez à propos de $0 < p < 1$, vous pouvez lire [721].

27.16.
L'opération $f \mapsto \|f\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p$ parce que pour f presque partout nulle, nous avons $\|f\|_p = 0$. Il y a donc des fonctions non nulles sur lesquelles $\|.\|_p$ s'annule.

27.17.
Soit un espace mesuré non complet[12] $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Il existe une partie N de mesure nulle et $A \subset N$ non mesurable. Considérons

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in N \setminus A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{27.53}$$

[12] Définition 14.68.

Cette fonction est non nulle exactement sur N. Donc $f \sim 0$. Mais f n'est pas mesurable parce que $f^{-1}(2) = A$ n'est pas mesurable.

Il est donc possible d'être dans la classe d'équivalence d'une fonction mesurable sans être mesurable. Ceci est cependant un détail (presque) sans importance pour deux raisons.

- La mesure de Lebesgue est complète par définition (définition 14.143) si nous considérons bien la tribu de Lebesgue et non seulement les boréliens.
- Dans le cas des espaces de Lebesgue $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, il s'agit d'un quotient de $\mathcal{L}^p$ qui ne contient que des fonctions mesurables. Donc dans l'étude de L^p, tous les représentants sont mesurables, même si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ n'est pas complet.

LemKZVHVAR

Lemme 27.18.
Si $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $f \sim g$, alors $g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Démonstration. Soit $h(x) = |g(x)|^p - |f(x)|^p$; c'est une fonction par hypothèse presque partout nulle et donc intégrable sur Ω ; son intégrale y vaut zéro. Nous avons

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) = \int_\Omega \big(|f(x)|^p + h(x)\big) d\mu(x) = \int_\Omega |g(x)|^p d\mu(x). \tag{27.54}$$

Cela prouve que la dernière intégrale existe et vaut la même chose que la première. □

Nous pouvons donc considérer la norme $|.|_p$ comme une norme sur l'ensemble des classes plutôt que sur l'ensemble des fonctions. Nous notons L^p l'ensemble des classes des fonctions de $\mathcal{L}^p$. Cet espace est muni de la norme

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p, \tag{27.55}$$

formule qui ne dépend pas du représentant par le lemme 27.18.

PROPooTYCYooAKJWOX

Proposition 27.19.
Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, et $p \geqslant 1$.

(1) L'ensemble des classes $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel.

ITEMooZNXPooGzFnIK

(2) La formule

$$\|[f]\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \tag{27.56}$$

définit une norme[13] *sur $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Espace vectoriel** Le lemme 27.14 dit que $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel. Une structure d'espace vectoriel sur $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est donnée en posant

$$[f] + [g] = [f + g] \tag{27.57}$$

et

$$\lambda[f] = [\lambda f] \tag{27.58}$$

qui sont deux définitions correctes parce qu'elles ne dépendent pas du choix du représentant. De plus le lemme 27.14 dit que $f + g \in \mathcal{L}^p$ dès que $f, g \in \mathcal{L}^p$. Donc $[f + g] \in L^p$ dès que $[f], [g] \in {}^p$.

(2) **Norme**

Pour être une norme, il faut vérifier les trois propriétés de la définition 7.212.

D'abord, si $\|[f]\|_p = 0$, nous avons

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) = 0, \tag{27.59}$$

ce qui par le lemme 14.199 implique que $|f(x)|^p = 0$ pour presque tout x. Ou encore $f \sim 0$, c'est-à-dire $[f] = [0]$ au niveau des classes.

[13] Définition 7.212.

Ensuite pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in L^p$ nous avons

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_\Omega |\lambda f(\omega)|^p d\mu(\omega) \right)^{1/p} \tag{27.60a}$$

$$= \left(\int_\Omega |\lambda|^p |f(\omega)|^p d\mu(\omega) \right)^{1/p} \tag{27.60b}$$

$$= |\lambda| \|f\|_p. \tag{27.60c}$$

Et enfin, en suivant le calcul (27.51) nous avons

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{27.61}$$

□

27.20.
À partir de maintenant $\big(L^p(\Omega, \mu), \|.\|_p\big)$ est un espace métrique avec toute la topologie qui va avec.

Dans la suite nous n'allons pas toujours écrire $[f]$ pour la classe de f. Par abus de notations nous allons souvent parler de $f \in L^p$ comme si c'était une fonction.

De même nous notons $L^p(\Omega)$ ou $L^p(\Omega, \mu)$ ou $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ d'après ce sur quoi nous voulons insister. Mais seule la dernière notation est parfaitement correcte.

PROPooRSDBooHEjQDq

Proposition 27.21 ([1]).
Soit un espace mesuré σ-fini[14] *$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Il existe des parties mesurables Ω_n telles que pour tout n*

ITEMooXSINooDDPzmb

(1) $\mu(\Omega_n) < \infty$,

ITEMooEGWEooAtEWfw

(2) $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$

ITEMooGEEZooIjPQmv

(3) $\int_{\Omega_n} |f| < \infty$

ITEMooSDPTooOuiyOj

(4) $\bigcup_n \Omega_n = \{|f| \neq \infty\}$.

Démonstration. Vu que Ω est σ-finie, il existe des parties mesurables S_n telles que $\mu(S_n) < \infty$ et $\bigcup_n S_n = \Omega$. Nous commençons par poser $A_n = \bigcup_{i=1}^n s_i$. Les parties A_n vérifient déjà (1) et (2).

Pour les conditions (3) et (4), il suffit de poser $\Omega_n = A_n \cap \{|f| < n\}$. □

PROPooQNNVooTKRdyC

Proposition 27.22 ([1]).
Soit un espace mesuré σ-fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ vérifiant $\mu\big(|f| = \infty\big) = 0$. Nous considérons des parties mesurables Ω_k telles que

(1) $\mu(\Omega_n) < \infty$,

(2) $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$

(3) $\int_{\Omega_n} |f| < \infty$

(4) $\bigcup_n \Omega_n = \{|f| \neq \infty\}$.

Alors en notant $\|f\|_{n,p}$ la norme L^p de f sur Ω_n, nous avons

$$\|f\|_{k,p} \to \|f\|_p \tag{27.62}$$

Démonstration. Nous utilisons la convergence monotone 14.178 en posant $g_k(x) = |f(x)|^p \mathbb{1}_{\Omega - k}$. Les fonctions g_k sont à valeurs dans $[0, \infty]$ et nous avons $g_k \to |f|^p$ ponctuellement. Donc

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} |f|^p = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k \tag{27.63a}$$

$$= \int_\Omega \lim_{k\to\infty} g_k \tag{27.63b}$$

$$= \int_\Omega |f|^p, \tag{27.63c}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

[14] Définition 14.11.

27.3.2 Un peu de convergence de suites

PropWoywYG

Proposition 27.23 ([722]).
Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et supposons que la suite $[f_n]$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ converge vers $[f]$ au sens L^p. Alors il existe une sous-suite (h_n) qui converge ponctuellement μ-presque partout vers f.

Démonstration. Si $p = \infty$ nous sommes en train de parler de la convergence uniforme et il ne faut même pas prendre ni de sous-suite ni de « presque partout ».

Supposons que $1 \leqslant p < \infty$. Nous considérons une sous-suite $[h_n]$ de $[f_n]$ telle que

$$\|[h_j] - [f]\|_p < 2^{-j}, \tag{27.64}$$

puis nous posons $u_k(x) = |h_k(x) - f(x)|^p$. Notons que ce u_k est une vraie fonction, pas une classe. Et en plus c'est une fonction positive. Nous avons

$$\int_\Omega u_k d\mu = \int_\Omega |h_k(x) - f(x)|^p d\mu(x) = \|h_k - f\|_p^p \leqslant 2^{-kp}. \tag{27.65}$$

Vu que u_k est une fonction positive la suite des sommes partielles de $\sum_k u_k$ est croissante et vérifie donc le théorème de la convergence monotone 14.178 :

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right) d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega u_k(x) d\mu(x) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kp} < \infty. \tag{27.66}$$

Le fait que l'intégrale de la fonction $\sum_k u_k$ est finie implique que cette fonction est finie μ-presque partout. Donc le terme général tend vers zéro presque partout, c'est-à-dire

$$|h_k(x) - f(x)|^p \to 0. \tag{27.67}$$

Cela signifie que $h_k \to f$ presque partout ponctuellement. □

Est-ce qu'on peut faire mieux que la convergence ponctuelle presque partout d'une sous-suite ? En tout cas on ne peut pas espérer grand chose comme convergence pour la suite elle-même, comme le montre l'exemple suivant.

ExPOmxICc

Exemple 27.24 ([723]).
Nous allons montrer une suite de fonctions qui converge vers zéro dans $L^p[0,1]$ (avec $p < \infty$) mais qui ne converge ponctuellement pour *aucun* point.

Nous construisons la suite de fonctions par paquets. Le premier paquet est formé de la fonction constante 1.

Le second paquet est formé de deux fonctions. La première est $\mathbb{1}_{[0,1/2]}$ et la seconde $\mathbb{1}_{[1/2,1]}$.

Plus généralement le paquet numéro k est constitué des k fonctions $\mathbb{1}_{[i/k,(i+1)/k]}$ avec $i = 0, \dots, k-1$.

Vu que les fonctions du paquet numéro k ont pour norme $\|f\|_p = \frac{1}{k}$, nous avons évidemment $f_n \to 0$ dans L^p. Il est par contre visible que chaque paquet passe en revue tous les points de $[0,1]$. Donc pour tout x et pour tout N, il existe (même une infinité) $n > N$ tel que $f_n(x) = 1$. Il n'y a donc convergence ponctuelle nulle part. △

La proposition suivante est une espèce de convergence dominée de Lebesgue pour L^p.

PropBVHXycL

Proposition 27.25.
Soit $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leqslant p < \infty$ et (f_n) une suite de fonctions convergeant ponctuellement vers f et telle que $|f_n| \leqslant |f|$. Alors $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Démonstration. Nous avons immédiatement $|f_n(x)|^p \leqslant |f(x)|^p$, de telle sorte que le théorème de la convergence dominée implique que $f_n \in L^p$. La convergence dominée donne aussi que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, mais cela ne nous intéresse pas ici.

Nous posons $h_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$. En reprenant la formule de majoration (27.50) et en tenant compte du fait que $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$, nous avons

$$h_n(x) \leqslant 2^{p-1}\big(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p\big) \leqslant 2^p |f(x)|^p, \tag{27.68}$$

ce qui prouve que $|h_n|$ est uniformément (en n) majorée par une fonction intégrable, donc h_n est intégrable et on peut permuter la limite et l'intégrale (théorème de la convergence dominée 14.207) :

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} h_n(x) dx = 0. \tag{27.69}$$

□

PropRERZooYcEchc

Proposition 27.26 ([1]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$\int_\Omega f \mathbb{1}_A d\mu = 0 \tag{27.70}$$

pour toute partie mesurable A de mesure finie. Alors $[f] = 0$, c'est-à-dire que f est non nulle uniquement sur une partie de mesure nulle.

Démonstration. Nous rappelons que dire que f est intégrable signifie que $\mathrm{Re}(f)^+$, $\mathrm{Re}(f)^-$, $\mathrm{Im}(f)^+$ et $\mathrm{Im}(f)^-$ sont intégrables.

Les parties

$$\{x \in \Omega \text{ tel que } \mathrm{Re}(f)^+(x) \in [k, k+1[\}_{k=1,\dots} \tag{27.71}$$

et

$$\{x \in \Omega \text{ tel que } \mathrm{Re}(f)^+(x) \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[\}_{k=1,\dots} \tag{27.72}$$

sont mesurables en tant qu'images inverses de mesurables par la fonction mesurable $\mathrm{Re}(f)^+$.

Nous notons $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une énumération quelconque de ces parties. L'important est que

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{x \in \Omega \text{ tel que } \mathrm{Re}(f)^+(x) \neq 0\} \tag{27.73}$$

et que pour chaque i, il existe $\alpha_i > 0$ tel que $\mathrm{Re}(f)^+(x) > \alpha_i$ pour tout x dans A_i.

Par hypothèse nous avons $\int_\Omega f\mathbb{1}_{A_i} d\mu = 0$. En particulier,

$$0 = \int_\Omega \mathrm{Re}(f\mathbb{1}_{A_i})^+ = \int_\Omega \mathrm{Re}(f)^+(x)\mathbb{1}_{A_i}(x) d\mu(x). \tag{27.74}$$

Mais pour tout $x \in A_i$ nous avons $\mathrm{Re}(f)^+(x) > \alpha_i > 0$, donc

$$0 = \int_\Omega \mathrm{Re}(f)^+(x)\mathbb{1}_{A_i}(x) d\mu(x) \geqslant \alpha_i \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} = \alpha_i \mu(A_i) \geqslant 0. \tag{27.75}$$

Vu cet encadrement par zéro, nous avons $\alpha_i\mu(A_i) = 0$ et donc $\mu(A_i) = 0$ pour tout i.

Nous en déduisons, par union dénombrable de parties de mesures nulles, que $\mathrm{Re}(f)^+$ est non nulle seulement sur une partie de mesure nulle.

Le même raisonnement pour $\mathrm{Re}(f)^-$, $\mathrm{Im}(f)^+$ et $\mathrm{Im}(f)^-$ donne que f est non nulle sur une partie de mesure nulle. Donc $f = 0$ au sens des classes dans L^p. □

27.3.3 L'espace L^∞

SUBSECooYFJTooBqrLXv

Ne pas confondre la norme supremum (définition 10.116) avec la norme L^∞, bien que les deux peuvent être écrites $\|f\|_\infty$.

27.27.
Il n'est pas possible de définir le supremum d'une fonction définie à ensemble de mesure nulle près parce que toute classe contient des fonctions qui peuvent être arbitrairement grandes en n'importe que point. Nous cherchons alors à définir une notion de supremum qui ne tient pas compte des ensembles de mesure nulle.

DEFooIQOOooLpJBqi

Définition 27.28.
*Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Un nombre M est un **majorant essentiel** de f si*

$$\mu\big(|f(x)| \geqslant M\big) = 0. \tag{27.76}$$

Nous posons alors

$$N_\infty(f) = \inf\{M \text{ tel que } |f(x)| \leqslant M \text{ presque partout}\}. \tag{27.77}$$

*Le nombre (peut-être infini) $N_\infty(f)$ sera souvent écrite $\|f\|_{L^\infty}$ ou $\|f\|_\infty$. Il est nommé le **supremum essentiel** de f. Il pourra également être noté*

$$\text{ess-}\sup_{x\in\Omega} |f(x)|. \tag{27.78}$$

EQooZHKBooPgdzCp

Cela revient à prendre le supremum à ensemble de mesure nulle près.

DEFooXUKHooXYrlYq

Définition 27.29.
Nous définissons alors les espaces de Lebesgue correspondants :

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{C} \text{ tel que } N_\infty(f) < \infty\}, \tag{27.79}$$

et L^∞ en est le quotient usuel.

27.30.
Le point sur les notations telles qu'elles devraient être respectées :

(1) Si f est une fonction, $N_\infty(f)$ est son supremum essentiel.

(2) Si f est une fonction, $\|f\|_\infty$ est sa norme supremum. Ce n'est pas la même chose que $N_\infty(f)$.

(3) Si $[f]$ est une classe de fonctions (pour l'égalité presque partout), alors $\|[f]\|_{L^\infty}$ est la norme de cette classe dans L^∞, c'est-à-dire $\|[f]\|_{L^\infty} = N_\infty(f)$ où f est un représentant.

Le point sur les abus tolérables :

(1) Si f est une fonction, on peut écrire $\|f\|_{L^\infty}$ pour $N_\infty(f)$. Attention toutefois que $N_\infty(f)$ peut valoir ∞, alors que les éléments de L^∞ sont sélectionnés pour être les classes des fonctions telles que $N_\infty(f) < \infty$. Donc il est parfois possible, lorsque f est une fonction, de parler de $\|f\|_{L^\infty}$ alors que $[f]$ n'est pas un élément de L^∞.

(2) Si $[f]$ est une classe, on peut écrire $N_\infty([f])$ pour $\|[f]\|_{L^\infty}$.

(3) Noter f la classe de la fonction f. Attention qu'alors, écrire $\|f\|_\infty$ n'a pas de sens.

Le point sur les abus intolérables :

(1) Si f est une fonction, noter $\|f\|_\infty$ pour $N_\infty(f)$.

(2) Si $[f]$ est une classe de fonctions, noter $\|[f]\|_\infty$ pour $\|[f]\|_{L^\infty}$.

27.31.
Tout ceci pour dire que si f_k sont des fonctions et si f est une fonction, nous avons la convergence

$$f_k \xrightarrow{L^\infty} f \tag{27.80}$$

si et seulement si $N_\infty(f_k - f) \to 0$. Cette convergence (qui se sert des abus tolérables de notations) est équivalente à la convergence

$$[f_k] \xrightarrow{L^\infty} [f]. \tag{27.81}$$

Mais ce n'est pas du tout équivalent à $\|f_k - f\|_\infty \to 0$. Tout au plus, il est vrai que si $\alpha \in L^\infty$ (donc α est une classe), il existe un représentant $f \in \alpha$ tel que $\|f\|_\infty = \|\alpha\|_{L^\infty}$.

Lemme 27.32 ([1]).
Si f_k est une suite de fonctions telle que $\|f_k - f\|_\infty \to 0$, alors

$$f_k \xrightarrow{L^\infty} f \tag{27.82}$$

où la convergence signifie $N_\infty(f_k - f) \to 0$.

Démonstration. Si g est une fonction nous avons toujours $N_\infty(g) \leqslant \|g\|_\infty$. Donc

$$N_\infty(f_k - f) \leqslant \|f_k - f\|_\infty \to 0. \tag{27.83}$$

□

27.33.
Attention toutefois que ce lemme ne signifie pas que si $\|f_k - f\|_\infty \to 0$, alors $[f_k] \xrightarrow{L^\infty} [f]$ parce que nous pourrions avoir $N_\infty(f_k) = \infty$ et alors $[f_k]$ n'est pas un élément de L^∞.

Cela arrive par exemple pour $f_k(x) = x$ et $f(x) = x$. Nous avons $\|f_k - f\|_\infty = 0$ pour tout k, alors que ni f_k ni f ne donnent lieu à un élément de L^∞.

Exemple 27.34.
Même si g est bornée, nous n'avons pas spécialement $\|g\|_\infty = N_\infty(g)$. Par exemple

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{aligned} \tag{27.84}$$

Cette fonction vérifie $\|g\|_\infty = 1$ mais $N_\infty(g) = 0$. △

27.3.4 Quelques identifications

Il est intuitivement clair que ce qui peut arriver à une fonction en un seul point ne va pas influencer la fonction lorsqu'elle est vue dans L^p. En tout cas lorsqu'on considère des mesures pour lesquelles les singletons sont de mesure nulle, et c'est bien le cas de la mesure de Lebesgue. Il est peut-être intuitivement moins clair que l'on peut non seulement modifier le comportement d'une fonction en un point, mais également modifier l'ensemble de base. En voici un exemple.

Proposition 27.35.
Nous avons les égalités suivantes d'espaces

$$L^p\big(]0,2\pi[\big) = L^p\big([0,2\pi]\big) = L^p(S^1) \tag{27.85}$$

au sens où il existe des bijections isométriques de l'un à l'autre. Ici nous sous-entendons la mesure de Lebesgue partout[15].

Démonstration. Voici une application où le crochet dénote la prise de classe :

$$\begin{aligned} \psi\colon L^p\big(]0,2\pi[\big) &\to L^p\big([0,2\pi]\big) \\ [f] &\mapsto \text{la classe de } f_e(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0,2\pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 2\pi. \end{cases} \end{aligned} \tag{27.86}$$

(1) **Bien définie** Si $[f] = [g]$ dans $L^p\big(]0,2\pi[\big)$ alors $f_e(x) = g_e(x)$ pour tout $x \in]0,2\pi[$ sauf une partie de mesure nulle. L'union de cette partie avec $\{0,2\pi\}$ est encore de mesure nulle dans $[0,2\pi]$. Les images par ψ sont donc égales dans $L^p\big([0,2\pi]\big)$.

(2) **Injective** Supposons que $[f],[g] \in L^p\big(]0,2\pi[\big)$ soient tels que $\psi\big([f]\big) = \psi\big([g]\big)$. En particulier $[f_e] = [g_e]$ et donc $f_e = g_e$ presque partout sur $[0,2\pi]$. Vu que $\{0\} \cup \{2\pi\}$ est de mesure nulle, nous avons $f_e = g_e$ presque partout sur $]0,2\pi[$. Mais pour $x \in]0,2\pi[$, nous avons $f_e(x) = f(x)$ et $g_e(x) = g(x)$. Bref nous avons $f(x) = g(x)$ pour presque tout $x \in]0,2\pi[$.

(3) **Surjective** Un élément de $L^p\big([0,2\pi]\big)$ est l'image de sa restriction … ou plutôt l'image de la classe de la restriction d'un quelconque de ses représentants.

(4) **Isométrie** L'intégrale qui donne la norme sur L^p ne change pas selon que nous ajoutions ou non les bornes au domaine d'intégration.

De la même manière nous avons

$$L^p\big([0,2\pi[\big) = L^p\big([0,2\pi]\big). \tag{27.87}$$

En ce qui concerne l'identification avec $L^p(S^1)$, il faut passer par l'isométrie $\varphi\colon [0,2\pi[\to S^1$ donnée par $\varphi(t) = e^{it}$, et être heureux que ce soit bien une isométrie parce qu'il faudra l'utiliser pour un changement de variables pour montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_{S^1} (f \circ \varphi^{-1})(z)dz. \tag{27.88}$$

□

[15] Vu que la mesure de Lebesgue est définie pour $\mathbb{R}^d$ munie de sa tribu des boréliens (complétée), vous êtes en droit de vous demander quelle est la tribu et la mesure que nous considérons sur le cercle S^1.

27.3.5 Inégalité de Young, Jensen, Hölder et de Minkowski

PROPooCQUBooCvtMSi

Proposition 27.36 (Inégalité de Young[724, 725])**.**
Soient $a, b \geqslant 0$ ainsi que $p, q > 0$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{27.89}$$

Alors

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{27.90}$$

Il y a égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

Démonstration. Nous fixons $b \geqslant 0$, et nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb. \end{aligned} \tag{27.91}$$

On remarque vite fait que $f'(x) = x^{p-1} -$. Nous avons $f'(x) > 0$ si et seulement si $x^{p-1} \geqslant b$. Nous posons $x_0 = b^{1/(p-1)}$, et nous savons que f est strictement décroissante sur $[0, x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0, \infty[$. Cette fonction a donc un minimum global en $x = x_0$. Rapide calcul :

$$f(x_0) = \frac{b^{p/(p-1)}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{1+1/(p-1)}. \tag{27.92}$$

En utilisant $q = p(p-1)$ nous trouvons vite que

$$f(x_0) = b^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) = 0. \tag{27.93}$$

Donc pour tout $x \neq x_0$ nous avons $f(x) > f(x_0) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab \tag{27.94}$$

avec égalité si et seulement si $a = x_0$, c'est-à-dire quand $a = b^{1/(p-1)}$ ou encore, en passant à la puissance p :

$$a^p = b^{p/(p-1)} = b^q. \tag{27.95}$$

□

PropXISooBxdaLk

Proposition 27.37 (Inégalité de Jensen[522])**.**
Soit un espace mesuré de probabilité[16] *$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi qu'une fonction convexe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une application $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tels que α et $f \circ \alpha$ soient intégrables sur Ω. Alors*

$$f\Big(\int_\Omega \alpha \, d\mu \Big) \leqslant \int_\Omega (f \circ \alpha) d\mu. \tag{27.96}$$

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{R}$ et c_a le nombre donné par la proposition 17.90 : pour tout $\omega \in \Omega$ nous avons

$$f\big(\alpha(\omega)\big) - f(a) \geqslant c_a\big(\alpha(\omega) - a\big). \tag{27.97}$$

EqOUMooIwknIP

Cela est en particulier vrai pour $a = \int_\Omega \alpha \, d\mu$. Nous intégrons l'inégalité (27.97) sur Ω en nous souvenant que $\int d\mu = 1$:

$$\int_\Omega (f \circ \alpha) d\mu - \int_\Omega f(a) d\mu \geqslant c_a\Big(\int_\Omega \alpha - \int_\Omega a \Big) \tag{27.98a}$$

$$\int_\Omega (f \circ \alpha) d\mu - f(a) \geqslant c_a(a - a) \tag{27.98b}$$

$$f(a) \leqslant \int_\Omega (f \circ \alpha) d\mu. \tag{27.98c}$$

Cette dernière inégalité est celle que nous devions prouver. □

[16] C'est-à-dire que $\int_\Omega d\mu = 1$.

COROooRYUAooOHRsjL

Corolaire 27.38.
Soit un espace mesuré de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et une application $\alpha \in L^1(\Omega, \mu)$ et $\alpha \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leqslant p < +\infty$. Alors

$$|\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)| \leqslant \|\alpha\|_p. \tag{27.99}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Jensen sur la fonction convexe $f(x) = |x|^p$. Nous avons alors

$$|\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)|^p \leqslant \int_\Omega |\alpha(s)|^p d\mu(s), \tag{27.100}$$

c'est-à-dire

$$|\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)| \leqslant \left[\int_\Omega |\alpha(s)|^p d\mu(s)\right]^{1/p} = \|\alpha\|_p \tag{27.101}$$

où ma norme $\|.\|_p$ est prise au sens de la mesure μ. □

ProptYqspT

Proposition 27.39 (Inégalité de Hölder[726])**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leqslant p$, $q \leqslant \infty$ satisfaisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, alors nous avons les choses suivantes :

ITEMooNDKPooRKdmgS

(1) Le produit fg est dans $L^1(\Omega)$ et nous avons

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{27.102}$$

EqLPKooPBCQYN

ITEMooQHLPooRWWMOP

(2) Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ alors

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \tag{27.103}$$

EqAVZooFNyzmT

ITEMooBOYJooRkiAqJ

(3) Nous avons $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$ si et seulement si nous sommes dans un des trois cas suivants :

- *$f = 0$ presque partout,*
- *$g = 0$ presque partout,*
- *Il existe $\lambda > 0$ tel que $|f|^p = \lambda |g|^q$ presque partout.*

Ce qui est appelé « inégalité de Hölder » est généralement l'inéquation (27.102).

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Nous allons le voir comme cas particulier de (2).

(2) **Pour (2)** D'abord nous supposons $\|g\|_q = 1$ et nous posons

$$A = \{x \in \Omega \text{ tel que } |g(x)| > 0\}. \tag{27.104}$$

Hors de A, les intégrales que nous allons écrire sont nulles. Nous avons

$$\|fg\|_r^p = \Big|\int_A |f|^r |g|^{r-q} |g|^q\Big|^{p/r}, \tag{27.105}$$

et le coup tordu est de considérer cette intégrale comme étant une intégrale par rapport à la mesure $\nu = |g|^q d\mu$ qui a la propriété d'être une mesure de probabilité par hypothèse sur g. Nous pouvons alors utiliser l'inégalité de Jensen[17] parce que $p/r > 1$, ce qui fait de $x \mapsto |x|^{p/r}$ une fonction convexe. Nous avons alors

$$\|fg\|_r^p \leqslant \int_A \left(|f|^r |g|^{r-q}\right)^{p/r} |g|^q d\mu \tag{27.106a}$$

$$= \int_A |f|^p |g|^{p(r-q)/r} |g|^q d\mu \tag{27.106b}$$

La puissance de $|g|$ dans cette expression est : $q + \frac{p(r-q)}{r} = 0$ parce que $p(q-r) = rq$. Nous avons alors montré que

$$\|fg\|_r^p \leqslant \int_A |f|^p d\mu \leqslant \|f\|_p^p. \tag{27.107}$$

[17] Proposition 27.37.

La dernière inégalité est le fait que le domaine A n'est pas tout le domaine Ω.

Si maintenant $\|g\|_q \neq 1$ alors nous calculons

$$\|fg\|_r = \|g\|_q \|f\frac{g}{\|g\|_q}\|_r \leqslant \|g\|_q \|f\|_p \tag{27.108}$$

en appliquant la première partie à la fonction $\frac{g}{\|g\|_q}$ qui est de norme 1.

(3) **Pour (3)** Si f ou g est nulle presque partout, il y a immédiatement égalité. Nous supposons donc que f et g ne sont pas nulles presque partout et donc que $\|f\|_p$ et $\|g\|_q$ sont non nuls.

(3a) **Deux fonctions intermédiaires** Nous posons

$$\hat{f} = \frac{|f|}{\|f\|_p}, \quad \hat{g} = \frac{|g|}{\|g\|_q}. \tag{27.109}$$

(3b) **Égalité préliminaire** Nous avons

$$\frac{1}{p}\int \hat{f}^p = \frac{1}{p}\int \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int |f|^p = \frac{1}{p}, \tag{27.110}$$

et de même avec g et q au lieu de f et p. Nous avons donc

$$\frac{1}{p}\int \hat{f}^p + \frac{1}{q}\int \hat{g}^q = 1. \tag{27.111}$$

(3c) **Les équivalences** Les choses suivantes sont équivalentes.

(3c.i) $\int |fg| = \|f\|_p \|g\|_q$

(3c.ii) $\int \hat{f}\hat{g} = 1$

(3c.iii)
$$\int \hat{f}\hat{g} = \frac{1}{p}\int \hat{f}^p + \frac{1}{q}\int \hat{g}^q \tag{27.112}$$

(3c.iv)
$$\int \left(\hat{g}\hat{f} - \frac{1}{p}\hat{f}^p - \frac{1}{q}\hat{g}^q\right) = 0. \tag{27.113}$$

(3c.v)
$$\hat{g}\hat{f} - \frac{1}{p}\hat{f}^p - \frac{1}{q}\hat{g}^q = 0 \tag{27.114}$$

presque partout.
En effet l'inégalité de Young[18] dit que l'intégrante est positive partout. Pour que l'intégrale soit nulle, il faut que l'intégrante soit nulle ; c'est le lemme 14.199.

(3c.vi) $\hat{f}(x)^p = \hat{g}(x)^q$ pour presque tout x. C'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Young.

(3c.vii)
$$\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}. \tag{27.115}$$

(3c.viii)
$$|f|^p = \lambda |g|^q \tag{27.116}$$

avec $\lambda = \|f\|_p^p / \|g\|_q^q$.

(3d) **Conclusion** En lisant les implications de haut en bas, nous avons la condition nécessaire au cas d'égalité. Pour traiter la condition suffisante, nous supposons qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $|f|^p = \lambda |g|^q$. Alors nous avons

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p = \lambda \int |g|^q = \lambda \|g\|_q^q, \tag{27.117}$$

ce qui donne immédiatement $\lambda = \|f\|_p^p / \|g\|_q^q$. Nous pouvons donc remonter les équivalences.

□

[18] Proposition 27.36.

RemNormuptNird

Remarque 27.40.
Dans le cas d'un espace de probabilité, la fonction constante $g = 1$ appartient à $L^p(\Omega)$. En prenant $p = q = 2$ nous obtenons

$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2. \tag{27.118}$$

PROPooDVCCooKqbAwo

Proposition 27.41.
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ vérifiant $\mu(\Omega) = 1$. Soient des nombres $0 < r \leqslant s$ ainsi qu'une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Si $\int_\Omega |f|^2 < \infty$, alors $\int_\Omega |f|^r < \infty$.

Démonstration. Si $s = r$, la conclusions est immédiate. Nous supposons donc $r \neq s$. Nous considérons q tel que $\frac{1}{s} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, c'est-à-dire $q = rs/(s - r)$. Vu que $s > r$, nous avons $q > 0$, pas de problèmer.

Par hypothèse, nous avons $f \in L^s(\Omega)$. Et comme Ω est de mesure finie, la fonction constante 1_Ω est dans $L^q(\Omega)$. Nous povons donc écrire l'inégalité de Hölder 27.103 :

$$\|f 1_\Omega\|_r \leqslant \|f\|_s \|1_\Omega\|_q. \tag{27.119}$$

Cela donne $\|f\|_r \leqslant \|f\|_s$, et en déballant,

$$\left(\int_\Omega |f|^r \right)^{1/r} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^s \right)^{1/s}. \tag{27.120}$$

Vu que $r > 0$, l'application $t \mapsto t^r$ est croissante, et nous pouvons écrire

$$\int_\Omega |f|^r \leqslant \left(\int_\Omega |f|^s \right)^{r/s} < \infty. \tag{27.121}$$

Notez l'utilisation de la proposition 12.432. □

LemTLHwYzD

Lemme 27.42.
À propos de $L^1_{loc}(I)$.

(1) Lorsque I est borné nous avons $L^2(I) \subset L^1(I)$.

(2) Si I n'est pas borné alors $L^2(I) \subset L^1_{loc}(I)$.

Démonstration. En effet si I est borné, alors la fonction constante 1 est dans $L^2(I)$ et l'inégalité de Hölder 27.39 nous dit que le produit $1u$ est dans $L^1(I)$.

Si I n'est pas borné, nous refaisons le même raisonnement sur un compact K de I. □

CORooIIEAooNmbkTo

Corolaire 27.43 ([727]).
Soit l'espace $L^2(I)$ avec $I =]0, 1[$ avec la mesure de Lebesgue. Si $u_n \in L^2$ converge vers u dans L^2 alors nous pouvons permuter l'intégrale et la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int_I u_n = \int_I u. \tag{27.122}$$

Démonstration. Nous considérons la forme linéaire

$$\begin{aligned} T : L^2(I) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_I u. \end{aligned} \tag{27.123}$$

Elle est bien définie par l'inégalité de Hölder $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$ appliqué à $g(x) = 1$ qui vérifie $\|g\|_2 = 1$. Nous avons aussi

$$T(u) \leqslant \int_I |u| \leqslant \|u\|_1 \leqslant \|u\|_2 \tag{27.124}$$

où la dernière inégalité est celle de Hölder 27.39. Bref, T est continue. Cela signifie que si $u_n \xrightarrow{L^2(I)} u$ alors $T(u_n) = T(u)$. Cela est l'égalité demandée. □

27.3.6 Inégalité de Minkowski

27.3.6.1 Forme usuelle

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 27.44
Dans la proposition suivante, la partie « égalité » est très personnelle. Je n'en n'ai pas trouvé de preuve complète. Donc soyez doublement vigilant et écrivez-moi si vous avez quelque chose à dire.

PropInegMinkKUpRHg

Proposition 27.45 (Inégalité de Minkowski[728, 729, 730, 731, 732, 1]).
Si $1 \leqslant p < \infty$ et si $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ alors

ItemDHukLJi

(1) $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$

ITEMooGRXBooMLRMww

(2) Si $p = 1$, il y a égalité si et seulement si $f(x)\overline{g(x)} \geqslant 0$ pour presque tout x.

ITEMooQCSHooNUDwtM

(3) Si $p > 1$, il y a égalité si et seulement si il existe des réels positifs α, β pas tous deux nuls tels que

$$\alpha f(x) = \beta g(x) \tag{27.125}$$

pour presque tout x.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Pour (1)** En utilisant l'inégalité $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (proposition 9.108(1)) pour chaque x dans l'intégrale, de façon à pouvoir majorer

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \tag{27.126a}$$
$$\leqslant \big(|f(x)|+|g(x)|\big)|f(x)+g(x)|^{p-1}. \tag{27.126b}$$

Nous mettons ça dans une intégrale et nous calculons un peu : SUBEQSooGWMTooDBXSgL

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p d\mu \tag{27.127a}$$
$$\leqslant \int \big(|f|+|g|\big)|f+g|^{p-1} d\mu \tag{27.127b}$$
$$= \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \tag{27.127c}$$

SUBEQSooYCTWooQpHNqa

SUBEQSooNQKBooQFtTIJ

Lorsque $p = 1$, nous nous arrêtons ici parce que (27.127c) s'écrit

$$\|f+g\|_1 \leqslant \int |f| + \int |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1. \tag{27.128}$$

Lorsque $p > 1$, nous devons continuer et utiliser Hölder. Attardons nous sur le premier terme. Nous posons $q = p/(p-1)$, $a = f$ et $b = |f+g|^{p-1}$, et nous utilisons l'inégalité de Hölder[19] : SUBEQSooFINUooQfIdMS

$$\int |f||f+g|^{p-1} = \|ab\|_1 \tag{27.129a}$$
$$\leqslant \|a\|_p \|b\|_q \tag{27.129b}$$
$$= \|f\|_p \left[\int \big(|f+g|^{p-1}\big)^q\right]^{1/q} \tag{27.129c}$$
$$= \|f\|_p \left(\int |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \tag{27.129d}$$
$$= \|f\|_p \left(\int |f+g|^p\right)^{(p-1)/p} \tag{27.129e}$$
$$= \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} \tag{27.129f}$$

Nous avons utilisé la règle de produit d'exposants et de somme d'exposants[20]

[19] Proposition 27.39.
[20] Propositions 12.432 et 12.422(3).

Nous utilisons cette inégalité dans les deux termes de (27.127) : SUBEQSooKHKOooOCfndf

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \tag{27.130a}$$
$$\leqslant \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|^{p-1} \tag{27.130b}$$

Nous obtenons le résultat en divisant le tout par $\|f+g\|_p^{p-1}$.

(2) **Pour (2)** Toutes les inégalités de (27.127) sont des égalités. En particulier nous avons celle-ci :

$$\int |f+g| d\mu = \int (|f|+|g|) d\mu \tag{27.131}$$

Cela donne

$$\int \big(|f+g| - |f| - |g|\big) d\mu = 0. \tag{27.132}$$

Vue l'inégalité de la proposition 9.108(1), la fonction intégrée est toujours négative. Pour que l'intégrale soit nulle, il faut que la fonction intégrée soit presque partout nulle :

$$|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \tag{27.133}$$

pour presque tout x. La partie « égalité » de la proposition 9.108(1) donne alors le résultat.

Cas d'égalité, préliminaire

Nous commençons par prouver que si $f+g=0$ alors $f=g=0$. Pour cela nous faisons le calcul : SUBEQSooGHMToo

$$\|f\|_p + \|g\|_p = \|f+g\| \tag{27.134a}$$ SUEQooPUOGooAIaFFa
$$\leqslant \big\||f|+|g|\big\| \tag{27.134b}$$ SUBEQooFXHBooYXMbDf
$$\leqslant \big\||f|\big\|_p + \big\||g|\big\| \tag{27.134c}$$ SUBEQooQZFXooPVgQrI
$$= \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{27.134d}$$

Justifications :

- Pour (27.134a). L'hypothèse d'égalité dans l'inégalité de Minkowski.
- Pour (27.134b). Intégrale de l'inégalité de la proposition 9.108(1).
- Pour (27.134c). Inégalité de Minkowski.

Étant donné que le premier et le dernier membre de (27.134) sont égaux, toutes les inégalités sont des égalités. En particulier,

$$\|f+g\|_p = \big\||f|+|g|\big\|. \tag{27.135}$$

En termes d'intégrales, cette égalité donne

$$\int |f+g|^p - \big(|f|+|g|\big)^p = 0. \tag{27.136}$$ EQooRYQRooGdgtLN

L'inégalité déjà mentionnée $|z_1+z_2|^p \leqslant \big(|z_1|+|z_2|\big)^p$ dit que la fonction à intégrer dans (27.136) est partout négative. Pour que l'intégrale soit nulle, il faut donc que la fonction soit presque partout nulle. Autrement dit, pour presque tout x nous avons

$$|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)|. \tag{27.137}$$ EQooULHAooWXViFH

Cette égalité nous sera utile dans la suite. En particulier, retenez que si $f+g=0$ presque partout, alors $f=g=0$ presque partout. Dans ce cas, l'égalité $\alpha f + \beta g = 0$ fonctionne pour tout α et β.

Cas d'égalité (2), $p=1$.

(1) $\Rightarrow$

L'inégalité (27.127b) est une égalité :

$$\int |f+g|^{p-1}\big(|f+g| - |f| - |g|\big) = 0. \tag{27.138}$$

Par la proposition 9.108(1), la fonction intégrée est presque partout nulle ou positive. Pour que l'intégrale soit nulle, il faut que la fonction soit presque partout nulle (lemme 14.199). Presque chaque x vérifie sont une des deux conditions suivantes :

(1a) $|f(x)+g(x)|=0$
(1b) $|f(x)+g(x)|-|f(x)|-|g(x)|=0$.

Pour les x vérifiant la première condition, nous avons déjà vu que $f=g=0$, juste en dessous de (27.137). En particulier, nous avons $f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0$ pour tout x dans ce cas.

En ce qui concerne les x vérifiant la seconde condition, la proposition 9.108(1) montre qu'ils vérifient $f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0$.

Pour les x dans le second cas, la proposition 9.108(1) donne $f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0$.

Bref, dans tous les cas nous avons $f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0$ pour presque tout x.

(2) $\Leftarrow$

Nous supposons que $f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0$ pour presque tout x. La proposition 9.108(1) (utilisée dans l'autre sens) dit que $|f(x)+g(x)|-|f(x)|-|g(x)|=0$ pour presque tout x. L'inégalité (27.127b) est alors une égalité.

Cas d'égalité (3), $p>1$.

Il y a deux sens.

(1) **$\Rightarrow$, les inégalités** Nous supposons que $f,g\in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ vérifient $\|f+g\|_p=\|f\|_p+\|g\|_p$, et nous allons voir ce que cela implique. Regroupons les différentes inégalités qui mènent à Minkowski.

$$\|f+g\|_p^p=\int|f+g|^p d\mu \tag{27.139a}$$
$$\leqslant\int\big(|f|+|g|\big)|f+g|^{p-1}d\mu \quad \text{eq. (27.127)} \tag{27.139b}$$
$$\leqslant\|f\|_p\|f+g\|_p^{p-1}+\int|g||f+g|^{p-1} \quad \text{eq. (27.130)} \tag{27.139c}$$
$$\leqslant\|f\|_p\|f+g\|_p^{p-1}+\|g\|_p\|f+g\|^{p-1} \quad \text{eq. (27.130)} \tag{27.139d}$$
$$=\big(\|f\|_p+\|g\|_p\big)\|f+g\|_p^{p-1} \tag{27.139e}$$
$$=\|f+g\|_p^p \quad \text{hyp. égalité.} \tag{27.139f}$$

La dernière ligne est l'hypothèse d'égalité $\|f\|_p+\|g\|_p=\|f+g\|_p$. Comme le premier et le dernier membre de ces inégalités sont égaux, toutes les inégalités sont des égalités.

(2) **$\Rightarrow$, première inégalité**

L'inégalité (27.139b) est une égalité :

$$\int|f+g|^{p-1}\big(|f+g|-|f|-|g|\big)=0. \tag{27.140}$$

Par la proposition 9.108(1), la fonction intégrée est presque partout nulle ou positive. Pour que l'intégrale soit nulle, il faut que la fonction soit presque partout nulle (lemme 14.199). Presque chaque x vérifie sont une des deux conditions suivantes :

(2a) $|f(x)+g(x)|=0$
(2b) $|f(x)+g(x)|-|f(x)|-|g(x)|=0$.

Pour les x vérifiant la première condition, nous avons déjà vu que $\alpha f+\beta g=0$ pour n'importe quels α et β, juste en dessous de (27.137).

En ce qui concerne les x vérifiant la seconde condition, la proposition 9.108(1) montre qu'ils vérifient $f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0$.

Nous avons donc déjà montré que si f et g vérifient une égalité, alors pour presque tout x, nous avons

$$f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0. \tag{27.141}$$

(3) **$\Rightarrow$, seconde inégalité (Hölder)**

La seconde inégalité à être une égalité est (27.139c) :

$$\int|f||f+g|^{p-1}=\|f\|_p\|f+g\|_p^{p-1}. \tag{27.142}$$

Il s'agit du cas d'égalité de Hölder avec $a=f$, $b=|f+g|^{p-1}$ traité dans la proposition 27.39(3). Nous sommes donc dans un des trois cas suivants :

- $f = 0$ presque partout,
- $f + g = 0$ presque partout,
- il existe $\lambda > 0$ tel que $|a|^p = \lambda |b|^q$.

Dans le premier cas, nous avons $\alpha f = \beta g$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Le second cas donne $f = g = 0$ et donc $\alpha f + \beta g = 0$ pour n'importe quels α et β (voir autour de (27.137)).

Nous supposons donc être dans le troisième cas. Étant donné que $q = p/(p-1)$, nous avons

$$|b|^q = \big(|f+g|^{p-1}\big)^q = |f+g|^p, \tag{27.143}$$

et donc la contrainte est l'existence de $\lambda > 0$ tel que $|f|^p = \lambda |f+g|^p$.

(4) **⇒, troisième inégalité (Hölder)**

La seconde application de Hölder est avec $a = g$ et $b = |f+g|^{p-1}$. Nous sommes dans un cas d'égalité si nous sommes dans un des trois cas suivants :

- $g = 0$
- $f + g = 0$
- il existe $\sigma > 0$ tel que $|a|^p = \sigma |b|^q$.

Encore une fois nous supposons être dans le troisième cas. Il existe donc $\sigma > 0$ tel que $|g|^p = \sigma |f+g|^p$.

(5) **Petit résumé**

Nous avons prouvé l'existence de $\lambda, \sigma > 0$ tels que

$$\begin{cases} f(x)\overline{g(x)} \geqslant 0 \quad \text{pour presque tout } x & \text{(27.144a)} \\ |f|^p = \lambda |f+g|^p & \text{(27.144b)} \\ |g|^p = \sigma |f+g|^p & \text{(27.144c)} \end{cases}$$

(6) **Des calculs et des cas** En passant à la racine p^{e} :

$$\begin{cases} f(x)\overline{g(x)} \geqslant 0 \quad \text{pour presque tout } x & \text{(27.145a)} \\ |f| = s|f+g| & \text{(27.145b)} \\ |g| = t|f+g|. & \text{(27.145c)} \end{cases}$$

Les deux dernières égalités du système permettent d'écrire

$$t|f| = st|f+g| = s|g|. \tag{27.146}$$

Nous considérons donc le système, valide pour presque tout x : SUBEQSooLKGDooQouvhW

$$\begin{cases} f(x)\overline{g(x)} \geqslant 0 & \text{(27.147a)} \\ t|f(x)| = s|g(x)| & \text{(27.147b)} \end{cases}$$

Avec la contrainte $(s,t) \neq (0,0)$.

La proposition 9.107 appliqué à chaque couple $f(x)$, $g(x)$ donne l'existence d'une fonction réelle a telle que pour chaque x nous ayons un des deux cas suivants :

- $g(x) = 0$
- $f(x) = a(x)g(x)$.

De plus $a(x) \in \mathbb{R}^+$ parce que $f(x)\overline{g(x)}$ est non seulement réel, mais également positif.

(6a) $s = 0$ Alors nous avons $t|f(x)| = 0$ et donc $f(x) = 0$ pour presque tout x parce que $t \neq 0$. Nous avons alors $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

(6b) $s \neq 0$ Les points de Ω se séparent en deux parties : $g(x) = 0$ et les autres.

(6b.i) $g(x) \neq 0$ Dans ce cas nous avons le système

$$\begin{cases} f(x) = a(x)g(x) & (27.148a) \\ t|f(x)| = s|g(x)|. & (27.148b) \end{cases}$$

Vu que $s \neq 0$ et $g(x) \neq 0$, la dernière équation donne $t|f(x)| \neq 0$ et donc $t \neq 0$ et $f(x) \neq 0$. La première équation donne $a(x) = f(x)/g(x)$ que nous pouvons mette dans la secondes pour obternir :

$$|a(x)| = \frac{s}{t}. \tag{27.149}$$

Vu que a est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, cela donne

$$a(x) = \frac{s}{t} \tag{27.150}$$

pour tout x tel que $g(x) \neq 0$.

(6b.ii) $g(x) = 0$ Dans ce cas, le système (27.147) devient

$$t|f(x)| = 0. \tag{27.151}$$

Vu que $s \neq 0$, nous avons $f(x) = 0$. Donc n'importe quel choix de α et β fait l'affaire pour ces points. Il n'y a pas de contraintes.

(6c) $\Leftarrow$ Nous supposons $\alpha f(x) = \beta g(x)$ pour presque tout x. Pour fixer les idées, nous supposons que $\beta \neq 0$ (sinon, refaire le raisonnement en inversant les rôles de f et g). En posant $\lambda = \alpha/\beta$ nous avons

$$g(x) = \lambda f(x) \tag{27.152}$$

pour presque tout x. En passant par l'intégrale,

$$\|f+g\|_p = \|(1+\lambda)f\|_p = (1+\lambda)\|f\|_p = \|f\|_p + \lambda\|f\|_p = \|f\|_p + \|\lambda f\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{27.153}$$

Le λ et $(1+\lambda)$ rentrent et sortent des normes parce qu'ils sont positifs.

□

27.3.6.2 Inégalité intégrale de Minkowski

Dans le cas où nous n'avons pas une somme de deux fonctions mais d'une infinité paramétrée par $y \in Y$, nous pouvons convertir la somme de l'inégalité de Minkowski en une intégrale :

$$\left[\int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|d\nu(y)\Big)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leqslant \int_Y \Big(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x)\Big)^{1/p} d\nu(y). \tag{27.154}$$

Ce sera la proposition 27.50.

LEMooMZWYooIsJJms

Lemme 27.46 ([1]).
Soit un espace mesuré X. Soient p, q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient des applications $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ telles que $f \in L^p(X)$ et $g^{p-1} \in L^q(X)$. Alors

$$\int_X f(x)g^{p-1}(x)dx \leqslant \|f\|_p \|g\|_p^{p-1}. \tag{27.155}$$

Démonstration. Nous utilisons Hölder 27.39(1) :

$$\int_X f(x)g^{p-1}(x)dx = \|fg^{p-1}\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g^{p-1}\|_q. \tag{27.156}$$

Le seul truc à savoir est que $q(p-1) = p$ et $p/q = p-1$; à part ça, nous calculons

$$\begin{aligned} \|g^{p-1}\|_q &= \left(\int_X |g^{p-1}(x)|^q\right)^{1/q} & (27.157a) \\ &= \left(\int_X |g(x)^{q(p-1)}\right)^{1/q} & (27.157b) \\ &= \left(\int_X g(x)^p\right)^{1/q} & (27.157c) \\ &= \Big(\|g\|_p^p\Big)^{1/q} = \|g\|_p^{p/q} = \|g\|_p^{p-1}. & (27.157d) \end{aligned}$$

□

PROPooYOWUooXoNLbL

Proposition 27.47 ([733, 1]).
Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ainsi que $q \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit un espace mesuré σ-fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

ITEMooONTQooMHHOxk

(1) Si $p < \infty$ et si $\|f\|_p < \infty$, alors

$$\|f\|_p = \max_{\|\varphi\|_q \leqslant 1} \Big| \int_\Omega f\varphi \, d\mu \Big|. \tag{27.158}$$

ITEMooBZXAooAfgWvF

(2) Si $p \leqslant \infty$, alors

$$\|f\|_p = \sup_{\|\varphi\|_q \leqslant 1} \Big| \int_\Omega f\varphi \, d\mu \Big|. \tag{27.159}$$

Démonstration. Notez l'inégalité de Hölder 27.39(1) :

$$\Big| \int_\Omega f\varphi \Big| \leqslant \int_\Omega |f\varphi| = \|f\varphi\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|\varphi\|_q. \tag{27.160}$$

Donc l'inégalité dans un sens est toujours vérifiée. Nous ne nous concentrons que sur l'inégalité dans l'autre sens.

En plein de parties.

(1) **Pour (1)** Notons tout de suite qu'on suppose $\|f\|_p \neq 0$. Sinon f est presque partout nulle et n'importe que φ fait l'affaire. Nous subdivisons encore en deux parties.

(1a) **Si $\|f\|_p = 1$** Nous posons

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega &\to \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} \frac{|f(\omega)|^p}{f(\omega)} & \text{si } f(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{27.161}$$

Nous avons bien $\|\varphi\|_q = 1$ parce que, en remarquant que $q(p-1) = 1$,

$$\|\varphi\|_q^q = \int_\Omega |\varphi(\omega)|^q d\omega = \int_{\Omega_1} \big(|f(\omega)|^{p-1}\big)^q = \int_\Omega |f(\omega)| p d\omega = 1. \tag{27.162}$$

(1b) **Si $\|f\|_p < \infty$** Nous posons $g = f/\|f\|_p$. Vu que $\|g\|_p = 1$, nous reprenons le φ du cas précédent qui va pour g. Et nous vérifions que ce φ fonctionne aussi pour f :

$$\int_\Omega f\varphi = \|f\|_p \int_\Omega g\varphi = \|f\|_p. \tag{27.163}$$

(2) **Pour (2), avec $p < \infty$ et $\|f\|_p = \infty$** Nous supposons que $p < \infty$ et que $\|f\|_p = \infty$. Il y a deux cas. Si $f = \infty$ sur une partie de mesure non nulle, il suffit de prendre φ non nulle sur cette partie, et on aura facilement $\int_\Omega f\varphi = \infty$.

Nous supposons que $|f| = \infty$ seulement sur une partie de mesure nulle, et nous considérons des parties Ω_k comme dans la proposition 27.21. Ensuite nous posons

$$\begin{aligned} \alpha_k : \Omega &\to \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin \Omega_k \\ 0 & \text{si } f(\omega) = 0 \\ \frac{|f(\omega)|^p}{f(\omega)} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{27.164}$$

et $\varphi_k = \alpha_k / \|\alpha_k\|_q$. Nous avons manifestement $\|\varphi_k\|_q = 1$.

Commençons par calculer ce que vaut réellement $\|\alpha_k\|_q$. En notant $\Omega_k' = \{\omega \in \Omega_k \text{ tel que } f(\omega) \neq 0\}$ nous avons un petit calcul :

$$\|\alpha_k\|_q = \left(\int_\Omega |\alpha_k(\omega)|^q \right)^{1/q} \tag{27.165a}$$

$$= \left(\int_{\Omega_k'} \frac{|f(\omega)|^{pq}}{|f(\omega)|^q} d\omega \right)^{1/q} \tag{27.165b}$$

$$= \left(\int_{\Omega_k'} |f(\omega)|^p \right)^{1/q} \tag{27.165c}$$

$$= \|f\|_{k,p}^{p/q} \tag{27.165d}$$

où nous avons noté $\|f\|_{k,p}$ la norme L^p de f sur Ω_k.

Nous pouvons maintenant prouver notre énoncé :

$$\int_\Omega f\varphi_k = \frac{1}{\|\alpha_k\|_q}\int_{\Omega'_k} f(\omega)\frac{|f(\omega)|^k}{f(\omega)}d\omega \tag{27.166a}$$
$$= \frac{1}{\|\alpha_k\|_q}\int_{\Omega_k}|f(\omega)|^p d\omega \tag{27.166b}$$
$$= \frac{1}{\|\alpha_k\|_q}\|f\|_{k,p}^p \tag{27.166c}$$
$$= \|f\|_{k,p}^{p-p/q} \tag{27.166d}$$
$$= \|f\|_{k,p}. \tag{27.166e}$$

La proposition 27.22 conclu que

$$\int_\Omega f\varphi_k = \|f\|_{k,p} \to \|f\|_p = \infty. \tag{27.167}$$

(3) **Pour (2), avec $p = \infty$** Nous passons au cas $p = \infty$[21]. Soit $\epsilon \in]0,1[$, et posons

$$A_\epsilon = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } |f(\omega) > 1 - \epsilon|\}. \tag{27.168}$$

Notez que $A_\epsilon \in \mathcal{A}$.

(3a) **Si $\|f\|_\infty = 1$** Nous avons $\mu(A_\epsilon) > 0$, sinon nous aurions $|f(x)| < 1 - \epsilon$ presque partout et donc $\|f\|_\infty < 1$. Vu que (Ω, μ) est σ-fini, il existe une partie mesurable $B_\epsilon \subset A_\epsilon$ vérifiant $0 < \mu(B_\epsilon) < \infty$. Nous posons alors

$$\begin{aligned}\varphi_\epsilon\colon \Omega &\to \mathbb{C}\\ x &\mapsto \begin{cases}\frac{|f(x)|}{\mu(B_\epsilon)f(x)} & \text{si } x \in B_\epsilon\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{27.169}$$

Notons que $B_\epsilon \subset A_\epsilon$ et donc $f(x) \neq 0$ sur B_ϵ. La fonction est donc bien définie(pas de problèmes avec le dénominateur).

Sur B_ϵ, nous avons $|\varphi_\epsilon(x) = 1/\mu(B_\epsilon)| < \infty$. Donc $\varphi_\epsilon \in L^1(\Omega)$ parce que B_ϵ est de mesure finie. De plus

$$\int_\Omega |\varphi_\epsilon(x)|dx = \int_{B_\epsilon}\frac{1}{\mu(B_\epsilon)}dx = 1. \tag{27.170}$$

Nous avons prouvé que pour tout $\epsilon \in]0,1[$, nous avons

$$\sup_{\|\varphi\|=1}\int_\Omega f\varphi \geqslant 1 - \epsilon, \tag{27.171}$$

et donc que

$$\sup_{\|\varphi\|=1}\int_\Omega f\varphi = 1 = \|f\|_\infty. \tag{27.172}$$

(4) **Si $\|f\|_\infty \neq 1$** Nous posons $g = f/\|f\|_\infty$, de telle sorte que $\|g\|_\infty = 1$. Nous prenons les φ_ϵ correspondant à g et nous avons

$$\int_\Omega f\varphi_\epsilon = \|f\|_\infty\int_\Omega g\varphi_\epsilon \geqslant \|f\|_\infty(1-\epsilon), \tag{27.173}$$

et donc ça marche encore.

□

27.48.
Pour la suite, nous considérons deux espaces mesurés σ-finis X et Y ainsi qu'une application $h\colon X\times Y \to \mathbb{C}$. Nous notons alors

$$\begin{aligned}h_{1,y}\colon X &\to \mathbb{C}\\ x &\mapsto h(x,y),\end{aligned} \tag{27.174}$$

[21] Et c'est le moment de ne pas confondre $\|f\|_\infty$ qui signifie en réalité $\|f\|_{L^\infty}$ avec la norme supremum qui n'a rien à voir avec que nous faisons ici.

et

$$\begin{aligned} h_{2,x}\colon Y &\to \mathbb{C} \\ y &\mapsto h(x,y), \end{aligned} \tag{27.175}$$

et

$$\begin{aligned} N_1\colon Y &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \|h_{1,y}\|_p, \end{aligned} \tag{27.176}$$

et

$$\begin{aligned} N_2\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|h_{2,x}\|_1 \end{aligned} \tag{27.177}$$

pour tous les $p \in \mathbb{R}$ pour lesquels N_2 a un sens.

PROPooUMSFooJWFJzt

Proposition 27.49 ([734]).
Soient deux espaces mesurés σ-finis X et Y. Soit $1 \leqslant p < \infty$. Soit une application mesurable $h\colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Alors l'application

$$\begin{aligned} N_1\colon Y &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \|h_{1,y}\|_p \end{aligned} \tag{27.178}$$

est mesurable.

Démonstration. Explicitons :

$$N(y) = \int_X |h(x,y)|^p dy. \tag{27.179}$$

Le théorème de Fubini-Tonelli 14.302(1) appliqué à la fonction

$$\begin{aligned} f\colon X \times Y &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto |h(x,y)|^p \end{aligned} \tag{27.180}$$

dit que N est mesurable. □

PROPooINXBooTrTxwg

Proposition 27.50 (Inégalité intégrale de Minkowski[1, 735, 736, 77]).
Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Soient deux espaces mesurables σ-finis X et Y. Soit $h\colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Nous supposons :

(1) h est mesurable.

(2) Pour presque tout $y \in Y$, nous avons $h_{1,y} \in L^p(X)$.

(3) $N_1 \in L^1(Y)$.

Alors nous avons :

ITEMooCCQKooAyHfke

(1) $h_{2,x} \in L^1(Y)$ pour presque tout $x \in X$.

ITEMooVWLZooUYAYuJ

(2) $N_2 \in L^p(X)$.

ITEMooTBUEooQPnLEA

(3) La formule :

$$\left(\int_X \Big|\int_Y h(x,y)dy\Big|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \int_Y \left(\int_X |h(x,y)|^p dx\right)^{1/p} dy \tag{27.181}$$

EQooFMJCooQttKYt

ou, en posant

$$\begin{aligned} F\colon X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_Y h(x,y)dy, \end{aligned} \tag{27.182}$$

l'inégalité

$$\|F\|_p \leqslant \int_Y \|h_{1,y}\|_p dy. \tag{27.183}$$

EQooRAIDooBhDMPe

Note : l'équation (27.183) est plus adaptée que (27.181) pour l'énoncé dans le cas $p = \infty$.

Démonstration. Nous subdivisons selon les valeurs de p. Et d'ailleurs, les points (1), (2) et (3) ne seront pas démontrés dans l'ordre.

(1) **Pour $p = 1$** Point par point.

(1a) **Pour (3)** En utilisant Fubini-Tonelli 14.302(2),

$$\int_X \Big| \int_Y h(x,y)dy \Big| dx \leqslant \int_X \Big(\int_Y |h(x,y)|dy \Big) dx = \int_Y \big(\int_X |h(x,y)|dx \big) dy. \tag{27.184}$$

(1b) **Pour (1)** En posant

$$\begin{aligned} F\colon X &\to [0,\infty] \\ x &\mapsto \|h_{2,x}\|_1, \end{aligned} \tag{27.185}$$

nous avons

$$F(x) = \|h_{2,x}\|_1 = \int_Y |h(x,y)|dy. \tag{27.186}$$

En permutant les intégrales par Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_X F(x) &= \int_X \Big(\int_Y |h(x,y)|dy \Big) dx && (27.187a) \\ &= \int_Y \Big(\int_X |h(x,y)|dx \Big) dy && (27.187b) \\ &= \int_Y N_1(y) && (27.187c) \\ &< \infty. && (27.187d) \end{aligned}$$

La dernière ligne est l'hypothèse que $N_1 \in L^1(Y)$. Le fait que $\int_X F(x) < \infty$ implique que $F(x) < \infty$ pour presque tout x.

(1c) **Pour (2)** Nous avons un calcul comme d'habitude en utilisant Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \|N_2\|_1 &= \int_X \Big(\int_Y |h(x,y)|dy \Big) dx && (27.188a) \\ &= \int_Y \|h_{1,y}\|_1 dy && (27.188b) \\ &= \int_Y N_1(y)dy && (27.188c) \\ &< \infty. && (27.188d) \end{aligned}$$

(2) **Pour $p = \infty$** Nous définissons

$$\begin{aligned} F\colon X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_Y h(x,y)dy. \end{aligned} \tag{27.189}$$

Nous avons $\big|F(x)\big| \leqslant \int_Y |h(x,y)|dy$, et $|h_{1,y}(x)| \leqslant \|h_{1,y}\|_\infty$ pour presque tout $x \in X$. Armé de cela, nous pouvons faire un petit calcul avec le supremum essentiel (27.78) :

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^\infty} &= \text{ess-sup}_{x\in X} \Big| \int_Y h(x,y) \Big| && (27.190a) \\ &\leqslant \text{ess-sup}_{x\in X} \int_Y \|h_{1,y}\|_{L^\infty} dy && (27.190b) \\ &= \int_Y \|h_{1,y}\|_{L^\infty}. && (27.190c) \end{aligned}$$

Cela est bien la relation (27.183) avec $p = \infty$.

(3) **Si $1 < p < \infty$** Plusieurs parties.

(3a) **Un premier calcul**
Nous posons

$$\begin{aligned} F\colon X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_Y h(x,y)dy, \end{aligned} \tag{27.191}$$

nous considérons un certain $\varphi \in L^q(X)$, et nous calculons $s = |\int_X F\varphi|$:

$$s \leqslant \int_X |F||\varphi| \tag{27.192a}$$
$$= \int_X \left[\int_Y |h(x,y)||\varphi(x)|dy\right] dx. \tag{27.192b}$$

Le théorème de Fubini-Tonelli 14.302(2) appliqué à la fonction $f(x,y) = |h(x,y)||g(x)|$ permet de permuter les intégrales parce que f est mesurable et positive[22] :

$$s \leqslant \int_Y \left(\int_X |h(x,y)||\varphi(x)|dx\right) dy. \tag{27.193}$$

Nous pouvons utiliser Hölder 27.39(1) pour l'intégrale sur X parce que $\varphi \in L^q$ et $h_{1,y} \in L^p$:

$$\int_X |h(x,y)||\varphi(x)| = \|h_{1,y}\varphi\|_1 \leqslant \|h_{1,y}\|_p\|\varphi\|_q = N_1(y)\|\varphi\|_q. \tag{27.194}$$

Parmi les hypothèses, nous avons $N_1 \in L^1(Y)$. Donc l'intégrale sur Y se passe en réalité assez bien et nous avons

$$s \leqslant \int_Y \|h_{1,y}\|_p\|\varphi\|_q dy = \|\varphi\|_q \int_Y N_1(y)dy < \infty. \tag{27.195}$$

Nous avons prouvé que pour tout $\varphi \in L^q(Y)$,

$$\left|\int_X F\varphi\right| \leqslant \|\varphi\|_q\|N_1\|_1 < \infty. \tag{27.196}$$

Nous prenons maintenant le supremum sur tous les $\varphi \in L^q(Y)$ satisfaisant $\|\varphi\|_q = 1$. La proposition 27.47(2) nous dit que le membre de gauche devient $\|F\|_p$. Quant au membre de droite, il devient simplement $\|N_1\|_1$:

$$\|F\|_p \leqslant \|N_1\|_1 < \infty. \tag{27.197}$$ EQooKIFGooRHBGXl

(3b) **Un second calcul** Nous faisons exactement le même calcul que le premier, mais en partant de

$$\begin{aligned} G\colon X &\to [0,\infty] \\ x &\mapsto \int_Y |h(x,y)|dy. \end{aligned} \tag{27.198}$$

Nous considérons $\varphi \in L^q(X)$, et nous calculons en suivant les mêmes étapes :

$$\|G\varphi\|_1 = \int_X |G(x)\varphi(x)|dx \tag{27.199a}$$
$$= \dots \tag{27.199b}$$
$$\leqslant \|\varphi\|_q\|N_1\|_1. \tag{27.199c}$$

Cela montre que pour tout $\varphi \in L^q(X)$ nous avons

$$\left|\int_X G\varphi\right| \leqslant \int_X |G\varphi| = \|G\varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_q\|N_1\|_1 < \infty, \tag{27.200}$$

et en passant au supremum, nous avons

$$\|G\|_p \leqslant \|N_1\|_1 < \infty \tag{27.201}$$

(3c) **Pour (3)** Nous avons, en utilisant 27.197 :

$$\left(\int_X \left|\int_Y h(x,y)dy\right|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_X |F(x)|^p dx\right)^{1/p} = \|F\|_p \leqslant \|N_1\|_1 \tag{27.202}$$

(3d) **Pour (1)** Nous avons vu que $\|G\|_p < \infty$. Donc $G < \infty$ presque partout. Cela prouve que $h_{2,x} \in L^1(Y)$ pour presque tout x.

[22] Nous n'avons pas (encore) de garanties que $|f(x,y)| < \infty$, mais ce n'est pas important pour le moment.

(3e) **Pour (2)** Nous devons voir que $N_2 \in L^p(X)$. Calcul avec permutation d'intégrales de Fubini-Tonelli :

$$\|N_2\|_p^p = \int_X \Big|\|h_{2,x}\|_1\Big|^p dx \tag{27.203a}$$
$$= \int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|dy\Big)^p dx \tag{27.203b}$$
$$= \int_X |G(x)|^p \tag{27.203c}$$
$$= \|G\|_p^p \tag{27.203d}$$
$$< \infty. \tag{27.203e}$$

□

LEMooPSBWooGLggTe

Lemme 27.51 ([728]).
Si (X,μ) est un espace mesuré σ-fini[23] *non nul*[24]*, il existe une fonction mesurable strictement positive en escalier $k\colon X \to]0,\infty[$ telle que*

$$\int_X k d\mu = 1. \tag{27.204}$$

Démonstration. Vue que X est σ-fini, il existe des parties (A_n) de mesures finies telles que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$. Afin d'avoir des parties disjointes, nous posons

$$B_n = A_n \setminus \big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_n\big). \tag{27.205}$$

Nous posons

$$k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\mu(B_n)} \mathbb{1}_{B_n} \tag{27.206}$$

où (α_n) est une suite de réels strictement positifs dont la somme vaut 1. En vertu de la somme géométrique (10.471), prendre $\alpha_n = 2^{-n}$ fonctionne.

Notons que les B_n étant disjoints, pour chaque x, la somme définissant $k(x)$ est non seulement finie, mais se réduit à un seul terme. L'application k est en escalier ; son intégrale vaut

$$\int_X k d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\mu(B_n)} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1. \tag{27.207}$$

□

À mon avis l'énoncé de 27.52 n'est pas tellement correct. Il manque des hypothèse. Ne l'utilisez que si vous êtes sûr ; et préférez 27.50.

PROPooGZJZooXfZdqn

Proposition 27.52 (Forme intégrale de Minkowski[728]).
Soient deux espaces σ-finis (X,μ) et (Y,ν). Si $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ est mesurable[25] *et si $p \geqslant 1$, alors*

$$\Big[\int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|d\nu(y)\Big)^p d\mu(x)\Big]^{1/p} \leqslant \int_Y \Big(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x)\Big)^{1/p} d\nu(y). \tag{27.208}$$

EQooAEXWooYJtGGR

De façon plus compacte :

$$\Big\| x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)\Big\|_p \leqslant \int_Y \|f_y\|_p d\nu(y) \tag{27.209}$$

où $f_y(x) = f(x,y)$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **La fonction M** Pour toute application mesurable $g\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ nous posons

$$M(g) = \int_Y \Big[\int_X |g(x,y)|^p d\mu(x)\Big]^{1/p} d\nu(y). \tag{27.210}$$

Cette fonction a une propriété d'homogénéité : $M(\lambda g) = \lambda M(g)$ pour tout $\lambda \in [0,\infty[$.

[23] Définition 14.18.
[24] C'est-à-dire que μ n'est pas la mesure identiquement nulle.
[25] Pour l'espace mesuré produit $X \times Y, \mu \otimes \nu$.

(2) **Si $M(g) < 1$** Nous considérons une fonction mesurable $g\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ telle que $M(g) < 1$. Soit $k\colon Y \to]0,\infty[$ une fonction donnée par le lemme 27.51, c'est-à-dire telle que $\int_Y k = 1$. Nous posons

$$\begin{aligned} s\colon Y &\to [0,\infty] \\ y &\mapsto \left(\int_X |g(x,y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, \end{aligned} \tag{27.211}$$

ainsi que

$$h(y) = s(y) + \big(1 - M(g)\big)k(y). \tag{27.212}$$

Vu que $M(g) < 1$ et que $k > 0$, nous avons l'inégalité stricte $h(y) > s(y) \geqslant 0$ pour tout $y \in Y$. Nous avons de plus

$$\int_Y h(y) d\nu(y) = \underbrace{\int_Y s}_{=M(g)} + \big(1 - M(g)\big) \underbrace{\int_Y k}_{=1} = 1. \tag{27.213}$$

Nous considérons maintenant la mesure $\rho = h\nu$ (produite d'une mesure par une fonction, définition 14.212). Nous venons de montrer que c'est une mesure de probablilité. En posant $\alpha(x) = |x|^p$, nous pouvons faire quelques calculs avec les justifications en-dessous : SUBEQSooPPZIooSEDcpS

$$\begin{aligned} \alpha\Big(\int_Y |g(x,y)| d\nu(y) \Big) &= \alpha\Big(\int_Y h(y)^{-1} |g(x,y)| h(y) d\nu(y) \Big) && (27.214a) \\ &= \alpha\left(\int_Y [|g(x,y)| h(y)^{-1}] d\rho(y) \right) && (27.214b) \\ &\leqslant \int_Y \alpha\big(|g(x,y)| h(y)^{-1}\big) d\rho(y) && (27.214c) \\ &= \int_Y |g(x,y)|^p |h(y)|^{1-p} d\nu(y) && (27.214d) \end{aligned}$$

(27.214e)

SUBEQooDAWRooQOfQBE SUBEQooLDEHooJelfxU

Justifications.

- Pour (27.214c). Inégalité de Jensen, proposition 27.37
- Pour (27.214d). La fonction h est à valeurs positives ; donc $h = |h|$ et nous pouvons coller le h qui ressort de ρ avec le $|h^{-1}|^p$.

Nous continuons en intégrant l'inégalité (27.214) sur X :

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_Y |g(x,y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) &\leqslant \int_X \left[\int_Y |g(x,y)|^p h(y)^{1-p} d\nu(y) \right] d\mu(x) && (27.215a) \\ &= \int_Y \int_X \big[|g(x,y)|^p h(y)^{1-p} d\mu(x) \big] d\nu(y) && (27.215b) \\ &= \int_Y \left(\int_X \big[|g(x,y)|^p d\mu(x) \big] \right) h(y)^{1-p} d\nu(y) && (27.215c) \\ &= \int_Y s(y)^p h(y)^{1-p} d\nu(y) && (27.215d) \\ &\leqslant \int_Y h(y) d\nu(y) && (27.215e) \\ &= 1. && (27.215f) \end{aligned}$$

SUBEQooSDNWooIZcFNB SUBEQooEFTLooPwpovo

Justifications.

- Pour (27.215b). Les intégrales sont permutées grâce au théorème de Fibini-Tonelli 14.302.
- Pour (27.215e). Nous savons que $h > s \geqslant 0$, donc $s(y)^p/h(y)^p < 1$.

Au final nous avons prouvé que si $M(g) < 1$, alors nous avons

$$\int_X \left(\int_Y |g(x,y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \leqslant 1. \tag{27.216}$$

EQooTGDMooZGYbGx

(3) **La preuve proprement dite** Nous considérons une fonction mesurable $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$ comme dans les hypothèses. Astuce : considérons $0<t<1$ et appliquons l'inégalité (27.216) à $g=\frac{t}{M(f)}f$. Cela est possible parce que

$$M(g)=\frac{t}{M(f)}M(f)=t<1. \tag{27.217}$$

Nous avons :

$$\int_X\left(\int_Y|\frac{t}{M(f)}||f(x,y)|^p d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\leqslant 1, \tag{27.218}$$

et donc, vu que $M(f)$ et t sont positifs,

$$\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|^p d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\leqslant\frac{M(f)}{t}. \tag{27.219}$$

Cette inégalité est valable pour tout $t<1$ et, ô incroyable !, ce t n'est qu'à droite. Nous pouvons prendre la limite $t\to 1$ dans cette inégalité[26] :

$$\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|^p d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\leqslant M(f). \tag{27.220}$$

Et ça, c'est ce que nous devions démontrer.

□

27.3.7 Ni inclusions ni inégalités

Aucun espace $L^p(\mathbb{R})$ n'est inclus dans aucun autre ni aucune norme n'est plus grande qu'une autre (sur les intersections). Nous verrons cependant en la proposition 27.53 que de telles inclusions et inégalités sont possibles pour $L^p\big([0,1]\big)$.

Nous allons donner des exemples de tout ça en supposant $p<q$ et en nous appuyant lourdement sur les intégrales de $\frac{1}{x^\alpha}$ étudiées par la proposition 14.301.

(1) $L^p\not\subset L^q$

La fonction

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^{1/q}} & \text{si } 0<x<1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{27.221}$$

est dans L^p mais pas dans L^q. En effet

$$\|f\|_p^p=\int_0^1\frac{1}{x^{p/q}}dx<\infty \tag{27.222}$$

parce que $p<q$ et $p/q<1$. Par contre

$$\|f\|_q^q=\int_0^1\frac{1}{x}dx=\infty. \tag{27.223}$$

(2) $L^q\not\subset L^p$

La fonction

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^{1/p}} & \text{si } x>1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{27.224}$$

est dans L^q mais pas dans L^p. En effet

$$\|f\|_p^p=\int_1^\infty\frac{1}{x}=\infty \tag{27.225}$$

alors que

$$\|f\|_q^q=\int_1^\infty\frac{1}{x^{q/p}}dx<\infty. \tag{27.226}$$

[26] Nous ne pouvons pas simplement poursuivre les inégalités en majorant t par 1 parce que le t est au dénominateur : l'inégalité irait dans le mauvais sens.

(3) **Exemple de $\|f\|_p > \|f\|_q$**
La fonction
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{27.227}$$
Nous avons
$$\|f\|_p = 2^{1/p} \tag{27.228a}$$
$$\|f\|_q = 2^{1/q}. \tag{27.228b}$$
Mais comme $p < q$ donc $\|f\|_p > \|f\|_q$.

(4) **Exemple de $\|f\|_p < \|f\|_q$**
La fonction
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,\frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{27.229}$$
Alors
$$\|f\|_p = \frac{1}{2^{1/p}} \tag{27.230a}$$
$$\|f\|_q = \frac{1}{2^{1/q}} \tag{27.230b}$$
et donc $\|f\|_p < \|f\|_q$.

Ces exemples donnent un exemple de fonction f telle que $\|f\|_p < \|f\|_q$ pour tout espace $L^p(I)$ et $L^q(I)$ avec $I \subset \mathbb{R}$. Par contre l'exemple $\|f\|_p > \|f\|_q$ ne fonctionne que si la taille de I est plus grande que 1. Et pour cause : il y a des inclusions si I est borné.

PropIRDooFSWORl

Proposition 27.53 ([13])**.**
Inclusions et inégalités dans le cas d'un ensemble de mesure finie.

(1) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dès que $p \leqslant q$.

ItemWSTooLcpOvXii

(2) Si $1 < p < 2$ et si $f \in L^2\big([0,1]\big)$ alors $\|f\|_p \leqslant \|f\|_2$.

Démonstration. Pour la simplicité des notations nous allons noter L^p pour $L^p(\Omega)$, et pareillement pour L^q. Soit $f \in L^q$. Nous posons
$$A = \{x \in \Omega \text{ tel que } |f(x)| \geqslant 1\}. \tag{27.231}$$
Étant donné que $p \leqslant q$ nous avons $|f|^p \leqslant |f|^q$ sur A ; par conséquent $\int_A |f|^p$ converge parce que $\int_A |f|^q$ converge.

L'ensemble A^c est évidemment borné (complémentaire dans Ω) et sur A^c nous avons $|f(x)| \leqslant 1$ et donc $|f|^p \leqslant 1$. L'intégrale $\int_{A^c} |f|^p$ converge donc également.

Au final $\int_\Omega |f|^p$ converge et $f \in L^p$.

Soit à présent $f \in L^2$; par le premier point nous avons immédiatement $f \in L^2 \cap L^p$. Soit aussi $r \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{2/p} + \frac{1}{r} = 1$. Nous avons $|f|^p \in L^{2/p}$, et vu que nous sommes sur un domaine borné, $1 \in L^r$. Nous écrivons l'inégalité de Hölder (27.102) avec ces fonctions. D'une part
$$\|f\|_1 = \||f|^p\|_1 = \|f\|_p^p. \tag{27.232}$$
D'autre part
$$\||f|^p\|_{2/p} = \left(\int |f|^2\right)^{p/2} = \|f\|_2^p. \tag{27.233}$$
Donc $\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_2^p$, ce qui prouve l'assertion (2) parce que $p > 1$. □

Remarque 27.54.
Nous n'avons cependant pas $L^2\big([0,1]\big) = L^p\big([0,1]\big)$ parce que l'exemple (27.221) fonctionne encore :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{27.234}$$
pour $x \in [0,1]$ donne bien
$$\|f\|_2 = \int_0^1 \frac{1}{x} = \infty \tag{27.235}$$
et $\|f\|_p = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/2}} < \infty$ parce que $1 < p < 2$.

27.3.8 Complétude

ThoUYBDWQX

Théorème 27.55 ([737, 738]).
Pour $1 \leqslant p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est complet.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^p. Pour tout i, il existe $N_i \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_k - f_l\|_p \leqslant 2^{-i}$ pour tout $k, l \geqslant N_i$. Nous considérons la sous-suite $g_i = f_{N_i}$, de telle sorte qu'en particulier

$$\|g_i - g_{i-1}\|_p \leqslant 2^{-i+1}. \tag{27.236}$$

EqJLoDID

Pour chaque j nous considérons la somme télescopique

$$g_j = g_0 + \sum_{i=1}^{j} (g_i - g_{i-1}) \tag{27.237}$$

et l'inégalité

$$|g_j| \leqslant |g_0| + \sum_{i=1}^{j} |g_i - g_{i-1}|. \tag{27.238}$$

Nous allons noter

$$h_j = |g_0| + \sum_{i=1}^{j} |g_i - g_{i-1}|. \tag{27.239}$$

EqSomPaFPQOWC

La suite de fonctions (h_j) ainsi définie est une suite croissante de fonctions positives qui converge donc (ponctuellement) vers une fonction h qui peut éventuellement valoir l'infini en certains points. Par continuité de la fonction $x \mapsto x^p$ nous avons

$$\lim_{j\to\infty} h_j^p = h^p, \tag{27.240}$$

puis par le théorème de la convergence monotone (théorème 14.178) nous avons

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega h_j^p d\mu = \int_\Omega h^p d\mu. \tag{27.241}$$

Utilisant à présent la continuité de la fonction $x \mapsto x^{1/p}$ nous trouvons

$$\lim_{j\to\infty} \left(\int h_j^p \right)^{1/p} = \left(\int |h|^p \right)^{1/p}. \tag{27.242}$$

Nous avons donc déjà montré que

$$\lim_{j\to\infty} \|h_j\|_p = \left(\int |h|^p \right)^{1/p} \tag{27.243}$$

où, encore une fois, rien ne garantit à ce stade que l'intégrale à droite soit un nombre fini. En utilisant l'inégalité de Minkowski (proposition 27.45) et l'inégalité (27.236) nous trouvons

$$\|h_j\|_p \leqslant \|g_0\|_p + \sum_{i=1}^{j} \|g_i - g_{i-1}\|_p \leqslant \|g_0\|_p + 1. \tag{27.244}$$

En passant à la limite,

$$\left(\int |h|^p \right)^{1/p} = \lim_{j\to\infty} \|h_j\|_p \leqslant \|g_0\|_p + 1 < \infty. \tag{27.245}$$

Par conséquent $\int |h|^p$ est finie et

$$h \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu). \tag{27.246}$$

EqgLpdUPQBP

En particulier, l'intégrale $\int h$ est finie (parce que $p \geqslant 1$) et donc que $h(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Nous savons que $h(x)$ est la limite des sommes partielles (27.239), en particulier la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} |g_i - g_{i-1}| \tag{27.247}$$

converge ponctuellement. En vertu du corolaire 14.209, la série de terme général $g_i - g_{i-1}$ converge ponctuellement. La suite g_i converge donc vers une fonction que nous notons g. Par ailleurs la suite g_i est dominée par $h \in L^p$, le théorème de la convergence dominée (théorème 14.207) implique que

$$\lim_{j\to\infty} \|g_j - g\|_p = 0. \tag{27.248}$$

Nous allons maintenant prouver que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_p = 0$. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout n et i nous avons

$$\|f_n - g\|_p = \|f_n - f_{N_i} + f_{N_i} - g\|_p \leqslant \|f_n - f_{N_i}\|_p + \|f_{N_i} - g\|_p. \tag{27.249}$$

Pour rappel, $f_{N_i} = g_i$. Si i et n sont suffisamment grands nous pouvons obtenir que chacun des deux termes est plus petit que $\epsilon/2$.

Il nous reste à prouver que $g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Nous avons déjà vu (équation (27.246)) que $h \in L^p$, mais $|g_i| \leqslant h^p$, par conséquent $g \in L^p$.

Nous avons donc montré que la suite de Cauchy (f_n) converge vers une fonction de L^p, ce qui signifie que L^p est complet. □

ThoGVmqOro

Théorème 27.56 (Riesz-Fischer[128, 739])**.**
Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $p \in [1, \infty]$. Alors

ItemPDnjOJzi

(1) Toute suite convergente dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ admet une sous-suite convergente presque partout sur Ω.

ItemPDnjOJzii

(2) La sous-suite donnée en (1) est dominée par un élément de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

ItemPDnjOJziii

(3) L'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est de Banach.

Démonstration. Le cas $p = \infty$ est à séparer des autres valeurs de p parce qu'on y parle de norme uniforme, et aucune sous-suite n'est à considérer.

(1) **Cas $p = \infty$.** Nous commençons par prouver dans le cas $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$, ou plus précisément une suite de représentants d'éléments de L^p. Pour tout $k \geqslant 1$, il existe $N_k \geqslant 0$ tel que si $m, n \geqslant N_k$, on a

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}. \tag{27.250}$$

En particulier, l'ensemble E_k sur lequel

$$|f_m(x) - f_n(x)| \geqslant \frac{1}{k} \tag{27.251}$$

est de mesure nulle. D'après le lemme 14.28, la partie $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, est encore de mesure nulle. En résumé, nous avons un N_k tel que si $m, n \geqslant N_k$, alors

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k} \tag{27.252}$$

EqKAWSmtG

pour tout x hors de E. Donc pour chaque $x \in \Omega \setminus E$, la suite $n \mapsto f_n(x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et converge donc. Cela définit donc une fonction

$$\begin{aligned} f\colon \Omega \setminus E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x). \end{aligned} \tag{27.253}$$

Cela prouve le point (1) : la convergence ponctuelle.

En passant à la limite $n \to \infty$ dans l'équation (27.252) et tenant compte que cette majoration tient pour presque tout x dans Ω, nous trouvons

$$\|f - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}. \tag{27.254}$$

Donc non seulement f est dans L^∞, mais en plus la suite (f_n) converge vers f au sens L^∞, c'est-à-dire uniformément. Cela prouve le point (3). En ce qui concerne le point (2), la suite f_n est entièrement (à partir d'un certain point) dominée par la fonction $1 + |f|$ qui est dans L^∞.

(2) **Cas $p < \infty$.**

Toute suite convergente étant de Cauchy, nous considérons une suite de Cauchy (f_n) dans $L^p(\Omega)$ et ce sera suffisant pour travailler sur le premier point. Pour montrer qu'une suite de Cauchy converge, il est suffisant de montrer qu'une sous-suite converge. Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que pour tout $n \geqslant 1$ nous ayons

$$\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p \leqslant \frac{1}{2^n}. \tag{27.255}$$

Pour créer la fonction φ, il est suffisant de prendre le N_k donné par la condition de Cauchy pour $\epsilon = 1/2^k$ et de considérer la fonction définie par récurrence[27] par $\varphi(1) = N_1$ et $\varphi(n+1) > \max\{N_n, \varphi(n)\}$. Ensuite nous considérons la fonction

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)|. \tag{27.256}$$

Notons que pour écrire cela nous avons considéré des représentants f_k qui sont alors des fonctions à l'ancienne. Étant donné que g_n est une somme de fonctions dans L^p, c'est une fonction L^p, comme nous pouvons le constater en calculant sa norme :

$$\|g_n\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \tag{27.257}$$

Étant donné que tous les termes de la somme définissant g_n sont positifs, la suite (g_n) est croissante. Mais elle est bornée en norme L^p et donc sujette à obéir au théorème de Beppo-Levi 14.178 sur la convergence monotone. Il existe donc une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que $g_n \to g$ presque partout.
Soit un $x \in \Omega$ pour lequel $g_n(x) \to g(x)$; alors pour tout $n \geqslant 2$ et $\forall q \geqslant 0$, [EqWTHojCq]

$$|f_{\varphi(n+q)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| = \Big| \underbrace{f_{\varphi(n+q)}(x) + \sum_{k=1}^{q-1} f_{\varphi(n+k)}(x)}_{=\sum_{k=1}^{q}} \underbrace{\sum_{k=1}^{q-1} f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)}_{=\sum_{k=1}^{q}} \Big| \tag{27.258a}$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{q} f_{\varphi(n+k)}(x) - \sum_{k=1}^{q} f_{\varphi(n+k-1)}(x) \right| \tag{27.258b}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{q} \left| f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n+k-1)}(x) \right| \tag{27.258c}$$

$$= g_{n+q+1}(x) - g_{n+1}(x) \tag{27.258d}$$

$$\leqslant g(x) - g_{n+1}(x). \tag{27.258e}$$

Nous prenons la limite $n \to \infty$; la dernière expression tend vers zéro et donc

$$|f_{\varphi(n+q)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \to 0 \tag{27.259}$$

pour tout q. Donc pour presque tout $x \in \Omega$, la suite $n \mapsto f_{\varphi(n)}(x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc y converge vers un nombre que nous nommons $f(x)$. Cela définit une fonction

$$\begin{aligned} f\colon \Omega \setminus E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lim_{n\to\infty} f_{\varphi(n)}(x) \end{aligned} \tag{27.260}$$

où E est de mesure nulle. Montrons que f est bien dans $L^p(\Omega)$; pour cela nous complétons la série d'inégalités (27.258) en

$$\left|f_{\varphi(n+q)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right| \leqslant g(x) - g_{n-1}(x) \leqslant g(x). \tag{27.261}$$

En prenant la limite $q \to \infty$ nous avons l'inégalité

$$|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leqslant g(x) \tag{27.262}$$ [EqMQbDRac]

[27] Utilisation du théorème 1.122. Vous n'êtes pas obligé de le citer à chaque fois, mais c'est bien de garder en tête que la définition de fonctions par récurrence n'est pas quelque chose de complètement trivial.

pour presque tout $x \in \Omega$, c'est-à-dire pour tout $x \in \Omega \setminus E$. Cette inégalité implique deux choses valables pour presque tout x dans Ω :

$$f(x) \in B\big(g(x), f_{\varphi(n)}(x)\big) \tag{27.263a}$$
$$f_{\varphi(n)}(x) \leqslant |f(x)| + |g(x)|. \tag{27.263b}$$

La première inégalité assure que $|f|^p$ est intégrable sur $\Omega \setminus E$ parce que $|f|$ est majorée par $|g|+|f_{\varphi(n)}|$. Elle prouve par conséquent le point (1) parce que $n \mapsto f_{\varphi(n)}$ est une sous-suite convergente presque partout. La seconde montre le point (2).

Attention : à ce point nous avons prouvé que $n \mapsto f_{\varphi(n)}$ est une suite de fonctions qui converge *ponctuellement presque partout* vers une fonction f qui s'avère être dans L^p. Nous n'avons pas montré que cette suite convergeait au sens de L^p vers f. Ce que nous devons montrer est que

$$\|f - f_{\varphi(n)}\|_p \to 0. \tag{27.264}$$ EqJLfnEvj

L'inégalité (27.262) nous donne aussi, toujours pour presque tout $x \in \Omega$:

$$\big|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\big|^p \leqslant g(x)^p \tag{27.265}$$

ce qui signifie que la suite[28] $|f - f_{\varphi(n)}|^p$ est dominée par la fonction $|g|^p$ qui est intégrable sur $\Omega \setminus E$ et tout autant sur Ω parce que E est négligeable ; cela prouve au passage le point (2), et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (14.207) nous dit que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \big|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\big|^p dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \big|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\big| dx = 0. \tag{27.266}$$

Cette dernière suite d'égalités se lit de la façon suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_{\varphi(n)}\|_p = \Big\| \lim_{n\to\infty} |f - f_{\varphi(n)}| \Big\|_p = 0. \tag{27.267}$$

Nous en déduisons que la suite $n \mapsto f_{\varphi(n)}$ est convergente vers f au sens de la norme $L^p(\Omega)$. Or la suite de départ (f_n) était de Cauchy (pour la norme L^p) ; donc l'existence d'une sous-suite convergente implique la convergence de la suite entière vers f, ce qu'il fallait démontrer.

□

Le théorème suivant est souvent cité en disant que L^p est un espace de Hilbert si et seulement si $p = 2$. Comme vous le voyez, il faut un peu plus d'hypothèses.

Je précise que je suis le seul à nommer ce théorème par le nom de Weinersmith. Je ne sais pas si il a déjà un nom ; alors pourquoi pas celui-là plutôt qu'un autre ? La raison de ce choix est dans la constante de Weiner, définition 44.1.

THOooCCMBooGulxkQ

Théorème 27.57 (Théorème de Weinersmith[740, 741])**.**
Nous considérons un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi qu'un nombre $p \in [1, \infty]$. Nous supposons

(1) $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert,

(2) Il existe des parties $A, B \subset L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $A \cap B = \varnothing$ et $0 < \mu(A) < \infty$ et $0 < \mu(B) < \infty$.

Alors $p = 2$.

Démonstration. Vu que L^p est un espace de Hilbert (hypothèse), il vérifie l'identité du parallélogramme de la proposition 10.30, c'est-à-dire

$$\|f + g\|_p^2 + \|f - g\|_p^2 = 2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2. \tag{27.268}$$ EQooAKKYooUIRIbyj

(1) **Pour $1 \leqslant p < \infty$**

Soient donc A, B comme dans l'hypothèse. Nous considérons les fonctions

$$f = \frac{1}{\mu(A)^{1/p}} \mathbb{1}_A \tag{27.269a}$$
$$g = \frac{1}{\mu(B)^{1/p}} \mathbb{1}_B. \tag{27.269b}$$

[28] À ce point, [128] se contente de majorer $|f_{\varphi(n)}(x)|$ par $|f(x)| + |g(x)|$, mais je ne comprends pas comment cette majoration nous permet d'utiliser la convergence dominée de Lebesgue pour montrer (27.264).

En ce qui concerne les normes L^p de f et g, c'est un calcul simple :

$$\|f\|_p^2 = \left(\int_\Omega |f(\omega)|^p d\mu\right)^{2/p} = \left(\int_A \frac{1}{\mu(A)} d\mu\right)^{2/p} = 1. \tag{27.270}$$

De même pour g : $\|f\|_p^2 = \|g\|_p^2 = 1$. Donc

$$2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2 = 4 \tag{27.271}$$

En ce qui concerne la somme,

$$\|f+g\|_p^2 = \left(\int_A \frac{d\mu}{\mu(A)} + \int_B \frac{d\mu}{\mu(B)}\right)^{2/p} = 2^{2/p}. \tag{27.272}$$

Pour la différence, la seule subtilité à voir est que

$$\int_\Omega |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|^p = \int_A |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|^p + \int_B |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|^p = \int_A |\mathbb{1}_A| + \int_B |-\mathbb{1}_B| = \int_A \mathbb{1}_A + \int_B \mathbb{1}_B. \tag{27.273}$$

Ce n'est pas de la magie que le moins se change en plus. Bref, pour la différence nous avons

$$\begin{aligned}
\|f-g\|^2 &= \left(\int_\Omega |f(\omega)-g(\omega)|^p d\mu\right)^{2/p} && \text{(27.274a)}\\
&= \left(\int_\Omega |\frac{1}{\mu(A)^{1/p}}\mathbb{1}_A(\omega) - \frac{1}{\mu(B)^{1/p}}\mathbb{1}_B(\omega)|^p d\mu\right)^{2/p} && \text{(27.274b)}\\
&= \left(\int_A |\frac{\mathbb{1}_A(\omega)}{\mu(A)^{1/p}}|^p + \int_B |-\frac{\mathbb{1}_B(\omega)}{\mu(B)^{1/p}}|^p\right)^{2/p} && \text{(27.274c)}\\
&= 2^{2/p}. && \text{(27.274d)}
\end{aligned}$$

Donc $\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2 \times 2^{2/p}$.

Vu que L^p est un espace de Hilbert, nous avons finalement

$$4 = 2 \times 2^{2/p}. \tag{27.275}$$

Cela est uniquement valable pour $p = 2$.

(2) **Pour $p = \infty$** Il suffit de prendre $f = \mathbb{1}_A$ et $g = \mathbb{1}_B$. Nous avons alors $\|f\|_{L^\infty}^2 = \|g\|_{L^\infty}^2 = \|f+g\|_{L^\infty}^2 = \|f-g\|_{L^\infty}^2 = 1$.

L'égalité (27.268) devient $2 = 4$, ce qui est faux.

□

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, est-ce que $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est assuré de n'être pas de Hilbert ? Non.

Exemple 27.58 ([741]).
Soit la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{27.276}$$

Nous allons prouver que pour tout $p \in [0, \infty]$, l'espace $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}), \delta)$ est un espace de Hilbert. Pour cela nous introduisons le produit hermitien

$$\langle f, g \rangle = f(0)\overline{g(0)}. \tag{27.277}$$

Nous avons par ailleurs la norme

$$\|f\|^p = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\delta = f(0)^p. \tag{27.278}$$

Donc oui, $\|f\|_p = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. △

27.3.9 Théorèmes d'approximation

PROPooUQUBooAWgNhm

Proposition 27.59 ([506], thème 24)**.**
Soient $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Alors les fonctions étagées[29] *dans $L^p(\Omega)$ sont denses dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Nous supposons dans un premier temps que $f\colon \Omega \to [0, \infty[$. Pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, nous verrons plus bas.

Notons que la partie $\{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) = \infty\}$ est de mesure nulle, donc nous pouvons vraiment choisir un représentant à valeurs dans $[0, \infty[$ et non à valeurs dans $[0, \infty]$ comme le serait un représentant un peu quelconque.

Par le théorème 14.118, il existe une suite croissante de fonctions étagées $\phi_n\colon \Omega \to [0, \infty[$ telles que $\phi_n \to f$ ponctuellement. Notons que ce théorème fonctionne parce que les fonctions L^p (en tout cas leurs représentants) sont mesurables parce que c'est dans la définition 27.12. Notre devoir est maintenant de prouver que sous l'hypothèse que f est dans L^p, alors la convergence $\phi_n \to f$ est une convergence dans L^p.

(1) $\underline{1 \leqslant p < \infty}$ Vu que f et ϕ_n sont à valeurs positives nous avons $|f - \phi_n|^p \leqslant |f|^p$. Mais par hypothèse $|f|^p \in L^1(\Omega)$. Donc la suite $g_n = |f - \phi_n|^p$ est majorée (uniformément en n) par $|f|^p$ qui est dans L^1. Le théorème de la convergence dominée permet de permuter

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n = \int \lim_{n\to\infty} g_n = 0. \tag{27.279}$$

Cela revient à dire que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \phi_n\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int |f - \phi_n|^p = \int \lim_{n\to\infty} |f - \phi_n|^p = 0, \tag{27.280}$$

ce qui signifie que $\phi_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} f$.

(2) $\underline{\textbf{Pour } p = \infty}$ Si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors nous pouvons prendre un représentant borné. Avec lui, nous avons $\phi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Avec cela nous avons, pour ϵ donné, un n assez grand pour avoir

$$N_\infty(\phi_n - f) \leqslant \|\phi_n - f\|_\infty < \epsilon. \tag{27.281}$$

Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ au lieu de $[0, \infty[$, il suffit de faire valoir le travail que nous venons de faire quatre fois, pour les valeurs réelles, imaginaires, positives et négatives. □

PROPooPTZRooCBkZvr

Proposition 27.60 (Continuité de l'intégrale par rapport à la mesure[742])**.**
Soit $p \in [1, \infty[$. Nous considérons $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\int_A |f|^p d\mu < \epsilon \tag{27.282}$$

dès que $\mu(A) < \delta$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. La proposition 27.59 dit que les applications étagées sont denses dans L^p. Il existe donc une fonction étagée $\phi \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $\|f - \phi\|_p < \epsilon$. Étant donné que ϕ est étagée, elle prend un nombre fini de valeurs et aucune de ces valeurs est ∞. Donc il existe $M > 0$ tel que $|\phi(x)| < M$ pour tout $x \in \Omega$.

Nous posons $\delta = (\epsilon/2M)^p$. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \delta$. Nous utilisons l'inégalité de Minkowski de la proposition 27.45(1) :

$$\|f\|_{A,p} \leqslant \|f - \phi\|_{A,p} + \|\phi\|_{A,p} \leqslant \frac{\epsilon}{2} + M\mu(A^{1/p}) < \epsilon. \tag{27.283}$$

Donc nous avons bien $\int_A |f|^p < \epsilon$. □

CORooSGMXooCNfGNk

Corolaire 27.61 ([1])**.**
Si $f \in L^1\big([a, b]\big)$, alors

$$\lim_{h\to 0} \int_a^{a+h} f = 0. \tag{27.284}$$

[29] Définition 14.112. Pour rappel, une fonction est simple lorsqu'elle prend un nombre fini de valeurs, et elle est étagée lorsqu'elle est en outre mesurable.

Démonstration. Nous notons λ la mesure de Lebesgue. Soit $\epsilon > 0$. La proposition 27.60 dit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\lambda(A) < \delta$ implique $\int_a f = 0$. Si $|h| < \delta$ nous avons $\lambda\big([a, a+h]\big) < \delta$ et donc

$$\int_a^{a+h} f d\lambda = \int_{[a,a+h]} f d\lambda < \epsilon. \tag{27.285}$$

□

PROPooANISooKzQrnH

Proposition 27.62 ([1]).
Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soient $f \in L^1(I)$ et $a \in I$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned} \tag{27.286}$$

est continue.

Démonstration. Soit $h > 0$ tel que $B(a, h) \subset I$, étant compris que la boule est au sens de la topologie sur I ; donc si a est une extrémité de I, cela ne comprend que des $h \geqslant 0$ ou $h \leqslant 0$. Nous avons

$$\phi(x+h) - \phi(x) = \int_a^{x+h} - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f. \tag{27.287}$$

La limite $h \to 0$ donne zéro par le corolaire 27.61. □

27.3.10 Densité des fonctions infiniment dérivables à support compact

Définition 27.63.
*Une fonction est **étagée par rapport à** L^p si elle est de la forme*

$$f = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{B_k} \tag{27.288}$$

où les B_k sont des mesurables disjoints et $\mathbb{1}_{B_k} \in L^p$ pour tout k.

LemWHIRdaX

Lemme 27.64.
Si f est une fonction étagée en même temps qu'être dans L^p, alors elle est étagée par rapport à L^p.

Démonstration. Nous pouvons écrire

$$f = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{B_k} \tag{27.289}$$

où les B_k sont disjoints. Par hypothèse $\|f\|_p$ existe. Donc chacune des intégrales $\int_\Omega |\mathbb{1}_{B_k}|^p$ doit exister parce que les B_k étant disjoints, nous pouvons inverser la norme et la somme ainsi que la somme et l'intégrale :

$$\int_\Omega |f|^p = \int_\Omega \sum_{k=1}^N |c_k \mathbb{1}_{B_k}(x)|^p dx = \sum_{k=1}^N \int |c_k \mathbb{1}_{B_k}(x)|^p dx = \sum_{k=1}^N |c_k|^p \int_\Omega |\mathbb{1}_{B_k}(x)|^p dx. \tag{27.290}$$

□

L'ensemble $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de classe C^∞ et à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est souvent également noté $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

ThoILGYXhX

Théorème 27.65 ([728]).
Nous avons des densités emboitées. Ici D est un borélien borné de $\mathbb{R}^d$ contenu dans $B(0, r)$ et K est un compact contenant $B(0, r+2)$.

(1) Les fonctions étagées par rapport à L^p sur $\mathbb{R}^d$ sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. A fortiori les fonctions étagées sont denses dans L^p, mais nous n'en aurons pas besoin ici.

ItemYVFVrOIii

(2) Il existe une suite f_n dans $C(K, \mathbb{C})$ telle que

$$f_n \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_D. \tag{27.291}$$

ItemYVFVrOIiii

(3) *Si A est un borélien tel que $\mathbb{1}_A \in L^p(\mathbb{R}^d)$[30], alors il existe une suite de boréliens bornée $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que*

$$\mathbb{1}_{D_n} \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_A. \tag{27.292}$$

ItemYVFVrOIiv

(4) *Il existe une suite φ_n dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\varphi_n \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_D. \tag{27.293}$$

ItemYVFVrOIv

(5) *L'ensemble $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $1 \leqslant p < \infty$.*

Démonstration. Nous allons montrer les choses point par point.

ItemYVFVrOIi

(1) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, nous savons par le théorème 14.118 qu'il existe une suite f_n de fonctions étagées convergeant ponctuellement vers f telle que $|f_n| \leqslant |f|$. La proposition 27.25 nous dit qu'alors $f_n \xrightarrow{L^p} f$. La fonction f_n étant étagée et dans L^p en même temps, elle est automatiquement étagée par rapport à L^p par le lemme 27.64.

(2) C'est le théorème d'approximation 14.242 appliqué au borélien D contenu dans l'espace mesuré K.

(3) En vertu du point (2), il existe $f \in C^0(K, \mathbb{R})$ telle que

$$\|f - \mathbb{1}_D\|_p \leqslant \epsilon. \tag{27.294}$$

Ensuite, par le théorème de Weierstrass, il existe $\varphi \in C^\infty(K, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \epsilon$. Nous avons aussi

$$\|\varphi - f\|_p^p = \int_K |\varphi(x) - f(x)|^p dx \leqslant \mu(X)\|\varphi - f\|_\infty^p \leqslant \epsilon^p \mu(K). \tag{27.295}$$

Quitte à prendre un φ correspondant à un ϵ plus petit, nous avons

$$\|\varphi - f\| \leqslant \epsilon. \tag{27.296}$$

En combinant et en passant à $\epsilon/2$ nous avons trouvé une fonction $\varphi \in C^\infty(K, \mathbb{R})$ telle que

$$\|\varphi - \mathbb{1}_D\| \leqslant \epsilon. \tag{27.297}$$

(4) Nous considérons les boréliens fermés $D_n = A \cap B(0, n)$. Alors $\mathbb{1}_{D_n} \in L^p$ et nous avons pour n assez grand :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_{D_n}(x) - \mathbb{1}_A(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,n)} |\mathbb{1}_A(x)|^p < \epsilon, \tag{27.298}$$

c'est-à-dire que $\mathbb{1}_{D_n} \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_A$.

(5) Il suffit de remettre tout ensemble. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, par le point (2) nous commençons par prendre σ étagée par rapport à L^p telle que

$$\|\sigma - f\|_p \leqslant \epsilon. \tag{27.299}$$

Ensuite nous écrivons σ sous la forme

$$\sigma = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{B_k} \tag{27.300}$$

et nous appliquons le point (3) à chacune des $\mathbb{1}_{B_k}$ pour trouver des boréliens bornés D_k tels que

$$\|\mathbb{1}_{D_k} - \mathbb{1}_{B_k}\|_p \leqslant \epsilon. \tag{27.301}$$

Enfin nous appliquons le point (4) pour trouver des fonctions $\varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\|\varphi_k - \mathbb{1}_{D_k}\|_p \leqslant \epsilon. \tag{27.302}$$

Il n'est pas compliqué de calculer que

$$\Big\| \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k - f \Big\|_p \leqslant 2\epsilon \sum_k c_k + \epsilon. \tag{27.303}$$

[30] Je pense que cette hypothèse manque dans [728]. En tout cas je vois mal comment je pourrais justifier les différentes étapes de la preuve en prenant par exemple $A = \mathbb{R}^d$.

□
CorFZWooYNbtPz

Corolaire 27.66.
Si $1 < p < \infty$ alors la partie[31] $L^2\big([0,1]\big) \cap L^p\big([0,1]\big)$ *est dense dans* $L^p\big([0,1]\big)$.

Démonstration. Nous savons du théorème 27.65(5) que $C_c^\infty\big([0,1]\big)$ est dense dans L^p. Mais nous avons évidemment $C_c^\infty \subset L^2 \cap L^p$, donc $L^2 \cap L^p$ est dense dans L^p. □
LemCUlJzkA

Lemme 27.67 ([728, 695]).
Soit $1 \leqslant p < \infty$ et $f \in L^p(\Omega)$. Nous notons τ_v l'opérateur de translation par v :

$$\begin{aligned}\tau_v \colon L^p(\Omega) &\to L^p(\Omega)\\ f &\mapsto \Big[x \mapsto f(x-v)\Big].\end{aligned} \tag{27.304}$$

Pour chaque $f \in L^p(\Omega)$, l'application

$$\begin{aligned}\tau(f) \colon \mathbb{R}^d &\to L^p(\Omega)\\ v &\mapsto \tau_v(f)\end{aligned} \tag{27.305}$$

est continue en $v = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{v\to 0} \|\tau_v(f) - f\|_p = 0. \tag{27.306}$$

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est dans $\mathscr{D}(\Omega)$, et nous verrons ensuite comment généraliser.

(1) **Si $f \in \mathscr{D}(\Omega)$**

Soit une suite $v_i \xrightarrow{\mathbb{R}^d} 0$, et posons $f_i = \tau_{v_i}(f)$; le but est de montrer que $f_i \xrightarrow{L^p} f$. Pour cela, la fonction $f - f_i$ est également à support compact, et qui plus est, si $\operatorname{supp}(f) \subset B(0,r)$, alors $\operatorname{supp}(f - f_i) \subset B(0, r + |v_i|)$, et l'ensemble

$$S = \overline{B\big(0, r + \max_i |v_i|\big)} \tag{27.307}$$

est un compact contenant les supports de tous les $f - f_i$. Le maximum existe parce que $v_i \to 0$. Voilà qui « majore » le domaine de $f - f_i$ uniformément en i.

Majorons maintenant $|f - f_i|^p$ de façon uniforme en i. Soit le nombre

$$M = 2 \max_{x\in\mathbb{R}^d} \{f(x)\}. \tag{27.308}$$

La fonction qui vaut M^p sur S et zéro ailleurs est une fonction intégrable qui majore $|f - f_i|^p$. Nous pouvons donc utiliser la convergence dominée de Lebesgue (théorème 14.207) pour écrire

$$\lim_{i\to\infty} \|f - f_i\|_p^p = \lim_{i\to\infty} \int_\Omega |f(x) - f(x - v_i)|^p dx = \int_\Omega \lim_{i\to\infty} |f(x) - f(x - v_i)| dx = 0. \tag{27.309}$$

(2) **Pour $f \in L^p(\Omega)$**

Soit $\epsilon > 0$, $f \in L^p(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tel que $\|f - \varphi\|_p \leqslant \epsilon$. Cela est possible par la densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ vue en 27.65(5). Nous choisissons de plus $|v|$ assez petit pour avoir $\|\tau_v(\varphi) - \varphi\|_p < \epsilon$, qui est possible en vertu de ce que nous venons de démontrer à propos des fonctions à support compact. De plus τ_v étant une isométrie de L^p nous avons $\|\tau_v(\varphi) - \tau_v(f)\| = \|\varphi - f\| < \epsilon$. Nous avons tout pour majorer :

$$\|f - \tau_v(f)\| \leqslant \|f - \varphi\| + \|\varphi - \tau_v(\varphi)\| + \|\tau_v(\varphi) - \tau_v(f)\| \leqslant 3\epsilon. \tag{27.310}$$

Nous avons donc bien $\lim_{v\to 0} \|f - \tau_v(f)\| = 0$.

□

[31] Nous parlons bien ici de l'*ensemble* L^2 parce que nous le considérons sans norme ou topologie particulière. La densité dont nous parlons ici est celle pour la topologique de L^p.

27.3.11 Approximation

ThoJsBKir

Théorème 27.68 ([367]).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'espace $\mathscr{D}(I)$ des fonctions continues à support compact sur I est dense dans $L^2(I)$.

Ce théorème sera généralisé à tous les $L^p(\mathbb{R}^d)$ par le théorème 27.65. Cependant L^p n'étant pas un Hilbert, il faudra travailler sans produit scalaire.

Démonstration. Soit $g \in L^2(I)$ une fonction telle que $g \perp f$ pour toute fonction $f \in C_c(I)$. Nous avons donc

$$\langle f, g \rangle = \int_I f\bar{g} = 0. \tag{27.311}$$

En passant éventuellement aux composantes réelles et imaginaires nous pouvons supposer que les fonctions sont toutes réelles. Nous décomposons g en parties positives et négatives : $g = g^+ - g^-$. Notre but est de montrer que $g^+ = g^-$, c'est-à-dire que g est nulle. La proposition 25.15 conclura que $C_c(I)$ est dense dans $L^2(I)$.

Soit un intervalle $[a, b] \subset I$ et une suite croissante de fonctions $f_n \in C_c(I)$ qui converge vers $\mathbb{1}_{[a,b]}$. Par hypothèse pour chaque n nous avons

$$\int_I f_n g^+ = \int_I f_n g^-. \tag{27.312}$$

La suite étant croissante, le théorème de la convergence monotone (théorème 14.178) s'applique et nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n g^+ = \int_a^b g^+, \tag{27.313}$$

de telle sorte que nous ayons, pour tout intervalle $[a, b] \subset I$ l'égalité

$$\int_a^b g^+ = \int_a^b g^-. \tag{27.314}$$

EqYlErAM

De plus ces intégrales sont finies parce que

$$\int_a^b g^+ \leqslant \int_a^b |g| = \int_I |g| \mathbb{1}_{[a,b]} = \langle |g|, \mathbb{1}_{[a,b]} \rangle \leqslant \|g\|_{L^2} \sqrt{b-a} < \infty \tag{27.315}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit maintenant un ensemble mesurable $A \subset I$. La fonction caractéristique $\mathbb{1}_A$ est mesurable et il existe une suite croissante de fonctions étagées (φ_n) convergente vers $\mathbb{1}_A$ par le théorème fondamental d'approximation 14.118. À multiples près, les fonctions φ_n sont des sommes de fonctions caractéristiques du type $\mathbb{1}_{[a,b]}$, par conséquent, en vertu de (27.314) nous avons

$$\int_I \varphi_n g^+ = \int_I \varphi_n g^-. \tag{27.316}$$

Une fois de plus nous pouvons utiliser le théorème de la convergence monotone et obtenir

$$\int_A g^+ = \int_A g^- \tag{27.317}$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset I$. Si nous notons dx la mesure de Lebesgue, les mesures g^+dx et g^-dx sont par conséquent égales et dominées par dx. Par le corolaire 14.236 du théorème de Radon Nikodym, les fonctions g^+ et g^- sont égales. □

27.3.12 Partie uniformément intégrable

DefOZlZnse

Définition 27.69.
*Une partie $H \subset L^1(\Omega, \mu)$ est **uniformément intégrable** si*

$$\lim_{a\to\infty} \left(\sup_{f\in H} \int_{|f|>a} |f(x)| d\mu(x) \right) = 0. \tag{27.318}$$

Notons dans cette définition que vu que $f \in L^1$ nous avons toujours

$$\lim_{a\to\infty} \int_{|f|>a} |f(x)| d\mu(x) = 0. \tag{27.319}$$

LEMooUOQDooIkVyWm

Lemme 27.70 ([1]).
La partie $H = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^1(\Omega,\mu)$ est uniformément intégrable[32] *si et seulement si*

$$\lim_{a\to\infty}\left(\limsup_n \int_{|f_n|>a} |f_n|\right) = 0. \tag{27.320}$$

Cette formule est prise comme définition de l'uniforme intégrabilité par [743].

Démonstration. Quand on a une suite (x_n) de réels positifs, nous avons toujours $\limsup_n x_n \leqslant \sup_n x_n$. □

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 27.71
Je n'ai pas vérifié l'énoncé de 27.72. Si vous pensez que c'est faux, écrivez-moi. Écrivez-moi également si vous avez une démonstration.

PROPooPZRAooSiqgKT

Proposition 27.72 ([1]).
Soit une partie uniformément intégrable $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Soit une fonction intégrable g.

(1) La partie $\{f_n + g\}$ est uniformément intégrable.

(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la partie $\{\lambda f_n\}$ est uniformément intégrable.

(3) Si pour tout n nous avons $g_n \leqslant f_n$, alors la partie $\{g_n\}$ est uniformément intégrable.

PROPooPFZJooLySrgp

Proposition 27.73 ([1]).
Soit $0 < r < \infty$. Si $f \in L^r(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, alors

$$\int_{|f|^r\geqslant\lambda} |f|^r d\mu \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0. \tag{27.321}$$

THOooGLYJooCbNysA

Théorème 27.74 ([744]).
Soient un espace mesuré fini $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et une partie uniformément intégrable[33] *$H \subset L^1(\Omega)$. Nous avons*
ITEMooCAIFooHXOKQb

(1) $\sup_{f\in H} \|f\|_{L^1(\Omega)} < \infty$.

(2) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que

$$\int_A |f| d\mu < \epsilon \tag{27.322}$$

pour tout $f \in H$ et pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \epsilon$.

27.4 Autres résultats de convergence

PROPooGJBIooAYsZQL

Proposition 27.75 ([1]).
Soit $0 < p < \infty$. Si $|f_n| \xrightarrow{L^p} 0$, alors $\liminf_n |f_n| = 0$ presque partout.

Démonstration. Nous y allons par contradiction en supposant qu'il existe une partie mesurable A de mesure non nulle telle que $\liminf_n |f_n(\omega)| > 0$ pour tout $\omega \in A$.

Pour chaque $\omega \in A$, nous posons $n_\omega \in \mathbb{N}$ et $v_\omega > 0$ tels que pour tout $n \geqslant n_\omega$, $|f_n(\omega)| > v_\omega$. Ensuite nous posons

$$A_{n,k} = \{\omega \in A \text{ tel que } n_\omega \leqslant n \text{ et } v_\omega > 1/k\}. \tag{27.323}$$

Nous avons l'union dénombrable $A = \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}^2} A_{n,k}$. Vu qu'une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle, il existe (n_0,k_0) tel que $\mu(A_{n_0,k_0}) > 0$. Pour tout $\omega \in A_{n_0,k_0}$ et pour tout $n > n_0$, nous avons

$$|f_\omega(\omega)| > \frac{1}{k_0}. \tag{27.324}$$

[32] Définition 27.69.
[33] Définition 27.69.

Nous avons donc la minoration, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\|f_n\|_p^p = \int_\Omega |f_n(\omega)|^p d\mu(\omega) \tag{27.325a}$$
$$\geqslant \int_{A_{n_0,k_0}} |f_n(\omega)|^p d\mu(\omega) \tag{27.325b}$$
$$\geqslant \int_{A_{n_0,k_0}} \frac{1}{k_0^p} d\mu(\omega) \tag{27.325c}$$
$$= \frac{1}{k_0^p}\mu(A_{n_0,k_0}) > 0. \tag{27.325d}$$

Nous ne pouvons donc pas avoir $|f_n| \xrightarrow{L^p} 0$. □

PROPooUMBQooAhUgHA

Proposition 27.76 ([745]).
Si $0 < p \leqslant 1$, alors la formule

$$d_r(f,g) = \int_\Omega |f-g|^r d\mu \tag{27.326}$$

est une métrique invariante par translation.

Parfois il faut admettre que la théorie des probabilités a des notations pratiques. Par exemple si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors $E(X_n) \to E(X)$. C'est la proposition suivante.

PROPooXXOYooCUtDZf

Proposition 27.77 ([746]).
Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi que $0 < r < \infty$. Nous supposons que $f_n \xrightarrow{L^r} f$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n|^r = \int_\Omega |f|^r. \tag{27.327}$$

Démonstration. Si $r \geqslant 1$, c'est facile. L'application $f \mapsto \|f\|_r$ est une norme[34] et la proposition 7.213 s'applique. Donc

$$\big|\|f_n\|_r - \|f\|_r\big| \leqslant \|f - f_n\|_r. \tag{27.328}$$

Nous considérons $0 < r \leqslant 1$. Nous considérons la métrique d_r donnée par la proposition 27.76. Notre hypothèse de convergence signifie que $d_r(f_n, f) \to 0$. Nous utilisons l'inégalité triangulaire :

$$d_r(f_n, 0) \leqslant \underbrace{d_r(f_n, f)}_{\to 0} + d_r(f, 0) \to d(f, 0). \tag{27.329}$$

Nous avons donc[35]

EQooZATHooVuHfIk

$$\limsup_n d_r(f_n, 0) \leqslant d_r(f, 0). \tag{27.330}$$

D'autre part la proposition 27.75 nous dit que $\liminf_n |f_n(\omega) - f(\omega)| = 0$ pour tout $\omega \in \Omega \setminus Z$ avec $\mu(Z) = 0$. Nous avons donc aussi $\liminf |f_n| = |f|$ (hors de Z) et $\liminf |f_n|^r = |f|^r$ (hors de Z). Vu que Z est de mesure nulle, nous pouvons l'oublier quand nous faisons des intégrales sur Ω :

$$d_r(f,0) = \int_\Omega |f|^r \tag{27.331a}$$
$$= \int_\Omega \liminf_n |f_n|^r \tag{27.331b}$$
$$= \liminf \int_\Omega |f_n|^r \qquad \text{lem Fatou 14.182} \tag{27.331c}$$
$$= \liminf d_r(f_n, 0) \tag{27.331d}$$
$$\leqslant \liminf \Big(d_r(f_n, f) + d_r(f, 0)\Big) \tag{27.331e}$$
$$= d_r(f, 0). \tag{27.331f}$$

Vu que les expressions tout à gauche et tout à droite sont égales, toutes les inégalités sont des égalités. En particulier

$$\liminf_n d_r(f_n, 0) = d_r(f, 0). \tag{27.332}$$

[34] Proposition 27.19(2).
[35] Notons que $x_n \leqslant y_n \to \lambda$ n'implique pas que x_n converge. Par contre ça implique que $\limsup_n(x_n) \leqslant \lambda$.

En combinant avec (27.330), et en nous souvenant qu'une limite sup est toujours plus grande qu'une limite inf,

$$\limsup d_r(f_n,0) \leqslant d_r(f,0) \leqslant \liminf d_r(f_n,0) \leqslant \liminf d_r(f_n,0). \tag{27.333}$$

Encore une fois toutes les inégalités sont des égalités et nous avons

$$\liminf d_r(f_n,0) = \limsup d_r(f_n,0) = d_r(f,0). \tag{27.334}$$

Cela prouve que $\lim_{n\to\infty} d_r(f_n,0)$ existe et vaut $d_r(f,0)$ (lemme 9.46). Enfin nous pouvons faire le calcul

$$\int_\Omega |f|^r = d_r(f,0) = \lim_{n\to\infty} d_r(f_n,0) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n|^r. \tag{27.335a}$$

□

27.5 Convolution

DEFooHHCMooHzfStu

Définition 27.78.
Pour toutes fonctions $f,g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ et pour tout $x \in \mathbb{C}$ tels que l'intégrale de droite ait un sens[36]*, nous définissons*

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy. \tag{27.336}$$

*L'éventuelle fonction $f*g$ ainsi définie est le **produit de convolution** de f et g.*

Le théorème qui permet de dire que le produit de convolution n'est pas tout à fait ridicule est le suivant.

THOooMLNMooQfksn

Théorème 27.79 ([522, 747])**.**
Soient $f,g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(1) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction

$$\begin{aligned} h_x\colon \mathbb{R}^d &\to \mathbb{C} \\ y &\mapsto g(x-y)f(y) \end{aligned} \tag{27.337}$$

est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(2) $f*g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(3) $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \\ (x,y) &\mapsto (x-y,y). \end{aligned} \tag{27.338}$$

Cela est un C^1-difféomorphisme dont le jacobien vaut

$$J_\phi(x,y) = \det\begin{pmatrix} (\partial_1\phi_1)(x,y) & (\partial_2\phi_1)(x,y) \\ (\partial_1\phi_2)(x,y) & (\partial_2\phi_2)(x,y) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1. \tag{27.339}$$

C'est une première bonne chose.

Ensuite nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d &\to \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto f(y)g(x). \end{aligned} \tag{27.340}$$

Par hypothèse, pour chaque y, la fonction $x \mapsto |\alpha(x,y)|$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Bref, le calcul suivant a un sens :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d}|\alpha|dx\right]dy = \int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)g(x)|dx\right]dy \tag{27.341a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left[|f(y)|\int_{\mathbb{R}^d}|g(x)|dx\right]dy \tag{27.341b}$$

$$= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \tag{27.341c}$$

SUBEQooMYLWooPeNLlk

$$< \infty. \tag{27.341d}$$

[36] Attention divulgâchis : ce sera le cas pour $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ par le théorème 27.79.

Le corolaire 14.304 nous dit alors que $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Et notons au passage que

$$\|\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\alpha| = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \tag{27.342}$$

EQooLCWNooHLLdRd

parce que le théorème de Fubini 14.305 permet de scinder l'intégrale et de retomber sur (27.341c).

Vu que $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, nous pouvons utiliser le changement de variable 14.282 avec l'application ϕ ci-dessus. En notant λ la mesure de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\infty > \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\alpha| d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \big(|\alpha| \circ \phi\big)|J_\phi| d\lambda && \text{(27.343a)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\alpha|(x-y,y) d\lambda(x,y) && \text{(27.343b)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| d\lambda(x,y) && \text{(27.343c)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| dy\right] dx. && \text{(27.343d)}
\end{aligned}$$

Nous avons scindé l'intégrale avec le théorème de Fubini pour la dernière étape.

Passons à l'intégrabilité de $f * g$. Nous avons

$$|(f*g)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| dy. \tag{27.344}$$

EQooXMFYooKPIGfU

Or nous venons de voir que (27.344) était, en tant que fonction de x, intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)| dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| dy\right] dx = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\alpha| d\lambda < \infty. \tag{27.345}$$

Cela prouve que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, mais en nous souvenant de (27.342), cela prouve aussi que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)| dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\alpha| d\lambda = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \tag{27.346}$$

c'est-à-dire que $\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$. □

LEMooMRWZooHjrnHD

Lemme 27.80.
Le produit de convolution est commutatif : pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ nous avons $f * g = g * f$.

Démonstration. Le théorème de Fubini (théorème 14.305) permet d'écrire

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_n f(y)g(x-y). \tag{27.347}$$

En effectuant le changement de variable $z_i = x_i - y_i$ dans chacune des intégrales nous obtenons

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(z)f(x-z)dz = (g*f)(x). \tag{27.348}$$

Attention : on pourrait croire qu'un signe apparaît du fait que $z = x - y$ donne $dz = -dy$. Mais en réalité, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}$ devient par le même changement de variables $\int_{+\infty}^{-\infty}$ qui redonne un nouveau signe au moment de remettre dans l'ordre. □

LEMooTUMSooSmnlHc

Lemme 27.81 ([748, 1])**.**
Le produit de convolution est associatif sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soient $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. L'existence de $(f * g) * h$ ne fait pas de doute grâce au théorème 27.79. Nous avons d'abord

$$\begin{aligned}
\big((f*g)*h\big)(u) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x)h(u-x)dx && \text{(27.349a)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy\right] h(u-x)dx && \text{(27.349b)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)h(u-x)dy\right] dx. && \text{(27.349c)}
\end{aligned}$$

SUBEQooJKRHooDaScXV

Nous permutons les intégrales en suivant la procédure 14.306. Pour cela nous commençons par poser

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto f(y)g(x-y)h(u-x), \end{aligned} \tag{27.350}$$

et nous vérifions que $|s|$ peut être successivement intégrée par rapport à y puis x. D'abord l'intégrale par rapport à y est

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)||g(x-y)|dy, \tag{27.351}$$

qui existe et qui vaut $(|f| * |g|)(x)$ parce que $|f|$ et $|g|$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. D'après le théorème 27.79, la fonction $|f| * |g|$ est encore dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. En ce qui concerne l'intégrale du résultat par rapport à x, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|f| * |g|)(x)|h(u-x)|dx, \tag{27.352}$$

qui existe et qui vaut $\big((|f| * |g|) * |h|\big)(u)$. Le corolaire 14.304 nous assure donc que $s \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

Nous permutons donc les intégrales dans (27.349c) pour obtenir

$$\big((f*g)*h\big)(u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)h(u-x)dx \right] dy. \tag{27.353}$$ EQooHXTBooQpmXcR

Attardons-nous un instant sur l'intégrale interne, et utilisons l'invariance par translation de l'intégrale (lemme 14.257). Nous effectuons la translation $x \to x+y$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)h(u-x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)h(u-x-y)dx \qquad = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)h\big((u-y)-x\big)dx \tag{27.354a}$$

$$= (g*h)(u-y). \tag{27.354b}$$

Nous pouvons reprendre notre calcul en (27.353) :

$$\big((f*g)*h\big)(u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)h(u-x)dx \right] dy \tag{27.355a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)(g*h)(u-y) \tag{27.355b}$$

$$= \big(f*(g*h)\big)(u). \tag{27.355c}$$

C'est ce que nous voulions. □

PROPooNBHNooInwoar

Proposition 27.82.
Le couple $\big(L^1(\mathbb{R}^d), *\big)$ est une algèbre de Banach[37].

Démonstration. Point par point.

(1) **Algèbre** La définition d'une algèbre est 1.461. Les différents points sont dans la linéarité de l'intégrale.

(2) **Commutative** C'est la proposition 27.80.

(3) **Associative** C'est le lemme 27.81.

(4) **Normé** L'espace L^1 a une norme ; c'est la norme $\|\|_{L^1}$.

(5) **Complet** C'est le théorème de Riesz-Fischer 27.56.

□

La proposition suivante est une conséquence de l'inégalité de Minkowski sous forme intégrale de la proposition 27.50.

PROPooDMMCooPTuQuS

Proposition 27.83.
Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors

(1) $f * g \in L^p$

[37] Algèbre de Banach, définition 7.316.

(2) $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_p\|g\|_1$.

PropHNbdMQe

Proposition 27.84 ([749]).
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si g est dérivable avec $g' \in L^\infty$, alors $f*g$ est dérivable et $(f*g)' = f*g'$.

Démonstration. La fonction qu'il faut intégrer pour obtenir $f*g$ est $f(t)g(x-t)$, dont la dérivée par rapport à x est $f(t)g'(x-t)$. La norme de cette dernière est majorée (uniformément en x) par $G(t) = |f(t)|\|g'\|_\infty$. La fonction f étant dans $L^1(\mathbb{R})$, la fonction G est intégrable et le théorème de dérivation sous l'intégrale (théorème 17.19) nous dit que $f*g$ est dérivable et

$$(f*g)'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g'(x-t)dt = (f*g')(x). \tag{27.356}$$

□

CORooBSPNooFwYQrc

Corolaire 27.85.
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et si g est de classe C^∞, alors $f*g$ est de classe C^∞.

Démonstration. Il s'agit d'itérer la proposition 27.84. □

27.5.1 Fonction plateau, lemme d'Urysohn

PROPooQWNNooHmHRbk

Proposition 27.86 ([1]).
Soient deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}^n$ telles que le produit de convolution $f*g$ ait un sens. Si le support de f est dans le compact K et le support de g est dans $B(0,r)$, alors

$$\operatorname{supp}(f*g) \subset K + \overline{B(0,r)} \tag{27.357}$$

PROPooBOZIooAhKbPs

Proposition 27.87 (Urysohn, Fonctions plateau[287, 750]).
Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ainsi qu'un compact K dans Ω. Il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

(1) $\operatorname{supp}(f)$ *est compact dans Ω,*

(2) $0 \leqslant f \leqslant 1$

(3) $f = 1$ *sur un voisinage de K.*

Démonstration. Nous posons $\delta = d(K, \Omega^c)/3$.

(1) **Les applications ϕ et ϕ_ϵ** Nous nous souvenons de l'application ξ de la proposition 15.177. Elle est de classe C^∞ à support compact dans $B(0,1)$. Nous considérons[38]

$$\phi(x) = \frac{\xi(x)}{\int_{\mathbb{R}^n}\xi(x)dx}, \tag{27.358}$$

de telle sorte que $\int_{\mathbb{R}^n}\phi = 1$. Pour chaque $\epsilon > 0$ nous posons également

$$\begin{aligned}\phi_\epsilon\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{1}{\epsilon^n}\phi(x/\epsilon).\end{aligned} \tag{27.359}$$

Par le lemme 15.185, nous avons

$$\int_{B(0,\epsilon)}\phi_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n}\phi_\epsilon = 1. \tag{27.360}$$

EQooDUOCooLKPmQZ

(2) **La partie K_1** Nous posons

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \phi(x,K) < \delta\}. \tag{27.361}$$

EQooLXRMooKxKHSF

La partie K_1 est bornée parce que si $K \subset B(0,r)$, alors $K_1 \subset B(0, r+\delta)$.

La partie K_1 est fermée. Pour ce voir, nous prouvons que K_1^c est ouvert. Soit $y \in K_1^c$, et prouvons qu'il existe une boule centrée en y et contenue dans K_1^c. Soit $k \in K_1$ réalisant $d(z,K_1) = d(z,k)$ (d

[38] L'intégrale de ξ ne pose pas de problèmes parce qu'elle est continue sur le compact de son support, de telle sorte qu'elle y soit bornée.

est une fonction continue sur le compact K_1, elle atteint ses bornes). Soit $z \in B(y,\alpha)$ où α va être précisé de telle sorte à avoir $B(y,\alpha) \subset K_1^c$. Nous avons

$$\begin{aligned} d(z,k) &\geqslant |d(z,y) - d(y,k)| && \text{cf. justif} && (27.362a)\\ &= d(y,k) - d(z,y) && \text{cf. justi.} && (27.362b)\\ &> \delta + s - \alpha && \text{cf. justif.} && (27.362c)\\ & && && (27.362d) \end{aligned}$$

SUBEQooAKWEooGpnxaX SUBEQooGTKYooEPMjZR SUBSETooGVBFooIUCcKE

Justifications.

- Pour (27.362a). Lemme 7.141.
- Pour (27.362b). Nous choisissons $\alpha < d(y,k)$.
- Pour 27.362c. Vu que $d(y,k) > \delta$, nous posons $s > 0$ tel que $d(y,k) = \delta + s$.

Nous avons prouvé qu'il existe $s > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$ suffisamment petit, nous ayons $d(z,k) > \delta + s - \alpha$. Nous en déduisons que $d(z,k) > \delta$ et donc que $z \in K_1^c$.

Nous avons prouvé que $K - 1$ est borné et fermé. Il est donc compact (théorème de Borel-Lebesgue 9.24).

(3) **La fonction f** Nous posons $f = \phi_\epsilon * \mathbb{1}_{K_1}$ où $\mathbb{1}_{K_1}$ est la fonction indicatrice de K_1 et $*$ dénote le produit de convolution[39]. Vu que ϕ_ϵ est de classe C^∞, la fonction f est également de classe C^∞ par le corolaire 27.85.

(4) **À propos de support** La proposition 27.86 dit que le support de f est

$$\text{supp}(f) \subset K_1 + \overline{B(0,\epsilon)}. \tag{27.363}$$

Vue la définition 27.361, nous avons $d(K_1, \Omega^c) \geqslant \delta$, de telle sorte que, en prenant $\epsilon < \delta$ nous avons

$$\text{supp}(f) \subset \Omega. \tag{27.364}$$

Le support de f est également borné parce que contenu dans le borné $K_1 + \overline{B(0,\epsilon)}$. Nous en déduisons que f est une application C^∞ à support compact dans Ω.

(5) **$f(x)$ si $x \in K$** Soit $x \in K$. Nous avons, par définition,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(y)\mathbb{1}_{K_1}(x-y)dy && && (27.365a)\\ &= \int_{\overline{B(0,\epsilon)}} \phi_\epsilon(y)\mathbb{1}_{K_1}(x-y)dy && \text{cf. justif.} && (27.365b)\\ &= \int_{\overline{B(0,\epsilon)}} \phi_\epsilon(y)dy && \text{cv. justif.} && (27.365c)\\ &= 1 && \text{par (27.360).} && (27.365d) \end{aligned}$$

SUBEQooOKGFooDbOwrB SUEQooBRHEooAwoQdR

Justifications.

- Pour 27.365b. Le support de ϕ_ϵ est dans $\overline{B(0,\epsilon)}$.
- Pour 27.365c. Vu que $x \in K$ et que $|y| < \epsilon < \delta$, nous avons

$$d(x-y, K) \leqslant d(x-y, x) \leqslant \delta, \tag{27.366}$$

et donc $x - y \in K_1$.

(6) **$0 \leqslant f \leqslant 1$** Nous avons

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \big|\phi_\epsilon(y)\mathbb{1}_{K_1}(x-y)\big|dy && (27.367a)\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\epsilon(y)|dy && (27.367b)\\ &= 1. && (27.367c) \end{aligned}$$

Note : nous avons majoré $\mathbb{1}_{K_1}(x-y)$ par 1.

□

[39] Définition 27.78.

27.5.2 Partition de l'unité

THOooQFCQooSlgLpz

Théorème 27.88 (Partition de l'unité[287]).
Soient un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ et des ouverts $\{\Omega_i\}_{i=1,\dots,n}$ recouvrant K. Alors il existe des fonctions $\phi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ $(i = 1, \dots, n)$ telles que

(1) $0 \leqslant \phi_k \leqslant 1$

(2) $\text{supp}(\phi_k) \subset \Omega_k$,

(3) $\sum_{k=1}^n \phi_k = 1$ *sur un voisinage de* K.

Ces fonctions ϕ_i sont une ***partition de l'unité*** *subordonnée aux ouverts Ω_i.*

Démonstration. Nous considérons des compacts $\{K_i\}_{i=1,\dots,n}$ comme dans le lemme 7.360. Pour chaque i nous avons $K_i \subset \Omega_i$, de telle sorte que nous pouvions utiliser la proposition 27.87. Nous avons donc des fonctions $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que $\text{supp}(\psi_j)$ est compact dans Ω_j, $\psi_j \geqslant 0$ et $\psi_j = 1$ sur V_j qui est un voisinage ouvert de K_j.

Nous posons $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$. C'est un ouvert qui contient K parce que

$$K \subset \bigcup_j K_j \subset \bigcup_j \Omega_j \subset \bigcup_j V_j. \tag{27.368}$$

Nous faisons de même pour K lui-même. Il existe une fonction $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

- $\text{supp}(\theta)$ est compact dans Vn
- $\theta = 1$ sur un voisinage de K,
- $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Vu que $\psi_j = 1$ sur V_j, nous avons $\sum_{j=1}^n \psi_j > 0$ sur V.

Nous prouvons à présent que

$$1 - \theta + \sum_{k=1} \psi_k > 0 \tag{27.369}$$

EQooGABMooZZmlyQ

sur $\mathbb{R}^d$.

(1) **Si $x \in V$** Alors $1 - \theta(x) \geqslant 0$ et donc

$$1 - \theta(x) + \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \geqslant \sum_{k=1}^n \psi_k(x) > 0. \tag{27.370}$$

(2) **Si $x \notin V$** Vu que le support de θ est dans V, nous avons $\theta(x) = 0$. Quant aux fonctions ψ_k, elles font un peu ce qu'elles veulent, mais elles sont positives[40] et donc

$$1 - \theta(x) + \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \geqslant 1 - \theta(x) = 1. \tag{27.371}$$

Vu que (27.369) est prouvé, nous pouvons poser

$$\phi_j = \frac{\psi_j}{1 - \theta + \sum_{k=1}^n \psi_k} \tag{27.372}$$

sans peur pour le dénominateur. Nous avons $\phi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nous savons que $\theta = 1$ sur un voisinage de K. Su ce voisinage nous avons

$$\sum_{j=1}^n \phi_j(x) = \frac{\sum_j \psi_j(x)}{1 - \theta(x) + \sum_k \psi_k(x)} = 1. \tag{27.373}$$

De plus $\phi_j \geqslant 0$ parce que chacun des ψ_j l'est et parce que nous avons montré que le dénominateur était toujours strictement positif.

En enfin,

$$\text{supp}(\phi_j) = \text{supp}(\psi_j) \subset \Omega_j. \tag{27.374}$$

Donc les fonctions ϕ_j sont celles que dont nous avions besoin. □

[40] Dans le Frido, « positif » signifie dans $[0, \infty]$.

27.5.3 Approximation de l'unité

LemDQEKNNf

Lemme 27.89.
Soit $f \in L^2(I)$ telle que

$$\int_I f\varphi = 0 \tag{27.375}$$

pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Alors $f = 0$ presque partout sur I.

Démonstration. Nous considérons la forme linéaire

$$\begin{aligned} \phi\colon L^2(I) &\to \mathbb{C} \\ g &\mapsto \langle f, g\rangle = \int_I f\bar{g}. \end{aligned} \tag{27.376}$$

Par densité[41] nous pouvons aussi considérer une suite (φ_n) dans $C_c^\infty(I)$ convergeant dans L^2 vers f. Alors nous avons pour tout n :

$$\langle f, \varphi_n\rangle = 0. \tag{27.377}$$

En passant à la limite, $\langle f, f\rangle = 0$, ce qui implique $f = 0$ dans L^2 et donc $f = 0$ presque partout en tant que bonne fonction. □

Ce résultat est encore valable dans les espaces L^p (proposition 27.190), mais il demande le théorème de représentation de Riesz[42].

DEFooEFGNooOREmBb

Définition 27.90 ([1, 728]).
*Nous considérons $\Omega = \mathbb{R}^d$ ou $(S^1)^d$. Une **approximation de l'unité** sur Ω autour de $a \in \Omega$ est une suite (φ_n) de fonctions à valeurs réelles dans $L^1(\Omega)$ telle que*

ITEMooGVRQooHDbrcf

(1) $\sup_k \|\varphi_k\|_1 < \infty$,

(2) pour chaque n nous avons $\int_\Omega \varphi_n = 1$,

(3) si V est un voisinage de a, alors

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus V} |\varphi_k| = 0. \tag{27.378}$$

En pratique, nous allons, sur $\mathbb{R}^d$ toujours considérer des approximations de l'unité autour de 0, même si nous ne le préciserons pas. Vous noterez que dans le cas de S^1, le choix du « point de base » est plus arbitraire.

Ce sont des fonctions dont la masse vient s'accumuler autour de zéro. En effet quel que soit le voisinage $B(0, \alpha)$, si k est assez grand, il n'y a presque plus rien en dehors.

Pour le point ((3)), si Ω est S^1, la mesure que nous considérons est $\frac{dx}{2\pi}$.

Exemple 27.91.
Une façon de construire une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}$ est de considérer une fonction $\varphi \in L^1(\Omega)$ telle que $\int \varphi = 1$ puis de poser

$$\varphi_k(x) = k^d\varphi(kx). \tag{27.379}$$

Ici, Ω peut être $\mathbb{R}$ ou S^1. △

Le lemme suivant permet de construire des approximations de l'unité intéressantes. Nous aurons une version pour S^1 dans le lemme 27.126.

LemCNjIYhv

Lemme 27.92 ([728]).
Soit une fonction φ continue et positive à support compact sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\varphi(x) > \varphi(0)$ pour tout $x \neq 0$. Si nous posons

$$\varphi_n(x) = \left(\int \varphi(y)^n\right)^{-1} \varphi(x)^n, \tag{27.380}$$

alors la suite (φ_n) est une approximation de l'unité.

Voici un théorème qui donne les propriétés à propos du produit de convolution avec une approximation de l'unité dans $\mathbb{R}^d$. Une version pour S^1 sera le théorème 27.127.

[41] Théorème 27.65(5).
[42] Théorème 27.187.

ThoYQbqEez

Théorème 27.93 ([728]).
Soit (φ_k) une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}^d$.

(1) Si g est mesurable et bornée sur $\mathbb{R}^d$ et si g est continue en x_0 alors

$$(\varphi_k * g)(x_0) \to g(x_0). \tag{27.381}$$

(2) Si $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ alors

$$\varphi_k * g \xrightarrow{L^p} g. \tag{27.382}$$

(3) Si g est uniformément continue et bornée, alors

$$\varphi_k * g \xrightarrow{L^\infty} g \tag{27.383}$$

Démonstration. En plusieurs points.

(1) Nous notons $d_k = (\varphi_k * g)(x_0) - g(x_0)$ et nous devons prouver que $d_k \to 0$. Vu que φ_k est d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}^d$ nous pouvons écrire

$$d_k = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_k(y) g(x_0 - y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} g(x_0)\varphi_k(y) dy, \tag{27.384}$$

et donc

$$|d_k| = \Big| \int_{\mathbb{R}^d} \big(g(x_0 - y) - g(x_0)\big)\varphi_k(y) dy \Big| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x_0 - y) - g(x_0)\big| |\varphi_k(y)| dy. \tag{27.385}$$

Nous notons $M = \sup_k \|\varphi_k\|_1$, et nous considérons $\alpha > 0$ tel que

$$\big|g(x_0 - y) - g(x_0)\big| \leqslant \epsilon \tag{27.386}$$

pour tout $y \in B(0, \alpha)$. Nous nous restreignons maintenant aux k suffisamment grands pour que $\int_{\complement B(0,\alpha)} |\varphi_k(y)| dy \leqslant \epsilon$. Alors en découpant l'intégrale en $B(0, \alpha)$ et son complémentaire dans $\mathbb{R}^d$,

$$|d_k| \leqslant \epsilon M + \int_{\complement B(0,\alpha)} 2\|g\|_\infty |\varphi_k(y)| dy \leqslant \epsilon M + 2\|g\|_\infty \epsilon \leqslant \epsilon C. \tag{27.387}$$

Donc oui, nous avons $|d_k| \to 0$, et donc le premier point du théorème.

(2) Cette fois $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et nous cherchons à montrer que $\|d_k\|_p \to 0$. Encore qu'ici d_k soit défini à partir d'un représentant dans la classe de g et que d'ailleurs, nous allons travailler avec ce représentant.

D'abord nous développons un peu ce d_k :

$$\|d_k\|_p = \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \big(g(x - y) - g(x)\big)\varphi_k(y) dy \right|^p dx \right]^{1/p} \tag{27.388a}$$

$$\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x - y) - g(x)| \cdot |\varphi_k(y)| dy \Big)^p dx \right]^{1/p}. \tag{27.388b}$$

À cette dernière expression nous appliquons l'inégalité de Minkowski (théorème 27.45) sous la forme (27.208) pour la mesure $d\nu(y) = |\varphi_k(y)|dy$ et $f(x, y) = g(x - y) - g(x)$:

$$\|d_k\|_p \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x - y) - g(x)|^p dx \Big)^{1/p} |\varphi_k(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y g - g\|_p |\varphi_k(y)| dy. \tag{27.389}$$

Par le lemme 27.67 nous pouvons trouver $\alpha > 0$ tel que $\|\tau_y g - g\|_p \leqslant \epsilon$ pour tout $y \in B(0, \alpha)$. Avec cela nous découpons encore le domaine d'intégration :

$$\|d_k\|_p \leqslant \int_{B(0,\alpha)} \underbrace{\|\tau_y g - g\|_p}_{\leqslant \epsilon} |\varphi_k(y)| dy + \int_{\complement B(0,\alpha)} \underbrace{\|\tau_y g - g\|_p}_{\leqslant 2\|g\|_p} |\varphi_k(y)| dy \leqslant \epsilon M + 2\epsilon \|g\|_p. \tag{27.390}$$

(3) Nous posons $d_k(x) = (\varphi_k * g)(x) - g(x)$ et nous voulons prouver que $\|d_k\|_\infty \to 0$, c'est-à-dire que $d_k(x)$ converge vers zéro uniformément en x. Nous posons aussi

$$\tau_y(g)\colon x \mapsto g(x-y). \tag{27.391}$$

En récrivant le produit de convolution, une petite majoration donne

$$|d_k(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y(g) - g\|_\infty |\varphi_k(y)| dy. \tag{27.392}$$

L'uniforme continuité de g signifie que pour tout ϵ, il existe un α tel que pour tout $y \in B(0,\alpha)$,

$$\|\tau_y(g) - g\|_\infty \leqslant \epsilon. \tag{27.393}$$

Encore une fois nous découpons le domaine d'intégration en $B = B(0,\alpha)$ et son complémentaire :

$$\|d_k\|_\infty \leqslant \int_B \underbrace{\|\tau_y(g) - g\|_\infty}_{\leqslant\epsilon} |\varphi_k(y)| dy + \int_{\complement B} \underbrace{\|\tau_y(g) - g\|_\infty}_{\leqslant 2\|g\|_\infty} |\varphi_k(y)| \tag{27.394a}$$

$$\leqslant \epsilon M + 2\|g\|_\infty \epsilon \tag{27.394b}$$

où la seconde ligne est justifiée par le choix d'un k assez grand pour que $\int_{\complement B} |\varphi_k(y)| dy \leqslant \epsilon$.

Nous avons donc bien $\|d_k\|_\infty \to 0$.

□

Exemple 27.94.
Une petite remarque en passant : aussi triste que cela en ait l'air, la convergence uniforme n'implique pas la convergence $L^p(\Omega)$ si Ω n'est pas borné. En effet si $f \in L^p$, la suite donnée par

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \tag{27.395}$$

converge uniformément vers f, mais

$$\|f_n - f\|_p = \int_\Omega \frac{1}{n} \tag{27.396}$$

n'existe même pas si le domaine Ω n'est pas borné. △

27.6 Intégrale sur des variétés

27.6.1 Formes différentielles

Nous allons donner une toute petite introduction aux formes différentielles sur des variétés compactes.

LemdwLGFG

Lemme 27.95 ([751]).
Soit ω une k-forme sur $\mathbb{R}^n$ et f, une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Alors $d(f^*\omega) = f^* d\omega$.

Démonstration. Nous effectuons la preuve par récurrence sur le degré de la forme. Soit d'abord une 0-forme, c'est-à-dire une fonction $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nous avons

$$d(d^*g)X = d(g \circ f)X = (dg \circ df)X = dg\big(dfX\big) = (f^*dg)(X). \tag{27.397}$$

Supposons maintenant que le résultat soit exact pour toutes les $p-1$-formes et montrons qu'il reste valable pour les p-formes. Par linéarité de la différentielle nous pouvons nous contenter de considérer la forme différentielle

$$\omega = g\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p \tag{27.398}$$

où g est une fonction C^∞. Pour soulager les notations nous allons noter $dx^I = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{p-1}$. Nous avons

$$d(f^*\omega) = d\big(f^*(g dx^I \wedge dx^p)\big) \tag{27.399a}$$

$$= d\big(f^*(g dx^I) \wedge f^* dx^p\big) \tag{27.399b}$$

$$= d\big(f^*(g dx^I)\big) \wedge f^* dx^p + (-1)^{p-1} f^*(g dx^I) \wedge (f^* dx^p) \tag{27.399c}$$ gnAnSt

$$= f^*\big(d(g dx^I)\big) \wedge f^* dx^p \tag{27.399d}$$ xZrfjZ

$$= f^*\big(d(g dx^I) \wedge dx^p\big) \tag{27.399e}$$

$$= f^* d\omega \tag{27.399f}$$ loWUji

Justifications : (27.399c) est la formule de Leibniz. (27.399d) est parce que le second terme est nul : $d(f^*dx^p) = f^*(d^2x^p) = 0$. Nous avons utilisé l'hypothèse de récurrence et le fait que $d^2 = 0$. L'étape (27.399f) est une utilisation à l'envers de la règle de Leibniz en tenant compte que $d^2x^p = 0$. □

Soit M une variété de dimension n et ω une n-forme différentielle

$$\omega_p = f(p)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{27.400}$$

Si (U, φ) est une carte ($U \subset \mathbb{R}^n$ et $\varphi\colon U \to M$) alors nous définissons

$$\int_{\varphi(U)} \omega = \int_U f\big(\varphi(x)\big)dx_1 \ldots dx_n. \tag{27.401}$$

Lorsque nous voulons intégrer sur une partie plus grande qu'une carte nous utilisons une partition de l'unité du théorème 27.88.

27.6.2 Intégrale d'une fonction sur une sous-variété

L'exemple typique est l'intégrale sur une surface dans $\mathbb{R}^3$, ou de volumes.

Nous supposons à présent que M est une variété compacte de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. La compacité fait que M possède un atlas contenant un nombre fini de cartes $F_i\colon W_i \to F_i(W_i)$.

Si $A \subset M$ est tel que pour chaque i, $A \cap F_i(W_i) = F_i(V_i)$ pour un ensemble V_i mesurable dans $\mathbb{R}^2$, alors nous considérons

$$A_1 = A \cap F_1(W_1) = F_1(V_1). \tag{27.402}$$

Ensuite, nous construisons A_2 en considérant $F_2(W_2)$ et en lui retranchant A_1 :

$$A_2 = \big(A \cap F_2(W_2)\big) \setminus F_1(V_1). \tag{27.403}$$

En continuant de la sorte, nous construisons la décomposition

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_p \tag{27.404}$$

de A en ouverts disjoints, chacun de ouverts A_p étant compris dans une carte.

Il est possible de prouver que dans ce cas, la définition suivante a un sens et ne dépend pas du choix de l'atlas effectué.

Définition 27.96.
*Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors l'**intégrale** est le nombre*

$$\int_A f = \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i} f d\sigma_{F_i}. \tag{27.405}$$

27.6.3 Densité des polynômes trigonométriques

DEFooGCZAooFecAHB

Définition 27.97.
*Le **système trigonométrique** donné par $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est*

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}. \tag{27.406}$$

Une bonne partie de la douleur qu'évoque mot « densité » consiste à montrer que ce système est total dans $L^2(S^1) = L^2([0, 2\pi])$, et donc en est une base hilbertienne.

Définition 27.98.
*Un **polynôme trigonométrique** est une fonction de la forme*

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(t). \tag{27.407}$$

DEFooZDUKooRnYhhF

Définition 27.99 (Coefficients de Fourier)**.**
Pour toute fonction pour laquelle ça a un sens (que ce soit des fonctions L^2 ou non), nous posons

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt. \tag{27.408}$$ EqhIPoPH

*Ces nombres sont les **coefficients de Fourier** de f.*

Ces trois définitions n'ont à priori aucun rapport entre elles, et rien en particulier ne devrait vous faire penser à une égalité du type

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n(x). \tag{27.409}$$

Nous avons toutefois quelques liens.

LemZVfZlms

Lemme 27.100.
Deux petits résultats simples mais utiles à propos des polynômes trigonométriques.

(1) Si $f \in L^1(S^1)$, alors nous avons la formule

$$f * e_n = c_n(f)e_n. \tag{27.410}$$

(2) Si P est un polynôme trigonométrique et si $f \in L^1(S^1)$ alors $f * P$ est encore un polynôme trigonométrique.

Démonstration. Le premier point est un simple calcul :

$$(f * e_n)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)e_n(t) \tag{27.411a}$$

En ce qui concerne le second point, nous notons $P = \sum_{k=-N}^{N} P_k e_k$, et par linéarité de la convolution,

$$f * P = \sum_{k=-N}^{N} P_k f * e_k = \sum_{k=-N}^{n} P_k c_k(f)e_k, \tag{27.412}$$

qui est encore un polynôme trigonométrique. □

ExDMnVSWF

Exemple 27.101.
Sur S^1 nous construisons alors l'approximation de l'unité basée sur la fonction $1+\cos(x)$ et le lemme 27.92. Cette fonction est évidemment un polynôme trigonométrique parce que

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{27.413}$$

Ensuite les puissances le sont aussi à cause de la formule du binôme :

$$\big(1 + \cos(x)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^n(x), \tag{27.414}$$

dans laquelle nous pouvons remettre $\cos(x)$ comme un polynôme trigonométrique et développer à nouveau la puissance avec (encore) la formule du binôme. La chose importante est qu'il existe une approximation de l'unité (φ_n) formée de polynômes trigonométrique.

Ce qui fait la spécificité des polynômes trigonométriques est qu'ils sont à la fois stables par convolution (lemme 27.100) et qu'ils permettent de créer une approximation de l'unité sur $[0, 2\pi]$. Ce sont ces deux choses qui permettent de prouver l'important théorème suivant. △

ThoQGPSSJq

Théorème 27.102.
Les polynômes trigonométriques sont dense dans $L^p(S^1)$ pour $1 \leqslant p < \infty$.

Démonstration.

$$\varphi_k * f \xrightarrow{L^p} f \tag{27.415}$$

par le théorème 27.93. Nous avons donc convergence L^p d'une suite de polynômes trigonométrique, ce qui prouve que l'espace de polynômes trigonométriques est dense dans $L^p(S^1)$. □

Remarque 27.103.
Deux remarques.

- Il n'est pas possible que les polynômes trigonométriques soient dense dans L^∞ parce qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue (c'est le théorème 12.381). Donc les polynômes trigonométriques ne peuvent engendrer que des fonctions continues.
- Nous donnerons au théorème 28.8 une démonstration indépendante de la densité des polynômes trigonométriques dans $L^p(S^1)$.

27.7 Espaces L^2, généralités

SECooEVZSooLtLhUm

L'espace L^2 est l'espace L^p défini en 27.10 avec $p = 2$. Cependant il possède une propriété extraordinaire par rapport aux autres L^p, c'est que la norme $|.|_2$ dérive d'un produit scalaire. Il sera donc un espace de Hilbert.

NORMooUEIEooYtlFse

27.104.
Nous en rappelons la construction. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Nous considérons l'opération

DefProdScalLubrgTj

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(\omega)\overline{g(\omega)}d\mu(\omega) \tag{27.416}$$

et la norme associée

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}. \tag{27.417}$$

Nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \mu) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{C} \text{ tel que } \|f\|_2 < \infty\} \tag{27.418}$$

et la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $f(x) = g(x)$ pour μ-presque tout x.

Et enfin, nous considérons le quotient

$$L^2(\Omega, \mu) = \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)/\sim . \tag{27.419}$$

LemIVWooZyWodb

Lemme 27.105.
Soit un espace mesuré[43] $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

(1) *Pour tout $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, le produit*

EQooGLVUooObPmaX

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\bar{g}\, d\mu \tag{27.420}$$

est bien défini et est un nombre complexe[44].

(2) *L'opération $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est un produit hermitien*[45].

(3) *Le couple $\big(L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \langle ., .\rangle\big)$ est un espace de Hilbert*[46].

Démonstration. Que $L^2(\Omega)$ soit un espace vectoriel est un cas particulier de la proposition 27.19. Voyons cette histoire de produit scalaire.

(1) **Pour de vraies fonctions** Nous commençons par analyser l'intégrale (27.420) dans le cas où f et g sont des fonctions, c'est-à-dire des représentants d'éléments de L^2.

Dans ce cas, l'inégalité de Hölder (proposition 27.39) avec $p = q = 2$ nous indique que le produit $f\bar{g}$ est un élément de L^1. Par conséquent la formule a un sens.

(2) **Passage aux classes**

Ensuite nous montrons que la formule passe au quotient. Pour cela, nous considérons des fonctions α et β nulles presque partout et nous regardons le produit de $f_1 = f + \alpha$ par $g_1 = g + \beta$:

$$\langle f_1, g_1\rangle = \int f\bar{g} + \bar{\beta}f + \alpha\bar{g} + \alpha\bar{\beta}. \tag{27.421}$$

Les fonctions $\bar{\beta}f$, $\alpha\bar{g}$ et $\alpha\bar{\beta}$ étant nulles presque partout, leur intégrale est nulle et nous avons bien $\langle f_1, g_1\rangle = \langle f, g\rangle$. Nous pouvons donc considérer le produit sur l'ensemble des classes.

(3) **Produit hermitien** Pour vérifier que la formule est un produit hermitien, le seul point non évident est de prouver que $\langle f, f\rangle = 0$ implique $f = 0$. Cela découle du fait que

$$\langle f, f\rangle = \int_\Omega |f|^2. \tag{27.422}$$

La fonction $x \mapsto |f(x)|^2$ vérifie les hypothèses du lemme 14.199. Par conséquent $|f(x)|^2$ est presque partout nulle.

[43] Est-ce qu'il ne faudrait pas un peu plus d'hypothèses, comme σ-fini par exemple ? Vérifiez et écrivez-moi quand vous avez la réponse.
[44] Par opposition au fait que ce serait l'infini.
[45] Définition 8.171. Pour rappel, nous considérons des fonctions à valeurs complexes. Si au contraire nous avions considéré seulement des fonctions à valeurs réelles, nous aurions eu un produit scalaire.
[46] Définition 25.3.

(4) **Espace de Hilbert** En ce qui concerne le fait que $L^2(\Omega)$ soit un espace de Hilbert, il s'agit simplement de se remémorer que c'est un espace complet (théorème 27.55) et dont la norme dérive d'un produit scalaire ou hermitien. Nous sommes donc bien dans la définition 25.3.

□

27.106.
Ces espaces seront utilisés pour de nombreuses applications. Nous en aurons besoin pour plusieurs combinaisons d'ensembles Ω et de mesures μ.

- Pour $\mathbb{R}^d$
- Pour S^1
- Pour $[a, b]$
- Pour $[0, 2\pi[$
- Pour $[-T, T[$

Le premier est non compact et il est raisonnable de penser qu'il sera fondamentalement différent des autres. À isomorphismes assez triviaux près, les espaces des fonctions sur les trois autres sont identiques. Nous nous attendons donc à ce qu'ils aient les mêmes propriétés. Notons que du point de vue de L^2, étant donné qu'il y a un quotient par les parties de mesures nulles, prendre $]0, 2\pi[$ ou $[0, 2\pi]$ ou n'importe quelle autre possibilité de ce genre revient au même.

Afin de pouvoir utiliser ces espaces de façon optimale, et entre autres y définir les séries de Fourier, nous avons besoin, pour chacun d'entre eux de définir les éléments suivants :

- mesure
- produit de convolution
- le système trigonométrique (que nous allons montrer être une base hilbertienne)
- coefficients de Fourier

Ça fait pas mal de choses à définir. Il n'est pas besoin de définir un produit scalaire parce que le lemme 27.105 nous en donne un générique.

Les définitions qui viennent sont à prendre « tant que les formules ont un sens ». Nous parlons donc de fonctions dans $\mathrm{Fun}(\Omega, \mathbb{C})$, l'ensemble de toutes les fonctions sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous verrons plus tard les espaces de fonctions sur lesquels tout a un sens.

27.8 L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$

La mesure est celle de Lebesgue. Le produit de convolution est donné, pour $f, g \in \mathrm{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)dy \tag{27.423}$$

Certaines de ses propriétés ont déjà été vues dans le théorème 27.79.

En ce qui concerne le système trigonométrique, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ nous définirions bien

$$e_\xi(x) = e^{i\xi \cdot x}, \tag{27.424}$$

genre pour faire que les transformations de Fourier sont des séries continues … mais bon. Nous n'allons pas tenter le diable plus que ça, et nous ne définissons

- pas de système trigonométrique,
- pas de coefficients de Fourier non plus,
- pas de théorie des séries de Fourier sur $\mathbb{R}^d$.

Quand je disais que la non-compacité de $\mathbb{R}^d$ allait un peu changer les choses par rapport aux autres, je ne rigolais pas.

27.9 L'espace $L^2(S^1)$

L'espace S^1 sera fait avec forces détails, parce qu'il va servir de base pour les espaces $L^2([0,2\pi[)$, $L^2([-T,T[)$ ainsi que pour l'étude des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$.

En tant qu'ensemble,

$$S^1 = \{e^{it}\}_{t\in\mathbb{R}}, \tag{27.425}$$

sans garanties que ce paramétrage soit une bijection.

Il y a essentiellement deux façons de définir une intégrale sur S^1.

(1) Voir S^1 comme une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ et utiliser la définition 20.9. Cette façon a cependant deux inconvénients :

- Elle ne donne pas la tribu des mesurables sur S^1, c'est-à-dire que cette méthode ne donne pas de façon évidente une théorie de la mesure sur S^1.
- Il faut au moins deux cartes pour paramétrer le cercle. La fainéantise nous prévient que ça va être technique.

(2) Rapporter la structure d'espace mesuré de $[0,2\pi[$ vers S^1, de force via le premier difféomorphisme qui nous passe par la tête, à savoir $t\mapsto e^{it}$.

Nous allons choisir la seconde possibilité, en gardant en tête qu'elle fonctionne de façon très simple un peu par coup de chance, voir la remarque 14.285(5).

27.9.1 Espace mesuré

Plusieurs choses sont déjà faites.

- Les boréliens de S^1 sont décrits dans la proposition 18.71,
- la tribu de Lebesgue de S^1 est décrite dans la proposition 18.73. Non, ce n'est pas la tribu induite de la tribu de Lebesgue de $\mathbb{C}$.

PROPooDJERooYirMru

Proposition 27.107 (Espaces de fonctions sur S^1[1])**.**
Soit l'espace mesuré $\big(S^1,\mathcal{L}eb(S^1),\mu\big)$.

(1) La formule

$$\langle f,g\rangle = \int_{S^1} f\bar{g}d\mu \tag{27.426}$$

EQooHPFQooEaujfZ

est un produit hermitien[47] *sur $L^2(S^1,\mathcal{L}eb(S^1),\mu)$.*

(2) L'espace $L^2(S^1)$ est un espace de Hilbert.

ITEMooQZAPooKEeQBW

(3) L'application[48]

$$\begin{aligned}\phi\colon L^2(S^1)&\to L^2\big([0,2\pi[\big)\\ f&\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f\circ\varphi.\end{aligned} \tag{27.427}$$

est une bijection isométrique (isomorphisme d'espaces de Hilbert)

Tout cela se résume par l'égalité

$$L^2(S^1,\mathcal{L}eb(S^1),\mu) = L^2\big(]0,2\pi[,\mathcal{L}eb(\mathbb{R}),\lambda\big) \tag{27.428}$$

où nous avons fait un minuscule abus de notations : ici $\mathcal{L}eb(\mathbb{R})$ est en réalité la tribu induite sur $]0,2\pi[$.

Démonstration. Le fait que la formule (27.426) donne bien un produit hermitien est le lemme 27.105. Ce même lemme assure que le tout donne un espace de Hilbert.

Il nous reste à prouver le point (3). En ce qui concerne l'isométrie, nous posons[49]

$$\begin{aligned}\phi\colon L^2(S^1)&\to L^2\big([0,2\pi[\big)\\ f&\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f\circ\varphi\end{aligned} \tag{27.429}$$

[47] Définition 8.171.
[48] Ici $\varphi\colon[0,2\pi[\to S^1$ est la bijection usuelle de la proposition 18.62(1).
[49] Notez que cette définition passe aux classes. Nous le répéterons pas.

(1) **Injection** Si $\phi(f) = \phi(g)$, alors pour tout $x \in [0,2\pi[$ nous avons $f\big(\varphi(x)\big) = g\big(\varphi(x)\big)$. Vu que $\varphi\colon [0,2\pi[\to S^1$ est une bijection nous avons alors $f(s) = g(s)$ pour tout $s \in S^1$.

(2) **Surjection** Si $f \in L^2\big(]0,2\pi]\big)$, nous posons $g\colon S^1 \to \mathbb{C}$ par

$$g(s) = \sqrt{2\pi} f\big(\varphi^{-1}(s)\big). \tag{27.430}$$

Nous avons alors bien $\phi(g)(x) = f(x)$.

(3) **Isométrie** Nous montrons que ϕ préserve le produit scalaire : SUBEQSooRYYHooPcLXHN

$$\langle \phi(f), \phi(g) \rangle = \int_0^{2\pi} \phi(f)(x)\overline{\phi(g)(x)} d\lambda(x) \tag{27.431a}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(x)\overline{(g \circ \varphi)(x)}\, d\lambda(x) \tag{27.431b}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f\bar{g}) \circ \varphi \, d\lambda \tag{27.431c}$$

Pour la suite nous devons invoquer la proposition 14.284 qui nous permet de changer une intégrale sur $\big([0,2\pi[, \mathcal{L}\text{eb}\big([0,2\pi[\big), \lambda\big)$ en une intégrale sur $\big(S^1, \mathcal{L}\text{eb}(S^1), \mu\big)$. La première condition de cette proposition est que $\mathcal{L}\text{eb}(S^1) = \varphi\big(\mathcal{L}\text{eb}([0,2\pi[)\big)$. Cela est la proposition 18.73(2). La condition sur la mesure dans la proposition 14.284 n'est vraie ici qu'à un facteur 2π près. Nous avons :

$$\int_{[0,2\pi[} f d\lambda = 2\pi \int_{S^1} (f \circ \varphi^{-1}) d\mu. \tag{27.432}$$

Nous continuons le calcul (27.431) :

$$\langle \phi(f), \phi(g) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f\bar{g}) \circ \varphi \, d\lambda = \int_{S^1} f\bar{g} d\mu = \langle f, g \rangle. \tag{27.433}$$

□

27.9.2 Topologie

Nous considérons sur S^1 la topologie induite de $\mathbb{C}$. Vu que S^1 est fermé et borné dans $\mathbb{C}$, il en est une partie compacte. Par le lemme 7.112, l'espace S^1 muni de sa topologie est un espace topologique compact.

Nous pouvons donc sans crainte affirmer que toute fonction continue $f\colon S^1 \to \mathbb{K}$ est bornée et atteint ses bornes.

PROPooEQDBooDfOrTZ

Proposition-Définition 27.108.
Soit la formule

$$d(e^{ix}, e^{iy}) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x - y + 2k\pi|. \tag{27.434}$$

(1) Elle est bien définie (ne dépend pas des choix de x et y donnant les mêmes points dans S^1)

(2) L'infimum est en réalité un minimum : il est atteint par un certain $k \in \mathbb{Z}$ (qui, lui, dépend des choix).

(3) La formule définit une distance[50] sur S^1.

Nous considérons sur S^1 la topologie τ_d découlant de cette distance.

Démonstration. Point par point.

(1) Soient $x', y' \in \mathbb{R}$ tels que $e^{ix'} = e^{ix}$ et $e^{iy'} = e^{iy}$. Alors $x' = x + 2l\pi$ et $y' = y + 2l'\pi$ pour certains entiers $l, l' \in \mathbb{Z}$ (corolaire 18.25). Nous avons alors $|x' - y' + 2k\pi| = |x - y + 2\pi(k + l - l')|$ et

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}} |x' - y' + 2k\pi| = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x - y + 2k\pi|. \tag{27.435}$$

(2) Quels que soient x et y fixés, nous avons

$$\lim_{k\to\pm\infty} |x - y + 2k\pi| = \infty. \tag{27.436}$$

Donc l'infimum est forcément atteint par un $k \in \mathbb{Z}$.

[50] Définition 7.139.

(3) Pour la distance, il y a plusieurs points à prouver.

- Pour tout $z, z' \in S^1$ nous avons $d(z, z') \geqslant 0$ parce que la distance est donnée par une valeur absolue.
- Si $d(z, z') = 0$, alors il existe k tel que $x = y + 2k\pi$. Alors $e^{ix} = e^{i(y+2k\pi)} = e^{iy}e^{2ki\pi} = e^{iy}$. C'est-à-dire $z = z'$.
- Pour la symétrie, nous avons

$$|x - y + 2k\pi| = |y - x - 2k\pi| = |y - x + 2k'\pi| \tag{27.437}$$

en posant $k' = -k$. L'infimum étant pris sur $k \in \mathbb{Z}$, nous avons al symétrique $d(e^{ix}, e^{iy}) = d(e^{iy}, e^{ix})$.

- Pour attaquer l'inégalité triangulaire, nous considérons $z_1 = e^{ix_1}$, $z_2 = e^{ix_2}$ et $z_3 = e^{ix_3}$. Nous posons également $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ tels que $d(z_1, z_3) = |x_1 - x_3 + 2k_1\pi|$, $d(z_1, z_2) = |x_1 - x_2 + 2k_2\pi|$ et $d(z_2, z_3) = |x_2 - x_3 + 2k_3\pi|$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
d(z_1, z_3) &= \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x_1 - x_3 + 2k\pi| && \text{(27.438a)}\\
&= \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + 2k\pi| && \text{(27.438b)}\\
&= \inf_{k\in\mathbb{Z}} \big|(x_1 - x_2 + 2k_2\pi) + (x_2 - x_3 + 2k_3\pi) + 2k\pi\big| && \text{(27.438c)}\\
&\leqslant \big|(x_1 - x_2 + 2k_2\pi) + (x_2 - x_3 + 2k_3\pi)\big| && \text{(27.438d)}\\
&\leqslant |x_1 - x_2 + 2k_2\pi| + |x_2 - x_3 + 2k_3\pi|. && \text{(27.438e)}
\end{aligned}$$

SUBEQooXOGCooCZxCsf

Notez que pour (27.438d), en posant $k = 0$ nous avons bien une inégalité. En y pensant, $k = 0$ réalise effectivement l'infimum, mais ce n'est pas indispensable.

□

Le cercle est bien connu pour être symétrique et en particulier avoir une symétrie sous les rotations. Nous allons voir quelques résultats qui vont dans le sens de dire que la distance définie sur S^1 respecte cette symétrie.

LEMooCQCAooAEctbe

Lemme 27.109.
Plusieurs points à propos de l'invariance de la topologie sous les rotations.

(1) La distance est invariante sous les rotations, c'est-à-dire que si $a, b \in S^1$ et si $s \in \mathbb{R}$, alors

$$d(e^{is}a, e^{is}b) = d(a, b). \tag{27.439}$$

ITEMooCIPYooTyPQLj

(2) Les boules sont préservées sous les rotations[51]*, c'est-à-dire que*

$$e^{is}B_d(a, r) = B_d(e^{is}a, r). \tag{27.440}$$

(3) La topologie est invariante sous les rotations : $e^{is}\tau_d = \tau_d$.

Démonstration. Point par point.

(1) Si $a = e^{ix}$ et $b = e^{iy}$, nous avons

$$d(a, b) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x - y + 2k\pi| = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |(x - s) - (y - s) + 2k\pi| = d(e^{is}a, e^{is}b). \tag{27.441}$$

Et de un.

(2) Il faut une inclusion dans chaque sens.

(2a) $e^{is}B_d(a, r) \subset B_d(e^{is}a, r)$ Soit $b \in e^{is}B_d(a, r)$. Alors $b = e^{is}b'$ pour un certain $b' \in B_d(a, r)$. Nous avons alors, en utilisant le premier point,

$$d(b, ae^{is}) = d(e^{-is}b, a) = d(b', a) < r. \tag{27.442}$$

Donc $b \in B_d(e^{is}a, r)$.

[51] Pas chaque boule séparément, mais l'ensemble des boules

(2b) $B_d(e^{is}a,r) \subset e^{is}B_d(a,r)$ Soit $b \in B_d(e^{is}a,r)$. Nous devons prouver que $b \in e^{is}B_d(a,r)$, c'est-à-dire que $b = e^{is}b'$ pour un certain $b' \in B_d(a,r)$ ou encore que $e^{-is}b \in B_d(a,r)$. En utilisant encore le premier point,

$$d(e^{-is}b,a) = d(b,e^{is}a) < r. \tag{27.443}$$

Donc oui, $e^{-is}b \in B(a,r)$.

(3) Soit $A \in \tau_d$. Si $a \in e^{is}A$, alors $a = e^{is}a'$ pour un certain $a' \in A$. Notre but est de prouver que $e^{is}A$ contient un voisinage de a.

Vu que $a' \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B_d(a',r) \subset A$. Nous avons alors

$$e^{is}aB_d(a',r) \subset e^{is}A, \tag{27.444}$$

et comme $e^{is}B_d(a',r) = B_d(e^{is}a',r) = B_d(a,r)$ nous avons bien

$$B_d(a,r) \subset e^{is}A. \tag{27.445}$$

□

Nous allons voir maintenant quelques résultats à propos de $B_d(1,r)$ qui a la bonne figure d'être un ouvert qui s'étale symétriquement en partant de 1 (le point le plus à droite du cercle). Par rapport à la figure 27.1, il s'agit ni plus ni moins que de voir qu'une boule de rayon r autour de 1 est bien la partie indiquée (symétrique par rapport à 1 et de longueur d'arc r des deux côtés). De plus, ce voisinage n'est autre que la partie du cercle située à droite de la ligne en pointillés.

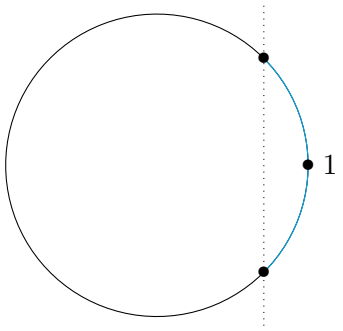


FIGURE 27.1 : Un voisinage de 1 dans S^1. LabelFigJOQVoolPTsYPZK

Ce lemme-ci montre que $B_d(1,r)$ est une partie de S^1 qui s'étale symétriquement autour de 1.

LEMooMYNVooIWWsiV

Lemme 27.110.
Soit l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} &\to S^1\\ x &\mapsto e^{ix}.\end{aligned} \tag{27.446}$$

Nous avons $B_d(1,r) = \varphi\big(]-r,r[\big)$.

Démonstration. Soit $b \in B_d(1,r)$ de la forme $b = e^{iy}$ avec y choisi de telle sorte que $d(1,b) = |y|$. Vu que $d(1,b) < r$, nous avons $|y| < r$ et donc $b \in \varphi\big(]-r,r[\big)$.

Dans l'autre sens, si $y \in]-r,r[$, alors

$$d(1,e^{iy}) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |y + 2k\pi| \leqslant |y| < r. \tag{27.447}$$

EQooRWASooVZnQCJ

Nous avons utilisé le fait que l'infimum sur $k \in \mathbb{Z}$ est plus petit ou égal à la valeur pour $k = 0$. Les inégalités (27.447) montrent que $e^{iy} \in B_d(1,r)$. □

Le lemme suivant montre que que les boules autour de 1 sont délimitées par la droite en pointillé de la figure 27.1.

LEMooLINCooHJmJWx

Lemme 27.111.
Soit $r \in [0,\pi]$. Nous avons

$$B_d(1,r) = S^1 \cap \{x + iy \text{ tel que } x > \cos(r)\}. \tag{27.448}$$

Démonstration. En deux inclusions.

(1) **Inclusion $\subset$**

Si $r = \pi$, alors $B(1,r) = S^1 \setminus \{-1\}$, alors que $\cos(\pi) = -1$.

Si $r < \pi$, alors nous partons de la formule (18.18) qui dit que $e^{ir} = \cos(r) + i\sin(r)$. D'après le lemme 27.110, un élément de $B_d(1,r)$ est de la forme e^{iy} avec $y \in]-r,r[$. Nous voudrions donc prouver que $\cos(y) > \cos(r)$ dès que $y \in]-r,r[$ et $r < \pi$.

Sur $]-r,0[$, la fonction cos est croissante[52], donc si $y < 0$ alors

$$\cos(y) > \cos(-r) = \cos(r). \tag{27.449}$$

De la même façon, sur $]0,r[$, la fonction cos est décroissante, de telle sorte que si $y > 0$, alors $\cos(y) > \cos(r)$.

Nous avons prouvé que $B_d(1,r) \subset S^1 \cap \{x + iy \text{ tel que } x > \cos(r)\}$.

(2) **Inclusion inverse**

Soit $z = e^{is}$ avec $s \in [-\pi,\pi[$, et vérifiant $\cos(s) > \cos(r)$. Nous avons

$$d(1,z) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |s + 2k\pi| = |s| \tag{27.450}$$

parce que l'infimum est réalisé par $k = 0$. Nous avons donc

$$\begin{cases} \cos(s) > \cos(r) & \text{(27.451a)} \\ |s| \in [0,\pi] & \text{(27.451b)} \\ r \in [0,\pi], & \text{(27.451c)} \end{cases}$$

et nous devons en déduire que $|s| < r$. Si $s > 0$, alors la décroissance de cosinus (proposition 18.49(1)) dit que $s < r$.

Si $s < 0$, alors nous savons que $\cos(s) = \cos(-s)$ et donc, en posant $s' = -s$, le cas "$s > 0$" nous dit que $s' < r$, et donc que $|s| < r$.

Dans les deux cas nous avons $d(1,z) = |s| < r$.

□

Proposition 27.112.
La topologie τ_d sur S^1[53] est la topologique induite depuis $\mathbb{C}$.

Démonstration. Nous notons τ_i la topologie induite (c'est-à-dire l'ensemble des ouverts) et τ_d la topologie de la distance fraichement définie. Nous allons également noter $B_{\mathbb{C}}(a,r)$ la boule dans $\mathbb{C}$ de centre a et de rayon r, et $B_d(z,r)$ celle dans S^1, de centre $z \in S^1$ et de rayon r pour notre distance d.

(1) $\tau_i \subset \tau_d$ Un élément général de τ_i est de la forme $\mathcal{O} \cap S^1$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $a \in \mathcal{O} \cap S^1$ et prouvons qu'il existe un ouvert de τ_d contenant a et contenu dans $\mathcal{O} \cap S^1$; cela prouvera que $\mathcal{O} \cap S^1$ est ouvert de τ_d par le théorème 7.8.

Soient $a = e^{ix}$ et r tel que $B_{\mathbb{C}}(a,r) \subset \mathcal{O}$. Nous allons montrer que $B_d(a,r) \subset B_{\mathbb{C}}(a,r)$. Un élément général de $B_d(a,r)$ est $b = e^{iy}$ tel que

$$d(a,b) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x - y + 2k\pi| \leqslant r. \tag{27.452}$$

Quitte à redéfinir x ou y nous pouvons supposer que l'infimum est atteint en $k = 0$. En utilisant la proposition 21.15 nous majorons :

$$|a - b| = |e^{ix} - e^{iy}| \leqslant |x - y| = d(a,b) \leqslant r. \tag{27.453}$$

Donc nous avons bien $b \in B_{\mathbb{C}}(a,r)$ dès que $b \in B_d(a,r)$.

(2) $\tau_d \subset \tau_i$

Ce sens est plus délicat parce que, si nous voulons suivre les mêmes pas que le premier sens, nous devrons nous appuyer sur la continuité de l'application $\ln\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, laquelle n'est pas vraie en -1 (voir par exemple le lemme 26.34).

Soient $A \in \tau_d$ et $a \in A$. Nous devons prouver l'existence d'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ tel que $S^1 \cap \mathcal{O}$ soit inclus dans A et contienne a. Nous allons prouver cela dans le cas $a = 1$ et ensuite propager le résultat en utilisant la symétrie de S^1.

[52] Lemme 18.26.
[53] Définition 27.108.

(2a) **Si $a = 1$** Vu que A est ouvert pour la topologie de la distance d, et vu que $1 \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B_d(1, r) \subset A$. Pour ce r le lemme 27.111 donne

$$B_d(1, r) = S^1 \cap \{x + iy \text{ tel que } x > \cos(r)\}. \tag{27.454}$$

Nous montrons que $\mathcal{O} = B_{\mathbb{C}}(1, \delta)$ avec $\delta < 1 - \cos(r)$ fait l'affaire. Si $x + iy \in B_{\mathbb{C}}(1, \delta)$, alors $x > 1 - \delta$ et donc

$$1 - \delta > 1 - (1 - \cos(r)) = \cos(r), \tag{27.455}$$

ce qui prouve que la partie de $\mathcal{O}$ qui est dans S^1 est bien dans $B_d(1, r)$.

(2b) **Si $a \neq 1$**

Soient un ouvert quelconque $A \in \tau_d$ ainsi que $a = e^{ix} \in A$. Nous considérons $r > 0$ tel que $B_d(a, r) \subset A$; nous avons $e^{-ix} B_d(a, r) \subset e^{-ix} A$ et donc, en tenant compte du lemme 27.109(2) :

$$B_d(1, r) \subset e^{-ix} A. \tag{27.456}$$

Par le premier point, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ tel que $1 \in \mathcal{O}$ et

$$\mathcal{O} \cap S^1 \subset B_d(1, r) \subset e^{-ix} A. \tag{27.457}$$

Nous avons évidemment que $a \in e^{ix}\mathcal{O}$ et

$$e^{ix}(\mathcal{O} \cap S^1) \subset e^{ix} B_d(1, r) \subset A. \tag{27.458}$$

Donc $e^{ix}\mathcal{O} \cap S^1 \subset A$. Vu que $e^{ix}\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, l'ensemble $e^{ix}\mathcal{O} \cap S^1$ est un ouvert de τ_i.

□

LEMooTKFHooJaeMyc

Lemme 27.113 ([1]).
Deux résultats de limites dans S^1.

ITEMooEUDIooDuynRg

(1) Pour tout $a_0 \in S^1$, nous avons

$$\lim_{s \to 1} d(a, as) = 0. \tag{27.459}$$

ITEMooXCBUooUxQldB

(2) Si $f : S^1 \to \mathbb{C}$ est continue en $a \in S^1$, alors

$$\lim_{s \to 1} f(as) = f(a). \tag{27.460}$$

Démonstration. Point par point.

(1) Soient $a, s \in S^1$. Donnons une formule pour $d(a, as)$. Si $a = e^{ix}$ et $s = e^{iy}$ nous avons $as = e^{i(x+y)}$ et donc

$$d(a, as) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - (x + y) + 2k\pi| = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |y + 2k\pi|. \tag{27.461}$$

Voilà pour la formule. Maintenant la preuve de notre point.

Soit $\epsilon > 0$. Si $\delta < \epsilon$ et si $s \in B(1, \delta)$, alors il existe $y \in]-\delta, \delta[$ tel que $s = e^{iy}$ par le lemme 27.110. Pour un tel s nous avons

$$d(a, sa) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |y + 2k\pi| \leqslant |y| < \delta < \epsilon. \tag{27.462}$$

Nous avons trouvé $\delta > 0$ tel que $s \in B(1, \delta)$ implique $d(a, as) < \epsilon$. Cela est la limite que nous devions prouver.

(2) Soit $\epsilon > 0$. Soit $r > 0$ tel que si $b \in B(a, r)$, alors $|g(b) - g(a)| < \epsilon$; l'existence d'un tel r est la continuité de g en a. Nous considérons $\delta > 0$ tel que $s \in B(1, \delta)$ implique $sa \in B(a, r)$; l'existence d'un tel δ est le point (1) de ce lemme.

Avec tout cela nous avons $|g(as) - g(a)| < \epsilon$ dès que $s \in B(1, \delta)$. Nous avons donc, comme nous le voulions, la limite $\lim_{s \to 1} g(as) = g(a)$.

□

Lemme 27.114.
Pour $s \in S^1$, nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \alpha_s : \ & \mathrm{Fun}(S^1) \to \mathrm{Fun}(S^1) \\ & \alpha_s(g)(u) = g(u\bar{s}) - g(u). \end{aligned} \tag{27.463}$$

Quelques propriétés avec $1 \leqslant p < \infty$:

(1) Si $f \in L^p(S^1)$, alors $\alpha_s(f) \in L^p(S^1)$.

(2) Si f est continue dans $L^p(S^1)$ nous avons la limite

$$\lim_{s\to 1} \alpha_s(f) = 0 \tag{27.464}$$

dans $L^p(S^1)$.

Démonstration. D'abord un calcul de norme :

$$\|\alpha_s(f)\|_p^p = \int_{S^1} |f(u\bar{s}) - f(u)|^p du \leqslant \int_{S^1} |f(u\bar{s})|^p du + \int_{S^1} |f(u)|^p du = 2\|f\|_p^p. \tag{27.465}$$

Donc oui pour que $\alpha_s(f) \in L^p(S^1)$.

La fonction f étant supposée continue sur le compact S^1, elle est majorée. Nous savons qu'en posant $M = \|f\|_\infty$ nous avons $|\alpha_s(f)| \leqslant 2M$. Donc la fonction constante

$$\begin{aligned} g\colon S^1 &\to \mathbb{C} \\ u &\mapsto 2M \end{aligned} \tag{27.466}$$

est une fonction intégrable sur S^1 qui majore $|\alpha_s(f)|$ uniformément en s. Soit une suite $s_i \to 1$ dans S^1, et posons $f_i = \alpha_{s_i}(f)$. Alors nous avons

$$\|f_i\|_p^p = \int_{S^1} |f_i(u)|^p du \tag{27.467}$$

et aussi $|f_i|^p \leqslant (2M)^p$. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 14.207 nous permet de permuter limite et intégrale :

$$\lim_{i\to\infty} \|f_i\|_p^p = \int_{S^1} \lim_{i\to\infty} |f_i(u)|^p du. \tag{27.468}$$

Mais

$$\lim_{i\to\infty} f_i(u) = \lim_{i\to\infty} \alpha_{s_i}(f)(u) = \lim_{i\to\infty} \big(f(u\bar{s}_i) - f(u)\big) = 0. \tag{27.469}$$

La dernière limite est due au fait que $\lim_{s\to 1} g(us) = g(u)$ (lemme 27.113(2)). □

27.9.3 Système trigonométrique

Définition 27.115.
*La **famille trigonométrique** sur S^1 est l'ensemble de fonctions $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ données par*

$$\begin{aligned} e_n\colon S^1 &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^n \end{aligned} \tag{27.470}$$

*avec $n \in \mathbb{Z}$. Un **polynôme trigonométrique** est une application $S^1 \to \mathbb{C}$ de la forme*

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \tag{27.471}$$

pour des nombres $a_k \in \mathbb{C}$, peut-être pas tous non-nuls (autrement dit, il n'est pas forcé d'avoir autant de termes négatifs que positifs).

Le but de $z \mapsto z^n$ dans cette définition est d'être lu $t \mapsto e^{int}$ lorsqu'on considère les fonctions sur $[0, 2\pi[$.
PROPooOMGFooROFFFr

Proposition 27.116.
La famille trigonométrique est une famille orthonormale pour le produit scalaire $L^2(S^1, \mathcal{A}, \mu)$.

Démonstration. En utilisant la proposition 27.107(3) nous avons :

$$\langle e_n, e_n\rangle = \int_{S^1} e_n\overline{e_n} = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} e_n\big(\varphi(x)\big)\overline{e_n\big(\varphi(x)\big)} \tag{27.472a}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} e^{inx}e^{-inx}dx \tag{27.472b}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1dx \tag{27.472c}$$

$$= 1. \tag{27.472d}$$

Et nous avons également, pour $m \neq n$:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} e^{i(n-m)x} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{i(n-m)e^{i(n-m)x}} \right]_0^{2\pi} = 0. \tag{27.473}$$

□

Remarque 27.117.
Vous aurez noté que le facteur $\frac{1}{2\pi}$ qui permet d'avoir $\langle e_n, e_n \rangle = 1$ ne provient ni de la définition du produit scalaire ni de celle de la famille trigonométrique, mais bien de la mesure, voir la définition 18.194.

REMooUCANooVyXPxj

Remarque 27.118.
Notez aussi que nous avons bien $\langle e_n, e_{-n} \rangle = 0$. Il faut donc bien prendre tous les e_n avec $n \in \mathbb{Z}$ et non seulement $n \in \mathbb{N}$.

PROPooTGBHooXGhdPR

Proposition 27.119.
Les polynômes trigonométriques forment une partie dense dans $\big(C(S^1, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\big)$.

Démonstration. Pour préciser les notations, $C(S^1, \mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions continues de S^1 vers $\mathbb{C}$, et l'espace topologique que nous considérons est cet ensemble sur lequel nous considérons la distance supremum.

Nous utilisons le théorème de Stone-Weierstrass 12.444.

Le système contient une fonction constante non nulle, à savoir e_0.

Il sépare les points grâce à la fonction e_1 qui n'est autre que la fonction identité $z \mapsto z$. De plus l'ensemble des polynômes trigonométriques est stable par conjugaison parce que si

$$P = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k, \tag{27.474}$$

alors $\bar{P} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{a_k e_k} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{a_k} e_{-k}$ qui est encore un polynôme trigonométrique. □

Définition 27.120.
Si nous avons une fonction $f : S^1 \to \mathbb{C}$, nous définissons ses ***coefficients de Fourier*** *par*

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle \tag{27.475}$$

pourvu que l'intégrale existe.

27.9.4 Convolution

La convolution sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par la définition 27.78. Nous voyons maintenant comment cela s'adapte à S^1.

DEFooSKWOooEdIHoH

Définition 27.121.
Si f et g sont des fonctions sur S^1 à valeurs dans $\mathbb{C}$, nous définissons la ***convolution*** *de f et g comme étant la fonction sur S^1 définie par*

$$(f * g)(z) = \int_{S^1} f(s) g(z\bar{s}) d\mu(s). \tag{27.476}$$

EQooILQNooBKtSBj

Cette définition appelle plusieurs remarques.

- Dès que $z, s \in S^1$, nous avons $z\bar{s} \in S^1$, de telle sorte qu'au moins l'intégrande ait un sens.
- Nous ne prétendons pas que l'intégrale (27.476) converge pour toutes les fonctions f et g. Cela est une définition « pour tous les couples f, g pour lesquels l'intégrale fonctionne ».
- Le lemme 27.122 nous dira que $L^1(S^1)$ est stable par convolution : si f et g sont dans L^1, alors $f * g$ y est aussi.
- Dans la formule (27.476), la variable s est vraiment une variable muette. Cette formule aurait également pu être écrite

$$(f * g)(z) = \int_{S^1} \big[s \mapsto f(s) g(z\bar{s}) \big] d\mu. \tag{27.477}$$

LEMooTYSSooItOiYE

Lemme 27.122 ([752]).
Si $f, g \in L^1(S^1)$, alors pour presque tout $z \in S^1$, la fonction $s \mapsto \int f(s)g(z\bar{s})$ est dans $L^1(S^1)$.

Démonstration. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}\psi\colon S^1 \times S^1 &\to \mathbb{C}\\ (z,s) &\mapsto f(s)g(z\bar{s}).\end{aligned} \tag{27.478}$$

(1) $\psi \in L^1(S^1 \times S^1)$ Nous utilisons le corolaire 14.304, et pour cela nous calculons les intégrales en chaine[54] :

$$\int_{S^1}\left[\int_{S^1}|f(s)g(z\bar{s})|dz\right]ds = \int_{S^1}|f(s)|\underbrace{\left[\int_{S^1}|g(z\bar{s})|dz\right]}_{=A<\infty}ds \tag{27.479a}$$

$$= A\int_{S^1}|f(s)ds| \tag{27.479b}$$

$$< \infty. \tag{27.479c}$$

Le fait que $A < \infty$ provient directement de l'hypothèse $g \in L^1(S^1)$[55].

Par le corolaire sus-cité nous avons bien $\psi \in L^1(S^1 \times S^1)$.

(2) **Et par Fubini** Le théorème de Fubini 14.305(1) nous renseigne que pour presque tout $z \in S^1$, l'application

$$s \mapsto \psi(z,s) \tag{27.480}$$

est dans $L^1(S^1)$. Et la partie 14.305(2) ajoute que l'application

$$z \mapsto \int_{S^1}\psi(s,z)ds \tag{27.481}$$

EQooPLLBooJZsZzu

est également $L^1(S^1)$.

(3) **Conclusion** L'application donnée en (27.481) est précisément $(f * g)$. Donc $f * g \in L^1(S^1)$.

□

Lemme 27.123 ([1]).
Si $f \in L^1(S^1)$ et si g est continue sur S^1, alors $f * g$ existe et est continue sur S^1.

Démonstration. Vu que S^1 est compact, la continuité de g implique que g est bornée et donc dans $L^1(S^1)$. Le lemme 27.122 dit alors que $f * g$ est bien définie sur S^1.

Soit $z_0 \in S^1$. Nous montrons que $f * g$ est continue en z_0 ; pour cela nous considérons $\epsilon > 0$ et ensuite nous réfléchissons un peu.

Vu que g est continue sur S^1 qui est compact, g y est uniformément continue par le théorème de Heine12.80. Il existe donc un $\delta > 0$ tel que pour tout $z_0 \in S^1$, si $z \in B(z_0, \delta)$, alors $|g(z_0) - g(z)| < \epsilon$.

Soit $s \in S^1$. Si $z \in B(z_0, \delta)$, alors $\bar{s}z \in B(\bar{s}z_0, \delta)$ par le lemme 27.109(2). Dans ce cas nous avons aussi

$$|g(\bar{s}z_0) - g(\bar{s}z)| < \epsilon. \tag{27.482}$$

Un peu de calcul maintenant. D'une part

$$(f * g)(z_0) - (f * g)(z) = \int_{S^1} f(s)\big(g(z_0\bar{s}) - g(z\bar{s})\big)ds, \tag{27.483}$$

et donc

$$|(f * g)(z_0) - (f * g)(z)| \leqslant \int_{S^1}|f(s)|\underbrace{\big|g(z_0\bar{s}) - g(z\bar{s})\big|}_{<\epsilon}ds \tag{27.484a}$$

$$\leqslant \epsilon\int_{S^1}|f| \tag{27.484b}$$

$$= A\epsilon \tag{27.484c}$$

[54] Dans les expressions suivantes, les symboles « ds » et « dz » n'ont pas d'autres valeurs que purement de notation pour indiquer le nom de la variable d'intégration.

[55] Avec un changement de variables $z \mapsto z\bar{s}$ que je vous conseille d'être capable de justifier.

pour une certaine constante A ne dépendant pas de z_0.

Nous avons prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un δ tel que $z \in B(z_0, \alpha)$ implique

$$|(f * g)(z_0) - (f * g)(z)| \leqslant A\epsilon, \tag{27.485}$$

ce qui signifie que $f * g$ est continue en z_0. □

Notez que dans cette démonstration, l'uniforme continuité de g a été utilisée pour effectuer d'un seul coup la majoration pour tout s dans l'intégrale.

PROPooCSRNooDyClBY

Proposition 27.124.
Si $f \in L^1(S^1)$, nous avons

$$f * e_n = c_n(f)e_n. \tag{27.486}$$

Démonstration. Il s'agit d'un bon calcul. En considérant $z = e^{i\theta}$ nous avons

$$\begin{aligned}
(f * e_n)(z) &= \int_{S^1} f(s)e_n(z\bar{s})ds & (27.487a)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} f(e^{ix})e_n(e^{i(\theta-x)})dx & (27.487b)\\
&= e^{in\theta}\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} f(e^{ix})e^{-inx}dx & (27.487c)\\
&= e_n(e^{i\theta})\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} f(e^{ix})\overline{e_n(e^{ix})}dx & (27.487d)\\
&= e_n(z)\int_{S^1} f(s)\overline{e_n(s)}ds & (27.487e)\\
&= e_n(z)\langle f, e_n\rangle. & (27.487f)
\end{aligned}$$

Donc $(f * e_n)(z) = \langle f, e_n\rangle e_n(z)$, c'est-à-dire que

$$f * e_n = c_n(f)e_n. \tag{27.488}$$

□

LEMooDGHJooRAnwpy

Lemme 27.125.
Si P est un polynôme trigonométrique et si $f \in L^1(S^1)$, alors $f * P$ est également un polynôme trigonométrique.

Démonstration. Soit $P = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k$. Par la linéarité du produit de convolution,

$$f * P = \sum_{k=-n}^{n} a_k f * e_k = \sum_k a_k c_k(f)e_k \tag{27.489}$$

où nous avons également utilisé la proposition 27.124. Nous avons donc un polynôme trigonométrique dont les coefficients sont $a_k c_k(f)$ au lieu de a_k. □

27.9.5 Approximation de l'unité

LEMooUNFBooRCzwIn

Lemme 27.126 ([728]).
Soient une fonction continue $f\colon S^1 \to [0, \infty[$ et $a \in S^1$ telle que $f(z) < f(a)$ pour tout $z \in S^1 \setminus \{a\}$. Alors la suite de fonctions $f_n\colon S^1 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(z) = \left(\int_{S^1} f^n\right)^{-1} f(z)^n \tag{27.490}$$

EQooTQYPooLZprJj

est une approximation de l'unité[56] *autour de a.*

Démonstration. En plusieurs points, dont d'abord une série de vérifications pour voir que la formule a un sens.

(1) **Strictement positive** D'abord, vu que f prend ses valeurs dans $[0, \infty[$ et vu que $f(z) < f(a)$, nous avons $f(a) > 0$ (strict). Peut-être que f s'annule à certains endroits de S^1, mais pas a.

[56] Définition 27.90.

(2) f^n **est intégrable sur** S^1 La fonction f^n est dans les hypothèses de la proposition 14.218 parce que S^1 est compact, f^n y est continue et la mesure sur S^1 est compatible avec la topologie (voir les hypothèses précises).

(3) **L'intégrale n'est pas nulle** Vu que $f(a) > 0$, il existe un ouvert A contenant a sur lequel $f > 0$. Nous avons alors

$$\int_K f^n \geqslant \int_A f^n > 0. \tag{27.491}$$

Cela pour dire que l'inverse dans (27.490) ne pose pas de problèmes.

(4) **Norme** Vu que toutes les fonctions tant f que f_n sont positives, les valeurs absolues ne jouent aucun rôle et nous avons

$$\|f_n\|_1 = \int_{S^1} f_n d\mu = \left(\int_{S^1} f^n \right)^{-1} \int_{S^1} |f(z)|^n d\mu = 1. \tag{27.492}$$

Ce calcul donne d'un seul coup les deux conditions

- $\sup_k \|f_k\| = 1$
- $\int_{S^1} f_n = 1$ pour tout n.

Nous passons maintenant au vrai travail. Soit un voisinage V de a dans S^1. Soit une suite croissante (t_k) qui converge vers $f(a)$, c'est-à-dire $0 < t_k < f(a)$. Nous posons

$$A_k = \{x \in S^1 \setminus V \text{ tel que } f(x) \geqslant t_k\}. \tag{27.493}$$

Cet ensemble est contenu dans S^1 et est donc borné (pour la métrique de S^1).

(1) A_k **est fermé** Attention : ici nous démontrons que A_k est fermé dans S^1, et les complémentaires sont pris dans S^1.

Nous montrons que le complémentaire est ouvert en prenant $y \in A^c$ et en montrant que y admet un voisinage contenu dans A^c (le fameux théorème 7.8 que nous ne nous lasserons jamais de citer). Si $y \in A^c$, il y a deux possibilités (non exclusives) : soit $y \in V$ soit $f(y) < t_k$. Si $y \in V$, alors le voisinage V lui-même est encore dans A^c. Si par contre $f(y) < t_k$, alors par continuité, il existe un voisinage de y sur lequel $f < t_k$.

(2) A_k **est compact** L'espace S^1 est compact, par exemple grâce au lemme 7.112. La partie A_k est fermée dans le compact S^1, donc elle est compacte par le lemme 7.121.

(3) $A_{k+1} \subset A_k$ Si $x \in A_{k+1}$, alors $f(x) \geqslant t_{k+1} > t_k$. Donc $f(x) > t_k$ et $x \in A_k$.

(4) **Intersection vide** Si $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$, alors $f(x) \geqslant t_k$ pour tout k. En passant à la limite et en sachant que $\lim_{k\to\infty} t_k = f(a)$, nous avons $f(x) \geqslant f(a)$. Par hypothèse, cela n'est pas. Donc

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \varnothing. \tag{27.494}$$

Nous avons, dans un compact, des fermés emboîtés dont l'intersection est vide. Le corolaire 7.118 nous dit qu'il existe un indice à partir duquel tous les A_k sont vides.

Soit $\delta = t_k$ pour un k tel que A_k est vide. Nous avons

$$\{x \in S^1 \setminus V \text{ tel que } f(x) \geqslant \delta\} = \varnothing, \tag{27.495}$$

c'est-à-dire que sur $S^1 \setminus V$, nous avons $f < \delta$ et donc

$$\int_{S^1\setminus V} f(s)^n < \int_{S^1\setminus V} \delta^n = \text{Vol}(S^1 \setminus V)\delta^n \tag{27.496}$$

où $\text{Vol}(S^1 \setminus V) = \int_{S^1\setminus V} 1 = \mu'(S^1 \setminus V)$ est une constante réelle strictement positive.

Nous avons aussi $\delta < f(a)$ parce que δ est un des t_k (et que cette suite croissante converge vers $f(a)$ sans l'atteindre par hypothèse). Soit δ_1 tel que $\delta < \delta_1 < f(a)$[57].

Nous posons

$$W = \{x \in S^1 \text{ tel que } f(x) > \delta_1\}. \tag{27.497}$$

[57] Dans [728], il prend $\delta < \delta_1 < 1$ et je crois qu'il aurait dû écrire $\varphi(0)$ au lieu de 1.

Cet ensemble n'est pas vide parce qu'il contient a et est ouvert parce que f est continue. Nous avons

$$\int_{S^1} f(s)^n ds \geqslant \int_W f(s)^n ds \geqslant \delta_1^n \operatorname{Vol}(W). \tag{27.498}$$

Nous avons donc déjà ces deux inégalités :

$$\int_{S^1\setminus V} f(s)^n \leqslant \operatorname{Vol}(S^1 \setminus V)\delta^n \tag{27.499}$$

et

$$\int_{S^1} f(s)^n ds \geqslant \delta_1^n \operatorname{Vol}(W). \tag{27.500}$$

En ce qui concerne les fonctions f_n que nous voulions étudier,

$$f_n(z) = \left(\int_{S^1} f(s)^n ds \right)^{-1} f(z)^n \leqslant \big(\operatorname{Vol}(W)\delta_1^n \big)^{-1} f(z)^n, \tag{27.501}$$

et donc

$$\int_{S^1\setminus V} f_n \leqslant \big(\operatorname{Vol}(W)\delta_1^n \big)^{-1} \operatorname{Vol}(S^1 \setminus V)\sigma^n = \frac{\operatorname{Vol}(S^1 \setminus V)}{\operatorname{Vol}(W)} \left(\frac{\delta}{\delta_1} \right)^n. \tag{27.502}$$

Étant donné que $\delta < \delta_1$, nous avons $(\delta/\delta_1)^n \to 0$. Donc aussi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S^1\setminus V} f_n(z) dz = 0. \tag{27.503}$$

□

Le théorème suivant est une version pour S^1 du théorème 27.93. Le produit de convolution dans S^1 est la définition 27.121.

THOooIAOPooELSNxq

Théorème 27.127 ([728, 1]).
Soient (φ_k) une approximation de l'unité sur $\Omega = S^1$ ainsi qu'une fonction $g\colon S^1 \to \mathbb{C}$. Si g est mesurable et bornée sur Ω et si g est continue en a_0 alors

$$(\varphi_k * g)(a_0) \to g(a_0). \tag{27.504}$$

Démonstration. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous posons

$$d_k = \varphi_k * g - g. \tag{27.505}$$

Le but de ce théorème est de montrer que $d_k \to 0$ pour diverses notions de convergence.

Soit $a_0 \in S^1$. Par définition de l'approximation de l'unité, $\int_{S^1} \varphi_k = 1$ et donc on peut écrire $g(a_0) = \int_{S^1} g(a_0)\varphi_k(s)ds$. En ce qui concerne $d_k(a_0)$ nous avons alors

$$d_k(a_0) = \int_{S^1} \varphi_k(s) g(a_0\bar{s}) ds - \int_{S^1} g(a_0)\varphi_k(s)ds \tag{27.506a}$$

$$= \int_{S^1} \varphi_k(s) \big(g(a_0\bar{s}) - g(a_0) \big). \tag{27.506b}$$

Nous pouvons passer à la norme (et non la valeur absolue parce que d_k prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$) :

$$|d_k(a_0)| \leqslant \int_{S^1} |\varphi_k(s)| \big| g(a_0\bar{s}) - g(a_0) \big| ds. \tag{27.507}$$

La définition d'une approximation de l'unité nous permet de considérer $M = \sup_k \|\varphi_k\|_1 < \infty$. Le lemme 27.113(2) nous permet, lui, de considérer $\alpha > 0$ tel que

$$|g(a_0\bar{s}) - g(a_0)| < \epsilon \tag{27.508}$$

dès que $s \in B(1, \alpha)$[58]. Vu que la suite (φ_k) est une approximation de l'unité, nous avons

$$\lim_{k\to\infty} \int_{S^1\setminus B(1,\alpha)} |\varphi_k| = 0. \tag{27.509}$$

[58] Notez que $s \in B(1, \alpha)$ si et seulement si $\bar{s} \in B(1, \alpha)$. Il n'y a donc pas d'incohérence entre l'hypothèse sur s et notre condition sur $g(a_0\bar{s})$

Soit k suffisamment grand pour avoir $\int_{S^1\setminus B(1,\alpha)} |\varphi_k| < \epsilon$. Avec tout cela nous avons les majorations

$$\begin{aligned}
|d_k(a_0)| &\leqslant \int_{S^1} |\varphi_k(s)|\big|g(a_0\bar{s}) - g(a_0)\big| ds && (27.510a)\\
&= \int_{S^1\setminus B(1,\alpha)} |\varphi_k(s)| \underbrace{\big|g(a_0\bar{s}) - g(a_0)\big|}_{\leqslant 2\|g\|_\infty} ds + \int_{B(1,\alpha)} |\varphi_k(s)| \underbrace{\big|g(a_0\bar{s}) - g(a_0)\big|}_{<\epsilon} ds && (27.510b)\\
&\leqslant 2\|g\|_\infty \int_{S^1\setminus B(1,\alpha)} |\varphi_k(s)| ds + \epsilon \int_{S^1} |\varphi_k(s)| ds && (27.510c)\\
&\leqslant \epsilon\big(1 + 2\|g\|_\infty\big). && (27.510d)
\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $\lim_{k\to\infty} |d_k(a_0)| = 0$ et donc la continuité de $\varphi_k * g$ en a_0.

□

Voici une version un peu forte sous l'hypothèse de continuité. Vu que S^1 est compact, la continuité est en réalité une hypothèse assez forte : ça implique l'uniforme continuité et l'existence d'un maximum et d'un minimum.

Proposition 27.128.
Soient (φ_k) une approximation de l'unité sur $\Omega = S^1$ ainsi qu'une fonction continue $g\colon S^1 \to \mathbb{C}$. ITEMooPHBJooOHDVoW

(1) Si $g \in L^p(\Omega)$ $(0 \leqslant p < \infty)$ et si g est continue, alors[59]

$$\varphi_k * g \xrightarrow{L^p} g. \tag{27.511}$$

ITEMooLOSVooDtaugF

(2) Si g est continue sur S^1, alors

$$\varphi_k * g \xrightarrow{L^\infty} g \tag{27.512}$$

Démonstration. En plusieurs points

(1) $\lim_{u\to 1} \|\tau_u(g) - g\| = 0$ Ceci est un petit point intermédiaire. Pour des besoins de notations, nous posons

$$\begin{aligned}\tau_u(g)\colon S^1 &\to \mathbb{C}\\ s &\mapsto g(s\bar{u})\end{aligned} \tag{27.513}$$

pour $u \in S^1$.

La fonction g est continue sur le compact S^1, et y est donc uniformément continue[60]. Nous allons en déduire que $\lim_{u\to 1} \|\tau_u(g) - g\|_\infty = 0$.

Soit $\epsilon > 0$. L'uniforme continuité de g signifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $a \in S^1$ si $s \in B(a,\delta)$, alors $\big|g(s) - g(a)\big| < \epsilon$. Si $u \in B(1,\delta)$ nous avons aussi $\bar{u} \in B(1,\delta)$ et donc $s\bar{u} \in B(s,\delta)$; ça c'est le lemme 27.109(2).

Pour tout $a \in S^1$ nous avons la chaine

$$u \in B(1,\delta) \Rightarrow a\bar{u} \in B(a,\delta) \Rightarrow \big|g(a\bar{u}) - g(a)\big| < \epsilon. \tag{27.514}$$

Cela étant valable pour tout a, c'est encore valable en passant au supremum[61] :

$$u \in B(1,\delta) \Rightarrow \sup_{a\in S^1} \big|g(a\bar{u}) - g(a)\big| \leqslant \epsilon \tag{27.515}$$

et donc d'accord pour

$$\lim_{u\to 1} \|\tau_u(g) - g\| = 0. \tag{27.516}$$

(2) $\|d_k\|_\infty \to 0$ Nous prouvons la convergence uniforme sur S^1 de d_k vers zéro. Ensuite nous verrons que la compacité de S^1 permet d'en déduire les points (1) et (2).

En utilisant la notation τ_u, nous pouvons écrire

$$d_k(s) = \int_{S^1} \varphi_k(u) g(s\bar{u}) du - g(s) = \int_{S^1} \varphi_k(u)\big(\underbrace{g(s\bar{u})}_{=\tau_u(g)(s)} - g(s)\big) du, \tag{27.517}$$

[59] Vous noterez les $p \in]0,1[$ en bonus par rapport au cas de $\mathbb{R}^n$.
[60] Théorème de Heine 12.80. C'est fondamentalement ce fait qui unifie les parties (1) et (2) de cette preuve.
[61] Notez l'inégalité qui n'est plus stricte.

et donc

$$|d_k(s)| \leqslant \int_{S^1} |\varphi_k(u)| \|\tau_u(g) - g\|_\infty du. \tag{27.518}$$

Nous posons $M = \sup_k \|\varphi_k\|_1$, et nous considérons δ tel que $\|\tau_u(g) - g\|_\infty < \epsilon$ pour tout $u \in B(1,\delta)$. Ensuite nous subdivisons S^1 en $B(1,\delta)$ et $B(1,\delta)^c$:

$$\|d_k\|_\infty \leqslant \int_{B(1,\delta)} |\varphi_k(u)| \underbrace{\|\tau_u(g) - g\|_\infty}_{\leqslant\epsilon} du + \int_{B(1,\delta)^c} |\varphi_k(u)| \|\tau_u(g) - g\|_\infty du \tag{27.519a}$$

$$\leqslant \epsilon M + 2\|g\|_\infty \int_{B(1,\delta)^c} |\varphi_k(u)| du \tag{27.519b}$$

$$\leqslant \epsilon\big(M + 2\|g\|_\infty\big) \tag{27.519c}$$

parce que pour chaque $s \in S^1$ nous avons $\tau_u(g)(s) - g(s)$ et donc $\|\tau_u(g) - g\|_\infty \leqslant 2\|g\|_\infty$.

Tout cela montre que $d_k \xrightarrow{\|.\|_\infty} 0$.

(3) **Convergence L^p, $0 < p < \infty$**

Soit $\epsilon > 0$. Nous avons

$$\|d_k\|_p^p \leqslant \int_{S^1} \big|(\varphi_k * g)(s) - g(s)\big|^p ds. \tag{27.520}$$

Il existe un k à partir duquel $\|\varphi_k * g - g\|_\infty < \epsilon$. Pour de tels k nous avons

$$\|d_k\|_p^p < \epsilon^p. \tag{27.521}$$

Ce passage est très possible dans le cas de S^1 parce que $\int_{S^1} 1 = 1$. Dans le cas de $\mathbb{R}^d$, c'est pas du tout bon ; c'est pour cela que nous avons un résultat un peu plus fort dans S^1. La croissance de la fonction puissance (proposition 12.427) nous permet de conclure que $\|d_k\|_p < \epsilon$.

Nous avons donc la convergence L^p pour $0 < p < \infty$.

(4) **Convergence L^∞**

Non, la convergence L^∞ n'est pas la convergence pour la norme $\|.\|_\infty$. Voir la sous-section 27.3.3. Il n'en reste pas moins que si $\epsilon > 0$ et si k est assez grand pour que $\|f_k - f\|_\infty < \epsilon$, nous aurons

$$N_\infty(f_k - f) \leqslant \|f_k - f\| < \epsilon. \tag{27.522}$$

□

27.9.6 Base hilbertienne (suite des polynômes trigonométriques)

Voici le plan pour la suite :

- Construire un polynôme trigonométrique qui vérifie les hypothèse du lemme 27.126.
- En déduire une approximation de l'unité constituée de polynômes trigonométriques.
- Dire que si $f \in L^2(S^1)$, alors $f * \varphi_k$ est un polynôme trigonométrique dès que φ_k en est un.
- Invoquer le théorème 27.127(1) pour déduire que $\varphi_k * f$ est une suite de polynômes trigonométriques dans $L^2(S^1)$ qui converge $\varphi_k * f \xrightarrow{L^2} f$.

LEMooQQILooWlhntZ

Lemme 27.129.
La fonction $P = e_1 + e_{-1}$ est continue à valeurs réelles sur S^1.

Démonstration. Nous avons $e_1(z) = z$ et $e_{-1}(z) = z^{-1}$, c'est-à-dire que pour $z = e^{ix}$ ($x \in \mathbb{R}$), nous avons $e_{-1}(e^{ix}) = e^{-ix}$, de telle sorte que, en utilisant le lemme 18.11 qui donne e^{ix} en termes des fonctions trigonométriques usuelles :

$$(e_1 + e_{-1})(e^{ix}) = e^{ix} + e^{-ix} = \cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x) = 2\cos(x). \tag{27.523}$$

Nous avons donc la continuité et les valeurs réelles. □

LEMooIDTVooYTpfEm

Lemme 27.130.
Il existe un polynôme trigonométrique à valeurs dans $[0,\infty[$ et tel que $f(a) < f(1)$ pour tout $a \neq 1$ dans S^1.

Démonstration. Le lemme 27.129 nous dit déjà que $P = e_1 + e_{-1}$ est continue à valeurs réelles. Or qui est continue sur un compact (ici S^1), atteint donc ses bornes. Il est donc facile de considérer[62] $M > 0$ tel que $Q = M + e_1 + e_{-1}$ est à valeurs dans $[0, \infty[$.

Une forme explicite de Q est que

$$Q(e^{ix}) = M + 2\cos(x). \tag{27.524}$$

Le maximum de $\cos(x)$ est obtenu en $x = 0$ et vaut 1. Le maximum de Q est alors $Q(1) = 2 + M$. Il n'est atteint qu'une seule fois sur S^1 parce que pour avoir $Q(e^{ix}) = 2 + M$, il faut avoir $2\cos(x) = 2$, c'est-à-dire $x = 2k\pi$. Mais $e^{i2k\pi} = 1$.

Donc $Q(a) < M + 2 = Q(1)$ pour tout $a \neq 1$ dans S^1. □

Proposition 27.131.
Les polynômes trigonométriques $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(S^1)$.

Démonstration. Le fait que les e_n soient orthonormée est la proposition 27.116. Il reste à prouver que ce soit un système total.

Soit $f \in L^2(S^1)$. Soit un polynôme Q vérifiant le lemme 27.130 ; nous posons

$$\varphi_k(z) = \left(\int_{S^1} Q^n \right)^{-1} Q(z)^n. \tag{27.525}$$

Cela est une approximation de l'unité par la proposition 27.126. Les φ_k sont des polynômes trigonométriques parce que les Q^n le sont et que que $\int_{S^1} Q^n$ est seulement un nombre.

Le lemme 27.125 nous dit alors que pour tout k, la fonction

$$\varphi_k * f \tag{27.526}$$

est un polynôme trigonométrique. □

Nous nous permettons de confirmer la remarque 27.118 comme quoi il faut bien tous les e_n avec $n \in \mathbb{Z}$, parce que le polynôme trigonométrique Q est bien construit à partir de $e_1 + e_{-1}$.

27.9.7 Convolution, bis

LEMooLUBQooWLMFrN

Lemme 27.132.
Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to S^1 \\ t &\mapsto e^{it}. \end{aligned} \tag{27.527}$$

Soient $t, u \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(t) = \varphi(u)$. Alors pour toutes fonctions pour lesquelles les intégrales convergent,

$$\int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(\theta)(g \circ \varphi)(t - \theta)\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(\theta)(g \circ \varphi)(u - \theta)\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{27.528}$$

Démonstration. Si $\varphi(u) = \varphi(t)$, alors $u = t + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Cette condition implique que $\varphi(t - \theta) = \varphi(u - \theta)$, et donc l'égalité

$$\int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(\theta)(g \circ \varphi)(t - \theta)\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(\theta)(g \circ \varphi)(u - \theta)\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{27.529}$$

□

Définition 27.133 (Convolution sur S^1).
Le lemme 27.132 permet de définir

$$(f * g)\big(\varphi(t)\big) = \int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(\theta)(g \circ \varphi)(t - \theta)\frac{d\theta}{2\pi} \tag{27.530}$$

pour toutes les paires de fonctions $f, g \in \mathrm{Fun}(S^1, \mathbb{C})$ pour lesquelles l'intégrale converge.

L'espace de Lebesgues $L^2\big([a, b]\big)$ sera traité dans 29.6.

[62] Par exemple, M est le maximum de $|P|$.

27.10 Sur $[0, 2\pi[$

Le produit de convolution est un peu subtil parce que $f(t-x)$ n'est pas défini à priori pour tout $t, x \in [0, 2\pi[$, vu que f n'est définie que sur $[0, 2\pi[$. Au moins trois solutions s'offrent à nous :

- considérer implicitement la fonction prolongée par périodicité.
- considérer les fonctions sur $\mathbb{R}/2\pi$, et définir un peu toutes les opérations modulo 2π (fastidieux)
- utiliser une bijection ayant les bonnes propriétés avec S^1 sur lequel tout est déjà fait.

Nous sélectionnons la troisième voie. Pour cela nous considérons la fonction (attention, elle n'est pas tout à fait la même que celle plus haut)

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0, 2\pi[&\to S^1 \\ t &\mapsto e^{it} \end{aligned} \tag{27.531}$$

qui est une bijection par la proposition 18.62(1). Pour le produit de convolution,

$$(f * g)(x) = (f \circ \varphi^{-1}) * (g \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(x)\big) \tag{27.532}$$

pour toutes les fonctions $f, g\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{C}$ pour lesquelles les intégrales en jeu ont un sens.

27.11 Des inégalités

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous nous fendons d'une petite étude de fonction. Soit

$$\begin{aligned} \phi\colon [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{(1+x)^r}{1+x^r}. \end{aligned} \tag{27.533}$$

Un peu de calcul montre que

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{r(1-x^{r-1})}{(1+x^r)(1+x)}. \tag{27.534}$$

27.11.1 c-r inégalité

LEMooFKKEooDTypUd

Lemme 27.134.
Soient $a, b > 0$ et $r \geqslant 1$. Nous avons les inégalités

$$a^r + b^r \leqslant (a+b)^r \leqslant 2^{r-1}(a^r + b^r). \tag{27.535}$$

Démonstration. Notons d'abord que si $r = 1$, nous avons juste de égalités ; pas de problèmes. Nous supposons donc que $r > 1$. Pour la première inégalité, nous posons $f(x) = a^r + x^r$ et $g(x) = (a+x)^r$. Nous avons $f(0) = g(0) = a^r$, et, en utilisant la fonction f_α définite par $f_\alpha(x) = x^\alpha$, nous avons

$$f'(x) = rx^{r-1} = rf_{r-1}(x) \tag{27.536a}$$
$$g'(x) = r(a+x)^{r-1} = rf_{r-1}(a+x). \tag{27.536b}$$

Vu que $r > 1$, la fonction f_{r-1} est strictement croissante sur les positifs par la proposition 12.427. Donc pour $x \geqslant 0$ nous avons

$$f'(x) = rf_{r-1}(x) \leqslant rf_{r-1}(a+x) = g'(x). \tag{27.537}$$

Nous avons donc $f(b) \leqslant g(b)$ comme souhaité.

Nous passons à la seconde inégalité. Le lemme 17.87 nous dit que la fonction $f\colon x \mapsto x^r$ est convexe. Donc

$$f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b). \tag{27.538}$$

De là nous déduisons

$$\frac{(a+b)^r}{2^r} \leqslant \frac{1}{2}(a^r + b^r), \tag{27.539}$$

c'est-à-dire la seconde inégalité. □

Comme semble indiquer le code suivant, la seconde inégalité du lemme 27.134 semble vraie pour tous les complexes.

```python
import random


def f1(z1: complex, z2: complex, r: float) -> float:
    return abs((z1+z2)/2)**r


def f2(z1: complex, z2: complex, r: float) -> float:
    return (abs(z1)**r + abs(z2)**r)/2


def test(z1: complex, z2: complex, r: float) -> float:
    """Should be positive."""
    return f2(z1, z2, r) - f1(z1, z2, r)


for _ in range(1, 10):
    r = random.uniform(1, 1.3)
    x1 = random.uniform(-10, 10)
    y1 = random.uniform(-10, 10)
    x2 = random.uniform(-10, 10)
    y2 = random.uniform(-10, 10)
    z1 = complex(x1, y1)
    z2 = complex(x2, y2)
    result = test(z1, z2, r)
    print("-----")
    print(f"z1={z1}")
    print(f"z2={z2}")
    print(f"r={r}")
    print("---> ", result)
    if result < 0:
        print("!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!")
```

tex/frido/codeSnip_5.py

PROPooPMIGooRAjROX

Proposition 27.135 ([753]).
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $r \geqslant 1$.Nous avons

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^r \leqslant \frac{|\alpha|^r + |\beta|^r}{2}. \tag{27.540}$$

Démonstration. Nous prouvons en montant progressivement en généralité.

(1) $\alpha = 1$ **et** $\beta = t \geqslant 1$ SPITEMooUDCCooSxNxhv Nous commençons avec $\alpha = 1$ et en supposant que β est un réel plus grand ou égal à 1. Nous devons prouver que

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^r \leqslant \frac{1+t^r}{2}. \tag{27.541}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} f\colon [1,\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1+t^r}{2} - \left(\frac{1+t}{2}\right)^r, \end{aligned} \tag{27.542}$$

et nous prouvons que $f(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 1$. Pour cela nous calculons la dérivée :

$$f'(t) = \frac{r}{2}\left(t^{r-1} - \left(\frac{1+t}{2}\right)^{r-1}\right) \geqslant 0. \tag{27.543}$$

Nous avons utilisé le fait que $x \mapsto x^{r-1}$ est croissante et que $t \geqslant 1$. Vu que $f(1) = 1 - 1 = 0$, la proposition 12.210(2) donne

$$f(t) \geqslant f(1) = 0 \tag{27.544}$$

pour tout $t \geqslant 1$

(2) $\alpha = z \in \mathbb{C}$ **avec** $|z| \geqslant 1$ **et** $\beta = 1$ SPITEMooLSGLooXiItES

Nous avons

$$\left|\frac{z+1}{2}\right|^r \leqslant \left(\frac{|z|+1}{2}\right)^r \qquad \text{pcq.} |z+1| \leqslant |z|+1 \tag{27.545a}$$

$$\leqslant \frac{1+|z|^2}{2} \qquad \text{par point (1).} \tag{27.545b}$$

(3) **Cas général**

Notons que si $\beta = 0$ c'est facile. Nous supposons que $\beta \neq 0$ et que $|\alpha| \geqslant |\beta|$. En posant $z = \alpha/\beta$ nous avons $|z| \geqslant 1$ et nous pouvons calculer un peu :

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^r = \left|\frac{\beta\frac{\alpha+\beta}{\beta}}{2}\right| \tag{27.546a}$$

$$= |\beta|^r \left|\frac{z+1}{2}\right| \tag{27.546b}$$

$$\leqslant |\beta|^r \frac{1+|z|^r}{2} \qquad \text{par le point (2)} \tag{27.546c}$$

$$= \frac{|\beta|^r + |\alpha|^r}{2}. \tag{27.546d}$$

□ PROPooHEWFooJpfzEL

Proposition 27.136 ([743]).
Si $a, b \geqslant 0$ et si $0 < r \leqslant 1$, alors

$$(a+b)^r \leqslant a^r + b^r. \tag{27.547}$$

Démonstration. Nous avons un calcul :

$$(a+b)^r - a^r = \int_a^{a+b} rt^{r-1}dt \qquad \text{tho. 14.288} \tag{27.548a}$$

$$= \int_0^b r(s+a)^{r-1}ds \qquad \text{ch.var. } s = t-a \tag{27.548b}$$

$$\leqslant \int_0^b rs^{r-1}ds \qquad \text{cf. justif.} \tag{27.548c}$$ SUBEQooUCTOooBULeqL

$$= b^r. \tag{27.548d}$$

Pour (27.548c), nous savons que $r < 1$ (le cas $r = 0$ est facile), de telle sorte que $r - 1 < 0$. La fonction $s \mapsto (s+a)^{r-1}$ est donc décroissante. □ PROPooTIJYooJGxphQ

Proposition 27.137 (c-r inégalité[743]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soient $f, g \in L^r(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ des fonctions à valeurs réelles[63]*. En posant $c_r = 1$ pour $0 < r \leqslant 1$ et $c_r = 2^{r-1}$ si $r \geqslant 1$, nous avons*

(1) Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\left|f(\omega) + g(\omega)\right|^r \leqslant c_r|f(\omega)|^r + c_r|g(\omega)|^r. \tag{27.549}$$ EQooWIQOooLWPioQ

(2) Nous avons

$$\int_\Omega |f+g|^r d\mu \leqslant c_r \int_\Omega |f|^r d\mu + c_r \int_\Omega |g|^r d\mu. \tag{27.550}$$ EQooAJTKooGNxHgt

Démonstration. L'inégalité (27.549) provient de propositions 27.136 et 27.135 (suivant la valeur de r). L'inégalité (27.550) demande maintenant d'intégrer sur Ω. □

[63] Par défaut, les éléments de L^p sont à valeurs complexe. Et oui, je sais que ce sont des classes de fonctions, et donc elles peuvent être à valeurs complexes sur une partie de mesure nulle.

27.11.2 Inégalité de Hanner

Nous allons démontrer les inégalités de Hanner dans le théorème 27.142. Vu que ce sera un peu longuet, nous faisons un lemme.

LEMooDHRCooQiSpyC

Lemme 27.138.
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Nous avons

$$|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \geqslant \big(|z_1| + |z_2|\big)^p + \big||z_1| - |z_2|\big|^p. \tag{27.551}$$

EQooMUXVooSpGSyG

Démonstration. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Nous posons

$$d = |z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p. \tag{27.552}$$

EQooJKYZooFzbETG

Pour $|z_1|$ et $|z_2|$ fixés, nous nous demandons quel est le minimum possible de d.

Si $|z_1| = 0$, alors le minimum est $2|z_2|^p$ et si $|z_2| = 0$ alors il est $2|z_1|^p$. Pour les autres cas, nous posons $|z_1| = a > 0$ ainsi que $b \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que[64]

$$z_2 = z_1 a^{-1} b e^{i\theta}. \tag{27.553}$$

Nous avons déjà que $z_1 + z_2 = z_1(1 + a^{-1}be^{i\theta})$ et donc

$$|z_1 + z_2| = a|1 + a^{-1}be^{i\theta}| = |a + be^{i\theta}| \tag{27.554}$$

parce que $a > 0$. De plus,

$$|a + be^{i\theta}|^2 = (a + be^{i\theta})(a + be^{-i\theta}) = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\theta) \tag{27.555}$$

parce que $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos(\theta)$. Nous posons

$$d(\theta) = |a + be^{i\theta}|^p + |a - be^{i\theta}|^p. \tag{27.556}$$

En développant,

$$d(\theta) = \big(a^2 + b^2 + 2ab\cos(\theta)\big)^{p/2} + \big(a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)\big)^{p/2}. \tag{27.557}$$

Trouvons le minimum de cette fonction de θ. D'abord sa dérivée :

$$\begin{aligned} d'(\theta) &= pab\sin(\theta)\big[\big(a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)\big)^{p/2-1} - \big(a^2 + b^2 + 2ab\cos(\theta)\big)^{p/2-1}\big] && \text{(27.558a)}\\ &= pab\sin(\theta)s(\theta). && \text{(27.558b)} \end{aligned}$$

Nous avons $s(\theta) = 0$ pour $\theta = \pi/2$ et $\theta = 3\pi/2$. Il faut surtout remarquer que $1 < p < 2$, ce qui donne $\frac{p}{2} - 1 < 0$. La fonction $x \mapsto x^{p/2-1}$ est donc décroissante. Cela pour dire que

$$s(0) = \big(|a - b|^2\big)^{p/2-1} - \big(|a + b|^2\big)^{p/2-1} > 0. \tag{27.559}$$

De la même façon, $s(\pi) = -s(0) < 0$. Cela permet d'écrire un petit tableau de signe de d', et de conclure que $d(\theta)$ a un minimum en 0 et en π. Calcul fait, nous avons

$$d(0) = d(\pi) = |a + b|^p + |a - b|^p. \tag{27.560}$$

En reliant à (27.552) nous avons l'inégalité

$$|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \geqslant (a + b)^p - |a - b|^p. \tag{27.561}$$

EQooVHQOooJcheCR

Nous rappelons que $a = |z_1|$ et que $z_2 = z_1 a^{-1} b e^{i\theta}$. Notons au passage que $|z_2| = b$, donc que ce que nous dit l'équation (27.561) est que

$$|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \geqslant \big(|z_1| + |z_2|\big)^p + \big||z_1| - |z_2|\big|^p. \tag{27.562}$$

□

Encore dans la catégorie des lemmes pour les inégalités de Hanner, nous avons celui-ci.

[64] Proposition 18.63

LEMooTCNEooADpNai

Lemme 27.139 ([1, 754]).
La fonction

$$\begin{aligned}\eta\colon]0,\infty[&\to \mathbb{R}\\ a &\mapsto (a^{1/p}+1)^p + |a^{1/p}-1|^p\end{aligned} \tag{27.563}$$

est strictement convexe.

Démonstration. La fonction η est une fonction de classe C^∞ sur $]0,\infty[\backslash\{1\}$. Quelle est sa régularité en $a=1$? À cause de la valeur absolue, il n'est pas clair qu'elle y soit dérivable. En tout cas, la fonction $x\mapsto|x-1|$ n'est pas dérivable en $x=1$, mais peut-être que les exposants aident à lisser. Nous y reviendrons.

Afin de suivre les calculs nous introduisons quelques fonctions :

$$so(x) = 1 + x^{1/p} \tag{27.564a}$$
$$di(x) = 1 - x^{1/p} \tag{27.564b}$$
$$dj(x) = x^{1/p} - 1 \tag{27.564c}$$

Pour les dérivées, nous avons

$$so'(x) = \frac{1}{p}x^{1/p-1} \tag{27.565a}$$
$$di'(x) = -so'(x) \tag{27.565b}$$
$$dj'(x) = so'(x). \tag{27.565c}$$

Nous divisons les cas selon $a<1$ ou $a>1$.

(1) **Pour $a<1$** Nous avons

$$\eta(a) = so(a)^p + di(a)^p, \tag{27.566}$$

et la première dérivée donne :

EQooCLXZooXClOwd

$$\eta'(a) = p\,so'(a)\big(so(a)^{p-1} - di(a)^{p-1}\big). \tag{27.567}$$

Pour la seconde dérivée nous trouvons d'abord

$$\begin{aligned}\eta''(a) = &\left(\frac{1-p}{p}\right)a^{\frac{1}{p}-2}\big(so(a)^{p-1}-di(a)^{p-1}\big)\\ &+\frac{p-1}{p}a^{\frac{2}{p}-2}\big(so(a)^{p-2}+di(a)^{p-2}\big).\end{aligned} \tag{27.568}$$

À partir de là, le truc est de substituer les expressions suivantes :

$$so(a)^{p-1} = so(a)^{p-2}so(a) = so(a)^{p-2} + so(a)^{p-2}a^{1/p} \tag{27.569a}$$
$$di(a)^{p-1} = di(a)^{p-2} - a^{1/p}di(a)^{p-2}. \tag{27.569b}$$

Plein de trucs se simplifient et nous obtenons

$$\eta''(a) = \frac{p-1}{p}a^{\frac{1}{p}-2}\big(di(a)^{p-1} - so(a)^{p-2}\big). \tag{27.570}$$

(2) **Pour $a>1$** Les calculs sont essentiellement les mêmes, en partant de

$$\eta(a) = so(a)^p + dj(a)^p. \tag{27.571}$$

Les résultats sont :

EQooAJLHooGWjPlz

$$\eta'(a) = p\,so'(a)\big(so(a)^{p-1} + dj(a)^{p-1}\big), \tag{27.572}$$

et

$$\eta''(a) = \frac{p-1}{p}a^{\frac{1}{p}-2}\big(dj(a)^{p-2} - so(a)^{p-2}\big). \tag{27.573}$$

(3) **Résumé pour $a\neq 1$**

Au final, nous avons pour tout $a\neq 1$:

$$\eta''(a) = \frac{p-1}{p}a^{\frac{1}{p}-2}\big(|1-a^{1/p}|^{p-2} - (1+a^{1/p})^{p-2}\big). \tag{27.574}$$

Ce qu'il se passe en $a=1$ est encore une question ouverte que nous traitons maintenant.

(4) **Pour $a = 1$**

Les limites des expressions (27.567) et (27.572) en $a = 1$ sont vite calculées et c'est 2^{p-1} dans les deux cas. Donc la dérivée admet une prolongation continue en $a = 1$. Nous allons prouver que la fonction η est en réalité dérivable en $a = 1$ et que la dérivée vaut 2^{p-1}.

Nous nous concentrons sur la partie difficile donnée par $f(x) = |x^{1/p} - 1|^p$. Elle est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} di(x)^p & \text{si } x < 1 \\ dj(x)^p & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases} \tag{27.575}$$

Si $f'(1)$ existe, alors elle est égale à la limite

$$f'(1) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(1) - f(1-\epsilon)}{\epsilon}. \tag{27.576}$$

Les deux limites à calculer sont :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\big((1+\epsilon)^{1/p} - 1\big)^p}{\epsilon} \tag{27.577}$$

et

$$\lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{\big(1 - (1+\epsilon)^{1/p}\big)^p}{\epsilon}. \tag{27.578}$$

La première se traite par la règle de L'Hôpital[65], et le résultat est zéro. Pour la seconde, il faut juste transformer

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\big((1+\epsilon)^{1/p} - 1\big)^p}{\epsilon} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\big(1 - (1-h)^{1/p}\big)^p}{-h}, \tag{27.579}$$

qui se traite également par la règle de L'Hôpital. Le résultat est également zéro.

Donc η est dérivable en $a = 1$ et la dérivée vaut $\eta'(1) = 2^{p-1}$.

En récapitulant, nous avons $\eta'' > 0$ sur $]0, \infty[\setminus \{1\}$, donc η' est croissante sur cette partie (proposition 12.209). Vu que η' est continue sur $]0, \infty[$, elle est même croissante (strictement) sur tout $]0, \infty[$.

La proposition 17.83 conclut que η est strictement convexe sur $]0, \infty[$. □

Toujours dans la catégorie des lemmes pour les inégalités de Hanner, nous avons celui-ci.

Lemme 27.140 ([754]).
Soit $1 < p < 2$. La fonction

$$\begin{aligned} \xi \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto \big(a^{1/p} + b^{1/p}\big)^p + |a^{1/p} - b^{1/p}|^p \end{aligned} \tag{27.580}$$

est convexe.

Pour rappel, les conventions de données en 1.543 donnent $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$.

Démonstration. La fonction ξ vérifie facilement les conditions suivante :

- $\xi(a, b) = \xi(b, a)$,
- $\xi(0, 0) = 0$,
- $\xi(ta, tb) = t\xi(a, b)$ pour tout $t \geqslant 0$.

Nous posons

$$\begin{aligned} \eta \colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto \xi(a, 1). \end{aligned} \tag{27.581}$$

Le lemme 27.139 dit que η est strictement convexe, et le lemme 17.93 conclut que ξ est convexe. □

[65] Proposition 12.219

LEMooWIPYooMZqjbn

Lemme 27.141 ([755]).
Soit $1 < p < 2$. Nous considérons les fonctions

$$\begin{aligned}\alpha\colon [0,1] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (1+x)^{p-1}+(1-x)^{p-1}\end{aligned} \tag{27.582}$$

et

$$\begin{aligned}\beta\colon [0,1] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x^{1-p}\big((1+x)^{p-1}-(1-x)^{p-1}\big).\end{aligned} \tag{27.583}$$

Soient $A, B \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\alpha(x)|A|^p+\beta(x)|B|^p \leqslant |A+B|^p+|A-B|^p. \tag{27.584}$$

Démonstration. Plusieurs étapes.

(1) $\beta(x) \leqslant \alpha(x)$ Nous avons $\alpha(1) = \beta(1) = 2^{p-1}$. Pour les autres valeurs de x, nous allons raisonner avec la dérivée. La valeur de $\alpha'(x)$ est facile à calculer

$$\alpha'(x) = (p-1)(x+1)^{p-2} - (p-1)(1-x)^{p-2}. \tag{27.585}$$

Pour $\beta'(x)$ c'est un peu plus lourd. En substituant $(1+x)^{p-1} = (1+x)^{p-2}(1+x)$ et $(1-x)^{p-1} = (1-x)^{p-2}(1-x)$ nous pouvons regrouper les termes en $(1+x)^{p-2}$ et $(1-x)^{p-2}$. Après un peu de travail,

$$\beta'(x) = \frac{p-1}{x^p}\big((1-x)^{p-2}-(1+x)^{p-2}\big). \tag{27.586}$$

Cela nous permet de calculer $\alpha' - \beta'$:

$$\alpha'(x)-\beta'(x) = (p-1)\big(1+\frac{1}{x^p}\big)\big((1+x)^{p-2}-(1-x)^{p-2}\big). \tag{27.587}$$

Vu que $1 < p < 2$, le nombre $p-2$ est strictement négatif ; afin de travailler avec des exposants positifs, nous écrivons

$$\alpha'(x)-\beta'(x) = \underbrace{(p-1)}_{>0}\underbrace{\big(1+\frac{1}{x^p}\big)}_{>0}\underbrace{\left(\frac{1}{(1+x)^{2-p}}-\frac{1}{(1-x)^{2-p}}\right)}_{<0}. \tag{27.588}$$

Nous avons $\alpha'(x) - \beta'(x) < 0$ pour tout $x \in]0,1]$. Du fait qu'en plus nous ayons $\alpha(1) = \beta(1)$, nous déduisons que $\alpha(x) \geqslant \beta(x)$.

(2) **Une petite étude de fonction** Soit $R \in [0,1]$. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}F\colon [0,1] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \alpha(x)+R^p\beta(x).\end{aligned} \tag{27.589}$$

Nous montrons maintenant que cette fonction a un maximum global pour $x = R$. D'abord sa dérivée :

$$F'(x) = \underbrace{(p-1)}_{>0}\underbrace{\big((1-x)^{p-1}-(1+x)^{p-2}\big)}_{<0}\left(1-\left(\frac{R}{x}\right)^p\right) \tag{27.590}$$

Nous avons

- $F'(x) = 0$ pour $x = R$,
- $F'(x) < 0$ pour $x > R$,
- $F'(x) > 0$ pour $x < R$.

Donc $x = R$ est bien un maximum global.

(3) **Pause** Nous avons les petits résultats utiles pour commencer à prouver. Petite pause avant de commencer ; pas de panique, ça ne va pas être trop violent.

(4) **Pour $0 < B < A$** Nous devons prouver que

$$\alpha(x)A^p + \beta(x)B^p \leqslant (A+B)^p + (A-B)^p. \tag{27.591}$$

EQooEPKRooBYJDSF

En divisant par A^p et en posant $R = B/A$, l'inéquation (27.591) est équivalente à

$$\alpha(x) + \beta(x)R^p \leqslant (1+R)^p + (1-R)^p \tag{27.592}$$

où $R \in]0,1[$ parce que nous avons supposé $0 < B < A$. Nous avons (il y a un petit calcul pour $F(R)$)

$$(1+R)^p + (1-R)^p = F(R) \geqslant F(x) = \alpha(x) + \beta(x)R^p. \tag{27.593}$$

ok.

(5) **Pour $0 < A < B$** Lorsque $0 < A < B$ nous avons

$$\begin{aligned}
\alpha(x)|A|^p + \beta(x)|B|^p &= \alpha(x)A^p + \beta(x)B^p && \text{(27.594a)}\\
&\leqslant \alpha(x)B^p + \beta(x)A^p && \text{(27.594b)}\\
&\leqslant (B+A)^p + (B-A)^p && \text{(27.594c)}\\
&= |A+B|^p + |A-B|^p. && \text{(27.594d)}
\end{aligned}$$

SUBEQooSHNUooCoWMFB
SUBEQooBPYVooPsAjbq

Justification :

- Pour (27.594b), c'est parce que $\alpha(x) > \beta(x)$; alors en mettant le plus grand de A et B devant le α au lieu du β, nous majorons.
- Pour (27.594c), c'est l'inégalité dans le cas $0 < B < A$, mais en inversant les noms de A et B.

(6) **Pour $0 < A = B$** Toutes les expressions sont continues par rapport à B (fixons x et A). Nous avons prouvé pour $B < A$ et pour $B > A$. Par continuité, l'inégalité est encore valide pour $A = B$.

(7) **Pour $A < 0$, $B > 0$** En posant $A' = -A$ nous avons $A' > 0$ et nous pouvons écrire

$$|A+B|^p + |A-B|^p = |-A'+B|^p + |-A'-B|^p = |B-A'|^p + |B+A'|^p \geqslant \alpha(x)|A'|^p + \beta(x)|B|^p. \tag{27.595}$$

Nous avons utilisé, avec A' et B le cas déjà prouvé $A', B > 0$.

(8) **Pour $A > 0$, $B < 0$** Celui-là, je vous le laisse.

(9) **Pour $A < 0$, $B < 0$** Posez $A' = -A$ et $B' = -B$ et hop.

□

THOooZRRYooBTBQKW

Théorème 27.142 (Inégalités de Hanner[754, 755]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit $1 < p < 2$ et $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$; nous avons

$$\big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)^p + \Big|\|f\|_p - \|g\|_p\Big|^p \leqslant \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \tag{27.596}$$

Il y a égalité si et seulement si $f(t)$ et $g(t)$ sont colinéaires pour presque tout t.

Démonstration. Nous supposons que $\|f\|_p \geqslant \|g\|_p$ pour fixer les idées. De toutes façons, la symétrie des formules nous fait passer de ce cas à l'autre sans difficulté.

Soit $x \in [0,1]$. Nous écrivons l'inégalité du lemme 27.141 pour $A = |f(\omega)|$ et $B = |g(\omega)|$:

$$\alpha(x)|f(\omega)|^p + \beta(x)|g(\omega)|^p \leqslant \big|f(\omega) + g(\omega)\big|^p + \big|f(\omega) - g(\omega)\big|^p. \tag{27.597}$$

Nous intégrons cela par rapport à ω sur Ω :

$$\alpha(x)\|f\|_p^p + \beta(x)\|g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p. \tag{27.598}$$

Et là vient l'idée qu'on se demande ce qui est passé par l'esprit du mec qui a tout combiné : nous évaluons cela pour $x = \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}$, ce qui est permis parce que nous avons supposé $\|f\|_p \geqslant \|g\|_p$. Faites le calcul, collectez les termes identiques, vous obtiendrez

$$\big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)^p + \big(\|f\|_p - \|g\|_p\big)^p \leqslant \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p. \tag{27.599}$$

Et vu que $\|f\|_p \geqslant \|g\|_p$, nous pouvons gratuitement faire

$$\|f\|_p - \|g\|_p = \big|\|f\|_p - \|g\|_p\big|. \tag{27.600}$$

Fini pour Hanner. □

27.11.3 Inégalités de Clarkson

LEMooWEODooLHeVrP

Lemme 27.143 ([756]).
Si $p \geqslant 2$ et si $a, b \in \mathbb{C}$, alors

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}\big(|a|^p + |b|^p\big). \tag{27.601}$$

Démonstration. Nous prouvons l'inégalité en montant petit à petit en généralité.

(1) **Avec $x > 0$** Soit $x \geqslant 0$. Nous montrons dans cette partie l'inégalité

EQooDJBNooEyfNtq

$$x^p + 1 \leqslant (x+1)^{p/2}. \tag{27.602}$$

Pour cela nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t^2+1)^{p/2} - t^p - 1. \end{aligned} \tag{27.603}$$

Nous avons $f(0) = 0$, mais aussi, en utilisant les règle de dérivation[66] nous trouvons vite

$$f'(t) = p(t^2+1)^{p/2-1}t - pt^{p-1}. \tag{27.604}$$

Vu que $(t^2+1)^{p/2-1} \geqslant t^{p-2}$, le signe de $f'(t)$ est toujours strictement positif pour $t > 0$. La proposition 12.209 fait que f est strictement croissante et que $f(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

(2) **Avec $x, y \geqslant 0$** Soient $x, y \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$. Nous prouvons dans cette partie que

EQooGFGMooSiDfKX

$$(x^2+y^2)^{p/2} \geqslant x^p + y^p. \tag{27.605}$$

Il s'agit d'appliquer l'inégalité (27.602) à x/y :

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right)^{p/2} \geqslant \left(\frac{x}{y}\right)^p + 1. \tag{27.606}$$

En multipliant par y^p et en simplifiant un peu, nous trouvons le résultat (27.605).

(3) **Avec $a, b \in \mathbb{C}$** Nous appliquons l'inégalité (27.605) à $x = |\frac{a+b}{2}|$ et $y = |\frac{a-b}{2}|$. Cela donne :

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2\right)^{p/2} \tag{27.607a}$$

$$= \left(\frac{2|a|^2 + 2|b|^2}{4}\right)^{p/2} \tag{27.607b}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p. \tag{27.607c}$$

La dernière ligne est la convexité de la fonction $t \mapsto t^{p/2}$ (lemme 17.87).

□

LEMooFGKXooZCHNln

Lemme 27.144.
Si $1 < p < 2$, alors l'exposant conjugué q vérifie $q > 2$.

Démonstration. Nous considérons q en fonction de p, sur le domaine $1 < p < 2$:

$$q(p) = \frac{p}{p-1}. \tag{27.608}$$

Donc[67] $q(1) = \infty$ et $q(2) = 2$. Nous étudions ensuite la dérivée :

$$q'(p) = -\frac{1}{(p-1)^2} < 0. \tag{27.609}$$

C'est donc une fonction strictement décroissante. Vues les valeurs aux bornes, nous voyons que $q(p) > 2$ sur tout son domaine. □

[66] Par exemple celle de la proposition 14.295.
[67] Dire que $q(1) = \infty$ est un abus de notations pour parler de la limite $p \to 1$ avec $p > 1$.

LEMooMKIXooVOYaxI

Lemme 27.145 ([757]).
Soit $1 < p < 2$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons

$$|x+y|^q + |x-y|^q \leqslant 2\big(|x|^p + |y|^p\big)^{q-1}. \tag{27.610}$$

Démonstration. Nous considérons l'exposant conjugué q et p, c'est-à-dire q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \times [0,1] &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, z) &\mapsto (1+\alpha^{1-q}z)(1+\alpha z)^{q-1} + (1-\alpha^{1-q}z)(1-\alpha z)^{q-1}. \end{aligned} \tag{27.611}$$

Cette fonction vérifie

EQooRFZQooJvdocT
$$f(1,z) = (1+z)^q + (1-z)^q, \tag{27.612}$$

ainsi que EQooISBRooHMiPRE

$$f(z^{p-1}, z) = \big(1 + z^{(p-1)(1-q)}\big)(1+z^p)^{q-1} + \big(1 - z^{(p-1)(1-q)}\big)(1+z^p)^{q-1} \tag{27.613a}$$
$$= 2(1+z^p)^{q-1}. \tag{27.613b}$$

Nous montrons maintenant que $(\partial_\alpha f)(\alpha, z) \leqslant 0$ pour tout $\alpha \in]0,1[$ et pour tout $z \in]0,1[$. C'est du calcul :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, z) = (1-q)z\big[\alpha^{-q}(1+\alpha z)^{q-1} - (1+\alpha^{1-q}z)(1+\alpha z)^{q-1} - \alpha^{-q}(1-\alpha z)^{q-1} + (1-\alpha^{1-q}z)(1-\alpha z)^{q-2}\big]. \tag{27.614}$$

Maintenant nous factorisons $(1+\alpha z)^{q-2}$ grâce à la décomposition $(1+\alpha z)^{q-1} = (1+\alpha z)(1+\alpha z)^{q-2}$. Notez que le lemme 27.144 donne $q > 2$, et donc pas de problèmes avec la puissance $q-2$. Nous continuons le calcul

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, z) &= (1-q)z(1+\alpha z)^{q-2}\big[\alpha^{-q}(1+\alpha z) - (1+\alpha^{1-q}z)\big] && (27.615a)\\ &\quad + (1-q)z(1-\alpha z)^{q-2}\big[-\alpha^{-q}(1-\alpha z) + (1-\alpha^{1-q}z)\big] \\ &= (1-q)z(1+\alpha z)^{q-2}\big[\alpha^{-q} + \alpha^{-q+1}z - 1 - \alpha^{1-q}z\big] && (27.615b)\\ &\quad + (1-q)z(1-\alpha z)^{q-2}\big[-\alpha^{-q} + \alpha^{-q+1} + 1 - \alpha^{1-q}z\big] \\ &= (1-q)z(1+\alpha z)^{q-2}[\alpha^{-q} - 1] + (1-q)z(1-\alpha z)^{q-2}[1-\alpha^{-q}] && (27.615c)\\ &= (1-q)z(\alpha^{-q} - 1)\big[(1+\alpha z)^{q-2} - (1-\alpha z)^{q-2}\big]. && (27.615d) \end{aligned}$$

Vu que $q > 2$, la fonction $x \mapsto x^{q-2}$ est strictement croissante sur les positifs[68]. Et vu que $\alpha z < 1$, le crochet est strictement positif. Par ailleurs, $z > 0$, $(1-q) < 0$ et $(\alpha^{-q} - 1) > 0$ donc nous avons prouvé que $(\partial_\alpha f)(\alpha, z) \leqslant 0$.

Donc f est décroissante par rapport à α. Vu que $z \in [0,1]$ et que $p > 1$, nous avons $z^{p-1} < 1$ et donc $f(1,z) \leqslant f(z^{p-1}, z)$. Nous y substituons les valeurs calculées en (27.612) et (27.613) :

EQooFQJAooPCYtMG
$$(1+z)^q + (1-z)^q \leqslant 2(1+z^p)^{q-1}. \tag{27.616}$$

Nous pouvons maintenant facilement prouver notre inégalité.

(1) **Pour $0 < x < y$** Si $0 < x < y$, nous avons $x/y \in [0,1]$ et nous pouvons appliquer l'inégalité (27.616) à $z = x/y$. Nous avons successivement :

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^q + \left(1 - \frac{x}{y}\right)^q \leqslant \left(1 + \frac{x^p}{y^p}\right)^{q-1} \tag{27.617a}$$
$$\left(\frac{x+y}{y}\right)^q + \left(\frac{y-x}{y}\right)^q \leqslant 2\left(\frac{y^p + x^p}{y^p}\right)^{q-1} \tag{27.617b}$$
$$y^{-q}(x+y)^q + y^{-q}(y-x)^q \leqslant 2y^{-p(q-1)}(y^p + x^p) \tag{27.617c}$$
$$(x+y)^q + (y-x)^q \leqslant 2y^{-p(q-1)+q}(y^p + x^p). \tag{27.617d}$$

Nous avons utilisé la proposition 12.432 sur la composition de puissances. Maintenant il suffit de remarquer que $q = p(q-1)$ pour avoir le résultat.

[68] Proposition 12.427.

(2) $x<0$ **et** $y>0$ En posant $x'=-x$ nous avons

$$\begin{aligned}|x+y|^q+|x-y|^q&=|-x'+y|^q+|-x'-y|^q &(27.618a)\\ &=|x'-y|^q+|x'+y|^q &(27.618b)\\ &\leqslant 2\big(|x'|^p+|y|^p\big) &(27.618c)\\ &\leqslant 2\big(|x|^p+|y|^p\big). &(27.618d)\end{aligned}$$

(3) **Les autres cas** Je vous prie de faire la liste, et d'adapter.

□

Pour d'autres preuves du lemme suivant, voir [758].

LEMooLTROooVusGte

Lemme 27.146 ([759]).
Soient $a,b\in\mathbb{C}$ ainsi que $1<p<2$. Nous notons q l'exposant conjugué de p. Nous avons l'inégalité

$$|a+b|^q+|a-b|^q\leqslant 2\big(|a|^p+|b|^p\big)^{q-1}. \tag{27.619}$$

Démonstration. Commençons doucement avec le cas $b=0$. À gauche nous gardons $2|a|^q$, et pour le membre de droite nous remarquons que

$$q-1=\frac{1}{p-1}, \tag{27.620}$$

de telle sorte que

$$(|a|^p)^{q-1}=|a|^{p/(p-1)}=|a|^q. \tag{27.621}$$

Gardez en tête que, par le lemme 27.144, $q>2$; ce sera utile.

Nous commençons le vrai combat. Vu que $|a-b|=|b-a|$ nous pouvons supposer $|a|\geqslant|b|$ pour fixer les idées. En utilisant le lemme 18.64, il existe $t_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$ tel que

$$\begin{aligned}|a+b|^2&=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos(t_0)\\ |a-b|^2&=|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos(t_0)\end{aligned} \tag{27.622}$$

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}f\colon[0,2\pi]&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto\Big(|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos(t)\Big)^{q/2}+\Big(|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos(t)\Big)^{q/2}.\end{aligned} \tag{27.623}$$

Elle vérifie

$$f(t_0)=(|a+b|^2)^{q/2}+(|a-b|^2)^{q/2}. \tag{27.624}$$

Vu que $|a+b|$ et $|a-b|$ sont positifs, nous pouvons « simplifier » le carré et la racine carré, de telle sorte que

$$f(t_0)=|a+b|^q+|a-b|^q. \tag{27.625}$$

Nous cherchons un maximum pour f sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Pour cela, nous prenons d'abord la dérivée :

$$f'(t)=-q|a||b|\sin(t)\Big[\big(|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos(t)\big)^{q/2-1}-\big(|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos(t)\big)^{q/2-1}\Big]. \tag{27.626}$$

Notez que $q>2$, donc la fonction $x\mapsto x^{q/2-1}$ est croissante.

Pour $t\in[0,\pi/2]$, nous avons $\cos(t)\geqslant-\cos(t)$ ainsi que $\sin(t)\geqslant0$. Donc $f'(t)\leqslant0$. De la même manière, nous avons $f'(t)\geqslant0$ pour $t\in[\pi/2,\pi]$.

Par le lien entre dérivée et croissance (proposition 12.210), nous savons que le maximum de f sur $[0,\pi]$ est atteint en 0 ou en π.

Nous avons, en utilisant la supposition $|a|\geqslant|b|$:

$$\begin{aligned}f(0)=f(\pi)&=\big(|a|^2+|b|^2+2|a||b|\big)^{q/2}+\big(|a|^2+|b|^2-2|a||b|\big)^{q/2} &(27.627a)\\ &=\big(\big||a|+|b|\big|^2\big)^{q/2}+\Big(\big||a|-|b|\big|^2\Big) &(27.627b)\\ &=\big||a|+|b|\big|^q+\big||a|-|b|\big|^q. &(27.627c)\end{aligned}$$

En particulier $f(t_0)\leqslant f(0)$ et donc

$$|a+b|^q+|a-b|^q\leqslant\big||a|+|b|\big|^q+\big||a|-|b|\big|^q\leqslant 2\big(|a|^p+|b|^p\big)^{q-1}. \tag{27.628}$$

La dernière inégalité est le lemme 27.145 appliqué aux réels $|a|$ et $|b|$. □

PROPooJDOQooWsGlkr

Proposition 27.147 (Inégalité de Clarkson[757]).
Soient $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

(1) Si $p \geqslant 2$, alors

$$\| \frac{f+g}{2} \|_p^p + \| \frac{f-g}{2} \|_p^p \leqslant \frac{1}{2} \Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \Big). \tag{27.629}$$

EQooBWDJooGXzdxz

(2) Si $1 < p < 2$ et si q est l'exposant conjugué de p, alors

$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leqslant 2 \Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \Big)^{q-1}, \tag{27.630}$$

EQooXMWBooYrvaoV

ou

$$\| \frac{f+g}{2} \|_p^q + \| \frac{f-g}{2} \|_p^q \leqslant 2^{1-q} \big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \big)^{q-1}. \tag{27.631}$$

EQooZCWDooBnaMom

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour $p \geqslant 2$** Soient $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$; ce sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour chaque $\omega \in \Omega$ nous considérons les nombres complexes $f(\omega)$ et $g(\omega)$; nous pouvons écrire l'inégalité du lemme 27.143 :

$$\left| \frac{f(\omega)+g(\omega)}{2} \right|^p + \left| \frac{f(\omega)-g(\omega)}{2} \right|^p \leqslant \frac{1}{2} \big(|f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p \big). \tag{27.632}$$

EQooIGNKooKFUpKO

Nous avons les substitutions évidentes $f(\omega) + g(\omega) = (f+g)(\omega)$ et $f(\omega) - g(\omega) = (f-g)(\omega)$. En intégrant alors (27.632) sur Ω nous trouvons l'inégalité demandée.

(2) **Pour $1 < p < 2$** Il s'agit de faire la même chose, en utilisant l'inégalité de Clarkson du lemme 27.146. Pour obtenir (27.631), il s'agit simplement de multiplier et diviser le member de gauche de (27.630) par 2^q.

□

27.12 Théorème de la projection normale

27.12.1 Espace uniformément convexe

DEFooOPQBooBhufew

Définition 27.148 (Espace uniformément convexe[760]).
*Un espace de Banach B est **uniformément convexe** si il existe une fonction $\delta :]0, \infty[\to \mathbb{R}^+$ telle que si*

(1) $\|x\| \leqslant \|y\| \leqslant 1$,

(2) $\|x - y\| \geqslant \epsilon$,

alors

$$\| \frac{x+y}{2} \| \leqslant \|y\| - \delta(\epsilon). \tag{27.633}$$

Lemme 27.149 ([1]).
Si B est un espace de Banach uniformément convexe, alors pour tout $k > 0$, il existe une fonction $\delta_k :]0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ telle que si

(1) $\|x\| \leqslant \|y\| \leqslant k$,

(2) $\|x - y\| \geqslant \epsilon$,

alors

$$\| \frac{x+y}{2} \| \leqslant \|y\| - \delta_k(\epsilon). \tag{27.634}$$

Démonstration. Nous posons $x' = x/k$ et $y' = y/k$. Nous avons alors

$$\|x' - y'\| = \frac{\|x-y\|}{k} > \frac{\epsilon}{k}. \tag{27.635}$$

L'uniforme convexité de B dit alors que

$$\| \frac{x'+y'}{2} \| > \|y'\| - \delta(\epsilon/k). \tag{27.636}$$

En multipliant cette inégalité par k nous trouvons

$$\|\frac{x+y}{2}\| > \|y\| - k\delta(\epsilon/k). \tag{27.637}$$

Donc en posant $\delta_k(\epsilon) = k\delta(\epsilon/k)$, nous avons le résultat escompté. □

DEFooMYYLooJyACPL

Définition 27.150 (Projection normale[760])**.**
Soient un espace de Banach B ainsi que $V \subset B$. Soit $a \in B$. La fonction

$$\begin{aligned} f\colon V &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x,a) \end{aligned} \tag{27.638}$$

possède un infimum[69] *m. Si $x \in V$ est tel que $d(x,a) = m$, alors x est une **projection normale** de a sur V.*

PROPooDKXVooUoYPgz

Proposition 27.151 ([760])**.**
Soient un espace de Banach B et un sous-espace vectoriel $V \subset B$. Si une projection normale de $a \in B$ sur V existe, alors elle est unique.

Démonstration. Soient deux projections normales b, b' de a sur V.
Si $m = 0$, alors $\|a - b\| = 0$ et $\|a - b'\| = 0$, ce qui donne $a = b$ et $a = b'$. Donc d'accord pour $b = b'$.
Si $m > 0$ alors nous utilisons l'inégalité $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ sous la forme

$$\|a - \frac{b+b'}{2}\| = \|\frac{a-b}{2} + \frac{a-b'}{2}\| \leqslant \|\frac{a-b}{2}\| + \|\frac{a-b'}{2}\| = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m. \tag{27.639}$$

mEQooQWJWooVaWMCL

Mais $\frac{b+b'}{2} \in V$, donc

$$\|a - \frac{b+b'}{2}\| \geqslant m. \tag{27.640}$$

Nous en déduisons que dans (27.639), toutes les inégalités sont des égalités et en particulier

$$\|\frac{b+b'}{2} - a\| = m. \tag{27.641}$$

Nous avons donc les deux égalités suivantes :

$$2m = \|a - b\| + \|a - b'\| \tag{27.642}$$

et

$$2m = \|b + b' - 2a\|. \tag{27.643}$$

Cela donne

$$\|a - b\| + \|a - b'\| = \|(a - b) + (a - b')\|. \tag{27.644}$$

Vu que B est strictement convexe, cela n'est possible que si $a - b = a - b'$, ce qui signifie que $b = b'$. □

THOooOOVVooMhzHqd

Théorème 27.152 ([757, 760])**.**
Si B est un espace de Banach uniformément convexe, si $V \subset B$ est un sous-espace vectoriel fermé et si $a \in B$, alors a admet une unique projection normale[70] *sur V.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Unicité** Soient deux projections normales b et b' de a sur V. Nous avons $\|a - b\| = \|a - b'\| = m$. Si $b \neq b'$, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\|b - b'\| > \epsilon > 0. \tag{27.645}$$

En posant

$$x = \frac{1}{2}\frac{b-a}{m}, \quad y = \frac{1}{2}\frac{b'-a}{m}, \tag{27.646}$$

nous avons $\|x\| = \|y\| = \frac{1}{2} < 1$. L'uniforme convexité de B donne alors

$$\|\frac{x+y}{2}\| \leqslant \|y\| - \delta(\epsilon). \tag{27.647}$$

[69] Toute fonction à valeurs positives possède un infimum, c'est la proposition 1.579.
[70] Définition 27.150.

Mais

$$x+y=\frac{\frac{1}{2}(b+b')-a}{m} \tag{27.648}$$

et

$$\|x+y\|\leqslant 2\|y\|-2\delta(\epsilon)=1-2\delta(\epsilon)<1. \tag{27.649}$$

Nous avons donc prouvé que

$$\|\frac{1}{2}(b+b')-a\|<m, \tag{27.650}$$

ce qui est impossible parce que cela dirait que $\frac{b+b'}{2}$ est une « meilleure » projection normale que b et b'.

(2) **Existence** Soient b_k dans V tels que $\|a-b_k\|\to m$. Nous supposons (quitte à passer à une sous-suite) que

$$\|a-b_{k+1}\|\leqslant\|a-b_k\|. \tag{27.651}$$

(2a) **La suite (b_k) converge**
Nous supposons qu'elle ne converge pas. Elle n'est donc pas de Cauchy parce que B est de Banach[71] et donc complet. Il existe $\epsilon>0$ tel que pour tout $N\in\mathbb{N}$ il existe $p,q>N$ tels que

$$\|b_p-b_q\|>\epsilon. \tag{27.652}$$

Nous effectuons quelque choix.

(2a.i) nous choisissons $q>p$ de telle sorte que $\|a-b_p\|\leqslant\|a-b_q\|$,

(2a.ii) nous choisissons N assez grand pour avoir

$$\|a-b_p\|\leqslant\|a-b_q\|<m. \tag{27.653}$$

Nous avons $\|(a-b_p)-(a-b_q)\|=\|b_q-b_p\|>\epsilon$, ce qui avec l'uniforme convexité donne

$$\frac{\|(a-b_p)+(a-b_q)\|}{2}\leqslant\|a-b_q\|-\delta(\epsilon). \tag{27.654}$$

Donc

$$m\leqslant\|a-\frac{b_p-b_q}{2}\|=\|\frac{(a-b_p)+(a-b_q)}{2}\|\leqslant\|a-b_q\|-\delta(\epsilon)<m-\delta(\epsilon)<m. \tag{27.655}$$

Cela signifie que $m<m$, ce qui est impossible.

(2b) **Conclusion** La suite (b_k) converge dans B. Vu que V est fermé, la limite est dans V. Cette limite, que nous nommons b, vérifie

$$\|a-b\|\leqslant\|a-b_k\| \tag{27.656}$$

pour tout k. Mais comme nous avons $m\leqslant\|a-b_k\|\to m$, nous avons $\|a-b\|=m$, c'est-à-dire que b est une projection normale de a sur V.

□

27.12.2 Uniforme convexité des espaces de Lebesgue

PROPooFNLJooDlyIKV

Proposition 27.153 ([761]).
Si $1<p<\infty$, l'espace $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ est uniformément convexe[72].

Démonstration. En deux parties.

(1) $1<p\leqslant 2$ Nous montrons que la fonction $\delta(\epsilon)=2^{-q}\epsilon^q$ fonctionne.
Soient $f,g\in L^p$ telles que $\|f\|_p\leqslant\|g\|_p\leqslant 1$ et $\|f-g\|_p\geqslant\epsilon$. Nous commençons par écrire l'inégalité de Clarkson (27.630) :

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^q+\|\frac{f-g}{2}\|_p^q\leqslant 2^{1-q}\big(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\big)^{q-1}. \tag{27.657}$$

EQooOWVEooGGfCpy

[71] Définition 7.316.
[72] Définition 27.148.

Par hypothèse, $\|f\|_p$ et $\|g\|_p$ sont plus petites que 1. Vu que $p>1$, nous avons

$$\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\leqslant 1+1=2. \tag{27.658}$$

En remplaçant dans le membre de droite de (27.657) nous avons

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^q+\|\frac{f-g}{2}\|_p^q\leqslant 2^{1-q}2^{q-1}=1, \tag{27.659}$$

et donc

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^q\leqslant 1-\|\frac{f-g}{2}\|_p^q. \tag{27.660}$$ EQooKARVooDrQuJI

Par ailleurs nous avons supposé $\|f-g\|_p\geqslant\epsilon$. Donc aussi[73]

$$\|\frac{f-g}{2}\|_p^q\geqslant 2^{-q}\epsilon^q. \tag{27.661}$$ EQooCGDDooWtDokf

Et par un autre ailleurs,

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p=\frac{1}{2}\|f+g\|_p\leqslant\frac{1}{2}\big(\|f\|_p+\|g\|_p\big)\leqslant 1. \tag{27.662}$$ EQooOFWYooLVrNDc

Vu que nous avons $q\geqslant 2$, cela donne aussi

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p\leqslant\|\frac{f+g}{2}\|^q. \tag{27.663}$$ EQooGMPRooGiLSss

Avec les inégalités (27.661) et 27.663 nous finissons l'inégalité (27.660) :

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p\leqslant\|\frac{f+g}{2}\|_p^q\leqslant 1-2^{-q}\epsilon^q\leqslant\|g\|_p-\delta(\epsilon). \tag{27.664}$$

Okay, c'est bon.

(2) $\underline{2\leqslant p<\infty}$ Il s'agit de faire la même chose en partant de Clarkson (27.629). Le résultat est que la fonction $\delta(\epsilon)=(\epsilon/2)^p$, ça fonctionne.

□

27.12.3 Théorème de la projection normale

PROPooTZMRooCvQtGg

Proposition 27.154.
Si $1<p<\infty$, et si V est un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, alors la projection normale[74] *de $a\in L^p$ sur V existe et est unique.*

Démonstration. La proposition 27.153 nous indique que l'espace $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ est uniformément convexe. Or le théorème 27.152 nous indique que les espaces uniformément convexes vérifient la présente proposition. □

Nous pouvons donner une preuve directe, sans passer par l'uniforme convexité, dans les cas $p\geqslant 2$.

THOooRJFUooQivDKm

Théorème 27.155 (Théorème de la projection normale[762])**.**
Nous considérons $p\geqslant 2$. Soit un sous-espace vectoriel fermé $W\subset L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et $u_0\in L^p$. Nous notons

$$d(u_0,W)=\inf_{w\in W}d(u_0,W). \tag{27.665}$$

Alors il existe $w_0\in W$ tel que $\|u_0-w_0\|=d(u_0,W)$.

Démonstration. Nous allons séparer trois cas : $p=2$ et $p>2$.

(1) $\underline{p=2}$ Pour $p=2$, nous savons que L^2 est un espace de Hilbert[75], et nous avons déjà le théorème de la projection 25.7.

[73] Ici j'ai un coefficient un peu différent que celui de [761]. Écrivez-moi pour confirmer ou infirmer mes calculs.
[74] Définition 27.150.
[75] Lemme 27.105.

(2) $p > 2$ Pour chaque $x \in \Omega$ nous avons $f(x), g(x) \in \mathbb{C}$ et donc l'identité du parallélogramme[76] :

$$\big|f(x) - g(x)\big|^2 + \big|f(x) + g(x)\big|^2 = 2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2. \tag{27.666}$$

Vu que $p > 2$, la fonction $s\colon x \mapsto x^{p/2}$ est convexe (lemme 17.87). Calcul :

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)|^p + |f(x) + g(x)|^p &= \big(|f(x) - g(x)|^2\big)^{p/2} + \big(|f(x) + g(x)|^2\big)^{p/2} && \text{(27.667a)}\\
&= s\big(|\dots|^2\big) + s\big(|\dots|^2\big) && \text{(27.667b)}\\
&\leqslant \big(|f(x) - g(x)|^2 + |f(x) + g(x)|^2\big)^{p/2} && \text{(27.667c)}\\
&= \big(2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2\big)^{p/2} && \text{(27.667d)}\\
&= 2^{p/2}\big(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\big)^{p/2} && \text{(27.667e)}\\
&\leqslant 2^{p/2}2^{p/2-1}\big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\big) && \text{(27.667f)}\\
&= 2^{p-1}\big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\big) && \text{(27.667g)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (27.667c) : la convexité de s.
- Pour (27.667d) : la relation (27.666).
- Pour (27.667f) : la seconde inégalité du lemme 27.667f.

Nous isolons $|f(x) - g(x)|^p$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)|^p &\leqslant 2^{p-1}\big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\big) - |f(x) + g(x)|^p && \text{(27.668a)}\\
&= 2^p\left(\frac{|f(x)|^p + |g(x)|^p}{2} - \left|\frac{|f(x)| + |g(x)|}{2}\right|^p\right) && \text{(27.668b)}
\end{aligned}$$

Cette inégalité étant valable pour tout x, nous pouvons intégrer sur Ω et découper l'intégrale en petits morceaux :

$$\|f - g\|_p^p \leqslant 2^p\left(\frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} - \|\frac{f+g}{2}\|_p^p\right). \tag{27.669}$$

Voilà une bonne chose de prouvée. Nous pouvons maintenant passer au vif du sujet.

Soit une suite w_j dans W telle que $\|u_0 - w_j\| \to d(u_0, W)$. Trois choses à savoir sur cette suite :

(2a) Une telle suite existe parce que $d(u_0, W)$ est défini comme un infimum.

(2b) Rien ne garantit qu'elle converge.

(2c) Même si elle convergeait, rien ne garantirait que la limite soit encore dans W.

Le troisième point est facile à régler : vu que W est fermé par hypothèse, une suite convergente contenue dans W a sa limite dans W. Nous allons régler la convergence de w_j en prouvant qu'elle est de Cauchy.

Remarquons que W est vectoriel, donc $(w_j + w_k)/2$ est dans W pour tout j et k ; donc

$$\|\frac{w_j + w_k}{2} - u_0\| \geqslant d(u_0, W). \tag{27.670}$$

En tenant compte de cela, nous écrivons l'inégalité (27.669) avec $f = w_j - u_0$ et $g = w_k - u_0$:

$$\|f - g\|_p^p = \|w_j - w_k\|_p^p \leqslant 2^p\left(\frac{\|w_j - u_0\|^p + \|w_k - u_0\|^p}{2} - d(u_0, W)\right). \tag{27.671}$$

Soit $\epsilon > 0$ et $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 < \epsilon$ tels que $\epsilon_1 + \epsilon_2 < \epsilon$. Il existe un N tel que si $j, k > N$ alors $\|w_j - u_0\|^p \leqslant d(u_0, W)^p + \epsilon_1$ et $\|w_k - u_0\|^p \leqslant d(u_0, W)^p + \epsilon_2$. Pour de telles valeurs de j et k, nous avons

$$\|w_j - w_k\|_p \leqslant 2\left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}\right) < 2\epsilon^{1/p}. \tag{27.672}$$

Donc la suite (w_j) est de Cauchy.

[76] Théorème 10.1 en remarquant que $(z_1, z_2) \mapsto z_1\bar{z}_2$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}$.

L'espace L^p étant complet par le théorème 27.55, nous en déduisons que (w_j) converge dans L^p. Mais comme W est fermé, nous avons $w_j \xrightarrow{L^p} w \in W$.

En termes de normes, nous avons

$$\|w - u_0\| = \lim_j \|w_j - u_0\| = d(W, u_0). \tag{27.673}$$

□

j

27.13 Jauge

DEFooRNZBooLSdowc

Définition 27.156 ([260]).
*Soit un ouvert connexe C dans un espace vectoriel topologique E. Nous supposons que $0 \in C$. La **jauge** de C est l'application*

$$\begin{aligned} j_C \colon E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \inf\{t > 0 \text{ tel que } \frac{x}{t} \in C\}. \end{aligned} \tag{27.674}$$

LEMooEUETooMAAnNO

Lemme 27.157 ([1]).
Soit un ouvert connexe C dans un espace vectoriel topologique E. Nous supposons que $0 \in C$, et nous considérons la jauge $j_C \colon E \to \mathbb{R}$. Nous posons

$$A_x = \{t > 0 \text{ tel que } \frac{x}{t} \in C\}. \tag{27.675}$$

Nous avons :

ITEMooORQGooUkHWKJ

(1) $]j_C(x), \infty[\subset A_x$.

ITEMooFZSGooLuyzcw

(2) Si $x_0 \notin C$, alors $j_C(x_0) \geqslant 1$.

Démonstration. Soit $t \in A_x$. Vu que C est connexe et contient 0, vu que $x/t \in C$ nous avons

$$(1 - \lambda)0 + \lambda \frac{x}{t} \in C \tag{27.676}$$

pour tout $\lambda \in [0, 1]$. C'est-à-dire que $(\lambda/t)x \in C$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Donc $(t/\lambda) \in A_x$, et donc $[t, \infty[\subset A_x$. Soit maintenant $t > j_C(x)$. Alors il existe $t_0 \in [j_C(x), t[\cap A_x$. Dans ce cas, $t \in [t_0, \infty[\subset A_x$. Cela prouve le point (1).

Nous passons au point (2). Soit $x_0 \notin C$. Si $j_C(x_0) < 1$, alors nous avons $1 \in A_{x_0}$ par le point (1). Et si $1 \in A_{x_0}$, alors $x_0 \in C$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $j_C(x_0) \leqslant 1$. □

PROPooEBPPooDWUwLx

Proposition 27.158 ([260]).
Soient un espace vectoriel topologique E, un ouvert connexe $C \subset E$ tel que $0 \in C$. Nous la jauge $j_C \colon E \to \mathbb{R}$ a les propriétés suivantes.

ITEMooAOUUooGhrpk

(1) Pour tout $x \in E$ et $\lambda > 0$ nous avons $f_C(\lambda x) = \lambda j_C(x)$.

ITEMooQWIQooMRramc

(2) Pour tout $x, y \in E$ nous avons $j_C(x + y) \leqslant j_C(x) + j_C(y)$.

ITEMooKGNFooKAEUPH

(3) Si C est symétrique[77], alors j_C est une seminorme[78]

Démonstration. Nous posons

$$A_x = \{t > 0 \text{ tel que } \frac{x}{t} \in C\} \tag{27.677}$$

et $A = A_x$, $B = A_{\lambda x}$.

(1) $\underline{B = \lambda A}$ Soit $t \in B$. Alors $x/(t/\lambda) \in C$. Et donc $t/\lambda \in A$ et donc $t \in \lambda A$. De même si $t \in A$, alors $x/t \in C$ et donc $(\lambda x)/(\lambda t) \in C$ de telle sorte que $\lambda t \in B$.

(2) **infimum, point (1)** La proposition 1.581 dit que $\inf(B) = \inf(\lambda A) = \lambda \inf(A)$. Cela prouve le point (1).

[77] C'est-à-dire que $-x \in C$ si et seulement si $x \in C$.
[78] Définition 7.381.

(3) **Pour (3)** Nous savons par le lemme 27.157(1) $]j_C(x),\infty[\subset A_x$. Si $\epsilon > 0$, nous avons donc $j_C(x)+\epsilon \in A_x$ et donc

$$\frac{x}{j_C(x)+\epsilon} \in C, \quad \frac{y}{j_C(y)+\epsilon} \in C. \tag{27.678}$$

Comme C est convexe, nous pouvons prendre une combinaison convexe de ces deux éléments. L'astuce est d'écrire

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C \tag{27.679}$$

avec

$$\lambda = \frac{j_C(x)+\epsilon}{j_C(x)+j_C(y)+2\epsilon}, \tag{27.680}$$

et

$$1-\lambda = \frac{j_C(y)+\epsilon}{j_C(x)+j_C(y)+2\epsilon}. \tag{27.681}$$

Un simple calcul montre que

$$\frac{x+y}{j_C(x)+j_C(y)+2\epsilon} \in C, \tag{27.682}$$

c'est-à-dire $j_C(x)+j_C(y)+2\epsilon \in A_{x+y}$ ou encore que

$$j_C(x+y) = \inf(A_{x+y}) \leqslant j_C(x)+j_C(y)+2\epsilon. \tag{27.683}$$

Vu que cette inégalité est vraie pour tout $\epsilon > 0$, nous avons $j_C(x+y) \leqslant j_C(x)+j_C(y)$.

(4) **Pour (3)** Nous devons prouver que $j_C(\lambda x) = |\lambda| j_C(x)$ pour tour λ. Nous l'avons déjà prouvé pour $\lambda > 0$. Vu que $0/t = 0 \in C$ pour tout $t > 0$, nous avons $j_C(0) = 0$ et donc $j_C(\lambda x) = |\lambda| j_C(x)$ pour $\lambda = 0$. Reste à voir cette égalité pour $-\lambda$ lorsque $\lambda > 0$.

Vu que C est symétrique, $A_x = A_{-x}$ et alors

$$\begin{aligned} j_C(-\lambda x) &= \inf\{t > 0 \text{ tel que } \frac{-\lambda x}{t} \in C\} && (27.684a)\\ &= \inf\{t > 0 \text{ tel que } \frac{\lambda x}{t} \in C\} && (27.684b)\\ &= \lambda j_C(x). && (27.684c) \end{aligned}$$

□

27.14 Théorèmes de Hahn-Banach

27.14.1 Applications $\mathbb{R}$-linéaires et $\mathbb{C}$-linéaires

LEMooBZHIooSQJSnM

Lemme 27.159 ([763, 764]).
Soit un espace vectoriel X sur $\mathbb{C}$. Nous considérons[79] *l'application*

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R}) &\to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C}) \\ f &\mapsto \big[x \mapsto f(x) - if(ix)\big]. \end{aligned} \tag{27.685}$$

EQooLYYGooIfKIfu

(1) Cette application est bien définie.

(2) Elle est une bijection. ITEMooNVKBooIGhzWM

(3) Elle vérifie $\|\psi(f)\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})} = \|f\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})}$. ITEMooTFWOooIIhcnZ

(4) Si $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})$ se décompose en $g(x) = u(x)+iv(x)$ où u et v sont à valeurs réelles, alors $g = \psi(u)$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Bien définie** Nous devons avant tout prouver que (27.685) a un sens : si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})$, alors nous devons prouver que $\psi(f) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})$, c'est-à-dire que $\psi(f)$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Soient donc $x, y \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de telle sorte que $\alpha+\beta i$ soit un élément générique de $\mathbb{C}$. Prouver que

$$\psi(f)(x+y) = \psi(f)(x) + \psi(f)(y) \tag{27.686}$$

[79] Voir la définition 4.31 pour les notations.

est un simple calcul. Ensuite

$$\begin{aligned}\psi(f)\big((\alpha+i\beta)x\big) &= f\big((\alpha+i\beta)x\big) - if\big(i(\alpha+i\beta)x\big) && (27.687a)\\ &= \alpha f(x) + \beta f(ix) - i\alpha f(ix) - i(-\beta)f(x) && (27.687b)\\ &= (\alpha+i\beta)\big(f(x) - if(ix)\big) && (27.687c)\\ &= (\alpha+i\beta)\psi(f)(x). && (27.687d)\end{aligned}$$

(2) **ψ est injective** Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R})$ telles que $\psi(f) = \psi(g)$. Nous avons l'égalité

$$f(x) - if(ix) = g(x) - ig(ix), \tag{27.688}$$

qui est une égalité dans $\mathbb{C}$. En sachant que les nombres $f(x)$, $f(ix)$, $g(x)$ et $g(ix)$ sont des réels, nous séparons les parties réelles et imaginaires dans (27.688) et nous trouvons $f(x) = g(x)$ et $f(ix) = g(ix)$. Chacune de ces deux égalités nous assurent que $f = g$.

(3) **ψ est surjective** Soit $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$. Nous séparons ses parties réelles et imaginaires :

$$g(x) = g_1(x) + ig_2(x). \tag{27.689}$$

Avec $g_1, g_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R})$. Nous allons prouver que $g = \psi(g_1)$.

Ensuite, utilisant la $\mathbb{C}$-linéarité de g pour calculer $g(ix)$ de deux façons différentes. D'une part

$$g(ix) = g_1(ix) + ig_2(ix), \tag{27.690}$$

et d'autre part

$$g(ix) = i\big(g_1(x) + ig_2(x)\big). \tag{27.691}$$

En égalisant les parties réelles et imaginaires de (27.690) et de (27.691),

$$\begin{aligned}g_1(x) &= g_2(ix) && (27.692a)\\ g_2(x) &= -g_1(ix), && (27.692b)\end{aligned}$$

et en particulier $g_1(ix) = g_2(-x)$.

Nous pouvons maintenant calculer

$$\begin{aligned}\psi(g_1)(x) &= g_1(x) - ig_1(ix) && (27.693a)\\ &= g_1(x) - ig_2(-x) && (27.693b)\\ &= g_1(x) + ig_2(x) && (27.693c)\\ &= g(x). && (27.693d)\end{aligned}$$

(4) **Norme** Nous prouvons maintenant le point (3) qui prétend que $\|\psi(f)\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})} = \|f\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})}$. Nous allons montrer les inégalités dans les deux sens.

(4a) $\|f\| \leqslant \|\psi(f)\|$

D'abord nous prouvons que $\|f\| \leqslant \|\psi(f)\|$. Pour cela, nous considérons $x \in X$, et nous écrivons

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - if(ix)| = |\psi(f)x| \tag{27.694}$$

dont la première inégalité est vraie parce que $f(x)$ et $f(ix)$ sont réels. Avec cette inégalité nous avons tout de suite

$$\sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |\psi(f)x|. \tag{27.695}$$

(4b) $\|f\| \geqslant \|\psi(f)\|$

Nous passons maintenant à l'autre sens. Soit $x \in X$. Nous commençons par trouver $\alpha \in S^1$ (c'est-à-dire $|\alpha| = 1$) tel que $f(\alpha ix) = 0$. Si $f(ix) = 0$, alors $\alpha = 1$ fait l'affaire. Sinon, supposons $f(ix) \neq 0$, et considérons l'application

$$\begin{aligned}s\colon]0, 2\pi[&\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto f\big(\varphi(t)ix\big).\end{aligned} \tag{27.696}$$

où φ est la bijection continue de la proposition 18.62(1). D'une part, pour $t = \pi$, nous avons

$$s(\pi) = f\big(\varphi(\pi)ix\big) = f(-ix) = -f(ix), \tag{27.697}$$

et d'autre part, pour $t = 0$ nous avons

$$s(0) = f\big(\varphi(0)ix\big) = f(ix) = f(ix). \tag{27.698}$$

Comme nous avons supposé que $f(ix) \neq 0$ le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 appliqué à s donne un $t \in]0, \pi[$ tel que $s(t_0) = 0$. En posant $\alpha = \varphi(t_0)$ nous avons le α qu'il nous fallait. Armés de ce α, nous montrons que $\|\psi(f)\| \leqslant \|f\|$. Nous avons

$$\begin{aligned}
|\psi(f)x| &= |\alpha||\psi(f)x| && && (27.699a)\\
&= |\psi(f)(\alpha x)| && \psi(f) \text{ est } \mathbb{C}\text{-linéaire} && (27.699b)\\
&= |f(\alpha x) - if(i\alpha x)| && && (27.699c)\\
&= |f(\alpha x)|. && && (27.699d)
\end{aligned}$$

Nous avons prouvé que pour tout $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$, il existe $y \in X$ tel que $\|y\| = 1$ et $|\psi(f)x| = |f(y)|$. En l'occurrence, $y = \alpha x$. Notez que α est une fonction de x. Nous avons donc

$$\sup_{\|y\|=1} |f(y)| \geqslant \sup_{\|x\|=1} |\psi(f)x|, \tag{27.700}$$

autrement dit $\|f\| \geqslant \|\psi(f)\|$.

(5) **Décomposition** Nous prouvons le point (4). Supposons $g(x) = u(x) + iv(x)$. Nous avons $g(ix) = ig(x)$ par $\mathbb{C}$-linéarité de g. Donc

$$u(ix) + iv(ix) = i\big(u(x) + iv(x)\big), \tag{27.701}$$

c'est-à-dire $u(ix) + iv(ix) = iu(x) - v(x)$. En égalisant les partie imaginaires, $v(x) = -u(ix)$. En remettant dans l'expression de g,

$$g(x) = u(x) + iv(x) = u(x) + i\big(-u(ix)\big) = u(x) - iu(ix) = \psi(u)x, \tag{27.702}$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

LEMooUFMFooEXecXE

Lemme 27.160 ([763]).
Soient un espace vectoriel X sur $\mathbb{C}$ ainsi qu'une seminorme[80] *p. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R})$. Nous avons*

$$|\psi(f)(x)| \leqslant p(x) \quad \forall x \in X \tag{27.703}$$

si et seulement si

$$|f(x)| \leqslant p(x) \quad \forall x \in X \tag{27.704}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R})$ vérifie $|\psi(f)(x)| \leqslant p(x)$ pour tout x. L'observation à faire est $f(x) = \operatorname{Re}\big(\psi(f)(x)\big)$. Nous avons alors[81]

$$|f(x)| = |\operatorname{Re}\big(\psi(f)(x)\big)| \leqslant |\psi(f)(x)| \leqslant p(x). \tag{27.705}$$

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $|f(x)| \leqslant p(x)$ pour tout x. Soit $x \in X$. Si $\psi(f)(x) = 0$, alors nous avons bien $|\psi(f)(x)| \leqslant p(x)$ parce qu'une seminorme est toujours positive. Nous supposons donc que $\psi(f)(x) \neq 0$.

La décomposition polaire (proposition 18.63) du nombre complexe $\psi(f)x$ donne un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(f)x = e^{i\theta}|\psi(f)x|$. Donc

$$|\psi(f)(x)| = e^{-i\theta}\psi(f)(x) = \psi(f)(e^{-i\theta}x). \tag{27.706}$$

EQooFYVFooOyOTHz

Ces égalités montrent entre autres que $\psi(f)(e^{-i\theta}x) \in \mathbb{R}^+$; et en particulier, il est égal à sa partie réelle. Vu la définition (27.685), ça nous dit que

$$\psi(f)(e^{-i\theta}x) = f(e^{-i\theta}x). \tag{27.707}$$

Nous pouvons alors continuer les égalités (27.706) en mettant des normes partout :

$$|\psi(f)(x)| = |\psi(f)(e^{-i\theta}x)| = |f(e^{-i\theta}x)| \leqslant p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x). \tag{27.708}$$

□

[80] Définition 7.381.

[81] Dans [763], l'auteur sépare le calcul en deux parties : une majoration pour $f(x)$ et une pour $-f(x)$. Je ne vois pas où est le mal à la faire d'un seul coup.

27.14.2 Hahn-Banach, théorème d'extension dominée

THOooXALCooFrkvDo

Théorème 27.161 (Hahn-Banach, extension dominée cas réel[765, 260]).
Soit E, un espace vectoriel réel et une application $p\colon E\to\mathbb{R}$ satisfaisant[82]

(1) $p(\lambda x)=\lambda p(x)$ pour tout $x\in E$ et pour tout $\lambda>0$,

(2) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ pour tout $x,y\in E$.

Soit de plus $M\subset E$ un sous-espace vectoriel muni d'une application $g\colon M\to\mathbb{R}$ vérifiant $g(m)\leqslant p(m)$ pour tout $m\in M$. Alors il existe $f\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ telle que

(1) L'application f étend g : $f(m)=g(m)$ pour tout $m\in M$,

(2) L'application f reste dominée par p : $f(x)\leqslant p(x)$ pour tout $x\in E$.

Démonstration. Si h est une application linéaire définie sur un sous-espace de E, nous notons D_h ledit sous-espace.

(1) **Un ensemble inductif**

Nous considérons P, l'ensemble des fonctions linéaires suivant

$$P=\left\{h\colon D_h\to\mathbb{R}\text{ tel que }\begin{cases}M\subset D_h\\ h(m)=g(m)&\forall m\in M\\ h(x)\leqslant p(x)&\forall x\in D_h\end{cases}\right\}\tag{27.709}$$

Cet ensemble est non vide parce que g est dedans. Nous le munissons de la relation d'ordre $h_1\leqslant h_2$ si et seulement si $D_{h_1}\subset D_{h_2}$ et h_2 prolonge h_1. Nous montrons à présent que P est un ensemble inductif. Soit un sous-ensemble totalement ordonné $Q\subset P$; nous définissons une fonction h de la façon suivante. D'abord $D_h=\sup_{l\in Q}D_l$ et ensuite

$$\begin{aligned}h\colon D_h&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto l(x)\quad\text{si }x\in D_l\end{aligned}\tag{27.710}$$

Cela est bien défini parce que si $x\in D_l\cap D_{l'}$ alors, vu que Q est totalement ordonné (i.e. $l\leqslant l'$ ou $l'\leqslant l$), on a obligatoirement $D_l\subset D_{l'}$ et l' qui prolonge l (ou le contraire). Donc h est un majorant de Q dans P parce que $h\geqslant l$ pour tout $l\in Q$. Cela montre que P est inductif (définition 1.36). Le lemme de Zorn 1.37 nous dit alors que P possède un élément maximal f qui va être la réponse à notre théorème.

(2) **Le support de f**

La fonction f est dans P ; donc $f(x)\leqslant p(x)$ pour tout $x\in D_h$ et $f(m)=g(m)$ pour tout $m\in M$. Pour terminer nous devons montrer que $D_f=E$. Supposons donc que $D_f\neq E$ et prenons $x_0\notin D_f$. Nous allons contredire la maximalité de f en considérant la fonction h donnée par $D_h=D_f+\mathbb{R}x_0$ et

$$h(x+tx_0)=f(x)+t\alpha\tag{27.711}$$

où α est une constante que nous allons fixer plus tard.

Nous commençons par prouver que h est dans P. Nous devons prouver que

$$h(x+tx_0)=f(x)+t\alpha\leqslant p(x+tx_0)\tag{27.712}$$

EqQIXrlFe

Pour cela nous allons commencer par fixer α pour avoir les relations suivantes : EqMDNkcQk

$$\begin{cases}f(x)+\alpha\leqslant p(x+x_0)&\text{(27.713a)}\\ f(x)-\alpha\leqslant p(x-x_0)&\text{(27.713b)}\end{cases}$$

EqDYmRWEY

pour tout $x\in D_f$. Ces relations sont équivalentes à demander α tel que

$$\begin{cases}\alpha\leqslant p(x+x_0)-f(x)&\text{(27.714a)}\\ \alpha\geqslant f(x)-p(x-x_0)&\text{(27.714b)}\end{cases}$$

[82] Ce n'est pas tout à fait une seminorme (définition 7.381) à cause de la valeur absolue. Le théorème 27.163 parlera pour les vraies seminormes, et pour les espaces sur $\mathbb{C}$.

Nous nous demandons donc si il existe un α qui satisfasse

$$\sup_{y\in D_f}\big(f(y)-p(y-x_0)\big)\leqslant\alpha\leqslant\inf_{z\in D_f}\big(p(z+x_0)-f(z)\big).\tag{27.715}$$

Ou encore nous devons prouver que pour tout $y,z\in D_f$,

$$p(z+x_0)-f(x)\geqslant f(y)-p(y-x_0)\geqslant 0.\tag{27.716}$$

Par les propriétés de p et de f,

$$p(z+x_0)+p(y-x_0)-f(z)-f(y)\geqslant p(z+y)-f(z+y)\geqslant 0.\tag{27.717}$$

La dernière inégalité est le fait que $f\in P$. Un choix de α donnant les inéquations (27.713) est donc possible.

À partir des inéquations (27.713) nous obtenons la relation (27.712) de la façon suivante. Si $t>0$ nous multiplions l'équation (27.713a) par t :

$$tf(x)+t\alpha\leqslant tp(x+x_0).\tag{27.718}$$

Et nous écrivons cette relation avec x/t au lieu de x en tenant compte de la linéarité de f :

$$f(x)+t\alpha\leqslant tp\big(\frac{x}{t}+x_0\big)=p(x+tx_0).\tag{27.719}$$

Avec $t<0$, c'est similaire, en faisant attention au sens des inégalités.

Nous avons donc construit $h\colon D_h\to\mathbb{R}$ avec $h\in P$, $D_f\subset D_h$ et $h(x)=f(x)$ pour tout $x\in D_f$. Cela pour dire que $h>f$, ce qui contredit la maximalité de f. Le domaine de f est donc E tout entier.

La fonction f est donc une fonction qui remplit les conditions.

□

Lemme 27.162 ([297])**.**
Soient un espace vectoriel complexe X, et une application linéaire $f\colon X\to\mathbb{C}$. Il existe une application $u\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})$ telle que

ITEMooBWQUooRbPZSn

(1) Pour tout $x\in X$, nous avons

$$f(x)=u(x)-iu(ix)\tag{27.720}$$

ITEMooFIZBooDnYKSO

(2) Nous avons égalité des normes[83]

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})}=\|u\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})}.\tag{27.721}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)**

Nous décomposons, pour chaque $x\in X$, l'élément $f(x)$ en parties réelles et imaginaires :

EQooZJZIooBQxffg

$$f(x)=u(x)+iv(x).\tag{27.722}$$

Il ne reste plus qu'à trouver le lien entre u et v. Pour cela, nous écrions $f(ix)=if(x)$ en substituant $f(x)$ et $f(ix)$ par leurs valeurs en termes de u et v :

$$u(ix)+iv(ix)=iu(x)-v(x).\tag{27.723}$$

En égalisant les parties réelles, nous avons $u(ix)=-v(x)$ et donc bien

EQooZUTLooVzwRDM

$$f(x)=u(x)+iv(x)=u(x)-iu(ix).\tag{27.724}$$

Nous prouvons maintenant que u est $\mathbb{R}$-linéaire. Il suffit de considérer $\lambda\in\mathbb{R}$ et d'écrire $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ en substituant (27.722) pour $f(\lambda x)$ et $f(x)$:

$$u(\lambda x)+iv(\lambda x)=\lambda\big(u(x)+iv(x)\big).\tag{27.725}$$

En égalisant encore les parties réelles, nous avons $u(\lambda x)=\lambda u(x)$. Nous faisons de même pour prouver que $u(x+y)=u(x)+u(y)$.

[83] Pas encore démontrée ; mais si vous savez le faire, écrivez-moi.

(2) **Pour (2)**

□

THOooVQLJooWuBMoZ

Théorème 27.163 (Hahn-Banach complexe[297]).
Soient un espace vectoriel X sur $\mathbb{K}$ (qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et une seminorme $p\colon X \to \mathbb{R}$. Soient un sous-espace vectoriel M de X ainsi qu'une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(M, \mathbb{K})$ telle que

$$|\ell(m)| \leqslant p(m) \; \forall m \in M. \tag{27.726}$$

Alors il existe une extension linéaire $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ telle que

(1) $f(m) = \ell(m)$ pour tout $m \in M$,

(2) $|f(x)| \leqslant p(x)$ pour tout $x \in X$.

Démonstration. Nous considérons X comme espace vectoriel réel (de dimension double de celle de X comme espace vectoriel complexe). Là-dedans, l'application p vérifie $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda > 0$. D'autre part nous décomposons l'application $\ell\colon M \to \mathbb{C}$ en parties réelles et imaginaires :

$$\ell(x) = u(x) + iv(x), \tag{27.727}$$

où $u\colon M \to \mathbb{R}$ est une application vérifiant, pour tout $m \in M$,

$$u(m) \leqslant |u(m)| \leqslant |\ell(m)| \leqslant p(m). \tag{27.728}$$

Donc le théorème en version réelle 27.161 s'applique et il existe une extension $R\colon X \to \mathbb{R}$ de u qui vérifie $R \leqslant p$ sur X. Nous posons alors

$$f(x) = R(x) - iR(ix). \tag{27.729}$$

En vertu du lemme 27.159, cela est une application $\mathbb{C}$-linéaire sur X, et nous avons $f = \ell$ sur M parce que leurs parties réelles sont égales.

De plus nous avons $R \leqslant p$ et donc $|f| \leqslant p$ par le lemme 7.385. □

27.14.3 Hyperplan séparateur

DEFooQUDEooMrgcCV

Définition 27.164 (Hyperplan qui sépare).
Soit E un espace vectoriel topologique réel ainsi que A, B des sous-ensembles de E.

*(1) Nous disons que l'hyperplan d'équation $f = \alpha$ **sépare au sens large** les parties A et B si $f(x) \leqslant \alpha$ pour tout $x \in A$ et $f(x) \geqslant \alpha$ pour tout $x \in B$.*

*(2) La séparation est **au sens strict** si il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$f(x) \leqslant \alpha - \epsilon \qquad \text{pour tout } x \in A \tag{27.730a}$$
$$f(x) \geqslant \alpha + \epsilon \qquad \text{pour tout } x \in B. \tag{27.730b}$$

*Si X est un espace vectoriel topologique complexe, nous disons que A et B sont **strictement séparés** si il existe $\phi \in X'$ et $\alpha > 0$ tels que*

$$\operatorname{Re}(\phi)(a) > \alpha > \operatorname{Re}(\phi)(b) \tag{27.731}$$

pour tout $a \in A$ et $b \in B$.

PROPooSKBXooQDOmcL

Proposition 27.165 ([260]).
Soit un espace vectoriel topologique réel E. Soit un ouvert connexe non vide $C \subset E$. Soit $x_0 \notin C$. Alors il existe $f \in E'$[84] tel que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Si $0 \in C$** Nous commençons par supposer que $0 \in C$, de telle sorte à pouvoir considérer la jauge[85] $j_C\colon E \to \mathbb{R}$. Nous posons $M = \mathbb{R}x_0$ et

$$\begin{aligned} g\colon M &\to \mathbb{R} \\ tx_0 &\mapsto t. \end{aligned} \tag{27.732}$$

[84] E' est l'ensemble des applications linéaires continues sur E à valeurs dans le corps, c'est-à-dire $\mathbb{R}$ ici.
[85] Définition 27.156.

Vu que $x_0 \notin C$, le lemme 27.157(2) dit que $j_C(x_0) \geqslant 1 = g(x_0)$. Nous multiplions cette inégalité par $t \geqslant 0$ pour obtenir $tj_C(x_0) \geqslant tg(x_0)$. Vu que $tj_C(x_0) = j_C(tx_0)$ (proposition 27.158(1)), et que $tg(x_0) = g(tx_0)$, nous avons

$$j_C(tx_0) \geqslant g(tx_0) \tag{27.733}$$

EQooYSVTooFKJabg

pour tout $t \geqslant 0$. Si $t < 0$, alors nous avons $j_C(tx_0) \geqslant 0$ et $g(tx_0) = t < 0$. Donc l'inégalité (27.733) est valide pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous avons donc $j_C \geqslant g$ sur M. Le théorème 27.161 dit qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ tel que

(1a) $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in M$.

(1b) $f(x) \leqslant j_C(x)$ pour tout $x \in E$.

Pour $x \in C$ en particulier nous avons $f(x) \leqslant j_C(x) < 1 = f(x_0)$. Nous devons encore prouver que f est continue. Pour cela nous considérons l'ouvert $U = C \cap (-C)$, qui est un voisinage ouvert de 0. Soit $x \in U$. Nous avons $f(x) \leqslant j_C(x) < 1$ parce que $x \in C$, mais aussi $f(-x) \leqslant j_C(-x) < 1$ parce que $-x \in C$. Vu que f est linéaire, l'inégalité $f(-x) < 1$ donne $f(x) > -1$. Au final nous avons prouvé que

$$f(x) \in]-1, 1[\tag{27.734}$$

pour tout $x \in U$. La proposition 7.280 dit qu'alors f est continue.

(2) **Si $0 \notin C$** Enfin nous prouvons le cas où 0 n'est pas dans C. Soit $c \in C$. Nous posons $C' = C - c$ et $x_0' = x_0 - c$ de telle sorte que $0 \in C'$ et $x_0' \in C'$. Par la première partie, il existe $f \in E'$ telle que $f(x) < f(x_0')$ pour tout $x \in C'$. Nous posons ensuite

$$f_1(x) = f(x - c). \tag{27.735}$$

Nous avons alors, pour tout $x \in C$ que

$$f_1(x) = f(x - c) < f(x_0') = f(x_0 - c) = f_1(x_0). \tag{27.736}$$

parce que $x - c \in C'$.

L'application f_1 est encore continue et linéaire. Elle répond donc à la question.

□

ThoSAJjdZc

Théorème 27.166 (Hahn-Banach, première forme géométrique[260])**.**
Soit E un espace vectoriel topologique et A, B deux convexes non vides disjoints de E. Si A est ouvert, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large[86]*.*

Démonstration. Vu que A et B sont convexes, la proposition 7.210 dit que $A - B$ est convexe. De plus $A - B$ est ouvert et ne contient pas zéro. Nous pouvons donc lui appliquer la proposition 27.165 : il existe $f \in E'$ tel que $f(x) < f(0) = 0$ pour tout $x \in A - B$. Autrement dit, pour tout $a, b \in A \times B$ nous avons $f(a) < f(b)$. Cela implique

$$\sup\{f(a) \text{ tel que } a \in A\} \leqslant \inf\{f(b) \text{ tel que } b \in B\}. \tag{27.737}$$

En posant $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup\{f|_A\} \leqslant \alpha \leqslant \inf\{f|_B\}, \tag{27.738}$$

l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ sépare bien A et B au sens large. □

THOooEOOVAdKgW

Théorème 27.167 (Hahn-Banach, seconde forme géométrique[766])**.**
Soient un espace vectoriel topologique réel ou complexe localement convexe[87] *X ainsi que des parties A, B qui sont*

(1) des convexes

(2) non vides

(3) disjoints

(4) A compact et B soit fermé.

[86] Définition 27.164.
[87] Définition 7.248.

Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement[88] *A et B.*

Dans le cas complexe, cela signifie qu'il existe $\phi \in X'$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\operatorname{Re}(\phi)(a) > \alpha > \operatorname{Re}(\phi)(b) \tag{27.739}$$

EQooTYESooXLtukE

pour tout $a \in A$ et $b \in B$.

Démonstration. Nous séparons le cas réel du cas complexe.

(1) **Cas réel**

Vu que B est fermé, A est dans l'ouvert $X \setminus B$. Donc si $a \in A$, il existe un voisinage ouvert convexe de a inclus dans $X \setminus B$. Soit U_a un voisinage ouvert et convexe de 0 tel que $(a + U_a) \cap B = \varnothing$.

Vu que la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est continue, nous pouvons trouver un ouvert convexe V_a tel que $V_a + V_a \subset U_a$. L'ensemble $a + V_a$ est alors un voisinage ouvert de a et bien entendu $\bigcup_a (a + V_a)$ recouvre A qui est compact. Nous en extrayons un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire que nous considérons $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (a_i + V_{a_i}). \tag{27.740}$$

Nous posons alors

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}. \tag{27.741}$$

Cet ensemble est non vide parce et il contient un voisinage de zéro parce que c'est une intersection finie de voisinages de zéro. Soit $x \in A + V$. Il existe i tel que

$$x \in a_i + U_{a_i} + V \subset a_i + V_{a_i} + V_{a_i} \subset a_i + U_{a_i} \subset X \setminus B. \tag{27.742}$$

Donc $(A + V) \cap B = \varnothing$. L'ensemble $A + V$ est alors un ouvert convexe disjoint de B. Par la première forme géométrique du théorème de Hahn-Banach 27.166 nous avons un hyperplan qui sépare $A + V$ de B au sens large : il existe $f \in X' \setminus \{0\}$ tel que $f(a) + f(v) \leqslant f(b)$ pour tout $a \in A$, $v \in V$ et $b \in B$.

Il suffit donc de trouver un $v \in V$ tel que $f(v) \neq 0$ pour avoir la séparation au sens strict. Cela est facile : V étant un voisinage de zéro et f étant linéaire, si elle était nulle sur V, elle serait nulle sur X.

(2) **Cas complexe**

L'espace X est complexe. Nous considérons E l'espace réel correspondant (proposition 7.224). Nous lui appliquons le cas réel : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et une application linéaire $f : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(a) < \alpha < f(b) \tag{27.743}$$

pour tout $a \in A$ et $b \in B$. Notez que $f \in E'$ et donc $\|f\| < \infty$ (bornée si et seulement si continue, proposition 10.85). Nous considérons maintenant l'application linéaire

$$\phi(x) = f(x) - if(ix) \tag{27.744}$$

décrite dans la proposition 7.225. C'est une application continue parce que $\|\phi\| = \|f\| < \infty$. De plus $\operatorname{Re}(\phi) = f$ et ϕ vérifie donc les inégalités 27.739.

□

CORooHTZVooFhgrSN

Corolaire 27.168 ([260])**.**
Soit un espace vectoriel réel localement convexe. Soit un sous-espace vectoriel F tel que $\bar{F} \neq E$. Alors il existe une application $f \in E' \setminus \{0\}$ telle que $f = 0$ sur F.

Démonstration. Soit $a \in E$ avec $a \notin \bar{F}$. Vu que le singleton $\{a\}$ est compact et que $\bar{F}$ est fermé, le théorème de Hahn-Banach 27.167 dit qu'il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \neq 0$ tel que $f < \alpha$ sur $\bar{F}$ et $f(a) > \alpha$.

Étant donné que F est vectoriel et que f est linéaire, avoir $f(x) < \alpha$ pour tout x dans F implique d'avoir $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$. En effet si $f(x) \neq 0$, il existe un λ tel que $f(\lambda x) > \alpha$ ($\mathbb{R}$ est archimédien, théorème 1.555). □

[88] Hyperplan strictement séparateur, définition 27.164.

27.14.4 Prolongement de fonctionnelles (dimension finie)

Nous allons prouver quelques lemmes qui permettent de prolonger des fonctionnelles d'un sous-espace vers un sous-espace contenant un nombre fini de dimensions en plus.

LEMooHWSJooGVmIPV

Lemme 27.169 ([767]).
Soient un espace vectoriel réel normé X ainsi qu'un sous-espace M. Soient $\ell \in \mathcal{L}(M, \mathbb{R})$ de norme finie, et $x_1 \in X \setminus M$. On pose $M_1 = \text{Span}\{M, x_1\}$. Alors il existe $\ell_1 \in \mathcal{L}(M_1, \mathbb{R})$ tel que

(1) $\ell_1(x) = \ell(x)$ pour tout $x \in M$,

(2) $\|\ell_1\|_{\mathcal{L}(M_1,\mathbb{R})} = \|\ell\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{R})}$

Démonstration. Si $\ell = 0$, alors c'est facile : on prend $\ell_1 = 0$. Nous commençons par supposer que $\|\ell\| = 1$; nous ferons le cas général ensuite.

(1) **Deux fonctions** Nous considérons les fonctions

$$\begin{aligned} f_+ \colon M &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \|x_1 + z\| - \ell(z) \end{aligned} \tag{27.745}$$

et

$$\begin{aligned} f_- \colon M &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto -\|x_1 + z\| - \ell(z). \end{aligned} \tag{27.746}$$

Pour tout $z_1, z_2 \in M$ nous avons

$$\begin{aligned} f_+(z_1) - f_-(z_2) &= \|x_1 + z_1\| - \ell(z_1) + \|x_1 + z_2\| + \ell(z_2) && \text{(27.747a)} \\ &= \|x_1 + z_1\| + \|x_1 + z_2\| - \ell(z_1 - z_2) && \text{(27.747b)} \\ &\geqslant \|(x_1 + z_1) - (x_1 + z_2)\| - \ell(z_1 - z_2) && \text{(27.747c)} \\ &= \|z_1 - z_2\| - \ell(z_1 - z_2) && \text{(27.747d)} \\ &\geqslant 0 && \text{(27.747e)} \end{aligned}$$

parce que $\|\ell\| = 1$. Nous en déduisons que $f_+(z_1) \geqslant f_-(z_2)$.

(2) **Un entre les deux**
En posant

$$c_- = \sup_{z \in M} \big(- \|x_1 + z\| - \ell(z) \big) \tag{27.748a}$$

$$c_+ = \inf_{z \in M} \big(\|x_1 + z\| - \ell(z) \big), \tag{27.748b}$$

nous avons $c_- \leqslant c_+$. Nous choisissons $c_1 \in [c_-, c_+]$.

(3) **La définition** Si $x \in M_1 = \text{Span}\, M, x_1$, alors il existe $y \in M$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda x_1 + y. \tag{27.749}$$

Nous posons alors

EQooVTFTooFyfXbK

$$\ell_1(x) = \lambda c_1 + \ell(y). \tag{27.750}$$

Voilà qui définit notre ℓ_1. Nous devons prouver qu'elle satisfait $\|\ell_1\| = 1$ et $\ell_1(x) = \ell(x)$ pour tout $x \in M$. La seconde condition est facile : si $x \in M$, alors $\lambda = 0$ dans (27.750) et nous avons bien $\ell_1(x) = \ell(x)$.

Pour la condition sur la norme, nous allons devoir un peu travailler.

(4) **$|\ell_1(x)| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in M_1$** Soit $x \in M_1$. Nous avons $x = \lambda x_1 + y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in M$. i

(4a) **Si $\lambda = 0$** Alors $x \in M$ et $|\ell_1(x)| = |\ell(x)| \leqslant \|x\|$ parce que $\|\ell\| = 1$.

(4b) **Si $\lambda \neq 0$** Soient $z_1, z_2 \in M$. Par définition de c_1, c_+ et c_- nous avons les inégalités

$$-\|x_1 + z_1\| - \ell(z_1) \leqslant c_- \leqslant c_1 \leqslant c_+ \leqslant \|x_1 + z_2\| - \ell(z_2). \tag{27.751}$$

Nous écrivons ces inégalités pour $z_1 = z_2 = y/\lambda$:

EQooGYXSooIffZoL

$$-\|x_1 + \frac{y}{\lambda}\| - \ell(y/\lambda) \leqslant c_1 \leqslant \|x_1 + \frac{y}{\lambda}\| - \ell(y/\lambda). \tag{27.752}$$

(4c) **Si $\lambda > 0$** Nous multiplions (27.752) par λ et nous profitons de la linéarité de ℓ :

$$-\|\lambda x_1 + y\| - \ell(y) \leqslant \lambda c_1 \leqslant \|\lambda x_1 + y\| + \ell(y), \tag{27.753}$$

donc

$$-\|\lambda x_1 + y\| \leqslant \underbrace{\lambda c_1 + \ell(y)}_{=\ell_1(\lambda x_1 + y)} \leqslant \|\lambda x_1 + y\| \tag{27.754}$$

EQooYRULooBebNTq

Nous en déduisons que

$$|\ell(\lambda x_1 + y)| \leqslant \|\lambda x_1 + y\|, \tag{27.755}$$

ce qu'il fallait.

(4d) **Si $\lambda < 0$** Le calcul est le même, mais il faut faire attention à bien reverser les inégalités au bon moment, et en manipulant bien les valeur absolues. Nous avons par exemple

$$\lambda\|x_1 + \frac{y}{\lambda}\| = -\big\||\lambda|x_1 + \frac{|\lambda| y}{\lambda}\big\| = -\| - \lambda x_1 - y\| = -\|\lambda x_1 + y\|. \tag{27.756}$$

En multipliant encore (27.752) par λ, nous trouvons

$$-\lambda\|x_1 + \frac{y}{\lambda}\| - \ell(y) \geqslant \lambda c_1 \geqslant \lambda\|x_1 + \frac{y}{\lambda}\| - \ell(y). \tag{27.757}$$

qui devient

$$\|\lambda x_1 + y\| \geqslant \lambda c_1 + \ell(y) \geqslant -\|\lambda x_1 + y\|, \tag{27.758}$$

qui revient au même que (27.754).

(5) **Première conclusion** Nous avons prouvé que $|\ell_1(x)| \leqslant \|x\|$ pour tout x dans M_1. Cela signifie que $\|\ell_1\|_{M_1'} \leqslant 1$. Pour prouver que $\|\ell_1\| = 1$ nous prouvons l'inégalité inverse :

$$\|\ell_1\|_{M_1'} = \sup_{x\in M_1} \frac{|\ell_1(x)|}{\|x\|} \geqslant \sup_{x\in M} \frac{|\ell_1(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in M} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \|\ell\|_M = 1. \tag{27.759}$$

Nous en déduisons que $\|\ell_1\| = 1$ et cela termine la preuve dans le cas où $\|\ell\| = 1$.

Maintenant, si $\|\ell\| = a \neq 1$, nous considérons la forme linéaire $f = \ell/a$ qui satisfait $\|f\| = 1$. Par la partie déjà prouvée, nous définissons une extension $f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ telle que $\|f_1\| = 1$.

Il suffit alors de poser $\ell_1 = af_1$, et nous avons le résultat. □

Ce lemme est également valable pour les complexes.

LEMooBYEGooRswAmh

Lemme 27.170 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel normé X sur $\mathbb{C}$. Soit $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$ de norme finie. Soient un sous-espace M de X ainsi qu'un élément $a \in X \setminus M$. Il existe $\ell_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(M, a), \mathbb{C}\big)$ tel que

(1) $\ell_1(x) = \ell(x)$ pour tout $x \in M$,

(2) $\|\ell_1\| = \|\ell\|$.

Démonstration. Nous considérons l'application ψ du lemme 27.159. En posant $f = \psi^{-1}(\ell)$, nous avons $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M, \mathbb{R})$ vérifiant $\|\ell\| = \|f\|$.

L'espace X peut être vu comme vectoriel sur $\mathbb{R}$. Le lemme 27.169 permet de prolonger f à

$$f_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(M, a), \mathbb{R}\big) \tag{27.760}$$

vérifiant $\|\ell\| = \|f\| = \|f_1\|$.

Vu que M est déjà un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, l'espace $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(M, a)$ qui nous intéresse est donné par

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(M, a) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(M, a, ia). \tag{27.761}$$

Nous pouvons donc utiliser une deuxième fois le lemme 27.169 avec le vecteur ia, et définir une extension

$$f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(M, a, ia), \mathbb{R}\big) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(M, a), \mathbb{R}\big) \tag{27.762}$$

vérifiant $\|\ell\| = \|f\| = \|f_1\| = \|f_2\|$.

En utilisant à nouveau le lemme 27.159, nous avons encore une extension

$$\psi(f_2) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(M, a), \mathbb{C}\big) \tag{27.763}$$

vérifiant $\|\ell\| = \|f\| = \|f_1\| = \|f_2\| = \|\psi(f_2)\|$.

Et voilà ! La fonctionnelle $\psi(f_2)$ est celle que nous voulions. □

27.14.5 Prolongement de fonctionnelles (dimension infinie)

Les lemmes 27.169 et 27.170 permettent de prolonger une forme linéaire une dimension réelle ou complexe à la fois. Rien ne nous permet de prolonger d'une infinité de dimensions d'un seul coup. Le théorème de Hahn-Banach va nous permettre de faire une infinité de dimension d'un coup à l'aide du lemme de Zorn.

THOooTZSSooBKfxXE

Théorème 27.171 (Hahn-Banach[767]).
Soit X, un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient un sous-espace vectoriel M, et une fonctionnelle linéaire $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(M,\mathbb{K})$ de norme finie. Il existe $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X,\mathbb{K})$ telle que

(1) $f(x) = \ell(x)$ *pour tout* $x \in M$,

(2) $\|f\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})} = \|\ell\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{K})}$.

Démonstration. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des paires (N,f) telles que

(1) N est un sous-espace de X contenant M,

(2) $f \in \mathcal{L}(N,\mathbb{K})$

(3) $\|f\| = \|\ell\|$

(4) $f(x) = \ell(x)$ pour tout $x \in M$.

Cet ensemble n'est pas vide parce que $(M,\ell) \in \mathcal{E}$. Nous mettons un ordre partiel sur $\mathcal{E}$ en posant $(N,f) \leqslant (N',f')$ si et seulement si $N \subset N'$ et $f'|_N = f$.

(1) **$\mathcal{E}$ est inductif** Nous commençons par prouver que $(\mathcal{E},\leqslant)$ est un ensemble inductif[89]. Soit une partie $\mathcal{F}$ totalement ordonnée dans $\mathcal{E}$.

(1a) **L'espace vectoriel**
Nous commençons par poser

$$Y = \bigcup_{(N,f)\in\mathcal{F}} N. \tag{27.764}$$

Et nous prouvons que c'est un espace vectoriel. Soient $x,y \in Y$. Supposons $x \in N_1$ et $y \in N_2$. Vu que $\mathcal{F}$ est totalement ordonné, nous avons $N_1 \subset N_2$ (ou le contraire). Donc $x+y \in N_2 \subset Y$. De même pour λx avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in Y$.

(1b) **La fonctionnelle** Nous devons trouver une fonctionnelle g sur Y. Soit $y \in Y$. Commençons par prouver que l'ensemble

$$\{f(y) \text{ tel que } (N,f) \in \mathcal{F}, y \in N\} \tag{27.765}$$

est un singleton. Soient $(N_1,f_1),(N_2,f_2) \in \mathcal{F}$ avec $y \in N_1 \cap N_2$. Nous supposons que $(N_1,f_1) \leqslant (N_2,f_2)$ (sinon c'est le contraire). Alors $f_2(y) = f_2|_{N_1}(y) = f_1(y)$. Nous pouvons donc définir

$$\begin{aligned} g\colon Y &\to \mathbb{K} \\ y &\mapsto f(y) \end{aligned} \tag{27.766}$$

où $(N,f) \in \mathcal{F}$ est tel que $y \in N$.

(1c) **g est linéaire** Soient $x,y \in Y$. Nous supposons que $x \in N_1$ et $y \in N_2$ avec $N_1 \subset N_2$. Donc $x,y,x+y \in N_2$ et nous avons $g(x) = f_2(x)$, $g(y) = f_2(y)$ et $g(x+y) = f_2(x+y)$. La linéarité de f_2 fait alors le boulot. Même raisonnement pour $g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

(1d) **g se restreint à ℓ** Soit $x \in M$. Nous avons $g(x) = f(x)$ pour un couple $(N,f) \in \mathcal{F}$ vérifiant $x \in N$. Vu que f prolonge ℓ nous avons $g(x) = f(x) = \ell(x)$.

(1e) **Norme de g** Nous devons voir que $\|g\|_{\mathcal{L}(Y,\mathbb{K})} = \|\ell\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{K})}$. L'inégalité dans un sens est facile pour qui comprend la norme opérateur[90]. Étant donné que $M \subset Y$ nous avons

$$\|g\|_{\mathcal{L}(Y,\mathbb{K})} = \sup_{y\in Y} \frac{|g(y)|}{\|y\|} \geqslant \sup_{y\in M} \frac{|g(y)|}{\|y\|} = \sup_{y\in M} \frac{|\ell(y)|}{\|y\|} = \|\ell\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{K})}. \tag{27.767}$$

L'inégalité dans l'autre sens n'est pas trop compliquée non plus. Prenons $x \in Y$ vérifiant $\|x\| = 1$. Nous considérons $(N,f) \in \mathcal{E}$ tel que $x \in N$. Alors

$$|g(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\| = \|\ell\|. \tag{27.768}$$

Donc $\|g\| \leqslant \|\ell\|$.

[89] Définition 1.36.

[90] Si ce n'est pas votre cas, vous ne devriez franchement pas être en train de lire ces lignes. Ce n'est que mon avis ; après tout, vous faites comme vous le sentez.

(1f) **Conclusion pour le moment** Nous avons prouvé que (Y, g) est un majorant de $\mathcal{F}$. Donc $(\mathcal{E}, \leqslant)$ est un ensemble inductif.

(2) **Lemme de Zorn** Vu que $(\mathcal{E}, \leqslant)$ est un ensemble inductif non vide, il possède un élément maximal par lemme de Zorn 1.37. Nous nommons (Y, f) un tel élément maximal.

(3) **Fin de la preuve** Nous devons prouver que $Y = X$, de telle sorte que $f \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{K})$ soit définie sur X. Supposons que $Y \neq X$. Dans ce cas nous considérons $x_1 \in X \setminus Y$. Suivant que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous utilisons le lemme 27.169 ou 27.170 pour construire la paire

$$\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(Y, x_1), f_1\big) \tag{27.769}$$

qui majore (Y, f). Contradiction avec la maximalité de (Y, f). Donc $Y = X$.

□

PROPooFJPXooWrjbuH

Proposition 27.172 ([1]).
Soit un espace de Banach E sur $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Soit $a \in E$. Nous avons

$$\|a\| = \max_{\substack{\varphi \in E' \\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(a)|. \tag{27.770}$$

Démonstration. Soit $\varphi \in E'$ tel que $\|\varphi\| = 1$. Si $|\varphi(a)| > \|a\|$ alors

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in E} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \geqslant \frac{|\varphi(a)|}{\|a\|} > 1 \tag{27.771}$$

Nous en déduisons que pour tout $\varphi \in B_{E'}(0, 1)$, $|\varphi(a)| \leqslant \|a\|$.

Maintenant nous construisons une application linéaire $\varphi \in E'$ telle que $|\varphi(a)| = \|a\|$ et $\|\varphi\| = 1$. Pour cela nous considérons le sous-espace $M = \mathrm{Span}\{a\}$ et l'application

$$\begin{aligned} f\colon M &\to \mathbb{K} \\ \lambda a &\mapsto \lambda \|a\|. \end{aligned} \tag{27.772}$$

Cette application vérifie $f(a) = \|a\|$ et $\|f\| = 1$ parce que

$$\|f\| = \sup_{x \in M} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\lambda \in \mathbb{K}} \frac{|f(\lambda a)|}{\|\lambda a\|} = \frac{|\lambda| \|a\|}{|\lambda| \|a\|} = 1. \tag{27.773}$$

Le théorème de Hahn-Banach 27.171 prolonge f en un élément $\varphi \in E'$ vérifiant $\|\varphi\| = \|f\| = 1$. Cette fonctionnelle vérifie donc aussi $\varphi(a) = f(a) = \|a\|$. □

CORooOBDHooJpiBrs

Corolaire 27.173 ([1]).
Voici trois façons différentes de dire la même chose, par ordre décroissant de frime.

(1) Le dual d'un espace vectoriel normé sépare les points.

(2) Les fonctionnelles bornées d'un espace vectoriel normé séparent les points.

(3) Si X est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et si $x, y \in X$, alors il existe une application $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Démonstration. Le théorème de la base incomplète 4.26 nous permet de considérer une base $\{e_i\}_{i \in I}$ de X telle que $e_0 = x$ et $e_1 = y$.

Évacuons quelque objections.

- Si x et y sont colinéaires, on complète seulement $\{x\}$ et ça ne changera rien pour la suite[91].
- En écrivant « e_0 » et « e_1 » ne prétends pas que I soit un ensemble de nombres. C'est juste une facilité d'écriture pour éviter de dire « il existe $\alpha, \beta \in I$ tels que $x = e_\alpha$ et $y = e_\beta$ ».

Nous considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} \ell\colon \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(e_0, e_1) &\to \mathbb{K} \\ \alpha e_1 + \beta e_2 &\mapsto \alpha. \end{aligned} \tag{27.774}$$

Cette application est parfaitement bornée. Le théorème de Hahn-Banach 27.171 nous permet de considérer une extension f sur X. Cette extension a la même norme et est donc bornée (donc continue par la proposition 10.85). C'est donc un élément du dual de X.

Comme $f = \ell$ sur $\mathrm{Span}(e_0, e_1)$, nous avons $f(x) \neq f(y)$. □

[91] Soyez quand même attentifs à ne pas vous laisser enfumer.

27.15 Théorème de Tietze

Définition 27.174.
*Si E et F sont des espaces normés, une application $f\colon E\to F$ est **presque surjective** si il existe $\alpha\in]0,1[$ et $C>0$ tels que pour tout $y\in\overline{B_F(0,1)}$, il existe $x\in\overline{B_E(0,C)}$ tel que $\|y-f(x)\|\leqslant\alpha$.*

LemBQLooRXhJzK

Lemme 27.175 ([128]).
Soient E et F des espaces de Banach et $f\in\mathcal{L}^0(E,F)$[92]. Si f est presque surjective, alors

ItemTSOooYkxvBui

(1) f est surjective

ItemTSOooYkxvBuii

(2) pour tout $y\in\overline{B_F(0,1)}$, il existe $x\in\overline{B_E(0,\frac{C}{1-\alpha})}$ tel que $y=f(x)$.

Le point (2) est une précision du point (1) : il dit quelle est la taille de la boule de E nécessaire à obtenir la boule unité dans F.

Démonstration. Soit $y\in\overline{B_F(0,1)}$. Nous allons construire $x\in B\big(0,\frac{C}{1-\alpha}\big)$ qui donne $f(x)=y$. Ce x sera la limite d'une série que nous allons construire par récurrence. Pour $n=1$ nous utilisons la presque surjectivité pour considérer $x_1\in\overline{B_E(0,C)}$ tel que $\|y-f(x_1)\|\leqslant\alpha$. Ensuite nous considérons la récurrence

$$x_n\in\overline{B_E(0,C)}\tag{27.775}$$

tel que

$$\Big\|y-\sum_{i=1}^{n}\alpha^{i-1}f(x_i)\Big\|\leqslant\alpha^n\tag{27.776}$$

Pour montrer que cela existe nous supposons que la série est déjà construite jusqu'à $n>1$:

$$\frac{1}{\alpha^n}\Big(y-\sum_{i=1}^{n}\alpha^{i-1}f(x_i)\Big)\in\overline{B_F(0,1)}\tag{27.777}$$

À partir de là, par presque surjectivité il existe un $x_{n+1}\in\overline{B_E(0,C)}$ tel que

$$\Big\|\frac{y-\sum_{i=1}^{n}\alpha^{i-1}f(x_i)}{\alpha^n}-f(x_{n+1})\Big\|\leqslant\alpha.\tag{27.778}$$

En multipliant par α^n, le terme $\alpha^nf(x_{n+1})$ s'intègre bien dans la somme :

$$\Big\|y-\sum_{i=1}^{n+1}\alpha^{i-1}f(x_i)\Big\|\leqslant\alpha^{n+1}.\tag{27.779}$$

Nous nous intéressons à une éventuelle limite à la somme des $\alpha^{n-1}x_n$. D'abord nous avons la majoration $\|\alpha^{n-1}x_n\|\leqslant\alpha^{n-1}C$, et vu que par la définition de la presque surjectivité $0<\alpha<1$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}x_n\tag{27.780}$$

converge absolument[93] parce que la suite des normes est une suite géométrique de raison α. Vu que E est de Banach, la convergence absolue implique la convergence simple (la suite des sommes partielles est de Cauchy et Banach est complet). Nous posons

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}x_n\in E,\tag{27.781}$$

et en termes de normes, ça vérifie

$$\|x\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\|x_n\|\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}=\frac{C}{1-\alpha}.\tag{27.782}$$

Donc c'est bon pour avoir $x\in B\big(0,\frac{C}{1-\alpha}\big)$. Nous devons encore vérifier que $y=f(x)$. Pour cela nous remarquons que

$$\|y-f\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha^{n-1}x_n\Big)\|\leqslant\alpha^N.\tag{27.783}$$

[92] L'ensemble des applications linéaires continues
[93] Définition 10.118.

Nous pouvons prendre la limite $N \to \infty$ et permuter f avec la limite (par continuité de f). Vu que $0 < \alpha < 1$ nous avons

$$\|y - f(x)\| = 0. \tag{27.784}$$

□
ThoFFQooGvcLzJ

Théorème 27.176 (Tietze[128, 559, 768])**.**
Soit un espace métrique (X, d) et un fermé $Y \subset X$. Soit $g_0 \in C^0(Y, \mathbb{R})$. Alors g_0 admet un prolongement continu sur X.

Démonstration. Soit l'opération de restriction

$$\begin{aligned} T\colon (C_b^0(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty) &\to (C_b^0(Y, \mathbb{R}), \|.\|_\infty) \\ f &\mapsto f|_Y. \end{aligned} \tag{27.785}$$

L'application T est évidemment linéaire. Elle est de plus bornée pour la norme opérateur usuelle donnée par la proposition 10.67 parce que $\|T(f)\| \leqslant \|f\| < \infty$. L'application T est alors continue par la proposition 10.85.

(1) **Presque surjection**

Soit $g \in C_b^0(Y, \mathbb{R})$ avec $\|g\|_\infty \leqslant 1$. Nous posons

$$Y^+ = \{x \in Y \text{ tel que } \frac{1}{3} \leqslant g(x) \leqslant 1\} \tag{27.786a}$$

$$Y^- = \{x \in Y \text{ tel que } -1 \leqslant g(x) \leqslant -\frac{1}{3}\}. \tag{27.786b}$$

Nous considérons alors

$$\begin{aligned} f\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{3}\frac{d(x, Y^-) - d(x, Y^+)}{d(x, Y^-) + d(x, Y^+)} \end{aligned} \tag{27.787}$$

Vu qu'en valeur absolue le dénominateur est plus grand que le numérateur nous avons $\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{3}$. Notons que

- Si $x \in Y^+$ alors $f(x) = \frac{1}{3}$ et $g(x) \in [\frac{1}{3}, 1]$;
- Si $x \in Y^-$ alors $f(x) = -\frac{1}{3}$ et $g(x) \in [-1, -\frac{1}{3}]$;
- Si x n'est ni dans Y^+ ni dans Y^- alors nous avons[94] $g(x) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ et donc $\big|f(x) - g(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big| \leqslant \frac{2}{3}$.

Dans les trois cas nous avons $\big|f(x) - g(x)\big| \in [0, \frac{2}{3}]$ pour tout $x \in X$. Cela prouve que

$$\|T(f) - g\|_{Y,\infty} \leqslant \frac{2}{3}. \tag{27.788}$$

En résumé nous avons pris g dans la boule $\overline{B(0,1)}$ de $\big(C_b^0(Y, \mathbb{R}), \|.\|_\infty\big)$ et nous avons construit une fonction f dans la boule $\overline{B(0, \frac{1}{3})}$ de $\big(C_b^0(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty\big)$ telle que $\|T(f) - g\|_\infty \leqslant \frac{2}{3}$. L'application T est donc une presque surjection avec $\alpha = \frac{2}{3}$ et $C = \frac{1}{3}$.

(2) **Extension avec $\|.\|_\infty \leqslant 1$** SPITEMooSTXMooIdqckk Nous montrons que si $g \in C^0(Y, \mathbb{R})$ vérifie $\|g\|_\infty \leqslant 1$, alors il existe une extension $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ vérifiant $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

La proposition 12.383 nous assure que les espaces $C_b^0(X, \mathbb{R})$ et $C_b^0(Y, \mathbb{R})$ sont de Banach (complets), et le lemme 27.175 nous dit alors que T est surjective et que pour tout $g \in \overline{B(0,1)}$, il existe

$$f \in \overline{B\left(0, \frac{1/3}{1 - \frac{2}{3}}\right)} = \overline{B(0,1)}. \tag{27.789}$$

telle que $g = T(f)$.

Pour le redire avec des mots plus simples, nous avons prouvé que si $g\colon Y \to \mathbb{R}$ vérifie $\|g\|_\infty \leqslant 1$, il existe une extension $f\colon X \to \mathbb{R}$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

[94] Nous rappelons que $\|g\| = 1$, donc $g(x)$ est forcément ente -1 et 1.

(3) **Extension avec $|.|<1$** SPITEMooZBGTooKbyuch Nous montrons que si $g \in C^0(Y,\mathbb{R})$ vérifie $|g|<1$, alors il existe une extension $f \in C^0(X,\mathbb{R})$ vérifiant $|f|<1$.

Soit $g \in B_{C_b^0(Y)}(0,1)$ et son prolongement $h \in \overline{B_{C_b^0(X)}(0,1)}$ du point (2). Si $|h|<1$ alors nous avons le résultat en posant $f=g$.

Si au contraire il existe $z \in X$ tel que $|h(z)|=1$, nous posons

$$Z = \{x \in X \text{ tel que } |h(x)|=1\}. \tag{27.790}$$ EQooIVXAooZQZxlq

Nous avons $Y \cap Z = \varnothing$ parce que nous avons $h=g$ sur Y et nous avons choisi $\|g\|_\infty<1$. Par ailleurs Y est fermé par hypothèse et Z est fermé parce que h est continue ; par conséquent $Y\cap Z$ est fermé, donc[95]

$$\bar{Y} \cap \bar{Z} = Y \cap Z = \varnothing. \tag{27.791}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} u\colon X &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \frac{d(x,Z)}{d(x,Y)+d(x,Z)} \end{aligned} \tag{27.792}$$

Le dénominateur n'est pas nul parce qu'il faudrait $d(x,Y)=d(x,Z)=0$, ce qui demanderait $x \in \bar{Y}\cap\bar{Z}$, ce qui n'est pas possible. Nous posons $f=uh$. Si $x\in Y$ alors $u(x)=1$, donc f est encore un prolongement de g. De plus f est encore continue, et donc encore un bon candidat. Enfin si x est hors de Y alors $d(x,Y)>0$ (strictement parce que Y est fermé) et donc $0<u(x)<1$, ce qui donne $|f(x)|<|h(x)|\leqslant 1$.

Et voilà.

(4) **Démonstration du théorème**

Nous sommes maintenant prêts à prouver le théorème. Soit $g_0 \in C^0(Y,\mathbb{R})$. Nous allons nous ramener au cas de la boule unité ouverte en utilisant un homéomorphisme[96] $\phi\colon \mathbb{R} \to]-1,1[$.

L'application $g=\phi\circ g_0$ vérifie $|g(y)|<1$ pour tout $y\in Y$. Par le point (3), il existe une extension $f\in C^0(X,\mathbb{R})$ vérifiant $|f(x)|<1$ pour tout $x\in X$. Attention : cette application f prolonge g et non g_0.

Nous posons finalement $f_0=\phi^{-1}\circ f$. Cela est encore une application dans $C^0(X,\mathbb{R})$, mais cette fois elle prolonge g_0. En effet si $y\in Y$, en tenant compte de $f(y)=g(y)$, nous avons

$$f_0(y)=(\phi^{-1}\circ f)(y)=\phi^{-1}\big(f(y)\big)=\phi^{-1}\big(g(y)\big)=\phi^{-1}\big((\phi\circ g_0)(y)\big)=g_0(y). \tag{27.793}$$

□

27.15.1 Pas de bijections bicontinues entre dimensions différentes

THOooLGJMooIYzOBD

Théorème 27.177 ([769]).
Soit une application continue et injective $f\colon \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}^n$. Alors

$$f(0) \in \operatorname{Int}\Big(f\big(\overline{B(0,1)}\big)\Big). \tag{27.794}$$

Démonstration. Soit une application continue et injective $f_0\colon \overline{B(0,1)}\to\mathbb{R}^n$. Soit $\epsilon<0$. Si nous supposons que $f_0(0)$ n'est pas à l'intérieur de $f_0\big(\overline{B(0,1)}\big)$, alors il existe un $c\in\mathbb{R}^n$ hors de $f_0\big(\overline{B(0,1)}\big)$ et tel que $\|c-f_0(0)\|<\epsilon$.

Nous posons maintenant $f(x)=f_0(x)-c$. Nous avons

$$\begin{cases} \|f(0)\|<\epsilon & \text{(27.795a)}\\ 0\notin f\big(\overline{B(0,1)}\big). & \text{(27.795b)} \end{cases}$$

Vu que f est continue et que $\overline{B(0,1)}$ est compact, la partie $f\big(\overline{B(0,1)}\big)$ est compacte (théorème 7.275). L'application restreinte $f\colon \overline{(B(0,1))}\to f_0\big(\overline{B(0,1)}\big)$ est une bijection continue entre compacts. Son inverse est alors également continue (lemme 7.278).

[95] Si vous avez l'intention de dire que $\overline{Y\cap Z}=\bar{Y}\cap\bar{Z}=Y\cap Z=\varnothing$, allez d'abord voir l'exemple 7.177. Ici c'est correct parce que Y et Z sont fermés.

[96] Existence dans le lemme 18.41.

Mais comme $f\big(\overline{B(0,1)}\big)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, le théorème de Tietze (27.176) prolonge son inverse en une application continue

$$G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{27.796}$$

Nous avons $G\big(f(0)\big) = 0$. Nous choisissons ϵ assez petit pour que $\|G(y)\| < 0.1$ dès que $\|y - f(0)\| \leqslant 2\epsilon$. Comme $\|f(0)\| < \epsilon$, nous avons aussi

$$\|y\| \leqslant \epsilon \Rightarrow \|y - f(0)\| \leqslant 2\epsilon \Rightarrow \|G(y)\| < 0.1. \tag{27.797}$$

Autrement dit,

$$G\Big(\overline{B(0,\epsilon)}\Big) \subset B(0, \frac{1}{10}). \tag{27.798}$$

Nous posons

$$\Sigma_1 = \{y \in f\big(\overline{B(0,1)}\big) \text{ tel que } \|y\| \geqslant \epsilon\}, \tag{27.799}$$

ainsi que

$$\Sigma_2 = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|y\| = \epsilon\}, \tag{27.800}$$

et $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

(1) La partie Σ_2 est compacte en tant que fermée et bornée[97]. La partie Σ_1 est compacte en tant que intersection entre le compact $f\big(\overline{B(0,1)}\big)$ et le fermé $\|y\| \geqslant \epsilon$ (corolaire 7.122). Finalement la partie Σ est également compacte[98]

(2) La partie Σ ne contient pas $f(0)$ parce que $\|f(0) < \epsilon\|$ tandis que les éléments $y \in \Sigma$ vérifient $\|y\| \geqslant \epsilon$.

(3) La partie Σ_1 ne contient pas 0. En effet, vu que G étend f^{-1}, si $x \in G(\Sigma_1)$, nous avons $f(x) \in \Sigma_1$ et en particulier $\|f(x)\| \geqslant \epsilon$. Vu que $\|f(0)\| < \epsilon$, nous avons $x \neq 0$.

(4) La partie Σ_1 est compacte, G est continue dessus et ne prend pas la valeur 0. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$G(\Sigma_1) > \delta. \tag{27.801}$$

Nous considérons un tel δ qui vérifie de plus $\delta < 1/10$.

Nous introduisons l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon f\big(\overline{B(0,1)}\big) &\to \Sigma \\ y &\mapsto \max\big(\epsilon/\|y\|, 1\big)y. \end{aligned} \tag{27.802}$$

Prouvons que ϕ prend effectivement ses valeurs dans Σ. Il y a deux possibilités : soit $\|y\| < \epsilon$, soit $\|y\| \geqslant \epsilon$. Si $\|y\| < \epsilon$, alors $\phi(y) = \frac{\epsilon}{\|y\|}y$, ce qui donne $\|\phi(y)\| = \epsilon$, et donc $\phi(y) \in \Sigma_2$. Si $\|y\| \geqslant \epsilon$, alors le max est 1 et nous avons $\phi(y) = y$. Dans ce cas, nous avons d'une part $\|\phi(y)\| = \|y\| \geqslant \epsilon$ et d'autre part $\phi(y) = y \in f\big(\overline{B(0,1)}\big)$; donc $\phi(y) \in \Sigma_1$.

Le théorème de Stone-Weierstrass 12.447 nous permet de considérer un polynôme (à n variables) $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\|P - G\|_\Sigma < \delta. \tag{27.803}$$

Un tel polynôme ne s'annule pas sur Σ_1 parce que $\|G\|_{\Sigma_1} > \delta$.

Le polynôme P est de classe C^∞ (proposition 10.301). Vu que Σ_2 est de mesure nulle, la proposition 14.280 dit que $P(\Sigma_2)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$.

À l'aide de la proposition 14.281, nous choisissons $s \in \mathbb{R}^n$ tel que $P_2(x) = P(x + s)$ ne s'annule ni sur Σ_1 ni sur Σ_2. Vu que P est uniformément continue sur Σ (théorème de Heine 12.80), il existe M (majorant de la norme de la dérivée sur Σ) tel que

$$\|P(x) - P_2(x)\| = \|P(x + s) - P(x)\|_\Sigma \leqslant sM. \tag{27.804}$$

En choisissant $s < \epsilon'/M$, nous avons

$$\|P - P_2\|_\Sigma < \epsilon'. \tag{27.805}$$

En prenant ϵ' assez petit[99], nous avons encore

$$\|P_2 - G\|_\Sigma < \delta. \tag{27.806}$$

EQooIVQLooVjVzsA

[97] Borel-Lebesgue 9.24.
[98] Union de compacts, lemme 7.124.
[99] Plus petit que la différence entre δ et $\|P - G\|_\Sigma$.

Nous introduisons maintenant

$$\begin{aligned}\tilde{G}\colon f\big(\overline{B(0,1)}\big) &\to \mathbb{R}^n\\ \tilde{G} &= P_2\circ\phi.\end{aligned}\tag{27.807}$$

Nous allons prouver que $\|G(y)-\tilde{G}(y)\|\leqslant 0.3$ pour tout $y\in f\big(\overline{B(0,1)}\big)$.

(1) **Si $\|y\|>\epsilon$**

Si $\|y\|>\epsilon$ et $y\in b\big(\overline{B(0,1)}\big)$, alors

$$\tilde{G}(y)=(P_2\circ\phi)(y)=P\big(\min(\epsilon/\|y\|,1)y\big).\tag{27.808}$$

Vu que $\|y\|>\epsilon$, le max est 1 et nous avons $\tilde{G}(y)=P_2(y)$, et donc, en utilisant (27.806),

$$\|G(y)-\tilde{G}(y)\|=\|G(y)-P_2(y)\|<\delta.\tag{27.809}$$

Quitte à choisir δ plus petit, nous pouvons supposer $\delta<0.3$.

(2) **Si $\|y\|\leqslant\epsilon$** Nous considérons maintenant le cas $\|y\|\leqslant\epsilon$ et $y\in b\big(\overline{B(0,1)}\big)$.

Montrons que $\|G(y)-\tilde{G}(y)\|<\delta$ pour tout $y\in\big(\overline{B(0,1)}\big)$ tel que $\|y\|>\epsilon$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|G(y)-\tilde{G}(y)\|&=\|G(y)-P_2\big(\phi(y)\big)\|&\text{(27.810a)}\\ &\leqslant\|G(y)-G\big(\phi(y)\big)\|+\|G\big(\phi(y)\big)-P_2\big(\phi(y)\big)\|&\text{(27.810b)}\\ &\leqslant\|G(y)\|+\|G\big(\phi(y)\big)\|+\|(G-P_2)\big(\phi(y)\big)\|.&\text{(27.810c)}\end{aligned}$$

Vu que $\|y\|\leqslant\epsilon$, nous avons $\phi(y)=\frac{\epsilon}{\|y\|}y$, et donc $\|\phi(y)\|=\epsilon$. De ce fait, $\phi(y)\in\Sigma_2$ et nous avons $\|(G-P_2)\big(\phi(y)\big)\|\leqslant\delta$.

Si nous choisissons $\delta<0.1$ nous avons donc encore

$$\|G(y)-\tilde{G}(y)\|\leqslant 2\times 0.1+\delta\leqslant 0.3.\tag{27.811}$$

Bref, pour tout $y\in f\big(\overline{B(0,1)}\big)$ nous avons

$$\|G(y)-\tilde{G}(y)\|\leqslant 0.3.\tag{27.812}$$ EQooMIVFooPwKeSB

Ça va être le moment de demander au théorème de Brouwer d'intervenir.

(1) **Définition de g**

Vu que $\tilde{G}$ est définie sur $f\big(\overline{B(0,1)}\big)$, nous pouvons considérer l'application

$$\begin{aligned}g\colon\overline{B(0,1)}&\to\mathbb{R}^n\\ x&\mapsto x-\tilde{g}\big(f(x)\big).\end{aligned}\tag{27.813}$$

Notons pour $x\in\overline{B(0,1)}$, nous avons $x=G\big(f(x)\big)$, et donc nous pouvons aussi écrire

$$g(x)=(G\circ f)(x)-(\tilde{G}\circ f)(x).\tag{27.814}$$ EQooJWNRooKIfex

(2) $g(x)\in\overline{B(0,1)}$

Nous avons déjà vu en (27.812) que $\|G-\tilde{G}\|_{f\left(\overline{B(0,1)}\right)}<0.3<1$. L'équation (27.814) dit alors que $g(x)\in\overline{B(0,1)}$.

(3) **Brouwer** Nous pouvons appliquer le théorème de Brouwer (20.32) à la fonction g. Il existe $x_0\in\overline{B(0,1))}$ tel que $g(x_0)=x_0$, c'est-à-dire $x_0-\tilde{G}\big(f(x_0)\big)=x_0$. Nous en déduisons que

$$\tilde{G}\big(f(x_0)\big)=0.\tag{27.815}$$

(4) **La contradiction** Rappel : $\tilde{G}=P_2\circ\phi$. Si $y\in\overline{B(0,1)}$, alors $\phi(y)\in\Sigma$, et nous avons tout fait pour que P_2 ne s'annule pas sur Σ.

Et voilà la contradiction.

□

Remarque 27.178.
Il n'existe pas de bijection bicontinue d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ vers un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si $m\neq n$. Il n'y a donc pas de notion de difféomorphismes entre ouverts de dimensions différentes.

Je crois que c'est une conséquence facile de 27.177. Écrivez-moi si vous pouvez rédiger une preuve.

27.16 Dualité, réflexivité et théorème de représentation de Riesz

Dans la suite E' est le dual topologique, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires et continues sur E. Nous notons également V'' le dual de $(V', \|.\|)$. Certes en tant qu'ensembles, $(V', *)$ et $(V', \|.\|)$ sont identiques, mais comme ils n'ont pas la même topologie, les duaux ne sont pas les mêmes.

Bref, V'' est l'ensemble des applications linéaires continues $(V', \|.\|) \to \mathbb{C}$. Et lorsque nous disons $\mathbb{C}$ ici, ça peut aussi bien être $\mathbb{R}$ selon le contexte.

De plus nous considérons que V'' la norme opérateur qui dérive de la norme de V', laquelle dérive de la norme vectorielle sur V.

PROPooMAQSooCGFBBM

Proposition-Définition 27.179 (Espace réflexif)**.**
Soit un espace vectoriel normé V sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} J\colon V &\to V'' \\ J(x)\varphi &= \varphi(x). \end{aligned} \tag{27.816}$$

EQooRQIMooZdVkDQ

ITEMooNVVSooNFXgnE

(1) L'application J est bien définie : $J(x)\colon V' \to \mathbb{C}$ est continue.

ITEMooKURHooZZWpbu

(2) L'application J est continue.

ITEMooTFYVooKhMOjp

(3) Elle est injective.

*Lorsque J est bijective, l'espace V est dit **réflexif**.*

Démonstration. Point par point.

(1) **(1)** Nous commençons par montrer que $J(x)\colon (V', \|.\|) \to \mathbb{C}$ est continue pour chaque $x \in V$. Soit une suite $\varphi_k \xrightarrow{\|.\|} 0$. Nous avons :

$$J(x)\varphi_k = \varphi_k(x) \leqslant \|\varphi_k\|\|x\| \to 0 \tag{27.817}$$

où vous aurez noté l'utilisation du lemme 10.81. Cela prouve que $J(x)$ est continue et donc que J est bien à valeurs dans V''.

(2) **(2)**

Soit une suite $x_k \xrightarrow{V} 0$, et étudions $\|J(x_k)\|$ pour la norme dans V''. Nous posons $x'_k = x_k/\|x_k\|$ et nous calculons (encore une fois, nous écrivons « $\mathbb{C}$ », mais ça pourrait être $\mathbb{R}$)

$$\|J(x_k)\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |J(x_k)\varphi|_{\mathbb{C}} = \sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x_k)| = \|x_k\| \sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x'_k)| \leqslant \|x_k\| \to 0. \tag{27.818}$$

La dernière inégalité pourrait être sans doute une égalité[100], mais nous n'en avons pas besoin ici.

(3) **(3)** Soient $x \neq y$ dans V. Le corolaire 27.173 nous permet de considérer un élément $\varphi \in V'$ tel que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Nous avons alors

$$J(x)\varphi \neq J(y)\varphi, \tag{27.819}$$

et donc $J(x) \neq J(y)$. Cela prouve que J est injective.

□

PROPooQGHTooLMFCKt

Proposition 27.180 ([1, 238])**.**
Soit un espace de Banach E.

(1) L'application $J\colon E \to E''$ est une isométrie.

ITEMooFTFBooMjahZi

(2) Si E est réflexif,

$$J\big(\overline{B_E(0,1)}\big) = \overline{B_{E''}(0,1)}. \tag{27.820}$$

Démonstration. Point par point.

(1) **Isométrie** Soit $x \in E$. En utilisant la définition de la norme opérateur et la proposition 27.172 nous avons :

$$\|J(x)\|_{E''} = \sup_{\substack{\varphi\in E'\\ \|\varphi\|=1}} |J(x)\varphi| = \sup_{\substack{\varphi\in E'\\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(x)| = \|x\|. \tag{27.821}$$

Donc J est une isométrie.

[100] Écrivez-moi si vous en êtes certain.

(2) **Pour les boules** Deux inclusions

(2a) $J\big(\overline{B_E}(0,1)\big) \subset \overline{B_{E''}(0,1)}$ Soit $x \in \overline{B_E(0,1)}$. Nous savons déjà que J est isométrique. Donc $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E \leqslant 1$.

(2b) $J\big(\overline{B_{E''}}(0,1)\big) \subset \overline{B_E(0,1)}$ Soit $\xi \in \overline{B_{E''}(0,1)}$. Par hypothèse E est réflexif ; l'application $J\colon E \to E''$ est donc bijective et nous pouvons considérer $x = J^{-1}(\xi)$. En utilisant encore le fait que J est isométrique,

$$\|x\|_E = \|J(x)\|_{E''} = \|\xi\|_{E''} \leqslant 1. \tag{27.822}$$

Donc $J^{-1}(\xi) = x \in \overline{B_E(0,1)}$.

□

PROPooHOKQooDWpTqM

Proposition 27.181 ([221]).
Si E est un espace de Banach, alors $J(E)$ est fermé dans E''.

Démonstration. Soit une suite convergente $\xi_n \xrightarrow{E''} \xi$ dans $J(E)$. Vu que J est injective et surjective sur $J(E)$, pour chaque n il existe un unique x_n tel que $\xi_n = J(x_n)$.

Vu que (ξ_n) est une suite convergente dans l'espace normé E'', c'est une suite de Cauchy par la proposition 7.323. Étant donné que J est isométrique, la suite (x_n) est également de Cauchy. Et donc (x_n) converge dans E parce que E est complet (il est de Banach par hypothèse). Il existe donc $x \in E$ tel que $x_n \xrightarrow{E} x$.

Étant donné que J est continue, elle commute avec la limite :

$$\xi = \lim_n \xi_n = \lim_n J(x_n) = J(\lim_n x_n) = J(x). \tag{27.823}$$

Donc $\xi = J(x) \in J(E)$. Cela prouve que $J(E)$ est fermé par la proposition 7.80. □

PROPooJJINooXeUcQP

Proposition 27.182 ([1]).
L'application

$$J\colon \big(E, \sigma(E,E')\big) \to \big(E'', \sigma(E'',E')\big) \tag{27.824}$$

est continue.

Démonstration. Nous utilisons la proposition 7.61 en se souvenant que la topologie $\sigma(E'',E')$ est la topologie initiale des évaluations

$$\begin{aligned} ev_\varphi\colon E'' &\to \mathbb{K} \\ \xi &\mapsto \xi(\varphi). \end{aligned} \tag{27.825}$$

Autrement dit, toutes ces applications sont $\sigma(E'',E')$-continues. La proposition 7.61 dit que J sera continue si toutes les applications $ev_\varphi \circ J\colon \big(E,\sigma(E,E')\big) \to \mathbb{K}$ sont continues. Nous avons

$$(ev_\varphi \circ J)(x) = J(x)(\varphi) = \varphi(x). \tag{27.826}$$

Autrement dit, $ev_\varphi \circ J = \varphi$. Et φ est $\sigma(E,E')$-continue. Donc on est bon. □

LEMooWEMFooEHIaxY

Lemme 27.183 ([1]).
Soient des espaces de Banach V et W. Si $\alpha\colon V \to W$ est une bijection linéaire et isométrique, alors l'application définie par

$$\begin{aligned} &\beta\colon V' \to W' \\ &\beta(\varphi)y = \varphi\big(\alpha^{-1}(y)\big) \end{aligned} \tag{27.827}$$

EQooTSVHooEQGuNw

pour tout $\varphi \in V'$ et $y \in W$ est une bijection linéaire isométrique.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) α^{-1} **est continue** Le théorème d'isomorphisme de Banach 27.1 implique que α^{-1} est continue parce que α est bijective, continue et linéaire entre deux espaces de Banach.

(2) β **prend ses valeurs dans** W' Nous devons prouver que, si $\varphi \in V'$, alors $\beta(\varphi)$ est bien un élément de W'. Autrement dit, nous devons prouver que $\beta(\varphi)\colon W \to \mathbb{C}$ est continue. Considérons une suite $y_k \xrightarrow{W} 0$. Alors, vu que α est continue, nous avons aussi $\alpha^{-1}(y_k) \xrightarrow{V} 0$, et donc

$$\varphi\big(\alpha^{-1}(y_k)\big) \xrightarrow{\mathbb{C}} 0 \tag{27.828}$$

parce que φ est continue. Donc $\beta(\varphi)$ est continue.

(3) β **est linéaire** Parce que α l'est.

(4) β **est isométrique** Nous devons prouver que la norme de l'application linéaire $\beta(\varphi)\colon W \to \mathbb{C}$ est la même que celle de φ. Vu que $\alpha\colon V \to W$ est une bijection isométrique, nous avons

$$\{\alpha^{-1}(y) \text{ tel que } \|y\| = 1, y \in W\} = \{x \in V \text{ tel que } \|x\| = 1\}. \tag{27.829}$$

Donc nous pouvons faire le calcul suivant :

$$\|\beta(\varphi)\| = \sup_{\substack{y\in W\\ \|y\|=1}} \|\beta(\varphi)y\| = \sup_{\substack{y\in W\\ \|y\|=1}} |\varphi\big(\alpha^{-1}(y)\big)| = \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} |\varphi(x)| = \|\varphi\|. \tag{27.830}$$

□

La proposition suivante dit que la notion d'être réflexif passe aux isomorphismes d'espaces vectoriels normés.

PROPooVRQKooLdmajh

Proposition 27.184 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés V et W ainsi qu'une bijection linéaire isométrique $\alpha\colon V \to W$. L'espace W est réflexif[101] *si et seulement si V l'est.*

Démonstration. Nous allons prouver que si W est réflexif, alors V est réflexif. Pour l'implication inverse, il suffira de noter que $\alpha^{-1}\colon W \to V$ est une bijection linéaire isométrique.

En plusieurs points.

(1) **Quelques applications** Nous notons J_V l'application de la proposition 27.179 :

$$\begin{aligned} J_V &\colon V \to V'' \\ J_V(v)\varphi &= \varphi(v), \end{aligned} \tag{27.831}$$

et J_W l'application correspondante pour W. Notre hypothèse est que J_W est bijective.

Nous posons

$$\begin{aligned} \beta &\colon V' \to W' \\ \beta(\varphi)w &= \varphi\big(\alpha^{-1}(w)\big), \end{aligned} \tag{27.832}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma &\colon V'' \to W'' \\ \gamma(\sigma)\varphi &= \sigma\big(\beta^{-1}(\varphi)\big). \end{aligned} \tag{27.833}$$

L'application β est une bijection linéaire isométrique par le lemme 27.183 ; l'application γ l'est aussi, par le même lemme appliqué à $\beta\colon V' \to W'$.

(2) **Le S** Nous posons

$$\begin{aligned} S &\colon V \to V'' \\ S(v)\varphi &= J_W\big(\alpha(v)\big)\beta(\varphi). \end{aligned} \tag{27.834}$$

Nous allons montrer que $S = J_V$ et que S est bijectif.

(3) $S = J_V$ Cela est un calcul :

$$\begin{aligned} J_W\big(\alpha(v)\big)\beta(\varphi) &= \beta(\varphi)\big(\alpha(v)\big) && \text{(27.835a)}\\ &= \varphi\Big(\alpha^{-1}\big(\alpha(v)\big)\Big) && \text{(27.835b)}\\ &= \varphi(v) && \text{(27.835c)}\\ &= J_V(v)\varphi. && \text{(27.835d)} \end{aligned}$$

(4) S **est injective** L'application J_V est toujours injective par la proposition 27.179.

(5) S **est surjective** Soi $\sigma \in V''$. Nous devons prouver l'existence de $v \in V$ tel que $S(v) = \sigma$. Vu que $J_W\colon W \to W''$ est surjective et que $\gamma(\sigma) \in W''$, il existe $w \in W$ tel que

$$J_W(w) = \gamma(\sigma). \tag{27.836}$$

[101] Définition 27.179.

Un simple calcul montre alors que $S\big(\alpha^{-1}(w)\big) = \sigma$:

$$\begin{aligned} S\big(\alpha^{-1}(w)\big)\varphi &= J_W(w)\beta(\varphi) && (27.837a)\\ &= \gamma(\sigma)\big(\beta(\varphi)\big) && (27.837b)\\ &= \sigma\Big(\beta^{-1}\big(\beta(\varphi)\big)\Big) && (27.837c)\\ &= \sigma(\varphi). && (27.837d) \end{aligned}$$

Nous avons donc bien que $S(v) = \sigma$ en posant $v = \alpha^{-1}(w)$.

(6) **Conclusion** L'application $S = J_V$ est surjective ; l'espace V est donc réflexif par la proposition 27.179.

□

Voici déjà un bel énoncé. Pour des espaces mesurés $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ plus généraux, voir l'arme totale en le théorème 27.187.

PropOAVooYZSodR

Proposition 27.185 ([433], thème 21)**.**
Soit $1 < p < 2$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'application

$$\begin{aligned} \Phi\colon L^q\big([0,1]\big) &\to L^p\big([0,1]\big)'\\ \Phi_g(f) &= \int_{[0,1]} f\bar{g}. \end{aligned} \tag{27.838}$$

est une isométrie linéaire surjective.

Démonstration. Pour la simplicité des notations nous allons noter L^2 pour $L^2\big([0,1]\big)$, et pareillement pour L^p.

(1) **Φ_g est un élément de $(L^p)'$**

Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ nous devons prouver que $\Phi_g(f)$ est bien définie. Pour cela nous utilisons l'inégalité de Hölder[102] qui dit que $fg \in L^1$; par conséquent la fonction $f\bar{g}$ est également dans L^1 et nous avons

$$|\Phi_g(f)| \leqslant \int_{[0,1]} |f\bar{g}| = \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{27.839}$$

En ce qui concerne la norme de l'application Φ_g nous avons tout de suite

$$\|\Phi_g\| = \sup_{\|f\|_p=1} \big|\Phi_g(f)\big| \leqslant \|g\|_q. \tag{27.840}$$

Cela signifie que l'application Φ_g est bornée et donc continue par la proposition 10.85. Nous avons donc bien $\Phi_g \in (L^p)'$.

(2) **Isométrie**

Afin de prouver que $\|\Phi_g\| = \|g\|_q$ nous allons trouver une fonction $f \in L^p$ telle que $\frac{|\Phi_g(f)|}{\|f\|_p} = \|g\|_q$. De cette façon nous aurons prouvé que $|\Phi_g| \geqslant \|g\|_q$, ce qui conclurait que $|\Phi_g| = \|g\|_q$.

Nous posons $f = g|g|^{q-2}$, de telle sorte que $|f| = |g|^{q-1}$ et

$$\|f\|_p = \left(\int |g|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \left(\int |g|^q\right)^{1/p} = \|g\|_q^{q/p} \tag{27.841}$$

où nous avons utilisé le fait que $p(q-1) = q$. La fonction f est donc bien dans L^p. D'autre part,

$$\Phi_g(f) = \int f\bar{g} = \int g|g|^{q-2}\bar{g} = \int |g|^q = \|g\|_q^q. \tag{27.842}$$

Donc

$$\frac{|\Phi_g(f)|}{\|f\|_p} = \|g\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|g\|_q \tag{27.843}$$

où nous avons encore utilisé le fait que $q - \frac{q}{p} = \frac{q(p-1)}{p} = 1$.

[102] Proposition 27.39.

(3) **Surjectif**

Soit $\ell \in (L^p)'$; c'est une application $\ell\colon L^p \to \mathbb{C}$ dont nous pouvons prendre la restriction à L^2 parce que la proposition 27.53 nous indique que $L^2 \subset L^p$. Nous nommons $\phi\colon L^2 \to \mathbb{C}$ cette restriction.

(3a) $\phi \in (L^2)'$

Nous devons montrer que ϕ est continue pour la norme sur L^2. Pour cela nous montrons que sa norme opérateur (subordonnée à la norme de L^2 et non de L^p) est finie :

$$\sup_{f\in L^2} \frac{|\phi(f)|}{\|f\|_2} \leqslant \sup_{f\in L^2} \frac{|\ell(f)|}{\|f\|_p} < \infty. \tag{27.844}$$

Nous avons utilisé l'inégalité de norme $\|f\|_p \leqslant \|f\|_2$ de la proposition 27.53(2).

(3b) **Utilisation du dual de L^2**

Étant donné que L^2 est un espace de Hilbert (lemme 27.105) et que $\phi \in (L^2)'$, le théorème 25.18 nous donne un élément $g \in L^2$ tel que $\phi(f) = \Phi_g(f)$ pour tout $f \in L^2$.

Nous devons prouver que $g \in L^q$ et que pour tout $f \in L^p$ nous avons $\ell(f) = \Phi_g(f)$.

(3c) $g \in L^q$

Nous posons $f_n = g|g|^{q-2}\mathbb{1}_{|g|<n}$. Nous avons d'une part

$$\Phi_g(f_n) = \int_0^1 f_n \bar{g} = \int_{|g|<n} |g|^q. \tag{27.845}$$

EqEBUooOnlRHj

Et d'autre part comme $f_n \in L^2$ nous avons aussi $\phi(f_n) = \Phi_g(f_n)$ et donc

$$0 \leqslant \Phi(f_n) = \phi(f_n) \leqslant \|\ell\|\|f_n\|_p \tag{27.846a}$$

$$= \|\ell\| \left(\int_{|g|<n} |g|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \tag{27.846b}$$

$$= \|\ell\| \left(\int_{|g|<n} |g|^q \right)^{1/p}. \tag{27.846c}$$

où nous avons à nouveau tenu compte du fait que $p(q-1) = q$. En combinant avec (27.845) nous trouvons

$$\int_{|g|<n} |g|^q \leqslant \|\ell\| \left(\int_{|g|<n} |g|^q \right)^{1/p}, \tag{27.847}$$

et donc

$$\left(\int_{|g|<n} |g|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant \|\ell\|, \tag{27.848}$$

c'est-à-dire

$$\Big(\int_{|g|<n} |g|^q \Big)^{1/q} \leqslant \|\ell\|. \tag{27.849}$$

Si ce n'était pas encore fait nous nous fixons un représentant de la classe g (qui est dans L^2), et nous nommons également g ce représentant. Nous posons alors

$$g_n = |g|^q \mathbb{1}_{|g|<n} \tag{27.850}$$

qui est une suite croissante de fonctions convergeant ponctuellement vers $|g|^q$. Le théorème de Beppo-Levi 14.178 nous permet alors d'écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|g|<n} |g|^q = \int_0^1 |g|^q. \tag{27.851}$$

Mais comme pour chaque n nous avons $\int_{|g|<n} |g|^q \leqslant \|\ell\|^q$, nous conservons l'inégalité à la limite et

$$\int_0^1 |g|^q \leqslant \|\ell\|^q. \tag{27.852}$$

Cela prouve que $g \in L^p$.

(3d) $\ell(f) = \Phi_g(f)$

Soit $f \in L^p$. En vertu de la densité de L^2 dans L^p prouvée dans le corolaire 27.66 nous pouvons considérer une suite (f_n) dans L^2 telle que $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Pour tout n nous avons

$$\ell(f_n) = \Phi_g(f_n). \tag{27.853}$$

Mais ℓ et Φ_g étant continues sur L^p nous pouvons prendre la limite et obtenir

$$\ell(f) = \Phi_g(f). \tag{27.854}$$

□

LemHNPEooHtMOGY

Lemme 27.186 ([13]).
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Soit $g \in L^1(\Omega)$ et S fermé dans $\mathbb{C}$. Si pour tout $E \in \mathcal{A}$ nous avons

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E g d\mu \in S, \tag{27.855}$$

alors $g(x) \in S$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Démonstration. Soit $D = \overline{B(a,r)}$ un disque fermé dans le complémentaire de S (ce dernier étant fermé, le complémentaire est ouvert). Posons $E = g^{-1}(D)$. Prouvons que $\mu(E) = 0$ parce que cela prouverait que $g(x) \in D$ pour seulement un ensemble de mesure nulle. Mais S^c pouvant être écrit comme une union dénombrable de disques fermés[103], nous aurions $g(x) \in S^c$ presque nulle part.

Vu que $\frac{1}{\mu(E)} \int_E a = a$ nous avons

$$\Big|\frac{1}{\mu(E)} g d\mu - a\Big| = \Big|\frac{1}{\mu(E)} \int_E (g - a)\Big| \leqslant \frac{1}{\mu(E)} \int_E |g - a| \leqslant \frac{1}{\mu(E)} \mu(E) r = r. \tag{27.856a}$$

Donc

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E g d\mu \in D, \tag{27.857}$$

ce qui est une contradiction avec le fait que $D \subset S^c$. □

Dans toute la partie d'analyse fonctionnelle, sauf mention du contraire, nous considérons dans L^p des fonctions à valeurs complexes, et donc les éléments du dual sont des applications linéaires continues à valeurs dans $\mathbb{C}$. La raison est que nous allons utiliser les résultats concernant L^p dans la partie sur les transformations de Fourier, tandis que les transformations de Fourier demandent naturellement de travailler sur les complexes.

ThoLPQPooPWBXuv

Théorème 27.187 (Théorème de représentation de Riesz, thème 21, [13, 520, 770, 506]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec la convention que $q = \infty$ si $p = 1$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi &: L^q \to (L^p)' \\ \Phi_g(f) &= \int_\Omega f \bar{g} d\mu \end{aligned} \tag{27.858}$$

est une bijection isométrique[104] *dans les cas suivants :*

ITEMooSQQBooWSFBmX

(1) si $1 < p < \infty$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré quelconque,

ITEMooCQGJooOWzjoV

(2) si $p = 1$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est σ-fini.

Démonstration. Par petits bouts.

(1) **Φ est injective** Nous commençons par prouver que Φ est injectif. Soient $g, g' \in L^q$ tels que $\Phi_g = \Phi_{g'}$. Alors pour tout $f \in L^p$ nous avons

$$\int_\Omega f(\bar{g} - \bar{g}') d\mu = 0. \tag{27.859}$$

[103] Tout ouvert peut être écrit comme union dénombrable d'éléments d'une base de topologie par la proposition 7.2 et $\mathbb{C}$ a une base dénombrable de topologie par la proposition 7.188.

[104] Pour rappel, la norme sur le dual est la norme opérateur 10.67.

Soient des parties A_i de mesures finies telles que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Étant donné que $\mu(A_i)$ est fini, nous avons $\mathbb{1}_{A_i} \in L^p(\Omega)$ et donc

$$\int_{A_i} (\bar{g} - \bar{g}')d\mu = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{A_i}(x)(\bar{g} - \bar{g}')(x)d\mu(x) = 0. \tag{27.860}$$

La proposition 27.26 nous dit alors que $g - g' = 0$ dans $L^q(A_i)$. Pour chaque i, la partie $N_i = \{x \in A_i \text{ tel que } (g - g')(x) \neq 0\}$ est de mesure nulle.

Vu que Ω est l'union de tous les A_i, la partie de Ω sur laquelle $g - g'$ est non nulle est l'union des N_i et donc de mesure nulle parce que une réunion dénombrable de parties de mesure nulle est de mesure nulle. Donc $g - g' = 0$ presque partout dans Ω, ce qui signifie $g - g' = 0$ dans $L^q(\Omega)$.

(2) **La suite**

La partie difficile est de montrer que Φ est surjective.

Soit $\phi \in L^p(\Omega)'$. Si $\phi = 0$, c'est bien dans l'image de Φ ; nous supposons donc que non. Nous allons commencer par prouver qu'il existe une (classe de) fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que $\Phi_g(f) = \phi(f)$ pour tout $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$; nous montrerons ensuite que $g \in L^q$ et que le tout est une isométrie.

(3) **Une mesure complexe**

Si $E \in \mathcal{A}$ nous notons $\nu(E) = \phi(\mathbb{1}_E)$. Nous prouvons maintenant que ν est une mesure complexe[105] sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Le seul point pas facile est de démontrer est l'additivité dénombrable. Il est déjà facile de voir que A et B sont disjoints, $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$. Soient ensuite des ensembles A_n deux à deux disjoints et posons $E_k = \bigcup_{i \leqslant k} A_i$ pour avoir $\bigcup_k A_k = \bigcup_k E_k$ avec l'avantage que les E_k soient emboîtés. Cela donne

$$\|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_k}\|_p = \mu(E \setminus E_k)^{1/p}, \tag{27.861}$$

mais vu que $1 \leqslant p < \infty$, avoir $x_k \to 0$ implique d'avoir $x_k^{1/p} \to 0$. Prouvons que $\mu(E \setminus E_k) \to 0$. En vertu du lemme 14.23 nous avons pour chaque k :

$$\mu(E \setminus E_k) = \mu(E) - \mu(E_k), \tag{27.862}$$

et vu que $E_k \to E$ est une suite croissante, le lemme 14.24(1), sachant que μ est une mesure « normale », donne

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_k) = \mu\Big(\bigcup_k E_k\Big). \tag{27.863}$$

Donc effectivement $\mu(E_k) \to \mu(E)$ et donc oui : $\mu(E \setminus E_k) \to 0$. Jusqu'à présent nous avons

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_k}\|_p = 0, \tag{27.864}$$

c'est-à-dire $\mathbb{1}_{E_k} \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_E$. La continuité de ϕ sur L^p donne alors

$$\lim_{k\to\infty} \nu(E_k) = \lim_{k\to\infty} \phi(\mathbb{1}_{E_k}) = \phi(\lim_{k\to\infty} \mathbb{1}_{E_k}) = \phi(\mathbb{1}_E) = \nu(E). \tag{27.865}$$

Par additivité finie de ν nous avons

$$\nu(E_k) = \sum_{i \leqslant k} \nu(A_i) \tag{27.866}$$

et en passant à la limite, $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \nu(\bigcup_i A_i)$. L'application ν est donc une mesure complexe.

(4) **Mesure absolument continue**

En prime, si $\mu(E) = 0$ alors $\nu(E) = 0$ parce que

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \|\mathbb{1}_E\|_p = 0 \Rightarrow \mathbb{1}_E = 0 \text{ (dans } L^p) \Rightarrow \phi(\mathbb{1}_E) = 0 \tag{27.867}$$

(5) **Utilisation de Radon-Nikodym**

Nous sommes donc dans un cas où $\nu \ll \mu$ et nous utilisons le théorème de Radon-Nikodym 14.240 sous la forme de la remarque 14.241 : il existe une fonction intégrable $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$[106] telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu(A) = \int_A \bar{g}d\mu. \tag{27.868}$$

[105] Définition 14.239.

[106] On peut écrire, pour utiliser de la notation compacte que $g \in L^1(\Omega, \mathbb{C})$.

C'est-à-dire que

$$\phi(\mathbb{1}_A) = \int_A \bar{g} d\mu = \int_\Omega \bar{g}\mathbb{1}_A d\mu. \tag{27.869}$$

Nous avons donc exprimé ϕ comme une intégrale pour les fonctions caractéristiques d'ensembles.

(6) **Pour les fonctions étagées**

Par linéarité si f est mesurable et étagée nous avons aussi

$$\phi(f) = \int f\bar{g} d\mu = \Phi_g(f). \tag{27.870}$$

(7) **Pour $f \in L^\infty(\Omega)$**

Une fonction $f \in L^\infty$ est une fonction presque partout bornée. Nous supposons que f est presque partout bornée par M. Par ailleurs cette f est limite uniforme de fonctions étagées : $\|f_k - f\|_\infty \to 0$ en posant $f_k = f\mathbb{1}_{|f|\leqslant k}$. Pour chaque k nous avons l'égalité

$$\Phi_g(f_k) = \phi(f_k). \tag{27.871}$$ EqPDCJooGNjuAQ

Par ailleurs la fonction $f_k\bar{g}$ est majorée par la fonction intégrable $M\bar{g}$ et le théorème de la convergence dominée 14.207 nous donne

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_g(f_k) = \lim_{k\to\infty} \int f_k\bar{g} = \int f\bar{g} = \Phi_g(f). \tag{27.872}$$

Et la continuité de ϕ sur L^p couplée à la convergence $f_k \xrightarrow{L^p} f$ donne $\lim_{k\to\infty} \phi(f_k) = \phi(f)$. Bref prendre la limite dans (27.871) donne

$$\Phi_g(f) = \phi(f) \tag{27.873}$$

pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$.

(8) **La suite ...**

Voici les prochaines étapes.

- Nous avons $\int f\bar{g} = \phi(f)$ tant que $f \in L^\infty$. Nous allons étendre cette formule à $f \in L^p$ par densité. Cela terminera de prouver que notre application est une bijection.
- Ensuite nous allons prouver que $\|\phi\| = \|\Phi_g\|$, c'est-à-dire que la bijection est une isométrie.

(9) **De L^∞ à L^p**

Soit $f \in L^p$. Si nous avions une suite (f_n) dans L^∞ telle que $f_n \xrightarrow{L^p} f$ alors $\lim \phi(f_n) = \phi(f)$ par continuité de ϕ. La difficulté est de trouver une telle suite de façon à pouvoir permuter l'intégrale et la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\bar{g} = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\bar{g} = \int_\Omega f\bar{g} = \Phi_g(f). \tag{27.874}$$ EqLYYAooUQnbfV

Nous allons donc maintenant nous atteler à la tâche de trouver $f_n \in L^\infty$ avec $f_n \xrightarrow{L^p} f$ et telle que (27.874) soit valide.

Nous allons d'abord supposer que $f \in L^p$ est positive à valeurs réelles. Nous avons alors par le théorème 14.118 qu'il existe une suite croissante de fonction étagées (et donc L^∞) telles que $f_n \to f$ ponctuellement. De plus étant donné que $|f_n| \leqslant |f|$, la proposition 27.25 nous dit que $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Pour chaque n nous avons

$$\int_\Omega f_n\bar{g} = \phi(f_n). \tag{27.875}$$

Soit g^+ la partie réelle positive de $\bar{g}$. Alors nous avons la limite croissante ponctuelle $f_n g^+ \to fg^+$ et le théorème de la convergence monotone 14.178 nous permet d'écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n g^+ = \int fg^+. \tag{27.876}$$

Faisant cela pour les trois autres parties de $\bar{g}$ nous avons prouvé que si $f \in L^p$ est réelle et positive,

$$\int f\bar{g} = \phi(f), \tag{27.877}$$

c'est-à-dire que $\Phi_g(f) = \phi(f)$.

Refaisant le tout pour les trois autres parties de f nous montrons que

$$\Phi_g(f) = \phi(f) \tag{27.878}$$

pour tout $f \in L^p(\Omega)$. Nous avons donc égalité de ϕ et Φ_g dans $(L^p)'$ et donc bijection entre $(L^p)'$ et L^q.

(10) **Isométrie : mise en place**

Nous devons prouver que cette bijection est isométrique. Soit $\phi \in (L^p)'$ et $g \in L^q$ telle que $\Phi_g = \phi$. Il faut prouver que

$$\|g\|_q = \|\phi\|_{(L^p)'}. \tag{27.879}$$

(11) $\|\phi\| \leqslant \|g\|_q$

Nous savons que $\phi(f) = \int f\bar{g}$, et nous allons écrire la définition de la norme dans $(L^p)'$:

$$\|\phi\|_{(L^p)'} = \sup_{\|f\|_p=1} \big|\phi(f)\big| \tag{27.880a}$$

$$= \sup |\int f\bar{g}| \tag{27.880b}$$

$$\leqslant \sup \underbrace{\int |f\bar{g}|}_{=\|f\bar{g}\|_1}. \tag{27.880c}$$

Il s'agit maintenant d'utiliser l'inégalité de Hölder 27.39 :

$$\|\phi\| \leqslant \sup_{\|f\|_p=1} \|f\|_p\|\bar{g}\|_q = \|g\|_q. \tag{27.881}$$

L'inégalité dans l'autre sens sera démontrée en séparant les cas $p = 1$ et $1 < p < \infty$.

(12) **Si $p = 1$, une formule** Si E est un ensemble mesurable de mesure finie, alors

$$|\int_E g d\mu| = \big|\phi(\mathbb{1}_E)\big|. \tag{27.882}$$

Mais le fait que $\mu(E) < \infty$ donne que $\mathbb{1}_E \in L^1(\Omega)$. Donc $\mathbb{1}_E \in L^\infty \cap L^1$; nous pouvons alors écrire $\phi(\mathbb{1}_E) = \int_\Omega \mathbb{1}_E\bar{g}d\mu$ et donc

$$|\int_\Omega \mathbb{1}_E\bar{g}d\mu| = |\int_E \bar{g}d\mu| = \big|\phi(\mathbb{1}_E)\big| \leqslant \|\phi\|_{(L^1)'}\|\mathbb{1}_E\|_1 = \|\phi\|\mu(E). \tag{27.883}$$ EqUPCTooJvoKKJ

Nous écrivons cela dans l'autre sens :

$$\|\phi\| \geqslant \frac{1}{\mu(E)}|\int_\Omega \mathbb{1}_E\bar{g}d\mu| = |\frac{1}{\mu(E)}\int_E \bar{g}d\mu|. \tag{27.884}$$

Si nous prenons $S = \{t \in \mathbb{C} \text{ tel que } |t| \leqslant \|\phi\|\}$, c'est un fermé vérifiant que

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E \bar{g}d\mu \in S. \tag{27.885}$$ EQooMRLGooYPEjUo

Voilà une petite formule qui va nous aider à utiliser le lemme 27.186. Nous ne pouvons cependant pas l'utiliser immédiatement parce que l'appartenance (27.885) n'est vraie que pour les parties de mesure finie.

(13) **Si $p = 1$, conclusion[1]**

Pour utiliser le lemme 27.186, nous utilisons l'hypothèse que Ω est σ-fini. Soient des mesurables A_i de mesure fine tels que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$.

Pour chaque i nous considérons la restriction $g_i\colon A_i \to \mathbb{C}$ de g à A_i. Par le point précédent, elle vérifie

$$\frac{1}{\mu(A_i)}\int_{A_i} \bar{g}_i d\mu = \frac{1}{\mu(A_i)}\int_{A_i} \bar{g}d\mu \in S. \tag{27.886}$$

En appliquant le lemme 27.186 à l'espace restreint $(A_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, nous concluons $\bar{g}_i \in S$ presque partout, ce qui signifie que $\|g_i\|_\infty \in S$. Nous en concluons que

$$\|g_i\|_\infty \leqslant \|\phi\| \tag{27.887}$$

où, dans ce contexte, $\|g_i\|_\infty$ signifie $\sup_{x\in A_i} |g_i(x)|$.

Nous avons alors

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |g(x)| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \|g_i\|_\infty \leqslant \|\phi\|. \tag{27.888}$$

Une petite justification pour cela ? Prenons une suite x_k telle que $|g(x_k)| \to \|g\|_\infty$. Vu que les A_i recouvrent Ω, existe un naturel $i(k)$ tel que $x_k \in A_{i(k)}$. Nous avons alors

$$|g(x_k)| \leqslant \|g_{i(k)}\|_\infty \leqslant \|\phi\|. \tag{27.889}$$

Cela pour conclure que $g \in L^\infty$.

Notons que cet argument ne tient pas avec $p > 1$ parce que l'équation (27.883) terminerait sur $\|\phi\|\mu(E)^{1/p}$. Du coup l'ensemble S à prendre serait $S = \{t \in \mathbb{C} \text{ tel que } |t| \leqslant \|\phi\|\mu(E)^{1/p-1}\}$ et nous sommes en dehors des hypothèses du lemme parce qu'il n'y a pas d'ensemble *indépendant* de E dans lequel l'intégrale $\frac{1}{\mu(E)}\int_E \bar{g}d\mu$ prend ses valeurs.

(14) $1 < p < \infty$

La fonction

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{|g(x)|} & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 1 & \text{si } g(x) = 0 \end{cases} \tag{27.890}$$

a la propriété de faire $\alpha g = |g|$ en même temps que $|\alpha(x)| = 1$ pour tout x. Nous définissons

$$E_n = \{x \text{ tel que } |g(x)| \leqslant n\} \tag{27.891}$$

et

$$f_n = \mathbb{1}_{E_n} |g^{q-1}|\alpha. \tag{27.892}$$

Ce qui est bien avec ces fonctions c'est que[107]

$$|f_n|^p = |g^{p(q-1)}||\alpha|^p = |g|^q \tag{27.893}$$

sur E_n. Dans E_n nous avons $|f_n| = |g^{q-1}| \leqslant n^{q-1}$ et dans E_n nous avons $f_n = 0$. Au final, $f_n \in L^\infty$. Par ce que nous avons vu plus haut, nous avons alors

$$\phi(f_n) = \Phi_g(f_n). \tag{27.894}$$

Par ailleurs,

$$f_n\bar{g} = \mathbb{1}_{E_n}|g^{q-1}|\frac{g}{|g|}\bar{g}, \tag{27.895}$$

donc[108]

$$\begin{aligned}
\left|\int_{E_n} |g|^q d\mu\right| &= |\int_\Omega f_n\bar{g}d\mu| && \text{(27.896a)}\\
&= |\phi(f_n)| && \text{(27.896b)}\\
&\leqslant \|\phi\|\|f_n\|_p && \text{(27.896c)}\\
&= \|\phi\|\left(\int_{E_n} |f_n|^p\right)^{1/p} && \text{(27.896d)}\\
&= \|\phi\|\left(\int_{E_n} |g|^q\right)^{1/p}. && \text{(27.896e)}
\end{aligned}$$

Nous avons de ce fait une inégalité de la forme $A \leqslant \|\phi\|A^{1/p}$ et donc aussi $A^{1/p} \leqslant \|\phi\|^{1/p}A^{1/p^2}$, et donc $A \leqslant \|\phi\|\|\phi\|^{1/p}A^{1/p^2}$. Continuant ainsi à injecter l'inégalité dans elle-même, pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$\left|\int_{E_n} |g|^q d\mu\right| \leqslant \|\phi\|^{1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^k}}\left(\int_{E_n} |g|^q d\mu\right)^{1/p^k}. \tag{27.897}$$

[107] C'est ici que nous utilisons le lien entre p et q. En l'occurrence, de $1/p + 1/q = 1$ nous déduisons $q(p-1) = p$.

[108] Dans [13], cette équation arrive sans modules, ce qui me laisse entendre que $\phi(f_n)$ est réel et positif pour pouvoir écrire que $\phi(f_n) \leqslant \|\phi\|\|f_n\|_p$, mais je ne comprends pas pourquoi.

Nous pouvons passer à la limite $k \to \infty$. Sachant que $p > 1$ nous savons $A^{1/k} \to 1$ et

$$1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^k} \to \frac{p}{p-1} = q. \tag{27.898}$$

Nous avons alors

$$\int_{E_n} |g|^q d\mu \leqslant \|\phi\|^q. \tag{27.899}$$

L'intégrale s'écrit tout aussi bien sous la forme $\int_\Omega |g|^q \mathbb{1}_{E_n}$. La fonction dans l'intégrale est une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. Nous pouvons alors permuter l'intégrale et la limite $n \to \infty$ en utilisant la convergence monotone (théorème 14.178) qui donne alors $\int_\Omega |g|^q \leqslant \|\phi\|^q$ ou encore

$$\|g\|_q \leqslant \|\phi\|. \tag{27.900}$$

Ceci achève de prouver que l'application $\phi \mapsto \Phi_g$ est une isométrie, et donc le théorème.

□

THOooXMVTooBAbyvr

Théorème 27.188.
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Pour $f, g \in \mathrm{Fun}(\Omega, \mathbb{C})$, nous écrivons

$$\Phi_g(f) = \int_\Omega f\bar{g} \tag{27.901}$$

pour toutes les combinaisons de f et g pour lesquelles l'intégrale a un sens.

ITEMooNCVEooTyNsoJ

(1) Si $1 < p < \infty$, alors $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est réflexif[109].

ITEMooTQDJooFShTiA

(2) Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est σ-finie, alors

ITEMooHMMZooMQxWgB

(2a) L'application $\Phi\colon L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)'$ est une bijection isométrique.

ITEMooBFFZooNxoHER

(2b) L'application $\Phi\colon L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)'$ est une injection isométrique.

Note : nous verrons dans 27.192 que l'application $\Phi\colon L^1(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)'$ n'est pas surjective.

Démonstration. En plusieurs parties, en notant toujours p et q les exposants conjugués, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(1) **Pour (1)**

Nous considérons les applications

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\colon L^p \to (L^q)' \\ \alpha_1(g)f &= \int_\Omega f\bar{g} \end{aligned} \tag{27.902}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_2 &\colon L^q \to (L^p)' \\ \alpha_2(g)f &= \int_\Omega g\bar{f}. \end{aligned} \tag{27.903}$$

Ce sont des bijections linéaires par le théorème de représentation de Riesz 27.187[110]. L'espace L^p est de Banach par le théorème de Riesz-Fischer 27.56 ; le lemme 27.183 s'applique donc. Nous considérons alors les applications correspondantes

$$\beta_1 \colon (L^p)' \to (L^q)'' \tag{27.904}$$

et

$$\beta_2 \colon (L^q)' \to (L^p)'', \tag{27.905}$$

qui sont également des bijections linéaires. Nous allons montrer que la bijection

$$\beta_2 \circ \alpha_1 \colon L^p \to (L^p)'' \tag{27.906}$$

est l'application J de la définition 27.179.

[109] Définition 27.179.

[110] Notez que la conjugaison complexe dans α_2 n'est pas à la même place que dans α_1. L'application α_1 est exactement la même que le Φ de représentation de Riesz alors que α_2 est un tout petit peu modifiée. La raison de ce changement n'est pas très profonde : c'est seulement pour que les choses tombent juste à la fin.

Soient $f \in L^p$ et $\varphi \in (L^p)'$. Il existe $g \in L^q$ tel que $\varphi = \alpha_2(g)$. Nous pouvons donc calculer d'une part, en développant β_2 par sa définition (27.827),

$$(\beta_2 \circ \alpha_1)(f)\varphi = \beta_2\big(\alpha_1(f)\big)\varphi = \alpha_1(f)\big(\alpha_2^{-1}(\varphi)\big) = \alpha_1(f)(g) = \int_\Omega g\bar{f}, \tag{27.907}$$

et d'autre part

$$J(f)\varphi = \varphi(f) = \alpha_2(g)f = \int_\Omega g\bar{f}. \tag{27.908}$$

(2) **Pour (2a)** Il s'agit du théorème 27.187(2).

(3) **Pour (2b)[1]** Il nous reste à couvrir le cas de $(L^\infty)'$. Pour $g \in L^1$ nous prouvons que $\Phi_g \in (L^\infty)'$.

(3a) $\Phi_g(f)$ **est bien définie** Nous prouvons d'abord que si $f \in L^\infty$, alors l'intégrale $\int_\Omega f\bar{g}$ est bien définie. Par définition du supremum essentiel[111], il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| < M$ pour tout x hors d'une partie A de mesure nulle. Nous avons alors

$$\int_\Omega |f\bar{g}| = \int_{\Omega\setminus A} |f\bar{g}| \leqslant M \int_{\Omega\setminus A} |f| = M \int_\Omega |f| < \infty. \tag{27.909}$$

(3b) Φ_g **est continue** Soit une suite $f_k \xrightarrow{L^\infty} f$ ainsi que $g \in L^1$. Pour chaque k, il existe une partie de mesure nulle A_k et un nombre $M_k = \|f_k\|_{L^\infty}$ tel que $|f_k(x)| < \|f_k\|_{L^\infty}$ pour tout x hors de A_k. Nous avons alors

$$|\Phi_g(f_k)| \leqslant \int_{\Omega\setminus A_k} |f_k\bar{g}|d\mu \leqslant \|f_k\|_{L^\infty} \int_{\Omega\setminus A_k} |g| \leqslant \|f_k\|_{L^\infty}\|g\|_1. \tag{27.910}$$

Vu que par hypothèse $f_k \to 0$ dans L^∞, nous avons $\|f_k\|_{L^\infty} \to 0$, et donc aussi

$$|\Phi_g(f_k)| \to 0. \tag{27.911}$$

□

27.189.
Les gens qui n'ont peur d'aucun abus de notations écrivent le théorème 27.188(2a) en disant simplement que $L^1 = L^\infty$ et le démontrent de la façon suivante. Le théorème 27.187(1) nous indique que

$$(L^p)' = L^q. \tag{27.912}$$ EQooJVDEooNGYEtg

Vu que $1 < p < \infty$, nous avons aussi $1 < q < \infty$ et donc $(L^q)' = L^p$. En prenant le dual des deux côtés de (27.912),

$$(L^p)'' = (L^q)' = L^p. \tag{27.913}$$

À ce moment, un second abus vient en aide et nous disons qu'un espace V est réflexif quand $V = V''$. Et voilà.

PropUKLZZZh

Proposition 27.190.
Soit $f \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega f\varphi = 0 \tag{27.914}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Alors $f = 0$ presque partout.

Démonstration. Nous considérons la forme linéaire $\Phi_f \in (L^q)'$ donnée par

$$\begin{aligned}\Phi_f\colon L^p &\to \mathbb{C}\\ u &\mapsto \int_\Omega fu\end{aligned} \tag{27.915}$$

Par hypothèse cette forme est nulle sur la partie dense $C_c^\infty(\Omega)$. Si (φ_n) est une suite dans $C_c^\infty(\Omega)$ convergente vers u dans L^p, nous avons pour tout n que

$$0 = \Phi_f(\varphi_n) \tag{27.916}$$

En passant à la limite, nous voyons que Φ_f est la forme nulle. Elle est donc égale à Φ_0. La partie « unicité » du théorème de représentation de Riesz 27.187 nous indique alors que $f = 0$ dans L^p et donc $f = 0$ presque partout. □

[111] Voir les définitions 27.28 et 27.29.

PropLGoLtcS

Proposition 27.191.
Si $f \in L^1_{loc}(I)$ est telle que

$$\int_I f\varphi' = 0 \tag{27.917}$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$, alors il existe une constante C telle que $f = C$ presque partout.

Démonstration. Soit $\psi \in C_c^\infty(I)$ une fonction d'intégrale 1 sur I. Si $w \in C_c^\infty(I)$ alors nous considérons la fonction

$$h = w - \psi \int_I w, \tag{27.918}$$

qui est dans $C_c^\infty(I)$ et dont l'intégrale sur I est nulle. Par la proposition 17.2, la fonction h admet une primitive dans $C_c^\infty(I)$; et nous notons φ cette primitive. L'hypothèse appliquée à φ donne

$$0 = \int_I f\varphi' = \int_I f\left(w - \psi\int_I w\right) = \int_I fw - \underbrace{\left(\int_I f(x)\psi(x)dx\right)}_{C}\left(\int_I w(y)dy\right) = \int_I w(f-C). \tag{27.919}$$

L'annulation de la dernière intégrale implique par la proposition 27.190 que $f - C = 0$ dans L^2, c'est-à-dire $f = C$ presque partout. □

PROPooXNRRooUdgFPr

Proposition 27.192 ([221])**.**
L'application

$$\begin{aligned}\Phi\colon L^1(\mathbb{R}^d) &\to L^\infty(\mathbb{R}^d)'\\ \Phi_g(f) &= \int_\Omega f\bar{g}d\lambda\end{aligned} \tag{27.920}$$

n'est pas surjective.

Démonstration. Nous allons construire un élément de $(L^\infty)'$ qui n'est pas dans l'image de L^1.

(1) **Mise en place du décor** Nous considérons l'espace vectoriel normé $\left(L^\infty(\mathbb{R}^d), N_\infty\right)$ défini en 27.28 et 27.29. Dedans, nous considérons le sous-espace D des classes des fonctions dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$; nous aurions très envie de le noter $\left(\mathscr{D}(\mathbb{R}^d), N_\infty\right)$, mais nous allons le noter $\left(D, N_\infty\right)$ parce que $\mathscr{D}$ est un espace de fonctions tandis que nous considérons un espace de classes de fonctions.

Si $f \in D$, alors f est une classe de fonctions contenant un unique représentant continu[112] ; nous le notons $\tilde{f}$.

(2) **Une première fonctionnelle**

Avec ça nous posons[113]

$$\begin{aligned}\phi_0\colon D &\to \mathbb{C}\\ f &\mapsto \tilde{f}(0).\end{aligned} \tag{27.921}$$

(3) **ϕ_0 est linéaire** Ça ne devrait pas poser de problèmes.

(4) **ϕ_0 est continue** Soit $f_k \xrightarrow{N_\infty} 0$. Nous devons prouver que $\tilde{f}_k(0) \xrightarrow{\mathbb{C}} 0$. Supposons le contraire et considérons $\epsilon > 0$ ainsi que k tels que $\tilde{f}_k(0) > \epsilon$.

Par continuité de $\tilde{f}_k$, il existe un $\delta > 0$ tel que $\tilde{f}_k(x) > \epsilon/2$ pour tout $x \in B(0,\delta)$. Avec cela nous avons $N_\infty(f_k) > \epsilon/2$, et une impossibilité d'avoir[114] $f_k \xrightarrow{N_\infty} 0$.

(5) **ϕ_0 est de norme finie** C'est parce qu'elle est continue.

(6) **Utilisation de Hahn-Banach** Le théorème de Hahn-Banach 27.171 donne une extension continue

$$\phi\colon L^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}. \tag{27.922}$$

Cela est un élément de $(L^\infty)'$ et nous allons montrer qu'il n'est pas dans $\Phi(L^1)$.

[112] Existence parce que les éléments de D sont des classes d'éléments de $\mathscr{D}$ qui sont C^∞. Unicité par la proposition 20.154.
[113] Dans [221], l'auteur ne définit pas L^∞ comme un espace de classes de fonctions, et ces complications disparaissent.
[114] Je vous laisse emballer ce raisonnement dans « si pour tout N, il existe $k > N$ tel que ».

(7) **Par l'absurde** Supposons qu'il existe $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\phi = \Phi_u$. Pour tout $f \in L^\infty$, nous avons

$$\phi(f) = \Phi_u(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\bar{u}. \tag{27.923}$$

Si f est la classe d'une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ s'annulant en 0, alors $\phi(f) = 0$. De telles fonctions non identiquement nulles existent par le lemme 15.180[115].

Soient $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, un compact K ne contenant pas 0 et χ_K sa fonction indicatrice. Nous avons $\chi_K\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, et $(\chi_K\varphi)(0) = 0$. En passant aux classes, $\phi\big([\chi_K f]\big) = 0$. Nous avons :

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} u\overline{(\chi_K\varphi)} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi}(u\overline{\chi_K}). \tag{27.924}$$

Vu que cela est valable pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, la proposition 27.190 dit que $u\chi_K = 0$ presque partout.

(8) **Le coup du compact**

Soit une suite de compacts K_n recouvrant $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Par exemple

$$K_n = \overline{B(0,n)} \setminus B(0, \frac{1}{n}). \tag{27.925}$$

Pour chacun des K_n, nous avons $u\chi_{K_n} = 0$ presque partout. Il existe donc une partie de mesure nulle N_k telle que $u\chi_{K_n}$ est nulle à part sur N_k. Au total, u est non nulle seulement sur $\bigcup_k N_k$ et peut-être en 0.

Bref, u est non nulle sur une partie de mesure nulle par le lemme 14.28.

(9) **Conclusion**

La fonction u est nulle presque partout. Donc $\phi = \Phi_u = 0$. Nous savons pourtant que ϕ n'est pas nulle parce qu'il existe des fonctions dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ qui ne s'annulent pas en 0.

Cela est une contradiction. Donc ϕ n'est pas dans l'image de Φ tout en étant dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)'$.

□

Dans [771], il est dit que « la preuve [du lemme suivant], un peu fastidieuse mais en rien ingénieuse, est laissée en exercice ». La preuve est donc de moi ; elle est un tout petit peu ingénieuse mais en rien fastidieuse. J'espère ne pas m'être trompé et me demande bien ce que l'auteur avait en tête. Ma preuve s'appuie sur la proposition 17.101 dont la preuve ne me paraît pas non plus « fastidieuse mais en rien ingénieuse ».

LEMooLDQRooEGWDlm

Lemme 27.193 ([771, 1])**.**
Soit $r > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $s, t \in \mathbb{C}$ vérifiant $|s| \leqslant 1$, $|t| \leqslant 1$ et $|s - t| \geqslant r$ nous ayons

$$\left|\frac{s+t}{2}\right|^p \leqslant (1-\delta)\frac{|s|^p + |t|^p}{2}. \tag{27.926}$$

Démonstration. Soit $r > 0$. La partie de $\mathbb{C}^2$ donnée par

$$D = \{(s,t) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } |s| \leqslant 1, |t| \leqslant 1, |s-t| \geqslant r\} \tag{27.927}$$

est compacte. En effet elle est bornée (par la sphère de rayon $\sqrt{2}$) et fermée comme intersection de fermés[116]. Nous considérons la fonction $\Delta\colon D \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\left|\frac{s+t}{2}\right|^p = \Delta(s,t)\frac{|s|^p + |t|^p}{2}. \tag{27.928}$$

Si vous voulez une expression explicite,

$$\Delta(s,t) = \frac{2^{p-1}|s+t|^p}{|s|^p + |t|^p}. \tag{27.929}$$

Cela est bien défini et continu sur D parce que le complémentaire D^c (qui est ouvert) contient $(0,0)$ et donc aussi un voisinage de $(0,0)$.

La proposition 17.101 nous dit que la fonction $z \mapsto |z|^p$ est strictement convexe. En prenant la définition 17.94 de la stricte convexité avec $\theta = \frac{1}{2}$, nous trouvons que

$$\Delta(s,t) < 1 \tag{27.930}$$

pour tout $(s,t) \in D$. Vu que par ailleurs Δ est une fonction continue sur le compact D, elle atteint un minimum dans D. Soit Δ_0 ce minimum qui vérifie forcément $\Delta_0 < 1$.

En posant $1 - \delta = \Delta_0$ nous avons le résultat. □

[115] Ce lemme donne un exemple f sur $\mathbb{R}$. Si vous voulez vraiment un exemple dans $\mathbb{R}^d$, prenez $g(x) = f(\|x\|)$.
[116] Lemme 7.6 suivit du théorème de Borel-Lebesgue 9.24.

27.16.1 Le théorème de Jordan

Les définitions de chemins, de lacets et de courbes de Jordan sont dans 20.75.

LEMooZPRLooJPvrOE

Lemme-Définition 27.194 ([235]).
Soit un lacet $\gamma\colon [a,b]\to X$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} q\colon [a,b] &\to S^1 \\ t &\mapsto e^{2i\pi t/(b-a)} \end{aligned} \tag{27.931}$$

Il existe une unique application continue $\tilde{\gamma}\colon S^1\to \text{Image}(\gamma)$ telle que $\gamma=\tilde{\gamma}\circ q$.
*Cette application $\tilde{\gamma}$ est l'application **quotient** associée à γ.*

Démonstration. La proposition 18.62(1) dit que q est une bijection continue. Donc l'existence et l'unicité d'une application $\tilde{\gamma}=\gamma\circ q^{-1}$. Cette application est continue comme composée d'applications continues. □

LEMooCGVOooVPlSRD

Lemme 27.195 ([235]).
Soit $\gamma\colon [a,b]\to X$ un chemin d'image Γ.

ITEMooWKVAooCQDvpL

(1) Si γ est un chemin de Jordan[117], alors $\gamma\colon [a,b]\to\Gamma$ est un isomorphisme d'espaces topologiques.

ITEMooVYMXooEtgPJT

(2) Si γ est un lacet de Jordan, alors le quotient[118] $\tilde{\gamma}\colon S^1\to\Gamma$ est un homéomorphisme[119].

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Un chemin de Jordan est injectif, et donc bijectif sur son image. Il est donc une bijection continue depuis $[a,b]$ qui est compact. Il est donc un homéomorphisme par le lemme 7.277.

(2) **Pour (2)** L'application $\gamma\colon [a,b[\to\Gamma$ est une bijection continue parce que γ est un lacet de Jordan. Son quotient $\tilde{\gamma}\colon S^1\to\Gamma$ est donc une bijection continue depuis le compact S^1. Le lemme 7.277 conclut que c'est un homéomorphisme.

□

CORooPGFLooUTVZMi

Corolaire 27.196.
À propos de courbes simples et de Jordan.

ITEMooIUAXooOfvNov

(1) Toute courbe simple est homéomorphe à $[0,1]$.

(2) Toute courbe de Jordan est homéomorphe à S^1.

Démonstration. Une courbe simple est l'image d'un lacet de Jordan. Donc $\gamma\colon [a,b]\to\Gamma$ est un homéomorphisme par le lemme 27.195(1). Le lemme 10.308 fournit un homéomorphisme entre $[a,b]$ et $[0,1]$. Une composition d'homéomorphismes est un homéomorphisme.

Une courbe de Jordan est l'image d'un lacet de Jordan $\gamma\colon [a,b]\to\Gamma$. Le lemme 27.195(2) dit alors que Γ est homéomorphe à S^1. □

DEFooURFMooXIaRkl

Définition 27.197 ([235]).
Soit un compact K dans $\mathbb{C}$. Nous notons

(1) $\mathcal{G}(K)$ le groupe multiplicatif des fonctions continues $f\colon K\to\mathbb{C}^*$.

(2) $\mathcal{E}(K)$ le sous-groupe des fonctions admettant un logarithme continu[120].

(3) $G(K)$ le quotient[121] $G(K)=\mathcal{G}(K)/\mathcal{E}(K)$.

LEMooHEOWooHTtHsJ

Lemme 27.198 ([235]).
Si K_1 et K_2 sont des compacts homéomorphes, alors les groupes $G(K_1)$ et $G(K_2)$ sont isomorphes.

Démonstration. Soit un homéomorphisme $\theta\colon K_1\to K_2$. Nous posons

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathcal{G}(K_1) &\to \mathcal{G}(K_2) \\ f &\mapsto f\circ\theta^{-1}. \end{aligned} \tag{27.932}$$

[117] Définition 20.75.
[118] Définition 27.194.
[119] Bijection continue d'inverse continu.
[120] Logarithme continu, définition 26.45.
[121] Le groupe $\mathcal{G}(K)$ est commutatif ; donc pas de problèmes pour que $\mathcal{E}(K)$ soit normal.

(1) **Injective** Suppose $\psi(f) = \psi(g)$. Vu que θ est une bijection, l'égalité $f \circ \theta^{-1} = g \circ \theta^{-1}$ implique $f = g$. Donc ψ est injective.

(2) **Surjective** Soit $f \in \mathcal{G}(K_2)$. Nous avons $f \circ \theta \in \mathcal{G}(K_1)$, et évidemment $\psi(f \circ \theta) = f$.

(3) **Morphisme** Nous avons

$$\psi(fg) = fg \circ \theta^{-1} = (f \circ \theta^{-1})(g \circ \theta^{-1}) = \psi(f)\psi(g). \tag{27.933}$$

Nous avons prouvé que ψ est un isomorphisme. Nous devons maintenant voir qu'il passe au quotient, c'est-à-dire que $\psi\big(\mathcal{E}(K_1)\big) \subset \mathcal{E}(K_2)$. Soit $f \in \mathcal{E}(K_1)$, soit un logarithme continu g de f, c'est-à-dire $\exp\big(g(x)\big) = f(x)$. Pour $y \in K_2$, il existe $x \in K_1$ tel que $y = \theta(x)$. Dans ce cas nous avons

$$\exp\big((g \circ \theta^{-1})(y)\big) = \exp\big(g(x)\big) = f(x) = (f \circ \theta^{-1})(y). \tag{27.934}$$

Autrement dit,

$$\exp\big(\psi(g)(y)\big) = \psi(f). \tag{27.935}$$

Donc $\psi(g)$ est un logarithme continu de $\psi(f)$. □

DEFooKXHUooTsKuOe

Définition 27.199.
Petite notation. Si un compact K est donné, pour $p \in \mathbb{C} \setminus K$, nous notons

$$\begin{aligned} f_p\colon K &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto z - p. \end{aligned} \tag{27.936}$$

LEMooSULYooWiEoyf

Lemme 27.200.
Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \lambda x + \alpha \end{aligned} \tag{27.937}$$

avec $\lambda \neq 0$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) et $\alpha \in \mathbb{C}$.
Soit $q \in \mathbb{C}$. Nous avons[122]

$$f_q\big(\phi(x)\big) = \lambda f_{\phi^{-1}(q)}(x). \tag{27.938}$$

Démonstration. En ce qui concerne la multiplication nous avons $f_q(\lambda x) = \lambda x - q$, et donc

$$\frac{1}{\lambda} f_q(\lambda x) = x - \frac{q}{\lambda} = f_{q/\lambda}(x). \tag{27.939}$$

Nous retenons : $f_q(\lambda x) = \lambda f_{q/\lambda}(x)$. En ce qui concerne la translation, c'est plus facile :

$$f_q(x + \alpha) = x + \alpha - q = f_{q-\alpha}(x). \tag{27.940}$$

Lorsque nous faisons les deux en même temps,

$$f_q\big(\phi(x)\big) = f_{q-\alpha}(\lambda x) = \lambda f_{(q-\alpha)/\lambda}(x). \tag{27.941}$$

Il suffit maintenant de remarquer que $\phi^{-1}(q) = \frac{q-\alpha}{\lambda}$, ce qui est facilement vérifié :

$$\phi\left(\frac{q-\alpha}{\lambda}\right) = \lambda\left(\frac{q-\alpha}{\lambda}\right) + \alpha = q. \tag{27.942}$$

□

LEMooBZUCooHWfolf

Lemme 27.201 ([235])**.**
Soit un lacet de Jordan[123] *$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Nous notons Γ son image.*

(1) Γ est compact.

(2) L'application[124]

$$\begin{aligned} I_\gamma\colon \mathcal{G}(\Gamma) &\to \mathbb{Z} \\ f &\mapsto \mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0) \end{aligned} \tag{27.943}$$

est un morphisme surjectif de noyau $\mathcal{E}(\Gamma)$.

[122] L'application f_q est celle de la définition 27.199.
[123] Définition 20.75.
[124] Rappel définitions 27.197 pour $\mathcal{G}(\Gamma)$ et $\mathcal{E}(\Gamma)$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{L}(J,\mathbb{C}^*)$ le groupe multiplicatif des lacets $J\to\mathbb{C}^*$. Le fait que Γ soit compact est parce qu'il est l'image du compact $[a,b]$ par l'application continue γ (théorème 7.275).

Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\xi\colon \mathcal{G}(\Gamma)&\to\mathcal{L}(J,\mathbb{C}^*)\\ f&\mapsto f\circ\gamma.\end{aligned}\tag{27.944}$$

(1) **ξ est un morphisme** Nous avons

$$\xi(fg)=(fg)\circ\gamma=(f\circ\gamma)(g\circ\gamma)=\xi(f)\xi(g).\tag{27.945}$$

(2) **ξ est injective** Nous nous souvenons de l'application quotient $\tilde{\gamma}\colon S^1\to\Gamma$, qui est un homéomorphisme par le lemme 27.195(1). Nous nous souvenons également de l'application

$$\begin{aligned}q\colon [a,b]&\to\mathbb{C}\\ t&\mapsto\exp\big(2i\pi t/(b-a)\big)\end{aligned}\tag{27.946}$$

qui vérifie $\gamma=\tilde{\gamma}\circ q$. Nous montrons que ceci est l'inverse de ξ :

$$\begin{aligned}\theta\colon \mathcal{L}(J,\mathbb{C}^*)&\to\mathcal{G}(\Gamma)\\ \lambda&\mapsto\tilde{\lambda}\circ\tilde{\gamma}^{-1}.\end{aligned}\tag{27.947}$$

Soit $\sigma\in\mathcal{L}(J,\mathbb{C}^*)$. Nous avons

$$\xi\big(\theta(\sigma)\big)=\theta(\sigma)\circ\gamma=\tilde{\sigma}\circ\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma=\tilde{\sigma}\circ\tilde{\gamma}^{-1}\circ\tilde{\gamma}\circ q=\tilde{\sigma}\circ q=\sigma.\tag{27.948}$$

(3) **Conclusion 1** La proposition 26.56 donne un morphisme surjectif $\psi\colon\mathcal{L}(J,\mathbb{C}^*)\to\mathbb{Z}$. L'application I_γ dont nous parlons ici est exactement $I_\gamma=\psi\circ\xi$. Donc I_γ est un morphisme surjectif.

(4) **Noyau** Nous devons encore montrer que le noyau de I_γ est $\mathcal{E}(\Gamma)$.

(4a) **Dans un sens** Soit $k\in\ker(I_\gamma)$. Alors $(\psi\circ\xi)(k)=0$, c'est-à-dire $\psi(k\circ\gamma)=0$. La proposition 26.56(3) dit qu'alors $k\circ\gamma$ est un lacet homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet constant. Donc il existe une application continue $H\colon[0,1]\times[a,b]\to\mathbb{C}^*$ telle que

$$\begin{cases}H(0,t)=(k\circ\gamma)(t) & \text{(27.949a)}\\ H(1,t)=1 & \text{(27.949b)}\end{cases}$$

pour tout t. Vu que l'application $\gamma\colon[a,b[\to\mathbb{C}^*$ est injective, nous pouvons considérer son inverse ; pour la suite, quand nous écrirons γ^{-1}, c'est bien de $\gamma^{-1}\colon\Gamma\to[a,b[$ que nous parlerons. C'est une application continue par le lemme 7.279. Nous pouvons donc considérer

$$\begin{aligned}L\colon[0,1]\times\Gamma&\to\mathbb{C}^*\\ (u,z)&\mapsto H\big(u,\gamma^{-1}(z)\big).\end{aligned}\tag{27.950}$$

Cela est une application continue parce que H et γ le sont. Nous avons

$$L(0,z)=H\big(0,\gamma^{-1}(z)\big)=(k\circ\gamma)\big(\gamma^{-1}(z)\big)=k(z),\tag{27.951}$$

et

$$L(1,z)=1.\tag{27.952}$$

Donc k est homotope à une application constante sur Γ. Le théorème de Borsuk 26.48 dit alors que k admet un logarithme continu sur Γ, c'est-à-dire que $k\in\mathcal{E}(\Gamma)$.

(4b) **Dans l'autre sens** C'est le même raisonnement que le premier, mais un peu plus simple parce qu'il n'y a pas de débats sur la continuité. Soit $k\in\mathcal{E}(\Gamma)$. Le théorème de Boruk indique que k est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à une application constante. Il existe une application continue $H\colon[0,1]\times\Gamma\to\mathbb{C}^*$ telle que

$$\begin{cases}H(0,z)=k(z) & \text{(27.953a)}\\ H(1,z)=1 & \text{(27.953b)}\end{cases}$$

pour tout $z\in\Gamma$. Le chemin $k\circ\gamma$ est homotope à un lacet constant. En effet nous avons l'application continue

$$\begin{aligned}L\colon[0,1]\times[a,b]&\to\mathbb{C}^*\\ (u,t)&\mapsto H\big(u,\gamma(t)\big)\end{aligned}\tag{27.954}$$

qui vérifie $L(0,t)=(k\circ\gamma)(t)$ et $L(1,t)=1$. Nous avons donc

$$0=\psi(k\circ\gamma)=I_\gamma(k).\tag{27.955}$$

Nous avons prouvé que $k\in\ker(I_\gamma)$.

□
LEMooODIPooBZJPAW

Lemme 27.202 ([235]).
Soit un lacet de Jordan γ dont l'image est Γ. Des fonctions $f_0, f_1 \in \mathcal{G}(\Gamma)$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ si et seulement si les lacets $f_0 \circ \gamma$ et $f_1 \circ \gamma$ le sont.

Démonstration. Dans les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que f_0 et f_1 sont homotopes : il existe une application continue $H\colon [0,1]\times\Gamma \to \mathbb{C}^*$ telle que

$$\begin{cases} H(0,z) = f_0(z) & \text{(27.956a)} \\ H(1,z) = f_1(z) & \text{(27.956b)} \end{cases}$$

pour tout $z \in \Gamma$. L'homotopie entre $f_0 \circ \gamma$ et $f_1 \circ \gamma$ est donnée par l'application continue

$$\begin{aligned} L\colon [0,1] \times [a,b] &\to \mathbb{C}^* \\ (u,t) &\mapsto H\big(u,\gamma(t)\big). \end{aligned} \tag{27.957}$$

Elle vérifie $L(0,t) = (f_0 \circ \gamma)(t)$ et $L(1,t) = (f_1 \circ \gamma)(t)$.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons l'existence d'une application continue $H\colon [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}^*$ telle que $H(0,t) = (f_0 \circ \gamma)(t)$ et $H(1,t) = (f_1 \circ \gamma)(t)$.

L'application $\gamma\colon [a,b[\to \Gamma$ est continue et bijective. Sa réciproque γ^{-1} est donc également continue (lemme 7.279). Nous pouvons donc considérer l'application continue

$$\begin{aligned} L\colon [0,1] \times \Gamma &\to \mathbb{C}^* \\ (u,z) &\mapsto H\big(u,\gamma^{-1}(z)\big). \end{aligned} \tag{27.958}$$

Elle vérifie

$$L(0,z) = H\big(0,\gamma^{-1}(z)\big) = (f_0 \circ \gamma)\big(\gamma^{-1}(z)\big) = f_0(z) \tag{27.959}$$

et $L(1,z) = f_1(z)$. Donc L est une homotopie dans C^* entre f_0 et f_1.

□
CORooDOMAooHtKPTe

Corolaire 27.203 ([235]).
Si Γ est une courbe de Jordan, alors[125] $G(\Gamma) \simeq \mathbb{Z}$.

Démonstration. Nous allons utiliser le premier théorème d'isomorphisme 2.7. Si γ est un lacet de Jordan dont la courbe est Γ, le lemme 27.201 dit que $I_\gamma\colon \mathcal{G}(\Gamma) \to \mathbb{Z}$ est un morphisme surjectif tel que $\ker(I_\gamma) = \mathcal{E}(\Gamma)$. Le théorème d'isomorphisme dit alors que

$$\frac{\mathcal{G}(\Gamma)}{\mathcal{E}(\Gamma)} = I_\gamma\big(\mathcal{G}(\Gamma)\big) = \mathbb{Z}. \tag{27.960}$$

□

Rappel, si K est compact dans $\mathbb{C}$, et si $p \in \mathbb{C}$, nous considérons la fonction $f_p \in \mathcal{G}(K)$ par $f_p(z) = z - p$.
LEMooAKVFooFMHaOZ

Lemme 27.204 ([1]).
Soient une courbe de Jordan γ ainsi que $p \in \mathbb{C}$. Nous avons

$$\operatorname{Ind}(f_p \circ \gamma, 0) = \operatorname{Ind}(\gamma, p). \tag{27.961}$$

PROPooUPPEooEQOOkh

Proposition 27.205 ([235]).
Soit $p \in \mathbb{C}$. Si V est un disque ou un rectangle de centre p, alors $\mathcal{G}(\partial V)$ est engendré par $\mathcal{E}(\partial V)$ et par f_p.

Démonstration. Ici ∂V peut être vu comme un chemin que nous allons noter aussi γ. Utilisant le lemme 27.204, nous avons

$$I_{\partial V}(f_p) = \operatorname{Ind}(f_p \circ \partial V, 0) = \operatorname{Ind}(\partial V, p). \tag{27.962}$$

EQooRSXRooTJwDNP

[125] Rappel : $G(\Gamma)$ est défini en 27.197.

(1) **Si V est un disque** Alors ∂V est le chemin

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,2\pi] &\to \mathbb{C}\\ t &\mapsto p+Re^{it}.\end{aligned} \tag{27.963}$$

Nous avons alors le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(\gamma,p) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-p}dt && (27.964a)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{Rie^{it}}{Re^{it}}dt && (27.964b)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} idt && (27.964c)\\ &= 1. && (27.964d)\end{aligned}$$

(2) **Si V est un rectangle** Supposons que V ait une hauteur de h et une largeur de l tout en étant centré en p. Le chemin ∂V se décompose en quatre parties dont la première est

$$\begin{aligned}\gamma_1\colon [0,l] &\to \mathbb{C}\setminus\{p\}\\ t &\mapsto p-\frac{hi}{2}-\frac{l}{2}+t\end{aligned} \tag{27.965}$$

Je vous laisse voir les autres parties et calculer les intégrales[126]

Dans les deux cas nous avons $\operatorname{Ind}(\partial V,p)=1$ et donc, en continuant (27.962),

$$I_{\partial V}(f_p)=1. \tag{27.966}$$

Nous savons par le lemme 27.201 que

$$\begin{aligned}I_{\partial V}\colon \mathcal{G}(\partial V) &\to \mathbb{Z}\\ f &\mapsto \operatorname{Ind}(f\circ\gamma,0)\end{aligned} \tag{27.967}$$

est un morphisme surjectif de noyau $\mathcal{E}(\Gamma)$. Le fait que ce soit un morphisme implique que

$$I_{\partial V}(f_p^n)=nI_{\partial V}(f_p)=n. \tag{27.968}$$

Mais $G(\partial V)=\mathcal{G}(\partial V)/\mathcal{E}(\partial V)$. Donc nous avons déjà prouvé que $\{f_p^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ contient un élément de chaque classe dans $\mathcal{G}(\partial V)/\mathcal{E}(\partial V)$.

Soit $f\in\mathcal{G}(\partial V)$. En notant [.] la classe par rapport à $\mathcal{E}(\partial V)$, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que

$$f\in\big[I_{\partial V}(f_p^k)\big]. \tag{27.969}$$

Autrement dit, en posant $\alpha=I_{\partial V}(f_p^k)$, il existe $h\in\mathcal{E}(\partial V)$ tel que $f=\alpha h$. Nous avons donc bien prouvé que $\{f_p,\mathcal{E}(\partial V)\}$ engendre $\mathcal{G}(\partial V)$. □

PROPooJNZQooLWDKww

Proposition 27.206 ([235]).
Soit un compact K de $\mathbb{C}$ ainsi que p,q deux points dans la même composante connexe de $\mathbb{C}\setminus K$. Alors

ITEMooQMKOooQHhUGn

(1) $f_p/f_q\in\mathcal{E}(K)$.

ITEMooUJLPooApgXIF

(2) Si p est dans la composante non bornée[127] de $\mathbb{C}\setminus K$, alors $f_p\in\mathcal{E}(K)$.

Démonstration. Soient p et q dans la même composante connexe de $\mathbb{C}\setminus K$. La proposition 9.68 nous autorise à considérer un chemin $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{C}\setminus K$ tel que $\gamma(0)=p$ et $\gamma(1)=q$. Nous posons

$$\begin{aligned}F\colon [0,1]\times K &\to \mathbb{C}^*\\ (t,z) &\mapsto f_{\gamma(t)}(z)=z-\gamma(t).\end{aligned} \tag{27.970}$$

C'est une application continue vérifiant $F(0,z)=f_p(z)$ et $F(1,z)=f_q(z)$. Donc les applications f_p et f_q sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$. La proposition 26.16 nous indique qu'alors l'application f_p/f_q est homotope à 1. Le théorème de Borsuk 26.48 conclut que $f_p/f_q\in\mathcal{E}(K)$.

[126] Je n'ai pas vérifié ; si ça pose un problème, écrivez-moi.
[127] Il y en a une seule, c'est le lemme 26.50.

Soit p dans la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Vu que K est borné, nous pouvons prendre $r > 0$ tel que $K \subset B(0,r)$. Soit $p_0 \notin \overline{B(0,r)}$; ce point est également dans la composante non bornée de K. Par le point (1), nous avons $f_p/f_{p_0} \in \mathcal{E}(K)$.

Nous allons prouver que $f_{p_0} \in \mathcal{E}(K)$. Pour cela nous posons

$$\begin{aligned} F\colon [0,1] \times K &\to \mathbb{C}^* \\ (t,z) &\mapsto tz - p_0. \end{aligned} \tag{27.971}$$

Vu que $t \in [0,1]$ et que $z \in K \subset B(0,r)$, nous avons toujours $tz \in B(0,r)$. Étant donné que p_0 n'est pas dans $B(0,r)$, l'application F prend bien ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$.

L'application F vérifie également $F(0,z) = -p_0$ et $F(1,z) = z - p_0 = f_{p_0}(z)$. Donc f_{p_0} est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à l'application constante $-p_0$. Nous en déduisons que $f_{p_0} \in \mathcal{E}(K)$. Au final,

$$f_p = f_{p_0} \frac{f_p}{f_{p_0}} \in \mathcal{E}(K) \tag{27.972}$$

parce que f_{p_0} et f_p/f_{p_0} sont dans $\mathcal{E}(K)$. □

LEMooOTMGooZeUoCy

Lemme 27.207 ([235]).
Soient des composantes connexes bornées $\mathcal{O}_1$, …, $\mathcal{O}_N$ de $\mathbb{C} \setminus K$ que nous supposons deux à deux disjointes. Soient $p_i \in \mathcal{O}_i$. Si $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{Z}$ sont des entiers non tous nuls, alors

$$\prod_{i=1}^{N} f_{p_i}^{n_i} \notin \mathcal{E}(K). \tag{27.973}$$

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Par l'absurde** Nous notons $f = \prod_{i=1}^{N} f_{p_i}^{n_i}$ et nous supposons par l'absurde que $f \in \mathcal{E}(K)$. Par le théorème de Borsuk 26.48, nous avons une extension continue $\tilde{f}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

(2) $\partial\mathcal{O}_i \subset K$ C'est le lemme 7.250.

(3) **p_j n'est pas dans $\bar{\mathcal{O}}_i$** Nous savons que $p_j \in \mathcal{O}_j$. Mais $\partial\mathcal{O}_i \subset K$ et $K \cap \mathcal{O}_j = \varnothing$. Donc p_j n'est pas dans $\partial\mathcal{O}_i$. Comme les $\mathcal{O}_i$ sont disjoints, nous avons aussi $p_j \notin \mathcal{O}_i$. Bref,

$$p_j \notin \bar{\mathcal{O}}_i. \tag{27.974}$$

(4) **Quelques fonctions** Nous posons

$$\begin{aligned} G_i\colon \bar{\mathcal{O}}_i &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \prod_{j \neq i} (z - p_j)^{n_j}. \end{aligned} \tag{27.975}$$

Le fait que G_i prenne ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$ est parce que $p_j \notin \bar{\mathcal{O}}_i$ pour tout $i \neq j$.

Nous reprenons notre extension continue $\tilde{f}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ et nous posons

$$\begin{aligned} F_i\colon \bar{\mathcal{O}}_i &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \frac{\tilde{f}(z)}{G_i(z)}. \end{aligned} \tag{27.976}$$

Vu que G_i ne s'annule pas sur $\bar{\mathcal{O}}_i$, cette fonction F_i est bien définie et continue.

Nous nous fixons i, et nous allons prouver que $n_i = 0$. Nous posons $D = B(0,R)$ avec R assez grand pour contenir $\bar{\mathcal{O}}_i$. Posons

$$\begin{aligned} H_i\colon \overline{B(0,R)} &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \begin{cases} F_i(z) & \text{si } z \in \bar{\mathcal{O}}_i \\ (z - p_i)^{n_i} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{27.977}$$

(5) **H_i est continue** L'application F_i est continue sur $\bar{\mathcal{O}}_i$. L'application $z \mapsto (z - p_i)^{n_i}$ est continue sur $\mathbb{C}$.

Soit $z \in \partial\mathcal{O}_i$. Nous avons $z \in \partial\mathcal{O}_i \subset K$ et donc $\tilde{f}(z) = f(z)$. Donc

$$F_i(z) = \frac{f(z)}{G_i(z)} = f_{p_i}(z)^{n_i}. \tag{27.978}$$

Les deux applications F_i et $z \mapsto (z - p_i)^{n_i}$ sont égales sur le bord $\partial\mathcal{O}_i$. Donc H_i est continue sur $\overline{B(0,R)}$.

(6) **Logarithme continu** La partie $\overline{B(0,R)}$ est convexe et compacte. Le corolaire 26.49 dit que H_i admet un logarithme continu. La proposition 26.59 nous affirme que pour tout lacet $\gamma\colon [0,1] \to \overline{B(0,R)}$, nous avons $\text{Ind}(H_i \circ \gamma, 0) = 0$. En particulier le chemin $\partial B(0,R)$ est dans $\overline{B(0,R)}$. Avant de calculer $\text{Ind}(H_i \circ \gamma, 0)$, remarquons que $\gamma(t) \in \overline{B(0,R)}$ et reste donc en-dehors de $\bar{\mathcal{O}}_i$. Donc

$$H_i\big(\gamma(t)\big) = \big(\gamma(t) - p_i\big)^{n_i} \tag{27.979}$$

et

$$(H_i \circ \gamma)'(t) = n_i\gamma'(t)\big(\gamma(t) - p_i\big)^{n_i - 1}. \tag{27.980}$$

De plus si vous voulez une forme explicite de γ, c'est pas compliqué : c'est un cercle de rayon R. Nous avons un calcul :

$$\begin{aligned}
0 = \text{Ind}(H_i \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{H_i\circ\gamma} \frac{dz}{z} && \text{(27.981a)}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{(H_i \circ \gamma)'(t)}{(H_i \circ \gamma)(t)} && \text{(27.981b)}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{n_i\gamma'(t)\big(\gamma(t) - p_i\big)^{n_i-1}}{\big(\gamma(t) - p_i\big)^{n_i}} && \text{(27.981c)}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{n_i\gamma'(t)}{\gamma(t) - p_i}dt && \text{(27.981d)}\\
&= n_i\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - p_i} && \text{(27.981e)}\\
&= n_i\,\text{Ind}(\gamma, p_i). && \text{(27.981f)}
\end{aligned}$$

Vu que $p_i \in B(0,R)$ et que γ est un cercle autour, nous avons $\text{Ind}(\gamma, p_i) = 1$. Donc

$$0 = \text{Ind}(H_i \circ \gamma, 0) = n_i. \tag{27.982}$$

□

LEMooEJRMooNJhMov

Lemme 27.208 ([235, 1])**.**
Nous notons $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ les composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$. Pour chaque $i \in I$ nous considérons $p_i \in \mathcal{O}_i$. Alors

$$\mathcal{G}(K) = \text{gr}\big(\mathcal{E}(K), \{f_{p_i}\}_{i\in I}\big). \tag{27.983}$$

Démonstration. Nous commençons par prouver que si $q \in \mathbb{C} \setminus K$, alors

$$f_q \in \text{gr}\big(\mathcal{E}(K), \{f_{p_i}\}_{i\in I}\big). \tag{27.984}$$

Il y a deux possibilités : soit q est dans la composante non bornée, soit il est dans un des $\mathcal{O}_i$.

(1) **Si q est dans la composante non bornée** Alors la proposition 27.206(2) dit que $f_q \in \mathcal{E}(K)$.

(2) **Si $q \in \mathcal{O}_i$** Alors la proposition 27.206(1) dit que $f_q/f_{p_i} \in \mathcal{E}(K)$. Dans ce cas nous avons

$$f_q = f_{p_i}\frac{f_q}{f_{p_i}} \in \text{gr}\big(f_{p_i}, \mathcal{E}(K)\big). \tag{27.985}$$

Soit $f \in \mathcal{G}(K)$. Nous devons prouver l'existence de $g \in \mathcal{E}(K)$, $q_1, \dots, q_l \in \mathbb{C} \setminus K$ et $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{Z}$ tels que

$$f = g\prod_{i=1}^{l} f_{q_i}^{m_i}. \tag{27.986}$$

Nous commençons par supposer que $K \subset Q = [0,1] \times [0,1]$.

(1) **Les petits carrés** Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous subdivisons le carré Q en carrés fermés de taille $1/n$; il y a n^2 tels carrés. Nous notons $Q_1, \dots, Q_l$ ceux qui n'ont pas d'intersection avec K, et nous notons A l'union des autres.

Grâce au lemme 10.39, nous savons que pour tout $z \in A$, nous avons $d(z, K) \leqslant \sqrt{2}/n$.

(2) **Prolongement** La partie K est fermée, f est continue dessus. Le théorème de Tietze 27.176 donne un prolongement continu $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Nous avons

$$K \subset S = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } F(z) \neq 0\}. \tag{27.987}$$

Vu que F est continue, S est ouverte.

(3) **Grand n** Nous prouvons que n peut être choisi assez grand pour que F ne s'annule pas sur A. La fonction F est continue et ne s'annule pas sur l'ouvert S qui contient K. Si $S = \mathbb{C}$, alors n'importe quel n convient.

Sinon nous considérons

$$\begin{aligned} \varphi\colon K &\to [0, \infty[\\ z &\mapsto d(z, S^c). \end{aligned} \tag{27.988}$$

L'application φ est continue sur le compact K. Elle a donc un minimum global que nous nommons s. Pour tout $z \in K$ nous avons $d(z, S^c) \geqslant s$. Donc pour tout $z \in K$ nous avons $B(z, s/2) \subset S$. Nous prenons n assez grand pour avoir

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{s}{2}. \tag{27.989}$$ EQooEWQYooWYsImg

Avec ça nous avons $A \subset S$. En effet, soit $z \in A$. Nous avons $d(z, K) < \sqrt{2}/n < s/2$. Donc il existe $k \in K$ tel que

$$z \in B(k, \frac{s}{2}). \tag{27.990}$$

Comme $k \in K$, nous avons $d(k, S^c) = \varphi(k) \geqslant s$ et donc $B(k, s/2) \subset S$. Nous avons prouvé que $z \in S$.

Bref, nous prenons n assez grand pour vérifier (27.989), et nous avons alors

$$A \subset \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } F(z) \neq 0\}. \tag{27.991}$$

(4) **Une propriété à prouver** SPooVQHTooUNukEE Nous allons prouver l'énoncé suivant. Soit $k = 0, \dots, l$, soit une application continue $h\colon K \to \mathbb{C}^*$ admettant un prolongement continu $F\colon A \cup (Q_1 \cup \dots \cup Q_k) \to \mathbb{C}^*$. Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que l'application $h/f_{q_{k+1}}^m$ admette un prolongement continu $\tilde{F}\colon A \cup (Q_1 \cup \dots \cup Q_{k+1}) \to \mathbb{C}^*$.

(5) **Note pour f**

Jusqu'ici, nous avons prouvé que f vérifie les hypothèses de la récurrence pour $k = 0$.

De plus, cette propriété à prouver n'est pas à prouver par récurrence sur k. Le k est fixé, et nous prouvons la propriété de façon directe. Une récurrence va venir un peu plus loin.

(6) **Preuve de la propriété** Soit $h\colon K \to \mathbb{C}^*$ continue et admettant un prolongement continu $F\colon A \cup (Q_1 \cup \dots \cup Q_k) \to \mathbb{C}^*$. Notons $B_k = A \cup (Q_1 \cup \dots \cup Q_k)$ et posons

$$\begin{aligned} g\colon \partial Q_{k+1} &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \begin{cases} F(z) & \text{si } z \in Q_{k+1} \cap B_k \\ s(z) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{27.992}$$

Voyons ce que s peut être pour que g soit continue. La partie ∂Q_{k+1} est le bord d'un carré et est donc constitué de 4 côtés. La valeur de g sur certains de ces côtés (ceux qui sont aussi dans B_k) est prescrite par F. Sur les autres côtés, nous pouvons mettre n'importe quoi pourvu que ce soit égal à F sur les coins et que $s(z) \neq 0$. Étant donné que les valeurs de F sur les coins est non nulle et que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, c'est possible.

Nous notons q_{k+1} le centre de Q_{k+1}. La proposition 27.205 s'applique au compact ∂Q_{k+1}.

$$g \in \mathcal{G}(\partial Q_{k+1}) = \operatorname{gr}\big(\mathcal{E}(\partial Q_{k+1}), f_{q_{k+1}}\big). \tag{27.993}$$

Il existe donc $\xi \in \mathcal{E}(\partial Q_{k+1})$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que

$$g(z) = \xi(z) f_{q_{k+1}}^m(z). \tag{27.994}$$

Prouvons que $Q_{k+1} \cap B_k$ est une union de côtés de Q_{k+1}. Nous avons

$$Q_{k+1} \cap B_k = (Q_{k+1} \cap A) \cup (Q_{k+1} \cap Q_1) \cup \ldots \cup (Q_{k+1} \cap Q_k). \tag{27.995}$$

EQooSPSQooVErzCI

Nous nous souvenons que $A = \bigcup_{i=1}^{s} R_i$ où R_i sont les carrés qui intersectent K. Donc $R_i \cap Q_j$ est au maximum les côtés de Q_j. Bref, chacun des termes de l'union à droite de (27.995) est une union de côtés de Q_{k+1}.

L'application $\xi \in \mathcal{E}(\partial Q_{k+1})$ admet un logarithme continu et admet donc une extension continue $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ (théorème de Borsuk 26.48). Nous considérons cette extension seulement sur Q_{k+1} et nous l'appelons $G\colon Q_{k+1} \to \mathbb{C}^*$. Nous posons

$$\begin{aligned} \tilde{F}\colon A \cup (Q_1 \cup \ldots \cup Q_{k+1}) &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \begin{cases} G(z) & \text{si } z \in Q_{k+1} \\ \frac{F(z)}{(z-q_{k+1})^m} & \text{si } z \in A \cup (Q_1 \cup \ldots \cup Q_k). \end{cases} \end{aligned} \tag{27.996}$$

Voyons que cette fonction est continue en montrant que les deux morceaux ont les mêmes valeurs sur l'intersection. Soit $z \in Q_{k+1} \cap (A \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_k)$. Alors $z \in \partial Q_{k+1}$ parce que nous avons dit que (27.995) est dans le bord dans Q_{k+1}. Dans ce cas nous avons

$$G(z) = \xi(z) = \frac{g(z)}{f_{q_{k+1}}^m(z)} \tag{27.997a}$$

$$= \frac{F(z)}{f_{q_{k+1}}^m(z)}, \tag{27.997b}$$

(27.997c)

et donc bien la continuité de $\tilde{F}$.

Si $z \in K$, étant donné que $K \subset A$ nous avons

$$\tilde{F}(z) = \frac{F(z)}{(z - q_{q_{k+1}})^m} = \frac{h(z)}{f_{q_{k+1}}^m(z)}, \tag{27.998}$$

donc $\tilde{F}$ prolonge bien $h/f_{q_{k+1}}^m$.

(7) **Récurrence** En appliquant la propriété (4) l fois, nous construisons une suite d'entiers $(m_i)_{i=1,\ldots,l}$ et une application continue $F_l\colon A \cup (Q_1 \cup \ldots \cup Q_l) = Q \to \mathbb{C}^*$ qui prolonge $f / \prod_{i=1}^{l} f_{q_i}^{m_i}$.

Sur K nous avons alors

$$f = F_l \prod_{i=1}^{l} f_{q_i}^{m_i}. \tag{27.999}$$

C'est une application continue sur le convexe Q. Donc $F_l \in \mathcal{E}(Q)$ et donc $F_l \in \mathcal{E}(K)$.

Maintenant vous croyez avoir fini mais non. Vous devez encore vérifier que tout est encore valable si K n'est pas contenu dans $[0,1] \times [0,1]$.

Soit un compact général $K \subset \mathbb{C}$. Pour $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, nous posons $\phi(x) = \lambda x + \alpha$. Il existe forcément un choix de λ et de α tels que $\phi(K) \subset [0,1] \times i[0,1]$.

Soit $f \in \mathcal{G}(K)$. Nous appliquons le résultat déjà prouvé à l'application $f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{G}\big(\phi(K)\big)$. Nous avons $g \in \mathcal{E}\big(\phi(K)\big)$, $q_1, \ldots, q_l \in \mathbb{C} \setminus \phi(K)$ et $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{Z}$ tels que, pour tout $y \in \phi(K)$,

$$(f \circ \phi^{-1})(y) = g(y) \prod_{i=1}^{l} f_{q_i}^{m_i}(y). \tag{27.1000}$$

Pour $x \in K$ nous avons donc

$$f(x) = (g \circ \phi)(x) \prod_{i=1}^{l} f_{q_i}^{m_i}\big(\phi(x)\big). \tag{27.1001}$$

C'est le moment de sortir le lemme 27.200 :

$$f(x) = (g \circ \phi)(x) \prod_{i=1}^{l} f_{q_i}^{m_i}\big(\phi(x)\big) = (g \circ \phi)(x) \prod_{i=1}^{l} \lambda^{m_i} f_{\phi^{-1}(q_i)}^{m_i}(x). \tag{27.1002}$$

En posant

$$\begin{cases} \tilde{g}(x) = \left(\prod_{i=1}^{l} \lambda^{m_i} \right) (g \circ \phi)(x) & (27.1003a) \\ \tilde{m}_i = m_i & (27.1003b) \\ \tilde{q}_i = \phi^{-1}(q_i), & (27.1003c) \end{cases}$$

nous avons $\tilde{q}_i \in \mathbb{C} \setminus K$, $\tilde{g} \in \mathcal{E}(K)$ et $f = \tilde{g} \prod_{i=1}^{l} f_{\tilde{q}_i}$. □

LEMooBHOGooXxBYGA

Lemme 27.209.
Une partie ouverte de $\mathbb{C}$ a au plus un nombre dénombrable de composantes connexes.

Démonstration. Soit un ouvert A de $\mathbb{C}$. Nous notons $\mathcal{B}$ une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{C}$ (proposition 7.188). Une composante connexe de A est ouverte[128]. Les composantes connexes de A sont disjointes, et chacune est l'union d'une quantité (au plus) dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}$. Si il y avait une quantité non dénombrable de composantes connexes, cela ferait une quantité non dénombrable d'éléments différents de $\mathcal{B}$. Donc non. □

THOooDGXSooMMHTds

Théorème 27.210.
Soit un compact K dans $\mathbb{C}$. Alors

(1) Le nombre de composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$ est fini ou dénombrable.

ITEMooWLGDooZGORrP

(2) En notant N le nombre de composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$, nous avons

$$G(K) = \mathcal{G}(K)/\mathcal{E}(K) \simeq \mathbb{Z}^N \tag{27.1004}$$

où, si N est infini, $\mathbb{Z}^N$ désigne l'ensemble des suites finies dans $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Le fait que le nombre de composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$ est au maximum dénombrable est le lemme 27.209.

Soient $\{\mathcal{O}_i\}_{i=0,\dots,N}$ les composantes connexe bornées de $\mathbb{C} \setminus K$ (avec $i \in \mathbb{N}$ dans le cas où N il y a une infinité dénombrable de composants connexes). Pour chaque i nous prenons un élément $p_i \in \mathcal{O}_i$. Nous notons aussi $\pi : \mathcal{G}(K) \to G(K)$ le morphisme canonique. Nous posons

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}^N &\to G(K) \\ n &\mapsto \prod_{i=1}^{N} \pi(f_{p_i})^{n_i}. \end{aligned} \tag{27.1005}$$

Notez que le produit a toujours un sens parce que $n \in \mathbb{Z}^N$ est toujours une suite finie (de taille N ou arbitraire) d'entiers. Pas de soucis de convergence.

(1) **ϕ est un morphisme** Sur $\mathbb{Z}^n$, nous mettons l'addition $(a+b)_i = a_i + b_i$. Si $N = \infty$ et si a et b ont des longueurs différentes, on prend pour N le maximum des deux longueurs. Nous avons :

$$\phi(a)\phi(b) = \prod_{i=1}^{N} \pi(f_{p_i})^{a_i} \prod_{j=1}^{N} \pi(f_{p_j})^{b_j} \tag{27.1006a}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \pi(f_{p_i})^{a_i + b_i} \tag{27.1006b}$$

$$= \phi(a+b). \tag{27.1006c}$$

(2) **ϕ est injective** Soit $a \in \mathbb{Z}^N$. Si $a \neq 0$, alors le lemme 27.207 nous dit que $\prod_{i=1}^{N} f_{p_i}^{a_i} \notin \mathcal{E}(K)$. Vu que dans $G(K)$, le zéro est $\mathcal{E}(K)$, nous avons $\prod_{i=1}^{N} \pi(f_{p_i})^{a_i} \neq 0$ dès qu'un des a_i est non nul.

(3) **ϕ est surjective** Soit $F \in G(K)$. Vu que π est surjective, il existe $f \in \mathcal{G}(K)$ tel que $\pi(f) = F$. Le lemme 27.208 nous dit qu'il existe $g \in \mathcal{E}(K)$ et $a \in \mathbb{Z}^N$ tels que

$$f = g \prod_{i=1}^{N} f_{p_i}^{a_i}. \tag{27.1007}$$

[128] Proposition 7.249 et le fait que $\mathbb{C}$ est localement convexe.

Nous avons alors

$$F = \pi(f) = \pi(g)\pi\left(\prod_{i=1}^{N} f_{p_i}^{a_i}\right) = \prod_{i=1}^{N} \pi(f_{p_i})^{a_i} = \phi(a). \tag{27.1008}$$

□

DEFooWQSAooDQYaip

Définition 27.211 ([235, 1]).
*Si $(G,+)$ est un groupe abélien, la **pseudo-dimension** de G est le cardinal maximum des familles $\mathbb{Z}$-indépendantes de G.*

Dans ce contexte, une famille $\mathbb{Z}$-indépendante est une partie $\{a_i\}_{i\in I}$ de G telle que si $\sum_i z_i a_i = 0$ avec $z_i \in \mathbb{Z}$, alors $z_i = 0$ pour tout i.

Si il existe une partie libre idempotente à un ensemble A, mais pas de parties libres surpotentes[129] *à A, nous disons que la pseudo-dimension de G est « la cardialité de A ».*

Dans tous les cas, nous notons $\operatorname{pdim}(G)$ *la pseudo-dimension de G.*

LEMooPASKooFGJgBz

Lemme 27.212 ([235, 1]).
À propos de pseudo-dimension.

(1) La pseudo-dimension de $\mathbb{Z}^n$ est n.

(2) La pseudo-dimension de $\mathbb{Z}^\infty$[130] *est la cardinalité de $\mathbb{N}$.*

Démonstration. Nous commençons par le cas de $\mathbb{Z}^n$ et nous ferons $\mathbb{Z}^\infty$ après.

(1) $\geqslant n$ Prenons la base canonique $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de $\mathbb{Z}^n$. C'est une partie $\mathbb{Z}$-indépendante de $\mathbb{Z}^n$. Donc la pseudo-dimension de $\mathbb{Z}^n$ est plus grande ou égale à n.

(2) $\leqslant n$ Dans l'autre sens, supposons que $\{a_i\}_{i\in I}$ soit $\mathbb{Z}$-indépendant dans $\mathbb{Z}^n$. Pour rappel, la définition 4.1 de partie libre ne parle que de sommes finies.

Prouvons que $\{a_i\}_{i\in I}$ est $\mathbb{Q}$-libre dans $\mathbb{Q}^n$. Soient une partie finie J de I ainsi que des rationnels $\{q_j\}_{j\in J}$ que $\sum_{j\in J} q_j a_j = 0$. Nous pouvons utiliser le lemme 1.513 pour considérer $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que $kq_j \in \mathbb{Z}$ pour tout j (ici il est crucial que J soit fini, sinon on ne peut pas prendre un maximum). Dans ce cas nous avons $\sum_{j\in J} kq_j a_j = 0$, ce qui montre que $\{a_i\}$ n'est pas $\mathbb{Z}$-indépendante.

L'intérêt de $\mathbb{Q}$ est d'être un corps (alors que $\mathbb{Z}$ ne l'est pas). Nous savons que $\mathbb{Q}^n$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension n. Il ne contient donc pas de parties $\mathbb{Q}$-libres de cardinal plus grand que n.

Nous passons maintenant à la preuve pour $\mathbb{Z}^\infty$[1]. L'existence d'une partie dénombrable et $\mathbb{Z}$-libre dans $\mathbb{Z}^\infty$ est facile : il faut juste prendre e_i étant la suite nulle partout sauf en i. La partie $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{Z}$-libre dans $\mathbb{Z}^\infty$.

Nous devons maintenant montrer que toute partie libre de $\mathbb{Z}^\infty$ est au maximum dénombrable. Soit une telle partie A. En posant

$$A_n = \{x \in A \text{ tel que } x_n \neq 0 \text{ et } x_k = 0 \text{ si } k > n\}. \tag{27.1009}$$

Étant donné que A ne contient que des suites finies, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

D'abord A_n est $\mathbb{Z}$-libre dans $\mathbb{Z}^n$. En effet considérons une partie finie $\{a_i\}_{i\in I}$ de A_n ainsi que des entiers $\{z_i\}_{i\in I}$ tels que $\sum_{i\in I} z_i a_i = 0$. Vu que $\{a_i\}_{i\in I}$ est également une partie finie de A, nous en déduisons que $z_i = 0$ pour tout i.

La partie A_n étant libre dans $\mathbb{Z}^n$, elle est finie (de cardinal au maximum n). La partie A étant une union dénombrable de parties finies, elle est au maximum dénombrable. □

LEMooEYDNooEUKUpn

Lemme 27.213.
Deux groupes abéliens isomorphes ont même pseudo-dimension.

Démonstration. Soient des groupes abéliens G et H ainsi qu'un isomorphisme $\phi\colon G \to H$. Soit une partie $\mathbb{Z}$-indépendante $\{a_i\}_{i\in I}$ dans G. Nous montrons que $\{\phi(a_i)\}_{i\in I}$ est $\mathbb{Z}$-indépendante dans H.

En effet si $\sum_{i\in I} z_i\phi(a_i) = 0$, alors $0 = \sum_i \phi(z_i a_i) = \phi\big(\sum_i z_i a_i\big)$, et donc $\sum_i z_i a_i = 0$, ce qui entraine $z_i = 0$.

Cela prouve que $\operatorname{pdim}(H) \geqslant \operatorname{pdim}(G)$. En inversant les rôles de G et H (et en utilisant ϕ^{-1}), nous prouvons que $\operatorname{pdim}(G) \geqslant \operatorname{pdim}(H)$.

Si une des pseudo-dimensions est infinie, le raisonnement donné doit être récrit en disant que G possède une partie $\mathbb{Z}$-libre de telle cardinalité si et seulement si H en possède une. □

[129] Définition 1.66.
[130] Pour rappel, $\mathbb{Z}^\infty$ est l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathbb{Z}$.

COROooQNUIooKLtWVD

Corolaire 27.214 ([235]).
Soient des compacts K_1 et K_2 homéomorphes dans $\mathbb{C}$. Alors les parties $\mathbb{C} \setminus K_1$ et $\mathbb{C} \setminus K_2$ ont le même nombre de composantes connexes.

Démonstration. Vu que K_1 est homéomorphe à K_2, les groupes $G(K_1)$ et $G(K_2)$ sont isomorphes par le lemme 27.198. Le théorème 27.210(2) nous enseigne que, si on désigne par N_i le nombre de composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus K_i$, alors $G(K_i) = \mathbb{Z}^{N_i}$. Le fait que $G(K_1)$ soit isomorphe à $G(K_2)$ implique

$$\mathbb{Z}^{N_1} \simeq \mathbb{Z}^{N_2}. \tag{27.1010}$$

Le lemme 27.213 indique alors que $\operatorname{pdim}(\mathbb{Z}^{N_1}) = \operatorname{pdim}(\mathbb{Z}^{N_2})$. Et enfin le lemme 27.212 conclut que $N_1 = N_2$. □

Dans le lemme suivant, $S^1(a,r)$ est la sphère centrée en a et de rayon r : $S^1(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |a - z| = r\}$.

LEMooUSJZooFVAlTa

Lemme 27.215.
La partie $\mathbb{C} \setminus S^1(0,1)$ a exactement 2 composantes connexes.

Démonstration. Posons $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1\}$ et $B = \{z \text{ tel que } |z| > 1\}$. Nous avons $A \cup B = \mathbb{C} \setminus S^1$. La partie A est connexe et même convexe. En ce qui concerne la connexité de B, c'est le corolaire 18.65.

De plus A et B sont des ouverts disjoints.

Supposons que C soit une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus S^1(0,1)$ contenant un point de A et un point de B. Soit $a \in C \cap A$. Par définition 7.104(1) d'une composante connexe, C contient tous les connexes contenant a. En particulier $A \subset C$. De même si $b \in C \cap B$, alors $B \subset C$.

Dans ce cas nous aurions $C = A \cup B = \mathbb{C} \setminus S^1(0,1)$. Mais cela est impossible parce que A et B forment un recouvrement de $\mathbb{C} \setminus S^1$ par deux ouverts disjoints.

Donc A et B sont des composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus S^1$. Et ce sont les deux seules parce que $A \cup B = \mathbb{C} \setminus S^1$. □

27.16.2 Théorème de Jordan

ThoHSPWBuh

Théorème 27.216 (Théorème de Jordan[235, 772]).
Soit une courbe de Jordan Γ fermée dans $\mathbb{C}$.

ITEMooOAKXooMirWiD

(1) La partie $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a exactement deux composantes connexes.

ITEMooICBGooXHMALK

(2) Une composante connexe est bornée, l'autre non.

(3) Les deux composantes connexes ont Γ comme frontière.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Nous savons par le corolaire 27.196(2) que Γ est homéomorphe à S^1. Le corolaire 27.214 nous dit alors que $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a le même nombre de composantes connexes que $\mathbb{C} \setminus S^1$, c'est-à-dire deux par le lemme 27.215.

(2) **Pour (2)** Le lemme 26.50 dit que $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a exactement une composante connexe non bornée. Vu que nous venons de voir qu'elle a exactement deux composants connexes, c'est que l'autre est bornée.

□

27.17 Topologie faible

DEFooZGLDooRRarRj

Définition 27.217 ([221, 1]).
Soit un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) E, et son dual E'.

(1) Le dual E' a la topologie de la norme opérateur.

ITEMooBTIQooTQrtWt

(2) Le dual E' a également la topologie faible $\sigma(E', E)$ donnée par la topologie initiale des fonctions d'évaluation

EQooGGDFooSIwGGq

$$\begin{aligned} ev_x \colon E' &\to \mathbb{K} \\ \varphi &\mapsto \varphi(x). \end{aligned} \tag{27.1011}$$

(3) *L'espace E a lui-même une topologie faible $\sigma(E,E')$ qui est la topologie initiale de tous les éléments de φ.*

La ***topologie faible*** *sur E, est la plus petite topologie τ pour laquelle*

$$\big(E,\|.\|\big)' = \big(E,\tau\big)'. \tag{27.1012}$$

Autrement dit, c'est la topologie de la proposition 7.55 rendant continues toutes les applications de E'.

Elle sera notée τ_w ou $\sigma(E,E')$.

LEMooZPJNooJyaeAC

Lemme 27.218 ([1]).
Les ouverts faibles sont ouverts.

Démonstration. Nous avons $\tau_w \subset \tau$ pour toute topologie τ telle que $(E,\tau_N)' = (E,\tau)'$ où τ_N est la topologie de la norme. En particulier en posant $\tau = \tau_N$ on a l'égalité. Donc $\tau_w \subset \tau_N$. □

Vu que, pour rendre continue une application, il suffit que toutes les images inverses des ouverts de $\mathbb{F}$ soient des ouverts, la topologie faible sur E est également la topologie engendrée[131] par les parties $\varphi^{-1}(V)$ avec $\varphi \in E'$ et $V \in \tau_{\mathbb{F}}$.

Remarque 27.219.
Il faut noter que la topologie faible n'est pas une topologie métrique. Cela même si la condition $A_i x \to Ax$, elle, est métrique vu qu'elle est écrite dans E.

Dans le cas où E est de dimension infinie, la topologie faible est réellement différente de la topologie forte. Nous verrons à la sous-section 25.3.6 que dans le cas des projections sur un espace de Hilbert, l'égalité

$$\sum_{i=1}^{\infty} \texttt{proj}_{u_i} = \mathrm{Id} \tag{27.1013}$$

est vraie pour la topologie faible, mais pas pour la topologie forte.

Lemme 27.220 ([221]).
La topologie faible est Hausdorff[132].

Démonstration. Soient un espace de Banach E ainsi que $x_1 \neq x_2$ dans E. Les parties $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$ vérifient les hypothèses de Hahn-Banach (seconde forme géométrique, 27.167). Il existe donc une fonctionnelle $\varphi\colon E \to \mathbb{F}$ telle que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Avec un peu de bonne volonté, nous supposons que $\mathrm{Re}\big(\varphi(x_1)\big) \neq \mathrm{Re}\big(\varphi(x_2)\big)$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Re}\big(\varphi(x_1)\big) < \alpha < \mathrm{Re}\big(\varphi(x_2)\big). \tag{27.1014}$$

Posons

$$\mathcal{O}_1 = \{x \in E \text{ tel que } \mathrm{Re}\big(\varphi(x)\big) < \alpha\}, \tag{27.1015a}$$
$$\mathcal{O}_2 = \{x \in E \text{ tel que } \mathrm{Re}\big(\varphi(x)\big) > \alpha\}. \tag{27.1015b}$$

Nous avons $\mathcal{O}_i = \varphi^{-1}(V_i)$ avec[133]

$$V_1 =]-\infty,\alpha[+ i\mathbb{R} \tag{27.1016}$$

et quelque chose du même genre pour V_2. Vu que V_1 et V_2 sont ouverts dans $\mathbb{F}$, et que φ est continue pour la topologie faible, les parties $\mathcal{O}_i$ sont ouvertes dans (E,τ_w).

Nous avons de plus $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$ et $x_i \in \mathcal{O}_i$, de telle sorte que x_1 et x_2 sont correctement séparés. □

27.17.1 Bases de topologie

LEMooEFVXooIWBBdW

Lemme 27.221 ([221]).
Soit un espace de Banach E. Soient $x_0 \in E$, $\varphi_1,\dots,\varphi_k \in E'$. La partie

$$V(x_0;\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon) = \{x \in E \text{ tel que } |\varphi_i(x-x_0)| < \epsilon\} \tag{27.1017}$$

est faiblement ouverte.

[131] Proposition 7.13.
[132] Espace topologique Hausdorff, définition 7.74.
[133] Adaptez si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$.

Démonstration. Remarquez que

$$V(\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon)=\bigcap_{i=1}^{k}\varphi_i^{-1}\{z\in\mathbb{C}\text{ tel que }|z-\varphi_i(x_0)|<\epsilon\}. \tag{27.1018}$$

Vu que φ_i^{-1} transforme un ouvert en un ouvert, $V(\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon)$ est une intersection d'ouverts, et donc un ouvert. De plus x_0 est dedans parce que $\varphi_i(x_0-x_0)=\varphi_i(0)=0<\epsilon$. □

LEMooKMIEooNDdIcU

Lemme 27.222 ([221]).
Soient un espace de Banach E ainsi qu'un élément $x_0\in E$. Les ensembles

$$V(x_0;\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon)=\{x\in E\text{ tel que }|\varphi_i(x-x_0)|<\epsilon\,\forall i\} \tag{27.1019}$$

forment une base de la topologie $\sigma(E,E')$ en x_0.

Démonstration. Soit un ouvert faible U contenant x_0. Nous devons prouver que U contient une partie de la forme $V(\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon)$. C'est le moment d'avoir bien en tête la construction de la topologie engendrée donnée en la proposition 7.13.

La topologie faible est engendrée par les parties de la forme $\varphi^{-1}(V)$ avec $\varphi\in E'$ et $V\in\tau_{\mathbb{F}}$. La partie U est une union de parties de la forme

$$\bigcap_{j=1}^{k}\varphi_j^{-1}(V_j) \tag{27.1020}$$

EQooKJEPooRissME

où V_j est ouvert dans $\mathbb{F}$ et $\varphi_j\in E'$. Vu que $x_0\in U$, il existe une partie de la forme (27.1020) contenant x_0. Nous la notons W :

$$x_0\in W=\bigcap_{j=1}^{k}\varphi_j^{-1}(V_j)\subset U. \tag{27.1021}$$

Vu que V_j est un ouvert de $\mathbb{F}$ contenant $\varphi_j(x_0)$, il existe $\delta_j>0$ tel que $B\big(\varphi_j(x_0),\delta_j\big)\subset V_j$. En prenant $\epsilon=\min_{j=1,\dots,k}(\delta_j)$, nous avons $B\big(\varphi_j(x_0),\epsilon\big)\subset V_j$ pour tout j. En particulier,

$$\bigcap_{j=1}^{k}\varphi_j^{-1}\Big(B\big(\varphi_j(x_0),\epsilon\big)\Big)\subset W. \tag{27.1022}$$

Nous montrons à présent que $V(\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon)\subset W$. Pour cela nous considérons $x\in V(\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon)$ et nous montrons que $x\in\varphi_j^{-1}\Big(B\big(\varphi_j(x_0),\epsilon\big)\Big)$ pour tout $j=1,\dots,k$. Nous avons

$$|\varphi_j(x)-\varphi_j(x_0)|=|\varphi_j(x-x_0)|<\epsilon, \tag{27.1023}$$

et donc bien $\varphi_j(x)\in B\big(\varphi_k(x_0),\epsilon\big)$. Au final nous avons

$$V(\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon)\subset\bigcap_{j=1}^{k}\varphi_j^{-1}\Big(B\big(\varphi_j(x_0),\epsilon\big)\Big)\subset W\subset U. \tag{27.1024}$$

□

PROPooMBOJooQcwyuv

Proposition 27.223 ([773]).
Soit un espace de Banach E. Soit $\varphi_0\in E'$. Une base de la topologie[134] *$\sigma(E',E)$ en φ_0 est donnée par les parties*

$$V(\varphi_0;x_1,\dots,x_k,\epsilon)=\{\varphi\in E'\text{ tel que }|(\varphi-\varphi_0)(x_i)|<\epsilon\,\forall i=1,\dots,k\}. \tag{27.1025}$$

EQooTINIooJulDll

27.17.2 Convergence

PROPooFJBBooKkRwIp

Proposition 27.224 ([221, 774]).
Soient un espace de Banach E ainsi qu'une suite (x_n) dans E.

ITEMooDMMTooSBINKN

(1) $x_n\xrightarrow{w}x$ *si et seulement si* $\varphi(x_n)\to\varphi(x)$ *pour tout* $\varphi\in E'$.

ITEMooFZKXooNqFGUb

(2) $x_n\xrightarrow{\|.\|}x$ *implique* $x_n\xrightarrow{w}x$.

[134] Définition 27.217(2).

ITEMooXPTSooYPwNgU

(3) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ alors $\{\|x_n\|\}$ est borné et

$$\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|. \tag{27.1026}$$

ITEMooAFRFooOXdsBy

(4) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ et $\varphi_n \xrightarrow{E'} \varphi$ alors $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** C'est le lemme 7.60.

(2) **Pour (2)** Nous prouvons que $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ pour tout $\varphi \in E'$:

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x)| = |\varphi(x_n - x)| \leqslant \|\varphi\|_{E'}\|x_n - x\|_E \to 0 \tag{27.1027}$$

parce que par hypothèse $\|x_n - x\| \to 0$.

(3) **Pour (3)**

Vu que $\varphi(x_n) \xrightarrow{\mathbb{F}} \varphi(x)$, l'ensemble $\{\varphi(x_n)\}$ est borné dans $\mathbb{F}$. Considérons les opérateur suivants :

$$\begin{aligned} T_n : E' &\to \mathbb{F} \\ \varphi &\mapsto \varphi(x_n). \end{aligned} \tag{27.1028}$$

Cet opérateur a la propriété que $\|T_n\|_{(E')'} = \|x_n\|_E$; en effet, en utilisant la proposition 27.172,

$$\|T_n\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |T_n(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x_n)| = \|x_n\|. \tag{27.1029}$$

Chacun des T_n est donc un opérateur linéaire borné. Nous vérifions que la famille $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait aux hypothèses du théorème de Banach-Steinhaus 10.187. D'abord E' est un Banach par la proposition 7.320. Ensuite nous venons de voir que chacun de T_n est borné dans E'. Et enfin, pour chaque $\varphi \in E'$ nous avons

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(\varphi)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(x_n)| < \infty. \tag{27.1030}$$

Le théorème de Banach-Steinhaus nous assure donc que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty. \tag{27.1031}$$

Donc l'ensemble $\{\|x_n\|\}$ est borné.

Pour chaque $\varphi \in E'$ tel que $\|\varphi\| \leqslant 1$ nous avons

$$|\varphi(x_n)|_{\mathbb{F}} \leqslant \|\varphi\|_{E'}\|x_n\|_E \leqslant \|x_n\| \tag{27.1032}$$

Étant donnée l'inégalité $|\varphi(x_n)| \leqslant \|x_n\|$ pour tout n et étant donnée la convergence $|\varphi(x_n)| \to |\varphi(x)|$, nous avons pour tout n :

$$|\varphi(x)| \leqslant \|x_n\|. \tag{27.1033}$$

Cette inégalité valable pour tout n donne la conclusion :

$$|\varphi(x)| \leqslant \liminf \|x_n\|. \tag{27.1034}$$

(4) **Pour (4)**

Nous avons SUBEQooPHWLooZUiQLO

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| &\leqslant |\varphi_n(x_n) - \varphi(x_n)| + |\varphi(x_n) - \varphi(x)| && \text{(27.1035a)} \\ &\leqslant \|x_n\|\|\varphi_n - \varphi\| + |\varphi(x_n - x)| && \text{(27.1035b)} \end{aligned}$$

Mais par hypothèse $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$, par le point (3), $\|x_n\|$ est borné, et par le point (1), nous avons $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \to 0$. Tout ça mis ensemble nous permet de prendre la limite dans (27.1035) et de voir que $\|\varphi_n(x_n) - \varphi(x)\| \to 0$.

□

Proposition 27.225.
Si E est un espace de Banach de dimension finie, alors sa topologie normée est la même que sa topologie faible : $\tau_w = \tau_{\|.\|}$.

Démonstration. Vu que E' est défini comme étant l'ensemble des formes continues pour la topologie $\|.\|$, et que τ_w est la plus petite topologie pour laquelle tous les éléments de E' sont continus, nous avons $\tau_w \subset \tau_{\|.\|}$.

Pour prouver l'inclusion inverse, nous considérons $U \in \tau_{\|.\|}$ et nous prouvons que U est également un ouvert faible en montrant que tout élément de U est inclus dans un ouvert faible contenu dans U.

Soit $x_0 \in U$ ainsi que $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$. Nous considérons une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E telle que $\|e_i\| = 1$ pour tout i. Vu que tout élément de E peut être décomposé de façon unique en $x = \sum_i x_i e_i$, nous considérons les fonctionnelles linéaires

$$\begin{aligned} \varphi_j : E &\to \mathbb{F} \\ x &\mapsto x_j. \end{aligned} \tag{27.1036}$$

C'est le moment de ressortir notre ouvert préféré[135] autour de x_0 :

$$V(x_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}\Big(\{\|z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - \varphi_i(x_0)|\| < \epsilon\}\Big). \tag{27.1037}$$

Supposons que $x \in V(x_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \epsilon)$. Il vérifie $|\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| \leqslant \epsilon$ et donc

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \|\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x - x_0) e_j\| && \text{(27.1038a)} \\ &\leqslant \sum_j |\varphi_j(x - x_0)| \|e_j\| && \text{(27.1038b)} \\ &= \sum_j |\varphi_j(x - x_0)| && \text{(27.1038c)} \\ &\leqslant \sum_j |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| && \text{(27.1038d)} \\ &\leqslant n\epsilon. && \text{(27.1038e)} \end{aligned}$$

En choisissant $\epsilon < \frac{r}{n}$, nous avons $x \in B(x_0, r)$ et donc

$$V(x_0, \dots,) \subset B(x_0, r). \tag{27.1039}$$

□
LEMooMCYAooGMzbbs

Lemme 27.226.
Soit un espace de Banach E sur le corps $\mathbb{F}$. Nous notons $\mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$ l'ensemble de toutes les applications de E vers $\mathbb{F}$. Pour chaque $x \in E$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f_x : \mathrm{Fun}(E, \mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ \omega &\mapsto \omega(x). \end{aligned} \tag{27.1040}$$

Nous considérons sur $\mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$ la plus petite topologie telle que tous les f_x soient continues.

La suite (ω_n) dans $\mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$ converge vers $\omega \in \mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$ si et seulement si $\omega_n(x) \to \omega(x)$ pour tout $x \in E$.

LEMooWXBVooSjafZr

Lemme 27.227.
Soit un espace de Banach E sur le corps $\mathbb{F}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Nous considérons l'ensemble $\mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$ sur lequel nous mettons la topologie minimale qui rend continue les applications

$$\begin{aligned} f_x : \mathrm{Fun}(E, \mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ \omega &\mapsto \omega(x). \end{aligned} \tag{27.1041}$$

Nous notons $I = \{f_x \text{ tel que } x \in E\}$ et τ_I la topologie de $\mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$.

Si (ω_n) est une suite dans $\mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$ nous avons $\omega_n \xrightarrow{\tau_I} \omega$ si et seulement si $\omega_n(x) \to \omega(x)$ pour tout $x \in E$.

[135] Nous avons un … faible pour lui !

THOooRECTooEVLHSq

Théorème 27.228 (Banach-Alaoglu-Bourbaki[221]).
Soit un espace de Banach E. La boule unité

$$B = \{\varphi \in E' \text{ tel que } \|\varphi\| = 1\} \tag{27.1042}$$

est compacte pour la topologie faible.

Démonstration. Nous considérons à nouveau $\text{Fun}(E, \mathbb{F})$ muni de la topologie du lemme 27.227. Nous considérons l'inclusion

$$\begin{aligned}\Phi\colon \big(E', \|.\|\big) &\to \big(\text{Fun}(E, \mathbb{F}), \tau_I\big)\\ \omega &\mapsto \omega.\end{aligned} \tag{27.1043}$$

En particulier nous notons $S = \Phi(E')$ et nous allons prouver que $\Phi\colon E' \to S$ bijective et continue et que $\Phi^{-1}\colon S \to E'$ est également continue. □

PROPooYARHooOpmztY

Proposition 27.229 ([221]).
Un convexe dans un espace de Banach est fermé si et seulement si il est faiblement[136] *fermé.*

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Soit un connexe fermé C de E. Nous devons prouver que C est faiblement fermé, c'est-à-dire que $E \setminus C$ est faiblement ouvert. Soit $x_0 \in E \setminus C$.

Étant donné que tout espace de Banach est localement convexe (proposition 7.255) Nous utilisons le théorème de Hahn-Banach 27.167 pour les partes $A = \{x_0\}$ (qui est compacte) et $C = C$ (qui est fermé). Il existe donc un hyperplan qui sépare strictement[137] $\{x_0\}$ et C. Autrement dit, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in E'$ tels que

$$f(x_0) < \alpha < f(x) \tag{27.1044}$$

pour tout $x \in C$.

Nous posons $V = \{x \in E \text{ tel que } f(x) < \alpha\}$, qui n'est autre que le $V(f, \alpha)$ du lemme 27.221. C'est un ouvert faible contenant x_0 et contenu dans $E \setminus C$. Cela prouve que $E \setminus C$ est faiblement ouvert.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que C est faiblement fermé. Donc $E \setminus C$ est faiblement ouvert et donc ouvert (lemme 27.218). Donc C est fermé.

□

PROPooGQLOooNSgZnZ

Proposition 27.230 ([221, 238]).
Soit un espace de Banach E sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et un sous-espace vectoriel fermé M de E.

(1) M muni de la norme hérité de E est un espace de Banach.

(2) Nous considérons les deux topologies suivantes sur M :

- *τ_1 : la topologie induite depuis $\sigma(E, E')$.*
- *τ_2 : la topologie $\sigma(M, M')$.*

Alors $\tau_1 = \tau_2$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Espace de Banach** C'est la proposition 7.319.

(2) **Égalité des topologies** En deux parties.

(2a) $\tau_2 \subset \tau_1$ Nous montrons que τ_1 rend continue tous les éléments de M'. Soit $\varphi \in M'$. Soit un ouvert U de $\mathbb{K}$; nous devons prouver que $\varphi^{-1}(U) \in \tau_1$. Pour cela, le théorème de Hahn-Banach 27.171 nous indique qu'il existe $\tilde{\varphi} \in E'$ tel que $\varphi = \tilde{\varphi}|_M$. Vu que $\sigma(E, E')$ rend continue tous les éléments de E', nous avons

$$\tilde{\varphi}^{-1}(U) \in \sigma(E, E'). \tag{27.1045}$$

Donc

$$\varphi^{-1}(U) = \tilde{\varphi}^{-1}(U) \cap M \in \tau_1. \tag{27.1046}$$

Nous en déduisons que τ_1 rend continus tous les éléments de M'. Vu que $\sigma(M, M')$ est la plus petite faisant ça, nous avons bien $\tau_2 \subset \tau_1$.

[136] Topologie faible, définition 27.217.
[137] Hyperplan qui sépare, définition 27.164.

(2b) $\tau_1 \subset \tau_2$ Soit $\mathcal{O} \in \tau_1$. Nous avons $\mathcal{O} = U \cap M$ avec $U \in \sigma(E, E')$. Soit $x_0 \in \mathcal{O}$. Étant donné que $x_0 \in U$ et étant donné le lemme 27.222, il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in E'$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$V(x_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon) = \{x \in E \text{ tel que } |\varphi_i(x - x_0)| < \epsilon\} \subset U. \tag{27.1047}$$

En notant f_i la restriction de φ_i à M, nous avons

$$\begin{aligned} \{x \in E \text{ tel que } |\varphi_i(x - x_0)| < \epsilon\} \cap M &= \{x \in M \text{ tel que } |\varphi_i(x - x_0)| < \epsilon\} && \text{(27.1048a)} \\ &= \{x \in M \text{ tel que } |f_i(x - x_0)| < \epsilon\} && \text{(27.1048b)} \\ &\in \sigma(M, M'). && \text{(27.1048c)} \end{aligned}$$

Cette partie est donc un $\sigma(M, M')$-voisinage de x_0 contenu dans $\mathcal{O}$. Donc $\mathcal{O} \subset \tau_2$ et donc $\tau_1 \subset \tau_2$.

□

27.17.3 Helly et Goldstine

LEMooSBWJooKIfuJj

Lemme 27.231 (Helly[221, 775])**.**
Soit un espace de Banach E sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Nous considérons $f_1, \dots, f_k \in E'$ ainsi que des éléments $(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathbb{K}^n$. De plus nous introduisons

$$\begin{aligned} \varphi\colon E &\to \mathbb{K}^k \\ x &\mapsto \big(f_1(x), \dots, f_k(x)\big). \end{aligned} \tag{27.1049}$$

Nous avons équivalence entre

ITEMooDMOOooPJtgTE *(1) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_\epsilon \in E$ tel que $\|x_\epsilon\| < 1$ et $|f_l(x_\epsilon) - \gamma_l| < \epsilon$.*

ITEMooAQAJooHmSXGW *(2) $\gamma \in \overline{\varphi\big(B(0,1)\big)}$.*

ITEMooXJKAooFHUsOv *(3) $|\sum_{l=1}^k \beta_l \gamma_l| \leqslant \|\sum_{l=1}^k \beta_l f_l\|$ pour tout $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{K}$.*

Notez que $|.|$ dénote soit la valeur absolue (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) soit le module d'un nombre complexe (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Par ailleurs $\|.\|$ dénote la norme opérateur.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) ⇒ (2)** Soit $\epsilon > 0$. Il existe $x_\epsilon \in E$ tel que $x_\epsilon \in \overline{B(0,1)}$, et donc tel que

$$\|\varphi(x_\epsilon) - \gamma\| < k\epsilon \tag{27.1050}$$

où à gauche, c'est la norme dans $\mathbb{K}^k$. Cela prouve que, en utilisant 7.50,

$$\gamma \in \varphi\big(\overline{B(0,1)}\big) \subset \overline{\varphi\big(B(0,1)\big)} \tag{27.1051}$$

(2) **(2) ⇒ (1)** Soit $\epsilon > 0$. Étant donné que $\gamma \in \overline{\varphi\big(B(0,1)\big)}$, il existe $y_\epsilon \in \varphi\big(B(0,1)\big)$ tel que $\|y_\epsilon - \gamma\| < \epsilon$ et donc $x_\epsilon \in B(0,1)$ tel que $\|\varphi(x_\epsilon) - \gamma\| < \epsilon$.

Par inégalité triangulaire, cela implique $|f_l(x_\epsilon) - \gamma_l| < \epsilon$.

(3) **(1) ⇒ (3)** Nous posons $S = \sum_{i=1}^k |\beta_i|$. Soit $\epsilon > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} |\sum_i \beta_i f_i(x_\epsilon) - \sum_i \beta_i \gamma_i| &\leqslant |\sum_i \beta_i \big(f_i(x_\epsilon) - \gamma_i\big)| && \text{(27.1052a)} \\ &\leqslant \sum_i |\beta_i||f_i(x_\epsilon) - \gamma_i| && \text{(27.1052b)} \\ &\leqslant S\epsilon. && \text{(27.1052c)} \end{aligned}$$

Grâce à la formule de la proposition 10.2, nous en déduisons

$$\begin{aligned} |\sum_i \beta_i \gamma_i| &\leqslant |\sum_i \beta_i f_i(x_\epsilon)| + S\epsilon && \text{(27.1053a)} \\ &\leqslant \|\sum_i \beta_i f_i\| \|x_\epsilon\| + S\epsilon && \text{(27.1053b)} \\ &\leqslant \|\sum_i \beta_i f_i\| + S\epsilon. && \text{(27.1053c)} \end{aligned}$$

Vu que cette inégalité est valide pour tout ϵ, nous déduisons que $|\sum_i \beta_i \gamma_i| \leqslant \|\sum_i \beta_i f_i\|$.

(4) **(3) ⇒ (1)** Nous faisons non(1) ⇒ non(3). Et comme (1) est équivalent à (2), nous faisons non(2) ⇒ non(3).

Nous avons donc $\gamma \notin \overline{\varphi\big(B(0,1)\big)}$. En utilisant le théorème 27.167 ou 27.167 selon que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, nous savons que $\{\gamma\}$ et $\overline{\varphi\big(B(0,1)\big)}$ sont strictement séparés par un hyperplan de $\mathbb{K}^k$. Autrement dit, il existe $\beta \in \mathbb{K}^k$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{Re}\big(\beta \cdot \varphi(x)\big) < \alpha < \operatorname{Re}(\beta \cdot \gamma). \tag{27.1054}$$

Autrement dit,

$$\operatorname{Re}(\sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i(x)) < \alpha < \operatorname{Re}(\sum_i \beta_i \gamma_i). \tag{27.1055}$$

EQooSEUBooAoyMVa

Maintenant on fait deux cas selon que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(4a) **Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$** Alors nous pouvons enlever le Re dans (27.1055). Vu que l'inégalité est valide pour tout $x \in E$ et vu que $|A(-x)| = |A(x)||$ lorsque A est linéaire, nous avons

$$|(\sum_i \beta_i f_i)(x)| < \alpha < \sum_i \beta_i \gamma_i. \tag{27.1056}$$

En prenant le supremum sur $\|x\| = 1$ nous trouvons

$$\|\sum_i \beta_i f_i\| \leqslant \alpha \leqslant \sum_i \beta_i \gamma_i, \tag{27.1057}$$

EQooMNEGooMhPMWu

qui contredit (3).

(4b) **Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$** Nous ne pouvons pas enlever les modules si facilement. C'est d'ailleurs le moment de relire le lemme 27.159. Nous posons $\phi = \sum_i \beta_i f_i$ et $g = \operatorname{Re}(\phi)$. Ce que dit (27.1055) est

$$|g(x)| < \alpha < \operatorname{Re}(\sum_i \beta_i \gamma_i) \leqslant |\sum_i \beta_i \gamma_i|. \tag{27.1058}$$

En prenant le supremum sur $\|x\| = 1$ et en tenant compte du fait que $\|\phi\| = \|g\|$, nous obtenons à nouveau une inégalité similaire à (27.1057), et donc une contradiction.

□

THOooATSGooSZZYPz

Théorème 27.232 (Théorème de Goldstine[775]).
Soit un espace de Banach E sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Nous avons[138]

ITEMooMDBQooSVTyjx

(1) La partie $J\big(B_E(0,1)\big)$ est dense dans $B_{E''}(0,1)$ pour la topologie faible[139] *$\sigma(E'', E')$.*

ITEMooXIGCooVpzqGA

(2) La partie $J(E)$ est $\sigma(E'', E')$-dense dans E''.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soit $\xi_0 \in B_{E''}(0,1)$, et soit un voisinage V de ξ_0. Nous devons prouver que $V \cap J\big(B_E(0,1)\big) \neq \varnothing$. La proposition 27.223 donne une base de la topologie faible. Nous pouvons donc supposer que V est de la forme (27.1025). Il faut juste ajouter des primes un peu partout parce que nous parlons ici de $\sigma(E', E'')$ et non de $\sigma(E, E')$. Bref. Il existe des $\varphi_i \in E'$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$V = V(\xi_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \epsilon) = \{\eta \in E'' \text{ tel que } |(\eta - \xi_0)(\varphi_i)| < \epsilon\}. \tag{27.1059}$$

Nous allons montrer qu'il existe $x_\epsilon \in B_E(0,1)$ tel que $J(x) \in V$.

Nous posons $\gamma_i = \xi_0(\varphi_i) \in \mathbb{K}$. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$. Nous avons

$$|\sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i| = |\sum_i \beta_i \xi_0(\varphi_i)| = |\xi_0\big(\sum_i \beta_i \varphi_i\big)| \leqslant \|\sum_i \beta_i \varphi_i\| \tag{27.1060}$$

EQooNGRVooVPapQa

parce que $\|\xi_0\| \leqslant 1$. L'inégalité (27.1060) étant valide pour tout choix de β_i, le théorème d'Helly 27.231 implique l'existence de $x_\epsilon \in E$ tel que $\|x_\epsilon\| < 1$ et

$$|\varphi_i(x_\epsilon) - \gamma_i| < \epsilon. \tag{27.1061}$$

Nous avons donc

$$\epsilon < |\varphi_i(x_\epsilon) - \gamma_i| = |\varphi_i(x_\epsilon) - \xi_0(\varphi_i)| = |\big(J(x_\epsilon) - \xi_0\big)(\varphi_i)|, \tag{27.1062}$$

et donc $J(x_\epsilon) \in V$.

[138] Définition 27.179 pour J.
[139] Définie en 27.217.

(2) **Pour (2)** Soit $\xi_0 \in E''$ ainsi qu'un voisinage V de ξ_0 de la forme

$$V(\xi_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon) = \{\eta \in E'' \text{ tel que } |(\eta - \xi_0)(\varphi_i)| < \epsilon\}. \tag{27.1063}$$

Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda\xi_0 \in B_{E''}(0,1)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \lambda V(\xi_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon) &= \{\lambda\eta \text{ tel que } |(\eta - \xi_0)(\varphi_i)| < \epsilon\} && (27.1064a)\\ &= \{\lambda\eta \text{ tel que } |(\lambda\eta - \lambda\xi_0)(\varphi_i)| < \lambda\epsilon\} && (27.1064b)\\ &= \{\eta \text{ tel que } |(\eta - \lambda\xi_0)(\varphi_i)| < \lambda\epsilon\}, && (27.1064c) \end{aligned}$$

autrement dit

$$\lambda V(\xi_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon) = V(\lambda\xi_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \lambda\epsilon). \tag{27.1065}$$

EQooOGQNooIxEnGG

Étant donné que $\lambda\xi_0 \in B_{E''}(0,1)$, la première partie dit qu'il existe $x_\epsilon \in B_E(0,1)$ tel que

$$J(x_\epsilon) \in V(\lambda\xi_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \lambda\epsilon) = \lambda V(\xi_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon). \tag{27.1066}$$

En reprenant (27.1065) (avec $1/\lambda$ au lieu de λ), nous avons

$$J(x_\epsilon/\lambda) \in \frac{1}{\lambda} V(\lambda\xi_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon) = V(\xi_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon), \tag{27.1067}$$

ce qui signifie que $V(\xi_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon)$ contient bien un élément de $J(E)$.

□

27.17.4 Banach-Alaoglu

LEMooWBIBooOFElVy

Lemme 27.233 ([1, 776]).
Soit un espace vectoriel normé E sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour chaque $x \in E$ nous considérons $K_x = \overline{B_{\mathbb{K}}(0, \|x\|)}$. Nous considérons ensuite[140] *$K = \prod_{x\in E} K_x$.*

L'ensemble K a la topologie produit[141] *τ_K et le dual E' a la topologie faible $\sigma(E', E)$.*

(1) Nous avons $K \cap E' = \overline{B_{E'}(0,1)}$.

(2) Si nous désignons par τ_P la topologie sur $\overline{B_{E'}(0,1)}$ induite depuis K et par τ_σ celle induite depuis E', alors nous avons $\tau_P = \tau_\sigma$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **$K \cap E' = \overline{B_{E'}(0,1)}$** Dans un premier sens, si $f \in K \cap E'$, alors

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1, \tag{27.1068}$$

et donc $f \in \overline{B_{E'}(0,1)}$. Dans l'autre sens, si $f \in \overline{B_{E'}(0,1)}$, alors $\|f(x) \leqslant \|x\|\|$ pour tout x, de telle sorte que $f(x) \in K_x$ pour tout x, c'est-à-dire $f \in K$.

(2) **Base de topologie de τ_K sur K** SPITEMooTIKWooTQzsGk En tant que topologie produit, la topologie τ_K est la topologie initiale des projections

$$\begin{aligned} \pi_x \colon \prod_{y\in E} K_y &\to K_x \\ f &\mapsto f(x). \end{aligned} \tag{27.1069}$$

La proposition 7.33 donne une base de topologie sur K_x sous la forme de parties de $\mathbb{K}$ de la forme

$$A_x(z,r) = B_{\mathbb{K}}(z,r) \cap B_{\mathbb{K}}(0, \|x\|). \tag{27.1070}$$

Ensuite le lemme 7.56 dit qu'une base de topologie de K est formée de parties de la forme

$$\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}\big(A_{x_i}(z_i, r_i)\big). \tag{27.1071}$$

[140] Définition 1.22 pour le produit cartésien infini.
[141] Topologie produit infinie, définition 7.62.

(3) $\tau_\sigma \subset \tau_P$ Nous considérons un élément de τ_σ sous la forme $U' = \overline{B_{E'}(0,1)} \cap V$ où V est un élément de $\sigma(E', E)$. Notre objectif est de montrer que c'est un élément de τ_P. Pour cela nous allons prendre un élément $\varphi_0 \in U'$ et montrer qu'il existe un voisinage $W \in \tau_P$ tel que $\varphi_0 \in W \subset U'$.

Par la proposition 27.223 nous considérons des points $x_1, \dots, x_k$ et $\epsilon > 0$ tels que $V(\varphi_0, x_1, \dots, x_k, \epsilon) \subset V$, et nous notons

$$U = \overline{B_{E'}(0,1)} \cap V(\varphi_0, x_1, \dots, x_k, \epsilon). \tag{27.1072}$$

Nous construisons W de la façon suivante. Nous posons

$$A_{x_i} = B_{\mathbb{K}}\big(\varphi_0(x_i), \epsilon\big), \quad A_x = B_{\mathbb{K}}(0, \|x\|), \tag{27.1073}$$

la seconde définition étant celle lorsque x n'est pas un des $x_1, \dots, x_k$. Nous définissons ensuite

$$W = \overline{B_{E'}(0,1)} \cap \prod_{x \in E} A_x. \tag{27.1074}$$

Avec ça nous avons bien $\varphi_0 \in W$ parce que $|\varphi_0(x)| \leqslant \|x\|$ parce que $\varphi_0 \in E'$. De plus $W \subset U$. En effet si $h \in W$ nous avons

$$h(x_i) \in B_{\mathbb{K}}\big(\varphi_0(x_i), \epsilon\big), \tag{27.1075}$$

ce qui signifie que $|h(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \epsilon$, et donc que $h \in U$.

(4) $\tau_P \subset \tau_\sigma$ Nous considérons un élément de τ_P de la forme $U = \overline{B_{E'}(0,1)} \cap U_0$ où U_0 est un élément de la topologie produit[142] de $\prod_{x \in E} K_x$. Soit $\varphi_0 \in U$.

Nous allons montrer qu'il existe $W \in \tau_\sigma$ tel que $\varphi_0 \in W \subset U$. Nous cherchons W sous la forme $W = \overline{B_{E'}(0,1)} \cap W_0$ avec $W_0 \in \sigma(E', E)$.

Nous avons vu dans le point (2) qu'il existe $z_i \in \mathbb{K}$, $r_i > 0$ et $x_i \in E$ tels que, en posant

$$A_i(z_i, r_i) = B_{\mathbb{K}}(z_i, r_i) \cap B_{\mathbb{K}}(0, \|x_i\|), \tag{27.1076}$$

nous avons

$$\varphi_0 \in U_0' = \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{x_i}^{-1}\big(A_i(z_i, r_i)\big) \subset U_0. \tag{27.1077}$$

Notez que

$$\pi_{x_i}^{-1}\big(A_i(z_i, r_i)\big) = \{f \colon E \to \mathbb{K} \text{ tel que } |f(x_i) - z_i| < r_i \text{ et } |f(x_i)| < \|x_i\|\}. \tag{27.1078}$$

Vu que $\varphi_0 \in U_0'$, il existe $\alpha_i > 0$ tel que $|\varphi_0(x_i) - z_i| < \alpha_i < r_i$. Donc en prenant $\epsilon_i < r_i - \alpha_i$, nous avons

$$\{f \colon E \to \mathbb{K} \text{ tel que } |f(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \epsilon_i\} \subset \{f \colon E \to \mathbb{K} \text{ tel que } |f(x_i) - z_i| < r_i\}. \tag{27.1079}$$

Tout ça pour dire qu'en posant

$$D_i = \{f \colon E \to \mathbb{K} \text{ tel que } |f(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \epsilon_i \text{ et } |f(x_i)| \leqslant \|x_i\|\}, \tag{27.1080}$$

et $U_0'' = \bigcap_{i=1}^{k} D_i$, nous avons que $U_0'' \in \tau_K$ et

$$\varphi_0 \in U_0'' \subset U_0' \subset U_0. \tag{27.1081}$$

En prenant les mêmes ϵ_i, nous posons

$$W_i = \{\eta \in E' \text{ tel que } |\eta(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \epsilon_i\}, \tag{27.1082}$$

et $W_0 = \bigcup_{i=0}^{k} W_i$. Nous avons

$$\varphi_0 \in W_0 \cap \overline{B_{E'}(0,1)} \subset U_0'' \cap \overline{B_{E'}(0,1)} \subset U_0 \cap \overline{B_{E'}(0,1)}. \tag{27.1083}$$

□

[142] Définition 7.62.

THOooJNIQooOXGCKY

Théorème 27.234 (Banach-Alaoglu[777]).
Soit un espace vectoriel normé E sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors la boule fermée[143] $\overline{B_{E'}(0,1)}$ *est compacte pour la topologie faible $\sigma(E',E)$.*

Démonstration. Pour chaque $x\in E$, nous posons $K_x=[-\|x\|,\|x\|]$ et nous considérons le produit cartésien[144] $K=\prod_{x\in E}K_x$. Un élément de K est une application $f\colon E\to\mathbb{R}$ vérifiant $|f(x)|\leqslant\|x\|$.

(1) **Une topologie sur $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})$** Sur l'ensemble $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})$ de toutes les applications $E\to\mathbb{K}$ nous considérons la topologie initiale des applications

$$\begin{aligned}\pi_x\colon\ \mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})&\to\mathbb{K}\\ f&\mapsto f(x).\end{aligned}\tag{27.1084}$$

C'est une topologie séparée[145] par la proposition 7.58. Nous la nommons τ_F

(2) **K est compact dans $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})$** Pour chaque $x\in E$, la partie K_x est compacte. Donc la proposition 7.362 dit que $K=\prod_{x\in E}K_x$ est compacte dans $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})=\prod_{x\in E}\mathbb{K}$.

(3) **Topologies sur $\overline{B_{E'}(0,1)}$** Nous avons vu dans le lemme 27.233 que $\overline{B_{E'}(0,1)}=K\cap E'$. Nous pouvons donc considérer (au moins) deux topologies dessus : celle induite de K et celle induite de E'. Nous nommons τ_P la topologie de $\overline{B_{E'}(0,1)}$ induite de K et τ_σ celle induite de E'.

Notons que τ_P est induite de τ_K qui est induite de τ_F. Donc τ_P est la topologie induite de $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})$ sur $\overline{B_{E'}(0,1)}$.

Toujours d'après le lemme 27.233, nous avons $\tau_P=\tau_\sigma$.

(4) **E' est fermé dans K** Nous montrons que $K\setminus E'$ est ouvert. Soit $f\in K\setminus E'$. Il y a deux possibilités : soit il existe $x,y\in E$ tels que $f(x)+f(y)\neq f(x+y)$, soit il existe $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ tels que $f(\lambda x)\neq\lambda f(x)$.

(4a) **Si $f(x)+f(y)\neq f(x+y)$** Il existe $r>0$ tel que

$$|f(x)+f(y)-f(x+y)|>r.\tag{27.1085}$$

Nous considérons cet ouvert de K :

$$A=\{g\colon E\to\mathbb{K}\text{ tel que }\begin{cases}g\in K,\\ |f(x)-g(x)|<\epsilon,\\ |f(y)-g(y)|<\epsilon,\\ |f(x+y)-g(x+y)|<\epsilon\end{cases}\}.\tag{27.1086}$$

Si $g\in A$ nous avons :

$$\begin{aligned}&\Big|\big(g(x)+g(y)-g(x+y)\big)-\big(f(x)+f(y)-f(x+y)\big)\Big| &\text{(27.1087a)}\\ &\qquad\leqslant|g(x)-f(x)|+|g(y)-f(y)| &\text{(27.1087b)}\\ &\qquad\quad+|g(x+y)-f(x+y)|\\ &\qquad\leqslant 3\epsilon. &\text{(27.1087c)}\end{aligned}$$

En choisissant $\epsilon<r/3$ nous avons alors $|g(x)+g(y)-g(x+y)|>0$, et donc $g\in K\setminus E'$.

(4b) **Si $f(\lambda x)\neq\lambda f(x)$** Le même type de raisonnement[146] donne un ouvert de K contenant f et contenu dans $K\setminus E'$.

(4c) **Conclusion E' est fermé** Contenant un voisinage de tout élément, la partie $K\setminus E'$ est ouverte[147]. Donc E' est fermé.

[143] Fermée par rapport à la topologie de la norme opérateur.
[144] Définition 1.22.
[145] Je n'utilise pas le fait que ce soit séparé dans la suite alors que [777] insiste dessus. À mon avis c'est parce que le corolaire 7.122 est souvent énoncé pour des espaces séparés. Peut-être parce que les Français disent que les compacts doivent être séparés. Dans le Frido, un compact doit seulement vérifier la propriété de sous-recouvrement fini. On peut être compact sans être séparé. Si vous avez une idée sur l'endroit où la séparation de $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})$ joue dans la preuve, écrivez-moi.
[146] Je n'ai pas vérifié. Si ça pose un problème, écrivez-moi.
[147] Théorème 7.8.

(5) **Conclusions** Dans $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})$, la partie K est compacte et la partie E' est fermée. Donc $K\cap E'$ est compact pour la topologie τ_F (corolaire 7.122). Donc $\big(\overline{B_{E'}(0,1)},\tau_P\big)$ est un espace topologique compact.

Nous avons vu que $\tau_P=\tau_\sigma$. Donc $\big(\overline{B_{E'}(0,1)},\tau_\sigma\big)$ est un espace topologique compact. La proposition 7.31 dit alors que $\overline{B_{E'}(0,1)}$ est compact dans $\big(E',\sigma(E',E)\big)$.

□

27.17.5 Espace de Banach réflexif, Kakutani

THOooTFIHooPQjVAr

Théorème 27.235 (Kakutani[221]).
Un espace de Banach est réflexif[148] *si et seulement si la boule fermée $\overline{B_E(0,1)}$ est compacte dans $\big(E,\sigma(E,E')\big)$*[149].

Démonstration. Deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que E est un espace de Banach réflexif. Nous commençons par voir que

$$J^{-1}\colon \big(E'',\sigma(E'',E')'\big)\to\big(E,\sigma(E,E')\big) \tag{27.1088}$$

est continue. Nous utilisons la proposition 7.61 : l'application J^{-1} sera continue si et seulement si $\varphi\circ J^{-1}\colon E''\to\mathbb{K}$ est continue pour tout $\varphi\in E'$. Pour s'en assurer nous commençons par trouver une forme pratique pour $\varphi\circ J^{-1}$. Soit $\xi\in E''$. Nous écrivons la définition (27.816) de J pour $x=J^{-1}(\xi)$:

$$\varphi\big(J^{-1}(\xi)\big)=J\big(J^{-1}(\xi)\big)\varphi=\xi(\varphi). \tag{27.1089}$$

Nous devons donc vérifier la continuité, pour chaque $\varphi\in E'$ de l'application d'évaluation

$$\begin{aligned} ev_\varphi\colon \big(E',\sigma(E',E'')'\big)&\to\mathbb{K}\\ \xi&\mapsto\xi(\varphi). \end{aligned} \tag{27.1090}$$

Par la définition 27.217(2) de la topologie faible sur E'', les applications ev_φ sont continues. Nous en concluons par la proposition 7.61 que l'application J^{-1} est continue.

Par ailleurs la proposition 27.180(2) dit que $\overline{B_E(0,1)}=J^{-1}\big(\overline{B_{E''}(0,1)}\big)$, et le théorème de Banach-Alaoglu 27.234 appliqué à E' dit que $\overline{B_{E''}(0,1)}$ est compacte dans $\sigma(E'',E')$. Or l'image d'un compact par une application continue est compacte (proposition 7.275). Donc $\overline{B_E(0,1)}$ est compact.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $\overline{B_E(0,1)}$ est $\sigma(E,E')$-compacte. Nous savons par la proposition 27.182 que l'application

$$J\colon \big(E,\sigma(E,E')\big)\to\big(E'',\sigma(E'',E')\big) \tag{27.1091}$$

est continue. Comme l'image d'un compact est compacte, la partie $J\big(\overline{B_E(0,1)}\big)$ est$\sigma(E'',E')$-compacte et donc fermée. Mais le théorème de Goldstine 27.232 dit que $J\big(\overline{B_E(0,1)}\big)$ est $\sigma(E'',E')$-dense dans $\overline{B_{E'}(0,1)}$. Donc

$$J\big(\overline{B_E(0,1)}\big)=\overline{B_{E''}(0,1)} \tag{27.1092}$$

par la proposition 7.25.

Nous en déduisons que $J(E)=E''$. En effet si $\xi\in E''$, alors il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\lambda\xi\in\overline{B_{E''}(0,1)}$ (par exemple $\lambda=1/\|\xi\|$). Il existe donc $x\in\overline{B_E(0,1)}$ tel que $J(x)=\lambda\xi$. Et donc $J(x/\lambda)=\xi$. Cela prouve que $\xi\in J(E)$.

Nous avons démontré que J est surjective et donc que E est réflexif.

□

PROPooRNORooDjGqWy

Proposition 27.236 ([221]).
Soient un espace de Banach réflexif E et un sous-espace vectoriel fermé M. Alors M est réflexif[150].

Démonstration. Nous pouvons considérer deux topologies sur M :

(1) τ_1 : la topologie induite de $\sigma(E,E')$,

(2) τ_2 : la topologie faible de M lui-même, c'est-à-dire $\sigma(M,M')$.

[148] Définition 27.179.
[149] Définition 27.217.
[150] L'espace M est de Banach par la proposition 7.319

Et voici plein de petites affirmations successives.

(1) Nous avons déjà vu dans la proposition 27.230 que $\tau_1 = \tau_2$.

(2) Le théorème de Kakutani 27.235 dit que $\overline{B_E(0,1)}$ est $\sigma(E,E')$-compacte.

(3) La partie M est convexe et τ_E-fermée, donc M est $\sigma(E,E')$-fermée par la proposition 27.229.

(4) Pour la topologie $\sigma(E,E')$, l'égalité $\overline{B_M(0,1)} = \overline{B_E(0,1)} \cap M$ est une intersection d'un compact avec un fermé. $\overline{B_M(0,1)}$ est $\sigma(E,E')$-compacte par 7.122.

(5) La partie $\overline{B_M(0,1)}$ est $\sigma(E,E')$-compacte et contenue dans M. La proposition 7.32 indique donc que $\overline{B_M(0,1)}$ est compacte pour la topologie de M induite de $\sigma(E,E')$, c'est-à-dire pour τ_1.

(6) Vu que $\overline{B_M(0,1)}$ est τ_1-compacte, elle est aussi τ_2-compacte parce que $\tau_1 = \tau_2$.

(7) La boule $\overline{B_M(0,1)}$ est $\sigma(M,M')$-compacte. Donc le théorème de Kakutani 27.235 dit que M est réflexif.

□
PROPooBBNBooGcXDRH

Proposition 27.237 ([221, 1]).
Un espace de Banach est réflexif si et seulement si son dual est réflexif.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous devons montrer que l'application $J' : E' \to E'''$ est surjective. Soit $\alpha \in E'''$; nous considérons

$$\begin{aligned} f_\alpha : E &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto (\alpha \circ J)(x). \end{aligned} \tag{27.1093}$$

En tant que composition d'applications linéaires continues, ce f_α est un élément de E'. Nous montrons à présent que $J'(f_\alpha) = \alpha$. Soit $\xi \in E''$. Nous avons d'abord $J'(f_\alpha)\xi = \xi(f_\alpha)$. Mais comme J est surjective, il existe $x \in E$ tel que $\xi = J(x)$. Pour ce x nous avons

$$J'(f_\alpha)\xi = \xi(f_\alpha) = J(x)f_\alpha = f_\alpha(x) = \alpha\big(J(x)\big) = \alpha(\xi). \tag{27.1094}$$

Nous avons donc bien $J'(f_\alpha)\xi = \alpha(\xi)$ pour tout $\xi \in E''$.

(2) $\Leftarrow$ La partie $\Rightarrow$ appliquée à E' montre que E'' est réflexif, la proposition 27.181 dit que $J(E)$ est fermé, et donc la proposition 27.236 dit que $J(E)$ est réflexif.

L'application $J : E \to J(E)$ est une bijection isométrique. Donc E est réflexif si et seulement si $J(E)$ est réflexif par la proposition 27.184. Nous venons de prouver que $J(E)$ est réflexif. Donc E est réflexif.

□
PROPooPVVYooMZjQSq

Proposition 27.238 ([221]).
Une suite bornée dans un espace de Banach réflexif[151] *contient une sous-suite faiblement convergente.*

27.17.6 Espaces L^∞

LEMooMSYAooGEMgoc

Lemme 27.239 ([221]).
Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini, l'espace $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ n'est pas réflexif.

LEMooUSXTooFvpsVd

Lemme 27.240 ([221]).
Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini, alors $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ n'est pas réflexif[152].

Démonstration. Supposons que $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est réflexif. Le théorème de représentation de Riesz 27.187(2) dit que $(L^1)'$ est en bijection linéaire isométrique avec L^∞ ; le lemme 27.184 dit alors que $(L^1)'$ est réflexif[153]. La proposition 27.237 dit alors que L^1 est réflexif.

Or le lemme 27.239 dit que L^1 n'est pas réflexif. □

[151] Définition 27.179.
[152] Définition 27.179.
[153] Dans de nombreuses références, par exemple[221], il est simplement dit que $(L^1)' = L^\infty$. C'est un abus de notation qui permet de se passer du lemme 27.184.

La proposition suivante est souvent présentée en disant que l'inclusion $L^1 \subset (L^\infty)'$ est stricte, ou, pire, en disant que $(L^\infty)'$ est strictement plus grand que L^1. Cette façon de dire est un gros abus de langage. D'abord L^1 n'est même pas inclus dans L^∞ ; ce sont deux ensembles qui n'ont rien à voir. Ensuite, ce que signifie réellement cette proposition est seulement que la première injection $L^1 \to (L^\infty)'$ qui nous tombe sous la main (celle du théorème de représentation de Riesz) n'est pas surjective[154].

PROPooXXRQooNSBZOi

Proposition 27.241.
Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. L'application

$$\begin{aligned}\Phi_g\colon L^\infty(\mathbb{R}^d) &\to \mathbb{C}\\ f &\mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g}\end{aligned} \tag{27.1095}$$

est linéaire et bien définie.

L'application

$$\begin{aligned}\Phi\colon L^1(\mathbb{R}^d) &\to L^\infty(\mathbb{R}^d)'\\ g &\mapsto \Phi_g\end{aligned} \tag{27.1096}$$

n'est pas surjective.

Démonstration. Prouvons d'abord que Φ_g est bien définie. Vu que $f \in L^\infty$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| < M$ sur $\mathbb{R}^d \setminus A$ où A est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^d$. La fonction $x \mapsto |f(x)\overline{g(x)}|$ est donc majorée par la fonction intégrable $x \mapsto M|g(x)|$ qui est intégrable (sur $\mathbb{R}^d \setminus A$). L'intégrabilité de $f\bar{g}$ n'est donc pas un problème.

Le fait que Φ prenne ses valeurs dans $(L^\infty)'$ est le théorème 27.188(2b).

Le fait qu'elle ne soit pas surjective est la proposition 27.192. □

27.18 Espace de Schwartz

Pour un multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, nous notons

$$\partial^\alpha \varphi = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} \varphi \tag{27.1097}$$

pour peu que la fonction φ soit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ fois dérivable.

DefHHyQooK

Définition 27.242.
*Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. L'**espace de Schwartz** $\mathscr{S}(\Omega)$ est le sous-ensemble de $C^\infty(\Omega)$ des fonctions dont toutes les dérivées décroissent plus vite que tout polynôme :*

$$\mathscr{S}(\Omega) = \big\{\varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ tel que } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, p_{\alpha,\beta}(\varphi) < \infty\big\} \tag{27.1098}$$

où nous avons considéré

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x\in\Omega} |x^\beta(\partial^\alpha\varphi)(x)| = \|x^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty. \tag{27.1099}$$

EqOWdChCu

Pour simplifier les notations (surtout du côté de Fourier), nous allons parfois écrire $M_i\varphi$ pour la fonction $x \mapsto x_i\varphi(x)$.

Exemple 27.243.
La fonction e^{-x^2} est une fonction à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$. △

Définition 27.244.
*Une fonction $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite à **décroissance rapide** si elle décroît plus vite que n'importe quel polynôme. Plus précisément, si pour tout polynôme Q, il existe un $r > 0$ tel que $|f(x)| < \frac{1}{|Q(x)|}$ pour tout $\|x\| \geqslant r$.*

PropCSmzwGv

Proposition 27.245.
Une fonction Schwartz est à décroissance rapide.

Démonstration. Nous commençons par considérer un polynôme P donné par

$$P(x) = \sum_k c_k x^{\beta_k} \tag{27.1100}$$

[154] Si vous savez comment prouver qu'il n'existe pas de surject de L^1 vers $(L^\infty)'$, écrivez-moi.

où les β_k sont des multiindices, les c_k sont des constantes et la somme est finie. Nous avons la majoration

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\varphi(x)P(x)|\leqslant\sum_k\sup_x\left|c_k\varphi(x)x^{\beta_k}\right|\leqslant\sum_k|c_k|p_{0,\beta_k}(\varphi)<\infty. \tag{27.1101}$$

Nous allons noter M_P la constante $\sum_k|c_k|p_{0,\beta_k}(\varphi)$, de sorte que pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ nous ayons $|\varphi(x)P(x)|\leqslant M_P$ et donc

$$|\varphi(x)|\leqslant\frac{M_P}{|P(x)|}=\frac{1}{|\frac{1}{M_P}P(x)|}. \tag{27.1102}$$

Notons que cette inégalité est a fortiori correcte pour les x sur lesquels P s'annule.

Soit maintenant un polynôme Q. Nous considérons le polynôme $P(x)=\|x\|Q(x)$. Étant de plus haut degré, pour toute constante C il existe un rayon r_C tel que $|P(x)|\geqslant C|Q(x)|$ pour tout $|x|\geqslant r_C$. En particulier pour $|x|\geqslant r_{M_P}$ nous avons

$$|P(x)|\geqslant M_P|Q(x)| \tag{27.1103}$$

et donc, pour ces x,

$$|\varphi(x)|\leqslant\frac{1}{|\frac{1}{M_P}P(x)|}\leqslant\frac{1}{|Q(x)|}. \tag{27.1104}$$

La première inégalité est valable pour tout x, et la seconde pour $\|x\|\geqslant r_{M_P}$. □

CORooZFPSooHCFUSH

Corolaire 27.246 ([1]).
Soit φ une fonction Schwartz sur $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$. Alors la fonction

$$y\mapsto\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\varphi(x,y)| \tag{27.1105}$$

est intégrable.

Démonstration. Soit un polynôme Q en la variable y. Par la proposition 27.245, il existe $r>0$ tel que

$$|\varphi(x,y)|<\frac{1}{Q(y)} \tag{27.1106}$$

pour tout $\|(x,y)\|>r$. A fortiori l'inégalité tient pour tout $|y|>r$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}^m}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\varphi(x,y)|dy=\int_{\|y\|\leqslant r}\sup_x|\varphi(x,y)|dy+\int_{\|y\|>r}\sup_x|\varphi(x,y)|dy. \tag{27.1107}$$

La première intégrale est bornée par $\mathrm{Vol}\big(B(0,r)\big)\|\varphi\|_\infty$ tandis que la seconde est bornée par l'intégrale de $\frac{1}{Q(y)}$. En prenant Q de degré suffisamment élevé en toutes les composantes de y nous avons intégrabilité. □

27.18.1 Topologie

LEMDEFooZEFVooMMmiBr

Lemme-Définition 27.247.
Les $p_{\alpha,\beta}$ donnés par l'équation (27.1099) ci-dessus sont des seminormes[155]*. La topologie considérée sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est celle des seminormes $p_{\alpha,\beta}$.*

NORMooVQESooRwJShl

27.248.
Nous avons un enchainement de résultats qui nous aident à prouver la continuité d'une application $T\colon\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\to X$.

(1) La topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est donnée par une famille dénombrable de seminormes. Donc la proposition 7.403 nous dit que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est métrisable.

(2) La proposition 7.350 nous dit alors que si X est métrique, toute application séquentiellement continue $T\colon\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\to X$ est continue.

(3) Donc si X est métrique, il suffit de prouver que pour $f_n\xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)}0$ nous avons $T(f_n)\xrightarrow{X}0$ où $f_n\colon\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\to X$. Dans les cas usuels, T sera une distribution et $X=\mathbb{C}$.

(4) En vertu de la proposition 7.399, la convergence $f_n\xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)}0$ signifie que pour tout choix de multiindice α et β, $p_{\alpha,\beta}(f_n)\to0$, c'est-à-dire

$$\|x^\beta\partial^\alpha f_n\|_\infty\to0. \tag{27.1108}$$

EQooPUJPooNbtNFh

[155] Définition 7.381.

(5) Et enfin, la technique pour montrer que $T\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ est continue est de montrer que sous l'hypothèse d'avoir (27.1108) pour tout choix de α et β, nous avons $T(f_n) \to 0$ dans $\mathbb{C}$.

LemRJhCbkO

Lemme 27.249 ([778]).
La topologie sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est donnée aussi par les seminormes

$$q_{n,m} = \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \big(1+\|x\|\big)^m \big|\partial^\alpha \varphi(x)\big|. \tag{27.1109}$$

Autrement dit, une suite $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} 0$ si et seulement si $q_{n,m}(\varphi) \to 0$ pour tout n et m.

Le fait que les $q_{n,m}(\varphi)$ restent bornés est la proposition 27.245. Cependant ce lemme est plus précis parce qu'en disant seulement que φ est majoré par des polynôme, nous ne disons pas que les polynômes correspondants aux φ_n tendent vers zéro si $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$. Et d'ailleurs on ne sait pas très bien ce que signifierait $P_n \to 0$ pour une suite de polynômes.

PropGNXBeME

Proposition 27.250.
Pour $p \in [1,\infty]$, l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continument dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. L'injection dont nous parlons est l'identité ou plus précisément l'identité suivie de la prise de classe. Il faut vérifier que cela est correct et continu, c'est-à-dire d'abord qu'une fonction à décroissance rapide est bien dans L^p et ensuite que si $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, alors $f_n \xrightarrow{L^p} 0$.

Commençons par $p = \infty$. Alors $\|f_n\|_\infty = p_{0,0}(f_n) \to 0$ parce que si $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, alors en particulier $p_{0,0}(f_n) \to 0$.

Au tour de $p < \infty$ maintenant. Nous savons qu'en dimension d, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{(1+\|x\|)^s} \tag{27.1110}$$

est intégrable dès que $s > d$. Pour toute valeur de m nous avons

$$\|\varphi\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\big|(1+\|x\|)^m\varphi(x)\big|^p}{\big(1+\|x\|\big)^{mp}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \frac{q_{0,m}(\varphi)^p}{\big(1+\|x\|\big)^{mp}}. \tag{27.1111}$$

En choisissant m de telle sorte que $mp > d$, nous avons convergence de l'intégrale et donc $\|\varphi\|_p < \infty$. Nous retenons que

EqVWfEFMk

$$\|\varphi\|_p^p \leqslant C q_{0,m}(\varphi)^p \tag{27.1112}$$

pour une certaine constante C et un bon choix de m.

Ceci prouve que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$. Nous devons encore vérifier que l'inclusion est continue. Si $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, alors en particulier nous avons $q_{0,m}(\varphi_n) \to 0$ par le lemme 27.249. Par conséquent la majoration (27.1112) nous dit que $\|\varphi_n\|_p \to 0$ également.

□

En résumé, si $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} \varphi$ alors $\varphi_n \xrightarrow{L^p} \varphi$.

ThoRWEoqY

Théorème 27.251 ([522]).
Soit μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$ finie sur les compacts. Alors $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \mu)$.

PROPooJNQZooIRbJei

Proposition 27.252 ([779]).
La partie $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et ϕ, une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\phi(x) = 1$ pour $|x| \leqslant 1$ (l'existence de telles fonctions est discutée en 15.14.1). Soit aussi $\phi_k(x) = \phi(x/k)$. Nous posons

$$f_k(x) = \phi_k(x) f(x), \tag{27.1113}$$

et nous allons prouver que pour tout multiindice α et γ,

$$p_{\alpha,\gamma}(f_k - f) = \|x^\gamma \partial^\alpha (f_k - f)\|_\infty \to 0. \tag{27.1114}$$

Pour cela nous allons noter $\beta \leqslant \alpha$ lorsque β est un multiindice contenu dans α. En utilisant la dérivée du produit nous avons

$$(\partial^\alpha f_k)(x) = \sum_{\beta\leqslant\alpha} (\partial^{\alpha-\beta}\phi_k)(x)\partial^\beta f(x) \tag{27.1115a}$$
$$= \sum_{\beta\leqslant\alpha} k^{-|\alpha-\beta|}(\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)(\partial^\beta f)(x) \tag{27.1115b}$$
$$= \sum_{\beta<\alpha} k^{-|\alpha-\beta|}(\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)(\partial^\beta f)(x) + \phi(x/k)(\partial^\alpha f)(x). \tag{27.1115c}$$

Nous devons donc étudier et majorer

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\gamma\partial^\alpha(f_k - f)| \leqslant \sup \Big|x^\gamma \sum_{\beta<\alpha} k^{-|\alpha-\beta|}(\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)(\partial^\beta f)(x)\Big| \\ + \sup \big|x^\gamma\big(\phi(x/k) - 1\big)(\partial^\alpha f)(x)\big|\end{aligned} \tag{27.1116}$$

En ce qui concerne le second terme, soit $\epsilon > 0$, vu que f est Schwartz, il existe R tel que

$$|x^\gamma(\partial^\alpha f)(x)| < \epsilon \tag{27.1117}$$

dès que $\|x\| > R$. En prenant $k > R$,

$$|x^\gamma(\partial^\alpha f)(x)| \begin{cases} = 0 & \text{si } \|x\| < R \\ \leqslant \epsilon & \text{si } \|x\| > R. \end{cases} \tag{27.1118}$$

En ce qui concerne le premier terme,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \Big|x^\gamma \sum_{\beta<\alpha} k^{-|\alpha-\beta|}(\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)(\partial^\beta f)(x)\Big| \tag{27.1119a}$$
$$\leqslant \frac{1}{k}\sup_x \Big|\sum_{\beta<\alpha}(\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)(x^\gamma\partial^\beta f)(x)\Big| \tag{27.1119b}$$
$$= \frac{1}{k}\sup_x \Big|\sum_{\beta<\alpha}(\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)p_{\beta,\gamma}(f)\Big| \tag{27.1119c}$$

La somme ne contient qu'un nombre fini de β différents, donc nous pouvons considérer un nombre K qui majore tous les $p_{\beta,\gamma}(f)$ en même temps. La partie avec ϕ peut être majorée par $\|\partial^{\alpha-\beta}\phi\|_\infty$ (qui est fini) dont nous pouvons prendre le maximum sur $\beta < \alpha$. Toute l'expression dans la somme est donc majorée par un nombre qui ne dépend ni de x ni de β. Vu que la somme est finie, elle est majorée par ce nombre multiplié par le nombre de termes dans la somme et au final

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \Big|x^\gamma \sum_{\beta<\alpha} k^{-|\alpha-\beta|}(\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)(\partial^\beta f)(x)\Big| \leqslant \frac{K'}{k}. \tag{27.1120}$$

La limite $k \to \infty$ ne fait alors plus de doutes. □

Remarque 27.253.

Vu la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ (définition 27.247), la convergence $f_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} f$ peut être exprimée par le fait que pour tout k, l,

$$t^k f_n^{(l)} \xrightarrow{unif} t^k f^{(l)}. \tag{27.1121}$$

C'est-à-dire convergence uniforme de toutes les dérivées multipliées par n'importe quel polynôme.

27.18.2 Produit de convolution

PROPooUNFYooYdbSbJ

Proposition 27.254 (Stabilité de Schwartz par convolution[156] [749]).
Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

[156] Définition 27.78.

Démonstration. Nous devons prouver que

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi * \psi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\beta(\partial^\alpha(\varphi * \psi))(x)| \tag{27.1122}$$

est borné pour tout multiindices α et β. En appliquant $|\alpha|$ fois la proposition 27.84, nous mettons toutes les dérivées sur ψ : $\partial^\alpha(\varphi * \psi) = (\varphi * \partial^\alpha\psi)$. Cela étant fait, nous majorons

$$\begin{aligned}
\big|x^\beta(\varphi * \partial^\alpha\psi)(x)\big| &\leqslant |x^\beta| \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \underbrace{\big|(\partial^\alpha\psi)(x-y)\big|}_{\leqslant\|\partial^\alpha\psi\|_\infty} dy\Big| && \text{(27.1123a)}\\
&\leqslant |x^\beta| \|\partial^\alpha\psi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| dy && \text{(27.1123b)}\\
&\leqslant p_{\alpha,\beta}(\psi)\|\varphi\|_{L^1}. && \text{(27.1123c)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $p_{\alpha,\beta}(\varphi * \psi) \leqslant \|\varphi\|_{L^1} p_{\alpha,\beta}(\psi) < \infty$. □

27.19 Théorème de Montel

ThoXLyCzol

Théorème 27.255 (Montel[128]).
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes sur Ω, uniformément bornée sur tout compact de Ω. Alors de toute suite dans $\mathcal{F}$ nous pouvons extraire une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de Ω.

Démonstration. (1) **Un ensemble équicontinu**

Nous commençons par prendre une suite de compacts dans Ω comme dans le lemme 7.359, et une suite δ_n de réels strictement positifs tels que

$$B(z, 2\delta_n) \subset K_{n+1} \tag{27.1124}$$

pour tout $z \in K_n$. Soient $x, y \in K_n$ tels que $|x - y| < \delta_n$; nous notons $\partial B(x, 2\delta_n)$ le cercle de rayon $2\delta_n$ autour de x, parcouru dans le sens positif. La formule de Cauchy 26.217 nous donne

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - x} - \frac{f(\xi)}{\xi - y} \right) d\xi = \frac{x - y}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - x)(\xi - y)} d\xi \tag{27.1125}$$

Nous majorons ça par

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \frac{|x - y|}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{|f(\xi)|}{2\delta_n^2} d\xi \leqslant \frac{|x - y|}{\delta_n} M_n. \tag{27.1126}$$

Justifications :

- $|\xi - x| = 2\delta_n$ et $|\xi - y| \geqslant \delta_n$ parce que ξ est au mieux sur le rayon passant par x et y.
- $|f(\xi)| \leqslant M_n$ où M_n est la borne uniforme de $\mathcal{F}$ sur le compact K_n.
- Nous avons aussi fini par calculer l'intégrale dans laquelle il ne restait plus rien, ça a donné la circonférence du cercle de rayon $2\delta_n$.

Jusqu'à présent nous avons prouvé que l'ensemble

$$\mathcal{F}_n = \{f|_{K_n} \text{ tel que } f \in \mathcal{F}\} \tag{27.1127}$$

est équicontinu. Il est aussi équiborné par hypothèse.

(2) **Application du théorème d'Ascoli**

L'ensemble $\mathcal{F}_n$ vérifie les hypothèses du théorème d'Ascoli 27.7. Donc l'ensemble $\mathcal{F}_n$ est relativement compact dans $C(K_n, \mathbb{C})$ pour la norme uniforme. Autrement dit l'ensemble $\bar{\mathcal{F}}$ est compact et si nous avons une suite de fonctions dans $\mathcal{F}_n$, il existe une sous-suite convergeant dans $\bar{\mathcal{F}}_n$, c'est-à-dire uniformément. Autrement dit il existe une fonction strictement croissante $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $k \mapsto f_{\varphi(k)}$ converge uniformément sur K_n. La limite n'est cependant pas spécialement dans $\mathcal{F}_n$.

(3) **L'argument diagonal**

La suite $k \mapsto f_{\varphi_1 \circ \ldots \varphi_k(k)}$ converge uniformément sur tous les K_n. Si K est un compact de Ω, alors les petites propriétés sympas du lemme 7.359 nous disent que $K \subset \text{Int}(K_m)$ pour un certain m. Ladite suite convergeant uniformément sur K_m, elle converge uniformément sur K et nous avons montré la convergence uniforme sur tout compact de Ω.

□

Corolaire 27.256 ([128]).
Soient Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et $a \in \Omega$. Soit f holomorphe sur Ω telle que $f(a) = a$ et $|f'(a)| < 1$.

Alors de (f^n) on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers la fonction constante a.

Démonstration. Nous considérons un voisinage de a inclus dans Ω ; sachant que $|f(a)| < 1$, nous trouvons un voisinage encore plus petit de a sur lequel $|f'(z)| < 1$. Soit donc r tel que $\overline{B(a,r)} \subset \Omega$ et tel que $|f'(z)| < 1$ sur $\overline{B(a,r)}$. Étant donné que $f'(z)$ est continue sur le compact $\overline{B(a,r)}$, nous en prenons le maximum λ (qui est strictement inférieur à 1) et nous avons au final

$$|f'(z)| \leqslant \lambda < 1 \tag{27.1128}$$

pour tout $z \in \overline{B(a,r)}$. Le théorème des accroissements finis 12.340 nous dit que

$$\big|f(z) - a\big| \leqslant \lambda |z - a| \tag{27.1129}$$

pour tout $z \in \overline{B(a,r)}$. C'est ici que nous utilisons l'hypothèse de convexité de Ω. Nous montrons alors par récurrence que

$$\big|f^n(z) - a\big| \leqslant \lambda^n |z - a| \leqslant \lambda^n r \leqslant r. \tag{27.1130}$$

EqIQUzKpg

L'ensemble $A = \{f^n \text{ tel que } n \geqslant 1\}$ est donc uniformément borné sur $\overline{B(a,r)}$ par $a + r$. Autre manière de le dire : pour tout $z \in \overline{B(a,r)}$ nous avons

$$f^n(z) \in \overline{B(a,r)}. \tag{27.1131}$$

La suite (f^n) est donc uniformément bornée sur tout compact de $B(a,r)$. Le théorème de Montel 27.255 nous indique que l'on peut extraire une sous-suite convergente uniformément sur tout compact. Au vu de (27.1130) cette convergence ne peut avoir lieu que vers une fonction g qui vaut la constante a sur $B(a,r)$.

D'autre part la fonction g est holomorphe en tant que limite uniforme de fonctions holomorphes, théorème 26.109. Or une fonction holomorphe constante sur un ouvert est constante sur tout son domaine d'holomorphie (principe d'extension analytique, théorème 17.138). □

27.20 Espaces de Bergman

Source : [559].

Soit Ω un borné dans $\mathbb{C}$ et D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 27.257.
*L'**espace de Bergman** sur Ω, noté $A^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions holomorphes sur Ω qui sont en même temps dans $L^2(\Omega)$.*

Nous mettons sur $A^2(\Omega)$ le produit scalaire usuel hérité de L^2 :

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}dz. \tag{27.1132}$$

LemIZxKfB

Lemme 27.258.
Soient un compact $K \subset \Omega$ et une fonction $f \in A^2(\Omega)$. Alors

$$\max_{z \in K} |f(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{d(K, \partial\Omega)} \|f\|_2. \tag{27.1133}$$

Démonstration. Soient $a \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(a,r) \subset \Omega$. Nous considérons aussi $\rho \leqslant r$. La formule de Cauchy (26.217) nous donne

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \tag{27.1134}$$

où nous avons utilisé le chemin $\gamma(\theta) = a + \rho e^{i\theta}$, $\gamma'(\theta) = i\rho e^{i\theta}$ et $\rho = |\xi - a|$. Maintenant une astuce est d'écrire

$$\frac{r^2}{2} f(a) = \int_0^r f(a)\rho d\rho, \tag{27.1135}$$

et d'y substituer la valeur de $f(a)$ que nous venons de calculer :

$$\begin{aligned}
\frac{r^2}{2} f(a) &= \int_0^r \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \rho d\rho && \text{(27.1136a)}\\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{B(a,r)} f(z) dz && \text{passage aux polaires} \quad \text{(27.1136b)}\\
&= \frac{1}{2\pi} \langle 1, f \rangle_B && \text{produit scalaire sur } B(a,r) \quad \text{(27.1136c)}\\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \sqrt{\langle 1, 1 \rangle_B \langle f, f \rangle_B} && \text{(27.1136d)}
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$r^2 f(a) \leqslant \frac{1}{\pi} \sqrt{\langle 1, 1 \rangle_B \langle f, f \rangle_B}, \tag{27.1137}$$

et donc

$$\pi r^2 f(a) \leqslant \sqrt{\pi r^2} \|f\|_2, \tag{27.1138}$$

parce que $\langle f, f \rangle_B \leqslant \|f\|_2^2$. En effet le produit scalaire $\|.\|_2$ est donné par une intégrale sur Ω alors que $B(a,r) \subset \Omega$ et que la fonction qu'on y intègre est positive (c'est $|f(z)|^2$). En simplifiant,

$$f(a) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_2. \tag{27.1139}$$

Mais r a été choisi pour avoir $B(a,r) \subset \Omega$, donc $r \leqslant d(a, \partial\Omega)$ et

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{d(a, \partial\Omega)\sqrt{\pi}} \|f\|_2. \tag{27.1140}$$

Maintenant si nous prenons $a \in K$, nous avons encore la minoration $d(a, \partial K) \leqslant d(a, \partial\Omega)$ et donc

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{d(a, \partial K)\sqrt{\pi}} \|f\|_2. \tag{27.1141}$$

□

Théorème 27.259.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

(1) L'espace $A^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

(2) Si D est la boule unité dans $\mathbb{C}$, une base hilbertienne de $A^2(D)$ est donnée par les fonctions

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \tag{27.1142}$$

pour $n \geqslant 0$.

Démonstration. Nous commençons par montrer que $A^2(\Omega)$ est complet. Pour cela nous considérons une suite de Cauchy (f_n) dans $A^2(\Omega)$ et un compact $K \subset \Omega$. Nous savons par le lemme 27.258 que

$$\max_{z \in K} \big|f_n(z) - f_m(z)\big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, \partial\Omega)} \|f_n - f_m\|_2. \tag{27.1143}$$

Donc f_n converge uniformément sur K. Par le théorème de Weierstrass 26.109, la fonction f est holomorphe. Il existe donc une fonction holomorphe f qui est limite uniforme sur tout compact de Ω de la suite (f_n).

Mais $L^2(\Omega)$ étant complet, la suite (f_n) a une limite $g \in L^2(\Omega)$. Ce que nous voudrions faire est prouver que $f = g$. Notons que tel quel, ce n'est pas vrai parce que f est une vraie fonction alors que g est une classe. Ce que nous enseigne la proposition 27.23 est qu'il existe une sous-suite (qu'on note (g_n)) qui converge vers g presque partout. Dans cette dernière phrase, g_n et g sont de vraies fonctions, des représentants des classes dans L^2.

Nous déduisons que $f = g$ presque partout (ici f et g sont les fonctions) parce que la sous-suite converge uniformément vers f en même temps que presque partout vers g. Donc $f = g$ dans $L^2(\Omega)$ (ici f et g sont les classes). Donc $f \in L^2(\Omega)$ et l'espace $A^2(\Omega)$ est de Hilbert.

Il nous faut encore prouver que $(e_n)_{n\geqslant 0}$ est une base orthonormale. En ce qui concerne les produits scalaires,

$$\langle e_m, e_n\rangle = \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi}}\int_D z^n\overline{z^m}dz \tag{27.1144a}$$

$$= \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2}}\int_0^1 \rho\, d\rho\int_0^{2\pi} d\theta\rho^{m+n}e^{i\theta(n-m)} \tag{27.1144b}$$

$$= \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2}}\frac{1}{m+n+2}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)}d\theta}_{2\pi\delta_{mn}} \tag{27.1144c}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)^2}{\pi^2}}\frac{1}{2n+2}2\pi\delta_{nm} \tag{27.1144d}$$

$$= \delta_{nm}. \tag{27.1144e}$$

Donc les fonctions données sont bien orthonormales. Nous devons montrer qu'elles sont denses dans $A^2(D)$. Soit $f \in A^2(D)$ et $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$; nous allons montrer que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|\langle f, e_n\rangle|^2, \tag{27.1145}$$

parce que le point (5) du théorème 25.46 nous indique que ce sera suffisant pour avoir une base hilbertienne.

Étant donné que f est holomorphe sur D, le théorème 26.60 nous développe f en série entière :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{27.1146}$$

EqQbkbPK

En permutant la somme avec le produit scalaire,

$$c_n(f) = \int_D f(z)\bar{e}_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\int_D f(z)\bar{z}^n dz. \tag{27.1147}$$

Afin de profiter de la convergence uniforme de la série (27.1146) à l'intérieur de D, nous allons exprimer l'intégrale sur D comme une intégrale sur $|z| < r$ en faisant tendre r vers 1 (par le bas). Pour ce faire nous considérons les fonctions

$$g_k(z) = \begin{cases} f(z)\bar{z}^n & \text{si } |z| < 1 - 1/k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{27.1148}$$

Ces fonctions sont intégrables sur D et dominées par $f(z)\bar{z}^n$ qui est intégrable sans dépendre de k. Mais nous avons évidemment $g_k(z) \to f(z)\bar{z}^n$. Le théorème de la convergence dominée permet alors de permuter l'intégrale et la limite $k \to \infty$. Cela nous permet d'écrire

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\lim_{r\to 1^-}\int_{|z|<r}\bar{z}^n f(z)dz = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\lim_{r\to 1^-}\int_{|z|<r}\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\bar{z}^n. \tag{27.1149}$$

Par la convergence uniforme de la série entière *à l'intérieur* du disque D nous pouvons permuter l'intégrale et la somme (proposition 15.55) :

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\lim_{r\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_{|z|<r} z^k\bar{z}^n dz. \tag{27.1150}$$

L'intégrale proprement dite est vite calculée et vaut

$$\int_{|z|<1}\bar{z}^n z^k dz = \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}\delta_{kn}. \tag{27.1151}$$

Nous pouvons donc continuer le calcul de $c_n(f)$ en effectuant la somme sur k qui se réduit à changer k en n puis en effectuant la limite :

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\lim_{r\to 1^-}\sum_k a_k\frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}\delta_{kn} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}a_n. \tag{27.1152}$$

Nous effectuons le même genre de calculs pour évaluer $\|f\|_2^2$:

$$\|f\|_2^2 = \int_D |f(z)|^2 dz \tag{27.1153a}$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \int_{|z|<r} f(z) \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \bar{z}_k dz \tag{27.1153b}$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \int_{|z|<r} f(z) \bar{z}^k dz \qquad \text{permuter } \sum \text{ et } \int \tag{27.1153c}$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k a_k \frac{\pi r^{2k+2}}{k+1} \qquad \text{intégrale déjà faite.} \tag{27.1153d}$$

Mais nous savons déjà que $c_n(f) = \sqrt{\pi/(n+1)}$, donc ce qui est dans la somme est $\pi \bar{a}_k a_k/(n+1) = |c_k(f)|^2$. Nous avons donc

$$\|f\|_2^2 = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \, r^{2k+2}. \tag{27.1154}$$

La fonction (de r) constante $|c_k(f)|^2$ domine $|c_k(f) r^{2k+2}|$ tout en ayant une somme (sur k) qui converge ; en effet la proposition 25.25 nous indique que $\sum_k |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$. Le théorème de la convergence dominée nous permet d'inverser la limite et la somme pour obtenir le résultat attendu :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2. \tag{27.1155}$$

□

Chapitre 28

Séries de Fourier

28.1 Densité des polynômes trigonométriques

28.1.1 Convergence pour les fonctions continues (via Weierstrass)

Le résultat fondamental qui nous permet d'utiliser les polynômes trigonométriques comme base pour les fonctions *continues* périodiques est le suivant. Notons que pour les fonctions non continues, il y a encore du travail.

LemXGYaRlC

Lemme 28.1.
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue 2π-périodique et si $\epsilon > 0$, alors il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \epsilon$.

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème de Stone-Weierstrass 12.444. Soit le compact de Hausdorff[1]

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}, \tag{28.1}$$

et $C(S^1, \mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions continues de S^1 vers $\mathbb{C}$. Il suffit de vérifier que les polynômes trigonométriques vérifient les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass. Un polynôme trigonométrique est un polynôme en z et $\bar{z}$ défini sur S^1.

(1) Le polynôme constant est dans l'algèbre, ok.

(2) Pour la séparation des points, considérons le polynôme trigonométrique $x \mapsto e^{ix}$.

(3) Si P est un polynôme en z et $\bar{z}$, alors $\bar{P}$ l'est aussi.

Donc si $\epsilon > 0$ et $\tilde{f} \in C(S^1, \mathbb{C})$ sont donnés, il existe un polynôme trigonométrique P tel que

$$\sum_t |\tilde{f}(e^{it}) - P(t)| < \epsilon. \tag{28.2}$$

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 2π-périodique. Nous considérons $\tilde{f} \in C(S^1, \mathbb{C})$ donnée par $\tilde{f}(e^{it}) = f(t)$. Alors $\sup_t |f(t) - P(t)| \leqslant \epsilon$. □

28.1.2 Convergence pour les fonctions continues (via Fejér)

Si nous ne voulons pas passer par le gros théorème de Stone-Weierstrass pour prouver la densité des polynômes trigonométriques dans $\left(C^0_{2\pi}, \|.\|_\infty\right)$, nous pouvons passer par le gros théorème de Fejér. C'est ce que nous faisons maintenant.

Si vous vous intéressez seulement au théorème sur les séries de Fourier, vous cherchez probablement le théorème 28.17.

DEFooYVJCooCGEYaG

Définition 28.2.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous définissons la fonction

$$\begin{aligned} D_n\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \end{aligned} \tag{28.3}$$

Elle s'appelle ***noyau de Dirichlet****.*

[1] Définition 7.74.

Définition 28.3.
*Le **noyau de Fejér** est la moyenne de Cesàro*[2] *des noyaux de Dirichlet :*

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t). \tag{28.4}$$

LemHPoIkwu

Lemme 28.4.
Le noyau de Dirichlet s'exprime sous la forme

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin(t/2)} \tag{28.5}$$

Démonstration. Nous commençons par mettre en facteur le premier terme :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}. \tag{28.6}$$

En utilisant la formule de la somme géométrique,

$$\begin{aligned}
D_n(t) &= e^{-int}\frac{1-(e^{it})^{2n+1}}{1-e^{it}} && (28.7a)\\
&= e^{-int}\frac{1-e^{(2n+1)it}}{1-e^{it}} && (28.7b)\\
&= e^{-int}\frac{e^{(2n+1)it/2}}{e^{i\frac{t}{2}}}\frac{e^{-(2n+1)it/2}-e^{(2n+1)it/2}}{e^{-it/2}-e^{it/2}} && (28.7c)\\
&= \frac{(-2i)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{(-2i)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. && (28.7d)
\end{aligned}$$

□

Théorème 28.5 (Théorème de Dirichlet)**.**
Soit f une fonction 2π-périodique et C^1 par morceaux. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous posons

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}. \tag{28.8}$$

Alors nous avons

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}. \tag{28.9}$$

LemtCAjJz

Lemme 28.6.
Le noyau de Fejér s'exprime sous la forme

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2. \tag{28.10}$$

EqLQtzCf

Note : ce noyau est positif. C'est important parce qu'on s'en sert dans la preuve du théorème de Fejér.

Démonstration. L'astuce est de noter $\sin(x) = \Im(e^{ix})$ et de repartir du résultat à propos du noyau de

[2] Définition 10.177.

Dirichlet. En utilisant encore la formule de la série géométrique partielle[3],

$$F_n(t) = \frac{1}{n\sin(t/2)}\Im\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)it/2} \tag{28.11a}$$
$$= \frac{1}{n\sin(t/2)}\Im e^{\frac{it}{2}}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kit} \qquad \text{lem. 1.611} \tag{28.11b}$$
$$= \frac{1}{n\sin(t/2)}\Im e^{\frac{it}{2}}\left(\frac{1-e^{nit}}{1-e^{it}}\right) \tag{28.11c}$$
$$= \frac{1}{n\sin(t/2)}\Im e^{it/2}\frac{e^{\frac{nit}{2}}\left(e^{-\frac{int}{2}}-e^{\frac{nit}{2}}\right)}{e^{\frac{it}{2}}\left(e^{-it/2}-e^{it/2}\right)} \tag{28.11d}$$
$$= \frac{1}{n\sin(t/2)}\underbrace{\Im e^{\frac{nit}{2}}}_{\sin(nt/2)}\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin(\frac{t}{2})} \tag{28.11e}$$
$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2. \tag{28.11f}$$

□

Le théorème de Fejér donne la convergence au sens de Cesàro[4] de la série de Fourier dans le cas continu et périodique. Pour avoir une convergence plus forte que Cesàro, il faut plus d'hypothèses, comme le montre le contre-exemple de la proposition 29.56. Voir la discussion 29.57.

ThoJFqczow

Théorème 28.7 (Fejér)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ nous notons

$$\begin{aligned} e_k\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto e^{ikx}. \end{aligned} \tag{28.12}$$

Pour chaque $n\in\mathbb{N}$ nous posons

$$D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k \qquad S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k \tag{28.13a}$$
$$F_n = \frac{D_0+\cdots+D_{n-1}}{n} \qquad \tilde{F}_n = \sigma_n\big(S(f)\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f), \tag{28.13b}$$

où

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt. \tag{28.14}$$

Alors

(1) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1$.

(2) *Pour tout $\alpha\in\,]0,\pi[$, F_n converge uniformément vers 0 sur $[-\pi,\pi]\setminus[-\alpha,\alpha]$.*

(3) *La suite $\tilde{F}_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.*

ItemUNQSPmyiv

(4) *Le système trigonométrique $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est total pour l'espace $\big(C^0_{2\pi}(\mathbb{R}),\|.\|_\infty\big)$ des fonctions continues 2π-périodiques.*

Démonstration. Un calcul usuel montre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_l(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } l\neq 0 \\ 2\pi & \text{si } l=0 \end{cases} \tag{28.15}$$

[3] Proposition 10.172.
[4] Convergence au sens de Cesàro, définition 10.177.

Nous avons alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e_l(t)dt}_{2\pi\delta_{l,0}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1. \tag{28.16}$$

Cela prouve déjà le premier point.

Pour le second point, en partant de l'expression (28.10) et en considérant $x \in [-\pi, \pi,] \setminus [-\alpha, \alpha]$ (ce qui nous évite l'annulation du dénominateur),

$$|F_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)\sin^2(\alpha/2)}, \tag{28.17}$$

et donc $F_n \to 0$ uniformément sur l'ensemble considéré.

Nous passons maintenant à cette histoire de convergence uniforme de la moyenne de Cesàro vers f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} \tag{28.18a}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e_k(x-t)dt \tag{28.18b}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_k(x-t)dt. \tag{28.18c}$$

Par conséquent, en effectuant le changement de variable $u = x - t$ et en utilisant la périodicité, EqkDsyAc

$$\tilde{F}_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_n(x-t)dt \tag{28.19a}$$

$$= -\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)F_n(u)du \tag{28.19b}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)F_n(u)du. \tag{28.19c}$$

Nous prouvons à présent l'uniforme convergence. Soit $\epsilon > 0$; étant donné que f est continue et 2π-périodique, elle est uniformément continue et nous considérons $\delta > 0$ tel que $|x-y| < \delta$ implique $\big|f(x) - f(y)\big| < \epsilon$. Soit M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$. L'équation (28.19) nous donne

$$\big|f(x) - \tilde{F}_n(x)\big| = \left\|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x-t) - f(x)\big)F_n(t)dt\right\| \tag{28.20a}$$ ykuGGh

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|2MF_n(t)|dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\epsilon|F_n(t)|dt \tag{28.20b}$$

$$\leqslant \frac{2M}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} F_n(t)dt + \epsilon' \tag{28.20c}$$ uRAMyq

Pour obtenir (28.20a) nous avons pu rentrer $f(x)$ dans l'intégrale en utilisant le premier point. Pour obtenir (28.20c) nous avons d'abord utilisé la positivité de F_n (lemme 28.6) pour enlever les valeurs absolues, et nous avons ensuite utilisé le fait que son intégrale valait 2π.

Étant donné que $F_n \to 0$ uniformément sur $[-\pi, \pi,] \setminus [-\alpha, \alpha]$, il existe un N tel que

$$\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} F_n(t)dt \leqslant \epsilon \tag{28.21}$$

dès que $n > N$. Le résultat en découle.

Pour le point (4), il suffit de remarquer que chacun des $\tilde{F}_n$ est une combinaison finie d'éléments du système trigonométrique. □

28.1.3 Densité dans L^p

Nous venons de voir (de deux façons différentes) que les polynômes trigonométriques étaient dense dans $\big(C^0_{2\pi}(\mathbb{R}), \|.\|_\infty\big)$. Nous avons aussi déjà vu par le théorème 27.102 que ces polynômes trigonométriques étaient denses dans $L^p(S^1)$. Nous présentons à présent une autre façon de prouver cette dernière densité.

ThoDPTwimI

Théorème 28.8.
Les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^p(S^1)$ pour $1 \leqslant p < \infty$.

Démonstration. Par les théorèmes 28.1 ou 28.7 (au choix), nous savons que les polynômes trigonométriques sont denses dans $\big(C^0_{2\pi}(S^1), \|.\|_\infty\big)$. Comme S^1 est compact, la densité est également au sens L^p. En effet si $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \epsilon$, alors

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_0^{2\pi} |f_n - f|^p \leqslant \int_0^{2\pi} \epsilon^p = 2\pi\epsilon^p. \tag{28.22}$$

Donc les polynômes trigonométriques sont denses dans $\big(C^0_{2\pi}(S^1), \|.\|_p\big)$. Mais nous savons par le théorème 27.65(5) que les fonctions continues sont denses dans $L^p(S^1)$.

Par composition de densités, les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^p(S^1)$. □

28.1.4 Suite équirépartie, critère de Weyl

Définition 28.9.
Soit u une suite dans $[0,1]$. Pour $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$ nous posons

$$X_n(a,b) = \text{Card}\big\{k \in \{1,\dots,n\} \text{ tel que } u_k \in [a,b]\big\}. \tag{28.23}$$

*Nous disons que la suite u est **équirépartie** si pour tout $0 \leqslant a < b < 1$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n(a,b)}{n} = b - a. \tag{28.24}$$

Voir aussi la remarque 36.190 sur les nombres normaux.

PropDMvPDc

Proposition 28.10 (Critère de Weyl[559, 128])**.**
Soit (x_n) une suite dans $[0,1[$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

ItemKWcZTHqi

(1) La suite (x_n) est équirépartie.

ItemKWcZTHqii

(2) Pour toute fonction continue à valeurs réelles sur $[0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f(x)dx. \tag{28.25}$$

EqBSqdipn

ItemKWcZTHqiii

(3) Pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p x_k} = 0. \tag{28.26}$$

Démonstration. On pose

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k). \tag{28.27}$$

(1) **Une espèce de lemme**

Supposons connaitre un ensemble de fonctions A dense dans $C^0([0,1])$ pour toutes les fonctions desquelles nous avons la limite (28.25). Alors la limite a lieu pour toute fonction de $C^0([0,1])$. En effet, soit $f \in C^0([0,1])$ et $g \in A$ tel que $\|f-g\|_\infty < \epsilon$. Alors

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_0^1 f(t)dt\right\| \leqslant \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k) - g(x_k)\big)\right\| \tag{28.28a}$$

$$+ \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(x_k) - \int_0^1 g(t)dt\right\| \tag{28.28b}$$

$$+ \left\|\int_0^1 g(t)dt - \int_0^1 f(t)dt\right\|. \tag{28.28c}$$

Le premier terme est majoré par ϵ. Le troisième a la même majoration : $\int_0^1 \big(f(t)-g(t)\big)dt \leqslant \|f-g\|_\infty = \epsilon$. Par hypothèse sur l'espace A, le second terme se majore par ϵ lorsque n est grand.

(2) **(1)⇒(2)** Nous supposons que la suite est équirépartie et nous commençons par montrer le résultat pour les fonctions en escalier. Soit donc la fonction en escalier $\eta(x) = c_j$ sur $a_{j-1} < x < a_j$. Sur le point a_j lui-même, la fonction η vaut soit c_j soit c_{j+1}. Nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta(x_k) = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} c_j X_n(a_j, a_{j+1}) - \sum_{j=1}^{n} c_j X_n(a_j, a_j) + \sum_{j=1}^{n}\eta(a_j)X_n(a_j, a_j)\right]. \tag{28.29}$$

EqohMuel

À la limite $n \to \infty$, les deux derniers termes tombent[5] et il reste

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta(x_k) = \sum_{j=1}^{n} c_j(a_{j-1} - a_j). \tag{28.30}$$

Or par construction, pour une fonction en escalier,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(a_{j-1} - a_j) = \int_0^1 \eta. \tag{28.31}$$

Étant donné que les fonctions en escalier sont denses dans les fonctions continues, l'espèce de lemme plus haut conclut.

(3) **(2)⇒(1)** Nous prouvons maintenant le sens inverse. C'est-à-dire que pour toute fonction continue sur $[0,1]$, nous avons

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k). \tag{28.32}$$

Nous devons en déduire que (x_n) est équirépartie. Pour ce faire, soit $x \in [0,1[$ et $\epsilon > 0$ tel que $x+\epsilon < 1$. Nous considérons $\varphi = \mathbb{1}_{[x,1[}$ et

$$\varphi_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, x[\\ \frac{t-x}{\epsilon} & \text{si } t \in [x, x+\epsilon[\\ 1 & \text{si } t \geqslant x+\epsilon. \end{cases} \tag{28.33}$$

C'est une fonction continue, donc

$$\lim_{n\to\infty} S_n\big(\varphi_\epsilon(t)\big) = \int_0^1 \varphi_\epsilon(t)dt = \int_x^{x+\epsilon}\frac{t-x}{\epsilon}dt + \int_{x+\epsilon}^1 1dt = 1 - x - \frac{\epsilon}{2}. \tag{28.34}$$

Mais $\varphi_\epsilon \leqslant \varphi$, donc $S_n(\varphi_\epsilon) \leqslant S_n(\varphi)$ et donc

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(\varphi) \geqslant 1 - x. \tag{28.35}$$

Notons que nous ne savons pas si la *vraie* limite de gauche existe ; c'est pourquoi nous prenons la limite inférieure, qui existe toujours.

Nous définissons aussi

$$\psi_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, x-\epsilon[\\ \frac{t-x+\epsilon}{\epsilon} & \text{si } t \in [x-\epsilon, x[\\ 1 & \text{si } t > x. \end{cases} \tag{28.36}$$

C'est encore une fonction continue et nous trouvons[6]

$$\int_0^1 \psi_\epsilon(t)dt = 1 - x + \frac{\epsilon}{2}. \tag{28.37}$$

Puisque $\psi_\epsilon \geqslant \varphi$, nous avons $S_n(\psi_\epsilon) \geqslant S_n(\varphi)$ et donc

$$\limsup_n S_n(\varphi) \leqslant 1 - x. \tag{28.38}$$

Nous avons déjà obtenu que

$$1 - x \leqslant \liminf S_n(\varphi) \leqslant \limsup S_n(\varphi) \leqslant 1 - x, \tag{28.39}$$

[5] J'en profite pour mentionner que mon équation (28.29) n'est pas la même que celle de [559] dans laquelle il me semble voir une faute ; quoi qu'il en soit, les termes litigieux tombent.

[6] Je recommande chaudement de dessiner les fonctions φ_ϵ et ψ_ϵ pour avoir une idée de la situation.

donc la limite existe et vaut

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\varphi) = 1 - x. \tag{28.40}$$

Le résultat est maintenant démontré dans le cas très particulier de la fonction caractéristique $\varphi = \mathbb{1}_{[x,1[}$.

Si nous prenons une fonction caractéristique $\mathbb{1}_{[a,b]}$, nous avons le même genre de preuve parce que $\mathbb{1}_{[a,b[}$ est une combinaisons linéaire de fonctions du type $\mathbb{1}_{[x,1[}$.

Nous avons donc

$$\lim_{n\to\infty} S_n\big(\mathbb{1}_{[a,b]}\big) = b - a, \tag{28.41}$$

alors que le membre de gauche n'est autre que

$$S_n\big(\mathbb{1}_{[a,b]}\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[a,b]}(x_k) = \frac{1}{n} X_n(a,b). \tag{28.42}$$

(4) **(2)⇒(3)** Vu que[7] $e^{2i\pi p x_k} = \cos(2\pi p x_k) + i\sin(2\pi p x_k)$. est une fonction périodique, c'est immédiat.

(5) **(3)⇒(2)** Par linéarité, le point (2) montre que si f est un polynôme trigonométrique, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f(t)dt. \tag{28.43}$$

(6) **Densité des polynômes trigonométriques** Il nous reste à prouver que les polynômes trigonométriques sont denses dans les fonctions continues sur $[0,1]$. Soit une fonction continue sur $[0,1]$ avec $f(0) = f(1)$. Alors le théorème de Stone-Weierstrass dans sa version trigonométrique (lemme 28.1) nous donne la densité.

Si $f(1) \neq f(0)$ c'est pas très grave : on peut trouver une fonction g vérifiant $g(0) = g(1)$ et $\|f-g\|_\infty \leqslant \epsilon$. Ensuite un polynôme trigonométrique approxime très bien g.

□

28.2 Fonctions de Dirichlet

Définition 28.11.
*Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une **fonction de Dirichlet** si*

(1) elle est 2π-périodique,

(2) elle est continue par morceaux,

(3) pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}. \tag{28.44}$$

Nous notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de Dirichlet.

LemVIwMsTC

Lemme 28.12 ([780]).
L'ensemble $C^0(S^1)$ est dense dans l'ensemble des fonctions de Dirichlet $\big(\mathcal{D}, \|.\|_2\big)$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que $f \in \mathcal{D}$ n'a qu'un seul point de discontinuité, x_0. Alors nous considérons la fonction

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in S^1 \setminus B(x_0, \frac{1}{n}) \\ d(x) & \text{si } x \in B(x_0, \frac{1}{n}) \end{cases} \tag{28.45}$$

où d est la droite joignant $f(x_0 - \frac{1}{n})$ et $f(x_0 + \frac{1}{n})$. La fonction f_n est continue et vérifie

$$|f_n(x)| \leqslant \|f\|_\infty \tag{28.46}$$

pour tout x. En effet si x est en dehors de $B(x_0, \frac{1}{n})$ c'est évident, et si $x \in B(x_0, \frac{1}{n})$, alors $|f_n(x)|$ est majoré soit par $f(x_0 - \frac{1}{n})$ soit par $f(x_0 + \frac{1}{n})$ suivant que d soit croissant ou décroissant. Avec ça nous avons

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{x_0-1/n}^{x_0+1/n} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leqslant \int_{x_0-1/n}^{x_0+1/n} 4\|f\|_\infty = \frac{8\|f\|_\infty}{n}. \tag{28.47}$$

[7] Lemme 18.11.

Et nous voyons que $\|f_n - f\|_2 \to 0$.

Si f contient plusieurs points de discontinuité, on fait le même coup autour de chaque point, en prenant n assez grand pour que si x_0 est un point de discontinuité, $B(x_0, \frac{1}{n})$ n'en contienne pas d'autres. □

Notons que la densité de $C^0(S^1)$ dans $\big(\mathcal{D}, \|.\|_\infty\big)$ est impossible, parce qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Théorème 28.13.
Le système trigonométrique $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est total[8] *dans $\big(\mathcal{D}, \|.\|_2\big)$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}$. Si elle est continue, le théorème de Fejér 28.7 nous donne convergence uniforme sur S^1 d'une suite de polynômes trigonométriques vers f. Cette convergence est également une convergence L^2 parce que S^1 est compact.

Prenons donc $f \in \mathcal{D}$ non continue et $\epsilon > 0$[9]. Par le lemme 28.12, il existe une fonction $g \in C^0(S^1)$ telle que

$$\|g - f\|_2 \leqslant \epsilon. \tag{28.48}$$

Le théorème de Fejér donne aussi un polynôme trigonométrique P tel que $\|P - g\|_2 < \epsilon$; nous avons alors

$$\|P - f\|_2 \leqslant \|P - g\|_2 + \|g - f\|_2 \leqslant 2\epsilon. \tag{28.49}$$

□

Notons que cette histoire de fonctions de Dirichlet n'a pas attaqué le vrai fond du problème de la densité des polynômes trigonométriques dans $L^2(S^1)$ parce que nous restons avec une hypothèse de continuité, alors que les représentants des éléments de $L^2(S^1)$ n'ont strictement aucune régularité à priori.

28.3 Coefficients et série de Fourier

DEFooJUUIooNMdCtN

Définition 28.14.
Pour toutes les fonctions f définie sur $[0, 2\pi[$ ou périodique de période 2π, pour lesquelles les expressions ont un sens, nous définissons

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, \tag{28.50}$$

EqNDBaXRL

*et nous nommons **série de Fourier** associée à f la série*

$$S(f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}. \tag{28.51}$$

Nous considérons aussi la suite (nous ne précisons pas dans quel espace)

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}. \tag{28.52}$$

Si la fonction f est de période T, nous définissons

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)e^{-2i\pi nt/T}dt. \tag{28.53}$$

EQooBOFSooFCJXzu

Le sport de la théorie des séries de Fourier est de donner des conditions sous lesquelles :

- les coefficients de Fourier et la série de Fourier ont un sens,
- la série de f est égale à f.

PropmrLfGt

Proposition 28.15 ([781]).
Soit f une fonction continue et 2π-périodique telle que sa série de Fourier converge uniformément. Alors la convergence est vers f.

[8] Définition 25.20.

[9] Par exemple $\epsilon = 0.4$, mais ce n'est qu'un exemple hein. Si vous en voulez un autre, prenez p, un nombre premier puis calculez $\epsilon = 1/p$.

Démonstration. Notons d'abord que f étant continue sur $[0,2\pi]$, elle y est bornée et L^2. Par conséquent Parseval nous enseigne que

$$\|S_N(f)-f\|_{L^2}\to 0. \tag{28.54}$$

Cela signifie que

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)-S_N(t)|^2dt=0. \tag{28.55}$$

L'hypothèse de convergence uniforme nous dit que la fonction $|f(t)-S_N(t)|^2$ converge uniformément vers la fonction $|f(t)-S(t)|^2$ où nous avons écrit S la limite de S_N. En permutant la limite et l'intégrale,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)-S(t)|^2dt=0, \tag{28.56}$$

ce qui signifie que la fonction $t\mapsto|f(t)-S(t)|^2$ est la fonction nulle. Nous en déduisons que $f=S$. □

PropSgvPab

Proposition 28.16.
Soit f une fonction 2π-périodique. Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|<\infty$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$ nous avons

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{inx}. \tag{28.57}$$

De plus, la suite $(S_n(f))$ converge uniformément vers f.

Démonstration. Nous posons

$$g(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{inx}. \tag{28.58}$$

Étant donné les hypothèses, la série de droite converge absolument, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Nous avons

$$\big|g(x)-(S_n(f))(x)\big|\leqslant\sum_{|k|>n}|c_k(f)|, \tag{28.59}$$

mais le terme de droite tend vers zéro lorsque $n\to\infty$ parce que c'est le reste d'une série convergente. Cela signifie que $S_n(f)$ converge uniformément vers g.

Par ailleurs nous savons que dans L^2 nous avons la convergence $S_n(f)\to f$ (parce que f est continue sur le compact $[0,2\pi]$ et donc y est bornée et L^2), ce qui signifie que $g=f$ presque partout. Ces deux fonctions étant continues, elles sont égales partout. □

ThozHXraQ

Théorème 28.17 ([1, 782]).
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, une fonction C^1 et 2π-périodique. Pour $n\in\mathbb{Z}$ nous posons

$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}dt. \tag{28.60}$$

Nous posons

$$\begin{aligned}f_k\colon[0,2\pi]&\to\mathbb{C}\\ x&\mapsto c_k(f)e^{inx}.\end{aligned} \tag{28.61}$$

Alors

ITEMooIDVEooJdMEmU

(1) Les coefficients de Fourier sont sommables : $(c_n)\in\ell^1(\mathbb{Z})$.

ITEMooAUCTooTgJEPv

(2) La suite $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est uniformément sommable[10]*. Si on pose*

$$s_n(x)=\sum_{k=-N}^{n}c_k(f)e^{ikx}, \tag{28.62}$$

alors il existe une fonction F telle que

$$\|s_n-F\|_\infty\to 0. \tag{28.63}$$

ITEMooSHZXooMZtdJU

(3) Nous avons $F=f$, c'est-à-dire

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(f)e^{inx}. \tag{28.64}$$

[10] Définition 10.120.

ITEMooGIEUooKLyXej

(4) La suite des $f_k(x)$ est sommable[11] *et pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}. \tag{28.65}$$

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Soit $n \in \mathbb{Z}$. Nous posons $g(t) = f(t)e^{-int}$. Nous avons

$$0 = g(2\pi) - g(0) = \int_0^{2\pi} g'(t)dt = \int_0^{2\pi} \big[f'(t)e^{-int} - inf(t)e^{-int}\big]dt. \tag{28.66}$$

Du coup, $c_n(f') = inc_n(f)$. La fonction f' étant bornée (parce que continue sur $[0, 2\pi]$), elle est de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$ et par les inégalités de Parseval (théorème 25.46) nous avons

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 < \infty. \tag{28.67}$$

Par conséquent $(c_n(f')) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et a fortiori $(c_n(f'))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous indique alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}|c_n(f')| \leqslant \left(\sum_n \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_n |c_n(f')|^2\right)^{1/2} < \infty. \tag{28.68}$$

Nous procédons de même pour $n < 0$. Cela prouve que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| = |c_0(f)| + \sum_{n<0} |c_n(f)| + \sum_{n>0} |c_n(f)| < \infty. \tag{28.69}$$

(2) **Pour (2)** Nous avons $\|f_n\|_\infty = |c_n(f)|$, et nous venons de voir que la série $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| < \infty$. Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ normalement sommable. Elle est alors uniformément sommable par le lemme 10.150. Nous nommons F sa somme.

(3) **Pour (3)** Nous savons que f est continue et que sa série de Fourier converge uniformément. Donc la proposition 28.15 nous rassure : la convergence se fait vers f.

(4) **Pour (4)** C'est la convergence normale pour ça. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ nous avons sommabilité normale de $(f_k(x))$ vers $f(x)$. De plus nous avons convergence simple de la série. La proposition 10.157 dit qu'alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(x) = f(x). \tag{28.70}$$

□

[11] Définition 10.128.

Chapitre 29

Transformation de Fourier

DEFooRIXGooECoIbx

Définition 29.1.
*Soit une fonction f sur $\mathbb{R}^d$, dont nous ne précisons pas la régularité. Sa **transformée de fourier** est la fonction $\hat{f}$ définie par*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \tag{29.1}$$

EQooCHMUooFhSmaz

si elle existe.

29.2.
Ce qui est bien avec cette définition est que si la formule (29.1) ne définit pas $\hat{f}$ (parce que l'intégrale n'existe pas, par exemple), nous nous réservons le droit de définir tout de même $\hat{f}$ par d'autres biais. Ce sera d'ailleurs l'objet du théorème 29.68 qui définira $\hat{f}$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors que la formule (29.1) ne fonctionne pas sur toutes ces fonctions.

Une bonne partie de ce qui va suivre aura pour objet de déterminer des espaces de fonctions sur lesquels la transformée est bien définie, et sur lesquels elle a de bonnes propriétés.

Nous allons par ailleurs utiliser indifféremment les notations $\mathcal{F}(f)$ ou $\hat{f}$ pour la transformée de Fourier de f. La notation $\mathcal{F}$ est pratique pour les transformées de looooooongues expressions ainsi que pour parler de l'application « transformée de Fourier » d'un espace de fonction vers un autre.

29.3.
Nous verrons dans le théorème 29.68 que la transformée de Fourier n'est pas une isométrie de L^2. Pour avoir une isométrie, il aurait fallu choisir des coefficients moins simples.

Proposition 29.4.
La transformée de Fourier est $\mathbb{C}$-linéaire au sens suivant. Soient des fonctions $f, g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telles que $\mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(g)$ existent. Alors

(1) La transformée de Fourier de $f+g$ existe et vaut $\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$

(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la transformée de Fourier de λf existe et vaut $\mathcal{F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}(f)$.

Démonstration. C'est la proposition 14.193 qui nous permet de séparer l'intégrale dans le calcul suivant :

$$\mathcal{F}(f+g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (f+g)(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \tag{29.2a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx + \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \tag{29.2b}$$

$$= \mathcal{F}(f)(\xi) + \mathcal{F}(g)(\xi). \tag{29.2c}$$

En ce qui concerne $\mathcal{F}(\lambda f)$, c'est la même chose, en utilisant la linéarité de l'intégrale. □

29.1 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$

Nous rappelons que les espaces L^p sont des ensembles de classes de fonctions, définition 27.10. La transformée de Fourier, comme presque tout ce qui a trait aux intégrales, passe aux classes.

Lemme 29.5.
Soit une fonction $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telle que $\mathcal{F}(f)$ existe. Alors pour toute fonction $g \in [f]$ la transformée $\mathcal{F}(g)$ existe et $\hat{g} = \hat{f}$.

Démonstration. Par définition des classes, il existe une fonction $s\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ presque partout nulle telle que $g = f + s$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$ fixé. La fonction $x \mapsto s(x)e^{-i\xi x}$ est presque partout nulle et donc intégrable d'intégrale nulle. La proposition 14.193 nous permet alors d'affirmer que $f + s$ est intégrable et que

$$\mathcal{F}(f+s)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (f+s)(x)e^{-i\xi x}dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\xi x}dx + \int_{\mathbb{R}^d} s(x)e^{-i\xi x}dx = \mathcal{F}(f)(\xi). \tag{29.3}$$

□

À partir de maintenant, lorsque nous parlons de transformée de Fourier d'une fonction dans L^p, nous parlons indifféremment d'une vraie fonction ou d'une classe.

Lemme 29.6.
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f}$ existe.

Démonstration. Par définition, si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} |f|$ existe et est finie. Alors la fonction qui arrive dans la transformée de Fourier en ξ, la fonction $s\colon x \mapsto f(x)e^{-i\xi x}$ est également dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ parce que $|s| = |f|$. □

29.7.
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\hat{f}$ existe, mais il n'est pas garanti qu'elle soit elle-même dans L^1, même si il est vrai que $\hat{f}$ est continue (proposition 29.11) et bornée (proposition 29.14). Nous allons immédiatement montrer un exemple de fonction L^1 dont la transformée de Fourier n'est pas dans L^1.

LEMooROPHooOSguhN

Lemme 29.8.
La transformée de Fourier de

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & sinon \end{cases} \end{aligned} \tag{29.4}$$

est

$$\hat{f}(\xi) = -\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}. \tag{29.5}$$

La fonction $\hat{f}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

Démonstration. Pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x)e^{i\xi x}$ est continue à support compact, donc nous n'avons aucun problèmes avec l'intégrale

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx \tag{29.6a}$$

$$= \int_{[-1/2,1/2]} e^{-i\xi x} \tag{29.6b}$$

$$= \big[-\frac{1}{i\xi} e^{-i\xi x} \big]_{x=-1/2}^{x=1/2} \tag{29.6c}$$

$$= -\frac{1}{i\xi}\big(e^{-i\xi/2} - e^{i\xi/2}\big) \tag{29.6d}$$

$$= -\frac{2i\sin(\xi/2)}{i\xi} \tag{29.6e}$$

$$= \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}. \tag{29.6f}$$

Le fait que cette fonction ne soit pas dans $L^1(\mathbb{R})$ est le lemme 20.212. □

LEMooKGDKooVXSMCn

Lemme 29.9.
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et si $g(x) = f(\lambda x)$ alors

$$\hat{g}(\xi) = \lambda^{-d}\hat{f}(\xi/\lambda). \tag{29.7}$$

Démonstration. Il s'agit de faire le changement de variable $y = \lambda x$ dans l'intégrale

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)e^{-i\xi x}dx. \tag{29.8}$$

Dans le changement de variables, vient le coefficient $dx = \lambda^{-d}dy$. □

PropfqvLOl

Proposition 29.10.
La transformée de Fourier est un morphisme vis-à-vis de la convolution sur $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}. \tag{29.9}$$

Démonstration. Nous devons étudier l'intégrale

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(y)g(t-y)dy \right] e^{-it\xi} dt. \tag{29.10}$$

Ici nous avons choisi des représentants f et g dans les classes de L^1. Montrons que f est borélienne. D'abord $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ où f_+ et f_- sont des fonctions positives. Afin d'alléger les notations nous supposons un instant que f est positive et nous posons

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k}{n} \mathbb{1}_{f(x) \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[}. \tag{29.11}$$

Le fait que f soit dans L^1 implique que chacune des fonctions f_n est borélienne[1] et donc que f l'est aussi en tant que limite ponctuelle de fonctions boréliennes[2].

Nous allons appliquer le théorème de Fubini 14.304 à la fonction

$$\phi(x, y) = f(x)g(y)e^{-i\xi(x+y)} \tag{29.12}$$

qui est borélienne en tant que produit et composée de fonctions boréliennes. Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-i\xi x}||g(y)e^{-i\xi y}|dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(|f(x)| \int_{\mathbb{R}} |g(y)|dy \right) dx \tag{29.13a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \|g\|_1 \tag{29.13b}$$

$$= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \tag{29.13c}$$

Le théorème est donc applicable. D'abord nous avons :

$$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-i\xi y} dy \right) \tag{29.14a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(y)e^{-i\xi(x+y)} dy \right) dx \tag{29.14b}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)e^{-i\xi t} dt \right) dx. \tag{29.14c}$$

Jusqu'ici nous n'avons pas utilisé Fubini. Nous avons seulement introduit le nombre $\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-i\xi y}dy$ dans l'intégrale par rapport à x et effectué le changement de variables $y \mapsto t = x + y$. Maintenant nous appliquons le théorème de Fubini pour inverser l'ordre des intégrales :

$$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)e^{-it\xi} dt \right) dx \tag{29.15a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)dx \right) dt \tag{29.15b}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} (f * g)(t) dt \tag{29.15c}$$

$$= \widehat{f * g}(\xi). \tag{29.15d}$$

□

PropJvNfj

Proposition 29.11.
Soit une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors sa transformée de Fourier est continue.

[1] Ceci demanderait plus de justification. Dites-moi si vous savez comment justifier que les f_n soient boréliennes.
[2] Le fait que f soit borélienne est une conséquence du théorème 27.251.

Démonstration. Nous considérons une fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sa transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi x} f(x) dx. \tag{29.16}$$

Pour montrer que cette fonction $\hat{f}$ est continue en ξ_0 nous considérons une suite $(\xi_n) \to \xi_0$ et nous voulons montrer que $\hat{f}(\xi_n) \to \hat{f}(\xi_0)$. Pour cela nous considérons les fonctions

$$g_n(x) = e^{-i\xi_n x} f(x) \tag{29.17}$$

qui convergent simplement vers $g(x) = e^{-i\xi_0 x} f(x)$. Étant donné que

$$|g_n(x)| < |f(x)|, \tag{29.18}$$

le théorème de la convergence dominée donne alors

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n(x) = \int \lim_{n\to\infty} g_n(x), \tag{29.19}$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \hat{f}(\xi_n) = \hat{f}(\xi_0)$. La fonction $\hat{f}$ est donc continue. □

LEMooCBPTooYlcbrR

Lemme 29.12.
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nous avons $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

Démonstration. Cela est une simple vérification :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx, \tag{29.20}$$

nous avons, pour tout ξ,

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx, \tag{29.21}$$

ce qui signifie exactement $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$. □

LesmRLaxXkQV

Lemme 29.13 (Lemme de Riemann-Lebesgue[783])**.**
Si f est une fonction $L^1(\mathbb{R})$ alors $\lim_{\xi\to\pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Démonstration. Nous commençons par prouver le résultat dans le cas d'une fonction g en escalier, et plus précisément par une fonction caractéristique d'un compact $K = [a, b]$. Au niveau de la transformée de Fourier nous avons

$$\hat{\mathbb{1}}_K(\xi) = \int_a^b e^{-i\xi x} dx = -\frac{1}{i\xi}(e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}). \tag{29.22}$$

Par conséquent

$$|\hat{\mathbb{1}}_K(\xi)| \leqslant \frac{2}{|\xi|}. \tag{29.23}$$

Plus généralement si $g = \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{1}_{K_i}$, alors

$$|\hat{g}(\xi)| \leqslant \frac{2}{|\xi|} \sum_{i=1}^N |c_i|, \tag{29.24}$$

et donc nous avons effectivement $\lim_{\xi\to\pm\infty} |\hat{g}(\xi)| = 0$.

Nous passons maintenant au cas général $f \in L^1(\mathbb{R})$. Étant donné que les fonctions L^1 en escalier sont denses dans L^1, nous considérons une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ en escalier telle que $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Nous avons donc

$$\|\hat{f} - \hat{g}\|_\infty \leqslant \|f - g\|_1 < \epsilon. \tag{29.25}$$

Donc dans

$$\|\hat{f}(\xi)\| \leqslant \|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)\| + |\hat{g}(\xi)|, \tag{29.26}$$

le premier terme est plus petit que ϵ. Il nous reste à voir que

$$\lim_{\xi\to\infty} |\hat{g}(\xi)| = 0, \tag{29.27}$$

mais cela est le résultat de la première partie de la preuve. □

CORooHSNYooZlZoyV

Corolaire 29.14.
La transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R})$ est bornée.

Démonstration. Par le corolaire 29.11, la transformée de Fourier d'une fonction L^1 est continue. Le lemme de Riemann-Lebesgue 29.13 impliquant qu'elle tend vers zéro en $\pm\infty$, elle doit être bornée. □

29.1.1 Formule sommatoire de Poisson

ProprPbkoQ

Proposition 29.15 (Formule sommatoire de Poisson)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $L^1(\mathbb{R})$. Nous supposons que

(1) il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ tels que

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}, \tag{29.28}$$

(2) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(2\pi n)| < \infty$.

Alors nous avons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi n). \tag{29.29}$$

Démonstration. (1) **Convergence normale**

Nous commençons par montrer qu'il y a convergence normale sur tout compact séparément des séries sur les $n \geqslant 0$ et sur les $n < 0$.

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ contenu dans $[-A, A]$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geqslant 2A$. Pour $x \in K$ nous avons

$$|x+n| \geqslant |n| - |x| \geqslant |n| - A \geqslant \frac{|n|}{2}. \tag{29.30}$$

Du coup nous avons un $\alpha > 1$ tel que

$$|f(x+n)| \leqslant \frac{M}{\big(1+|x+n|\big)^\alpha} \leqslant \frac{M}{\Big(1+\frac{|n|}{2}\Big)^\alpha}. \tag{29.31}$$

Lorsque n est grand, cela a le comportement de $M/|n|^\alpha$ et donc la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x+n) \tag{29.32}$$

est une série convergeant normalement. Les deux séries (usuelles)

$$a_+ = \sum_{n \geqslant 0} f(x+n) \tag{29.33a}$$

$$a_- = \sum_{n < 0} f(x+n) \tag{29.33b}$$

convergent normalement.

(2) **Convergence commutative** Au sens de la définition 10.128 nous avons

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = a_+ + a_-. \tag{29.34}$$

En effet si nous prenons $J_0' \subset \mathbb{N}$ fini tel que $|\sum_{\mathbb{N}\setminus J_0'} f(x+n) - a_+| \leqslant \epsilon$ et $J_1' \in -\mathbb{N}$ tel que $|\sum_{n\in-\mathbb{N}\setminus J_1'} f(x+n) - a_-| < \epsilon$, et si nous posons $J_0 = J_0' \cup J_1'$ alors si K est un ensemble fini de $\mathbb{Z}$ contenant J_0 nous avons

$$|\sum_{n\in K} f(n+x) - (a_+ + a_-)| \leqslant |\sum_{n\in K^+} f(n+x) - a_+| + |\sum_{n\in K^-} f(n+x) - a_-| \leqslant 2\epsilon \tag{29.35}$$

où K^+ sont les éléments positifs de K et K^- sont les *strictement* négatifs. Maintenant que la famille $\{f(n+x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille sommable, nous savons qu'elle est commutativement sommable et que la proposition 10.145 nous permet de sommer dans l'ordre que l'on veut. Nous pouvons donc écrire sans ambigüité l'expression $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ ou $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$.

(3) **re-convergence normale**

Nous posons donc sans complexes la série

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) \tag{29.36}$$

qui converge tant commutativement que normalement. Notons que nous pouvons maintenant dire que la série sur $\mathbb{Z}$ converge normalement ; pas seulement les deux séries séparément.

(4) **Continuité, périodicité** Étant donné que chacune des fonctions $f(x+n)$ est continue, la convergence normale nous assure que F est continue.

De plus F est périodique de période 1 parce que

$$F(x+1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+1+n)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}f(x+p)=F(x) \tag{29.37}$$

où nous avons posé $p=1+n$.

Notons que nous n'avons pas spécialement prouvé que F n'était pas périodique avec des périodes plus petites que 1. Mais cela n'a pas d'importance ici.

(5) **Coefficients de Fourier**

En vertu de la définition (27.408) et de la périodicité de F,

$$\begin{aligned}
c_n(F)&=\int_{-1/2}^{1/2}F(t)e^{-2\pi int}dt && (29.38a)\\
&=\int_{0}^{1}F(t)e^{-2\pi int}dt && (29.38b)\\
&=\int_{0}^{1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(t+n)e^{-2i\pi nt}dt && (29.38c)\\
&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{n}^{n+1}f(u)e^{-2\pi i(u-n)n}du && (29.38d)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-2\pi inu}du && (29.38e)\\
&=\hat{f}(2\pi n). && (29.38f)
\end{aligned}$$

Justifications :

- Changement de variables $u=t+n$.
- permuté l'intégrale et la somme en vertu du fait que la somme converge normalement.
- Égalité $e^{-2\pi i(u-n)n}=e^{-2\pi iun}e^{-2\pi in^2}=e^{-2\pi iun}$.

(6) **Conclusion**

Étant donné l'hypothèse $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|<\infty$ la proposition 28.16 nous dit que

$$F(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(F)e^{2\pi inx}, \tag{29.39}$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(2\pi n)e^{2\pi inx}. \tag{29.40}$$

En écrivant cette égalité en $x=0$ nous trouvons le résultat :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(2\pi n). \tag{29.41}$$

□
ExDLjesf

Exemple 29.16.
La formule sommatoire de Poisson peut être utilisée pour calculer des sommes dans l'espace de Fourier plutôt que dans l'espace direct. Nous allons montrer dans cet exemple l'égalité

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\alpha n^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\pi^2n^2/\alpha}. \tag{29.42}$$

Si α est grand, alors la somme de gauche est plus rapide, tandis que si α est petit, c'est le contraire.

Nous appliquons la formule sommatoire de Poisson à la fonction

$$f(x)=e^{-\alpha x^2}. \tag{29.43}$$

Nous avons [EqCDeLht]

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2 - ixt} dt \tag{29.44a}$$
$$= e^{-x^2/4\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{\alpha}t + \frac{ix}{2\sqrt{\alpha}})^2} \tag{29.44b}$$
$$= e^{-x^2/4\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}+\frac{ix}{2\sqrt{\alpha}}} e^{-u^2} du. \tag{29.44c}$$

Pour traiter cette intégrale nous utilisons la proposition 26.11 en considérant le chemin rectangulaire fermé qui joint les points $-R$, R, $R+ai$, $-R+ai$ et $f(z) = e^{-z^2}$. Calculons l'intégrale sur les deux côtés verticaux. Nous posons

$$\gamma_R(t) = R + tia \tag{29.45}$$

avec $t\colon 0 \to 1$. Nous avons

$$\int_{\gamma_R} f = \int_0^1 f\big(\gamma_R(t)\big)\|\gamma_R'(t)\| dt \tag{29.46a}$$
$$= ae^{-R^2} \int_0^1 e^{-2tRia + at^2} dt, \tag{29.46b}$$

donc en module nous avons

$$\Big|\int_{\gamma_R} f\Big| \leqslant ae^{-R^2} \int_0^1 e^{at^2} dt \leqslant Me^{-R^2}, \tag{29.47}$$

où M est une constante ne dépendant pas de R. Lorsque $R \to \infty$, la contribution des chemins verticaux s'annule et nous trouvons que

$$\int_{\mathbb{R}+ai} e^{-u^2} du = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du, \tag{29.48}$$ [EqirNxLr]

que nous pouvons utiliser pour continuer le calcul (29.44). Nous avons

$$\hat{f}(x) = \frac{e^{-x^2/4\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-x^2/4\alpha} \tag{29.49}$$

où nous avons utilisé la formule (14.989). Par conséquent ce qui rentre dans la formule sommatoire de Poisson est

$$\hat{f}(2\pi n) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}. \tag{29.50}$$

△

29.2 Suite régularisante

[DEFooRIFYooUUUoha]

Définition 29.17.
*Une **suite régularisante** est une suite (ρ_n) dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que* [ITEMooEYXYooAkKeXX]

(1) pour tout n, $\rho_n \geqslant 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$;

(2) pour tout $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|t|>\alpha} \rho_n = 0. \tag{29.51}$$

Une telle suite est régularisante parce que souvent $\rho_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, ce qui donne $f * \rho_n \in C^\infty$ par le corolaire 27.85.

[PROPooYUVUooMiOktf]

Proposition 29.18 ([784, 785])**.**
Soit une suite régularisante $\rho_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors : [ITEMooLWMIooFFamdf]

(1) Si f est continue à support compact, nous avons la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^d$:

$$f * \rho_n \xrightarrow{unif} f. \tag{29.52}$$

[ITEMooEJKKooChcgyM]

(2) Si $g \in L^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ alors

$$g * \rho_n \xrightarrow{L^p} g. \tag{29.53}$$

Démonstration. Si f est continue à support compact, elle est uniformément continue[3], et elle est bornée. Soit $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que pour tout x, y tels que $\|x - y\| < \alpha$ nous ayons $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Nous prenons de plus n suffisamment grand pour avoir $\int_{B(0,\alpha)^c} \rho_n < \epsilon$. Nous avons alors

$$|f(x) - (f * \rho_n)(x)| = |\int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x) - f(y)\big)\rho_n(x - y)dy| \tag{29.54a}$$

$$\leqslant \int_{B(x,\alpha)} \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leqslant\epsilon} \rho_n(x - y)dy + \int_{B(x,\alpha)^c} \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leqslant 2\|f\|_\infty} \rho_n(x - y)dy \tag{29.54b}$$

$$\leqslant \epsilon(1 + 2\|f\|_\infty). \tag{29.54c}$$

Nous avons prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $n > N$ implique $\big|f(x) - (f * \rho_n)(x)\big| \leqslant \epsilon$. Cela prouve l'uniforme convergence sur $\mathbb{R}^d$ de $f * \rho_n$ vers f.

Pour le point (2) nous considérons $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Nous avons la majoration

$$\|g * \rho_n - g\|_p \leqslant \|g * \rho_n - \phi * \rho_n\|_p + \|\phi * \rho_n - \phi\|_p + \|\phi - g\|_p \tag{29.55}$$

En ce qui concerne le premier terme ;

$$\|(g - \phi) * \rho_n\|_p \leqslant \|g - \phi\|_p \tag{29.56}$$

par la proposition 27.83. Donc

$$\|g * \rho_n - g\|_p \leqslant 2\|g - \phi\|_p + \|\phi * \rho_n - \phi\|_p. \tag{29.57}$$

EQooXWZYooVtsRQK

Par la densité de $\mathscr{D}$ dans L^p (théorème 27.65(5)) nous pouvons considérer une suite $\phi_i \xrightarrow{L^p} g$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. L'inégalité (29.57) est valable pour chaque i :

$$\|g * \rho_n - g\|_p \leqslant 2\|g - \phi_i\|_p + \|\phi_i * \rho_n - \phi_i\|_p. \tag{29.58}$$

Nous effectuons la limite sur $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \|g * \rho_n - g\|_p \leqslant 2\|g - \phi_i\| + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \|\phi_i * \rho_n - \phi_i\|_p}_{=0} \tag{29.59}$$

parce que le point (1) s'applique à ϕ_i. Nous effectuons ensuite la limite sur $i \to \infty$ dans

$$\lim_{n\to\infty} \|g * \rho_n - g\| \leqslant 2\|g - \phi_i\| \to 0. \tag{29.60}$$

□

29.3 Dérivation dans les bornes

PROPooSBBOooHdtWDK

Proposition 29.19 ([1]).
Tout élément de $C_c\big([a, b]\big)$[4] est limite uniforme de fonctions en escalier[5].

Démonstration. Soit une application en continue escalier $\phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Soit $s \in [a, b]$. Vu que ϕ est continue en s, il existe $\delta_s > 0$ tel que $|\phi(x) - \phi(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in B(s, \delta_s)$. Notez que cette boule est pour la topologie induite de $\mathbb{R}$ vers $[a, b]$; si $s = a$, c'est une boule coupée à gauche.

Étant donné que $[a, b]$ est compact, il existe $s_1, \dots, s_m \in [a, b]$ tels que $\{B(s_i, \delta_{s_i})\}_{i=1,\dots,m}$ recouvre $[a, b]$. Nous les supposons triés dans l'ordre croissant.

Chacun des $B(s_1, \delta_i)$ est un intervalle dans l'intervalle $[a, b]$. Donc la proposition 1.575 nous assure qu'il existe des intervalles disjoints $\{J_k\}_{k=1,\dots,n}$ tels que chaque J_k est inclus dans un des $B(s_i, \delta_i)$.

Nous considérons une application $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ telle que $I_k \subset B(s_{\sigma(k)}, \delta_{\sigma(k)})$, et nous posons $\alpha_k = f(s_{\sigma(k)})$. Enfin nous considérons la fonction en escalier

$$h = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{J_k}. \tag{29.61}$$

[3] Théorème de Heine 12.78.
[4] Les applications continues à support compact dans $[a, b]$.
[5] Définition 14.112.

Nous vérifions que $\|\phi - h\|_\infty < \epsilon$. Soit $x \in [a,b]$. Il existe un unique k tel que $x \in J_k$. Nous avons alors $h(x) = \alpha_k = f(s_{\sigma(k)})$ et $J_k \subset B(s_{\sigma(k)}, \delta_{\sigma(k)})$. Donc

$$|\phi(x) - h(x)| = |\phi(x) - \alpha_k| = |\phi(x) - f(s_{\sigma(k)})| < \epsilon. \tag{29.62}$$

□

Voir le reste du thème 63.

PROPooWFSPooIBogJV

Proposition 29.20 ([527]).
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ croissante et presque partout dérivable. Alors f' est mesurable et

$$\int_a^b f'(t)dt \leqslant f(b) - f(a) \tag{29.63}$$

29.4 Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz

La définition de la transformée de Fourier de $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx. \tag{29.64}$$

Si α est un multiindice de taille m, nous notons

$$(M_\alpha f)(x) = x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_m} f(x). \tag{29.65}$$

LemQPVQjCx

Lemme 29.21 (Lemme de transfert).
Si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et si α est un multiindice, alors

$$\partial^\alpha \hat{\varphi} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{M_\alpha \varphi}. \tag{29.66}$$

et

$$\widehat{\partial^\alpha \varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi). \tag{29.67}$$

Démonstration. Nous considérons la fonction $h(x,\xi) = \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi}$ dont la dérivée par rapport à ξ_i est donnée par $-i(M_i\varphi)(x)e^{x \cdot \xi}$. Cette fonction est majorée en norme par

$$G(x) = M_i \varphi(x), \tag{29.68}$$

qui est encore une fonction à décroissance rapide et donc parfaitement intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Le théorème 17.19 nous dit donc que la dérivée de $\hat{\varphi}$ par rapport à ξ_j existe et vaut

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \xi_j}(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}^n} x_j \varphi(x) e^{-i\xi \cdot x} = -i \widehat{M_j \varphi}(\xi). \tag{29.69}$$

En appliquant ce résultat en chaine, nous trouvons la première formule annoncée.

Nous passons à la seconde formule annoncée. Étant donné que $\varphi \in \mathscr{S}$, ses dérivées le sont aussi et par conséquent, il n'y a pas de problèmes pour écrire

$$\widehat{\partial_{x_k} \varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) e^{-ix \cdot \xi} dx. \tag{29.70}$$

EqTYizlnja

Étant donné que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) e^{-ix \cdot \xi} - i\xi_k \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi}, \tag{29.71}$$

EqZAeYaCB

notre tâche sera de prouver que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} \right) dx = 0. \tag{29.72}$$

EqVGvYBNK

Autrement dit, nous voulons montrer que le terme au bord d'une intégration par partie s'annule. D'abord le fait que φ soit à décroissance rapide nous assure que l'intégrale (29.72) converge. Pour chaque ξ, la fonction

$$f(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} \right) \tag{29.73}$$

est intégrable par rapport à x. De plus, f est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ pour chacune de ses variables (les autres étant fixées). Le théorème de Fubini 14.305 nous permet alors de décomposer l'intégrale en

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x,\xi)dx = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_d)dx_1\dots dx_d. \tag{29.74}$$

De plus nous pouvons intégrer dans l'ordre de notre choix et nous choisissons évidemment d'intégrer d'abord par rapport à x_k. Étudions donc l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(x)e^{-ix\xi}\right)dx = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(x)e^{-ix\xi}\right)dx \tag{29.75}$$

dans laquelle nous avons un peu allégé les notations. Une primitive de ce qui est intégré est toute trouvée : c'est $\varphi(x)e^{-ix\xi}$, et nous pouvons utiliser le théorème fondamental du calcul intégral pour écrire que

$$\int_{-A}^{A}\left(\varphi(x)e^{-ix\xi}\right)'dx = \left[\varphi(x)e^{-ix\xi}\right]_{x=-A}^{x=A}. \tag{29.76}$$

Vu que φ est dans $\mathscr{S}$, la limite $A\to\infty$ donne zéro.

En substituant maintenant (29.71) dans (29.70) et en tenant compte du terme que nous venons de montrer s'annuler, nous avons

$$\widehat{\partial_k\varphi}(\xi) = -i\xi_k\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi} = -i\xi_k\hat{\varphi}(\xi). \tag{29.77}$$

En recommençant la procédure $|\alpha|$ fois nous trouvons la seconde formule annoncée. □

PropKPsjyzT

Proposition 29.22 ([522]).
À propos de transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz.

(1) L'espace de Schwartz[6] *est stable par transformée de Fourier, c'est-à-dire que* $\mathcal{F}\big(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\big)\subset\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$[7].

(2) L'application $\mathcal{F}\colon\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *est continue.*

Démonstration. La linéarité découle de celle de l'intégrale. La difficulté est de prouver que pour $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons bien que $\hat{\varphi}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et que cette association est continue[8].

(1) **Première inclusion : $\mathcal{F}\big(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\big)\subset\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$** Nous devons prouver que pour tout multiindices α et β, nous avons $p_{\alpha,\beta}(\hat{\varphi})<\infty$. Nous avons

$$\xi^\beta\partial^\alpha\hat{\varphi}(\xi) = \xi^\beta(-i)^{|\alpha|}\widehat{M_\alpha\varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\widehat{\partial^\beta M_\alpha\varphi}(\xi). \tag{29.78}$$

Ensuite nous nous souvenons que $\|\hat{f}\|_\infty\leqslant\|f\|_1$ parce que

$$|\hat{f}(\xi)|\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}\left|f(x)e^{-ix\cdot\xi}\right| = \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx = \|f\|_1. \tag{29.79}$$

Donc

$$p_{\alpha,\beta}(\hat{\varphi}) = \|\widehat{\partial^\beta M_\alpha\varphi}\|_\infty\leqslant\|\partial^\beta M_\alpha\varphi\|_1. \tag{29.80}$$

Du fait que φ soit dans $\mathscr{S}$, la dernière expression est finie. Cela prouve déjà que

$$\mathcal{F}\big(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\big)\subset\mathscr{S}(\mathbb{R}^d). \tag{29.81}$$

(2) **Continuité**

Nous supposons avoir une suite $\varphi_n\xrightarrow{\mathscr{S}}\varphi$, et nous devons prouver que $\hat{\varphi}_n\xrightarrow{\mathscr{S}}\hat{\varphi}$. Pour alléger les notations, nous posons $f_n=\varphi_n-\varphi$. Nous avons subEqsSGsGGih

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} = \|\xi^\beta\partial^\alpha\hat{f}\|_\infty \tag{29.82a}$$
$$= \|\widehat{\partial^\beta M_\alpha f}\|_\infty \text{ lemme 29.21.} \tag{29.82b}$$
$$\leqslant \|\partial^\beta M_\alpha f\|_1 \tag{29.82c}$$

[6] Définition 27.242, avec rappel que $p_{\alpha\beta}(\varphi) = \|x\mapsto x^\beta(\partial^\alpha\varphi)(x)\|_\infty$.
[7] Nous verrons, avec la formule d'inversion dans la proposition 29.62 que c'est même une bijection.
[8] Pour rappel, en dimension infinie, il n'est pas garanti qu'une application linéaire soit continue.

La convergence $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$ nous dit entre autres que $\partial^\beta M_\alpha f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$; en particulier la proposition 27.250 nous dit que $\partial^\beta M_\alpha f_n \xrightarrow{L^1} 0$, ce qui signifie, par les majorations (29.82) que

$$\|\hat{f}_n\|_{\alpha,\beta} \leqslant \|\partial^\beta M_\alpha f_n\|_1 \to 0, \tag{29.83}$$

ce qui prouve la continuité de transformée de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

(3) **Bijection** Une preuve peut être trouvée dans [786].

□

PROPooMVQMooGYAzSX

Proposition 29.23 ([1]).
Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ et la transformée de Fourier partielle

$$\tilde{\varphi}(x,k) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-iky}\varphi(x,y)dy. \tag{29.84}$$

Alors $\tilde{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Démonstration. Il s'agit de reprendre les étapes de la partie correspondante de la preuve de la proposition 29.22. Soient des multiindices α, α', β et β' où α et β se réfèrent à la variable x tandis que α' et β' se réfèrent à la variable k.

Vu que la multiplication par $k^{\beta'}$ commute avec ∂^α nous avons

$$x^\beta k^{\beta'}\partial^\alpha\partial^{\alpha'}\tilde{\varphi}(x,k) = x^\beta k^{\beta'}\partial^\alpha(-i)^{|\alpha'|}\widetilde{M_{\alpha'}\varphi}(x,k) = (-i)^{|\alpha'|+|\beta'|}x^\beta\partial^\alpha\partial^{\beta'}\widetilde{M_{\alpha'}}\varphi(x,k). \tag{29.85}$$

D'autre part nous avons $\partial^\alpha\tilde{\varphi} = \widetilde{\partial^\alpha\varphi}$ parce que la fonction $\partial_x\varphi$ étant Schwartz, la fonction

$$G(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(\partial_x\varphi)(x,y)| \tag{29.86}$$

est dans $L^1(\mathbb{R}^m)$ par le corolaire 27.246. Par conséquent le théorème 17.19 permet de permuter la dérivée et l'intégrale dans

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\varphi}(x,k) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-iky}\varphi(x,y)dy. \tag{29.87}$$

Dans le même ordre d'esprit des difficultés de permutation de limites nous avons $M_\beta\tilde{\varphi} = \widetilde{M_\beta\varphi}$.

D'autre part nous avons encore $\|\tilde{\varphi}\|_\alpha < \infty$ parce que

$$|\tilde{\varphi}(x,k)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi(x,y)|dy \leqslant \sup_x \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi(x,y)|dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |\sup_x \varphi(x,y)|dy < \infty \tag{29.88}$$

parce que φ est Schwartz et le corolaire 27.246 donne l'intégrabilité.

Donc nous avons

$$p_{(\alpha\alpha'),(\beta\beta')}(\tilde{\varphi}) = \|\partial^{\beta'}\widetilde{M_{\alpha'}M_\beta}\partial^\alpha\varphi\|_\infty < \infty. \tag{29.89}$$

Cela prouve que $\tilde{\varphi}$ est Schwartz. □

29.4.1 Quelques transformées de Fourier

LEMooPAAJooCsoyAJ

Lemme 29.24 (Transformée de Fourier de la Gaussienne [787]).
La transformée de Fourier de

$$\begin{aligned} g_\epsilon\colon \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-\epsilon\|x\|^2} \end{aligned} \tag{29.90}$$

est donnée par

$$\hat{g}_\epsilon(\xi) = \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{d/2} e^{-\|\xi\|^2/4\epsilon} \tag{29.91}$$

Démonstration. Nous commençons par la fonction $g(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ et nous prouvons que sa transformée de Fourier est $\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{d/2}g(\xi)$.

(1) **Réduction à la dimension 1** La fonction g est dans l'espace de Schwartz. Par le théorème de Fubini,

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^{d} e^{-x_k^2} e^{-i\xi_k x_k} dx = \prod_{k=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-\xi_k x} dt = \prod_{k=1}^{d} \hat{f}(\xi_k) \tag{29.92}$$

où f est la fonction d'une variable

$$f(x) = e^{-x^2/2}. \tag{29.93}$$

Notons que $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

(2) **Une équation différentielle**

Voyons l'équation différentielle satisfaite par la transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction (29.93). Grâce au lemme 29.21 nous trouvons l'équation différentielle[9]

$$\xi \hat{f}(\xi) + (\hat{f})'(\xi) = 0. \tag{29.94}$$

C'est le moment d'utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz (17.39), appliqué à la fonction $f(t, y) = -ty$ qui est Lipschitz et continue au problème

$$\begin{cases} y' + ty = 0 & \text{(29.95a)} \\ y(0) = y_0 & \text{(29.95b)} \end{cases}$$

possède une unique solution maximale, en l'occurrence $y(x) = y_0 e^{-x^2/2}$. En ce qui concerne la condition initiale nous avons

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}. \tag{29.96}$$

par l'exemple 14.308. Donc

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}. \tag{29.97}$$

En reformant le produit (29.92) nous concluons.

Nous passons maintenant à la fonction g_ϵ. Nous pouvons écrire g_ϵ sous la forme

$$g_\epsilon(x) = g(\sqrt{2\epsilon}x). \tag{29.98}$$

Utilisant successivement la transformée de Fourier de g que nous venons de calculer et 29.9 (facteur d'échelle) nous trouvons

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= (2\pi)^{d/2} g(\xi) && \text{(29.99a)} \\ \hat{g}_\epsilon(\xi) &= (2\epsilon)^{-d/2} \hat{g}\big(\xi/\sqrt{2\epsilon}\big) && \text{(29.99b)} \\ &= \Big(\frac{\pi}{\epsilon}\Big)^{d/2} e^{-|\xi|^2/4\epsilon}.. && \text{(29.99c)} \end{aligned}$$

Nous voyons que $\hat{g}_\epsilon \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ (c'était gagné d'avance par la proposition 29.22). □

Lemme 29.25.
Si $g_\epsilon(x) = e^{-\epsilon\|x\|^2}$ alors la suite

$$\rho_n = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{g}_{1/n} \tag{29.100}$$

est une suite régularisante (définition 29.17).

Démonstration. Nous savons déjà la transformée de Fourier de g_ϵ par le lemme 29.24. Nous montrons que la suite ρ_n est régularisante. Nous avons $\hat{g}_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{g}_\epsilon \geqslant 0$ ainsi que $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{B(0,\alpha)} \hat{g}_\epsilon = 0$ pour tout α. Il y a seulement un couac avec la norme. Nous calculons $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}_\epsilon(\xi) d\xi$ avec la forme (29.99c). En utilisant sauvagement Fubini[10] pour séparer les intégrales et en effectuant le changement de variable $u = t/(2\sqrt{\epsilon})$

[9] Une façon alternative, plus directe de déduire cette équation différentielle sera donnée dans l'exemple 29.27.
[10] Le pauvre !

nous calculons :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\xi|^2/4\epsilon} d\xi = \prod_{k=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/4\epsilon} dt \tag{29.101a}$$

$$= \prod_{k=1}^{d} 2\sqrt{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \tag{29.101b}$$

$$= \prod_{k=1}^{d} 2\sqrt{\epsilon}\sqrt{\pi} \tag{29.101c}$$

$$= 2^d (\pi\epsilon)^{d/2}. \tag{29.101d}$$

Nous avons utilisé l'exemple 14.308 pour le calcul de l'intégrale gaussienne. Avec tout cela nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}_\epsilon = (2\pi)^d. \tag{29.102}$$

Donc $\frac{1}{(2\pi)^d}\hat{g}_{1/n}$ est une suite régularisante. □

Le corolaire suivant regroupe les résultats à propos des suites régularisantes, leur utilité et leur existence.

CORooQLELooUjzIoM

Corolaire 29.26.
Si la suite régularisante ρ_n est dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ en posant $f_n = \rho_n * f$ nous avons

(1) $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$

(2) $f_n \xrightarrow{L^p} f$

De plus, de telles suites existent.

Démonstration. Le fait que f_n soit de classe C^∞ est le corolaire 27.85, et la convergence est la proposition 29.18(2).

De telles suites existent, par exemple celle donnée par le lemme 29.25. □

EXooLMXKooFcAZGR

Exemple 29.27 ([128]).
Soit la fonction $g_\epsilon(x) = e^{-\epsilon x^2}$. Sa transformée de Fourier a été vue dans le lemme 29.24 en utilisant le lemme de transfert 29.21. Nous nous proposons ici de déduire de façon directe l'équation différentielle vérifiée par la transformée de Fourier de g_ϵ.

Nous posons

$$I(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon x^2} dx. \tag{29.103}$$

et nous considérons la fonction

$$f(k, x) = e^{-ikx} e^{-\epsilon x^2}. \tag{29.104}$$

Elle est de classe C^1 par rapport à k, et intégrable en x pour chaque k. De plus sa dérivée

$$(\partial_k f)(k, x) = -ixe^{-ikx} e^{-\epsilon x^2} \tag{29.105}$$

vérifie $|\partial_k f| \leqslant xe^{-\epsilon x^2}$. La dérivée est donc majorée (uniformément en k) par une fonction intégrable. Le théorème 17.19 permet de permuter la dérivée et l'intégrale :

$$I'(k) = \int_{\mathbb{R}} -ixe^{-ikx} e^{-\epsilon x^2} dx \tag{29.106a}$$

$$= i \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} \frac{1}{2\epsilon} \frac{d}{dx} \left(e^{-\epsilon x^2} \right) dx \tag{29.106b}$$

$$= \frac{-i}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} \left(e^{-ikx} \right) e^{-\epsilon x^2} dx \qquad \text{par partie} \tag{29.106c}$$

$$= \frac{-k}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon x^2} dx \tag{29.106d}$$

$$= \frac{-k}{2\epsilon} I(k). \tag{29.106e}$$

D'où l'équation différentielle $I'(k) = -\frac{k}{2\epsilon} I(k)$. △

29.5 Intégrales et fonctions nulles

PropAAjSURG

Proposition 29.28 ([788]).
Soient un ouvert Ω de $\mathbb{R}$ et une fonction intégrable $f\colon \big(\Omega, \mathcal{B}or(\Omega), \lambda\big) \to \mathbb{C}$ telle que

$$\int_\Omega f\varphi = 0 \tag{29.107}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Alors $f = 0$ presque partout sur Ω.

Démonstration. Nous commençons par prouver que f est nulle sur tout compact de Ω. Soit un compact K de Ω. Le lemme d'Urysohn 15.183 nous donne une fonction θ à support compact qui vaut 1 sur K.

Nous considérons une suite régularisante (ϕ_k) de fonctions toujours strictement positives (par exemple celle du lemme 29.25). Vu que $f\theta$ est à support compact, elle est dans $L^p(\Omega)$ et le corolaire 29.26 s'applique :

$$\phi_k * (\theta f) \to \theta f. \tag{29.108}$$

Mais, x et k étant fixés, nous avons

EQooIUIMooMTAHCY

$$\big(\phi_k * (\theta f)\big)(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi_k(x-t)\theta(t)f(t)dt. \tag{29.109}$$

La fonction

$$t \mapsto \phi_k(x-t)\theta(t) \tag{29.110}$$

étant à support compact, l'hypothèse à propos de f fait que l'intégrale (29.109) est nulle :

$$\phi_k * (\theta f) = 0 \tag{29.111}$$

pour tout k. En prenant la limite $k \to \infty$,

$$\theta f = 0. \tag{29.112}$$

Vu que $\theta(x) = 1$ pour tout $x \in K$, nous avons $f(x) = 0$ pour tout $x \in K$.

Nous avons démontré que f était nulle sur tout compact de Ω.

Nous considérons maintenant une suite exhaustive (K_n) de compacts (lemme 7.359). La fonction f est nulle sur chaque K_n, et comme $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$, la fonction f est nulle sur Ω. □

PROPooZOJHooKwZOFW

Proposition 29.29 ([1]).
Soit f intégrable sur $[a,b]$ vérifiant

$$\int_a^x f = 0 \tag{29.113}$$

pour tout $x \in [a,b]$. Alors $f = 0$ presque partout.

Démonstration. Tout d'abord, notons que si I est un intervalle dans $[a,b]$, alors $\int_I f = 0$ parce que si I est un intervalle entre c et d (ouvert ou fermé), nous avons

$$\int_c^d f = \int_a^d f - \int_a^c f = 0 - 0 = 0. \tag{29.114}$$

Soient $\phi \in C_c^\infty\big([a,b]\big)$ et $\epsilon > 0$. Par le lemme 29.19, il existe des intervalles J_i tels qu'en posant $h = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{J_i}$ avec des α_i bien choisis, nous ayons

$$\|\phi - h\|_\infty < \epsilon. \tag{29.115}$$

Pour une telle fonction h, nous avons

$$\int_a^b fh = \sum_i \int_{J_i} \alpha_i f(t)dt = \sum_i \alpha_i \int_{J_i} f = 0. \tag{29.116}$$

Et donc

$$\Big|\int_a^b f\phi\Big| \leqslant \int_a^b |f(t)(\phi-h)(t)dt| + \underbrace{\int_a^b |f(t)h(t)dt|}_{=0} \tag{29.117a}$$

$$\leqslant \int_a^b |f|\|\phi - h\| \tag{29.117b}$$

$$\leqslant \epsilon \int_a^b |f|. \tag{29.117c}$$

Bref, pour tout $\epsilon > 0$ nous avons $\int_a^b f\phi \leqslant \epsilon \int_a^b |f|$. La proposition 29.28 nous permet de déduire que $f = 0$ presque partout sur $[a, b]$. □

PROPooUMIPooQGXaPd

Proposition 29.30 ([526]).
Soit une fonction réelle $f \in L^1\big([a, b]\big)$. Nous définissons

$$\begin{aligned} F\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ F(x) &\mapsto \int_a^x f(t)dt. \end{aligned} \tag{29.118}$$

Alors F est dérivable presque partout sur $[a, b]$ et là où F est dérivable, nous avons $F' = f$.

Démonstration. Nous divisons en plusieurs cas de généralité croissante.

(1) **En supposant que f est bornée** Nous supposons que $|f(x)| < K$ pour tout $x \in [a, b]$. Pour chaque $n \geqslant 1$, nous posons

$$\begin{aligned} g_n\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n}. \end{aligned} \tag{29.119}$$

En développant un peu la valeur de F là-dedans, nous trouvons

$$g_n(x) = n \int_x^{x+1/n} f. \tag{29.120}$$

Vu que $|f(x)| < K$, nous avons

$$|g_n(x)| \leqslant n \int_x^{x+1/n} K = Kn\frac{1}{n} = K. \tag{29.121}$$

Par la proposition 14.316, F est absolument continue ; la proposition 14.320 dit alors qu'elle est à variation bornée, et enfin 14.321 implique que F est dérivable presque partout. Autrement dit, la limite $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ existe pour presque tout x. Et là où elle existe, elle vaut forcément F'.

Soit $c \in [a, b]$. Utilisons à présent le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 14.207 sur $[a, c]$. Vérifions les hypothèses :

- Pour tout n, nous avons $g_n \in L^1\big([a, b]\big)$.
- Nous avons $g_n \to F'$ ponctuellement presque partout.
- La fonction constante K est intégrable sur $[a, b]$ et majore $|g_n(x)|$ pour tout n et pour tout x.

Nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n = \int_a^c F'. \tag{29.122}$$

EQooUCNQooDywXUO

L'intégrale dans le membre de gauche est :

$$\int_a^c g_n = \int_a^c \frac{F(x + 1/x) - F(x)}{1/n} dx = n \int_a^c \left[\int_a^{x+1/n} f - \int_a^x f \right] dx. \tag{29.123}$$

EQooORZDooUYPcAN

Nous nous intéressons d'abord à la première intégrale avec le changement de variables[11] $u = x + 1/x$:

$$\int_a^c \left[\int_a^{x+1/n} f(t)dt \right] = \int_a^c F(x + 1/n) = \int_{a+1/n}^{c+1/n} F(u)du. \tag{29.124}$$

En remettant dans (29.123),

$$\int_a^c g_n = n \int_{a+1/n}^{c+1/n} F(x)dx - n \int_a^c F(x)dx = n \int_c^{c+1/n} F - n \int_a^{a+1/n} F \tag{29.125}$$

Et nous pouvons enfin passer tranquillement à la limite $n \to \infty$ en utilisant la proposition 14.326 :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c g_n = F(c) - F(a). \tag{29.126}$$

[11] Théorème 14.282.

Et en reprenant depuis (29.122),

$$\int_a^c (F' - f) = 0 \tag{29.127}$$

pour tout $c \in [a,b]$. Cela prouve[12] que $F'(x) = f(x)$ presque partout[13].

(2) **Si $f \in L^1$ et $f \geqslant 0$** Nous supposons maintenant que $f \in L^1\big([a,b]\big)$ et que $f \geqslant 0$. Nous posons

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leqslant f(x) \leqslant n \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{29.128}$$

ainsi que

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt \tag{29.129}$$

et

$$G_n(x) = \int_a^x \big(f(t) - f_n(t)\big). \tag{29.130}$$

Nous avons $F = F_n + G_n$, et, comme $f(t) - f_n(t) \geqslant 0$, la fonction G est croissante.

La fonction f_n étant majorée par n, la première partie d'applique et nous avons

$$F_n'(x) = f_n(x) \tag{29.131}$$

pour presque tout x. Le même raisonnement que précédemment, mettant en scène les propositions 14.316, 14.320 et 14.321 montre que F est dérivable presque partout. Donc dans l'égalité $F = F_n + G_n$, les fonctions F et F_n sont dérivables. Nous en déduisons que G_n est également dérivable et que

$$F'(x) = F_n'(x) + G_n'(x) \tag{29.132}$$

pour presque tout x. Comme G_n est croissante, nous avons $G_n'(x) \geqslant 0$ et la majoration

$$F'(x) = F_n'(x) + G_n'(x) \geqslant F_n'(x) = f_n(x). \tag{29.133}$$

En passant à la limite et en utilisant la proposition 14.325, nous avons

$$F'(x) \geqslant f(x) \tag{29.134}$$

pour presque tout $x \in [a,b]$. En intégrant cette inégalité de a à b[14] nous avons

$$\int_a^b F'(x)dx \geqslant \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{29.135}$$

Ceci n'a aucun rapport avec cela, mais je te rappelle que la proposition 29.20[15] dit que

$$\int_a^b F'(x)dx \leqslant F(b) - F(a). \tag{29.136}$$

Nous avons donc

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a) = \int_a^b f, \tag{29.137}$$

et donc

$$\int_a^b \big[F' - f\big] = 0 \tag{29.138}$$

Vu que $F' - f \geqslant 0$, le fait que l'intégrale soit nulle implique que $F' - f = 0$ presque partout[16]

[12] Par la proposition 29.29.

[13] Ici, le « presque partout » est l'intersection du « presque partout » où F est dérivable et le « presque partout » de la proposition 29.29.

[14] En posant par exemple $F' = f = 0$ sur la partie où cette inégalité n'est pas vraie. De toutes façon cette partie est de mesure nulle.

[15] Qui s'applique parce que F est presque partout croissante du fait que f est supposée positive.

[16] Encore moins « presque partout » qu'avant parce que c'est l'intersection entre le « presque partout » d'avant et de celui-ci. Mais bon…Tant qu'on a une quantité dénombrable d'intersections, ça reste de mesure nulle. Alors une de plus ou une de moins…

(3) **Le cas générique** Si $f \in L^1\big([a,b]\big)$. Nous décomposons f en parties positives et négatives : $f = f^+ + f^-$. En posant $F_+ = \int_a^b f^+$ et $F_- = \int_a^b f^-$, nous avons $F = F_+ + F_-$.

En appliquant le cas positif à f^+ nous avons immédiatement $F'_+ = f^+$ presque partout. Ensuite nous considérons $g(x) = -f^-(x)$ et $G(x) = \int_a^b G$. Nous avons alors $G' = g$. Mais comme $G = -F_-$ et $g = -f^-$, ça donne $F'_- = f^-$. En mettant tout ensemble,

$$F' = F'_+ + F'_- = f^+ + f^- = f. \tag{29.139}$$

□
PropJLnPpaw

Proposition 29.31.
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{29.140}$$

est presque partout dérivable et pour les points où elle l'est, nous avons $F'(x) = f(x)$.

29.6 L'espace de Lebesgues $L^2\big([a,b]\big)$

SECooUMEPooPMemJz
L'espace $L^2\big([a,b]\big)$ est l'espace générique sur lequel nous allons construire les espaces L^2 sur $[-T,T]$ et $[0,2\pi]$. Pour fixer les idées, nous considérons $b > a$.

Si f et g sont dans $L^2\big([a,b]\big)$, il n'est pas possible de définir $f * g$ par la formule intégrale usuelle parce que $f(x_0 + t)$ n'existe pas pour tout x_0 et t dans $[a,b]$. Donc soit nous utilisons un truc pas très net comme étendre les fonctions sur $[a,b]$ en fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$, soit nous intégrons vraiment seulement sur $[a,b]$.

Nous n'allons suivre aucune de ces deux voies ou plutôt les deux en même temps. Nous allons seulement tout ramener de S^1 que nous venons de travailler.

Proposition-Définition 29.32.
Sur $[a,b]$ nous considérons la mesure de Lebesgue dx usuelle. Si $f, g \in L^2\big([a,b]\big)$, alors

(1) $f\bar{g} \in L^1\big([a,b]\big)$,

(2) La formule

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{29.141}$$
EQooCRSXooPFopzm

définit un produit hermitien[17].

Démonstration. Pour le premier point, d'abord $\bar{g} \in L^2$, et ensuite l'inégalité de Hölder 27.39(1) dit que $f\bar{g}$ est dans L^1.

Le fait que la formule donne une forme sesquilinéaire découle des propriétés de l'intégrale. Le fait que ce soit hermitien découle du fait que $\overline{\int f} = \int \bar{f}$.

Et enfin,

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geqslant 0. \tag{29.142}$$

Si il existe une partie de mesure non nulle A sur laquelle $f \neq 0$, alors

$$\int_a^b |f|^2 = \int_A |f|^2 + \int_{[a,b]\setminus A} |f|^2. \tag{29.143}$$

Le premier terme est strictement positif, alors que le second est positif ou nul. Donc le tout est strictement positif. □

29.33.
Il y a (au moins) deux conventions possibles pour le produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)\,dx \tag{29.144}$$
EQooAJLHooTKraYR

[17] Définition 8.171.

et

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\bar{g}(x)\,dx \tag{29.145}$$

EQooSJJEooQLGzDG

L'argument en faveur de (29.144). Il est plus facile d'être cohérent avec les espaces $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. En effet, pour de telles espaces, on a vite $\mu(\Omega) = \infty$ et donc du mal à mettre un coefficient $\frac{1}{\mu(\Omega)}$ dans la définition de la norme. Voir la définition 27.12.

L'argument en faveur de (29.145). Le facteur dx a les mêmes unités que $b-a$. En mettant donc le facteur $b-a$, le tout a les unités de fg, comme il se doit pour le produit scalaire.

PROPooSPDIooKntTyz

Proposition 29.34 ([238]).
Nous avons $L^2\big([a,b]\big) \subset L^1\big([a,b]\big)$.

Démonstration. Nous avons $|f| \leqslant |f|^2 + 1$. Donc

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| \leqslant \int_{[a,b]} \big(|f|^2 + 1\big) = \int_{[a,b]} |f|^2 + \int_{[a,b]} 1. \tag{29.146}$$

Le premier terme est fini parce que $f \in L^2$ et le second vaut $|b-a|$. Donc le tout est fini et $\|f\|_1 < \infty$. □

PROPooLNALooSVNMfe

Proposition 29.35.
Nous considérons

$$\begin{aligned} s\colon [a,b] &\to [0,2\pi] \\ x &\mapsto 2\pi\frac{x-a}{b-a} \end{aligned} \tag{29.147}$$

ainsi que l'application usuelle

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0,2\pi[&\to S^1 \\ t &\mapsto e^{it}. \end{aligned} \tag{29.148}$$

L'application

$$\begin{aligned} \phi\colon L^2\big([a,b]\big) &\to L^2(S^1) \\ \phi(f)(z) &= f\big((s^{-1}\circ\varphi^{-1})(z)\big) \end{aligned} \tag{29.149}$$

est une bijection isométrique.

Démonstration. La preuve du fait que ϕ est isométrique suffira pour prouver qu'elle prend bien ses valeurs dans $L^2(S^1)$.

(1) **Isométrique** C'est un calcul :

$$\|\phi(f)\|^2 = \langle\phi(f), \phi(f)\rangle \tag{29.150a}$$
$$= \int_{S^1} |\phi(f)|^2 \tag{29.150b}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} |\phi(f)\big(\varphi(u)\big)|^2 du \tag{29.150c}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f\big((s^{-1}\circ\varphi^{-1}\circ\varphi)(u)\big)|^2 du \tag{29.150d}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f\big(s^{-1}(u)\big)|^2 du. \tag{29.150e}$$

Il est temps de faire le changement de variables[18] $y = s^{-1}(u)$, c'est-à-dire

$$y = \frac{b-a}{2\pi}u + a. \tag{29.151}$$

En ce qui concerne la différentielle,

$$dy = \frac{b-a}{2\pi}du \tag{29.152}$$

[18] Nous le faisons de façon un peu informelle ; soyez capable de bien justifier.

et pour les bornes, si $u=0$ alors $y=a$ et si $u=2\pi$, $y=b$. Donc

$$\|\phi(f)\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_a^b |f(y)|^2 \frac{2\pi}{b-a}dy \tag{29.153a}$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^2 \tag{29.153b}$$
$$= \|f\|^2. \tag{29.153c}$$

(2) **Injectif** Soit f telle que $\phi(f)=0$. Alors pour tout $z\in S^1$ nous avons

$$f\big((s^{-1}\circ\varphi^{-1})(z)\big)=0. \tag{29.154}$$

Vu que $s^{-1}\circ\varphi^{-1}\colon S^1\to[a,b[$ est une bijection, pour tout $u\in[a,b[$ nous avons $f(u)=0$. Donc $f=0$ dans $L^2\big([a,b]\big)$ parce que du point de vue de L^2, que l'on prenne ou non les bornes, ce n'est pas important.

(3) **Surjectif** Si $g\in L^2(S^1)$, alors en posant

$$f(u)=g\big((\varphi\circ s)(u)\big) \tag{29.155}$$

nous avons $g=\phi(f)$.

□

Définition 29.36.
En ce qui concerne le produit de convolution, si f et g sont des fonctions sur $[a,b]$ nous définissons

$$f*g=\phi^{-1}\big(\phi(f)*\phi(g)\big) \tag{29.156}$$

tant que les formules ont un sens.

Définition 29.37.
*Le **système trigonométrique** sur $[a,b]$ est l'ensemble de fonctions*

$$\begin{aligned} e_k\colon [a,b]&\to\mathbb{C}\\ t&\mapsto\frac{1}{\sqrt{b-a}}e^{2\pi ikt/(b-a)}\end{aligned} \tag{29.157}$$

pour $k\in\mathbb{Z}$.

29.38.
Pour prouver que ce système est une base hilbertienne, il faut prouver que c'est orthonormal et total. Pour prouver que le système est total, il y a (au moins) trois moyens.

(1) Prouver que le système est orthonormal maximal et invoquer la proposition 25.37(1). Cela est fait dans [789].

(2) Prouver que le système trigonométrique sépare les points pour la densité dans les fonctions continues. Ensuite travailler comme dans [790].

(3) Adapter le théorème 27.102 pour prouver directement la densité des polynômes trigonométriques dans $L^2\big([a,b]\big)$.

PROPooKJQKooYeNxIq

Proposition 29.39 ([789]).
Il n'existe pas de fonctions $f\in L^2\big([-\pi,\pi]\big)$ telles que

(1) f est à valeurs réelles,

(2) $\langle f,e_k\rangle=0$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

(3) Il existe $h>0$ et $\alpha>0$ tels que pour tout $x\in[-h,h]$, $0<\alpha<f(x)$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Trigonométrie**

Vu que $a = -\pi$ et $b = \pi$ nous avons

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(\cos(kt) + i\sin(kt)\big). \tag{29.158}$$

Étant donné que f est à valeurs réelles, $\langle f, e_k\rangle$ se décompose facilement en parties réelles et imaginaires :

$$\langle f, e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt. \tag{29.159}$$

L'hypothèse $\langle f, e_k\rangle = 0$ demande en particulier l'annulation de la partie réelle et donc que $\langle f, c_k\rangle = 0$ pour tout k où

$$c_k(t) = \cos(kt). \tag{29.160}$$

(2) **Les fonctions P_n**

Nous posons

$$P_n(x) = \big(1 + \cos(x) - \cos(h)\big)^n. \tag{29.161}$$

Grâce aux formules de linéarisation (proposition 18.16), P_n est une combinaison linéaires des c_k. Donc l'hypothèse $\langle f, e_k\rangle = 0$ pour tout k implique $\langle f, P_n\rangle = 0$ pour tout n.

(3) **Une étude de fonction** Soit $s(x) = 1 + \cos(x) - \cos(h)$. Nous avons :

(3a) $s(x) = 1$ si et seulement si $x = \pm h$.

(3b) $s(0) = 2 - \cos(h) > 1$

(3c) $|s(\pi)| = |-\cos(h)| = |\cos(h)| < 1$.

(3d) $|s(-\pi)| < 1$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires 9.95 nous avons

(3a) $s(x) > 1$ pour $x \in]-h, h[$ et donc, sur cet intervalle,

$$P_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{29.162}$$

(3b) $|s(x)| < 1$ sur $x \in [-\pi, -h[\cup]h, \pi]$, et donc pour x dans cette partie,

$$P_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{29.163}$$

Si vous aimez les études de fonctions, je vous laisse vous demander pour quelles valeurs de x et de h, cette limite a des signes alternés.

(4) **Une intégrale à découper** Nous savons que $\langle f, P_n\rangle = 0$ pour tout n, et donc $\lim_{\to\infty}\langle f, P_n\rangle = 0$. Nous allons expliciter ce produit scalaire, faire la limite et trouver une contradiction. Nous avons $\langle f, P_n\rangle = A_n + B_n + C_n$ avec

$$A_n = \int_{-\pi}^{-h} f(x)P_n(x)dx \tag{29.164a}$$

$$B_n = \int_{-h}^{h} f(x)P_n(x)dx \tag{29.164b}$$

$$C_n = \int_{h}^{\pi} f(x)P_n(x)dx. \tag{29.164c}$$

(5) **Calcul de C_n** Nous utilisons la convergence dominée de Lebesgue 14.207. La fonction fP_n est continue sur le compact $[h, \pi]$ et donc majorée et donc dans $L^1\big([h, \pi]\big)$. De plus $fP_n \to 0$ simplement et comme $|fP_n|$ est majorée par une constante parce que $|P_n| \to 0$ et $|f| < \alpha$. Tout cela fait que la convergence dominée fonctionne et

$$\lim_{n\to\infty}\int_h^{\pi} f(x)P_(x)dx = \int_h^{\pi} f(x)\lim_{n\to\infty} P_n(x)dx = 0. \tag{29.165}$$

(6) **Calcul de A_n** Même chose que C_n.

(7) **Calcul de B_n** Ici nous utilisons le lemme de Fatou 14.182. Nous savons que $\lim_{n\to\infty}\langle f,P_n\rangle$ existe et vaut zéro ; de plus $\langle f,P_n\rangle=A_n+B_n+C_n$ et nous savons déjà que $\lim_{n\to\infty}A_n$ et $\lim_{n\to\infty}C_n$ existent et valent zéro. Donc[19] $\lim_{n\to\infty}B_n$ existe (et vaut zéro). Cela pour dire qu'à droite du lemme de Fatou nous pouvons mettre une limite usuelle au lieu d'une limite inférieure.

D'autre part f est bornée et $P_n\to\infty$, donc $\liminf_{n\to\infty}f(x)P_n(x)=\lim_{n\to\infty}f(x)P_n(x)=\infty$. Donc à gauche aussi du lemme Fatou nous pouvons mettre une limite usuelle. Bref :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-h}^{h}f(x)P_n(x)dx\geqslant\int_{-h}^{h}\liminf_{n\to\infty}\big(f(x)P_n(x)\big)dx \tag{29.166a}$$
$$\geqslant\alpha\int_{-h}^{h}\lim_{n\to\infty}P_n(x)dx \tag{29.166b}$$
$$=\infty. \tag{29.166c}$$

(8) **Conclusion** Nous avons prouvé que $\lim_{n\to\infty}B_n=\infty$ alors que ça devait être 0. Contradiction. Il n'existe donc pas de fonctions f vérifiant toutes les propriétés demandées.

□
LEMooRWKAooLRdUdr

Lemme 29.40 ([1]).
Soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$ et $c<d$. Soient des intervalles fermés $I\subset[a,b]$ et $J\subset[c,d]$. Il existe une bijection continue $\alpha\colon[a,b]\to[c,d]$ telle que $\alpha(I)=J$.

Démonstration. Les intervalles I et J sont fermés ; la proposition 1.585 dit qu'il existe $k_1,k_2,l_1,l_2\in\mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}I&=[k_1,k_2]\subset[a,b]\\J&=[l_1,l_2]\subset[c,d].\end{aligned}\tag{29.167}$$

Nous considérons les applications linéaire suivantes :

(1) $\alpha_1\colon[a,k_1]\to[c,l_1,]$ telle que $\alpha_1(a)=c$ et $\alpha_1(k_1)=l_1$.

(2) $\alpha_2\colon[k_1,k_2]\to[l_1,l_2]$ telle que $\alpha_2(k_1)=l_1$ et $\alpha_2(k_2)=l_2$.

(3) $\alpha_3\colon[k_2,b]\to[l_2,d]$ telle que $\alpha_3(k_2)=l_2$ et $\alpha_3(b)=d$.

Et finalement nous posons

$$\begin{aligned}\alpha\colon[a,b]&\to[c,d]\\t&\mapsto\begin{cases}\alpha_1(t)&\text{si } t\in[a,k_1]\\\alpha_2(t)&\text{si } t\in]k_1,k_2[\\\alpha_3(t)&\text{si } t\in[k_2,b].\end{cases}\end{aligned}\tag{29.168}$$

Celle fonction est continue parce que $\alpha_1(k_1)=\alpha_2(k_1)=l_1$ et $\alpha_2(k_2)=\alpha_3(k_2)=l_2$. □
PROPooMHMHooMwiVbz

Proposition 29.41 ([1]).
Soit une application continue $f\in L^2\big([a,b]\big)$. Nous supposons que $\langle f,e_k\rangle=0$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$. Alors $f=0$.

Démonstration. Nous allons procéder par généralisations successives.

(1) **Premier pas** Nous supposons que

- f est à valeurs réelles
- $[a,b]=[-\pi,\pi,]$

Si $f\neq0$ alors il existe un intervalle $I\subset[-\pi,\pi]$ sur lequel f est non nulle. Pour fixer les idées, nous disons que f y est strictement positive : il existe $\alpha>0$ tel que $f(x)>\alpha>0$ pour tout $x\in I$.

Soit $\pi/2>h>0$. Le lemme 29.40 donne une bijection continue $\alpha\colon[-\pi,\pi]\to[-\pi,\pi]$ telle que $\alpha\big([-h,h]\big)=I$. La fonction $f\circ\alpha$ vérifie les hypothèses de la proposition 29.39 et est donc une contradiction.

Nous en déduisons que sous les hypothèses de ce point, $f=0$ comme il se doit.

(2) **Deuxième pas** Nous supposons que

[19] Proposition 7.260(1) utilisée à l'envers.

- f est à valeurs réelles.

Nous prenons une bijection croissante continue $\alpha\colon [-\pi,\pi]\to[a,b]$. La fonction $f\circ\alpha$ est dans les hypothèses du premier pas. Donc $f\circ\alpha=0$ et donc $f=0$.

(3) **Troisième pas** Plus d'hypothèses. Vu que f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ nous pouvons écrire $f=f_1+if_2$ où f_1 et f_2 sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les fonctions f_1 et f_2 séparément vérifient les hypothèses du deuxième pas. Donc $f_1=f_2=0$ et donc $f=0$.

□
THOooAVWIooDhnjpN

Théorème 29.42 ([789]).
Le système trigonométrique $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2\big([a,b]\big)$.

Démonstration. En vertu de la proposition 25.37(1), ils nous suffit de prouver que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale maximale[20].

(1) **Orthonormale** Nous calculons le produit :

$$\langle e_k,e_l\rangle=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{2\pi ikt/(b-a)}e^{-2\pi ilt/(b-a)}dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{2\pi it(k-l)/(b-a)}dt. \tag{29.169}$$

Justifications.

- Le complexe conjugué de e^{it} est e^{-it} par le corolaire 18.13.
- Les exponentielles sont « fusionnées » avec la proposition 18.9(2).

Si $k=l$ nous avons

$$\langle e_k,e_k\rangle=\frac{1}{b-a}\int_a^b 1\,dt=1. \tag{29.170}$$

Si $k\neq l$ nous pouvons continuer avec une primitive. Une primitive de e^{at} est $\frac{1}{a}e^{at}$. Dans notre cas, en regroupant toutes les constantes sous le nom C nous avons :

$$\langle e_k,e_l\rangle=C\Big[e^{2\pi it(k-l)/(b-a)}\Big]_a^b=C\left(e^{2\pi ia(k-l)/(b-a)}-e^{2\pi ib(k-l)/(b-a)}\right). \tag{29.171}$$

Cela vaut zéro. Vous n'y croyez pas ? Faites un effort, relisez le corolaire 18.25, et remarquez que

$$\frac{2\pi a(k-l)}{b-a}-\frac{2\pi b(k-l)}{b-a}=2\pi(k-l)\in 2\pi\mathbb{Z}. \tag{29.172}$$

(2) **Maximale** Nous prouvons que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est maximale, c'est-à-dire que nous supposons que $\langle e_k,f\rangle=0$ pour tout k, et nous montrons que $f=0$. Nous allons largement confondre $f\in L^2$ et une fonction f qui représente la classe.

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}\phi\colon [a,b]&\to\mathbb{C}\\ x&\mapsto\int_a^x f(t)dt.\end{aligned} \tag{29.173}$$

Vu que $f\in L^2\big([a,b]\big)\subset L^1\big([a,b]\big)$ (proposition 29.34), la proposition 27.62 montre que ϕ est continue.

Étant donné que ϕ est continue sur le compact $[a,b]$, elle est bornée et donc dans $L^2\big([a,b]\big)$. Nous avons

$$\langle\phi,e_n\rangle=\int_a^b e_n(x)\int_a^x\overline{f(t)}dt=\int_a^b\int_a^x e_n(x)\overline{f(t)}dt=\int_a^b\int_a^b s(x,t)dt\,dx \tag{29.174}$$

où

$$s(x,t)=e_n(x)\overline{f(t)}\mathbb{1}_{[a,x]}(t). \tag{29.175}$$

Nous permutons les intégrales en utilisant 14.306. Vu que l'intégration en chaine fonctionne, nous avons $s\in L^1\big([a,b]\times[a,b]\big)$, et donc Fubini permute les intégrales :

$$\langle\phi,e_n\rangle=\int_a^b\int_a^b e_n(x)\overline{f(t)}\mathbb{1}_{[a,x]}(t)dx\,dt. \tag{29.176}$$
EQooVSYBooSknVQj

[20] Définition 25.33.

Fixons un t et concentrons nous sur l'intégrale sur x :

$$\int_a^b e_n(x)\mathbb{1}_{[a,x]}(t)dx = \int_t^b e_n(x)dx \tag{29.177a}$$

$$= \frac{b-a}{2\pi in}\Big(\exp(2i\pi nb/(b-a)) - \exp(2i\pi nt/(b-a))\Big). \tag{29.177b}$$

Nous remettons ça dans l'intégrale (29.176), et nous obtenons

$$\langle \phi, e_n\rangle = \frac{b-a}{2i\pi n}(I_1 + I_2) \tag{29.178}$$

avec

$$I_1 = \int_a^b e^{2i\pi nb/(b-a)}\overline{f(t)}dt \tag{29.179}$$

et

$$I_2 = \int_a^b e^{2i\pi nt/(b-a)}\overline{f(t)}dt. \tag{29.180}$$

À coefficients près, I_1 est juste $\int_a^b \overline{f(t)}dt$ qui n'est autre que $\langle f, e_0\rangle$ (à autres coefficients près). Bref, $I_1 = 0$. En ce qui concerne I_2, ce qui est dans l'intégrale est, à coefficients près, $e_n(t)\overline{f(t)}$, et donc $I_2 = C\langle e_n, f\rangle = 0$.

Tout ça pour dire que ϕ est un élément de $L^2\big([a,b]\big)$ tel que $\langle \phi, e_n\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La proposition 29.41 nous dit qu'alors $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$. La proposition 29.29 indique que $f = 0$ presque partout, ce qu'il fallait démontrer.

□

29.7 Sur $[-T,T[$

Pour rappel, les éléments de L^2 sont des classes de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

PROPooHNJZooGfRCfU

Proposition 29.43.
Les fonctions

$$\begin{aligned} e_n\colon [-T,T] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2T}}e^{\pi int/T}. \end{aligned} \tag{29.181}$$

forment une base hilbertienne[21] *de* $L^2\big([-T,T[\big)$.

Démonstration. C'est un cas particulier du théorème 29.42. □

29.7.1 Le cas dans $[0,2\pi]$

En pratique, nous n'allons pas souvent travailler avec des fonctions sur intervalle symétrique $[-T,T]$, mais le plus souvent nous serons sur $[0,2\pi]$.

Nous notons ici une conséquence du théorème 27.56 dans le cas de l'espace L^2. La proposition suivante est une petite partie du corolaire 25.51, qui sera d'ailleurs démontré de façon indépendante.

Proposition 29.44.
Si nous avons une suite de réels (a_k) *telle que* $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2 < \infty$ *alors la suite*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikx} \tag{29.182}$$

converge dans $L^2\big(]0,2\pi[\big)$.

Démonstration. Quitte à séparer les parties réelles et imaginaires, nous pouvons faire abstraction du fait que nous parlons d'une série de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$.

Un simple calcul est :

$$\|f_n - f_m\|^2 \leqslant \int_0^{2\pi}\sum_{k=n}^{m}|a_k|^2dx \leqslant 2\pi\sum_{k=n}^{m}|a_k|^2. \tag{29.183}$$

EqHVdJxZT

[21] Définition 25.27.

Par hypothèse le membre de droite est $|s_m - s_n|$ où s_k dénote la suite des sommes partielles de la série des $|a_k|^2$. Cette dernière est de Cauchy (parce que convergente dans $\mathbb{R}$) et donc la limite $n \to \infty$ (en gardant $m > n$) est zéro. Donc la suite des f_n est de Cauchy dans L^2 et donc converge dans L^2. □

29.45.
Adaptons tout cela pour l'espace $L^2\big([0,2\pi]\big)$. Nous posons

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt \tag{29.184}$$

EQooBFKDooMkCZQt

et

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}. \tag{29.185}$$

EQooKMYOooLZCNap

29.46.
Attention que $e_n(x)$ n'est pas exactement e^{inx} : il y a un coefficient. Lorsque ça a un sens, la théorie de Fourier permet d'écrire

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}. \tag{29.186}$$

Ici les $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f. Ce développement n'est pas le même que

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f)e_n(x). \tag{29.187}$$

Dans cette dernière égalité, les $a_n(f)$ ne sont pas les coefficients de Fourier, mais $a_n = \langle f, e_n\rangle$. Le lien entre les deux est fondamentalement l'objet du corolaire 29.51.

L'importance du système trigonométrique défini en 27.97 est d'être une base de $L^2\big([0,2\pi]\big)$, comme précisé dans le lemme suivant.

LEMooBJDQooLVPczR

Lemme 29.47.
Le système trigonométrique $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne[22] *de $L^2\big([0,2\pi]\big)$.*

Démonstration. Cas particulier du théorème 29.42. □

Note : le théorème 28.8 donne aussi la densité, mais sera démontré plus tard, indépendamment. Voir aussi les thèmes 34 et 46.

Pour un élément donné $f \in L^2\big([0,2\pi]\big)$, nous définissons

$$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \tag{29.188}$$

et nous avons le théorème suivant, qui récompense les efforts consentis à propos de la densité des polynômes trigonométriques dans L^2.

ThoYDKZLyv

Théorème 29.48.
Soit $f \in L^2\big([0,2\pi]\big)$. Nous avons égalité[23]

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n \tag{29.189}$$

EqXMMRpSN

dans L^2.

Nous avons aussi la convergence

$$S_n f \xrightarrow{L^2} f. \tag{29.190}$$

EqRBWKsYP

Démonstration. Le système trigonométrique $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est total pour l'espace de Hilbert $L^2\big([0,2\pi]\big)$ (sans périodicité particulière). Donc le point (1) du théorème 25.46 nous donne l'égalité demandée.

La convergence (29.190) est une reformulation de l'égalité (29.189). □

[22] Définition 25.27.
[23] Notons que la somme sur $\mathbb{Z}$ dans (29.189) est commutative ; il n'est donc pas besoin d'être plus précis.

29.49.
Obtenir la convergence L^2 ne demande pas d'hypothèses de périodicité : la convergence (29.190) est automatique du fait que le système trigonométrique soit total. Ce n'est cependant pas plus qu'une convergence L^2 et elle ne demande pas $f(0) = f(2\pi)$, même si pour chacun des e_k nous avons $e_k(0) = e_k(2\pi)$.

Si $f(2\pi) \neq f(0)$, alors il existe tout de même une suite (f_n) convergente vers f au sens L^2 telle que $f_n(0) = f_n(2\pi)$. Cela ne contredit en rien le fait que $e_k(0) = e_k(2\pi)$ parce que dans L^2, la valeur d'un point seul n'a pas d'importance.

Si nous voulons une vraie convergence ponctuelle ou uniforme $(S_nf)(x) \to f(x)$, alors il faut ajouter des hypothèses sur la continuité de f, sa périodicité ou le comportement des coefficients c_n. Voir aussi le thème 73.

EXooQDWUooLtuIOm

Exemple 29.50.
Si $f \in L^2\big([0,2\pi]\big)$ est (la classe de) une fonction à valeurs réelles, alors on peut la développer avec nettement moins de termes. D'abord nous savons que $e_{-n} = \overline{e_n}$, et donc

$$\langle f, e_n\rangle = \overline{\langle f, e_{-n}\rangle}, \tag{29.191}$$

ce qui donne

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n = \sum_{n>0} \langle f, e_n\rangle e_n + \sum_{n<0} \overline{\langle f, e_n\rangle e_n} + \langle f, e_0\rangle e_0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Re\big(\langle f, e_n\rangle e_n\big). \tag{29.192}$$

Notez que f étant supposée réelle et e_0 étant la fonction constante (réelle) $1/\sqrt{2\pi}$, le terme $n = 0$ est bien réel.

Or

$$\Re\big(\langle f, e_n\rangle e_n\big) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cos(nx) \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt - \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sin(nx) \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt. \tag{29.193}$$

EQooMWJNooSiPCpR

Considérons la fonction impaire $\tilde{f} \in L^2\big([-2\pi, 2\pi]\big)$ créée à partir de f. Elle se développe de même et nous avons la même formule (29.193) à part quelques coefficients et le fait que les intégrales sont entre -2π et 2π. Vu que $\tilde{f}$ est impaire, l'intégrale avec $\cos(nt)$ s'annule et

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \sin(nx) \tag{29.194}$$

pour certains coefficients réels c_n. Cette égalité est à considérer dans L^2, c'est-à-dire presque partout et en particulier presque partout sur $[0, 2\pi]$.

Donc les fonctions réelles sur $[0, 2\pi]$ peuvent être écrites sous la forme d'une série de seulement des sinus.

Note : en choisissant $\tilde{f}$ paire, nous aurions eu une série de cosinus. △

CordgtXlC

Corolaire 29.51 (Unicité des coefficients de Fourier[1])**.**
Soient f, g deux fonctions continues et 2π-périodiques.

ITEMooPLTIooSDykYF

(1) Si $c_n(f) = c_n(g)$ alors $f = g$.

ITEMooQMMSooEpIFbt

(2) Si $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$, alors $a_n = c_n(f)$.

Démonstration. En deux points.

(1) **Pour (1)** Dans le cas de fonctions continues, le théorème de Fejér 28.7 nous enseigne que si nous posons

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx} \tag{29.195}$$

alors nous avons la convergence

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x) \to f(x). \tag{29.196}$$

Donc en supposant que $c_k(f) = c_k(g)$, nous avons $S_n(f)(x) = S_n(g)(x)$ et

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(g)(x) = g(x). \tag{29.197}$$

(2) **Pour (2)** Nous considérons la restriction

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon [0,2\pi] &\to \mathbb{C}\\ x &\mapsto f(x).\end{aligned} \tag{29.198}$$

C'est une fonction bornée parce qu'elle est la restriction de f qui est continue sur, disons, le compact $[-\delta, 2\pi+\delta]$. Elle est donc dans l'espace de Hilbert $L^2\big([0,2\pi[\big)$.

En utilisant la base trigonométrique (29.185) (qui est une base par le lemme 29.47), nous écrivons l'hypothèse sous la forme

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{2\pi} a_n e_n(x). \tag{29.199}$$

Autrement dit, $\tilde{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{2\pi} a_n e_n$. La proposition 25.26 permet d'identifier les coefficients :

$$\sqrt{2\pi} a_n = \langle \tilde{f}, e_n \rangle. \tag{29.200}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t)\overline{e_n(t)}dt && (29.201a)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-int}dt && (29.201b)\\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t)e^{-int}dt && (29.201c)\\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt && (29.201d)\\ &= c_n(f), && (29.201e)\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

29.52.
La proposition 29.56 dit que les hypothèses de continuité et de périodicité ne sont pas suffisantes pour assurer la convergence de la série de Fourier. En particulier, pour 29.51(2), l'hypothèse de la convergence de la série est une vraie hypothèse.

Exemple 29.53.
Considérons la fonction

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \tag{29.202}$$

sur $[-\pi,\pi]$. Nous la développons en série trigonométrique, et étant paire il n'y a pas de sinus. Un calcul montre que

$$a_0 = \frac{4}{3} \tag{29.203}$$

et

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}, \tag{29.204}$$

de telle sorte que

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}. \tag{29.205}$$

Nous avons $f(\pi) = 0$, mais avec le développement,

$$f(\pi) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \tag{29.206}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{29.207}$$

△

29.7.2 À propos des coefficients

Pour la suite, nous avons besoin d'une notation pour désigner l'ensemble des suites dans $\mathbb{C}$ à index dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire l'ensemble $\text{Fun}(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. Pour alléger les notations, nous allons l'écrire $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, conformément à des notations déjà introduites par exemple en 1.449.

Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} c\colon \left(L^1_{2\pi},\|.\|_1\right) &\to \left(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}},\|.\|_\infty\right) \\ f &\mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{aligned} \tag{29.208}$$

qui à une fonction 2π-périodique fait correspondre la suite (bornée) de ses coefficients de Fourier. Nous rappelons la définition

$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt. \tag{29.209}$$

Nous allons montrer que cette application est linéaire, continue, injective et non surjective. Pour la continuité, par la linéarité il suffit de la montrer en 0. Nous devons donc montrer que si nous avons une suite de fonctions f_k qui tend vers 0 au sens L^1, alors $c(f_k)\to 0$ au sens de la norme $\|.\|_\infty$ sur l'ensemble des suites.

Si nous posons $r_k=\int_0^{2\pi}|f_k(t)|dt$, alors $r_k=\|f_k\|_1$ et nous avons $r_k\to 0$. Mais par définition

$$|c_n(f_k)|\leqslant r_k, \tag{29.210}$$

et donc $\|c(f_k)\|_\infty\leqslant r_k$. L'application c est donc continue. L'injectivité est donnée par le corolaire 29.51.

Si nous supposons que l'application c est continue, alors le théorème d'isomorphisme de Banach (27.1) nous dit que cela devrait être un homéomorphisme, c'est-à-dire que c^{-1} serait également continue. Nous allons montrer qu'il n'en est rien.

Nous considérons la suite de suite

$$(c_n)_k=\begin{cases}0 & \text{si } n<0\\ 1 & \text{si } k<n\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{29.211}$$

EqdMtbOB

Ici $(c_n)_k$ est le terme numéro k de la suite (c_n). Par exemple $c_0=(0,0,\ldots)$ et $c_2=(1,1,0,\ldots)$.

Par injectivité de l'application qui à une fonction fait correspondre la suite de ses coefficients de Fourier, l'unique fonction qui possède ces coefficients est

$$f_n(t)=\sum_{k\in\mathbb{N}} c_{n,k}e^{ikt}. \tag{29.212}$$

En ce qui concerne la norme de f_n, nous avons

$$\|f_n\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{N}}(c_n)_k|e^{ikt}|dt=\sum_{k\in\mathbb{N}}(c_n)_k=n. \tag{29.213}$$

Étant donné que $\|f_n\|_1=n$, la suite $(\|f_n\|_1)$ n'est pas bornée alors que la suite de suites (29.211) est bornée dans l'ensemble des suites parce que $\|c_n\|_\infty=1$.

LEMooPUJDooKRBTaU

Lemme 29.54.
Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ qui est T-périodique et de classe C^1. Alors

$$c_n(f')=\frac{2\pi n}{T}ic_n(f). \tag{29.214}$$

Démonstration. Nous rappelons la définition (28.53) des coefficients de Fourier :

$$c_n(f)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2i\pi nt/T}dt. \tag{29.215}$$

Le coefficient pour f' ne pose pas de problème d'existence parce que f' est continue sur le compact $[0,T]$. Il vaut

$$c_n(f')=\frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-2i\pi nt/T}dt \tag{29.216a}$$

$$=\frac{1}{T}\left[f(t)e^{-2i\pi nt/T}\right]_0^T-\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left(\frac{-2i\pi n}{T}\right)e^{-2i\pi nt/T}dt \tag{29.216b}$$

SUBEQooXYOVooGmoXbZ

$$=\frac{2i\pi n}{T}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2i\pi nt/T}dt \tag{29.216c}$$

SUBEQooXSCEooIJXFxT

$$=\frac{2i\pi n}{T}c_n(f). \tag{29.216d}$$

Justifications.

- Pour (29.216b). C'est une intégration par partie avec $u' = f'$ et $v = e^{-2i\pi nt/T}$.
- Pour (29.216c). Comme $f(T) = f(0)$, et que $t \mapsto e^{-2i\pi nt/T}$ est périodique de période T, le terme au bord est nul : $f(T)e^{-2i\pi n} - f(0)e^{i0} = 0$.

□

LEMooYJQWooDVvSyj

Lemme 29.55 ([699]).
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2 et T-périodique. Alors

$$|c_n(f)| \leqslant \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{\|f''\|_\infty}{n^2}. \tag{29.217}$$

Démonstration. En utilisant la définition (28.53) des coefficients de Fourier,

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|dt \leqslant \frac{1}{T}\|f\|_\infty \int_0^T 1dt = \|f\|_\infty. \tag{29.218}$$

En appliquant le lemme 29.54 à f' nous avons

$$c_n(f'') = \left(\frac{2i\pi n}{T}\right)^2 c_n(f). \tag{29.219}$$

Donc

$$|c_n(f)| = \left(\frac{T}{2\pi n}\right)^2 |c_n(f'')| \leqslant \left(\frac{T}{2\pi n}\right)^2 \|f''\|_\infty. \tag{29.220}$$

□

29.7.3 Le contre-exemple que nous attendions tous

Nous montrons maintenant que la continuité et la périodicité ne sont pas suffisantes pour avoir convergence de la série de Fourier.

PropREkHdol

Proposition 29.56 ([128]).
Soit $C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions périodiques continues muni de la norme uniforme. Nous définissons

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}. \tag{29.221}$$

Alors il existe $f \in C^0_{2\pi}$ tel que la suite $n \mapsto S_n(f)(0)$ soit divergente. En particulier f n'est pas la somme de sa série de Fourier.

Démonstration. Nous considérons la forme linéaire

$$\begin{aligned} l_n : C^0_{2\pi} &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f). \end{aligned} \tag{29.222}$$

(1) **La forme est continue** Nous montrons d'abord que l_n est continue en montrant que $\|l_n\| < \infty$ et en utilisant la proposition 10.85. Pour cela nous calculons un peu :

$$l_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt \tag{29.223}$$

EqBELHGya

où $D_n(t)$ est le noyau de Dirichlet dont nous connaissons une formule par le lemme 28.4. Nous avons donc

$$|l_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\|f\|_\infty dt. \tag{29.224}$$

En prenant $\|f\|_\infty = 1$ nous avons la borne suivante pour la norme de l_n :

$$\|l_n\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt < \infty. \tag{29.225}$$

EqBXoIUiD

Notons que la convergence de l'intégrale vient de la continuité de la fonction

$$t\mapsto\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\tag{29.226}$$

qui, elle même, se prouve avec une règle de L'Hôpital :

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin(at)}{\sin(t)}=\lim_{t\to0}\frac{a\cos(at)}{\cos(t)}=a.\tag{29.227}$$

Donc $D_n(t)$ a une limite bien définie pour $t\to0$ et est alors une fonction continue sur le compact $[-\pi,\pi]$.

(2) **La norme de l_n (début)**

Nous avons prouvé que $\|l_n\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt$. Nous allons à présent prouver que ceci est effectivement la norme de l_n. Pour $\epsilon>0$ nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}f_\epsilon\colon\mathbb{R}&\to\mathbb{C}\\x&\mapsto\frac{D_n(x)}{|D_n(x)|+\epsilon}.\end{aligned}\tag{29.228}$$

C'est une fonction continue et 2π-périodique satisfaisant $\|f_\epsilon\|\leqslant1$ parce que le dénominateur est toujours plus grand que le numérateur. Nous nous proposons de calculer

$$l_n(f_\epsilon)=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_\epsilon(t)e^{-ikt}dt.\tag{29.229}$$

Puisque $f_\epsilon(t)e^{-ikt}$ vaut en norme $|f_\epsilon(t)|$, qui est une fonction intégrable (ne dépendant pas de k) sur $[-\pi,\pi]$, le théorème de la convergence dominée 14.207 nous permet de permuter la somme et l'intégrale :

$$l_n(f_\epsilon)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{D_n(t)}{|D_n(t)|+\epsilon}\underbrace{\sum_{k=-n}^{n}e^{-ikt}}_{=D_n(t)}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|D_n(t)|^2}{|D_n(t)|+\epsilon}dt.\tag{29.230}$$

Nous avons donc

$$\lim_{\epsilon\to0}l_n(f_\epsilon)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt.\tag{29.231}$$

Mais vue l'inégalité (29.225) nous avons

$$\|l_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt.\tag{29.232}$$

Notre tâche est maintenant de donner une valeur à cette intégrale.

(3) **Norme de l_n tend vers ∞** D'abord nous écrivons

$$\|l_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|}{\left|\sin(t/2)\right|}dt,\tag{29.233}$$

ensuite nous nous souvenons que $|\sin(x)|\leqslant|x|$ pour tout x, ce qui nous permet de changer le dénominateur :

$$\|l_n\|\geqslant\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|}{|t|}dt\tag{29.234}$$

Nous y effectuons le changement de variable $u=\frac{2n+1}{2}t$ qui donne

$$\|l_n\|\geqslant\frac{2}{\pi}\int_{0}^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\left|\sin(u)\right|}{|u|}du.\tag{29.235}$$

Nous y reconnaissons l'intégrale (18.96) du sinus cardinal que nous savons diverger. Cela donne

$$\lim_{n\to\infty}\|l_n\|=\infty.\tag{29.236}$$

(4) **La conclusion**

L'espace $\left(C^0_{2\pi}, \|.\|_\infty\right)$ est complet[24], donc le théorème de Banach-Steinhaus 10.188 s'applique. Par rapport aux notations de l'énoncé de Banch-Steinhaus, nous posons

$$E = \left(C^0_{2\pi}, \|.\|_\infty\right) \tag{29.237a}$$
$$F = \mathbb{R} \tag{29.237b}$$
$$H = \{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}. \tag{29.237c}$$

Comme la suite $(\|l_n\|)$ n'est pas bornée, il existe $f \in C^0_{2\pi}$ tel que

$$\sup_n \|l_n(f)\| = \infty. \tag{29.238}$$

Pour cette fonction nous avons

$$\sup_{n\geqslant 0} S_n(f)(0) = \infty, \tag{29.239}$$

et donc la série de Fourier de f ne converge pas en zéro.

□

NORMooGKKWooFmOBeE

29.57.

La proposition 29.56 ne contredit pas Fejér 28.7(4). Alors là c'est subtil, donc soyez bien attentif.

Le système trigonométrique est total dans l'espace des fonctions continues périodiques sur $\mathbb{R}$: $\left(C^0_{2\pi}(\mathbb{R}), \|.\|_\infty\right)$. Cela signifie que si $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$, il existe une suite de polynômes trigonométriques P_k tels que $P_k \xrightarrow{unif} f$.

Cela ne signifie pas que cette suite soit la suite des sommes partielles de la série de Fourier. Et en effet, le théorème de Fejér ne donne pas la convergence de la suite des sommes partielles de Fourier, mais la convergence au sens de Cesàro de la somme des $c_k(f)e_k$. Ce n'est pas la même chose.

Notez que le coefficient de e_1 dans F_2 est $c_1(f)/2$ alors que dans F_3, il est $2c_1(f)/3$.

Il y a donc bien une suite de polynômes trigonométriques qui converge vers f, mais ce n'est pas la suite des sommes partielles de la série de Fourier.

De plus, $C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ n'est pas contenu dans $L^2(\mathbb{R})$, donc nous ne pouvons pas invoquer la théorie de Hilbert pour dire que le système trigonométrique serait quelque chose comme une base. Si $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$, il n'est pas garanti qu'il existe des nombres $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tels que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$.

Enfin, me diriez-vous, les fonctions continues et périodiques sur $\mathbb{R}$ sont les mêmes que les fonctions définies sur $[0, 2\pi[$ avec une petite condition de $\lim_{x\to 2\pi} f(x) = f(0)$. Les fonctions qui vérifient cela sont une partie de $L^2\big([0, 2\pi[\big)$, qui est un espace de Hilbert, lui. Or le système trigonométrique est une base hilbertienne (lemme 29.47). Alors oui, la série de Fourier de f converge vers f lorsque f est continue sur $[0, 2\pi[$. Cela n'est cependant pas un contre-argument pour deux raisons :

- La convergence $S_n(f) \to f$ qu'on a dans $L^2\big([0, 2\pi[\big)$ est seulement une convergence pour la norme L^2, et non une convergence uniforme.
- Une convergence L^2 sur $[0, 2\pi[$ ne se prolonge pas spécialement en une convergence L^2 sur $\mathbb{R}$, et encore moins en une convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

29.8 Série de Laurent

THOooMKJOooVghZyG

Théorème 29.58 (Série de Laurent[699])**.**
Soient la couronne

$$C(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } r_1 < |z| < r_2\} \tag{29.240}$$

et une fonction holomorphe $f : C(r_1, r_2) \to \mathbb{C}$. Alors :

(1) Il existe une suite (a_n) dans $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n. \tag{29.241}$$

ITEMooUOPHooSJRGKs

(2) Cette suite est unique : si

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n, \tag{29.242}$$

alors $a_n = b_n$, pour tout n.

[24] Parce qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue, théorème 12.381.

ITEMooDGGZooJkDSxC

(3) *Si on pose, pour* $r \in]r_1, r_2[$,

$$\begin{aligned} f_r\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto f(re^{i\theta}), \end{aligned} \tag{29.243}$$

les valeurs a_n *sont liés aux coefficients de Fourier de* f_r *par*

$$a_n = \frac{c_n(f_r)}{r^n}. \tag{29.244}$$

ITEMooOYCPooZZAyKs

(4) *Cette série converge uniformément sur tout compact contenu dans* $C(r_1, r_2)$.

(5) *Pour tout* $r_1 < s < r_2$, *les coefficients sont donnés par*[25]

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \tag{29.245}$$

où C_s *est un cercle centré en* 0, *et de rayon* s.

La série ainsi définie est la ***série de Laurent*** *de la fonction* f.

Démonstration. Pour $r \in]r_1, r_2[$ nous posons

$$\begin{aligned} f_r\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto f(re^{i\theta}). \end{aligned} \tag{29.246}$$

(1) **Coefficients de Fourier** La fonction f_r est de classe C^1 et périodique. Le théorème 28.17 sur les séries de Fourier nous indique que

EQooIHQRooZWqJKL

$$f_r(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(r) e^{int} \tag{29.247}$$

avec[26]

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) e^{-int} dt. \tag{29.248}$$

La fonction $c_n\colon]r_1, r_2[\to \mathbb{C}$ est une fonction définie par une intégrale que nous voudrions dériver en r_0.

(2) **Digression** Deux voies s'offrent à nous.

- Le plus immédiatement disponible est le théorème 17.19, mais il demande de travailler avec la dérivée (réelle) de $r \mapsto f(re^{i\theta})$ et de se poser des questions quant à son lien avec la dérivée (complexe) de f.
- Une façon plus indirecte est de considérer une extension

$$\begin{aligned} h\colon B(r_0, \delta)_{\mathbb{C}} \times [0, 2\pi[&\to \mathbb{C} \\ z, \theta &\mapsto f(ze^{i\theta})e^{-in\theta} \end{aligned} \tag{29.249}$$

où δ est assez petit pour que le tout reste dans le domaine de f. Alors nous pouvons utiliser le théorème 26.73 qui a l'avantage de ne pas devoir majorer la dérivée. Mais cette voie demande de réellement faire le lien entre la dérivée complexe de h et la dérivée réelle de $r \mapsto f(re^{i\theta})$.

Nous choisissons la première voie parce qu'en réalité, elle évite complètement de parler de dérivée complexe.

(3) **Permuter dérivée et intégrale** Nous allons essayer de la dériver en $r_0 \in]r_1, r_2[$ en utilisant le théorème 17.19. Pour y voir plus clair, ce qui joue le rôle de f dans l'énoncé de 17.19 est l'application

$$\begin{aligned} h\colon]r_1, r_2[\times [0, 2\pi[&\to \mathbb{C} \\ (r, \theta) &\mapsto f_r(\theta)e^{-in\theta}. \end{aligned} \tag{29.250}$$

Nous considérons un intervalle $I = B(r_0, \delta)$ assez petit pour être dans $]r_1, r_2[$. Passons en revue les conditions.

[25] Pour le dire clairement, ces a_n ne dépendent pas de s, même si s entre dans le membre de droite.

[26] Oui, on devrait écrire $c_n(f_r)$ pour suivre scrupuleusement les notations introduites plus haut. Mais comme toute la suite de la démonstration sera de voir le tout comme fonction de r, je vous laisse juger.

(3a) **Pour (1)**
Nous introduisons la fonction

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon \mathbb{R}\times[0,2\pi] &\to \mathbb{C}\\ (r,\theta) &\mapsto f(re^{i\theta})\end{aligned} \tag{29.251}$$

Pour tout $r\in I$, la fonction $\theta\mapsto f(re^{i\theta})e^{-in\theta}$ est dans $L^1\big([0,2\pi[\big)$ parce que

$$|f(re^{i\theta})e^{-in\theta}| = |f(re^{i\theta})| = |\tilde{f}(r,\theta)|. \tag{29.252}$$

La fonction $\tilde{f}$ étant continue, elle est bornée sur le compact $\overline{I}\times[0,2\pi]$.

(3b) **Pour (2)** Pour chaque θ, la fonction $r\mapsto f(re^{i\theta})e^{-in\theta}$ est dérivable par la proposition 26.4(1).

(3c) **Pour (3)** En utilisant la proposition 26.4(3), nous savons que la fonction

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)e^{-in\theta} \tag{29.253}$$

est continue et donc bornée sur le compact $\overline{I}\times[0,2\pi]$. Une fonction constante majorant de $\partial_r h$ est intégrable sur le compact $[0,2\pi]$.

En permutant nous avons donc

$$c_n'(r_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\partial_r\tilde{f})(r_0,\theta)e^{-in\theta}d\theta. \tag{29.254}$$

(4) **Cauchy-Riemann** C'est le moment d'utiliser Cauchy-Riemann en coordonnées polaires sous la forme de la proposition 26.4(2). Et tant que nous y sommes, nous notons $g(\theta)=\tilde{f}(r_0,\theta)$ pour avoir moins de choses à écrire :

$$c_n'(r_0) = \int_0^{2\pi}(\partial_r\tilde{f})(r_0,\theta)e^{-in\theta}d\theta \tag{29.255a}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{ir_0}(\partial_\theta\tilde{f})(r_0,\theta)e^{-in\theta}d\theta \tag{29.255b}$$

$$= \frac{1}{2\pi ir_0}\int_0^{2\pi}g'(\theta)e^{-in\theta}d\theta. \tag{29.255c}$$

La dernière expression a manifestement envie de se soumettre à une intégration par partie.

(5) **Une intégration par partie** Nous posons $u(\theta)=e^{-in\theta}$ et $v=g$, de telle sorte que [EQSooSRDJooXLHhgh]

$$c_n'(r_0) = \frac{1}{2\pi ir_0}\left(\big[e^{-in\theta}g(\theta)\big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(-in)e^{-in\theta}g(\theta)d\theta\right) \tag{29.256a}$$

$$= \frac{n}{2\pi r_0}\int_0^{2\pi}g(\theta)e^{-in\theta}d\theta. \tag{29.256b}$$ [SUBEQooKVZMooUxcRXn]

$$= \frac{n}{r_0}c_n(r_0). \tag{29.256c}$$

Justification pour (29.256b). Pour rappel, $g(\theta)=\tilde{f}(r_0,\theta)=f(r_0e^{i\theta})$; donc $g(0)=g(2\pi)$ et le « terme au bord » est nul.

(6) **Équation différentielle** L'équation (29.256) dit que c_n satisfait à l'équation différentielle

$$c_n'(r) = \frac{n}{r}c_n(r) \tag{29.257}$$

pour tout $r\in\,]r_1,r_2[$. La fonction c_n est une fonction à valeurs complexes dont les parties réelles et imaginaires vérifient toutes deux l'équation du lemme 26.93. Il existe donc $a_n\in\mathbb{C}$ tel que

$$c_n(r) = a_nr^n. \tag{29.258}$$

Cela prouve au passage le point (3) parce que r n'est jamais nul.

(7) **La valeur de a_n** Nous avons

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{c_n(r)}{r^n} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}r^{-n}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{(e^{i\theta}r)^n}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_s} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz. \end{aligned} \tag{29.259}$$

EQooFNUHooZbbNAT

Une justification pour l'intégrale curviligne s'impose. La définition est 26.6. Dans le cas du cercle, nous considérons

$$\begin{aligned} C_r\colon [0,2\pi[&\to \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto re^{i\theta}, \end{aligned} \tag{29.260}$$

et donc

$$\int_{C_r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+1}}rie^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^n}d\theta. \tag{29.261}$$

Le fait que le tout soit égal à a_n prouve que l'intégrale est en réalité indépendante de r[27].

(8) **Conclusion** Reprenons la formule (29.247) :

$$f(re^{i\theta}) = f_r(\theta) = \sum_n c_n(r)e^{in\theta} = \sum_n a_n r^n e^{in\theta} = \sum_n a_n (re^{i\theta})^n. \tag{29.262}$$

Autrement dit,

$$f(z) = \sum_n a_n z^n, \tag{29.263}$$

avec les a_n donnés par la formule (29.259), comme nous devions le prouver.

(9) **Point (2) (unicité)** Supposons que $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, fixons $r \in]r_1, r_2[$, et posons

$$\begin{aligned} f_r\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto f(re^{i\theta}). \end{aligned} \tag{29.264}$$

C'est une fonction continue et périodique. Elle peut s'écrire sous la forme

$$f_r(\theta) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(r^n e^{in\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(a_n r^n)e^{in\theta}. \tag{29.265}$$

Le corolaire 29.51(2) à propos de l'unicité des coefficients de Fourier implique que $a_n r^n = c_n(f)$ et donc que

$$a_n = \frac{c_n(f)}{r^n}. \tag{29.266}$$

EQooBNSMooGLIBqU

Donc les coefficients a_n sont déterminés par f. Si nous avions fait le calcul en partant de $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n$, nous aurions eu $b_n = \frac{c_n(f)}{r^n}$, et donc bien $a_n = b_n$.

(10) **Point (4)** La fonction

$$\begin{aligned} f_r\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto f(re^{i\theta}) \end{aligned} \tag{29.267}$$

est continue et périodique de période 2π. Le lemme 29.55 nous indique que, pour tout $r \in]r_1, r_2[$, nous avons

$$|c_n(f_r)| \leqslant \frac{\|f_r''\|_\infty}{n^2}. \tag{29.268}$$

EQooMDNNooPYFQrq

[27] Voir ma question 29.59.

(10a) **Sur une couronne** Soient deux rayons intermédiaires $r_1 < s_1 < s_2 < r_2$. La couronne fermée $\overline{C(s_1,s_2)}$ est compacte. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} g\colon [s_1,s_2]\times[0,2\pi] &\to \mathbb{C} \\ (u,\theta) &\mapsto f_u''(\theta) \end{aligned} \tag{29.269}$$

Nous notons g_u l'application $\theta\mapsto g(u,\theta)$; c'est une application définie sur $[s_1,s_2]$. Par le lemme 12.81, l'application $u\mapsto\|g_u\|_\infty$ est continue et donc majorée : nous pouvons considérer $M\in\mathbb{R}$ tel que $\|g_u\|_\infty<M$ pour tout $u\in[s_1,s_2]$.
Puisque, pour $r\in[s_1,s_2]$ nous avons $g_u=f_u''$, en combinant avec (29.268), nous voyons qu'il existe M tel que

$$|c_n(f_r)|\leqslant\frac{M}{n^2}. \tag{29.270}$$ EQooAIPEooKdfoXr

En prenant les notations de la définition 10.119 de la convergence normale, nous posons

$$\begin{aligned} u_n\colon \overline{C(s_1,s_2)} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto a_n z^n \end{aligned} \tag{29.271}$$

En ce qui concerne sa norme[28], nous avons

$$\begin{aligned} \|u_n\|_\infty &= |a_n|\sup_{z\in\overline{C(s_1,s_2)}}|z^n| && (29.272a)\\ &= |a_n|s_2^n && (29.272b)\\ &= \left|\frac{c_n(f_s)}{s^n}\right|s_2^n && (29.272c)\\ &\leqslant \frac{|c_n(f_s)|}{s_2^n}s_2^n && (29.272d)\\ &\leqslant \frac{M}{n^2} && (29.272e) \end{aligned}$$ SUBEQooRKUXooFPxnLG SUBEQooZJFJooAgRKHc

Justifications :

- Pour (29.272c). Prendre n'importe quel $s\in[s_1,s_2]$ et c'est bon par (29.266).
- Pour (29.272e). Équation (29.270).

Comme la somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}}M/n^2$ converge, nous avons la convergence normale de $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nz^n$ sur $\overline{C(s_1,s_2)}$.

(10b) **Sur un compact quelconque** Soit K, un compact dans $C(r_1,r_2)$. La fonction $z\mapsto|z|$ est continue sur K ; donc elle a un minimum et un maximum. Nous posons $s_1=\min_{z\in K}|z|$ et $s_2=\max_{z\in K}|z|$.
Ah ah ! non. En fait nous ne définissons pas s_1 et s_2 de cette manière parce qu'il y a un risque que $s_1=s_2$ et qu'alors $\overline{C(s_1,s_2)}$ soit vide et ne contienne donc pas K – pour rappel, $C(s_1,s_2)$ est la couronne ouverte.
Nous choisissons donc s_1 et s_2 de telle sorte que

$$r_1<s_1<\min_{z\in K}|z|\leqslant\max_{z\in K}|z|<s_2<r_2. \tag{29.273}$$

Tout ça pour dire que $K\subset\overline{C(s_1,s_2)}$. La convergence normale sur $\overline{C(s_1,s_2)}$ déjà prouvée implique la convergence normale sur K.

□ PROPBooYWDNooMXVPLJ

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 29.59
Sur Wikipédia[699], le fait que a_n ne dépende pas de r est prouvé en disant que $a_n(s)=c_n(s)/s^n$ et $a_n(t)=c_n(t)/t^n$ et que

$$\frac{c_n(s)}{c_n(t)}=\frac{s^n}{t^n}. \tag{29.274}$$ EQooCPDTooBDxIKm

En mettant tout cela bout à bout,

$$\frac{a_n(s)}{a_n(t)}=1. \tag{29.275}$$

[28] Faites bien attention que dans cette partie, $\|.\|_\infty$ est la norme uniforme sur $\overline{C(s_1,s_2)}$ et non sur $C(r_1,r2)$ ou sur $\mathbb{C}$.

Je ne comprends pas très bien pourquoi cette justification est nécessaire. À mon avis, le rédacteur de la démonstration sur Wikipédia parvient à déduire la relation (29.274) directement depuis l'équation différentielle, sans réellement avoir besoin de la résoudre.

Si vous comprenez n'hésitez pas à m'écrire, parce que j'ai l'impression d'avoir manqué quelque chose.
PROPooBMZGooLoaGLK

Proposition 29.60.
Si f est holomorphe sur $B(a,r)$, alors sa série de Laurent pour $z \neq a$ s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n. \tag{29.276}$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \tag{29.277}$$

où

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,2\pi[&\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto a + re^{it} \end{aligned} \tag{29.278}$$

est le cercle de centre a et de rayon r.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer le théorème 29.58 à la fonction $\tilde{f}(z) = f(z+a)$ sur la couronne $C(0,r)$. □

29.8.1 Inégalité isopérimétrique

Le théorème suivant dit que parmi les courbes C^1, le cercle a la plus grande surface possible à périmètre donné.
ThoIXyctPo

Théorème 29.61 (Inégalité isopérimétrique[128])**.**
Soit $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ une courbe de Jordan[29] de classe C^1. Nous notons L sa longueur et S l'aire contenue de la surface délimitée[30] par f. Alors

*(1) Nous avons l'**inégalité isopérimétrique** : $L^2 \geqslant 4\pi S$.*

(2) Nous avons l'égalité $L^2 = 4\pi S$ si et seulement si la courbe donnée par f est un cercle.

Démonstration. Nous commençons par considérer un chemin dont la longueur est 2π et nous en considérons son paramétrage normal. Nous allons exprimer l'aire S en utilisant le théorème de Green, et plus particulièrement la formule de surface (20.272).

Si $f(s) = x(s) + iy(s)$, nous devons intégrer $y'x - x'y$, qui n'est rien d'autre que la partie imaginaire de $f'(s)\overline{f(s)}$. Donc

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} f'(s)\overline{f(s)} ds \tag{29.279}$$
EqCSWKbPX

Nous considérons les coefficients de Fourier de f donnés par la formule (28.50) :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ins} ds. \tag{29.280}$$

Ceux de f' (qui est aussi continue sur le compact S^1 et donc tout autant L^2) sont donnés par

$$c_n(f') = inc_n(f). \tag{29.281}$$

D'autre part en vertu du théorème 21.9, la longueur de γ s'exprime en termes de l'intégrale de la norme de sa dérivée :

$$2\pi = L = \int_0^{2\pi} |f'(s)| ds = \int_0^{2\pi} |f'(s)|^2 ds \tag{29.282}$$

parce que nous avons choisi un paramétrage normal qui vérifie automatiquement $|f'(s)| = 1$ pour tout s. L'identité de Parseval sous sa forme (25.130) appliquée à f' nous enseigne que

$$L = 2\pi = \int_0^{2\pi} |f'(s)|^2 ds = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f')|^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2, \tag{29.283}$$
EqXSpHuZI

[29] Définition 20.75
[30] C'est la partie connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ dont l'existence est donnée par le théorème de Jordan 27.216.

et donc que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(f)|^2 = 1. \tag{29.284}$$

Par ailleurs le système trigonométrique étant une base hilbertienne, et les fonctions f et f' étant dans $L^2\big([0,2\pi]\big)$ (parce que continues sur un compact), elles sont égales à leurs séries de Fourier (au sens L^2), c'est-à-dire que nous avons l'égalité (29.189). Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\langle f', f\rangle_{L^2} &= \langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f')e_n, \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(f)e_m\rangle && (29.285a)\\
&= \sum_m \sum_n c_n(f')\overline{c_m(f)} \underbrace{\langle e_n, e_m\rangle}_{\delta_{n,m}} && (29.285b)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f')\overline{c_n(f)} && (29.285c)\\
&= \sum_n in|c_n(f)|^2 && (29.285d)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la continuité du produit scalaire pour sortir les sommes. Avec cela nous pouvons exprimer l'aire (29.279) en termes de coefficients de Fourier :

$$S = \frac{1}{2}\operatorname{Im} 2\pi\langle f', f\rangle = \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n(f)|^2. \tag{29.286}$$

En utilisant les expressions (29.283) et (29.286) pour L et S, et en écrivant $L = 2\pi$, nous avons

$$\begin{aligned}
L^2 - 4\pi S &= 4\pi^2\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(f)|^2\right)^2 - 4\pi^2\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n(f)|^2 && (29.287a)\\
&\geqslant 4\pi^2\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(f)|^2 - 4\pi^2\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n(f)|^2 && (29.287b)\\
&= 4\pi^2\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2(n^2-n) && (29.287c)\\
&\geqslant 0. && (29.287d)
\end{aligned}$$

Justifications.

- Pour (29.287a). Expression (29.283) pour L et (29.286) pour S.
- Pour (29.287b). La somme dans le premier terme valant 1 par (29.284), nous pouvons supprimer le carré.

Cela prouve l'inégalité demandée dans le cas où $L = 2\pi$.

Si γ n'est pas de longueur 2π mais L, alors nous considérons le chemin $\sigma(t) = \frac{2\pi\gamma(t)}{L}$. Sa longueur est 2π et son aire, au vu de la formule de Green (29.279), est de $4\pi^2\frac{S}{L^2}$. L'inégalité isopérimétrique appliquée au chemin σ donne alors $L^2 \geqslant 4\pi S$.

Le cas d'égalité s'obtient uniquement si $c_n = 0$ pour tout n différent de 0 ou 1. Dans ce cas nous avons

$$f(s) = c_0(f) + c_1(f)e^{is}, \tag{29.288}$$

qui est un cercle de centre $c_0(f)$ et de rayon $|c_1(f)|$. □

29.8.2 Formule d'inversion

Proposition 29.62 (Formule d'inversion[522, 128])**.**
À propos d'inversion de la transformée de Fourier.

(1) Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors nous avons la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\hat{f}(k)dk. \tag{29.289}$$

(2) Nous avons, pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat{f})(-x). \tag{29.290}$$

ITEMooCZYMooRvKTfS

(3) *L'application*

$$\mathcal{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}) \tag{29.291}$$

est une bijection continue.

(4) *Cette formule peut d'écrire de plusieurs autres façons : pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons*

EQooWBZTooPeBNeh

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat{f})(-x). \tag{29.292a}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(f)(-\xi). \tag{29.292b}$$

Démonstration. Le fait que la transformée de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ prenne ses valeurs dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est déjà prouvé dans 29.22. Nous commençons maintenant la preuve de (1).

Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour $\epsilon > 0$ nous posons

$$f_\epsilon(k) = e^{-\epsilon k^2} e^{ikx} \hat{f}(k). \tag{29.293}$$

Nous allons calculer

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon k^2} e^{ikx} \hat{f}(k) dk \tag{29.294}$$

de deux façons ; d'abord avec la convergence dominée, et ensuite avec Fubini.

(1) **Premier calcul : convergence dominée** D'abord en utilisant directement le théorème de la convergence dominée 14.207. La fonction $\hat{f}$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (théorème 29.22) et par conséquent $f_\epsilon \in L^1(\mathbb{R})$ parce que le facteur $e^{-\epsilon k^2}$ ne va certainement pas empêcher de converger. De plus $|f_\epsilon| \leqslant |\hat{f}|$ et $\hat{f} \in L^1$. Le théorème est de la convergence dominée est applicable et

EQooYIYGooXYubbW

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon k^2} e^{ikx} \hat{f}(k) dk = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \tag{29.295}$$

(2) **Deuxième calcul : Fubini**

Pour le deuxième calcul nous allons faire appel à Fubini[31] pour la fonction

$$\begin{aligned} u\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (k,y) &\mapsto e^{ik(x-y)} e^{-\epsilon k^2} f(y). \end{aligned} \tag{29.296}$$

D'abord nous nous assurons que $u \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ par le corolaire 14.304, et ensuite nous utilisons le théorème de Fubini 14.305 pour manipuler les intégrales (et en particulier les permuter).

(2a) $u \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ Dans un premier temps nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |e^{ik(x-y)} e^{-\epsilon k^2} f(y)| dy\, dk \leqslant \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon k^2} \Big[\int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy\Big] dk < \infty \tag{29.297}$$

parce que f étant dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, l'intégrale intérieure se réduit à un nombre. Nous savons maintenant que $u \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ grâce au corolaire 14.304.

(2b) **Calcul**

[31] Parce qu'il est toujours plus simple de refiler le boulot aux autres que de le faire soi-même…pauvre Fubini !

Nous pouvons alors calculer un peu …

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}e^{-\epsilon k^2}\hat{f}(k)dk = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}e^{-\epsilon k^2}e^{-iky}f(y)dy\,dk \tag{29.298a}$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y)}e^{-\epsilon k^2}f(y)dk\Big]dy \tag{29.298b}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)\Big[\int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y)}e^{-\epsilon k^2}dk\Big]dy \tag{29.298c}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)\hat{g}_\epsilon(y-x)dy \tag{29.298d}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-(y-x)^2/4\epsilon}dy \tag{29.298e}$$
$$= 2\sqrt{\epsilon}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}\int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\epsilon}t)e^{-t^2}dt \tag{29.298f}$$
$$= 2\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\epsilon}t)e^{-t^2}dt \tag{29.298g}$$
$$\tag{29.298h}$$

Justifications :

- Pour (29.298b), c'est Fubini 14.305.
- Pour (29.298d), nous avons reconnu dans le crochet la transformée de Fourier de la fonction $g_\epsilon : x \mapsto e^{-\epsilon x^2}$.
- Pour (29.298e), nous utilisons la transformée de Fourier de g_ϵ donnée dans le lemme 29.24.
- Pour (29.298f), nous avons effectué le changement de variables $t = (y-x)/(2\sqrt{\epsilon})$ qui donne $dt = dy/2\sqrt{\epsilon}$.

(3) **Second passage à la limite**

Nous avons obtenu l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}e^{-\epsilon k^2}\hat{f}(k)dk = 2\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\epsilon}t)e^{-t^2}dt, \tag{29.299}$$

et nous voudrions passer à la limite $\epsilon \to 0$. Le membre de gauche est déjà fait en (29.295).

Pour le membre de droite, la fonction f étant Schwartz (en particulier bornée), nous pouvons effectuer la majoration

$$f(x+2\sqrt{\epsilon}t)e^{-t^2} \leqslant \|f\|_\infty e^{-t^2}, \tag{29.300}$$

qui est une fonction intégrable de t. Nous avons donc le droit de permuter la limite $\epsilon \to 0$ et l'intégrale dans le calcul suivant :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\epsilon}t)e^{-t^2} = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-t^2}dt. \tag{29.301}$$

(4) **Fin**

Nous avons maintenant les limites des deux membres de (29.299). Récrivons :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}e^{-\epsilon k^2}\hat{f}(k)dk = \lim_{\epsilon\to 0} 2\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\epsilon}t)e^{-t^2}dt, \tag{29.302}$$

À gauche nous avons déjà la limite depuis (29.295), et à droite nous obtenons

$$\lim_{\epsilon\to 0} 2\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\epsilon}t)e^{-t^2}dt = 2\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-t^2}dt = 2\sqrt{\pi}f(x)\sqrt{\pi} = 2\pi f(x) \tag{29.303}$$

où nous avons utilisé l'intégrale gaussienne faite dans l'exemple 14.308.

En remettant tout ensemble,

$$2\pi f(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon k^2}e^{ikx}\hat{f}(k)dk = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\hat{f}(k)dk, \tag{29.304}$$

ce qu'il fallait prouver.

Le plus gros est fait ; nous avons prouvé

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\hat{f}(k)dk. \tag{29.305}$$

EQooYVUZooZXQoEH

Pour (2), c'est simplement une reformulation de cela.

Nous prouvons maintenant (3).

(1) **La transformée de Fourier est injective** Vu qu'elle est linéaire, il suffit de démontrer que si $\mathcal{F}(f) = 0$, alors $f = 0$. Si $\hat{f} = 0$, alors la formule (29.305) donne immédiatement $f = 0$.

(2) **La transformée de Fourier est surjective** Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Nous devons trouver $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tel que $\hat{g} = f$. La formule $\mathcal{F}(\hat{f})(-x) = 2\pi f(x)$ nous incite à essayer

$$g(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\xi). \tag{29.306}$$

Calculons $\mathcal{F}(g)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g)(x) &= -\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}g(\xi)d\xi && (29.307a)\\
&= -\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\xi)d\xi && (29.307b)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)dt && (29.307c)\\
&= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat{f})(-x) && (29.307d)\\
&= f(x). && (29.307e)
\end{aligned}$$

Pour la dernière ligne, nous avons utilisé $\mathcal{F}(\hat{f})(-x) = 2\pi f(x)$.

□

CORooAZLZooSviTej

Corolaire 29.63.
Nous avons la formule

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}f(x)dx\,dk = 2\pi f(0). \tag{29.308}$$

EQooRJXRooFlEMAa

Démonstration. Poser $x = 0$ dans l'équation (29.289). □

29.64.
Les physiciens qui n'ont que rarement peur écrivent souvent la formule (29.308) sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}dk = \delta(x) \tag{29.309}$$

où δ serait la fonction de Dirac qui vaut zéro partout sauf en $x = 0$ où elle vaudrait l'infini, mais pas n'importe quel infini ; juste celui qu'il faut pour que sont intégrale vaille 1.

LemYYjFZSa

Lemme 29.65.
Si $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, alors

$$\partial_t\hat{\phi} = \widehat{\partial_t\phi} \tag{29.310}$$

où le chapeau dénote la transformée de Fourier par rapport à la variable dans $\mathbb{R}^n$ et non par rapport à celle dans $\mathbb{R}$. Le t par contre est la variable dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Par définition de la transformée de Fourier nous avons

$$(\partial_t\hat{\phi})(t,\xi) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(t,x)e^{-ix\xi}dx. \tag{29.311}$$

Notre but est de permuter l'intégrale et la dérivée en utilisant le théorème 17.19. Il nous faut une fonction $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui soit intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et telle que

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\phi(t,x)\right| \leqslant G(x) \tag{29.312}$$

pour tout $t \in B(t_0, \delta)$. Étant donné que la fonction $\partial_t \phi$ est tout autant Schwartz que ϕ elle-même nous pouvons alléger les notations et chercher une fonction G qui convient pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Soit la fonction

$$G(x) = \sup_{t \in B(t_0,\delta)} |\varphi(t,x)|. \tag{29.313}$$

Pour tout multiindice α nous avons alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha G(x) \right| \leqslant \sup_{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \varphi(t,x) \right| \leqslant M_\alpha \in \mathbb{R}. \tag{29.314}$$

Grâce à la proposition 27.245, cela signifie que φ décroît plus vite que n'importe quel polynôme ; G est donc intégrable sur $\mathbb{R}^n$. □

29.9 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

La théorie des transformées de Fourier est intéressante sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ parce qu'elle y donne une isométrie. Nous allons la donner avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Remarque 29.66.
Une remarque qui vaut ce qu'elle vaut, mais si u est une classe de fonction pour la relation $u \sim v$ si et seulement si $u(x) = v(x)$ pour presque tout v alors l'intégrale

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{ix\xi} dx \tag{29.315}$$

ne dépend pas du choix du représentant. Nous pouvons donc parfaitement parler de transformée de Fourier d'une classe de fonctions.

29.9.1 Le problème

Nous avons défini en général la transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x) dx \tag{29.316}$$

EQooOPLJooEkqRuC

tant que cette intégrale existe.

Il se fait que cette intégrale n'existe pas toujours pour des fonctions dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc nous devons faire mieux pour définir la transformée de Fourier sur L^2.

EXooSWCHooTdHTsl

Exemple 29.67 ([1]).
Prenons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases} \tag{29.317}$$

Vu que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ existe et est finie (proposition 14.301(2)), la fonction f est dans $L^2(\mathbb{R})$.

Cependant l'intégrale (29.316) n'existe pas. Pour nous convaincre de cela, nous pouvons simplement nous souvenir de la définition d'une intégrale à valeurs dans un espace vectoriel (définition 14.197). Nous fixons $\xi \in \mathbb{R}$ et nous posons $g(x) = f(x) e^{i\xi x}$.

Bien évidemment, $|g(x)| = \frac{1}{x}$ sur $]1, \infty[$. Donc $\int_{\mathbb{R}} |g| = \infty$, et la fonction g n'est pas intégrable. Fin de l'histoire.

Nous pouvons toujours essayer de comprendre mieux. Vu que $\int_{\mathbb{R}} |g| = \infty$, la proposition 14.198 nous dit qu'au moins une des intégrales parmi

$$\int g_{re}^+, \int g_{im}^+, \int g_{re}^-, \int g_{im}^- \tag{29.318}$$

est égale à $+\infty$.

Note qu'en travaillant un peu, on se convainc qu'en réalité, elles divergent toutes les quatre. △

29.9.2 Extension de $L^1 \cap L^2$ vers L^2

THOooJLCDooAjTvJf

Théorème 29.68 (Extention de la transformée de Fourier vers $L^2(\mathbb{R}^d)$[787]).
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors

(1) Nous avons $\mathcal{F}(f) \in L^2$ et $\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^d \|f\|_{L^2}$.

(2) L'application $\mathcal{F}\colon L^1 \cap L^2 \to L^2$ peut être étendue en une application $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^d \|f\|_{L^2} \tag{29.319}$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Le fait que $f \in L^1$ implique $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ (c'est le lemme 29.12). En particulier, $|\mathcal{F}(f)(\xi)|^2$ est majoré et l'intégrale

$$\clubsuit = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}|^2 e^{-\epsilon\xi^2} d\xi \tag{29.320}$$

existe et est finie.

(1) **Découper l'intégrale** Dans un premier temps nous développons les intégrales. Dans les égalités suivantes, $x\xi$ est le produit scalaire $x \cdot \xi$ dans $\mathbb{R}^d$.

$$\clubsuit = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} e^{ix\xi} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-y\xi} \right) e^{-\epsilon|\xi|^2} d\xi \tag{29.321a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \overline{f(x)} f(y) e^{i\xi(x-y)} dx dy \right] e^{-\epsilon|\xi|^2} d\xi. \tag{29.321b}$$

Nous avons utilisé le théorème de Fubini pour regrouper les intégrales[32]. Vu que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la fonction $(x, y, \xi) \mapsto f(x)f(y)e^{-\epsilon|\xi|^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et le théorème de Fubini 14.305 avec $\Omega_1 = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et $\Omega_2 = \mathbb{R}^d$ nous permet de permuter les intégrales pour avoir

$$\clubsuit = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \overline{f(x)} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi(x-y)} e^{-\epsilon|\xi|^2} d\xi \right] dx dy. \tag{29.322}$$

EQooSUYWooCmtFeF

(2) **Discuter de cette gaussienne** En posant

$$g(x) = e^{-|x|^2/2} \tag{29.323a}$$

$$g_\epsilon(x) = g(\sqrt{2\epsilon}x) = e^{-\epsilon|x|^2} \tag{29.323b}$$

nous avons $g_\epsilon \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et le lemme 29.25 nous autorise à écrire

$$\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{d/2} g(\xi) \tag{29.324a}$$

$$\hat{g}_\epsilon(\xi) = \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{d/2} e^{-|\xi|^2/4\epsilon} \tag{29.324b}$$

Nous voyons que $\hat{g}_\epsilon \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ (c'était gagné d'avance par la proposition 29.22) et que $\hat{g}_\epsilon$ est une fonction paire (encore une fois, c'était gagné d'avance parce que la transformée de Fourier d'une fonction paire est paire).

Tout cela pour dire que l'intégrale entre crochet dans (29.322) est $\hat{g}_\epsilon(y - x) = \hat{g}_\epsilon(x - y)$, et donc

$$\clubsuit = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \overline{f(x)} f(y) \hat{g}_\epsilon(x - y) dx dy. \tag{29.325}$$

Encore une fois le théorème de Fubini permet de séparer les intégrales et de calculer l'intégrale sur y en premier. Vu que $f \in L^1$ et que $\hat{g}_\epsilon \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, le produit de convolution $f * \hat{g}_\epsilon$ est un élément de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ par la proposition 27.254. Nous avons donc

$$\clubsuit = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} (f * \hat{g}_\epsilon)(x) dx. \tag{29.326}$$

Là, nous reconnaissons un produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, et donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}|^2 e^{-\epsilon\xi^2} d\xi = \langle f, f * \hat{g}_\epsilon \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{29.327}$$

EQooWIHNooHutHlS

Notons que tout a un sens : $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $f * \hat{g}_\epsilon \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$.

[32] Dans la suite nous allons encore utiliser Fubini quelques fois pour regrouper et dégrouper des intégrales.

(3) **Suite régularisante**
Nous prenons la suite régularisante du lemme 29.25 donnée par

$$\rho_n = \frac{1}{(2\pi)^d}\hat{g}_{1/n}. \tag{29.328}$$

(4) **Première conclusion** Nous reprenons (29.327)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}|^2 e^{-|\xi^2|/n} d\xi = \langle f, f * \hat{g}_{1/n}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^d \langle f, f * \rho_n\rangle. \tag{29.329}$$

En prenant la limite $n \to \infty$ nous trouvons

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}|^2 e^{-\epsilon\xi^2} d\xi = (2\pi)^d \|f\|^2. \tag{29.330}$$

Pour effectuer la limite du membre de gauche nous devons remarquer qu'en posant

$$g_n(\xi) = |\hat{f}(\xi)| e^{-|\xi|^2/n}, \tag{29.331}$$

nous avons une suite décroissante de fonctions (c'est-à-dire que à ξ fixé, $g_n(\xi)$ est décroissant en n). Par ailleurs ces fonctions sont toujours à valeurs dans $[0,\infty]$ et nous pouvons utiliser le théorème de la convergence monotone 14.178 pour permuter la limite et l'intégrale. Au final :

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^d \|f\|_{L^2}. \tag{29.332}$$

En ce qui concerne l'extension, soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et une suite (f_n) dans $L^1 \cap L^2$ telle que $f_n \xrightarrow{L^2} f$.

(1) **Existence d'une telle suite** Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors nous pouvons poser

$$f_n(x) = f(x) e^{-|x|^2/n^2}. \tag{29.333}$$

EQooHGJYooJsmxoX

Par l'inégalité de Hölder (27.102) nous avons $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$; de plus $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ parce que pour tout x nous avons $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$. Montrons que $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Nous avons

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)(1 - e^{-|x^2|/n^2})|^2 dx. \tag{29.334}$$

Nous voulons prendre la limite $n \to \infty$. Pour ce faire à droite nous remarquons que $e^{-|x|^2/n^2}$ est majoré par 1 ; ce qui se trouve dans l'intégrale est donc majoré (uniformément en n) par $|f(x)|^2$, qui est une fonction L^1 parce que f est L^2. Le théorème de la convergence dominée 14.207 nous permet alors de permuter la limite et l'intégrale, ce qui donne

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} |f(x)(1 - e^{-|x|^2/n^2})|^2 dx = 0. \tag{29.335}$$

(2) **Définition de $\mathcal{F}: L^2 \to L^2$**
La suite (f_n) est une suite convergence dans L^2, et elle est donc de Cauchy. De plus pour chaque n, m nous avons

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\| = (2\pi)^d \|f_n - f_m\|. \tag{29.336}$$

Nous voyons donc que la suite $(\hat{f}_n)$ est également de Cauchy, dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui est complet (lemme 27.105). Nous posons

$$\hat{f} = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n. \tag{29.337}$$

(3) **Indépendance aux choix** Nous devons montrer que la définition de $\hat{f}$ ne dépend pas de la suite approximant f dans $L^1 \cap L^2$. Soient dans deux suites $f_n \xrightarrow{L^2} f$ et $g_n \xrightarrow{L^2} f$ telles que $\hat{f}_n \xrightarrow{L^2} F$ et $\hat{g}_n \xrightarrow{L^2} G$. Alors

$$\|\hat{f}_n - \hat{g}_n\| = (2\pi)^d \|f_n - g_n\| \leqslant (2\pi)^d \|f_n - f\| + (2\pi)^d \|g_n - f\| \to 0. \tag{29.338}$$

Par conséquent $(\hat{f}_n - \hat{g}_n)_n$ est une suite qui converge vers zéro. Par unicité de la limite, $F = G$.

□

Remarque 29.69.
Une autre suite possible, à la place de (29.333), est

$$f_n(x) = f(x) \mathbb{1}_{|x|<n}. \tag{29.339}$$

C'est-à-dire la fonction f limitée à une boule de rayon n autour de 0.

Chapitre 30

Distributions

Nous donnons ici une partie de la théorie sur les distributions. L'utilisation des distributions dans le cadre des équations différentielles est mise dans le chapitre sur les équations différentielles, section 32.11.

30.1 Dérivée faible

30.1.1 Dérivée partielle au sens faible

DEFooIRJQooMVNopl

Lemme-Définition 30.1.
Soit $f \in L^p(I)$ où I est l'intervalle ouvert $]a,b[$. Il existe au maximum[1] *une fonction g telle que*

$$\int_I f\varphi' = -\int_I g\varphi \tag{30.1}$$

*pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(I)$. Lorsqu'une telle fonction existe, nous la nommons **dérivée faible** de f.*

Démonstration. Soient $g, h \in L^2$ tels que

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi = -\int_I h\varphi \tag{30.2}$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Nous avons alors

$$\int_I (g-h)\varphi = 0. \tag{30.3}$$

Cela implique que $g - h = 0$ presque partout par la proposition 27.190[2]. □

Exemple 30.2 (Dérivée faible de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$)**.**
Vu que $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\varphi' = 0 \tag{30.4}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Pour $g = 0$ nous avons aussi $\int_{\mathbb{R}} g\varphi = 0$. Donc $g = 0$ est la dérivée faible de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

Cela n'est pas étonnant du fait qu'en théorie de l'intégration, les parties de mesure nulle ne comptent pas. De ce point de vue, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0$. D'ailleurs cette égalité est vraie dans L^p (les classes et tout ça). △

EXooRVGHooTWOCtF

Exemple 30.3 (La fonction de Heaveside n'a pas de dérivée faible)**.**
Nous montrons que la fonction

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \tag{30.5}$$

n'a pas dérivée faible. Nous nommons g une hypothétique fonction vérifiant les conditions pour être la dérivée faible de H.

Soit une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, dont le support est contenu dans $]0,\infty[$. Sur le support de φ, et donc aussi de φ', nous avons $H(x) = 1$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi' = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi. \tag{30.6}$$

[1] En réalité, c'est une classe au sens de l'égalité presque partout.
[2] Ou alors par le lemme 27.89 qui est moins général mais tout aussi bien pour ici.

Vu que φ est à support compact, $\int_{\mathbb{R}} \varphi' = 0$. En effet, si le support de φ est contenu dans $[-M, M]$, alors en utilisant le théorème fondamental de l'analyse 14.288, nous trouvons $\int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{-M}^{M} \varphi' = \varphi(M) - \varphi(-M) = 0 - 0 = 0$.

Donc g doit satisfaire

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x) = 0 \tag{30.7}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(x > 0)$. La proposition 29.28 nous dit que $g = 0$ presque partout sur $]0, \infty[$.

Le même raisonnement dit que $g = 0$ presque partout sur les négatifs. Que g soit maintenant nulle ou non en $x = 0$ ne change pas le fait que $g = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, $\int_{\mathbb{R}} g\varphi = 0$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Hélas, nous avons d'autre part

$$\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx = \int_0^{\infty} \varphi'(x)dx, \tag{30.8}$$

qui n'est pas forcément nul. Notons que pour avoir un exemple de φ qui donne $\int_{\mathbb{R}} H\varphi \neq 0$, il faut chercher des fonctions dont le support contient des négatifs et des positifs.

La fonction H n'a donc pas de dérivée faible. Notons cependant que cela ne présume en rien la possibilité d'accepter une dérivée au sens des distributions. △

30.4.
Nous verrons dans la proposition 30.38 que la dérivée de Heaveside au sens des distributions est le delta de Dirac.

Exemple 30.5 (Dérivée faible de la valeur absolue)**.**
L'exemple de base de fonction continue qui n'est pas dérivable est la valeur absolue $f(x) = |x|$ prise en $x = 0$. Nous allons montrer ici que la fonction

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{30.9}$$

est la dérivée faible de f.

Commençons par noter que H peut valoir la valeur qu'on veut en zéro ; de toutes façons la dérivée faible n'est définie qu'à partie de mesure nulle près.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $M > 0$ tel que le support de φ soit contenu dans $[-M, M]$. Nous avons d'une part

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x)dx = -\int_{-M}^{0} x\varphi'(x)dx + \int_0^{M} x\varphi'(x)dx \tag{30.10a}$$

$$= -[\varphi x]_{-M}^{0} + \int_{-M}^{0} \varphi + [x\varphi]_0^M - \int_0^M \varphi \tag{30.10b}$$

où nous avons utilisé l'intégration par partie de la proposition 20.133 en posant

$$u = x \qquad v' = \varphi' \tag{30.11a}$$

$$u' = 1 \qquad v = \varphi. \tag{30.11b}$$

Tout cela pour dire que

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x)dx = \int_{-M}^{0} \varphi - \int_0^M \varphi. \tag{30.12}$$

D'autre part, l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = -\int_{-M}^{0} \varphi + \int_0^M \varphi \tag{30.13}$$

est immédiate.

Nous en déduisons que H est bien la dérivée faible de $x \mapsto |x|$. △

REMooBGJFooPBkFqm

Remarque 30.6.
La dérivée faible ne doit pas être confondue avec la dérivée au sens des distributions qui sera définie en 30.36. Nous avons donc trois notions distinctes de dérivation pour une fonction :

- la dérivée usuelle,
- la dérivée au sens des distributions,

- la dérivée faible.

La dérivée faible d'une fonction reste une fonction, tandis que la dérivée distributionnelle d'une fonction est une distribution.

Je vous mets en garde contre l'idée que l'existence de l'une impliquerait trop facilement l'existence d'une autre[3].

30.1.2 Dérivée faible partielle

La notion de dérivée partielle faible est la même que l'autre. Histoire de nous mettre dans le bain, nous écrivons la définition avec les notation du produit scalaire au lieu de l'intégrale.

DEFooBRFCooPncSCE

Définition 30.7.
*Si $i = 1, \dots, n$, la **dérivée faible** de v dans la direction e_i est l'application*[4] *notée $\partial_i v$ définie par*

$$\langle \partial_i v, \phi \rangle = -\langle v, \partial_i \phi \rangle \tag{30.14}$$

EQooMRZUooFoqPqv

pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Lemme 30.8.
Si $v \in L^2$ admet une dérivée faible, alors cette dernière est unique.

Démonstration. Supposons f, g telles que $\langle g, \phi \rangle$ et $\langle f, \phi \rangle$ soient tous deux égaux à $-\langle v, \partial_i \phi \rangle$. En particulier pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ nous avons $\langle (f - g), \phi \rangle = 0$.

Cela donne $f - g = 0$ par la proposition 27.190. □

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Le but de notre histoire est de définir une distribution comme étant un élément de l'espace dual (topologique, voir définition 25.1) de l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact dans Ω. Pour ce faire nous devons voir un peu de topologie sur différents espaces de fonctions. Notons que l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ n'est pas réduit à la fonction nulle comme en témoigne l'exemple donné par l'équation (15.614).

PROPooVZFHooKfSpfO

Proposition-Définition 30.9.
Pour chaque K compact dans Ω et chaque entier m, l'application

$$\begin{aligned} p_{K,m} \colon\ & C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \sum_{|\mu| \leqslant m} \| \partial^\mu f \|_{K,\infty}. \end{aligned} \tag{30.15}$$

EQooZSQUooAJRIEe

est une seminorme.

Démonstration. Nous devons vérifier les trois conditions de la définition 7.381. Soient $f, g \in C^\infty(\Omega)$. Nous avons d'abord $p_{K,m}(f) \geqslant 0$ parce qu'une norme est toujours positive. Ensuite $p_{K,m}(\lambda f) = |\lambda| p_{K,m}(f)$ parce que $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$. Pour la troisième condition,

$$\begin{aligned} p_{K,m}(f + g) &= \sum_{|\mu| \leqslant m} \| \partial^\mu f + \partial^\mu g \|_K && \text{(30.16a)} \\ &= \sum_{|\mu| \leqslant m} \sup_{x \in K} \Big(\| (\partial^\mu f)(x) + (\partial^\mu g)(x) \| \Big) && \text{(30.16b)} \\ &\leqslant \sum_{|\mu| \leqslant m} \sup_{x \in K} \Big(\| (\partial^\mu f)(x) \| + \| (\partial^\mu g)(x) \| \Big) && \text{(30.16c)} \\ &\leqslant \sum_{|\mu| \leqslant m} \sup_{x \in K} \| (\partial^\mu f)(x) \| + \sup_{x \in K} \| (\partial^\mu g)(x) \| && \text{(30.16d)} \\ &= p_{K,m}(f) + p_{K,m}(g). && \text{(30.16e)} \end{aligned}$$

□

En particulier,

$$p_{K,0}(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| = \| f \|_{\infty, K}. \tag{30.17}$$

[3] Wikipédia cite l'exemple de la fonction de Cantor qui est dérivable presque partout au sens usuel, mais qui n'est pas faiblement dérivable. Écrivez-moi si vous connaissez des théorèmes qui lient les trois notions de dérivée.

[4] En fait c'est une classe au sens de l'égalité presque partout.

30.1.3 Formules de Leibniz

PROPooTEACooKXUXKl

Proposition 30.10 ([791]).
Soient des fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ chacune n fois dérivable. Alors nous avons la formule

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}. \tag{30.18}$$

Démonstration. Nous faisons par récurrence sur n. Le premier pas étant la règle de Leibniz usuelle de la proposition 12.194(3). Nous avons

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \right)' && (30.19a)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} && (30.19b)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)} g^{(k)} && (30.19c)\\
&= \binom{n}{0} f^{(n+1)} g + \binom{n}{n} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right] f^{(n+1-k)} g^{(k)} && \text{cf. justif.}\\
& && \text{SUBEQooVBEMooPmPWIS} \quad (30.19d)\\
&= \binom{n+1}{0} f^{(n+1)} g + \binom{n+1}{n+1} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right] f^{(n+1-k)} g^{(k)} && \text{cf. justif.}\\
& && \text{SUBEQooKDNYooDmoUvB} \quad (30.19e)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} && \text{lem. 1.380.}\\
& && (30.19f)
\end{aligned}$$

Justifications.

(1) Pour (30.19d). Nous avons séparé le termes $k = 0$ de la première somme et le terme $k = n + 1$ de la seconde.

(2) Pour (30.19e). Quelques cas particuliers de la définition (1.516) :

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1. \tag{30.20}$$

□

LEMooOLQTooEHJuBc

Lemme 30.11 (Formule de Leibniz[4, 792]).
Soient des fonctions f, g chacune dérivable p fois sur $\mathbb{R}^d$. Alors pour tout multiindices[5] α de taille plus petite ou égale à p, nous avons

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g). \tag{30.21}$$

Démonstration. Nous faisons une récurrence sur la taille de α. Nous supposons que la formule est valable lorsque $|\alpha| \leqslant k$, et nous prouvons la formule avec $\alpha = (\alpha_1, , \alpha_n)$ avec $|\alpha| = k + 1$.

Soit j tel que $\alpha_j \neq 0$. Nous définissons $\tilde{\alpha}$ par $\tilde{\alpha} = \alpha_j e_j + \tilde{\alpha}$.

Si $\tilde{\alpha} = 0$, alors α contient seulement une composant selon e_j. Dans ce cas, le résultat se réduit au cas à une dimension de la proposition 30.10. Si $\tilde{\alpha} \neq 0$, alors les multiindices $\alpha_j e_j$ et $\tilde{\alpha}$ sont tout deux de longueur au maximum k. Il reste à calculer :

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha (fg) &= \partial^{\alpha_j e_j} \partial^{\tilde{\alpha}} (fg) && (30.22a)\\
&= \partial^{\alpha_j e_j} \sum_{\beta \leqslant \tilde{\alpha}} \binom{\tilde{\alpha}}{\beta} (\partial^\beta f)(\partial^{\tilde{\alpha}-\beta} g) && (30.22b)\\
&= \sum_{\beta \leqslant \tilde{\alpha}} \binom{\tilde{\alpha}}{\beta} \sum_{\gamma=0}^{\alpha_j} \binom{\alpha_j}{\gamma} (\partial^{\gamma e_j} \partial^\beta f)(\partial^{(\alpha_j-\gamma)e_j} \partial^{\tilde{\alpha}-\beta} g) && \text{prop. 30.10.} \quad (30.22c)
\end{aligned}$$

[5] Voir les définitions 3.36 et -1.2.

Maintenant nous faisons quelque manipulations. Remarquons que dans la somme $\beta_j \leqslant \tilde{\alpha}_j = 0$. Donc nous avons égalité des ensembles

$$\{\beta \text{ tel que } \beta \leqslant \tilde{\alpha}\} = \{\beta \text{ tel que } \beta \leqslant \alpha, \beta_j = 0\}. \tag{30.23}$$

Et comme il n'y a pas de composantes j dans β, la définition 3.70 des coefficients binomiaux donne

$$\binom{\tilde{\alpha}}{\beta}\binom{\alpha_j e_j}{\gamma e_j} = \binom{\tilde{\alpha} + \alpha_j e_j}{\beta + \gamma e_j}. \tag{30.24}$$

Enfin, pour y voir plus clair nous posons

$$u(\delta) = \binom{\alpha}{\delta}(\partial^\delta f)(\partial^{\alpha-\delta} g). \tag{30.25}$$

Nous pouvons continuer le calcul :

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\substack{\beta\leqslant\alpha\\ \beta_j=0}} \sum_{\gamma=0}^{\alpha_j} \binom{\alpha}{\beta+\gamma e_j} (\partial^{\beta+\gamma e_j} f)(\partial^{\alpha-(\beta+\gamma e_j)} g) \tag{30.26a}$$

$$= \sum_{\substack{\beta\leqslant\alpha\\ \beta_j=0}} \sum_{\gamma=0}^{\alpha_j} u(\beta+\gamma e_j) \tag{30.26b}$$

$$= \sum_{\delta\leqslant\alpha} u(\delta), \tag{30.26c}$$

ce qu'il fallait. □

30.2 Topologie et convergence sur des espaces de fonctions

30.2.1 Limite inductive

DEFooFCLUooSGJIKJ

Définition 30.12 (limite inductive[260]).
*Soit un espace vectoriel E ainsi que des sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in I]}$ tels que $E = \bigcup_{i\in I} E_i$. Nous supposons avoir les seminormes $\{p_j^{(i)}\}_{j\in J_i}$ sur E_i. La topologie **limite inductive** sur E est celle définie par l'ensemble des seminormes p sur E telles que $p|_{E_i}$ soit continue pour tout $i \in I$.*

30.2.2 Les espaces classiques

30.13.
Ici, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et K est un compact de $\mathbb{R}^d$. Toutes les fonctions sont sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous rappelons que les seminormes $p_{K,m}$ sont définies en 30.9 et que la topologie engendrée par une seminorme est définie en 7.397.

En tant qu'ensemble, $\mathscr{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et dont le support est un compact dans Ω. L'ensemble $\mathscr{D}(K)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et dont le support est un compact dans K.

DefFGGCooTYgmYf

Définition 30.14 (Topologie sur $C^\infty(\Omega)$).
Sur $C^\infty(\Omega)$, la topologie des seminormes $p_{K,m}$ de la définition 30.9 où K parcourt les compacts de Ω et m parcourt $\mathbb{N}$.

30.15.
Pour l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans A, la notation devrait être $C_c^\infty(A)$, et non $\mathscr{D}(A)$. Hélas je ne suis pas consistant dans les notations.

DEFooJJJYooIrekSp

Définition 30.16 (Toplogie sur $C_c^\infty(K)$).
Soient un ouvert Ω dans $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'un compact $K \subset \Omega$. Nous notons

$$C^\infty(K) = \{f \in C^\infty(\Omega) \text{ tel que } \operatorname{supp}(f) \subset K\}. \tag{30.27}$$

La topologie dessus est celle des seminormes $(p_{K,m})_{m\in\mathbb{N}}$

EQooXGINooYJqmtD

$$p_{K,m}(f) = \max_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_K \tag{30.28}$$

30.17.
Quelque remarques.

(1) Il n'est dit que les fonctions dans $C^\infty(K)$ ont un support égal à K.

(2) L'espace $C^\infty(K)$ est égal à $C_c^\infty(K)$ parce que si f a un support compact dans K, elle a un support compact (un fermé dans un compact est compact[6]).

LEMooFKWMooSoqITJ

Lemme 30.18.
Si K est compact dans l'ouvert Ω dans $\mathbb{R}^n$, l'espace $C^\infty(K)$ est métrisable.

Démonstration. C'est la proposition 7.403 : la topologie sur $C_c^\infty(K)$ est donnée par la famille dénombrable de seminormes (30.28). □

DEFooVSCRooLyYBzT

Définition 30.19 (Bonne seminorme, topologie sur $C_c^\infty(\Omega)$)**.**
Soit un ouvert Ω dans $\mathbb{R}^n$. Une seminorme[7] p sur $C_c^\infty(\Omega)$ est ***bonne*** *si pour tout compact $K \subset \Omega$, la restriction $p|_{C_c^\infty(K)}$ est continue.*

Sur $C_c^\infty(\Omega)$, nous considérons la topologie des bonnes seminormes.

Cela n'est pas très explicite, mais heureusement nous n'aurons souvent pas besoin de plus que de la notion de convergence dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. Rappelons que la topologie d'un espace donne la notion de convergence par la définition 7.14.

PROPooRAZSooDttIbK

Proposition 30.20 ([793, 1])**.**
Nous avons

$$\phi_k \xrightarrow{C_c^\infty(\Omega)} \phi \tag{30.29}$$

si et seulement si il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que

(1) $\text{supp}(\phi_k) \subset K$ *pour tout k.*

(2) $\text{supp}(\phi) \subset K$.

(3) $\phi_k \xrightarrow{C_c^\infty(K)} \phi$.

Autrement dit nous avons convergence dans $C_c^\infty(\Omega)$ si et seulement si il existe un compact dans lequel tout se passe y compris la convergence.

Démonstration. En deux parties.

Sens direct, $\Rightarrow$.

Nous supposons que $\phi_k \xrightarrow{C_c^\infty(\Omega)} \phi$. Nous supposons, par l'absurde qu'il n'existe pas de compacts K dans Ω tel que $\text{supp}(\phi_k) \subset K$ et $\text{supp}(\phi) \subset K$.

(1) **Une sous-suite exhaustive**

Soit (K_i) une suite exhaustive de compacts pour Ω (lemme 7.359). La partie $\text{supp}(\phi)$ est un compact dans Ω, et le lemme 7.359(2) dit qu'il existe un n tel que $\text{supp}(\phi) \subset K_n$. Nous considérons une nouvelle suite exhaustive $K_i' = K_{i+n}$. Autrement dit, $\text{supp}(\phi) \subset K_i'$ pour tout i.

Nous oublions la suite (K_i) et nous ne travaillons plus qu'avec (K_i') que nous allons écrire (K_i) en oubliant le prime.

(2) **Les k_i**

Par hypothèse d'absurdité, nous avons alors qu'il n'existe aucun i contenant tous les $\text{supp}(\phi_k)$: pour tout k, il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que $\text{supp}(\phi_{k_i})$ n'est pas inclus dans K_i.

(3) **$\{k_i\}$ n'est pas borné** Nous prouvons que l'ensemble des K_i n'est pas borné. Par l'absurde, nous supposons que $k_i < n$ pour tout i. Nous posons alors

$$A = \bigcup_{k<n} \text{supp}(\phi_k). \tag{30.30}$$

[6] Lemme 7.121(1).
[7] Seminorme, définition 7.381.

La partie A est un compact en tant que union finie de compacts[8]. Elle est donc contenue dans K_s pour un certain $s \in \mathbb{N}$. De plus $\text{supp}(\phi_{k_i}) \subset A$ pour tout i. Nous avons donc, pour tout i :

$$\text{supp}(\phi_{k_i}) \subset A \subset K_s. \tag{30.31}$$

En posant $i = s$, nous trouvons que $\text{supp}(\phi_{k_s}) \subset K_s$, ce qui est faux. Nous en déduisons que $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée[9].

(4) **Sous-suite des ϕ_k**

Vu que (k_i) est non bornée, nous pouvons en extraire une sous-suite $(k'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $k'_i \to \infty$. Nous considérons alors la sous-suite des ϕ_k donnée par

$$\tilde{\phi}_i = \phi_{k'_i}. \tag{30.32}$$

Et nous oublions immédiatement la suite initiale ainsi que le tilde. Donc pour tout i, nous avons

$$\text{supp}(\phi_i) \not\subset K_i. \tag{30.33}$$

Pour tout n, il existe $x_n \notin K_n$ tel que $\phi_n(x_n) \neq 0$.

(5) **Une nouvelle seminorme**

Si $f \in C_c^\infty(\Omega)$, nous avons $\text{supp}(f) \subset K_r$ pour un certain r. Si $n > r$, nous avons $K_r \subset K_n$ et $x_n \notin K_n$, donc $x_n \notin K_r$. Bref, nous avons alors $f(x_n) = 0$ pour tout $n > r$.

Tout cela pour dire que $f(x_n) \neq 0$ pour seulement un nombre fini de n. Il nous est donc loisible de poser

$$\begin{aligned} p\colon C_c^\infty(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \max_{n\in\mathbb{N}} \Big|\frac{1}{\phi_n(x_n)} f(x_n)\Big|. \end{aligned} \tag{30.34}$$

Il s'agit bien d'un max parce qu'il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls. Vérifions que c'est une seminorme en vérifiant les conditions de la définition 7.381.

(5a) En tant que maximum de choses dans des valeurs absolues, nous avons $p(f) \geqslant 0$.

(5b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$p(\lambda f) = \max_n \Big|\frac{1}{\phi_n(x_n)}(\lambda f)(x_n)\Big| = |\lambda| \max_n |\dots| = |\lambda| p(f). \tag{30.35}$$

(5c) Nous avons

$$\begin{aligned} p(f+g) &= \max_n \Big|\frac{1}{\phi_n(x_n)}\big(f(x_n)+g(x_n)\big)\Big| && (30.36a)\\ &\leqslant \max_n \left[\Big|\frac{1}{\phi_n(x_n)} f(x_n)\Big| + \Big|\frac{1}{\phi_n(x_n)} g(x_n)\Big|\right] && (30.36b)\\ &\leqslant \max_n |\dots| + \max_n |\dots| && (30.36c)\\ &= p(f) + g(f). && (30.36d) \end{aligned}$$

Donc oui, p est une seminorme.

(6) **p est une bonne seminorme** Soit un compact K. Nous devons prouver que $p|_{C_c^\infty(K)}$ est continue. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \notin K$ pour tout $n \geqslant N$. Si $f \in C_c^\infty(K)$, nous avons

SUBEQSooYBSDooExlzPQ

$$\begin{aligned} p(f) &= \max_n \Big|\frac{1}{\phi_n(x_n)} f(x_n)\Big| && (30.37a)\\ &= \max_{n\leqslant N} \Big|\frac{1}{\phi_n(x_n)} f(x_n)\Big| && (30.37b)\\ &\leqslant \max_{n\leqslant N} \Big|\frac{1}{\phi_n(x_n)} \|f\|_K\Big| && (30.37c)\\ &= \|f\|_K \max_{n\leqslant N} \Big|\frac{1}{\phi_n(x_n)}\Big| && (30.37d)\\ &= c_K \|f\|_K. && (30.37e) \end{aligned}$$

[8] Lemme 7.124.

[9] À mon avis, et à l'avis de [793], il y a moyen d'adapter pour prouver que non seulement (k_i) est non bornée, mais en plus $k_i \to \infty$. Prouver cela permettrait d'éviter la sous-suite ci-dessous. Écrivez-moi si vous savez prouver que $k_i \to \infty$.

où c_K est une constante qui dépend de K.

Supposons que $f_k \xrightarrow{C_c^\infty(K)} f$. Pour prouver la continuité de p, nous devons prouver que $p(f)-p(f_k) \to 0$. Nous avons

$$|p(f) - p(f_k)| \leqslant p(f - f_k) \quad \text{lem. 7.383} \tag{30.38a}$$
$$\leqslant c\|f_k - f\|_K \quad \text{eq. (30.37).} \tag{30.38b}$$

La définition 30.16 donne la topologie sur $C_c^\infty(K)$ par les seminormes

$$p_{K,m}(f - f_k) = \sup_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha(f - f_k)\|_K. \tag{30.39}$$

La proposition 7.399 nous dit que $p_{K,m}(f - f_k) \to 0$ pour tout m. En particulier pour $m = 0$ nous avons $p_{K,0}(f - f_k) = \|f - f_k\|_K \to 0$.

Au final nous avons

$$|p(f) - p(f_k)| \leqslant c_K\|f - f_k\|_K \to 0, \tag{30.40}$$

et donc la continuité de p en f.

(7) **La contradiction**

Nous avons prouvé que p était une bonne seminorme. Nous devrions donc avoir $p(\phi_k-\phi) \to 0$. Vérifions ça …. Nous avons

$$p(\phi_k - \phi) = \max_n \Big|\frac{1}{\phi_n(x_n)}\big(\phi_k(x_n) - \phi(x_n)\big)\Big| \tag{30.41a}$$
$$= \max_n \Big|\frac{1}{\phi_n(x_n)}\phi_k(x_n)\Big| \quad \text{cf. justif.} \tag{30.41b}$$
$$\geqslant \Big|\frac{1}{\phi_k(x_k)}\phi_k(x_k)\Big| \tag{30.41c}$$
$$= 1. \tag{30.41d}$$

SUBEQooBPBBooWiXATm

Justification. Pour (30.41b). Nous avons fait plein de choix pour avoir $\phi(x_n) = 0$ pour tout n.

Cela contredit la possibilité d'avoir $p(\phi_k - \phi) \to 0$.

(8) **Précision**

Nous avons trouvé une sous-suite non convergente des ϕ_k originaux. Donc les ϕ_k de départ ne convergent pas.

(9) **Première conclusion**

Nous avons prouvé par l'absurde qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\text{supp}(\phi) \subset K$ et $\text{supp}(\phi_k) \subset K$ pour tout k.

(10) $\phi_k \xrightarrow{C_c^\infty(K)} \phi$ Nous devons encore prouver que $\phi_k \xrightarrow{C_c^\infty(K)} \phi$. Par la proposition 7.399, nous devons prouver que $q(\phi_k - \phi) \to 0$ pour toutes les seminormes $p_{k,m}$ de la définition 30.16.

Par hypothèse nous avons $\phi_k \xrightarrow{C_c^\infty(\Omega)}$, et donc convergence $p(\phi_k - \phi) \to 0$ pour toute bonne seminorme sur Ω. Oh, mais justement pour tout m, l'application $p_{K,m}$ est continue, et donc est une bonne seminorme. Nous avons donc bien

$$p_{K,m}(\phi_k - \phi) \to 0. \tag{30.42}$$

Sens réciproque, $\Leftarrow$.

Nous supposons qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que

(1) $\text{supp}(\phi_k) \subset K$ pour tout k,

(2) $\text{supp}(\phi) \subset K$,

(3) $\phi_k \xrightarrow{C_c^\infty(K)} \phi$,

et nous devons prouver que $\phi_k \xrightarrow{C_c^\infty(\Omega)} \phi$, c'est-à-dire que $q(\phi_k - \phi) \to 0$ pour toute bonne seminorme q sur Ω.

Soit une bonne seminorme q sur Ω. En particulier, sa restriction à $C_c^\infty(K)$ est continue. Par hypothèse, $\phi_k \xrightarrow{C_c^\infty(K)} \phi$; par continuité de q, nous avons $q(\phi_k) \to q(\phi)$. □

THOooDFNAooPnDSNN

Théorème 30.21 ([793]).
Soit T, une application linéaire sur $C_c^\infty(\Omega)$, c'est-à-dire $T \in \mathcal{L}\big(C_c^\infty(\Omega), \mathbb{C}\big)$. Elle est continue si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $c > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$|T(\phi)| \leqslant c \max_{|\alpha| \leqslant n} \|\partial^\alpha \phi\|_K. \tag{30.43}$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(K)$.

Démonstration. En deux parties

Sens direct, $\Rightarrow$.

Nous supposons que T est continue sur $C_c^\infty(\Omega)$. Nous utilisons le corolaire 7.407 qui dit qu'il existe une seminorme p (parmi celles qui définissent la topologie de $C_c^\infty(\Omega)$, c'est-à-dire une bonne seminorme) et $M > 0$ tels que

$$|T(\phi)| < Mp(\phi) \tag{30.44}$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Soit un compact K. Étant donné que p est bonne, elle est continue sur $C_c^\infty(K)$; nous pouvons donc appliquer le théorème 7.405 à la seminorme continue $q = p|_{C_c^\infty(K)}$. Il existe une seminorme de $C_c^\infty(K)$ (c'est-à-dire un $p_{K,m}$) et $c > 0$ tels que $q(\phi) \leqslant cp_{K,m}(\phi)$.

Pour tout $\phi \in C_c^\infty(K)$ nous avons donc

$$\begin{aligned}
|T(\phi)| &< Mp(\phi) && \text{(30.45a)}\\
&= Mq(\phi) && \text{(30.45b)}\\
&\leqslant Mcp_{K,m}(\phi) && \text{(30.45c)}\\
&\leqslant Mc \max_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha \phi\|_K. && \text{(30.45d)}
\end{aligned}$$

La constante recherchée est donc Mc.

Sens réciproque, $\Leftarrow$.

Soit une application linéaire T sur $C_c^\infty(\Omega)$. Nous supposons que pour tout compact K, il existe $c_K > 0$ et n_K tels que $|T(\phi)| \leqslant c_K \max_{|\alpha|<n_K} \|\partial^\alpha \phi\|_K$.

Soit une suite exhaustive de compacts (K_i) dans Ω. Nous avons des c_i et n_i tels que

EQooKRRTooKWTAap

$$|T(\phi)| \leqslant c_i \max_{|\alpha| \leqslant n_i} \|\partial^\alpha \phi\|_{K_i} \tag{30.46}$$

pour tout i.

Pour chaque i nous considérons $\phi_i \in C_c^\infty(K_i)$ tel que $\phi_i = 1$ sur K_{i-1}. Cela existe par le lemme d'Urysohn[10] parce que K_{i-1} est inclus dans l'ouvert $\text{Int}(K_i)$.

(1) **Les fonctions ϕ_i et ψ_i** Le lemme d'Urysohn[11], appliqué à K_{i-1} inclus dans l'ouvert $\text{Int}(K_i)$ nous permet de considérer des fonctions ϕ_i vérifiant :

(1a) $\text{supp}(\phi_i) \subset \text{Int}(K_i)$

(1b) $0 \leqslant \phi_i \leqslant 1$

(1c) $\phi_i = 1$ sur K_{i-1}.

Nous posons aussi $\phi_0 = 0$ et $\psi_i = \phi_i - \phi_{i-1}$.

(2) $\sum_n \psi_n(x) = 1$ Soit $x \in \Omega$. Soit $i_0 = \min\{i \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \in K_i\}$. Nous n'avons pas de garanties sur la valeur de $\phi_{i_0}(x)$. Par contre, si $i < i_0$, alors $\text{supp}(\phi_i) \subset K_i$ et par minimalité de i_0, nous avons $\phi_i(x) = 0$.

Si par contre $i > i_0$, alors $x \in K_{i-1}$, mais nous savons que $\phi_i = 1)$ sur K_{i-1}. Donc pour $i > i_0$ nous avons $\phi_i(x) = 1$.

Nous avons donc :

(2a) $\psi_{i_0-k}(x) = \phi_{i_0-k}(x) - \phi_{i_0-k-1}(x) = 0 - 0 = 0$.

(2b) $\psi_{i_0}(x) = \phi_{i_0}(x) - \phi_{i_0-1}(x) = \phi_{i_0}(x) - 0 = \phi_{i_0}(x)$

[10] Proposition 27.87.
[11] Proposition 27.87.

(2c) $\psi_{i_0+1}(x) = \phi_{i_0+1}(x) - \phi_{i_0}(x) = 1 - \phi_{i_0}(x)$
(2d) $\psi_{i_0+k}(x) = 1 - 1 = 0$ si $k > 1$.

Tout ça pour dire que

$$\sum_n \psi_n(x) = \psi_{i_0}(x) + \psi_{i_0+1}(x) = 1. \tag{30.47}$$

EQooWUUAooLCgDMP

Il y a seulement deux termes non nuls dans la somme.

(3) $\text{supp}(\psi_i) \subset K_i \setminus K_{i-2}$ SPooCFEYooJySTba Dans un premier temps nous prouvons que $\text{supp}(\psi_i) \subset K_i$. Si x est hors de K_i, alors il est également hors de K_{i-1}. Du coup$\phi_i(x) = 0$ et $\phi_{i-1}(x) = 0$. Nous avons alors $\psi_i(x) = 0$.
Si par contre $x \in K_{i-2}$, alors $x \in K_{i-2} \subset K_{i-1}$. Vu que $\phi_i = 1$ sur K_{i-1} et $\phi_{i-1} = 1$ sur K_{i-2}, nous avons $\psi_i(x) = 0$.

(4) **Quelques majorations** Un peu de calcul. Soit $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
|T(\phi)| &= |\sum_n T(\phi\psi_n)| && T \text{ est lin. et (30.47)} && \text{(30.48a)}\\
&\leqslant \sum_n |T(\phi\psi_n)| && && \text{(30.48b)}\\
&\leqslant \sum_n c_n \max_{|\alpha|\leqslant k_n} \|\partial^\alpha(\phi\psi_n)\| && \text{hyp. (30.46)} && \text{(30.48c)}\\
&\leqslant \sum_n c_n \max_{|\alpha|\leqslant k_n} \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|(\partial^\beta\phi)(\partial^{\alpha-\beta}(\psi_n))\|_{K_n} && \text{lem. 30.11} && \text{(30.48d)}\\
&= \sum_n c_n \max_{|\alpha|\leqslant k_n} \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|(\partial^\beta\phi)(\partial^{\alpha-\beta}(\psi_n))\|_{K_n\setminus K_{n-2}} && \text{point (3)} && \text{(30.48e)}\\
&\leqslant \sum_n c_n \max_{|\alpha|\leqslant k_n} \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta\phi\|_{K_n\setminus K_{n-2}} \|\partial^{\alpha-\beta}\psi\|_{K_n\setminus K_{n-2}}. && && \text{(30.48f)}
\end{aligned}$$

(5) **Une bonne seminorme** Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}
p\colon C_c^\infty(\Omega) &\to \mathbb{R}\\
\phi &\mapsto \sum_n c_n \max_{|\alpha|\leqslant k_n} \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^{\alpha-\beta}\psi_n\|_{K_n} \|\partial^\beta\phi\|_{K_n\setminus K_{n-2}}.
\end{aligned} \tag{30.49}$$

Pour vérifier que ce p est une seminorme, il suffit de vérifier les conditions de la définition 7.381, et c'est facile. Pour prouver que c'est une bonne[12] seminorme, c'est un peu plus chaud, et il nous faudra utiliser le théorème 7.405(2).

Soit un compact K dans Ω, et considérons la restriction $p\colon C_c^\infty(K) \to \mathbb{R}$. Il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_{n_0}$. Pour $\phi \in C_c^\infty(K)$, nous avons alors $\text{supp}(\phi) \subset K \subset K_{n_0}$, et donc

$$\|\partial^\beta\phi\|_{K_{n_0+2}\setminus K_{n_0}} = 0. \tag{30.50}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
p(\phi) &= \sum_{n\leqslant n_0+2} c_n \max_{|\alpha|\leqslant k_n} \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^{\alpha-\beta}\psi_n\|_{K_n} \|\partial^\beta\phi\|_{K_n\setminus K_{n-2}} && \text{(30.51a)}\\
&\leqslant \max_{|\beta|\leqslant k_{n_0+2}} \|\partial^\beta\phi\|_K \sum_{n\leqslant n_0+2} c_n \max_{|\alpha|\leqslant k_n} \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^{\alpha-\beta}\psi_n\| && \text{(30.51b)}\\
&= c' \max_{|\beta|\leqslant k_{n_0+2}} \|\partial^\beta\phi\|_K && \text{(30.51c)}\\
&= c' p_{K,k_{n_0+2}}(\phi) && \text{eq. (30.28)} \quad \text{(30.51d)}
\end{aligned}$$

où

$$c' = \sum_{n\leqslant n_0+2} c_n \max_{|\alpha|\leqslant k_n} \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^{\alpha-\beta}\psi_n\|. \tag{30.52}$$

Par le théorème 7.405(2), nous déduisons que p est continue.

[12] Bonne seminorme, définition 30.19

(6) **Conclusion** Nous avons montré que $|T(\phi)| \leqslant p(\phi)$ pour une bonne seminorme sur Ω. Le corolaire 7.407 conclut que T est continue.

□

30.2.3 Espaces de fonctions et topologie inductive

PROBooQXUDooJwnzpn

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 30.22
Je ne suis pas tout à fait sûr que la proposition suivante 30.23 soit vraie. Il y a peut-être une preuve dans [260].

PROPooUFJJooCoIdoI

Proposition 30.23.
La topologie sur $\mathscr{D}(\Omega)$ est la limite inductive[13] *des $\mathscr{D}(K_i)$ où (K_i) est une suite exhaustive de compacts dans Ω.*

30.2.4 Convergence dans les fonctions test

LemXXwDjui

Lemme 30.24 (Convergence dans $\mathscr{D}(K)$)**.**
Si α est un multiindice et si $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(K)} \varphi$, alors nous avons

$$\partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow{unif} \partial^\alpha \varphi. \tag{30.53}$$

Démonstration. Quitte à considérer la suite $\varphi_n - \varphi$ nous pouvons supposer $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(K)} 0$. Nous avons

$$\|\partial^\alpha \varphi_n\| \leqslant \sum_{\mu \leqslant \alpha} \|\partial^\mu \varphi_n\|_{K,\infty}. \tag{30.54}$$

Vu que le membre de droite tend vers zéro, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \|\partial^\alpha \varphi_n\|_{K,\infty} \to 0, \tag{30.55}$$

ce qui revient à dire que $\partial^\alpha \varphi_n$ converge uniformément sur K vers $\partial^\alpha \varphi$. □

LemWEGpemo

Lemme 30.25.
Si une fonction $f\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est continue sur chacun des $\mathscr{D}(K)$ pour tout K compact dans Ω alors est continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$.

Démonstration. Soit I ouvert dans $\mathbb{R}$; nous devons trouver un ouvert $\mathcal{O}$ dans $C^\infty(\Omega)$ tel que $f^{-1}(I) = \mathscr{D}(\Omega) \cap \mathcal{O}$. Vu que f est continue sur chacun des $\mathscr{D}(K)$ avec K compact dans Ω, pour tout tel compact nous avons un ouvert $\mathcal{O}_K$ dans $\mathscr{D}(K)$ tel que $f^{-1}(I) \cap \mathscr{D}(K) = \mathcal{O}_K$. En tant qu'union d'ouverts[14], l'ensemble

$$\mathcal{O} = \bigcup_{K \text{ compact de } \Omega} \mathcal{O}_K \tag{30.56}$$

est ouvert dans $C^\infty(\Omega)$. Si $\phi \in f^{-1}(I)$, nous avons $\phi \in \mathscr{D}(K)$ pour un certain K compact de Ω, donc $f^{-1}(I) \subset \mathcal{O}$. À fortiori nous avons $f^{-1}(I) \subset \mathcal{O} \cap \mathscr{D}(\Omega)$.

Dans l'autre sens, si $\phi \in \mathcal{O}$, alors ϕ est dans un des $\mathcal{O}_K$ et donc dans $f^{-1}(I)$. Nous avons donc bien $f^{-1}(I) = \mathscr{D}(\Omega) \cap \mathcal{O}$. □

ThoXYADBZr

Théorème 30.26 (Convergence dans $\mathscr{D}(\Omega)$[260])**.**
Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{D}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Nous avons $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ si et seulement si il existe K compact dans Ω tel que $\varphi_n \in \mathscr{D}(K)$ pour tout n et $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(K)} \varphi$.

Démonstration. Supposons que $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ et qu'il n'existe pas de compacts contenant tous les supports des φ_n. Alors pour tout compact de Ω il existe un n tel que le support de φ_n ne soit pas dans K. Nous considérons une suite de compacts (K_i) tels que $\text{Int}(K_n) \subset K_{n+1}$ et $\Omega = \bigcup_n K_n$. Une telle suite existe par le lemme 7.359. Ensuite nous construisons des sous-suites de la façon suivante. D'abord $L_1 = K_1$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ est choisi de telle sorte que φ_{n_1} ait un support non contenu dans L_1. Ensuite L_i est un compact de la suite

[13] Définition 30.12.
[14] Voir définition 7.1.

(K_n) choisi plus loin que L_{i-1} et tel que $\varphi_{n_{i-1}} \in \mathscr{D}(L_i)$. Le nombre n_i est alors choisi plus grand que n_{i-1} de telle sorte que $\varphi_{n_i} \notin \mathscr{D}(L_i)$. Ce faisant, en posant $\phi_i = \varphi_{n_i}$ nous avons

$$\phi_i \in \mathscr{D}(L_{i+1}) \setminus \mathscr{D}(L_i) \tag{30.57}$$

et $\text{Int}(L_n) \subset L_{n+1}$ et $\Omega = \bigcup_n L_n$. Étant donné que (ϕ_i) et une sous-suite de (φ_i) nous avons encore $\phi_i \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$.

Soit $i \in \mathbb{N}$. Nous allons utiliser le corolaire 27.168 de la seconde forme géométrique du théorème de Hahn-Banach pour séparer les parties $\{\phi_i\}$ (compact) et $\mathscr{D}(L_i)$ (sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{D}(\Omega)$) dans $\mathscr{D}(\Omega)$. Nous avons $f_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} f_i(\phi_i) > \alpha & \text{(30.58a)} \\ f_i\big(\mathscr{D}(L_i)\big) = 0. & \text{(30.58b)} \end{cases}$$

Nous introduisons la fonction définie sur $\mathscr{D}(\Omega)$ par

$$p(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{f_i(\phi)}{|f_i(\phi_i)|}. \tag{30.59}$$ EqJCqeXti

Si $\phi \in \mathscr{D}(L_k)$, alors $f_k(\phi) = 0$ et même $f_l(\phi) = 0$ pour tout $l \geqslant k$. Donc pour chaque k, la somme définissant p est finie sur $\mathscr{D}(L_k)$. Nous en déduisons que p est continue sur chacun des $\mathscr{D}(L_k)$ et donc sur $\mathscr{D}(\Omega)$ par le lemme 30.25.

L'image de la suite convergente $\phi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ par p doit être bornée parce que p est continue. Mais dans la somme (30.59), tous les termes sont positifs et en particulier le terme $i = k$ vaut k, donc $p(\phi_k) \geqslant k$, ce qui contredit le fait que l'image de la suite soit bornée. Nous en déduisons donc l'existence d'un compact K tel que $\varphi_n \in \mathscr{D}(K)$ pour tout n.

Nous devons encore prouver que $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(K)} \varphi$ pour ce choix de K. Vu que $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$, le lemme 7.81 nous dit que nous avons aussi $\varphi_n \xrightarrow{C^\infty(\Omega)} \varphi$, ce qui signifie que pour tout K et m nous avons

$$p_{K,m}(\varphi_n - \varphi) \to 0. \tag{30.60}$$

En particulier pour le K fixé plus haut nous avons $p_m(\varphi_n - \varphi) \to 0$, c'est-à-dire que $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(K)} \varphi$.

□ PropQAEVcTi

Proposition 30.27.
Soit un compact K de Ω.

(1) L'espace $\mathscr{D}(K)$ est complet.

(2) L'espace $\mathscr{D}(K)$ est métrique.

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que $\mathscr{D}(K)$ est complet. Ensuite nous allons montrer que sa topologie peut être donnée par une distance.

(1) **Complet** Nous considérons une suite de Cauchy (φ_n) dans $\mathscr{D}(K)$ au sens de la définition 7.310. Soient $\epsilon > 0$ et $i \in \mathbb{N}$; si k et l sont assez grands nous avons

$$\varphi_k - \varphi_l \in B_i(0, \epsilon). \tag{30.61}$$

En particulier pour $i = 0$ nous avons l'inégalité

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|_\infty \leqslant \epsilon, \tag{30.62}$$

La suite (φ_n) est donc de Cauchy dans $\big(C(K), \|.\|_\infty\big)$ et y converge donc par complétude, proposition 12.383. Il existe donc une fonction $\varphi \in C(K)$ telle que

$$\varphi_n \xrightarrow{unif} \varphi. \tag{30.63}$$

Notre jeu à présent est de prouver que $\varphi \in \mathscr{D}(K)$, c'est-à-dire qu'elle est de classe C^∞.

Soit un multiindice $\alpha = \mu_1, \ldots, \mu_n, i$. Si k et l sont assez grands nous avons

$$\|\partial^\alpha(\varphi_k - \varphi_l)\|_\infty \leqslant \epsilon, \tag{30.64}$$

c'est-à-dire que

$$\|\partial_i(\partial^\mu \varphi_k) - \partial_i(\partial^\mu \varphi_l)\|_\infty \leqslant \epsilon. \tag{30.65}$$

Si nous notons $\psi_k = \partial^\mu \varphi_k$ cela signifie que $(\partial_i \psi_n)$ est une suite de Cauchy dans $\big(C(K), \|.\|_\infty\big)$. Elle y converge donc et il existe une fonction $g_i \in C(K)$ telle que

$$\partial_i \psi_n \xrightarrow{unif} g_i. \tag{30.66}$$

Dans ce cas le théorème 12.401 nous indique que g_i est de classe C^n, c'est-à-dire que $\varphi \in C^{n+1}(K)$.

(2) **Métrique**

La proposition 7.404 nous dit que la topologie donnée par l'écart

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{k \geqslant 1} \min\{\frac{1}{k}, p_{k-1}(\varphi_1 - \varphi_2)\} \tag{30.67}$$

est la même que celle de $\mathscr{D}(K)$. Il reste à montrer que cette formule est bien une distance au sens de la définition 7.139.

(2a) Nous avons bien $d(\varphi_1, \varphi_2) \geqslant 0$ parce que tous les éléments du supremum et du minimum sont positifs.

(2b) Si $d(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ alors pour tout k nous devons avoir $p_{k-1}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$; en particulier pour $k = 1$ cela donne $\varphi_1 = \varphi_2$.

(2c) Nous avons

$$p_k(\varphi_1 - \varphi_2) = p_k\big(-(\varphi_2 - \varphi_1)\big) = p_k(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{30.68}$$

en utilisant la propriété (1) de la définition 7.381 de seminorme.

(2d) Nous avons

$$p_k(\varphi_1 - \varphi_2) = p_k(\varphi_1 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_2) \leqslant p_k(\varphi_1 - \varphi_3) + p_k(\varphi_3 - \varphi_2) \tag{30.69}$$

en utilisant la propriété (2) de la définition 7.381.

□

Notons que la proposition 7.404 nous dit que $\mathscr{D}(K)$ est complet tout autant pour la topologie des seminormes que pour celle de la distance que nous venons de décrire. Ces deux topologies sont les mêmes. Étant métrique et complet, l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ et donc de Baire par le théorème 7.420. Ce qui est bien avec ces deux topologies identiques c'est qu'on peut utiliser la propriété de Baire même en ne parlant que des seminormes.

30.3 Distributions

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, alors l'ensemble $\mathscr{D}(\Omega)$ est contenu dans $C^\infty(\Omega)$. Nous allons commencer par définir une topologie sur $C^\infty(\Omega)$ et ensuite donner à $\mathscr{D}(\Omega)$ la topologie induite[15].

DefPZDtWVP

Définition 30.28 (Distribution)**.**
*Une **distribution** sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$. C'est donc un élément de $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

Le théorème suivant donne quelques façons de vérifier qu'une forme linéaire soit continue. En particulier il nous dit que pour prouver qu'une forme linéaire est une distribution il suffit de prouver la continuité séquentielle.

ThoVDDBnVn

Théorème 30.29 ([260, 794])**.**
Soit T une forme linéaire sur $C_c^\infty(\Omega)$. Nous avons équivalence entre les points suivants.

ITEMooQXXDooDleaQD

(1) T est continue.

ITMooMDODooPULDzj

(2) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $c_K > 0$ et $n_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$|T(\varphi)| \leqslant c_K \max_{|\alpha| \leqslant n_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_K. \tag{30.70}$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(K)$.

[15] Définition 7.27.

ItemSPvoijoii

(3) *Pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $m_K \in \mathbb{N}$ et $C_K \geqslant 0$ tels que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(K)$ nous ayons*

$$\big|T(\varphi)\big| \leqslant C_K p_{K,m_K}(\varphi) = C_K \sum_{|\mu|\leqslant m_K} \|\partial^\mu \varphi\|_K \tag{30.71}$$

voir la définition de la la seminorme donnée en (30.15).

ITEMooBXFSooYtAXjy

(4) *T est séquentiellement continue sur $C_c^\infty(\Omega)$.*

ITEMooXZJPooYyQQod

(5) *T est séquentiellement continue en 0.*

ITEMooPTDMooHBrnXk

(6) *Pour tout compact $K \subset \Omega$, la restriction de T à $C_c^\infty(K)$ est continue.*

Un certain nombre d'ouvrages prennent le point (3) comme la définition d'une distribution.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) si et seulement si (2)** C'est le théorème 30.21.

(2) **(2) ⇒ (3)** Notons s le nombre de termes dans la somme $|\mu| < n_K$. Nous avons

$$\begin{aligned}
|T(\varphi)| &\leqslant c_K \max_{|\alpha|\leqslant n_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_K && (30.72a)\\
&< c_K s \max_{|\alpha|\leqslant n_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_K && (30.72b)\\
&= c_K \sum_{|\mu|\leqslant n_K} \Big(\max_{|\alpha|\leqslant n_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_K \Big) && (30.72c)\\
&\leqslant c_K \sum_{|\mu|\leqslant n_K} \|\partial^\mu \varphi\|_K. && (30.72d)
\end{aligned}$$

(3) **(3) ⇒ (2)** Même principe : chaque terme de la somme est majoré par le max. On adapte la constante en multipliant par le nombre de termes.

(4) **(3) ⇒ (4)** Nous considérons une suite convergente $\varphi_k \xrightarrow{C_c^\infty(\Omega)} \varphi$. En vertu de la proposition 30.20, nous avons un compact K dans Ω tel que $\varphi_k \xrightarrow{C_c^\infty(K)} \varphi$. Pour un tel compact nous avons

$$\begin{aligned}
|T(\varphi_k) - T(\varphi)| &= |T(\varphi_k - \varphi)| && (30.73a)\\
&\leqslant c_k \max_{|\alpha|\leqslant n_k} \|\partial^\alpha(\varphi_k - \varphi)\|_K \qquad \text{pcq. (3)⇒(2).} && (30.73b)\\
&= c_K p_{n_K}(\varphi_k - \varphi) && (30.73c)
\end{aligned}$$

où p_{n_K} est une des seminormes (30.28) définissant la topologie sur $C_c^\infty(K)$. Par la propositon 7.399, nous avons alors $p_{n_K}(\varphi_k - \varphi) \to 0$.

(5) **(4)⇒ (5)** À fortiori.

(6) **(5)⇒ (6)** Soit un compact K dans Ω. Nous faisons plusieurs étapes.

(6a) **$T|_{C_c^\infty(K)}$ est séquentiellement continue** Soient φ_k et φ dans $C_c^\infty(K)$ tels que $\varphi_k \xrightarrow{C_c^\infty(K)} \varphi$. Par la proposition 30.20, nous avons $\varphi_k \xrightarrow{C_c^\infty(\Omega)} \varphi$. Par hypothèse sur la séquentielle continuité de T[16] nous avons alors

$$T(\varphi_k) \to T(\varphi), \tag{30.74}$$

ce qui prouve que la restriction de T à $C_c^\infty(K)$ est séquentiellement continue.

(6b) **Topologie sur $C_c^\infty(K)$** Elle est métrisable par le lemme 30.18.

(6c) **Conclusion** Vu que $C_c^\infty(K)$ est métrisable, la proposition 7.157 dit que continuité séquentielle y est équivalente à la continuité. L'application T étant séquentiellement continue, elle est continue.

(7) **(6)⇒ (1)** C'est le lemme 30.25.

□

[16] L'hypothèse est juste en 0, mais comme T est linéaire, elle est séquentiellement continue partout.

DefASmjVaT

Définition 30.30 (Topologie sur $\mathscr{D}'(\Omega)$)**.**
*Nous munissons l'espace $\mathscr{D}'(\Omega)$ de la **topologie $*$-faible**, c'est-à-dire celle de la famille de seminormes*

$$\begin{aligned} p_\varphi\colon \mathscr{D}'(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ T &\mapsto \big|T(\varphi)\big| \end{aligned} \tag{30.75}$$

avec $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Oui, c'est bien une famille de seminormes indicée par l'ensemble $\mathscr{D}(\Omega)$. Il n'y en a donc à priori pas du tout une quantité dénombrable.

PropEUIsNhD

Proposition 30.31 (Convergence au sens des distributions)**.**
Nous avons $T_n \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T$ si et seulement si $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Démonstration. La convergence $T_n \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T$ signifie que l'on ait $p_\varphi(T_n - T) \to 0$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, ce qui en retour signifie que

$$\big|(T_n - T)(\varphi)\big| \to 0. \tag{30.76}$$

□

Cette proposition suppose que l'on ait une distribution T qui vérifie $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$ et conclut qu'on a une convergence dans les distributions. Le théorème suivant est plus fort : il va seulement supposer que $T_n(\varphi)$ converge dans $\mathbb{C}$ et va conclure que $T\colon \varphi \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi)$ est une distribution.

Définition 30.32.
Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^d$ telle que $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, alors nous définissons la distribution $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx. \tag{30.77}$$

Théorème 30.33 ([795])**.**
Soit (T_n) une suite dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ et nous supposons que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ la suite $\big(T_n(\varphi)\big)$ converge dans $\mathbb{C}$. Alors il existe $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T$.

PROPooYAJSooMSwVOm

Proposition 30.34.
L'application

$$\begin{aligned} i\colon L^2(\Omega) &\to \mathscr{D}'(\Omega) \\ f &\mapsto T_f \end{aligned} \tag{30.78}$$

est une injection continue.

Démonstration. Le fait que ce soit une injection est le fait que si $T_f = T_g$ alors pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ nous avons $\langle f - g, \phi\rangle = 0$, et cela implique que $f - g$ est nulle presque partout en tant que fonction et est simplement nulle en tant que classe de fonction dans L^2.

En ce qui concerne la continuité, il suffit de la prouver en zéro (par linéarité). Soit donc $f_n \xrightarrow{L^2} 0$ et montrons que $T_{f_n} \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T_0$. Pour prouver cela, la proposition 30.31 nous indique qu'il est suffisant de tester $T_n(\phi) \to 0$ pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Notons que si $\phi \in \mathscr{D}$ a fortiori $\phi \in L^2$. Nous avons

$$T_{f_n}(\phi) = \int_\Omega f_n\phi \leqslant \|f_n\phi\|_{L^1} \leqslant \|f_n\|_2\|\phi\|_2 \to 0 \tag{30.79}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Hölder de la proposition 27.39. □

Cette proposition permet de donner un sens à des phrases du type « Soit une distribution T. Si $T \in L^2$, alors … ». Cela signifie qu'il existe $u \in L^2$ tel que $T = T_u$. Notons que dans ce cas, la distribution est définie sur L^2 et non seulement sur $\mathscr{D}$.

30.3.1 Multiplication d'une distribution par une fonction

DefZVRNooDXAoTU

Définition 30.35.
Si $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et si $f \in C^\infty(\Omega)$ nous définissons la distribution fT par

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi). \tag{30.80}$$

DefTDkrqkA

Souvent écrit sous la forme plus compacte $\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle$.

Cela a un sens parce que si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ alors $f\varphi$ est aussi dans $\mathscr{D}(\Omega)$.

Cette définition est motivée par ce que l'on ferait pour une distribution à densité. Si T est une distribution de densité notée également T, nous avons $T(\phi) = \int T(x)\phi(x)$ et donc

$$(fT)(\phi) = \int (fT)(x)\phi(x) = \int T(x)f(x)\phi(x) = \int T(x)(f\phi)(x) = T(f\phi). \tag{30.81}$$

En ce qui concerne les distributions tempérées, nous pouvons définir le produit avec une fonction $f \in \mathscr{S}(\Omega)$ par la même formule : si $f, \varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$ alors le produit $f\varphi$ est encore Schwartz. Notons toutefois que nous ne pouvons pas définir fT dans $\mathscr{S}'(\Omega)$ si f est seulement dans $C^\infty(\Omega)$.

30.3.2 Dérivée de distribution

PropKJLrfSX

Proposition-Définition 30.36.
Soit T une distribution sur Ω et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors la formule

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha\varphi) \tag{30.82}$$

définit une distribution $\partial^\alpha T$.

*Cette distribution $\partial^\alpha T$ sera la **dérivée distributionnelle** de T. Notons que le même résultat est encore valide pour des distributions tempérées, et la démonstration est la même.*

Démonstration. La forme linéaire $\partial^\alpha T$ sera continue si elle est séquentiellement continue par le théorème 30.29. Nous considérons donc une suite $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ et nous vérifions que

$$\lim_{n\to\infty} (\partial^\alpha T)(\varphi_n) = (\partial^\alpha T)(\varphi). \tag{30.83}$$

D'abord T étant une distribution (et donc continue) nous pouvons la permuter avec la limite :

$$\lim_{n\to\infty} (\partial^\alpha T)(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha\varphi_n) = (-1)^{|\alpha|}T\big(\lim_{n\to\infty} \partial^\alpha\varphi_n\big). \tag{30.84}$$

Notons qu'à gauche la limite est une limite dans $\mathbb{R}$ tandis qu'à droite c'est une limite dans $\mathscr{D}(\Omega)$. Ensuite le lemme 30.24 nous dit que l'hypothèse $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ signifie en particulier que nous avons un compact $K \subset \Omega$ contenant tous les supports des φ_n et que $\partial^\alpha\varphi_n$ converge uniformément (sur K et donc sur Ω) vers $\partial^\alpha\varphi$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} (\partial^\alpha T)(\varphi_n) = (-1)^{|\alpha|}T\big(\lim_{n\to\infty} \partial^\alpha\varphi_n\big) = (-1)^{|\alpha|}T\big(\partial^\alpha\varphi\big) = (\partial^\alpha T)(\varphi), \tag{30.85}$$

ce qui est la relation demandée. □

Le lemme suivant montre une compatibilité entre la dérivée des distributions, la dérivée faible et l'injection de L^2 dans l'espace des distributions.

LEMooQRUOooWVjCAV

Lemme 30.37.
Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^2(\Omega)$. Alors nous avons

$$\partial_i(T_f) = T_{\partial_i f} \tag{30.86}$$

où la dérivée à droite est la dérivée faible définie en 30.7.

Démonstration. En utilisant la définition de la dérivation de distribution, pour tout $\phi \in \mathscr{D}$ nous avons

$$\partial_i(T_f)\phi = -T_f(\partial_i\phi) = -\langle f, \partial_i\phi\rangle = \langle \partial_i f, \phi\rangle = T_{\partial_i f}(\phi). \tag{30.87}$$

Nous avons utilisé la définition (30.14) de la dérivée faible. □

Nous avons déjà vu dans l'exemple 30.3 que la fonction de Heaveside n'a pas de dérivée faible. Nous allons à présent voir que cette fonction a une dérivée au sens des distributions. Intuitivement, la fonction de Heaveside a une dérivée nulle partout sauf en $x = 0$ où sa dérivée serait infinie ; nous nous attendons à un delta de Dirac.

PROPooVUDVooAlwZzB

Proposition 30.38.
La dérivée de la fonction de Heaveside

$$\begin{aligned} H\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & si\ x \leqslant 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{30.88}$$

est le delta de Dirac.

Démonstration. Par définition, la dérivée de H au sens des distributions est la distribution H' qui fait

$$H'(\varphi) = -\langle H, \varphi' \rangle \tag{30.89}$$

pour tout élément $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Un petit calcul :

$$\begin{aligned} -\langle H, \varphi' \rangle &= -\int_{\mathbb{R}} H(t)\varphi'(t)dt && \text{(30.90a)} \\ &= -\int_0^{\infty} \varphi'(t)dt && \text{(30.90b)} \\ &= -\lim_{x\to\infty} \int_0^x \varphi'(t)dt && \text{(30.90c)} \\ &= -\lim_{x\to\infty} \big(\varphi(x) - \varphi(0)\big) && \text{(30.90d)} \\ &= \varphi(0). && \text{(30.90e)} \end{aligned}$$

SUBEQooMRMBooEGeDra SUBEQooZDSDooTbzgWD SUBEQooSUAHooQmjccr

Justifications :

- Pour (30.90b), c'est que $H(t) = 0$ pour $t \in]-\infty, 0[$.
- Pour (30.90c), c'est le lemme 14.261.
- Pour (30.90d), c'est le corolaire 14.300.

□

30.3.3 Ordre et support d'une distribution

DefVILMooBIYerO

Définition 30.39 (support d'une distribution[778])**.**
*Soit T une distribution. Le **support** de T est le complémentaire de l'union des ouverts $\mathcal{O}$ tels que $T(\varphi) = 0$ pour tout φ à support dans $\mathcal{O}$.*

DefXAHIooFeiRMB

Définition 30.40.
*Si T est une distribution sur Ω, nous disons que T est d'**ordre** inférieur ou égal à $p \in \mathbb{N}$ si pour tout compact K de Ω, il existe $C_K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(K)$,*

$$\big|\langle T, \varphi \rangle\big| \leqslant C_K \max_{|\alpha|\leqslant p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty. \tag{30.91}$$

Ici α est un multiindice.

La distribution T est d'ordre p si elle est d'ordre inférieur ou égal à p mais pas à $p-1$.

Pour la proposition suivante, on peut se remémorer la définition 30.14 de la topologie sur $C^\infty(\Omega)$.

PROPooSQPHooDPOrqK

Proposition 30.41 ([796])**.**
Restriction entre C^∞ et $\mathscr{D}$.

(1) Si $T \in C^\infty(\Omega)'$, alors la restriction de T à $\mathscr{D}(\Omega)$ est une distribution à support[17] compact.

[17] Définition 30.39.

(2) *Si T est une distribution à support compact alors elle se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $C^\infty(\Omega)$.*

PropZLUEooHcVxQj

Proposition 30.42 ([260]).
Une distribution à support compact est d'ordre fini.

LemYHRDooOdSnnK

Lemme 30.43 ([433]).
Soit $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tels que $\text{supp}(u) \cap \text{supp}(\phi) = \varnothing$. Alors $\langle u, \phi\rangle = 0$.

Démonstration. Soit $x \notin \text{supp}(u)$. Alors il existe un voisinage V_x de x tel que $\langle u, \psi\rangle = 0$ pour tout $\psi \in \mathscr{D}(V_x)$. En particulier, si $x \in \text{supp}(\phi)$, alors x n'est pas dans le support de u et les ensembles $\{V_x \text{ tel que } x \in \text{supp}(\phi)\}$ recouvrent $\text{supp}(\phi)$. Cependant ϕ est à support compact et nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini de $\text{supp}(\phi)$: il existe $x_1, \dots, x_p$ tels que

$$\text{supp}(\phi) \subset \bigcup_{i=1}^{p} V_{x_i}. \tag{30.92}$$

Nous prenons une partition de l'unité[18] subordonnée à ce recouvrement. C'est-à-dire des fonctions $\chi_i \in \mathscr{D}(V_{x_i})$ telles que pour tout $x \in \text{supp}(\phi)$,

$$\sum_{i=1}^{p} \chi_i(x) = 1. \tag{30.93}$$

En particulier nous avons $\sum_i \chi_i(x)\phi(x) = \phi(x)$, et donc

$$\langle u, \phi\rangle = \langle u, \sum \chi_i\phi\rangle = \sum \langle u, \chi_i\phi\rangle = 0 \tag{30.94}$$

parce que $\text{supp}(\chi_i\phi) \subset V_{x_i}$. □

Lemme 30.44 ([433]).
Si u est une distribution d'ordre fini N sur $\mathbb{R}$, si $\text{supp}(u) = \{x_0\}$ et si

$$\phi(x_0) = \dots = \phi^{(N)}(x_0) = 0 \tag{30.95}$$

alors $\langle u, \phi\rangle = 0$.

Démonstration. Les fonctions plateaux dont nous avons parlé dans la section 15.14.1 nous permettent de considérer une fonction $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{B(0,1)} \\ 0 & \text{si } |x| > 2 \end{cases} \tag{30.96}$$

Ensuite nous posons $\chi_n(x) = \chi\big(n(x-x_0)\big)$. Par conséquent $\chi_n(x_0) = \chi(0) = 1$ et même $\chi_n(x_0+\epsilon) = \chi(\epsilon) = 1$ tant que ϵ est plus petit que disons $\frac{1}{2n}$ pour être sûr. Nous en déduisons que la fonction $1 - \chi_n$ s'annule sur un voisinage de x_0 et que donc x_0 n'est pas dans le support de $1 - \chi_n$. Donc $\text{supp}(1 - \chi_n) \cap \text{supp}(u) = \varnothing$ et le lemme 30.43 est utilisable : $\langle u, (1 - \chi_n\phi)\rangle = 0$, ou encore :

$$\langle u, \phi\rangle = \langle u, \chi_n\phi\rangle \tag{30.97}$$

pour tout n. Vu que le but est de prouver que $\langle u, \phi\rangle = 0$, nous allons prouver que

$$|\langle u, \chi_n\phi\rangle| \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{30.98}$$

Dans ce dessein nous posons

$$\|f\|_n = \sup_{x \in \overline{B(0,\frac{2}{n})}} \|f(x)\| \tag{30.99}$$

et

$$\|f\|_{(p)} = \sup_{i \leqslant p} \|\partial^i f\|_\infty. \tag{30.100}$$

La distribution u est d'ordre fini N, et nous en écrivons la définition 30.40 en prenant $\text{supp}(\chi_n\phi)$ en tant que K :

$$\big|\langle u, \chi_n\phi\rangle\big| \leqslant C \max_{k \leqslant N} \|\partial^k(\chi_n\phi)\|_\infty. \tag{30.101}$$

[18] Théorème 27.88.

En remplaçant le maximum par une somme de $k=0$ à $k=N$, nous majorons. De plus le support de χ_n étant contenu dans $B_n=B(x_0,2/n)$ nous ne changeons rien en utilisant $\|.\|_n$ au lieu de $\|.\|_\infty$. Donc

$$|\langle u,\chi_n\phi\rangle|\leqslant C\sum_{k=0}^{N}\|\partial^k(\chi_n\phi)\|_n\leqslant C\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\|\partial^i\chi_n\|_n\|\partial^{k-i}\phi\|_n. \tag{30.102}$$

Notons que la seconde inégalité est une inégalité du type $\|fg\|\leqslant\|f\|\|g\|$. En dérivant un petit peu nous trouvons que

$$(\partial^i\chi_n)(x)=n^i(\partial^i\chi)\big(n(x-x_0)\big). \tag{30.103}$$

Donc[19]

$$\|\partial^i\chi_n\|_n=\sup_{x\in B_n}n^i\big|(\partial^i\chi)\big(n(x-x_0)\big)\big|=n^i\sup_{y\in[-2,2]}\big|(\partial^i\chi)(y)\big|=n^i\|\partial^i\chi\|_\infty. \tag{30.104}$$ EqFKWTooFfZoSM

Nous pouvons donc remplacer $\|\partial^i\chi_n\|_n$ par $n^i\|\partial^i\chi\|_\infty$.

D'autre part nous voulons majorer $\|\partial^{k-i}\phi\|_n$ par quelque chose ne dépendant ni de k ni de i. Nous faisons le théorème des accroissements finis 10.337 : $\|\partial^l\phi\|_n\leqslant\frac{2}{n}\|\partial^{l+1}\phi\|_n$. Ce n au dénominateur est salutaire parce que nous avions un n^i apparu à cause du remplacement (30.104). Nous faisons donc $i+1$ fois le théorème des accroissements finis :

$$\|\partial^{k-i}\phi\|_n\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^{i+1}\|\partial^{k+1}\phi\|_n. \tag{30.105}$$

Toutes ces majorations donnent

$$\big|\langle u,\chi_n\phi\rangle\big|\leqslant C\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}n^i\underbrace{\|\partial^i\chi\|_\infty}_{\leqslant\|\chi\|_{(N)}}\left(\frac{2}{n}\right)^{i+1}\underbrace{\|\partial^{k+1}\phi\|_n}_{\leqslant\|\phi\|_{(N+1)}} \tag{30.106a}$$

$$\leqslant C\|\chi\|_{(N)}\|\phi\|_{(N+1)}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}2^{i+1} \tag{30.106b}$$

$$=\frac{C'}{n} \tag{30.106c}$$

où C' est une constante qui dépend de χ, de ϕ et de N, mais pas de n. Vu que $\frac{C'}{n}\to0$ nous avons bien

$$\langle u,\phi\chi_n\rangle=0, \tag{30.107}$$

ce qu'il fallait démontrer. □ PropXXPLooSkgxOz

Proposition 30.45 ([433]).
Soit $u\in\mathscr{D}(\mathbb{R})'$ avec $\operatorname{supp}(u)=\{x_0\}$. Alors $u=\sum_{i=0}^{N}a_i\partial^i\delta_{x_0}$ où N est l'ordre de u.

Démonstration. D'abord il faut préciser que l'ordre de u est fini parce que son support est compact (proposition 30.42) ; nous notons N cet ordre.

Soit $\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Nous considérons $\chi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\overline{B(x_0,1)}\\ 0 & \text{si } |x-x_0|>2.\end{cases} \tag{30.108}$$

Encore une fois, $1-\chi$ s'annule sur un voisinage autour de x_0, ce qui fait que

$$\operatorname{supp}(u)\cap\operatorname{supp}\big((1-\chi)\phi\big)=\varnothing, \tag{30.109}$$

et donc $\langle u,(1-\chi)\phi\rangle=0$. Au final,

$$\langle u,\phi\rangle=\langle u,\chi\phi\rangle. \tag{30.110}$$

C'est le moment de poser

$$\psi(x)=\chi(x)\big[\phi(x)-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}(\partial^k\phi)(x_0)(x-x_0)^k\big] \tag{30.111}$$

La fonction ψ ayant un support disjoint de celui de u, nous avons aussi $\langle u,\psi\rangle=0$, ce qui donne

$$\langle u,\phi\rangle=\langle u,\chi\phi\rangle=\langle u,\chi\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}(\partial^k\phi)(x_0)(x-x_0)^k\rangle. \tag{30.112}$$

[19] Dans [433], la dernière égalité vient avec une inégalité, et je comprends pas pourquoi.

En posant $a_k = \frac{1}{k!}\langle u, x \mapsto \chi(x)(x-x_0)^k\rangle$ nous avons alors

$$\langle u, \phi\rangle = \sum_{k=0}^{N} a_k(\partial^k\phi)(x_0) = \sum_k (-1)^k a_k(\partial^k\delta_{x_0})(\phi). \tag{30.113}$$

□

30.4 L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$

SecTEgDVWO

D'abord parlons un peu de continuité en recopiant la proposition 7.415 dans notre contexte.

PropIPlKQBa

Proposition 30.46.
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $u\colon I \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ une fonction continue. Alors

ItemYAhnNhBi

(1) Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, l'application $t \mapsto u_t(\varphi)$ est continue.

(2) Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, nous avons la limite

$$\lim_{t\to t_0} u_t(\varphi) = u_{t_0}(\varphi). \tag{30.114}$$

(3) Nous avons la limite dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{t\to t_0} u_t = u_{t_0}. \tag{30.115}$$

En ce qui concerne la définition de l'espace $C^\infty(I, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$, c'est la définition 7.416. Grâce au point (1) de la proposition 30.46, nous retenons que la propriété fondamentale d'une application $T \in C^k\big(I, \mathscr{D}'(\Omega)\big)$ est que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, l'application

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto T_t(\varphi) \end{aligned} \tag{30.116}$$

est de classe C^k.

PropOTlWzog

Proposition 30.47.
Soit I, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $T \in C^0\big(I, \mathscr{D}'(\Omega)\big)$ et $\psi \in \mathscr{D}(I\times\Omega)$. Alors l'application

$$t \mapsto T_t\big(\psi(t,.)\big) \tag{30.117}$$

est continue sur I.

Démonstration. La fonction dont nous voulons prouver la continuité est une fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; il est donc loisible de se contenter de la continuité séquentielle. Soient $t_0 \in I$ et (t_j) une suite dans I convergeant vers t_0. Nous posons $U_j = T_{t_j}$ et $\psi_j = \psi(t_j, .)$. Par hypothèse de continuité de (T_t) nous avons $U_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T_{t_0}$. D'autre part le support de ψ étant compact nous avons $\operatorname{supp}(\psi) \subset [c,d]\times K$ où $[c,d] \subset I$ et K est compact dans Ω. Par conséquent nous avons aussi $\operatorname{supp}(\psi_j) \subset K$.

Afin d'alléger les notations notons $\tilde{\psi}(x) = \psi(t_0, x)$. Pour tout multiindice α et pour tout j nous avons

$$p_\alpha(\psi_i - \tilde{\psi}) = \Big|\partial^\alpha\psi(t_j,x) - \partial^\alpha\psi(t_0,x)\Big| \leqslant |t_j - t_0| \sup_{\substack{t\in[c,d]\\ x\in K}} |\partial_t\partial^\alpha\psi(t,x)| \to 0. \tag{30.118}$$

Nous avons donc la convergence

$$\psi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(K)} \psi(t_0, .). \tag{30.119}$$

Étant donné que $U_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} T_{t_0}$ et $\psi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \tilde{\psi}$, le corolaire 27.9(4) nous donne la convergence

$$U_j(\psi_j) \xrightarrow{\mathbb{C}} T_{t_0}(\tilde{\psi}) \tag{30.120}$$

Cela est bien la continuité de la fonction $t \mapsto T_t\big(\psi(t,.)\big)$. □

PropLKtBsVi

Proposition 30.48 ([795]).
Soit $(T_t) \in C^0\big(I, \mathscr{D}'(\Omega)\big)$. Nous définissons l'application $T\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ par la formule

$$T(\psi) = \int_I T_t\big(\psi(t,.)\big)\, dt \tag{30.121}$$

pour tout $\psi \in \mathscr{D}(I\times\Omega)$. Alors $T \in \mathscr{D}'(I\times\Omega)$.

Démonstration. La proposition 30.47 nous indique que la fonction $t \mapsto T_t\big(\psi(t,.)\big)$ est continue. Étant donné qu'elle est seulement non nulle sur un compact, l'intégrale

$$\int_I T_t\big(\psi(t,.)\big)dt \tag{30.122}$$

a un sens et est finie. L'application $T\colon \mathscr{D}(I\times\Omega)\to\mathbb{C}$ ainsi définie est linéaire. Il reste à voir qu'elle est continue. Pour cela nous allons utiliser le théorème 30.29(3) qui nous dit que nous pouvons nous fixer un compact $[c,d]\times K\subset I\times\Omega$ et considérer $\psi\in\mathscr{D}\big([c,d]\times K\big)$.

Soit, pour commencer, donnée une application $\varphi\in\mathscr{D}(K)$. L'application $t\mapsto T_t(\varphi)$ est continue et non nulle sur le compact $[c,d]$ et il existe donc $C_\varphi>0$ tel que

$$|T_t(\varphi)|\leqslant C_\varphi \tag{30.123}$$

pour tout $t\in[c,d]$.

Nous voulons utiliser le théorème de Banach-Steinhaus dans sa version 27.8 sur la famille d'applications paramétrée par $u\in[c,d]$:

$$\begin{aligned} U_u\colon \mathscr{D}\big([c,d]\times K\big)&\to\mathbb{R}\\ \psi&\mapsto T_u\big(\psi(u,.)\big). \end{aligned} \tag{30.124}$$

EqBEKoqMb

Commençons par prouver que cela est une application continue pour chaque u. Ce sera le cas si la projection

$$\begin{aligned} \texttt{proj}\colon \mathscr{D}\big([c,d]\times K\big)&\to\mathscr{D}(K)\\ \psi&\mapsto\psi(u,.) \end{aligned} \tag{30.125}$$

est continue. Pour cela nous notons P_{kl} la seminorme sur $\mathscr{D}\big([c,d]\times K\big)$ donnée par

$$P_{k,l}(\psi)=\sum_{n\leqslant k}\sum_{|\alpha|\leqslant l}\sup_{\substack{t\in[c,d]\\x\in K}}\big|\partial_t^n\partial^\alpha\psi(t,x)\big|. \tag{30.126}$$

Nous montrons que $\texttt{proj}$ est séquentiellement continue ; étant donné que les topologies sur $\mathscr{D}(K)$ et $\mathscr{D}\big([c,d]\times K\big)$ sont données par des métriques (proposition 30.27), cela suffit pour assurer la continuité grâce à la proposition 7.157. Montrons que si $\psi_n\xrightarrow{\mathscr{D}([c,d]\times K)}0$, alors $\texttt{proj}(\psi_n)\xrightarrow{\mathscr{D}(K)}0$. Pour cela nous remarquons que

$$\begin{aligned} p_j\big(\texttt{proj}(\psi)\big)&=\sum_{|\alpha|\leqslant j}\sup_{x\in K}|\partial^\alpha\psi(u,x)| &(30.127a)\\ &\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant j}\sup_{t\in[c,d]}\sup_{x\in K}|\partial^\alpha\psi(t,x)| &(30.127b)\\ &=P_{0,j}(\psi). &(30.127c) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$p_j\big(\texttt{proj}(\psi_n)\big)\leqslant P_{0,j}(\psi_n)\to 0 \tag{30.128}$$

où nous avons utilisé la proposition 7.399. Utilisant cette même proposition à l'envers, nous déduisons que $\texttt{proj}(\psi_n)\xrightarrow{\mathscr{D}(K)}0$. Les applications U_u sont donc continues ; elles sont également bornées parce que si $\psi\in\mathscr{D}\big([c,d]\times K\big)$ nous avons

$$\sup_{u\in[c,d]}\big|U_u(\psi)\big|=\sup_u\big|T_u\big(\psi(u,.)\big)\big|, \tag{30.129}$$

et la continuité déjà évoquée, sur le compact $[c,d]$, nous dit que cette quantité est finie. Le théorème de Banach-Steinhaus peut maintenant être appliqué et il existe $C>0$ et $k,l\in\mathbb{N}$ tels que pour tout $\psi\in\mathscr{D}\big([c,d]\times K\big)$,

$$\big|U_u(\psi)\big|\leqslant CP_{k,l}(\psi)=C\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sum_{n\leqslant l}\sup_{t,x}\big|\partial_t^n\partial^\alpha\psi(t,x)\big|\leqslant C\sum_{|\alpha|+n\leqslant k+l}\sup_{t,x}\big|\partial_t^n\partial^\alpha\psi(t,x)\big|. \tag{30.130}$$

Quelques remarques

- Nous n'avons pas mis de maximum devant le supremum (alors que la conclusion (27.20) en demande) parce que dans le cas des seminormes P_{kl}, c'est toujours celle avec k et l le plus grand possible qui sont les plus grandes parce qu'elles sont des sommes emboitées les unes les autres.

- La fusion de deux sommes est bien une majoration parce qu'il y a plus de termes dans la seconde que dans la première.
- La quantité la plus à droite est (à part le C) ce que nous pouvons noter $P_{k+l}(\psi)$: c'est bien une des seminormes associées à l'espace de dimension $d+1$.

Nous majorons maintenant $T(\psi)$ par

$$\big|T(\psi)\big| \leqslant \int_c^d \big|T_t\big(\psi(t,.)\big)\big|dt = \int_c^d \big|U_t(\psi)\big|dt \leqslant C|d-c|P_{k+l}(\psi). \tag{30.131}$$

Maintenant le théorème 30.29(3) appliqué à l'ouvert $I\times\Omega$ et avec ψ au lieu de φ nous informe que $T\in\mathscr{D}(I\times K)$. □

30.4.1 Dérivation

Quelques propriétés de dérivation des fonctions $I\to\mathscr{D}(\Omega)$ seront directement énoncées et démontrées dans le cas des distributions tempérées. Les résultats 30.82 et 30.83 seront a fortiori valables si nous remplaçons $\mathscr{S}$ par $\mathscr{D}$.

30.5 Une équation de distribution

Nous allons étudier l'équation

EqLLTPooJHUVyU
$$(x-x_0)^\alpha u = 0 \tag{30.132}$$

pour $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ et $\alpha\in\mathbb{N}$ est donné fixé. Notons tout de suite que (30.132) est un petit abus de notation pour dire qu'en vertu de la définition 30.35 du produit d'une distribution par une fonction, pour tout $\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$, nous avons $u\Big(x\mapsto(x-x_0)^\alpha\phi(x)\Big)=0$.

LemWIGKooQpGXoI
Lemme 30.49 ([433]).
Soit $\alpha\in\mathbb{N}$. Une solution à l'équation

EqKVNEooJNwsPc
$$(x-x_0)^\alpha u = 0 \tag{30.133}$$

est une distribution à support dans $\{x_0\}$ et d'ordre fini.

Démonstration. Nous commençons par prouver que u est une solution de (30.133) si et seulement si[20] $\langle u,\phi\rangle=0$ pour tout $\phi\in\mathscr{D}$ telle que

EqYLIPooYBvzwC
$$\phi(x_0)=\ldots=\partial^{\alpha-1}\phi(x_0)=0. \tag{30.134}$$

(1) **Condition nécéssaire** Supposons que u soit une solution. Alors le corolaire 17.28 du théorème de Hadamard donne $\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x)=(x-x_0)^\alpha\psi(x)$. Dans ce cas, si u est solution de (30.133), alors

$$0=\langle(x-x_0)^\alpha u,\psi\rangle=\langle u,(x-x_0)^\alpha\psi(x)\rangle=\langle u,\phi\rangle. \tag{30.135}$$

Nous avons vu que si u est solution, alors $\langle u,\phi\rangle=0$ pour tout ϕ satisfaisant la condition (30.134).

(2) **Condition suffisante** Supposons maintenant l'inverse : u est une distribution s'annulant sur toute fonction $\phi\in\mathscr{D}'$ satisfaisant (30.134). Nous allons alors prouver que u est une solution. Soit donc $\psi\in\mathscr{D}$ et calculons

$$\langle(x-x_0)u,\psi\rangle=\langle u,(x-x_0)\psi\rangle=0 \tag{30.136}$$

parce que la fonction $(x-x_0)\psi(x)$ vérifie la condition (30.134).

Nous passons maintenant au cœur de la preuve : nous supposons que u est une solution. Si le support de ϕ est contenu dans $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ alors ϕ est nulle dans un voisinage de x_0 (et donc $\partial^k\phi=0$ pour tout k) et $\langle u,\phi\rangle=0$. Autrement dit, pour tout $\phi\in\mathscr{D}\big(\mathbb{R}\setminus\{x_0\}\big)$ nous avons $\langle u,\phi\rangle=0$, ce qui signifie que $\operatorname{supp}(u)\cap\big(\mathbb{R}\setminus\{x_0\}\big)=\varnothing$ ou encore que $\operatorname{supp}(u)=\{x_0\}$.

Maintenant que u a un support compact, la proposition 30.42 nous indique qu'elle est d'ordre fini. □

ThoRDUXooQBlLNb
Théorème 30.50 ([433]).
Soit $\alpha\in\mathbb{N}$ et l'équation

EqDONTooKPfDWU
$$(x-x_0)^\alpha u = 0 \tag{30.137}$$

pour $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Les solutions sont les combinaisons linéaires des dérivées de δ_{x_0} jusqu'à la α^e exclue.

[20] En réalité nous n'aurons besoin que de la condition nécessaire, en particulier pour le théorème 30.50.

Démonstration. D'abord montrons que les $\partial^i\delta_{x_0}$ sont des solutions. Avec les définition 30.35 et 30.36 des dérivées de distributions et de leur produits avec des fonctions[21],

$$(x-x_0)^\alpha\partial^i\delta_{x_0}(\phi)=\delta_{x_0}\Big(\partial^i\big((x-x_0)^\alpha\phi(x)\big)\Big) \tag{30.138}$$

Si $i<\alpha$ alors dans chaque terme de Leibniz[22], il y aura un facteur $(x-x_0)$, et la prise de δ_{x_0} annulera. Si par contre $i\geqslant\alpha$ alors il y aura le terme

$$\binom{i}{\alpha}\partial^\alpha\big((x-x_0)^\alpha\big)\partial^{i-\alpha}\phi(x_0)=\binom{i}{\alpha}\alpha!(\partial^{i-\alpha}\phi)(x_0) \tag{30.139}$$

qui est le seul terme contenant $(\partial^{i-\alpha}\phi)(x_0)$. Il suffit alors de choisir $\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ de sorte que

$$(\partial^k\phi)(x_0)=\begin{cases}0 & \text{si } k\neq i-\alpha\\ 1 & \text{si } k=i-\alpha\end{cases} \tag{30.140}$$

et alors on est certain que le tout n'est pas nul, et donc que $(x-x_0)^\alpha(\partial^i\delta_{x_0})\neq 0$.

Jusqu'ici nous avons prouvé que $\partial^i\delta_{x_0}$ est solution si et seulement si $0\leqslant i<\alpha$.

Il faut encore prouver que les solutions sont toutes des combinaisons linéaires de dérivées de delta de Dirac centrées en x_0. Pour cela nous invoquons d'abord le lemme 30.49 qui nous assure que u est d'ordre fini et de support $\{x_0\}$. Ensuite la proposition 30.45 nous indique que u doit alors être une combinaisons linéaire de dérivées de Dirac. □

30.6 Localisation, principe de recollement

PROPooNCHIooNOPfBt

Proposition-Définition 30.51 ([287, 1]).
Soient un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, un ouvert A dans Ω, et $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$. Nous définissons

$$\begin{aligned}T|_A\colon\mathscr{D}(A)&\to\mathbb{C}\\ \phi&\mapsto T(\bar\phi)\end{aligned} \tag{30.141}$$

où $\bar\phi\colon\Omega\to\mathbb{C}$ est définie par

$$\bar\phi(x)=\begin{cases}\phi(x) & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{30.142}$$

Alors $T|_A\in\mathscr{D}'(A)$.

*Cette distribution $T|_A$ est la **restriction** de T à A. Elle sera aussi souvent notée $r_A(T)$.*

Démonstration. Nous allons prouver la séquentielle continuité de $T|_A$. Ce sera suffisant par le théorème 30.29(4). Soit donc une suite $\phi_n\xrightarrow{\mathscr{D}(A)}0$.

(1) **Débroussailler** Nous devons prouver que $T|_A(\phi_n)\xrightarrow{\mathbb{C}}0$, c'est-à-dire que

$$T(\bar\phi_n)\xrightarrow{\mathbb{C}}0. \tag{30.143}$$

(2) **Notations** La topologie sur $\mathscr{D}(A)$ est celle de la définition 30.19. Fixons un peu de notations. Si K est compact dans A et si $m\in\mathbb{N}$, nous posons

$$\begin{aligned}p_{K,m}\colon C^\infty(A)&\to\mathbb{R}\\ f&\mapsto\sum_{|\mu|\leqslant m}\|\partial^\mu f\|_K.\end{aligned} \tag{30.144}$$

EQooYZWHooVRrnlU

De même, si K est compact dans Ω et si $m\in\mathbb{N}$ nous posons

$$\begin{aligned}q_{K,m}\colon C^\infty(\Omega)&\to\mathbb{R}\\ f&\mapsto\sum_{|\mu|\leqslant m}\|\partial^\mu f\|_K.\end{aligned} \tag{30.145}$$

EQooCNPIooSiqAzt

Les familles de seminormes $(p_{K,m})$ et $(q_{K,m})$ ne sont pas indexées par les mêmes ensembles et n'ont pas le même domaine. Bien que les formules (30.144) et (30.145) se ressemblent, elles n'ont rien à voir l'une avec l'autre.

[21] Comme souvent, dans l'expression suivante, il y a un abus de notation parce que x est une variable muette : il faudrait écrire « $x\mapsto$ » au début de la grande parenthèse.
[22] Lemme 30.11.

(3) **La notion de convergence**

La proposition 30.20 dit que[23] $f_n \xrightarrow{\mathscr{D}(A)} 0$ si et seulement si $p_{K_0,m}(f_n) \to 0$ pour tout m pour un certain compact K_0 contenant tous les supports de f_n.

(4) $\bar{\phi}_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0$

Nous utilisons le théorème 30.26 dans les deux sens. D'abord, vu que $\phi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(A)} 0$, il existe un compact K_0 tel que $\phi_n \in \mathscr{D}(K_0)$ pour tout n et $\phi_n \xrightarrow{\mathscr{D}(K_0)} 0$, c'est-à-dire tel que

$$p_{K_0,m}(\phi_n) \to 0 \tag{30.146}$$

EQooRRMUooIznPeE

pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Le compact K_0 vérifie également $\bar{\phi}_n \in \mathscr{D}(K_0)$ pour tout n, vu que le support de $\bar{\phi}_n$ est le même que celui de ϕ_n. De plus sur K_0 nous avons $\phi_n = \bar{\phi}_n$, donc

$$q_{K_0,m}(\bar{\phi}_n) = \sum_{|\mu|\leqslant m} \|\partial^\mu \bar{\phi}_n\|_{K_0} = \sum_{|\mu|\leqslant m} \|\partial^\mu \phi_n\|_{K_0} = p_{K_0,m}(\phi_n). \tag{30.147}$$

En vertu de (30.146) nous avons donc $q_{K_0,m}(\bar{\phi}_n) \to 0$, c'est-à-dire que $\bar{\phi}_n \xrightarrow{\mathscr{D}(K_0)} 0$. Donc le théorème 30.26 (dans l'autre sens, cette fois) nous indique que $\bar{\phi}_n \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0$.

(5) **Conclusion**

Vu que $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, nous avons $T(\bar{\phi}_n) \xrightarrow{\mathbb{C}} 0$. Donc

$$T|_A(\phi_n) = T(\bar{\phi}_n) \xrightarrow{\mathbb{C}} 0. \tag{30.148}$$

Cela prouve que $T|_A \in \mathscr{D}'(A)$ parce que ϕ_n est une suite quelconque tendant vers 0 dans $\mathscr{D}(A)$.

□

LEMooCXIZooAbeMpF

Lemme 30.52 ([1]).
Quelques propriétés de la restriction d'une distribution. Nous considérons un ouvert Ω dans $\mathbb{R}^d$ ainsi qu'un ouvert $A \subset \Omega$.

(1) L'application de restriction $r_A : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(A)$ est linéaire.

ITEMooGXSKooYomqpg

(2) Si $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\text{supp}(\phi) \subset A$, alors

$$T(\phi) = r_A(T)\phi. \tag{30.149}$$

PROPooDVYNooKquEUl

Proposition 30.53 (Principe de recollement[287, 1]).
Soient un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ ainsi que des ouverts $\{A_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^d$ tels que $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

Pour chaque $i \in I$ nous supposons avoir un élément $T_i \in \mathscr{D}'(A_i)$ tel que

$$r_{A_i\cap A_j}(T_i) = r_{A_i\cap A_j}(T_j) \tag{30.150}$$

pour tout $i, j \in I$ tels que $A_i \cap A_j \neq \varnothing$.

Alors il existe une unique distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que $r_{A_i}(T) = T_i$ pour tout i dans I.

Démonstration. Nous prouvons l'unicité et l'existence séparément[24].

(1) **Unicité** Soient T et U des distributions qui satisfont à la demande. Nous posons $S = T - U$ et nous allons prouver que $S = 0$. Grâce à la linéarité de r_{A_i} (lemme 30.52),

$$r_{A_i}(S) = 0 \tag{30.151}$$

pour tout i dans I.

[23] Pour rappel, $\mathscr{D}$ signifie C_c^∞.

[24] Ce genre phrase semble ne servir à rien, mais elle sert à éviter qu'en l'environnement `description` qui suit ne soit tout moche.

Soit $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$; nous notons $K = \text{supp}(\phi) \subset \Omega$. Vu que les A_i recouvrent Ω, ils recouvrent K. Il existe dont une partie finie J de I telle que $K \subset \bigcup_{j\in J} A_j$. Et si nous prenions une partition de l'unité[25] subordonnée à ces A_j ?

Soit $\{\psi_j\}_{j\in J}$ une telle partition de l'unité. Vu que le support de ϕ est borné, le support de $\psi_k\phi$ est également borné. Et comme un support est toujours fermé, l'application $\psi_k\phi$ est dans $\mathscr{D}(A_k)$. En utilisant consciencieusement le lemme 30.52(2) nous avons

$$S(\phi) = S\big(\sum_{k=1}^{n}\psi_k\phi\big) = \sum_k S(\psi_k\phi) = \sum_{k=1}^{n}(r_{A_k}S)(\psi_k\phi) = 0 \tag{30.152}$$

parce que $r_{A_k}(S) = 0$.

(2) **Existence, début** La preuve de l'existence va se faire en plusieurs étapes.

(3) **Définition de T_K** Soit un compact K dans Ω. Vu que les A_j forment un recouvrement de K, il existe une partie finie J dans I telle que $K \subset \bigcup_{j\in J} A_j$. Nous considérons une partition de l'unité[26] $\{\psi_j\}_{j\in J}$ sur K subordonnée au recouvrement $\{A_j\}_{j\in J}$.

Nous définissons alors

$$\begin{aligned} T_K\colon \mathscr{D}(K) &\to \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto \sum_{j\in J} T_j(\psi_j\phi). \end{aligned} \tag{30.153}$$

Nous supposons avoir fait, pour chaque compact K de Ω, un choix de sous-recouvrement fini (c'est-à-dire de partie J) et un choix de partition de l'unité.

(4) **$T_K = T_{K'}$ sur les intersection** Soient deux compacts K, M dans Ω. Nous prouvons que si $\phi \in \mathscr{D}(K) \cap \mathscr{D}(M)$, alors $T_K(\phi) = T_M(\phi)$. Nous avons donc en main les objets suivants :

$$\begin{aligned} &\big(K, J, \{A_j\}_{j\in J}, \{\chi_j\}_{j\in J}\big) \\ &\big(M, L, \{A_l\}_{l\in L}, \{\varphi_l\}_{l\in L}\big). \end{aligned} \tag{30.154}$$

Nous considérons $\phi \in \mathscr{D}(K) \cap \mathscr{D}(M)$. Vu que $\{\varphi_l\}_{l\in L}$ est une partition de l'unité sur M et que ϕ a son support contenu dans M, nous avons $\phi = \sum_{l\in L}\varphi_l\phi$, et nous pouvons écrire

$$T_K(\phi) = \sum_{j\in J} T_j(\chi_j\phi) = \sum_{j\in J}\sum_{l\in L} T_j(\chi_j\varphi_l\phi). \tag{30.155}$$

EQooXKYQooFUUovL

Nous savons que $\text{supp}(\chi_j\varphi_l\phi)$ est dans $A_j \cap A_l$, donc

$$T_j(\chi_j\varphi_l\phi) = r_{A_j\cap A_l}(T_j)(\chi_j\varphi_l\phi). \tag{30.156}$$

Mais l'hypothèse sur les T_i est que $r_{A_j\cap A_l}(T_j) = r_{A_j\cap A_l}(T_l)$. Cela nous permet de continuer le calcul de (30.155) :

$$T_K(\phi) = \sum_{j\in J}\sum_{l\in L} r_{A_j\cap A_l}(T_j)(\chi_j\varphi_l\phi) = \sum_{jl} r_{A_j\cap A_l}(T_l)(\chi_j\varphi_l\phi) = \sum_{jl} T_l(\chi_j\varphi_l\phi) \tag{30.157a}$$

$$= \sum_{l\in L} T_l\big(\varphi_l\sum_{j\in J}\chi_j\phi\big) = \sum_{l\in L} T_l(\varphi_l\phi) = T_M(\phi). \tag{30.157b}$$

Bien.

(5) **Ce qu'on pose** Si $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, la valeur de $T_K(\phi)$ ne dépend pas du choix du compact K dans Ω contenant le support de ϕ. Nous pouvons donc poser

$$\begin{aligned} T\colon \mathscr{D}(\Omega) &\to \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto T_K(\phi) \end{aligned} \tag{30.158}$$

où K est un compact quelconque de Ω contenant le support de ϕ.

[25] Théorème 27.88.
[26] Théorème 27.88.

(6) **T est une distribution** Nous devons prouver que $T\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une distribution, c'est-à-dire qu'elle est linéaire et continue. Pour la linéarité nous disons que c'est bon, et nous nous concentrons sur la continuité. Pour cela nous allons nous baser sur le critère du théorème 30.29(3).

Soit un compact K dans Ω. Nous devons trouver des constantes m et C telles que $|T(\phi)| \leqslant Cp_{m,K}(\phi)$ pour tout $\phi \in \mathscr{D}(K)$.

Vu que $\phi \in \mathscr{D}(K)$ nous avons $T(\phi) = T_K(\phi) = \sum_{j\in J} T_j(\chi_j\phi)$. Étant donné que T_j est continue sur $\mathscr{D}(A_j)$ et que $\chi_j\phi$ est une fonction de classe C^∞ à support dans A_j, en posant $M_j = \operatorname{supp}(\chi_j)$, il existe des constantes $m_j \in \mathbb{N}$ et $C_j \geqslant 0$ telles que

$$|T_j(\chi_j\phi)| \leqslant C_j p_{m_j,M_j}(\chi_j\phi). \tag{30.159}$$

Donc

$$|T(\phi)| \leqslant \sum_{j\in J} C_j |p_{m_j,M_j}(\chi_j\phi)| = \sum_{j\in J} C_j \sum_{|\alpha|\leqslant m_j} \|\partial^\alpha(\chi_j\phi)\|_{M_j}. \tag{30.160}$$

Nous utilisons la formule de Leibniz[27] pour décomposer $\partial^\alpha(\chi_j\phi)$:

$$|T(\phi)| \leqslant \sum_{j\in J} C_j \sum_{|\alpha|\leqslant m_j} \| \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}\chi_j \partial^\beta\phi\|_{M_j} \tag{30.161a}$$

$$\leqslant \sum_{j} C_j \sum_{|\alpha|\leqslant m_j} \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^{\alpha-\beta}\chi_j\|_{M_j} \|\partial^\beta\phi\|_{M_j}. \tag{30.161b}$$

Pour chaque j, il y a un nombre fini de multiindices α en jeu, et pour chacun d'entre eux, un nombre fini de β. Donc le coefficient $\binom{\alpha}{\beta}$ se majore par une constante dépendante de j ; nous l'incluons dans C_j. De même pour le coefficient $\|\partial^{\alpha-\beta}\chi_j\|$; il se majore et s'absorbe dans C_j. Nous avons donc

$$|T(\phi)| \leqslant \sum_{j\in J} C'_j \sum_{|\alpha|\leqslant m_j} \sum_{\beta\leqslant\alpha} \|\partial^\beta\phi\|_{M_j}. \tag{30.162}$$

Dans ces sommes, chaque nombre de la forme $\|\partial^\mu\phi\|_{M_j}$ avec $|\mu| \leqslant m_j$ est pris un certain nombre de fois. On majore ce « certain nombre[28] » et on l'inclut dans la constante C'_j. Cela donne

$$|T(\phi)| \leqslant \sum_{j\in J} C''_j \sum_{|\alpha|\leqslant m_j} \|\partial^\alpha\phi\|_{M_j}. \tag{30.163}$$

L'ensemble $M = \bigcup_{j\in J} M_j$ est un compact dans Ω et bien entendu $\|\partial^\alpha\phi\|_{M_j} \leqslant \|\partial^\alpha\phi\|_M$. Nous avons donc encore plein de majorations :

$$|T(\phi)| \leqslant \sum_{j\in J} C''_j \sum_{|\alpha|\leqslant m_j} \|\partial^\alpha\phi\|_M \tag{30.164a}$$

$$\leqslant C \sum_{j\in J} \sum_{|\alpha|\leqslant m_j} \|\partial^\alpha\phi\|_M \tag{30.164b}$$

$$\leqslant C \sum_{j\in J} \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha\phi\|_M \tag{30.164c}$$

$$\leqslant C' \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha\phi\|_M \tag{30.164d}$$

$$= C' p_{m,M}(\phi). \tag{30.164e}$$

Justifications :

- Pour 30.164b. On définit $C = \max_{j\in J} C''_j$.
- Pour 30.164c. On définit $m = \max_{j\in J} m_j$.
- Pour 30.164d. Comme ce qui est dans la somme ne dépend plus de j, nous supprimons la somme sur j et nous incluons le nombre de termes de la somme dans le changement $C \to C'$.

[27] Lemme 30.11.

[28] Il n'est pas nécessaire de savoir exactement combien, mais si vous y tenez vous pouvez vous embarquer dans un petit peu de combinatoire.

Et maintenant on admire le fait qu'en ayant fait autant de majorations dans tous les sens, nous obtenons encore une inégalité qui ait un sens. Bref, nous avons trouvé un compact M, un nombre m ainsi qu'une constante C' tels que

$$|T(\phi)| \leqslant C' p_{M,m}(\phi) \tag{30.165}$$

pour tout $\phi \in \mathscr{D}(K)$. Notons que M, m et C' dépendent fortement de K, mais pas de ϕ. Cela prouve que T est continue par 30.29(3).

(7) **T répond à la question** Il nous reste à prouver que T est bien la distribution recollée, c'est-à-dire que $r_{A_i}(T) = T_i$ pour tout $i \in I$. Le domaine de T_i et de $r_{A_i}(T)$ est $\mathscr{D}(A_i)$. Pour être clair, les fonctions dans $\mathscr{D}(A_i)$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$, mais dont le support est compact dans A_i.

Utilisant la définition de la restriction, pour $\phi \in \mathscr{D}(A_i)$,

$$r_{A_i}(T)\phi = T(\bar{\phi}) \tag{30.166}$$

où

$$\bar{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in A_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{30.167}$$

Mais vu que $\phi \in \mathscr{D}(A_i)$ nous avons $\phi = \bar{\phi}$ et donc pas de pièges de ce côté.

Nous posons $M = \text{supp}(\phi)$ et nous avons

$$r_{A_i}(T)(\phi) = T(\bar{\phi}) = T(\phi) = T_M(\phi). \tag{30.168}$$

Nous nommons $\big(L, \{\varphi_l\}_{l\in L}\big)$ les choix faits pour le compact M dans la construction de T_M. Nous avons alors

$$T_M(\phi) = \sum_{l\in L} T_l(\varphi_p\phi). \tag{30.169}$$

Mais le support de $\varphi_k\phi$ est dans $A_i \cap A_l$, de telle sorte que l'hypothèse faite sur les T_i aux intersections donne $T_l(\varphi_l\phi) = T_i(\varphi_l\phi)$, et donc que

$$T_M(\phi) = \sum_{l\in L} T_l(\varphi_l\phi) = T_i\Big(\sum_{l\in L} \varphi_l\phi\Big) = T_i(\phi). \tag{30.170}$$

La dernière égalité vient du fait que $\{\varphi_l\}_{l\in L}$ est une partition de l'unité sur (au moins) $\text{supp}(\phi)$.

□

30.7 Permuter distributions, dérivées et intégrales

PROPooCNYTooWCKHpV

Proposition 30.54 ([287]).
Soient un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, une distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ ainsi qu'une fonction $\phi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ à support dans $K \times \mathbb{R}^n$ où K est compact dans Ω.

Alors

ITEMooBIVOooHwGglM

(1) La fonction

$$y \mapsto T\big(\phi(.,y)\big) \tag{30.171}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.

(2) Pour toute liste d'indices α et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, nous avons

EQooYMXXooYkceTv

$$\partial_y^\alpha \big(T\big(x \mapsto \phi(x,y)\big)\big)_{y=y_0} = T\big(x \mapsto (\partial_y^\alpha\phi)(x,y_0)\big). \tag{30.172}$$

Démonstration. Nous y allons par récurrence sur les dérivations, en commençant par $\alpha = (i)$. Pourvu que le membre de gauche de (30.172) existe, il est donné par

EQooBHSSooXDrYOh

$$\partial_y^{(i)}\big[T\big(\phi(x,y)\big)\big]_{y=y_0} = \lim_{t\to 0} \frac{T\big(\phi(x,y_0+te_i)\big) - T\big(\phi(x,y)\big)}{t}. \tag{30.173}$$

Vu que T est linéaire, nous allons travailler sur

EQooXEFAooNzLBZx

$$T\Big(x \mapsto \frac{\phi(x,y_0+te_i) - \phi(x,y_0)}{t}\Big). \tag{30.174}$$

(1) **Un développement** Nous commençons par fixer y_0, x et t et écrire un développement de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral[29] pour la fonction $v(y) = \phi(x, y)$ autour de $y = y_0$ et dans la direction $h = te_i$. La formule est

$$\phi(x, y_0 + te_i) = \phi(x, y_0) + \sum_i h_i(\partial_{y_i}\phi)(x, y_0) + \text{reste} \tag{30.175}$$

EQooIAXAooWFhNVv

où $\partial_{y_i}\phi$ signifie la dérivée partielle par rappport à la i^{e} composante de la seconde variable de ϕ. Avec la notations en multiindices, ça peut aussi bien s'écrire $\partial_y^{e_i}\phi$. En ce qui concerne le reste, il faut considérer la somme $\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=2}}$. Cette somme contient, entre autres,

$$h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} \tag{30.176}$$

où

$$h_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ t & \text{si } j = i. \end{cases} \tag{30.177}$$

Autrement dit $h^\alpha = 0$ dès que $\alpha \neq \alpha_i e_i$. Et comme nous devons avoir $|\alpha| = 2$, le seul terme non nul dans la somme est $\alpha = 2e_i$. Le reste est donc

$$\frac{t^2}{2}\int_0^1 (1-t)^2(\partial_y^{2e_i}\phi)(x, y_0 + te_i) \tag{30.178}$$

parce que $(te_i)^{2e_i} = t^2$. Au final,

$$\phi(x, y_0 + te_i) = \phi(x, y_0) + \sum_i h_i(\partial_{y_i}\phi)(x, y_0) + \frac{t^2}{2}\int_0^1 (1-t)(\partial_y^{2e_i}\phi)(x, y_0 + te_i). \tag{30.179}$$

EQooENWWooYfrPch

(2) **Régularité du reste** Nous regardons le développement (30.179) en disant que t et y_0 sont fixés. Les fonctions

$$x \mapsto \phi(x, y_0 + te_i) \tag{30.180a}$$
$$x \mapsto \phi(x, y_0) \tag{30.180b}$$
$$x \mapsto (\partial_{y_i}\phi)(x, y_0) \tag{30.180c}$$

sont de classe C^∞ à support compact dans K. Donc $x \mapsto r(x, y_0, te_i)$ est également C^∞ à support dans K.

Nous allons d'ailleurs tellement fixer y_0 et t que nous allons définir

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{R}^d &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \frac{t^2}{2}\int_0^1 (1-u)(\partial_y^{(ii)}\phi)(x, y_0 + ute_i)du \end{aligned} \tag{30.181}$$

et voir $s \in \mathscr{D}(K)$. Nous pouvons donc parler de $T(s)$ sans peurs.

(3) **Beaucoup de majorations** Vu que K est un compact dans Ω et que T est dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, le théorème 30.29(3) dit qu'il existe des constantes m et C telles que $|T(s)| \leqslant Cp_{m,K}(s)$. Nous avons alors les majorations suivantes :

SUBEQSooYPLGooOFMSyJ

$$|T(s)| \leqslant Cp_{m,K}(s) \tag{30.182a}$$
$$= C\sum_{|\mu|\leqslant m} \|\partial^\mu s\|_K \tag{30.182b}$$
$$= \sum_{|\mu|\leqslant m} \frac{t^2}{2}\int_0^1 (1-u)(\partial_x^\mu\partial_y^{ii}\phi)(x, y_0 + tue_i)du \tag{30.182c}$$

SUBEQooKIETooZIpBBF

$$\leqslant \sum_{|\mu|\leqslant m} \frac{t^2}{2}\int_0^1 (1-u)\|(\partial_x^\mu\partial_y^{ii}\phi)\|_{K\times\overline{B(y_0,1)}}du \tag{30.182d}$$

SUBEQooDYJCooFAsAxE

$$= \frac{Ct^2}{2}\sum_{|\mu|\leqslant m} \|\partial_x^\mu\partial_y^{ii}\phi\|_{K\times\overline{B(y_0,1)}} \tag{30.182e}$$

SUBEQooULTUooYlJHNQ

$$\leqslant C't^2 \max_{|\mu|\leqslant m} \|\partial_x^\mu\partial_y^{ii}\phi\|_{K\times\overline{B(y_0,1)}} \tag{30.182f}$$

SUBEQooQENJooQgJuxj

Justifications :

[29] Donc $m = 1$ dans la proposition 20.149. N'hésitez pas à revoir les notations 3.36 pour les multiindices.

- Pour (30.182c). Pour évaluer $\partial^\mu s$, nous utilisons la proposition 17.21 pour permuter l'intégrale sur u avec la dérivée sur x.
- Pour (30.182d). Nous supposons que $|t|<1$, de telle sorte que $|ut|<1$ et que y_0+tue_i reste dans $\overline{B(y_0,1)}$. Notez au passage qu'il n'est pas nécessaire de prendre la fermeture ; c'est juste pour le plaisir de rester sur un compact.
- Pour (30.182e). Évaluer l'intégrale : $\int_0^1(1-u)du=1/2$.
- Pour (30.182f). Le changement de constante $C\to C'$ intègre le nombre de termes dans la somme qui a été remplacée par son maximum et le 1/2.

(4) **La dérivée (enfin)** Nous reprenons le calcul de la dérivée laissé en (30.173) et (30.174). Nous avons

$$T\left(x\mapsto\frac{\phi(x,y_0+te_i)-\phi(x,y_0)}{t}\right)=T\left(\frac{t(\partial_y^{(i)}\phi)(x,y_0)+s(x)}{t}\right) \tag{30.183a}$$

$$=T\Big(x\mapsto(\partial_y^{(i)}\phi)(x,y_0)\Big)+T\left(\frac{s(x)}{t}\right). \tag{30.183b}$$

Le premier terme n'a plus de dépendance en t. La limite $t\to0$ est donc sans problèmes. Pour le second terme, en prenant la majoration de (30.182) nous avons

$$|\frac{s(x)}{t}|\leqslant C't\max_{|\mu|\leqslant m}\|\partial_x^\mu\partial_y^{(ii)}\phi\|_{K\times\overline{B(y_0,1)}}. \tag{30.184}$$

La limite $t\to0$ de cela est zéro.

(5) **Conclusion** La limite du membre de droite de (30.173) existe et vaut

$$T\Big[x\mapsto(\partial_y^{(i)}\phi)(x,y_0)\Big]. \tag{30.185}$$

Nous avons prouvé que

$$\partial_y^{(i)}\Big[T\big(x\mapsto\phi(x,y)\big)\Big]_{y=y_0}=T\Big[x\mapsto(\partial_y^{(i)}\phi)(x,y_0)\Big]. \tag{30.186}$$

Une récurrence permet de passer de la liste d'indices (i) à une liste générale pour terminer la preuve du résultat (30.172). □

THOooKVEHooIBaZGR

Théorème 30.55 (Permuter distribution et intégrale[287])**.**
Soit un ouvert Ω dans $\mathbb{R}^n$. Soient $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$ et $\phi\in\mathscr{D}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n}T\big(\phi(.,y)\big)dy=T\big(\int_{\mathbb{R}^n}\phi(.,y)dy\big). \tag{30.187}$$

Démonstration. Nous faisons une récurrence sur la valeur de n en partant de …

(1) $n=1$ Vu que le support de ϕ est compact dans $\Omega\times\mathbb{R}$, la proposition 7.127 dit qu'il existe un compact K dans Ω et $R>0$ tel que le support de ϕ soit dans $K\times\overline{B(0,R)}$.

Nous introduisons plein de fonctions intermédiaires.

(1a) **La fonction θ**
Considérons une seconde la fonction

$$\begin{aligned}\theta\colon\Omega&\to\mathbb{C}\\ x&\mapsto\int_{\mathbb{R}}\phi(x,z)dz.\end{aligned} \tag{30.188}$$

Son support est dans K. Est-elle de classe C^∞ ? Oui. En effet, la proposition 17.21 dit que l'on peut permuter les dérivées partielles et l'intégrale. Donc toutes les dérivées partielles de θ existent (et sont donc continues). Le théorème 12.356 nous indique alors que θ est de classe C^∞.

(1b) **La fonction ξ** Le corolaire 15.178 nous permet de considérer $\xi\in\mathscr{D}\big(B(0,R)\big)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}}\xi(x)dx=1. \tag{30.189}$$

(1c) **La fonction ψ** Nous posons alors

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} &\to \mathbb{C}\\ (x,y) &\mapsto \phi(x,y) - \xi(y)\int_{\mathbb{R}} \phi(x,z)dz.\end{aligned} \tag{30.190}$$

C'est une fonction $\psi \in \mathscr{D}(\Omega \times \mathbb{R})$ telle que

$$\operatorname{supp}(\psi) \subset K \times \overline{B(0,R)}. \tag{30.191}$$

Prouvons que pour tout $x \in \Omega$ nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x,y)dy = \int_{-R}^{R} \psi(x,y)dy = 0. \tag{30.192}$$

La première égalité est simplement le fait que $\psi(x,y) = 0$ lorsque $y \notin \overline{B(0,R)}$. Pour le fait que ce soit nul,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} \phi(x,y)dy - \int_{\mathbb{R}} \xi(y)dy \int_{\mathbb{R}} \phi(x,z)dz = 0. \tag{30.193}$$

(1d) **La fonction σ** Nous posons enfin

$$\begin{aligned}\sigma\colon \Omega \times \mathbb{R} &\to \mathbb{C}\\ (x,y) &\mapsto \int_{-\infty}^{y} \psi(x,z)dz.\end{aligned} \tag{30.194}$$

Nous avons $\sigma \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ et $\operatorname{supp}(\sigma) \subset K \times \overline{B(0,R)}$.

Nous pouvons maintenant entrer dans le dur.

(1a) **Une première égalité** Nous montrons que

$$T\big(\sigma(.,y)\big) = \int_{-\infty}^{y} T\big(\psi(.,z)\big)dz. \tag{30.195}$$ EQooDRISooWsWXnj

En voyant les deux côtés de cette égalité à prouver comme des fonctions de y, nous allons montrer qu'elles sont dérivables, de même dérivée et égale en $y < -R$.

À gauche nous permutons T avec la dérivée par la proposition 30.54 :

$$\partial_y\big(T\big(\sigma(.,y)\big)\big)_{y=y_0} = T\big((\partial_y\sigma)(.,y_0)\big) = T\big(\psi(.,y_0)\big) \tag{30.196}$$

parce que $(\partial_y\sigma)(x,y_0) = \psi(x,y_0)$.

À droite, la proposition 29.31 donne la première dérivée :

$$\partial_y\Big(\int_{-\infty}^{y} T\big(\psi(.,z)\big)dz\Big)_{y=y_0} = T\big(\psi(.,y_0)\big). \tag{30.197}$$

Notez que la proposition 30.54(1) dit alors que les deux membres de (30.195) sont de classe C^∞.

Pour $y < -R$, d'une part $\sigma(.,y) = 0$ et d'autre part, $\int_{-\infty}^{y} T\big(\psi(.,z)\big)dz = 0$ parce que l'intégrale est entièrement sur un domaine où $\psi(.,y) = 0$.

Donc l'égalité (30.195) est établie.

(1b) **Une seconde égalité** Nous prouvons maintenant que

$$\int_{\mathbb{R}} T\big(\psi(.,z)\big)dz = 0. \tag{30.198}$$ EQooTKHVooEqhpHH

Nous nous souvenons que $\psi(.,r) = 0$ si $r > R$. Donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} T\big(\psi(.,z)\big)dz &= \int_{-\infty}^{\infty} T\big(\psi(.,z)\big)dz && \text{(30.199a)}\\ &= \int_{-\infty}^{R} T\big(\psi(.,z)\big)dz && \text{(30.199b)}\\ &= T\big(\sigma(.,R)\big). && \text{(30.199c)}\end{aligned}$$

La dernière égalité est (30.195).

(1c) **On ressort la définition de ψ** C'est le moment de nous souvenir la définition de ψ et de la substituer dans (30.198) en tenant compte de la linéarité de T. Nous avons :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}} T\big(\psi(.,z)\big)dz && (30.200a)\\
&= \int_{\mathbb{R}} T\big(\phi(.,z)\big)dz - \int_{\mathbb{R}} T\Big(\xi(z)\int_{\mathbb{R}}\phi(.,s)ds\Big)dz && (30.200b)\\
&= \int_{\mathbb{R}} T\big(\phi(.,z)\big)dz - \int_{\mathbb{R}} \xi(z)dz\, T\Big(\int_{\mathbb{R}}\phi(.,s)ds\Big) && (30.200c)\\
&= \int_{\mathbb{R}} T\big(\phi(.,z)\big)dz - T\Big(\int_{\mathbb{R}}\phi(.,s)ds\Big). && (30.200d)
\end{aligned}$$

SUBEQooXSQMooEuUZUe

Justifications :

- Pour (30.200c). Le nombre $\xi(z)$ sort de T. Et $T\big(\int_{\mathbb{R}}\phi(.,s)ds\big)$ sort de l'intégrale en z.

Le cas $n=1$ est prouvé.

(2) **La récurrence** Nous supposons que le théorème est prouvé jusqu'à n et nous le prouvons pour $n+1$. Soit donc $\phi\in\mathscr{D}(\Omega\times\mathbb{R}^{n+1})$. La fonction $y\mapsto T\big(\phi(.,y)\big)$ est continue et à support compact. Donc Fubini 14.302 s'applique et nous allons permuter les intégrales une à une avec T. Avant cela nous définissons quelques fonctions intermédiaires.

D'abord, pour $t\in\mathbb{R}$ nous posons

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_t\colon \Omega\times\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\
(\omega,y) &\mapsto \phi\big(\omega,(y,t)\big).
\end{aligned} \tag{30.201}$$

Ensuite, nous posons

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}\colon \Omega\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\
(\omega,t) &\mapsto \int_{\mathbb{R}^n}\tilde{\phi}_t(\omega,y_1,\dots,y_n)dy_1\dots dy_n.
\end{aligned} \tag{30.202}$$

Maintenant nous calculons :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n+1}} T\big(\phi(.,y)\big)dy &= \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} T\big(\phi(.,y)\big)dy_1\dots dy_n\Big]dy_{n+1} && (30.203a)\\
&= \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} T\big(\tilde{\phi}_{y_{n+1}}(.,y_1,\dots,y_n)\big)dy_1\dots dy_n\Big]dy_{n+1} && (30.203b)\\
&= \int_{\mathbb{R}}\Big[T\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{\phi}_{y_{n+1}}(.,y_1,\dots,y_n)\Big)dy_1\dots dy_n\Big]dy_{n+1} && (30.203c)\\
&= \int_{\mathbb{R}} T\big(\bar{\phi}(.,y_{n+1})\big)dy_{n+1} && (30.203d)\\
&= T\Big(\int_{\mathbb{R}}\bar{\phi}(.,y_{n+1})dy_{n+1}\Big) && (30.203e)\\
&= T\Big(\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\phi(.,y)dy\Big) && (30.203f)
\end{aligned}$$

SUBEQooBFEFooFVtHmz
SUBEQooROIEooVMbfij
SUBEQooPFBOooMXUjXk
SUBEQooKYOPooPYHHbS

Justifications :

- Pour (30.203a). Théorème de Fubini 14.302.
- Pour (30.203c). Hypothèse de récurrence.
- Pour (30.203e). Encore la récurrence, avec $n=1$.
- Pour (30.203f). Encore Fubini, mais dans l'autre sens.

□

30.8 Distributions tempérées

L'espace de Schwartz[30] $\mathscr{S}(\Omega)$ est défini dans la définition 27.242 ; sa topologie y est discutée.

[30] Attention : ce Schwartz (avec un t) est le Schwartz des distributions dont le prénom est Laurent. À ne pas confondre avec Schwarz (sans t) dont le prénom est Cauchy.

Définition 30.56.
*Une **distribution tempérée** est une forme linéaire continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. L'ensemble des distributions tempérées est noté $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Si T est une telle distribution, nous notons $\langle T, \varphi\rangle$ l'image de φ par T.*

30.57.
Deux rappels.

(1) La topologique sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est celle de la définition 27.247.

(2) La topologie sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est donnée par la définition 30.14.

DEFooUSTNooYEZfPN

Lemme-Définition 30.58.
L'application

$$\begin{aligned}\delta\colon \operatorname{Fun}(\mathbb{R}^d) &\to \mathbb{C}\\ \varphi &\mapsto \varphi(0).\end{aligned} \tag{30.204}$$

est

(1) une distribution,

(2) une distribution tempérée.

*Cette distribution est nommée **distribution de Dirac**.*

Démonstration. Juste pour rappel, $\operatorname{Fun}(X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions sur X. Pour prouver que δ est une distribution, nous devons démontrer que $\delta\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est continue. Et pour qu'elle soit une distribution tempérée, il faut démontrer que $\delta\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est continue.

Nous utilisons le théorème 30.29(3) pour démontrer la continuité de δ sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Soit un compact $K \subset \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{D}(K)$. En prenant $m = 0$ nous devons avons la majoration

$$|\delta(\varphi)| = \varphi(0) \leqslant \|\varphi\|_{K,\infty} = p_{0,K}(\varphi). \tag{30.205}$$

Pour la continuité de δ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, nous utilisons les résultats de 27.248. Soit une suite $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$. En particulier, $p_{0,0}(\varphi_n) = \sup_x |\varphi_n(x)| \to 0$. Donc $\varphi_n(0) \to 0$ comme il le faut. □

Exemple 30.59.
La **valeur principale** de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la distribution

$$\begin{aligned}T\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}\\ \varphi &\mapsto \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}.\end{aligned} \tag{30.206}$$

Montrons que cela définit bien une distribution tempérée.

D'abord l'intégrale existe pour tout ϵ, par exemple parce que pour les grands $|x|$ nous avons par exemple $|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{x}$ et donc $\varphi(x)/x \leqslant 1/x^2$ dont l'intégrale converge. Nous devons maintenant regarder la limite.

Nous considérons une suite $\epsilon_n \to 0$ et la suite

$$a_n = \int_{|x|\geqslant\epsilon_n} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \tag{30.207}$$

Nous montrons que cette suite converge dans $\mathbb{R}$ en montrant qu'elle est de Cauchy. Pour cela nous travaillons un peu la forme de φ :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)dt = \varphi(0) + \int_0^1 x\varphi'(x\theta)d\theta. \tag{30.208}$$

Ce qui est dans l'intégrale est borné par $K = \|M_x\varphi'\|_\infty$ qui est parfaitement fini parce que φ est à décroissance rapide. Lorsque nous calculons $|a_m - a_n|$, le terme $\varphi(0)/x$ donne une intégrale nulle parce que le domaine d'intégration $\epsilon_m \leqslant |x| \leqslant \epsilon_n$ est symétrique alors que la fonction $1/x$ est impaire.

$$|a_m - a_n| \leqslant \Big| \int_{\epsilon_m<|x|<\epsilon_n} K \Big| = 2|\epsilon_n - \epsilon_m|K \tag{30.209}$$

Tout cela nous dit que T est bien définie. Nous devons encore étudier sa continuité.

Soit χ une fonction dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 sur $[-1, 1]$, paire et à valeurs dans $[0, 1]$. Pour tout $\epsilon > 0$ nous avons $\int_{|x|>\epsilon} \frac{\chi(x)}{x} dx = 0$.

Nous avons aussi $\varphi = \chi\varphi + (1-\chi)\varphi$, et donc

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{|\epsilon|>0} \chi(x)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_{|\epsilon|>0} \big(1-\chi(x)\big)\frac{\varphi(x)}{x}dx \tag{30.210a}$$

$$= \int_{|\epsilon|>0} \chi(x) \int_0^1 \underbrace{\varphi'(\theta x)}_{\leqslant \|\varphi'\|_\infty} d\theta + \int_{|x|\geqslant 1} \big(1-\chi(x)\big)\frac{\varphi(x)}{x}dx \tag{30.210b}$$

$$\leqslant \|\varphi'\|_\infty \int_{|x|\geqslant\epsilon} \chi(x)dx + \|\varphi\|_{L^1} \tag{30.210c}$$

$$= C\|\varphi'\|_\infty + \|\varphi\|_1. \tag{30.210d}$$

Cela est valable pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Mais nous savons que si $\varphi_n \overset{\mathscr{S}(\mathbb{R})}{\to} 0$, alors $\|\varphi_n\|_\infty \to 0$, $\|\varphi_n'\|_\infty \to 0$ et $\|\varphi_n\|_1 \to 0$; donc si $\varphi_n \overset{\mathscr{S}(\mathbb{R})}{\to} 0$, alors

$$T(\varphi_n) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant C\|\varphi_n'\|_\infty + \|\varphi_n\|_1 \to 0. \tag{30.211}$$

△

30.8.1 Topologie

La topologie que nous mettons sur l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est le même type que celle que nous mettons sur $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.

DEFooNLIKooYfafLw

Proposition-Définition 30.60 (Topologie sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$)**.**
Si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors l'application

$$\begin{aligned} p_\varphi \colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) &\to \mathbb{R} \\ T &\mapsto |T(\varphi)| \end{aligned} \tag{30.212}$$

est une seminorme.

Nous considérons sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ la topologie donnée par ces seminormes.

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

La définition 30.30 et la proposition 30.31 restent.

PropQAuJstI

Proposition 30.61.
Nous avons $T_n \overset{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow} T$ si et seulement si pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$.

Démonstration. Il s'agit encore de la proposition 7.399. Nous avons

$$T_n \overset{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow} T \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) p_\varphi(T_n - T) \to 0 \tag{30.213a}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) |(T_n - T)(\varphi)| \to 0 \tag{30.213b}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) |T_n(\varphi) - T(\varphi)| \to 0 \tag{30.213c}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) T_n(\varphi) \to T(\varphi) \tag{30.213d}$$

□

30.8.2 Distributions associées à des fonctions

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ alors nous lui associons une distribution $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ définie par la formule

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx. \tag{30.214}$$

Proposition 30.62.
L'application ainsi définie

$$\begin{aligned} L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) &\to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d) \\ f &\mapsto T_f \end{aligned} \tag{30.215}$$

est injective.

Démonstration. Si $T_f = 0$ alors pour tout $\varphi \in \mathscr{D}$ nous avons $\int_{\mathbb{R}^d} f\varphi = 0$. En vertu de la proposition 27.191 cela implique $f = 0$ presque partout. □

30.8.3 Composition avec une fonction

PropBQUOcyw

Proposition 30.63 ([795], page 113 et 32)**.**
Soit $T \in \mathscr{S}'(\Omega)$ et $f \in C^k(A \times \Omega)$ où A est ouvert dans $\mathbb{R}^d$. Nous posons

$$\begin{aligned} F\colon A &\to \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto T\big(f(\lambda, .)\big). \end{aligned} \tag{30.216}$$

Alors $F \in C^k(A)$.

30.8.4 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

Définition 30.64.
*La **transformée de Fourier** de la distribution tempérée $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est la distribution $\hat{T}$ définie par*

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}) \tag{30.217}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 30.65.
Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, nous avons $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$.

Démonstration. En utilisant les définitions,

$$\hat{T}_f(\varphi) = T_f(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{\varphi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left[\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) e^{-iyx} dy \right] dx \tag{30.218}$$

où nous avons noté xy le produit scalaire $x \cdot y$. Nous permutons les intégrales en utilisant le théorème de Fubini 14.305 avec la fonction

$$(x, y) \mapsto f(x)\varphi(y)e^{-ixy} \tag{30.219}$$

qui est parfaitement dans $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Nous écrivons alors

$$\hat{T}_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(y)e^{-iyx} dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\hat{f}(y)dy = T_{\hat{f}}(\varphi). \tag{30.220}$$

□

30.8.5 Convolution d'une distribution par une fonction

Nous savons que si $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et si $x \in \mathbb{R}^d$ alors la fonction $y \mapsto \psi(x - y)$ est encore une fonction dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ nous pouvons considérer la fonction $T * \psi = \psi * T$ définie par

EQooOUXKooGHDSzL

$$(T * \psi)(x) = T\big(y \mapsto \psi(x - y)\big). \tag{30.221}$$

Notons que $T * \psi$ est bien une fonction et non une distribution.

Le but de la définition est d'avoir

$$T_f * \psi = f * \psi. \tag{30.222}$$

En effet

$$(T_f * \psi)(x) = T_f\big(y \mapsto \psi(x - y)\big) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\psi(x - y)dy = (f * \psi)(x). \tag{30.223}$$

Exemple 30.66.
La distribution de Dirac est le neutre pour le produit de convolution. En effet

$$(\delta * \psi)(x) = \delta\big(y \mapsto \psi(x - y)\big) = \psi(x), \tag{30.224}$$

c'est-à-dire $\delta * \psi = \psi$. △

PropZMKYMKI

Proposition 30.67 ([778])**.**
Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors la distribution associée à la fonction $T * \psi$ est tempérée.

Démonstration. En agissant sur $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ nous avons

$$T_{T*\psi}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} T\big(y \mapsto (t_x\psi)(y)\big)\varphi(x)dx \tag{30.225a}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} T\big(y \mapsto \varphi(x)\psi(x-y)\big)dx \tag{30.225b}$$
$$= T\left(y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\psi(x-y)dx\right) \qquad \text{tho. 30.55} \tag{30.225c}$$
$$= T\big(y \mapsto (\varphi * \check{\psi})(y)\big) \tag{30.225d}$$
$$= T(\varphi * \check{\psi}). \tag{30.225e}$$

□

30.8.6 Approximation de la distribution de Dirac

LEMooHEEOooFtKgfz

Lemme 30.68 ([1]).
Soient des fonctions $j_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de classe C^∞ telles que

(1) Pour chaque n, la fonction $x \mapsto j_n\big(|x|\big)$ est strictement décroissante et converge ponctuellement vers zéro.

(2) Pour chaque x, la suite $n \mapsto j_n(x)$ est décroissante et converge vers 0. ITEMooFQYXooEkUAIb

(3) Pour tout $M > 0$, la suite j_n converge vers zéro uniformément sur $B(0,M)^c$. ITEMooFYCRooFeRRjE

(4) Pour tout δ et ϵ, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\int_{B(0,\delta)} j_n(x)dx - 1| \leqslant \epsilon$.

(5) Pour tout n, nous avons $\int_{\mathbb{R}} j_n = 1$.

Alors si $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x)j_n(x)dx = u(0). \tag{30.226}$$

Démonstration. Nous posons

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} j_n u \tag{30.227a}$$
$$I_{\delta,n} = \int_{B(0,\delta)} j_n u \tag{30.227b}$$
$$Z_{\delta,n} = \int_{B(0,\delta)} u(0)j_n \tag{30.227c}$$

Nous allons progressivement montrer qu'en prenant δ assez petit et n assez grand, les quantités $|I_n - I_{\delta,n}|$, $|I_{\delta,n} - Z_{\delta,n}|$ et $|Z_{\delta,n} - u(0)|$ peuvent être simultanément majorées par ϵ.

Soient $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$; vu que $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, il existe M tel que $\int_{|x|>M} |u| < \epsilon$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_1$ nous avons $|j_n(x)| < 1$ dès que $|x| > M$ (hypothèse (3)). Alors

$$\int_{|x|>M} |j_n(x)u(x)| < \epsilon. \tag{30.228}$$

De plus en posant $s = \max\{|u(x)| \text{ tel que } \delta \leqslant |x| \leqslant M\}$ (qui existe parce que u est continue et prise sur un compact) nous pouvons considérer N_2 tel que $j_n(x) < \epsilon/s$ pour tout $|x| > \delta$.

Avec $n > \max\{N_1, N_2\}$ nous avons

$$|\int_{B(0,\delta)} j_n u - \int_{\mathbb{R}} j_n u| = |\int_{B(0,\delta)^c} j_n u| \tag{30.229a}$$
$$\leqslant \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant M} |j_n u| + \int_{|x|\geqslant M} |j_n u| \tag{30.229b}$$
$$\leqslant \epsilon(1 + |M - \delta|). \tag{30.229c}$$

En redéfinissant le ϵ nous avons donc montré que pour tout ϵ et δ, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|I_{\delta,n} - I_n| \leqslant \epsilon \tag{30.230}$$

dès que $n \geqslant N$.

La fonction u est uniformément continue sur tout $\overline{B(0,\delta)}$, et nous pouvons donc choisir δ tel que $|u(0)-u(x)| \leqslant \epsilon$ pour tout $x \in \overline{B(0,\delta)}$. Pour ce δ, nous avons déjà trouvé un N tel que $|I_{\delta,n} - I_n| \leqslant \epsilon$ dès que $n > N$. Nous avons :

$$|I_{\delta,n} - Z_{\delta,n}| \leqslant \int_{B(0,\delta)} |u(x)-u(0)| j_n(x)dx \tag{30.231a}$$
$$\leqslant \epsilon \int_{B(0,\delta)} j_n \tag{30.231b}$$
$$\leqslant \epsilon. \tag{30.231c}$$

Nous avons donc prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un δ et un N tels que

$$\begin{cases} |I_{\delta,n} - I_n| \leqslant \epsilon & (30.232a)\\ |I_{\delta,n} - Z_{\delta,n}| \leqslant \epsilon & (30.232b) \end{cases}$$

dès que $n \geqslant N$.

Enfin nous avons

$$|Z_{\delta,n} - u(0)| = u(0) \left(\int_{B(0,\delta)} j_n - 1 \right), \tag{30.233}$$

et par l'hypothèse (4) nous pouvons choisir n assez grand pour que la parenthèse soit plus petite que ϵ.

Pour ϵ donné, nous avons donc trouvé un δ et un N tels que

$$|I_n - u(0)| \leqslant |I_n - I_{\delta,n}| + |I_{\delta,n} - Z_{\delta,n}| + |Z_{\delta,n} - u(0)| \leqslant 3\epsilon. \tag{30.234}$$

En passant à la limite nous avons bien $I_n \to u(0)$ dans $\mathbb{R}$. □

Il va sans dire que nous connaissons de telles fonctions. Nous en donnons une maintenant.

Exemple 30.69 ([797]).
Nous introduisons la fonction f_ϵ ($\epsilon > 0$) donnée par

$$f_\epsilon(x) = e^{-\epsilon|x|}. \tag{30.235}$$

Nous calculons la transformée de Fourier de f_ϵ en divisant le domaine d'intégration :

$$\hat{f}_\epsilon(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\epsilon x} e^{-ikx} dx + \int_0^\infty e^{-\epsilon x}\, e^{-ikx} dx \tag{30.236}$$

En décomposant les parties imaginaires et réelles, et avec un peu de changement de variables, nous pouvons utiliser les intégrales (18.100) et (18.101) pour obtenir

$$\hat{f}_\epsilon(k) = \frac{2\epsilon}{k^2+\epsilon^2}. \tag{30.237}$$

Sachant que $\arctan(x)$ est une primitive de $\frac{1}{x^2+1}$ et avec encore un peu de changement de variables, nous avons[31]

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_\epsilon(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\epsilon}{k^2+\epsilon^2} = 2[\arctan(x/\epsilon)]_{-\infty}^{\infty} = 2\pi. \tag{30.238}$$

Cela montre que si nous introduisons la fonction δ_ϵ donnée par

$$\delta_\epsilon(k) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2+k^2}, \tag{30.239}$$

alors nous avons une fonction qui tout en même temps ressemble à $\hat{f}_\epsilon$ et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_\epsilon(k)dk = 1 \tag{30.240}$$

pour tout ϵ.

Jusqu'ici nous avons montré que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} dx = 2\pi\delta_\epsilon(k). \tag{30.241}$$

EQooQOOOooBnfJNj

Pour chaque $\epsilon > 0$ nous avons $\delta_\epsilon \in L^1(\mathbb{R})$. △

[31] Et en écrivant correctement l'intégrale sur $\mathbb{R}$ comme une limite, etc.

Proposition 30.70 ([1]).
Soit $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Alors nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ixy} dx\, dy = 2\pi g(0). \tag{30.242}$$

EQooBOJUooQGvMrk

Démonstration. Soit $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$; nous multiplions l'équation (30.241) par $u(k)$ et nous intégrons par rapport à k :

$$\int_{\mathbb{R}} u(k) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} dx \right] dk = 2\pi \int_{\mathbb{R}} u(k) \delta_\epsilon(k) dk. \tag{30.243}$$

EQooTTQQooKxhxzl

Il s'agit de passer à la limite dans l'équation (30.243). Les intégrales à gauche peuvent être effectuées séparément parce qu'elles respectent le théorème de Fubini. En effet soit la fonction

$$f(k, x) = u(k) e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} \tag{30.244}$$

qui est dans $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ en vertu du critère du corolaire 14.304 et du fait que à la fois $k \mapsto |u(k)|$ et $x \mapsto e^{-\epsilon|x|}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$.

Nous pouvons donc grouper et dégrouper les intégrales et en particulier les inverser. Si nous effectuons d'abord l'intégrale sur k nous trouvons

$$\int_{\mathbb{R}} u(k) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} dx \right] dk = \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon|x|} \int_{\mathbb{R}} u(k) e^{-ikx} dk\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon|x|} \hat{u}(x) dx. \tag{30.245}$$

La fonction $x \mapsto |e^{-\epsilon|x|}\hat{u}(x)|$ est majorée (uniformément en ϵ) par $x \mapsto \hat{u}(x)$ qui est intégrable parce que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathscr{S}$ est dans $\mathscr{S}$ par la proposition 29.22. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 14.207 nous permet de permuter la limite $\epsilon \to 0$ avec l'intégrale et obtenir

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} u(k) \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} dx\, dk = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(k) e^{-ikx} dk\, dx. \tag{30.246}$$

Notons qu'en passant à la limite nous avons perdu le droit de permuter les intégrales.

Nous devons encore prouver que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} u(k) \delta_\epsilon(k) dk = u(0). \tag{30.247}$$

Cela n'est rien d'autre que le lemme 30.68 appliqué à la suite de fonctions $j_n = \delta_{1/n}$. □

30.71.
Notons que les intégrales dans (30.242) ne peuvent pas être permutées parce que $\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} dy$ n'existe pas. Il faut avouer que, malgré tous les conseils du type « attention : permuter des intégrales doit être fait avec prudence », ce n'est pas tous les jours que nous trouvons des intégrales qui ne peuvent pas être permutées, autrement que dans des exemples fait exprès.

30.8.7 Peigne de Dirac

Proposition 30.72.
La formule

$$\Delta_a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{ka} \tag{30.248}$$

EqMEVmKyg

définit un élément de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

La forme linéaire Δ_a est le **peigne de Dirac** de pas a.

Démonstration. Nous utilisons le critère de continuité séquentielle en zéro du théorème 30.29. Soit une suite $\varphi_n \to 0$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Par le théorème 30.26 il existe un compact K de $\mathbb{R}$ pour lequel $\varphi_n \in \mathscr{D}(K)$ pour tout n et $\varphi_n \to 0$ dans $\mathscr{D}(K)$. La somme 30.248 est donc finie et nous pouvons la permuter avec une limite :

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_a(\varphi_n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(ka). \tag{30.249}$$

La limite $\varphi_n \to 0$ dans $\mathscr{D}(K)$ signifie que nous avons convergence uniforme de la fonction et de toutes ses dérivées vers 0. En particulier $\|\varphi_n\|_\infty \to 0$; disons que la somme (qui est finie) fasse s termes :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_n(ka) \leqslant s\|\varphi_n\|_\infty. \tag{30.250}$$

Le terme de droite tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. □

Donc Δ_a est bien une distribution au sens de la définition 30.28.

Lemme 30.73 ([749]).
Le peigne de Dirac vérifie la relation

$$\Delta_a = \frac{1}{a}\Delta_1 \circ D_a \tag{30.251}$$

où D_a est l'application $D_a : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$(D_a f)(x) = af(ax). \tag{30.252}$$

Démonstration. Pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ nous avons

$$\Delta_a(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(ka) = \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (D_a\varphi)(k) = \frac{1}{a}\Delta_1(D_a\varphi). \tag{30.253}$$

□

Proposition 30.74.
Le peigne de Dirac est une distribution tempérée.

Notez qu'il y a plus de fonctions dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ que dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$; il est donc plus difficile de rentrer dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ que dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$: il est plus compliqué d'avoir existence de $T(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Nous avons

$$|\Delta_a(\varphi)| = |\sum_k \varphi(ak)| = \left|\sum_k \frac{(1+a^2k^2)\varphi(ak)}{1+a^2k^2}\right| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(1+x^2)\varphi(x)\right| \sum_k \frac{1}{1+a^2k^2}. \tag{30.254}$$

La somme $\sum_k \frac{1}{1+a^2k^2}$ est une somme convergente, et le supremum est borné par la proposition 27.245 en prenant $Q(x) = 1+x^2$. En effet sur $\overline{B(0,r)}$ la fonction $x \mapsto (1+x^2)\varphi(x)$ est bornée par ce que c'est une fonction continue sur un compact, et à l'extérieur de $B(0,r)$ cette fonction est alors bornée par 1. □

Si aucune ambigüité n'est à craindre, nous noterons f la distribution T_f.

Exemple 30.75.
La transformée de Fourier de la distribution de Dirac est la fonction constante : $\hat{\delta} = 1$. En effet si nous agissons sur une fonction test,

$$\hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx. \tag{30.255}$$

△

30.9 L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$

Dans cette section nous notons I un ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$; si ψ est une fonction sur $I \times \Omega$ nous allons noter $\psi_t : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction $\psi_t(x) = \psi(t,x)$. C'est une notation plus légère que $\psi(t,.)$.

30.9.1 Propriétés générales

La définition de l'espace $C^\infty(I, \mathscr{S}'(\Omega))$ est encore la définition 7.416 et les propriétés énoncées dans la proposition 30.46 sont encore bonnes ici.

D'abord parlons un peu de continuité en recopiant la proposition 7.415 dans notre contexte.

PropBXFmvPs

Proposition 30.76.
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ une fonction continue. Alors

ItemFTvVUEW

(1) Pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, l'application $t \mapsto u_t(\varphi)$ est continue.

(2) Pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, nous avons la limite

$$\lim_{t\to t_0} u_t(\varphi) = u_{t_0}(\varphi). \tag{30.256}$$

(3) *Nous avons la limite dans* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{t\to t_0} u_t = u_{t_0}. \tag{30.257}$$

Démonstration. Ceci est un cas particulier de la proposition 7.415. □

LEMooFTRNooNqFplH

Lemme 30.77.
Nous avons $C^\infty(I, \mathscr{S}'(\Omega)) \subset C^\infty(I, \mathscr{D}'(\Omega))$.

Démonstration. Soit $(T_t) \in C^\infty(I, \mathscr{S}'(\Omega))$. Pour chaque t nous avons

$$T_t \in \mathscr{S}'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega). \tag{30.258}$$

Ensuite il suffit de dire que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ la fonction

$$t \mapsto T_t(\varphi) \tag{30.259}$$

est de classe C^∞ parce que c'est le cas pour toute fonction dans $\mathscr{S}(\Omega)$. La proposition 30.46 (en changeant $\mathscr{D}$ en $\mathscr{S}$) conclut que $(T_t) \in C^\infty(I, \mathscr{D}'(\Omega))$. □

PropIIAcyDq

Proposition 30.78.
L'espace $\mathscr{S}(\Omega)$ *est complet et métrisable.*

Démonstration. En ce qui concerne le métrisable nous reprenons la formule de l'écart (7.513). Dans notre cas pour l'écrire explicitement il faudrait une énumération de $\mathbb{N}^2$ à partir de 1 (et non de zéro). Cette formule donne bien une distance parce que si $d(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ alors en particulier $p_{00}(\varphi_1 - \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty = 0$ et donc $\varphi_1 = \varphi_2$.

Nous montrons maintenant que $\mathscr{S}(\Omega)$ est complet en y considérant une suite de Cauchy (φ_n). Soit $\epsilon > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ ainsi que k, l assez grands pour que $\varphi_k - \varphi_l \in B_{\alpha\beta}(0, \epsilon)$. En particulier pour $\alpha = \beta = 0$ nous avons $\|\varphi_k - \varphi_l\|_\infty \leqslant \epsilon$, ce qui signifie que nous avons une suite vérifiant le critère de Cauchy uniforme 10.148. Elle converge donc uniformément vers une certaine fonction φ que la proposition 12.381 nous assure être continue. Il existe donc $\varphi \in C(\Omega)$ telle que

$$\varphi_k \xrightarrow{unif} \varphi. \tag{30.260}$$

Nous devons montrer que $\varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$. Le fait que φ soit de classe C^∞ s'obtient en utilisant les seminormes $p_{0,\alpha}(\varphi) = \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$ de la même façon que dans la preuve que $\mathscr{D}(\Omega)$ était complet (proposition 30.27). Nous obtenons en particulier que

$$\partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow{unif} \partial^\alpha \varphi \tag{30.261}$$

EqSZyYkqk

pour tout multiindice α. Montrons encore que φ est à décroissance rapide : nous devons montrer que pour tout α et β nous avons

$$p_{\alpha\beta}(\varphi) = \sup_{x\in\Omega} \left|x^\beta (\partial^\alpha \varphi)(x)\right| < \infty. \tag{30.262}$$

Étant donné que (φ_n) est de Cauchy dans $\mathscr{S}(\Omega)$ nous avons (pour ϵ fixé et k, l assez grands) :

$$\left|x^\beta (\partial^\alpha \varphi_k - \partial^\alpha \varphi_l)(x)\right| \leqslant \epsilon \tag{30.263}$$

pour tout $x \in \Omega$. En considérant l fixé et en prenant la limite $k \to \infty$ et en utilisant la convergence uniforme (30.261) nous trouvons que

$$\left|x^\beta (\partial^\alpha \varphi - \partial^\alpha \varphi_l)(x)\right| \leqslant \epsilon \tag{30.264}$$

Du coup nous pouvons faire la majoration

$$\sup_{x\in\Omega} \left|x^\beta (\partial^\alpha \varphi)(x)\right| \leqslant \sup_x \left|x^\beta (\partial^\alpha \varphi - \partial^\alpha \varphi_l)(x)\right| + \sup_x \left|(\partial^\alpha \varphi_l)(x)\right| \leqslant \epsilon + p_{\alpha\beta}(\varphi_l) < \infty \tag{30.265}$$

du fait que $p_{\alpha\beta}(\varphi_l) < \infty$ parce que $\varphi_l \in \mathscr{S}(\Omega)$.

Donc $\varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$ et ce dernier est alors complet. □

Proposition 30.79.
Soit $(T_t) \in C^0\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big)$ *et* $\psi \in \mathscr{S}(I \times \Omega)$. *Alors la fonction*

$$t \mapsto T_t(\psi_t) \tag{30.266}$$

EqULcaYjm

est continue sur I.

Démonstration. Soient $t_0 \in I$ et une suite convergente vers t_0 : $t_j \to t_0$ dans $\mathbb{R}$. Vu que (T_t) est continue en t, elle est en particulier séquentiellement continue et nous avons

$$T_{t_j} \xrightarrow{\mathscr{S}'(\Omega)} T_{t_0}. \tag{30.267}$$

Montrons que nous avons aussi $\psi_{t_j} \xrightarrow{\mathscr{S}(\Omega)} \psi_{t_0}$. Pour cela nous utilisons les seminormes[32] $p_{\alpha\beta}$ définies en (27.1099) :

$$\begin{aligned}
p_{\alpha\beta}(\psi_{t_j} - \psi_{t_0}) &= \sum_{x\in\Omega} \left| x^\beta \big(\partial^\alpha \psi(t_j, x) - \partial^\alpha \psi(t_0, x)\big) \right| && \text{(30.268a)}\\
&\leqslant \sup_{x\in\Omega} \left| x^\beta |t_0 - t_j| \sup_{t\in[t_0,t_j]} \left|\partial_t \partial^\alpha \psi(t, x)\right| \right| && \text{(30.268b)}\\
&\leqslant |t_0 - t_j| \sup_{x\in\Omega} \sup_{t\in I} \left| x^\beta \partial_t \partial^\alpha \psi(t, x) \right| && \text{(30.268c)}\\
&\leqslant |t_0 - t_j| P_{(\alpha t),\beta}(\psi). && \text{(30.268d)}
\end{aligned}$$

Pour la première majoration nous avons utilisé le théorème des accroissements finie 12.340. Pour la dernière ligne nous avons noté $P_{\alpha\beta}$ les seminormes de $\mathscr{S}(I \times \Omega)$ et (αt) est le multiiindice α à qui on a ajouté la variable t à la fin. Étant donné que $P_{(\alpha t)\beta}(\psi) < \infty$ nous avons bien

$$p_{\alpha\beta}(\psi_{t_j} - \psi_{t_0}) \to 0 \tag{30.269}$$

et donc $\psi_{t_j} \xrightarrow{\mathscr{S}(\Omega)} \psi_{t_0}$.

Étant donné que $\mathscr{S}(\Omega)$ est métrisable et complet, le corolaire 27.9 nous dit que

$$T_{t_j}(\psi_{t_j}) \xrightarrow{\mathbb{C}} T_{t_0}(\psi_{t_0}), \tag{30.270}$$

ce qui est bien le critère de continuité séquentielle de la fonction (30.266). □

RemZYVkHRT

Remarque 30.80.
La proposition 30.48 nous dit, a fortiori, que si $(T_t) \in C^\infty\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big)$ alors la formule

$$\tilde{T}(\psi) = \int_I T_t(\psi_t) \tag{30.271}$$

donne un élément $\tilde{T} \in \mathscr{D}'(I \times \Omega)$. Au cas où aucune confusion n'est à craindre, nous pourrons noter également T l'élément de $\mathscr{D}'(I \times \Omega)$ déduit de $T \in C^\infty\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big)$.

Notons que ce T ne sera pas toujours une distribution tempérée comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 30.81.
En posant $T_t(\varphi) = e^{t^2}\varphi(0)$ avec $I = \mathbb{R}$, l'intégrale

$$T(\psi) = \int_{\mathbb{R}} T_t(\psi_t) = \int_{\mathbb{R}} e^{t^2} \psi(t, 0) dt \tag{30.272}$$

ne converge pas pour tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \Omega)$. En effet par rapport à t, la fonction $\psi(t, 0)$ décroît rapidement mais pas spécialement assez rapidement pour compenser e^{t^2}. △

30.9.2 Dérivation

PropGKoPbko

Proposition 30.82 ([795]).
Soit $T \in C^k\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big)$ et $0 \leqslant l \leqslant k$. Pour tout $t_0 \in I$ l'application

$$\begin{aligned}
T_{t_0}^{(l)} \colon \mathscr{S}(\Omega) &\to \mathbb{C}\\
\varphi &\mapsto \left(\frac{d^l}{dt} T_t(\varphi)\right)(t_0)
\end{aligned} \tag{30.273}$$

EqZMDeZco

est bien définie, est une distribution et de plus

$$t \mapsto T_t^{(l)} \in C^{k-l}\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big). \tag{30.274}$$

[32] Pas parce que nous en avons envie, mais bien parce qu'elles font partie de la définition de la convergence et de tous ces trucs.

Attention que la formule (30.273) est bonne si $\varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$. Si par contre $\psi \in \mathscr{S}(I \times \Omega)$ et qu'on veut regarder $u_t^{(1)}(\psi_t)$ alors il faut regarder la proposition 30.83 et utiliser la formule (30.279) dans laquelle se trouve $u_t^{(1)}(\psi_t)$.

Démonstration. Pour $k = 0$ nous avons $T_t^{(0)} = T_t$ et c'est bon. Pour le cas $k = 1$ et $l = 0$ c'est encore $T_t^{(0)} = T_t$ qui fonctionne.

Le premier cas non trivial à traiter est $k = 1$ et $l = 1$. Nous considérons $t_0 \in I$; par définition de la dérivée, pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$, nous avons (pour peu que les limites existent) :

$$T_{t_0}^{(1)}(\varphi) = \frac{d}{dt}\Big[T_t(\varphi)\Big]_{t=t_0} = \lim_{j\to\infty} \frac{T_{t_0+\epsilon_j}(\varphi) - T_{t_0}(\varphi)}{\epsilon_j} = \lim_{j\to\infty} U_j(\varphi) \tag{30.275}$$

où

$$U_j = \frac{1}{\epsilon_j}\big(T_{t_0+\epsilon_j} - T_{t_0}\big). \tag{30.276}$$

et (ϵ_j) est une suite de réels tendant vers zéro.

Vu que $(T_t) \in C^k(I, \mathscr{S}'(\Omega))$, l'application $t \mapsto T_t(\varphi)$ est de classe C^k et en particulier l'expression (30.275) a une limite lorsque $j \to \infty$. Donc $T_{t_0}^{(1)}(\varphi)$ est bien définie. Le point (1) du corolaire 27.9 nous dit que $\lim_{j\to\infty} U_j(\varphi) = T_{t_0}^{(1)}(\varphi)$ et $T_{t_0}^{(1)}$ est une distribution (linéaire et continue).

Nous devons encore voir que $t \mapsto T_t^{(1)}$ est une application $C^0\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big)$. Cela est une conséquence du fait que (T_t) soit de classe C^1, ce qui se traduit par le fait que l'application

$$t \mapsto \frac{d}{dt}\Big(T_t(\varphi)\Big) \tag{30.277}$$

est continue (définition de la dérivée et point (1) de la proposition 30.76 appliquée à la dérivée).

Les cas $k \geqslant 1$ se traitent par récurrence. □

PropUDkgksG

Proposition 30.83 ([795]).
Soit $(T_t) \in C^1\big(I, \mathscr{S}'(\Omega)\big)$ et $\psi \in \mathscr{S}(I \times \Omega)$. Alors la fonction

$$t \mapsto T_t\big(\psi(t, .)\big) \tag{30.278}$$

est de classe C^1 sur I et

$$\frac{d}{dt}\Big(T_t\big(\psi(t, .)\big)\Big) = T_t^{(1)}\big(\psi(t, .)\big) + T_t\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t, .)\right) \tag{30.279}$$

Démonstration. Soient $t_0 \in I$ et $\epsilon_j \to 0$ une suite réelle. Le membre de gauche de (30.279), écrit en t_0, donne

$$\spadesuit = \lim_{j\to\infty} \frac{T_{t_0+\epsilon_j}\big(\psi(t_0+\epsilon_j, .)\big) - T_{t_0}\big(\psi(t_0, .)\big)}{\epsilon_j} \tag{30.280}$$

Afin d'alléger les notations nous allons écrire $\psi_t = \psi(t, .)$. Dans le numérateur de (30.280) nous ajoutons et soustrayons la quantité $T_{t_0+\epsilon_j}(\psi_{t_0})$ et nous découpons la limite en deux morceaux :

$$\spadesuit = \lim_{j\to\infty} \frac{T_{t_0+\epsilon_j}(\psi_{t_0+\epsilon_j} - \psi_{t_0})}{\epsilon_j} + \lim_{j\to\infty} \frac{(T_{t_0+\epsilon_j} - T_{t_0})(\psi_{t_0})}{\epsilon_j} \tag{30.281}$$

Le second terme vaut

$$\frac{d}{dt}\Big(T_t(\psi_{t_0})\Big)_{t=t_0} = T_{t_0}^{(1)}(\psi_{t_0}) \tag{30.282}$$

par la proposition 30.82. Occupons nous de l'autre morceau de ♠. Nous posons $U_j = T_{t_0+\epsilon_j}$ et

$$\varphi_j = \frac{1}{\epsilon_j}(\psi_{t_0+\epsilon_j} - \psi_{t_0}). \tag{30.283}$$

Nous voulons utiliser le corolaire 27.9(4) pour obtenir

$$\lim_{j\to\infty} U_j(\varphi_j) = T_{t_0}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0, .)\Big). \tag{30.284}$$

D'une part (T_t) est de classe C^∞ en t et nous avons donc la convergence $U_j \xrightarrow{\mathscr{S}'(\Omega)} T_{t_0}$. Reste à prouver que

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{S}(\Omega)} \frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0, .). \tag{30.285}$$

Cela en remarquant bien que la variable de dérivation n'est pas celle par rapport à laquelle nous voulons la convergence Schwartz[33]. Soient α et β des naturels et calculons un peu :

$$p_{\alpha\beta}\big(\varphi_j - \frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,.)\big) = \sup_{x\in\Omega}\left|x^\beta\partial^\alpha\Big(\frac{1}{\epsilon_j}\big(\psi(t_0+\epsilon_j,x)-\psi(t_0,x)\big) - \frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,x)\Big)\right| \tag{30.286}$$

EqEBUYDRA

Il est à présent l'heure d'utiliser un développement de Taylor avec le reste de la proposition 12.482 :

$$\psi(t_0+\epsilon_j,x) = \psi(t_0,x) + \epsilon_j\frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,x) + \frac{\epsilon_j^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(\bar{t},x) \tag{30.287}$$

pour un certain $\bar{t}\in[t_0,t_0+\epsilon_j]$. En mettant ça dans le calcul (30.286) nous restons avec

$$p_{\alpha\beta}\big(\varphi_j - \frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,.)\big) = \sup_{x\in\Omega}\left|x^\beta\partial^\alpha\Big(\epsilon_j\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(\bar{t},x)\Big)\right| \leqslant \epsilon_j P_{\alpha,2;\beta,0}(\psi) \tag{30.288}$$

où $P_{\alpha,k;\beta,l}$ sont les seminormes de $\mathscr{S}(I\times\Omega)$ avec la notation plus ou moins évidente de prendre α dérivations sur x, k sur t puis de multiplier par $x^\beta t^l$. Au final nous avons bien

$$\lim_{j\to\infty} p_{\alpha\beta}\big(\varphi_j - \frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,.)\big) = 0 \tag{30.289}$$

et donc la convergence $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{S}(\Omega)} \frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,.)$. □

LemWRoRPIX

Lemme 30.84.
Soit $(T_t)\in C^1\big(I,\mathscr{S}'(\Omega)\big)$ alors si $\mathcal{F}$ dénote la transformée de Fourier nous avons

$$\mathcal{F}\big(T_t^{(1)}\big) = (\mathcal{F}T)_t^{(1)} \tag{30.290}$$

où $(\mathcal{F}T)$ est la famille de distributions $(\mathcal{F}T)_t = \mathcal{F}T_t$.

Démonstration. Pour la preuve il suffit de tester l'égalité sur une fonction $\varphi\in\mathscr{S}(\Omega)$:

$$(\mathcal{F}T_t^{(1)})(\varphi) = T_t^{(1)}(\mathcal{F}\varphi) = \frac{d}{dt}\Big(T_t(\mathcal{F}\varphi)\Big) = \frac{d}{dt}\Big((\mathcal{F}T_t)(\varphi)\Big) = (\mathcal{F}T)_t^{(1)}(\varphi). \tag{30.291}$$

□

[33] Je ne sais pas si je me suis bien fait comprendre là.

Chapitre 31

Espaces de Sobolev, équations elliptiques

CHAPooVTIIooGOEvXT

31.1 Espaces de Sobolev

Rappel : la définition de la dérivée faible est 30.1.

31.1.1 Sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Sauf mention du contraire dans cette section I est un intervalle borné ouvert $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$.

Définition 31.1.
*Soit $I =]a, b[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$. L'**espace de Sobolev** $H^1(I)$ est l'ensemble*

$$H^1(I) = \Big\{ u \in L^2(I) \text{ tel que } \exists g \in L^2(I) \text{ tel que } \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \Big\}. \tag{31.1}$$

L'unique élément g de $L^2(I)$ vérifiant $\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi$ est noté u' et est nommé **dérivée** ; nous verrons dans les prochaines pages pourquoi.

L'espace H^1 accepte le produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle = \int_I uv + \int_I u'v', \tag{31.2}$$

et nous notons $\|.\|_{H^1}$ la norme correspondante qui n'est autre que

$$\|u\|_{H^1}^2 = \langle u, u \rangle = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2. \tag{31.3}$$

Nous introduisons l'espace $L^1_{loc}(I)$ des fonctions étant L^1 sur tout compact de I.

CorEVJYihj

Corolaire 31.2.
Si $u \in H^1(I)$ et si $u' = 0$ alors il existe une constante C telle que $u = C$ presque partout.

Démonstration. L'hypothèse $u' = 0$ signifie que pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(I)$,

$$\int_I u\varphi' = \int_I u'\varphi = 0. \tag{31.4}$$

La proposition 27.191 nous dit alors qu'il existe une constante C telle que $u = C$ presque partout. □

LemMPkbZxX

Lemme 31.3.
Tout élément de $H^1(I)$ admet un unique représentant continu.

Nous verrons dans le corolaire 31.5 que ce représentant pourra être prolongé par continuité sur $\bar{I}$.

Démonstration. Soient $y_0 \in I$ et $u \in H^1(I)$. Nous considérons la fonction

$$\bar{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt. \tag{31.5}$$

Notons que par définition, $u' \in L^2$ donc l'intégrale ne pose pas de problèmes. Montrons que $\bar{u}$ est continue sur $\bar{I}$. Pour cela nous considérons $x \in \bar{I}$ et h tel que $x+h \in \bar{I}$. Alors

$$\big|\bar{u}(x+h) - \bar{u}(x)\big| = \Big| \int_x^{x+h} u' \Big| \leqslant \int_x^{x+h} |u'|. \tag{31.6}$$

Mais la fonction $|u'|$ est dans $L^1_{loc}(I)$ par le lemme 27.42 ; elle est en particulier intégrable sur un ouvert contenant x et par conséquent la dernière intégrale tend vers zéro lorsque h tend vers 0.

Nous prouvons à présent que $\bar{u}$ est dans $H^1(I)$ et que sa dérivée est égale à u' ; pour cela nous allons montrer que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$,

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi. \tag{31.7}$$

Nous avons

$$\int_I \bar{u}\varphi' = \int_I \left(\int_{y_0}^x u'(t)dt \right) \varphi'(x)dx = \int_a^{y_0} \left(\int_{y_0}^x u'(t)dt \right) \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b \left(\int_{y_0}^x u'(t)dt \right) \varphi'(x)dx. \tag{31.8}$$

Pour faire plus court, nous notons $f(t,x) = u'(t)\varphi'(x)$. La première intégrale vaut

$$\begin{aligned}
\int_a^{y_0} \left(\int_{y_0}^x u'(t)\varphi'(x) \right) &= \int_a^{y_0} \left(\int_{y_0}^a f(t,x) \mathbb{1}_{t<x}(t,x)dt \right) dx && \text{(31.9a)} \\
&= \int_{y_0}^a \int_a^{y_0} f(t,x)\mathbb{1}_{t<x} dxdt && \text{(31.9b)} \\
&= \int_{y_0}^a \int_a^t f(t,x)dxdt && \text{(31.9c)} \\
&= -\int_a^{y_0} \int_a^t u'(t)\varphi'(x)dx\,dt && \text{(31.9d)}
\end{aligned}$$

subeqBVyBPLp

La permutation d'intégrales pour obtenir (31.9b) est due au théorème de Fubini 14.305(3). Par le même petit jeu, la seconde intégrale vaut

$$\int_{y_0}^b \int_t^b u'(t)\varphi'(x)dx\,dt. \tag{31.10}$$

En refaisant la somme,

$$\begin{aligned}
\int_I \bar{u}\varphi' &= -\int_a^{y_0} u'(t) \left(\int_a^t \varphi'(x)dx \right) dt + \int_{y_0}^b u'(t) \left(\int_t^b \varphi'(x)dx \right) dt && \text{(31.11a)} \\
&= -\int_a^{y_0} u'(t)\big(\varphi(t) - \varphi(a)\big)dt + \int_{y_0}^b u'(t)\big(\varphi(b) - \varphi(t)\big) && \text{(31.11b)} \\
&= -\int_a^b u'\varphi && \text{(31.11c)} \\
&= -\int_I u'\varphi. && \text{(31.11d)}
\end{aligned}$$

Notons que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ parce que φ est à support compact dans $]a,b[$. Nous avons donc prouvé que $\bar{u}$ est dans $H^1(I)$ et que $\bar{u}' = u'$. Par le corolaire 31.2, nous avons une constante C telle que $\bar{u} = u + C$ presque partout, c'est-à-dire $u = \bar{u} + C$ dans $H^1(I)$.

En résumé, $\tilde{u} = \bar{u} + C$ est un représentant continu de u dans $L^2(I)$.

L'unicité du représentant continu est simplement le fait que deux fonctions continues égales presque partout sont égales (proposition 20.154).

□

PropGWOIoDg

Proposition 31.4.
Si $u \in H^1(I)$, alors

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u' \tag{31.12}$$

pour tout $x, y \in I$.

Démonstration. Pour fixer les idées, nous supposons $x < y$. Nous considérons une suite $\varphi_n \in C_c^\infty(I)$ convergeant uniformément sur I vers $\mathbb{1}_{[x,y]}$. Nous exigeons de plus que

- φ_n' est positive sur $[a, x+\frac{1}{n}]$
- φ_n' est négative sur $[y-\frac{1}{n}, b]$
- $\varphi_n = 1$ sur $[x+\frac{1}{n}, y-\frac{1}{n}]$.
- $\varphi_n = 0$ sur $[a, x-1/n]$ et sur $[y+1/n, b]$.

Pour chaque n, nous découpons l'intégrale comme

$$-\int_I u'\varphi_n = \int_I u\varphi_n' = \int_a^{x-1/n} u\varphi_n' + \int_{x-1/n}^{x+1/n} u\varphi_n' + \int_{x+1/n}^{y-1/n} u\varphi_n' + \int_{y-1/n}^{y+1/n} u\varphi_n' + \int_{y+1/n}^{b} u\varphi_n'. \tag{31.13}$$

Par construction de φ_n, de ces 5 morceaux, il n'en reste que deux de non nulles :

$$\int_I u\varphi_n' = \underbrace{\int_{x-1/n}^{x+1/n} u(t)\varphi_n'(t)dt}_{A} + \underbrace{\int_{y-1/n}^{y+1/n} u(t)\varphi_n'(t)dt}_{B} \tag{31.14}$$

Soit $\epsilon > 0$ et n suffisamment grand pour avoir $u(t) \in B\big(u(x), \epsilon\big)$ pour tout $t \in B(x, \frac{1}{n})$ et (en même temps) $u(t) \in B\big(u(y), \epsilon\big)$ pour tout $t \in B(y, \frac{1}{n})$. C'est la continuité de u qui permet de trouver un tel n. Pour cette valeur de n, en tenant compte des hypothèses sur la positivité de φ_n' nous avons

$$\int_{x-1/n}^{x+1/n} \big(u(x)-\epsilon\big)\varphi_n'(t)dt \leqslant \int_{x-1/n}^{x+1/n} u(t)\varphi_n'(t)dt \leqslant \int_{x-1/n}^{x+1/n} \big(u(x)+\epsilon\big)\varphi_n'(t)dt, \tag{31.15}$$

mais par hypothèse sur φ_n nous trouvons

$$\int_{x-1/n}^{x+1/n} \varphi_n'(t)dt = \varphi_n(x+\frac{1}{n}) - \varphi(x+\frac{1}{n}) = 1. \tag{31.16}$$

donc

$$u(x) - \epsilon \leqslant \int_{x-1/n}^{x+1/n} u(t)\varphi_n'(t)dt \leqslant u(x) + \epsilon. \tag{31.17}$$

Pour encadrer la seconde, il faut être plus prudent avec les signes parce que φ_n' y est négative. En posant $\psi_n = -\varphi_n$ nous avons

$$-B = \int_{y-1/n}^{y+1/n} u(t)\psi_n(t)dt, \tag{31.18}$$

et donc

$$u(y) - \epsilon \leqslant -B \leqslant u(y) + \epsilon \tag{31.19}$$

ou encore

$$-\epsilon - u(y) \leqslant B \leqslant \epsilon - u(y). \tag{31.20}$$

En additionnant avec (31.17) nous voyons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $N(\epsilon)$ tel que nous ayons

$$u(x) - u(y) - 2\epsilon \leqslant \int_I u'\varphi_n \leqslant u(x) - u(y) + 2\epsilon \tag{31.21}$$

pour tout $n \geqslant N$. Nous voulons évidemment prendre la limite $\epsilon \to 0$, c'est-à-dire $n \to \infty$. Étant donné que $\varphi_n(t) < 1$ pour tout t et pour tout n, la fonction $t \mapsto u'(t)\varphi_n(t)$ est dominée par u', qui est dans $L^1(I)$ par le lemme 27.42. Le théorème de la convergence dominée nous permet donc d'affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I u'\varphi_n = \int_I u' \mathbb{1}_{[x,y]} = \int_x^y u', \tag{31.22}$$

et donc les inégalités (31.21) donnent le résultat, grâce au signe dans (31.13). □

Corolaire 31.5.
Si $[u] \in H^1(I)$, le représentant continu $u \in C^0(I)$ peut être prolongé par continuité en $u \in C^0(\bar{I})$.

Démonstration. Soit (x_n) une suite strictement croissante dans $]a,b[$ convergeant vers b. Nous voulons montrer que la suite $\big(u(x_n)\big)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, ce qui nous permettra de définir

$$u(b) = \lim_{n\to\infty} u(x_n). \tag{31.23}$$

qui sera évidemment continue. Cette construction ne dépendra pas du choix de la suite (x_n) parce que deux fonctions continues sur $\bar{I}$ et égales sur I sont égales sur $\bar{I}$.

En notant u' la dérivée de u dans H^1, nous avons par construction du représentant continu : $u(x) = \int_{y_0}^{x} u'(t)dt$. Et donc

$$\big|u(x_n) - u(x_{n+p})\big| = \left|\int_{y_0}^{x_n} u' - \int_{y_0}^{x_{n+p}} u'\right| = \left|\int_{x_n}^{x_{n+p}} u'\right|. \tag{31.24}$$

Vu que la suite (x_n) est de Cauchy et que u' est intégrable (même sur $\bar{I}$), la limite $n\to\infty$ de cela est zéro, quelle que soit la valeur de p. Donc $\big(u(x_n)\big)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et est donc convergente. □

ThoESIyxfU

Proposition 31.6 ([128, 1])**.**
Quelques propriétés de l'espace de Sobolev $H^1(I)$ où $I =]a,b[$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}$.
ITEMooITQUooKWwMwu

(1) $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.

(2) $H^1(I)$ s'injecte de façon compacte dans $C^0(\bar{I})$.

(3) $H^1(I)$ s'injecte de façon continue dans $L^2(I)$.

Démonstration. Nous prouvons point par point.

(1) Le seul critère à vérifier est la complétude. Pour cela nous considérons une suite de Cauchy (u_n) dans $H^1(I)$. Si $\epsilon > 0$, alors il existe $N > 0$ tel que pour tout $p \geqslant 0$ nous ayons $\|u_{n+p} - u_n\|_{H^1}^2 \leqslant \epsilon$, c'est-à-dire

$$\|u_{n+p} - u_n\|_{L^2}^2 + \|u'_{n+p} - u'_n\|_{L^2}^2 \leqslant \epsilon. \tag{31.25}$$

En particulier les suites (u_n) et (u'_n) sont de Cauchy dans L^2 qui est complet par le théorème de Fischer-Riesz 27.56. Nous notons donc

$$u_n \xrightarrow{L^2} u \tag{31.26a}$$

$$u'_n \xrightarrow{L^2} v. \tag{31.26b}$$

Nous allons maintenant montrer quelques limites.

(1a) $\underline{u_n\varphi \xrightarrow{L^2} u\varphi}$ Si M est une constante qui majore φ alors $\|u_n\varphi - u\varphi\|_2 \leqslant M\|u_n - u\|_2 \to 0$.

(1b) $\underline{u'_n\varphi \xrightarrow{L^2} v\varphi}$ C'est la même chose avec $\|u'_n\varphi - v\varphi\|_2 \leqslant M\|u'_n - v\|_2 \to 0$.

(1c) $\underline{u \in H^1(I) \text{ avec } u' = v}$ Attendu le corolaire 27.43 qui permet de permuter intégrale et limite dans $L^2(I)$ et les limites que nous venons de prouver,

$$\int_I u\varphi' = \lim_{n\to\infty}\int_I u_n\varphi' = -\lim_{n\to\infty}\int_I u'_n\varphi = -\int_I v\varphi. \tag{31.27}$$

Cela signifie que v est la dérivée faible de u : $u' = v$.

(1d) $\underline{u_n \xrightarrow{H^1} u}$
Nous pouvons alors prouver que $u_n \to u$ dans $H^1(I)$:

$$\|u_n - u\|_{H^1(I)}^2 = \|u_n - u\|_{L^2}^2 + \|u'_n - u'\|_{L^2}^2. \tag{31.28}$$

Mais nous savons déjà que $u_n \to u$ dans L^2 (d'ailleurs c'est la définition de u) et que $u' = v$ alors que par définition de v, nous avons $u'_n \to v$ dans L^2.

Tout cela donne que $u_n \to u$ dans $H^1(I)$ et donc que $H^1(I)$ est un espace complet.

(2) L'application que nous allons prouver être compacte entre $H^1(I)$ et $C^0(\bar{I})$ est

$$\begin{aligned}\psi\colon H^1(I) &\to C^0(\bar{I})\\ [u] &\mapsto \tilde{u}\end{aligned} \tag{31.29}$$

où $[u]$ désigne une classe de fonction dans $H^1(I)$ et $\tilde{u}$ est son représentant continu prolongé par continuité à $\bar{I}$[1], qui existe par le lemme 31.3 et le corolaire 31.5. Cette application est une injection par l'unicité du représentant continu. Nous allons prouver que c'est une application compacte en utilisant le critère (2) de la proposition 27.3. Pour cela nous allons commencer par utiliser le théorème d'Ascoli sur l'ensemble $\tilde{\mathcal{B}}$ des représentants continus des éléments de $\mathcal{B}$, prolongés par continuité sur $\bar{I}$; c'est-à-dire $\tilde{B} \subset C^0(\bar{I})$.

Soit $u \in \tilde{\mathcal{B}}$; par la proposition 31.4, nous avons

$$\begin{aligned}\big|u(x) - u(y)\big| &= \Big|\int_y^x u'(t)dt\Big| && (31.30a)\\ &= \left|\int_I \mathbb{1}_{[x,y]}(t)u'(t)dt\right| && (31.30b)\\ &\leqslant \|\mathbb{1}_{[x,y]}\|_{L^2}\|u'\|_{L^2} && (31.30c)\\ &\leqslant \sqrt{|x-y|}\|u'\|_{H^1} && (31.30d)\\ &\leqslant \sqrt{|x-y|}. && (31.30e)\end{aligned}$$

où nous insistons sur le fait que la continuité n'impliquant pas la dérivabilité, le u' ici est la dérivé au sens de H^1, et non la dérivée usuelle. Quoi qu'il en soit, l'ensemble $\tilde{\mathcal{B}}$ est équicontinu[2]. Nous montrons à présent qu'il est également borné pour la norme uniforme. Soit $u \in \tilde{\mathcal{B}}$; vu la construction du représentant continu au lemme 31.3, nous avons

$$\begin{aligned}\big|u(x)\big| &= \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)dy\right| && (31.31a)\\ &= \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_y^x u'(t)dt - u(y)\right)dy\right| && (31.31b)\\ &= \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_y^x u'(t)dtdy - \frac{1}{b-a}\int_a^b u(y)dy\right| && (31.31c)\\ &\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b |u'(t)|dt\,dy + \frac{1}{b-a}\int_a^b |u(y)|dy. && (31.31d)\end{aligned}$$

EqCFwSQxh

À ce niveau, il faut remarquer que dans la première intégrale, le passage de la valeur absolue à l'intérieur de l'intégrale en même temps que l'élargissement des bornes n'a rien d'innocent. Si $x < y$, les bornes ne sont pas « dans le bon ordre » et nous ne pouvons pas faire la majoration usuelle en entrant simplement la valeur absolue. Ici nous tenons compte de cela en élargissant les bornes, et en les mettant dans le bon ordre. Le passage exact est le suivant : si $x, y \in]a, b[$, nous avons

$$\left|\int_y^x f(t)dt\right| \leqslant \left|\int_y^x |f(t)|dt\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(t)|dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt. \tag{31.32}$$

Notons en particulier que dans le cas du passage vers l'équation (31.31d), le nombre x est fixé alors que y est une variable d'intégration. Donc l'ordre des deux est certainement de temps en temps le « mauvais ».

[1] Encore que par souci d'économie d'encre nous n'allons pas écrire toujours les tildes et noter u le représentant continu prolongé à $\bar{I}$ par le corolaire 31.5.

[2] Définition 7.371.

Quoi qu'il en soit, la première intégrale se réduit à une multiplication par $b-a$ et le calcul continue :

$$|u(x)| \leqslant \int_I |u'(t)|dt + \frac{1}{b-a}\int_I |u| \tag{31.33a}$$
$$\leqslant \sqrt{b-a}\|u'\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\|u\|_{L^2} \tag{31.33b}$$
$$\leqslant \left(\sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\right)\left(\|u'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\right) \tag{31.33c}$$
$$\leqslant \left(\sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\right)\|u\|_{H^1} \tag{31.33d}$$
$$= \sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}. \tag{31.33e}$$

Donc $\tilde{\mathcal{B}}$ est borné pour la norme L^∞. Et c'est même borné par un nombre facilement calculable connaissant I. En particulier l'ensemble

$$\{u(x) \text{ tel que } u \in H^1\} \tag{31.34}$$

est, pour tout x, contenu dans la boule de rayon $\sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}$ et donc est relativement compact dans $\mathbb{R}$. Par conséquent le théorème d'Ascoli 27.7 nous dit que l'ensemble $\tilde{\mathcal{B}}$ est relativement compact dans $C^0(I)$.

Par conséquent nous avons montré que l'image par ψ de la boule unité fermée $\mathcal{B}$ de $H^1(I)$ est relativement compacte dans $C^0(\bar{I})$, ce qui signifie que ψ est une application compacte.

(3) Les éléments de $H^1(I)$ sont des éléments de $L^2(I)$; donc l'identité est une injection. Nous devons seulement étudier la continuité. Si (u_n) est une suite dans H^1 convergeant dans H^1 vers u, alors

$$\|u_n - u\|_{L^2} \leqslant \|u_n - u\|_{L^2} + \|u_n' - u'\|_{L^2} = \|u_n - u\|_{H^1} \to 0. \tag{31.35}$$

Donc la suite des images (par l'identité) converge dans L^2. L'identité est donc continue.

□

31.1.2 Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $v \in L^2(\Omega)$ (voir 27.104). Les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

31.1.2.1 Définition

Définition 31.7 (Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$)**.**
*Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^n$. L'espace de **Sobolev** $H^1(\Omega)$ est :*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i = 1, \dots, n, \partial_i v \in L^2(\Omega)\}. \tag{31.36}$$

Nous munissons cet espace d'un produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2}, \tag{31.37}$$

EQooQRMKooLaMpcp

où $\nabla u = \sum_i \partial_i u \in L^2$.

L'existence des intégrales dans le produit scalaire est assurée par le fait que u, v, ∇u et ∇v sont dans $L^2(\Omega)$. La définition du produit scalaire dans L^2 est la définition 27.416 (mais sans la conjugaison complexe).

Pour la même raison, $(u, u)_{H^1} = 0$ demande que chacun des deux termes est séparément nul, et nous avons $u = 0$ dans L^2, et donc aussi dans H^1.

Théorème 31.8 ([798])**.**
L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert[3]*.*

[3] Définition 25.3.

Démonstration. Nous devons nous assurer que l'espace H^1 est complet. Pour cela nous considérons une suite de Cauchy (u_n) dans H^1. Soit $\epsilon > 0$; il existe $N > 0$ tel que si $n, m > N$ alors $\|u_n - u_m\|_{H^1} < \epsilon$. Or en déballant la définition de la norme et du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\|u_m - u_n\|_{H^1}^2 &= (u_m - u_n, u_m - u_n)_{H^1} && (31.38a)\\ &= \langle u_m - u_n, u_m - u_n\rangle + \langle \nabla(u_m - u_n), \nabla(u_m - u_n)\rangle && (31.38b)\\ &= \|u_m - u_n\|_{L^2}^2 + \|\nabla(u_m - u_n)\|_{L^2}^2. && (31.38c)\end{aligned}$$

En particulier les suites (u_n) et (∇u_n) sont de Cauchy dans L^2. Vu que L^2, lui, est complet (théorème 27.55), il existe $u \in L^2$ et $v_i \in L^2$ tels que

$$u_n \xrightarrow{L^2} u \tag{31.39a}$$
$$\partial_i u_n \xrightarrow{L^2} v_i. \tag{31.39b}$$

Nous savons que l'injection $i\colon L^2 \to \mathscr{D}'$ est continue par la proposition 30.34. Nous avons donc aussi les limites

$$T_{u_n} \xrightarrow{\mathscr{D}'} T_u \tag{31.40a}$$
$$T_{\partial_i u_n} \xrightarrow{\mathscr{D}'} T_{v_i}. \tag{31.40b}$$

SUBEQooMWLIooWakTkx

La dérivée étant une opération continue sur $\mathscr{D}'$ nous avons de plus

$$\partial_i(T_{u_n}) \xrightarrow{\mathscr{D}'} \partial_i(T_u) \tag{31.41}$$

En utilisant le lemme 30.37 nous avons alors

$$T_{\partial_i u_n} = \partial_i(T_{u_n}) \xrightarrow{\mathscr{D}} \partial_i(T_u) = T_{\partial_i u}. \tag{31.42}$$

En comparant avec (31.40b) et par l'unicité de la limite, nous avons $T_{v_i} = T_{\partial_i u}$. Cela implique $v_i = \partial_i u$.

Vu que $v_i \in L^2$ nous avons aussi $\partial_i u \in L^2$. Par conséquent $u \in H^1(\Omega)$ parce que ses dérivées sont dans L^2.

Nous devons maintenant prouver que $u_n \xrightarrow{H^1} u$. Nous avons

$$\|u_n - u\|_{H^1}^2 = \|u_n - u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2}^2 \tag{31.43}$$

Le premier terme tend vers zéro parce que $u_n \xrightarrow{L^2} u$ et le second parce que $\partial_i u_n \xrightarrow{L^2} \partial_i u$. □

31.1.3 Espace de Sobolev fractionnaire

Définition 31.9.
*Pour $m \in \mathbb{N}$ et un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ nous définissons l'**espace de Sobolev***

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\, \forall |\alpha| \leqslant m\}. \tag{31.44}$$

Nous définissons également un produit scalaire sur H^m par

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_{L^2}. \tag{31.45}$$

En particulier la topologie est celle de la norme dérivée du produit scalaire :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{31.46}$$

EQooMCWMooKKTqzM

Le lemme suivant montre que la proposition 29.21 fonctionne encore avec L^2 au lieu de $\mathscr{S}$.

LEMooAGBZooWCbPDd

Lemme 31.10 (Lemme de transfert[799], thème 76)**.**
Soit $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout multiindice α avec $|\alpha| \leqslant m$ nous avons

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = \big[\xi \mapsto i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi)\big]. \tag{31.47}$$

Lemme 31.11.
Il existe des constantes c_1 et c_2 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$c_1(1+\|x\|^2)^m \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} (x^\alpha)^2 \leqslant c_2(1+\|x\|^2)^m. \tag{31.48}$$

Lemme 31.12.
Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous avons $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si l'application

$$\xi \mapsto \big(1+|\xi|^2\big)^{k/2}\hat{u} \tag{31.49}$$

est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $k \leqslant m$. Ici $|\xi|$ est la norme euclidienne de ξ dans $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. Vu le lemme 31.10, il suffit de montrer que

$$\big(1+|\xi|^2\big)^{k/2}\hat{u} \tag{31.50}$$

EQooIJXTooWsGNxw

est dans L^2 pour tout $k \leqslant m$ si et seulement si

$$\xi^\alpha \hat{u} \tag{31.51}$$

EQooILPQooNGUvjD

l'est pour tout α avec $|\alpha| \leqslant m$.

L'expression (31.50) est une somme d'expressions du type (31.51). Donc l'implication dans un sens est montrée. Pour l'autre sens, nous savons que

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}, \tag{31.52}$$

et donc

$$|\xi^\alpha| \leqslant |\xi_1|^{\alpha_1}\dots|\xi_n|^{\alpha_n}. \tag{31.53}$$

Or $|\xi|^{|\alpha|} = |\xi|^{\sum_i \alpha_i} = |\xi|^{\alpha_1}\dots|\xi|^{\alpha_n}$ et $|\xi| \geqslant |\xi_i|$ pour tout i, donc

$$|\xi^\alpha| \leqslant |\xi|^{|\alpha|}. \tag{31.54}$$

D'autre part pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout k positif nous avons

$$(1+x^2)^{k/2} \geqslant x^k \tag{31.55}$$

qui est facile à vérifier en prenant le carré des deux membres.

En remettant tout ensemble,

$$|\xi^\alpha\hat{u}| \leqslant |\xi^\alpha||\hat{u}| \leqslant |\xi|^{|\alpha|}|\hat{u}| \leqslant \big(1+|\xi|^2\big)^{|\alpha|/2}|\hat{u}|. \tag{31.56}$$

Donc si le membre de droite est de carré intégrable, celui de gauche l'est également. □

DEFooWEAQooAIWBwx

Définition 31.13 (Espace de Sobolev H^s[800])**.**
Pour $s > 0$ nous définissons l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ par

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ tel que } \big(1+\|\xi\|^2\big)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}. \tag{31.57}$$

Nous y mettons le produit scalaire

$$(u,v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}(1+\|\xi\|^2)^s d\xi. \tag{31.58}$$

31.14.
Vu que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (théorème 27.65), on pourrait croire à la densité a fortiori dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. Mais attention : $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^2 pour la norme L^2. Nous n'avons encore rien dit pour la norme $H^s(\mathbb{R}^d)$.

PROPooMKAFooKDNTbO

Proposition 31.15 ([801])**.**
La partie $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Par définition l'application

$$\xi \mapsto (1+\|\xi\|^2)^{s/2}\hat{u} \tag{31.59}$$

est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Elle peut donc être approximée au sens L^2 par des fonctions dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ (théorème 27.65(5)), c'est-à-dire qu'il existe des fonctions $\phi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\phi_n \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^d)} (1+\|\xi\|^2)^{s/2}\hat{u}. \tag{31.60}$$

Nous posons

$$\psi_n = \frac{\phi_n}{(1+\xi^2)^{s/2}} \tag{31.61}$$

Cela est encore une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, et donc de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Vu que la transformée de Fourier est une bijection de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 29.62), nous pouvons considérer une suite $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{\varphi}_n = \psi_n$, et nous allons montrer que $\varphi_n \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n - u\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\varphi}_n - \hat{u}|^2(1+\xi^2)^s d\xi && (31.62a)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\phi_n(\xi)}{(1+\xi^2)^{s/2}} - \hat{u}(\xi)\Big|^2(1+\xi^2)^s d\xi && (31.62b)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\phi_n(\xi) - \hat{u}(\xi)(1+\xi^2)^{s/2}|^2 d\xi && (31.62c)\\
&= \|\phi_n - (1+\xi^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2}^2. && (31.62d)
\end{aligned}$$

Par définition de la suite ϕ_n nous avons donc bien

$$\|\varphi_n - u\|_{H^s}^2 = \|\phi_n - (1+\xi^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2}^2 \to 0. \tag{31.63}$$

Notons que même si ϕ_n est dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, nous n'avons pas prouvé la convergence $\phi_n \xrightarrow{H^s} u$, mais bien $\varphi_n \xrightarrow{H^s} u$. Or les fonctions φ_n sont dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et rien n'assure qu'elles soient à support compact. Nous avons donc bien prouvé la densité de $\mathscr{S}$ et non celle de $\mathscr{D}$. □

Remarque 31.16.
Pour qui a tout compris, cela peut sembler une évidence, mais nous précisions que nous parlons de densité de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, à aucun moment la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ n'entre en compte.

Un peu moins évident : ce que nous avons réellement montré est la densité de $\iota\big(\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)\big)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ où ι est l'application « prise de classe ». Nous n'avons pas insisté là-dessus, mais il faut dire que dans la preuve de la proposition 31.15, u est un représentant d'un élément choisi dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Nous avons ensuite prouvé la convergence $\|\varphi_n - u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \to 0$ qui est une convergence d'une suite dans $\mathbb{R}$, et dans laquelle l'opération $\|.\|_{H^s}$ est définie sur un espace de fonctions et n'est pas une norme (c'est pour que cela devienne une norme que l'on prend les classes).

Nous en avons déduit la convergence $\varphi_n \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u$ où maintenant φ_n et u sont des classes dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.
PROPooLIQJooKpWtnV

Proposition 31.17.
La partie $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\big(H^s(\mathbb{R}^d), \|.\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big)$.

Démonstration. Nous savons déjà que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ par la proposition 31.15. Nous devons seulement prouver que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\big(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \|.\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big)$. Pour cela nous utilisons la densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ de la proposition 27.252. Soit donc $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et une suite f_k dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$f_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} f. \tag{31.64}$$

Vu que la transformée de Fourier est continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 29.22) nous avons aussi

$$\hat{f}_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} \hat{f}, \tag{31.65}$$

et en particulier pour tout polynôme P nous avons la convergence uniforme

$$P\hat{f}_k \xrightarrow{unif} P\hat{f}. \tag{31.66}$$
EQooDTMUooQWphpR

D'autre part la fonction $\xi \mapsto |\hat{f}_k(\xi) - \hat{f}(\xi)|^2(1+\xi^2)^s$ est Schwartz et en tout point décroissante en k. Soientt $\epsilon > 0$ et $r > 0$ choisis de telle sorte à avoir

$$\int_{\|\xi\|>r} |\hat{f}_k(\xi) - \hat{f}(\xi)|(1+\xi^2)^s d\xi < \epsilon. \tag{31.67}$$

pour tout k. La convergence uniforme (31.66) permet de considérer k_0 tel que pour tout $k > k_0$,

$$|\hat{f}_k - \hat{f}|(1+\xi^2)^s < \frac{\epsilon}{\text{Vol}\big(B(0,r)\big)} \tag{31.68}$$

dans $B(0,r)$. Avec tout cela, dès que $k > k_0$ nous avons

$$\|f_k - f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_k - \hat{f}|(1+\xi^2)^s d\xi = \int_{B(0,r)} \ldots + \int_{\|\xi\|>r} \ldots \leqslant 2\epsilon. \tag{31.69}$$

Donc nous avons bien $\|f_k - f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \to 0$ et convergence de f_k vers f dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. □

31.2 Trace

Définition 31.18 ([800]).
*Nous définissons la **trace** d'une fonction par*

$$\begin{aligned} \gamma_0 \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) &\to \mathscr{D}(\mathbb{R}^{d-1}) \\ (\gamma_0 v)(x_1, \ldots, x_{d-1}) &= v(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0). \end{aligned} \tag{31.70}$$

THOooXEJZooBKtXBW

Théorème 31.19 ([802, 800]).
Si $s > \frac{1}{2}$, alors γ_0 accepte une unique extension en opérateur linéaire borné

$$\gamma_0 \colon H^s(\mathbb{R}^d) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}). \tag{31.71}$$

Démonstration. Nous subdivisons la preuve en plusieurs pas.

(1) **Une inégalité pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$** Nous commençons par considérer $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ (fonction C^∞ à support compact). Nous allons alors prouver que

$$\|\gamma_0\varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant K\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \tag{31.72}$$

pour une certaine constante K (qui ne dépend en particulier pas de φ).

Nous avons

$$\begin{aligned} \|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} &= (\gamma_0\varphi, \gamma_0\varphi)_{H^{s-\frac{1}{2}}} && \text{(31.73a)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\widehat{\gamma_0\varphi(\xi)}|^2(1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} d\xi && \text{(31.73b)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (\gamma_0\varphi)(x) e^{-i\xi x} dx \Big|^2 (1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} d\xi && \text{(31.73c)} \end{aligned}$$

SUBEQooKLLYooNRjPwn

(31.73d)

Nous appliquons la trace en appliquant la formule du corolaire 29.63,

$$(\gamma_0\varphi)(x) = \varphi(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} \varphi(x,y) dy\, dk \tag{31.74}$$

En remplaçant dans (31.73c) nous avons

$$\|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} e^{-i\xi x} \varphi(x,y) dy\, dk\, dx \Big|^2 (1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} d\xi. \tag{31.75}$$

Nous voudrions permuter les intégrales en k et en x. Pour cela nous étudions la fonction $u \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$u(k,x) = e^{-ikx} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \varphi(x,y) dy \tag{31.76}$$

Effectuer l'intégrale par rapport à y revient à calculer la transformée de Fourier partielle dont nous parlons dans la proposition 29.23[4]. Elle est donc une fonction Schwartz de k et de x (conjointement et non seulement séparément) et est donc dans $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1})$. Les intégrales sur k et sur x peuvent

[4] Dont une relecture de la preuve ne serait vraiment pas de trop, ainsi que la preuve de 27.246.

donc être réunies et permutées par le théorème de Fubini 14.305 (n'oubliez tout de même pas de vous convaincre que la condition (2) est remplie).

Nous avons donc

$$\|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}} e^{-iky}e^{-i\xi x}\varphi(x,y)dy\,dx\,dk|^2(1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}}d\xi. \tag{31.77}$$

Étant donné que φ est à support compact, les intégrales sur x et sur y peuvent se réunir en utilisant encore le théorème de Fubini ; ces intégrales donnent :

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}} e^{-iky}e^{-i\xi x}\varphi(x,y)dx\otimes dy = \int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}} e^{-i(\xi,k)\,\cdot\,(x,y)}\varphi(x,y)dx\otimes dy = \hat{\varphi}(\xi,k). \tag{31.78}$$

Nous restons avec

$$\|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi,k)dk|^2(1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}}d\xi. \tag{31.79}$$

Nous allons maintenant traiter la partie du milieu :

$$\clubsuit = |\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi,k)dk| = |\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi,k)(1+\xi^2+k^2)^{s/2}\frac{1}{(1+\xi^2+k^2)^{s/2}}dk| = |\langle f_1, f_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| \tag{31.80}$$

Ici ξ est vu comme une constante et les fonctions f_1 et f_2 sont

$$f_1 \colon k \mapsto \hat{\varphi}(\xi,k)(1+\xi^2+k^2)^{s/2} \tag{31.81a}$$

$$f_2 \colon k \mapsto \frac{1}{(1+\xi^2+k^2)^{s/2}} \tag{31.81b}$$

Nous pouvons utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz 10.1 :

$$\clubsuit \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi,k)|^2(1+\xi^2+k^2)^s dk\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+\xi^2+k^2)^s}dk\right)^{1/2} \tag{31.82}$$

Nous notons $g(\xi)$ ce qui se trouve dans la seconde parenthèse (après intégration sur k). Avec cela nous continuons :

$$\|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}} |g(\xi)||\hat{\varphi}(\xi,k)|^2(1+\xi^2+k^2)^s(1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}}dk\,d\xi. \tag{31.83}$$

Vu que $\hat{\varphi}$ est Schwartz, la fonction qui est à l'intérieur des deux intégrales est dans $L^1(\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R})$ et nous pouvons réunir les deux intégrales :

$$\|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}} |g(\xi)||\hat{\varphi}(\xi,k)|^2(1+\xi^2+k^2)^s(1+\|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}}dk\otimes d\xi. \tag{31.84}$$

À ce point nous démontrons qu'en réalité la combinaison $g(\xi)(1+\xi^2)^{s-\frac{1}{2}}$ ne dépend pas de ξ. En effet

$$g(\xi)(1+\xi^2)^{s-\frac{1}{2}} = (1+\xi^2)^{s-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+\xi^2+k^2)}dk \tag{31.85a}$$

$$= \frac{1}{(1+\xi^2)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1+\xi^2}{1+\xi^2+k^2}\right)^s dk \tag{31.85b}$$

$$= \frac{1}{(1+\xi^2)^{1/2}}\int\left(\frac{1}{1+\frac{k^2}{1+\xi^2}}\right)^s dk. \tag{31.85c}$$

Nous effectuons le changement de variables $t = \frac{k}{\sqrt{1+\xi^2}}$, $dk = (1+\xi^2)^{1/2}dt$, et le tout vaut

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^s dt, \tag{31.86}$$

qui est effectivement indépendant de ξ. Nous nommons cela K (auquel nous ajoutons le $\frac{1}{2\pi}$) :

$$\|\gamma_0\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant K\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}} |\hat{\varphi}(\xi,k)|^2(1+\xi^2+k^2)^s dk\otimes d\xi = K\|\varphi\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{31.87}$$

Nous avons donc prouvé pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ (avec redéfinition du K) :

$$\|\gamma_0\varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant K\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{31.88}$$

EQooNWCIooALMiyH

(2) **À propos de classes** Il serait tentant de conclure en disant que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. Hélas, techniquement, l'ensemble $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ n'est même pas un sous-ensemble de $H^s(\mathbb{R}^d)$ parce que ce dernier est un ensemble de *classes* de fonctions. Ce petit détail a ici son importance parce que γ_0 n'est pas une application qui descend aux classes. En effet, $\mathbb{R}^{d-1}$ étant de mesure nulle dans $\mathbb{R}^d$, deux fonctions de la même classe peuvent différer en *tous* les points de $\mathbb{R}^{d-1}$ en même temps.

Notons ι l'application qui consiste à prendre la classe, c'est-à-dire $\iota(f) = [f]$. Ce qui est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, c'est $\iota(\mathscr{D}(\mathbb{R}^d))$. Or chaque classe contient au maximum une seule fonction continue (qui sera même de classe C^∞ à support compact pour les éléments de $\iota(\mathscr{D})$).

L'application γ_0 considérée est l'application composée entre le γ_0 classique et le choix du représentant continu dans la classe. La formule (31.88) que nous venons de prouver est valide pour l'application γ_0 vue comme

$$\gamma_0 : \iota\big(\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)\big) \to \mathscr{D}(\mathbb{R}^{d-1}). \tag{31.89}$$

(3) **Densité et conclusion** Ce que la majoration (31.88) prouve est la continuité de l'application

$$\gamma_0 : \big(\mathscr{D}(\mathbb{R}^d), \|.\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big) \to \big(H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), \|.\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}\big). \tag{31.90}$$

Mais la proposition 31.17 nous donne la densité de la partie $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. La proposition 17.127 nous donne alors une extension

$$\gamma_0 : \big(H^s(\mathbb{R}^d), \|.\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big) \to \big(H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), \|.\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}\big). \tag{31.91}$$

□

Remarque 31.20.
L'extension n'est pas évidente parce que les éléments de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sont en général des classes de fonctions dont les valeurs sur le bord ne sont pas du tout fixées du fait que le bord soit de mesure nulle.

31.3 Théorème de plongement

L'objet des théorèmes de plongement de Sobolev est de montrer que si $s > \frac{d}{2}+k$ alors les éléments de $H^s(\mathbb{R}^d)$ possèdent des représentants de classe C^k. Avant de démontrer le théorème, pour alléger, nous allons donner deux lemmes.

LEMooZIBIooANHyPy

Lemme 31.21.
Soit (u_j) une suite dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u_j \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u \tag{31.92}$$

avec $s > 0$. Alors nous avons aussi la convergence

$$u_j \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^d)} u. \tag{31.93}$$

Démonstration. Vu que $s > 0$ nous avons $(1 + k^2)^s > 1$ (ici nous écrivons k^2 pour $\|k\|^2$). Par conséquent

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}\bar{\hat{v}}(1 + k^2)^s dk \geqslant \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}\bar{\hat{v}} dk = \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{31.94}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\|u_j - u\|_{L^2} &= \frac{1}{(2\pi)^d}\|\hat{u}_j - \hat{u}\|_{L^2} && (31.95a)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}_j - \hat{u}|^2 && (31.95b)\\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}_j - \hat{u}|^2(1 + k^2)^s dk && (31.95c)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\|u_j - u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. && (31.95d)
\end{aligned}$$

□

LEMooGDTXooJRudME

Lemme 31.22.
Soient des fonctions $u_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$u_j \xrightarrow{\left(C_0^0(\mathbb{R}^d),\|.\|_\infty\right)} v. \tag{31.96}$$

Alors nous avons la convergence

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_j\varphi \to \int_{\mathbb{R}^d} v\varphi \tag{31.97}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. La suite (u_j) est équibornée. En effet il existe une queue de suite pour laquelle $\|u_j - v\|_\infty < \epsilon$; cette queue de suite est alors équibornée par $\|v\|_\infty + \epsilon$. Le début de la suite est un nombre fini de fonctions, toutes bornées. Le maximum des bornes donne alors une borne.

Soit donc $M > 0$ tel que $|u_j(x)| < M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$. Nous avons alors $|u_j\varphi| < M|\varphi|$ pour tout j et les fonctions $|u_j\varphi|$ sont majorées par la fonction $M|\varphi|$ qui est intégrable. Nous pouvons donc utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 14.207 nous donne

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_j\varphi = \int_{\mathbb{R}^d} v\varphi. \tag{31.98}$$

□

Nous pouvons écrire la conclusion du lemme 31.22 sous la forme

$$\langle u_j, \varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to \langle v, \varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{31.99}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ (et non pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

THOooOHIPooXSEkVI

Théorème 31.23 (Théorème de Sobolev avec $k = 0$[803])**.**
Soit $s > \frac{d}{2}$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors u possède un représentant dans $C_0^0(\mathbb{R}^d)$ (les fonctions continues et qui s'annulent à l'infini). Nous écrivons cela $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0^0(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et dans ce cas nous notons u le représentant dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous allons prouver l'inégalité

$$\|u\|_\infty \leqslant c\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{31.100}$$

La formule d'inversion de Fourier 29.62 appliquée à u_j donne

EQooDKYDooAxThqf

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx}\hat{u}(k)dk, \tag{31.101}$$

nous avons alors

$$\begin{aligned}
(2\pi)^d|u(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(k)|dk && \text{(31.102a)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (1+k^2)^{s/2}|\hat{u}(k)|(1+k^2)^{-s/2}dk && \text{(31.102b)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left(|\hat{u}(k)|^2(1+k^2)^s\right)^{1/2}}_{f} \underbrace{\left((1+k^2)^{-s}\right)^{1/2}}_{g} dk && \text{(31.102c)}\\
&= \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. && \text{(31.102d)}
\end{aligned}$$

Ici il convient nous arrêter un instant pour nous convaincre que f et g sont réellement des éléments de L^2. En ce qui concerne f, c'est facile : $\hat{u}$ est une fonction Schwartz. En ce qui concerne g il faut l'intégrabilité de $|g|^2$, c'est-à-dire de $k \mapsto (1+k^2)^{-s}$. Cela a lieu si et seulement si $2s > d$ et donc a lieu dans les hypothèses du théorème. Nous utilisons le théorème de Cauchy-Schwarz[5] pour continuer :

$$\begin{aligned}
(2\pi)^d|u(x)| &\leqslant \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2} && \text{(31.103a)}\\
&= c\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(k)|^2(1+k^2)^s dk\right)^{1/2} && \text{(31.103b)}\\
&= c\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. && \text{(31.103c)}
\end{aligned}$$

[5] Formule 10.2.

Donc en introduisant le facteur $(2\pi)^d$ dans la constante c nous avons

$$\|u\|_\infty \leqslant c\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{31.104}$$

Cela est tout ce que nous voulions faire avec $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Nous considérons maintenant $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Vue la densité des fonctions Schwartz dans H^s (proposition 31.15) nous considérons une suite (u_j) dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u_j \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u \tag{31.105}$$

Ici u est une classe, mais nous identifions u_j avec sa classe (parce qu'il ne faut pas exagérer non plus). La suite (u_j) est de Cauchy dans H^s, donc si $\epsilon > 0$ est donné, il existe N tel que si $n, m > N$, $\|u_m - u_n\| \leqslant \epsilon$. Nous avons alors aussi

$$\|u_m - u_n\|_\infty \leqslant c\epsilon, \tag{31.106}$$

ce qui signifie que (u_j) est également une suite de Cauchy dans $\big(C^0(\mathbb{R}^d), \|.\|_\infty\big)$ qui est un espace complet par la proposition 12.383.

Il existe donc une fonction $v \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u_j \xrightarrow{\left(C_0^0(\mathbb{R}^d), \|.\|_\infty\right)} v. \tag{31.107}$$

EQooBNGCooBUAQYN

La question est de savoir si nous pouvons déduire que v est un représentant de u.

Par le lemme 31.21 nous avons également la convergence

$$u_j \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^d)} u. \tag{31.108}$$

Pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons alors

$$\langle u_j, \varphi\rangle_{L^2} \to \langle u, \varphi\rangle_{L^2}. \tag{31.109}$$

Mais en même temps, la convergence (31.107) couplée au lemme 31.22 donne également

$$\langle u_j, \varphi\rangle_{L^2} \to \langle v, \varphi\rangle_{L^2}. \tag{31.110}$$

Par unicité de la limite (dans $\mathbb{R}$) nous avons

$$\langle v, \varphi\rangle_{L^2} = \langle u, \varphi\rangle_{L^2} \tag{31.111}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. La proposition 29.28 appliquée à $u - v$ montre alors que $u - v = 0$ presque partout, c'est-à-dire que v est bien un représentant de u.

Le représentant v de u est non seulement continu (comme limite uniforme de fonctions continues), mais également bornée, comme limite uniforme de fonctions Schwartz. □

Proposition 31.24 ([803]).
Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ ($s \in \mathbb{R}$) alors

(1) $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$,

(2) l'application

$$\partial^\alpha : H^s(\mathbb{R}^d) \to H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^d) \tag{31.112}$$

est continue.

Note : ici ∂ est l'opération de dérivée faible.

Démonstration. Nous allons seulement prouver que $\partial_j : H^s(\mathbb{R}^d) \to H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ est bien définie[6] et continue. Par composition, la thèse suivra.

Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ par le lemme 31.10 nous avons

$$\widehat{\partial_j u} = i\xi_j \hat{u}. \tag{31.113}$$

D'autre part, la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x_i}{1 + \|x\|^2} \end{aligned} \tag{31.114}$$

[6] Au sens où l'espace d'arrivée est bien celui-là.

est bornée (et même indépendamment de i) par une constante K. Donc nous avons pour tout[7] s :

$$k_i(1+\|k\|^2)^{-s} < K(1+\|k\|^2)^{-s+1}. \tag{31.115}$$

Avec cela nous pouvons calculer un peu : si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\partial_j u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\partial_j u}|(1+k^2)^{s-1}dk && (31.116a)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} k_j|\hat{u}|(1+k^2)^{s-1}dk && (31.116b)\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} K|\hat{u}|(1+k^2)^{s}dk && (31.116c)\\
&= K\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. && (31.116d)
\end{aligned}$$

Nous avons donc que $\|\partial_j u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d)}$ est fini lorsque $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

La majoration $\|\partial_j u\| \leqslant K\|u\|$ donne la majoration suivante pour la norme de l'opérateur ∂_j :

$$\|\partial_j\| = \sup_{\|u\|_{H^s}=1} \|\partial_j u\|_{H^{s-1}} \leqslant K. \tag{31.117}$$

Le fait d'être borné implique d'être continu par la proposition 10.85. □

Théorème 31.25 (Théorème de plongement de Sobolev [803])**.**
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $s > \frac{d}{2} + k$. Alors

$$H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0^k(\mathbb{R}^d). \tag{31.118}$$

EQooIJZOooZiYSnJ

Remarques :

- L'espace $C_0^k(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^k qui s'annulent à l'infini.
- L'inclusion (31.118) signifie que tout élément dans H^s possède un représentant dans $C_0^k(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Pour $k = 0$, c'est le théorème 31.23. Si $|\alpha| < k$ nous savons que $\partial^\alpha u \in H^{s-k} \subset C_0^0(\mathbb{R}^d)$. Cela signifie que les dérivées faibles sont continues, mais pas qu'il existe un représentant qui est réellement k fois continument dérivable.

Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et une suite (u_j) dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u_j \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u. \tag{31.119}$$

Vu que l'espace topologique $\big(C_0^k(\mathbb{R}^d), \|.\|_\infty\big)$ est complet il existe $v \in C_0^k$ tel que

$$u_j \xrightarrow{C_0^k} v. \tag{31.120}$$

Il reste à montrer que v est un représentant de u. Cela se fait comme plus haut en montrant que $u_j \xrightarrow{L^2} u$. □

[7] Question : dans [803], il faut dépendre cette constante de s. Je ne comprends pas pourquoi.

Chapitre 32

Équations différentielles ordinaires

Une équation différentielle ordinaire est la recherche de toutes les fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ satisfaisant à une certaine égalité, faisant intervenir les dérivées de la fonction recherchée.

Définition 32.1.
*Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction sera **dérivable sur** I si elle est dérivable au sens usuel sur l'intérieur de I, et si elle est dérivable à droite (resp. à gauche) sur l'éventuel bord gauche (resp. droit) de I.*

Définition 32.2.
*Une **équation différentielle ordinaire d'ordre** n **sur** I est la recherche d'une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable n fois, satisfaisant à une équation du type*

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{n\prime}(t)) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I \tag{32.1}$$

eqequadiff

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : (I \times D) \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}) \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

Remarque 32.3.
L'équation différentielle (32.1) sera raccourcie sous la forme

$$F(t, y, y', \dots, y^{n\prime}) = 0 \tag{32.2}$$

où la dépendance en t est sous-entendue.

Exemple 32.4.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue fixée. L'équation différentielle

$$y' = f(t) \tag{32.3}$$

se ramène à la recherche des primitives de f sur l'intervalle I. △

Le lemme suivant sert de temps en temps.

LemuBVozy

Lemme 32.5 (Lemme de Grönwall)**.**
Soient ϕ et ψ deux fonctions telles que pour tout $t \in [t_0, t_1]$, $\phi(t) \geqslant 0$, $\psi(t) \geqslant 0$ et

$$\phi(t) \leqslant K + L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds \tag{32.4}$$

où K et L sont des constantes positives. Alors

$$\phi(t) \leqslant K \exp\big(L \int_{t_0}^{t} \psi\big). \tag{32.5}$$

LEMooUGZGooCczAmKa

Lemme 32.6 (Lemme de Grönwall[804])**.**
Si $u, a, b \in C^0\big([0, T], \mathbb{R}^+\big)$ sont telles que

$$u(t) \leqslant b(t) + \int_0^t a(s)u(s)ds \tag{32.6}$$

pour tout $t \in [0, T]$ alors pour tout $t \in [0, T]$ nous avons aussi

$$u(t) \leqslant b(t) + \int_0^t b(s)a(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds. \tag{32.7}$$

32.1 Équation homogène, solution particulière

Voici un petit morceau d'algèbre linéaire. Soient des espaces vectoriels V et W ainsi qu'une application linéaire $D\colon V \to W$. Nous voulons résoudre $D(u) = v$, c'est-à-dire déterminer l'ensemble

$$D^{-1}(v) = \{u \in V \text{ tel que } Du = v\}. \tag{32.8}$$

LEMooEWUPooXNJMcc

Lemme 32.7.
Soient des espaces vectoriels V et W ainsi qu'une application linéaire $D\colon V \to W$. Si $u_P \in V$ satisfait à $Du_P = v$ alors

$$D^{-1}(v) = \ker(D) + u_P. \tag{32.9}$$

Démonstration. Si $u \in \ker(D) + u_p$ alors $u = k + u_p$ avec $Dk = 0$, ce qui donne tout de suite $Du = Dk + Du_P = v$. Donc $u \in D^{-1}(v)$.

Dans l'autre sens, si $u \in D^{-1}(v)$ alors nous pouvons écrire $u = (u - u_P) + u_P$. Vu que $u - u_P \in \ker(D)$ nous avons bien $u \in \ker(D) + u_P$. □

Ce petit lemme explique pourquoi la résolution d'équation différentielles passe par le principe « générale de l'homogène plus particulière de la non-homogène ». Cela marche autant pour les équations différentielles ordinaires que pour celles aux dérivées partielles.

Exemple 32.8.
Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$y' - y = 4. \tag{32.10}$$

L'opérateur dont nous parlons est par exemple

$$\begin{aligned} D\colon C^\infty(\mathbb{R}) &\to C^\infty(\mathbb{R}) \\ y &\mapsto y' - y. \end{aligned} \tag{32.11}$$

Nous devons résoudre $Dy = 4$ où « 4 » est l'élément fonction constante égale à 4 dans $C^\infty(\mathbb{R})$. L'ensemble $\ker(D)$ sont les éléments $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ tels que $y' = y$:

$$\ker(D) = \{t \mapsto Ke^t \text{ tel que } K \in \mathbb{R}\}. \tag{32.12}$$

Nous devons trouver un élément quelconque y_P de $D^{-1}(4)$. Facile : $y_P(t) = -4$.

Au final,

$$D^{-1}(4) = \{t \mapsto Ke^t - 4 \text{ tel que } K \in \mathbb{R}\}. \tag{32.13}$$

△

Dans cet exemple nous avons pris $V = W = C^\infty(\mathbb{R})$. Mais souvent nous sommes amenés à considérer des espaces plus subtils, parce qu'il existe simplement pas de solutions dans C^∞, ou alors parce que beaucoup de solutions n'y sont pas.

32.2 Que faire avec $f(z)dz = g(t)dt$?

SecFairedzdt

Dans de nombreux exercices d'équations différentielles, nous tombons sur $u' = f(t)$, et nous faisons formellement

$$\frac{du}{dt} = f(t) \quad \Rightarrow \quad du = f(t)dt, \tag{32.14}$$

et ensuite, il y a la formule un peu magique

$$u - u_0 = \int_{t_0}^{t} f(t)dt. \tag{32.15}$$

Voyons ce qu'il en est. Tout d'abord, il faut comprendre ce que signifie la formule

$$f(z)dz = g(t)dt. \tag{32.16}$$

EqDiffAstufzdz

Il s'agit d'une égalité entre deux formes différentielles sur $\mathbb{R}$ où z est une fonction de t. Étant donné que z est une fonction de t, il faut voir dz comme la différentielle de cette fonction. La différentielle d'une fonction à une variable est donné par la dérivée :

$$dz_t = z'(t)dt \tag{32.17}$$

Écrire l'équation (32.16) pour chaque t revient donc à écrire

$$f\big(z(t)\big)z'(t)dt = g(t)dt \tag{32.18}$$

Cela est une égalité entre deux formes différentielles. Nous avons donc égalité entre les intégrales des formes sur un chemin. Prenons un chemin tout simple de t_0 vers t :

$$\int_{t_0}^{t} f\big(z(t)\big)z'(t)dt = \int_{t_0}^{t} g(t)dt. \tag{32.19}$$

Dans le premier membre, nous faisons un changement de variable $\xi = z(t)$, $d\xi = z'(t)dt$, et nous obtenons

$$\int_{z_0}^{z(t)} f(\xi)d\xi = \int_{t_0}^{t} g(t)dt. \tag{32.20}$$ EqIntDiffAstuztz

où nous avons remplacé la constante $z(t_0)$ par z_0 dans la borne d'intégration. Si F est une primitive de f et G une primitive de g, nous avons

$$F(z) - F(z_0) = G(t) - G(t_0). \tag{32.21}$$

Si aucun problème de Cauchy n'est donné, les constantes $F(z_0)$ et $G(t_0)$ sont mises en une seule et nous écrivons la solution

$$F\big(z(t)\big) = G(t) + C, \tag{32.22}$$

qui est une équation implicite pour $z(t)$.

Nous trouvons assez souvent le cas simple

$$f(z)dz = dt. \tag{32.23}$$ EqAstfzdzdt

En remplaçant $g(t) = 1$ dans (32.20), nous trouvons la fameuse

$$t - t_0 = \int_{z_0}^{z} f(z)dz, \tag{32.24}$$ Eqttzint

dans laquelle il y a un abus de notation terrible entre le z de la borne (que les étudiants oublient souvent) et la variable d'intégration z !!

Le passage de (32.23) à (32.24) sera très souvent utilisé dans le cours de mécanique par exemple.

32.3 Équations linéaires du premier ordre

Une **équation différentielle linéaire** est une équation de la forme

$$y' + u(t)y = v(t). \tag{32.25}$$ EXooVVLGooPWaHUI

Exemple 32.9.
Tant qu'il n'y a pas de second membre, c'est facile. Prenons l'exemple suivant :

$$y' + 2ty = 0. \tag{32.26}$$

Nous mettons tous les t d'un côté et tous les y et y' de l'autre :

$$\frac{y'}{y} = -2t, \tag{32.27}$$

et puis on intègre sans oublier la constante d'intégration :

$$\ln(y) = -t^2 + C, \tag{32.28}$$

et donc $y(t) = Ke^{-t^2}$. △

Exemple 32.10.
Lorsqu'il y a un second membre, il y a une astuce. Prenons par exemple

$$y' + 2ty = 4t. \tag{32.29}$$ EqDiffExLin

L'astuce est de commencer par résoudre l'équation sans le second membre (l'équation homogène associée). Nous notons y_H la solution. Ici, la réponse est

$$y_H(t) = Ke^{-t^2}. \tag{32.30}$$

Ensuite le truc est d'essayer de trouver la solution de l'équation (32.29) sous la forme

$$y(t) = K(t)e^{-t^2}. \tag{32.31}$$ EqEssaiLin

L'idée est de prendre la même que la solution de l'équation homogène (sans second membre), mais en disant que K est une fonction. Afin de trouver la fonction K qui donne la solution, il suffit de remettre l'essai (32.31) dans l'équation (32.29) :

$$\underbrace{K'e^{-t^2} - 2tKe^{-t^2}}_{y'(t)} + \underbrace{2tKe^{-t^2}}_{2ty(t)} = 4t \tag{32.32}$$

Les deux termes avec K se simplifient et il reste

$$K'(t) = 4te^{t^2}, \tag{32.33}$$

ce qui signifie $K(t) = 2e^{t^2+C}$. Nous avons donc déterminé la fonction qui fait fonctionner l'essai, et la solution à l'équation est

$$y(t) = \big(2e^{t^2} + C\big)e^{-t^2} = 2 + Ce^{-t^2}. \tag{32.34}$$

△

La technique pour résoudre cette équation est de commencer par résoudre l'équation homogène associée. Si $U(t)$ est une primitive de $u(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} y'_H(t) + u(t)y_H(t) &= 0 \\ \frac{y'_H}{y_H} &= -u(t) \\ \ln(y_H) &= -U(t) + C \\ y_H(t) &= e^{-U(t)+C} = Ke^{-U(t)} \end{aligned} \tag{32.35}$$

où $K = e^C$.

Cela fournit la solution générale de l'équation homogène. Il existe un truc génial qui permet d'en tirer la solution générale du système non homogène. Lorsque nous avons trouvé $y_H(t) = Ke^{-U(t)}$, le symbole K désigne une constante. La méthode de **variation des constantes** consiste à essayer la solution

$$y(t) = K(t)e^{-U(t)}, \tag{32.36}$$ EqEssayVarSctr

c'est-à-dire à dire que la constante est en réalité une fonction. Afin de trouver quelle fonction $K(t)$ fait en sorte que l'essai (32.36) soit une solution, nous la remplaçons dans l'équation de départ $y' + uy = v$. Maintenant,

$$y'(t) = K'(t)e^{-U(t)} - K(t)u(t)e^{-U(t)}. \tag{32.37}$$

En remettant dans l'équation,

$$y' + uy = K'e^{-U} - Kue^{-U} + uKe^{-U} = K'e^{-U} = v. \tag{32.38}$$

Notez que les termes en K se sont miraculeusement simplifiés. Cela est directement dû au fait que e^{-U} est solution de l'équation homogène. Nous restons avec l'équation

$$K' = \frac{v}{e^{-U}} \tag{32.39}$$

pour $K(t)$. La solution générale du problème non homogène est donc finalement donnée par

$$y(t) = \big(W(t) + C\big)e^{-U(t)} \tag{32.40}$$

si $W(t)$ est une primitive de $v(t)e^{U(t)}$.

Tout ceci est un peu heuristique. Nous faisons maintenant quelques théorèmes pour préciser dans quels cas ça fonctionne.

PROPooFECJooPiqZHR

Proposition 32.11 ([805]).
Soit un intervalle I. Soient une application continue $a\colon I\to\mathbb{R}$ et une primitive[1] *$A\colon I\to\mathbb{R}$.*
Alors l'ensemble des solutions de $y'+ay=0$ est

$$S=\{x\mapsto\lambda e^{-A(x)}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}. \tag{32.41}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) **Les éléments de S sont des solutions** Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, et posons $y(x)=\lambda e^{-A(x)}$. Dérivons pour le plaisir, en remarquant que $e^{A(x)}$ est une composée de fonctions $(\exp\circ A)(x)$ et en nous souvenant de la dérivée de l'exponentielle donnée (par définition) par le théorème 15.88. Nous avons

$$y'(x)=\lambda\big(-A'(x)\big)e^{-A(x)}=-\lambda a(x)e^{-A(x)}. \tag{32.42}$$

Nous avons donc

$$y'(x)+a(x)y(x)=-\lambda a(x)e^{-A(x)}+a(x)\lambda e^{-A(x)}=0. \tag{32.43}$$

(2) **Toute solution est dans S** Soit une solution y de $y'+ay=0$.. Nous posons $z(x)=y(x)e^{A(x)}$, et nous montrons que $z'=0$:

$$\begin{aligned}z'(x)&=y'(x)e^{A(x)}+y(x)A'(x)e^{A(x)} &(32.44a)\\ &=e^{A(x)}\big(y'(x)+y(x)a(x)\big) &(32.44b)\\ &=0 &(32.44c)\end{aligned}$$

La proposition 12.210(5) nous indique que z est constante : il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\lambda=y(x)e^{A(x)}$. Avec ça, nous avons[2]

$$y(x)=\lambda e^{-A(x)}. \tag{32.45}$$

□

PROPooZCXQooPQpkdQ

Proposition 32.12 ([806]).
Soit un intervalle I. Soient des applications continues $a,b\colon I\to\mathbb{R}$. Nous considérons une primitive A de a et une primitive W de $e^{A(x)}b(x)$.
Alors l'ensemble des solutions de $y'+ay=b$ est

$$S=\{x\mapsto e^{-A(x)}\big(W(x)+C\big)\}_{C\in\mathbb{R}} \tag{32.46}$$

Démonstration. Je vous laisse le soin de vérifier que tous les éléments de S sont bien des solutions. Dérivez, et ça ira très bien. Pendant ce temps, je m'occupe des choses sérieuses.

Nous commençons par poser

$$\lambda(x)=y(x)e^{A(x)}, \tag{32.47}$$

EQooXYPGooCFTukc

et nous dérivons : $\lambda'(x)=e^{A(x)}b(x)$. Donc λ est une primitive de $e^{A(x)}b(x)$. Comme nous avons dit que W est une primitive, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $\lambda(x)=W(x)+C$ (corolaire 12.224). En remettant ça dans (32.47), nous trouvons le résultat annoncé. □

PROPooEXEQooUUOizH

Proposition 32.13 ([806]).
Soient un intervalle I, et deux fonctions continues $a,b\colon I\to\mathbb{R}$. Soient $x_0\in I$ et $y_0\in\mathbb{R}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases}y'+ay=b &(32.48a)\\ y(x_0)=y_0 &(32.48b)\end{cases}$$

admet une unique solution.

Démonstration. En vertu de la proposition 32.12, nous essayons sous la forme

$$y(x)=\big(W(x)+C\big)e^{-A(x)} \tag{32.49}$$

EQooGKKDooIsmjTR

où A est une primitive de a et W est une primitive de $e^{A(x)}b(x)$. Nous fixons C de telle sorte à avoir $y(x_0)=x_0$. Il s'agit seulement de résoudre

$$\big(W(x_0)+C\big)e^{-A(x)}=y_0 \tag{32.50}$$

[1] Toute fonction continue sur un intervalle a une primitive, 12.450.
[2] Notez l'utilisation de 12.422(3).

pour C. La solution est vite trouvée :

$$C = y_0 e^{A(x)} - W(x_0). \tag{32.51}$$ EQooYITWooKlYHtj

Nous avons prouvé l'unicité : si une solution existe, elle est forcément de la forme (32.49) avec C donné par (32.51).

Pour l'existence, il suffit de dériver et vérifier. □

32.3.1 Pourquoi la variation des constantes fonctionne toujours ?

Prenons une équation non homogène

$$z'(t) = f(t)z(t) + g(t), \tag{32.52}$$ EqAstNNHomo

et supposons avoir une solution de l'homogène associée sous la forme $z_H(t) = Ch(t)$. Le coup de la variation des constates consiste à essayer une solution pour l'équation non homogène sous la forme[3]

$$z(t) = K(t)h(t). \tag{32.53}$$

Nous injectons cette solution dans l'équation de départ en utilisant le fait que $z'(t) = K'(t)h(t) + K(t)h'(t)$:

$$K'(t)h(t) + K(t)h'(t) = f(t)K(t)h(t) + g(t). \tag{32.54}$$

Le terme $K(t)h'(t)$ se récrit en utilisant la propriété de définition de h, c'est-à-dire que $h'(t) = f(t)h(t)$. Nous voyons que les termes ne contenant pas de K' se simplifient ; il reste

$$K'h = g. \tag{32.55}$$

Cette équation a comme solution

$$K = \int \frac{f}{h} + C. \tag{32.56}$$

J'insiste sur la constante d'intégration ! En réalité, celles et ceux qui auront compris l'équation (32.24) sauront que K est donné par

$$K(t) = \int_{\xi_0}^{t} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} d\xi \tag{32.57}$$

où ξ_0 joue le rôle de la constante d'intégration.

Quoi qu'il en soit, la solution générale de l'équation non homogène est

$$z(t) = K(t)h(t) = \left(\int \frac{g}{h} + C \right) h. \tag{32.58}$$ EqSolVarCosntCool

Cette solution comprend deux termes : Ch qui est solution de l'homogène, et $\left(\int \frac{g}{h}\right) h$ qui est une particulière de l'équation non homogène.

Quelques conclusions :

(1) Si vous avez encore du K (et pas que du K') dans votre équation qui donne K, c'est que vous n'êtes pas dans le cadre d'une équation de type (32.52). Le plus souvent, c'est que vous avez fait une faute de calcul quelque part.

(2) La méthode des variations des constantes n'est pas en contradiction avec le principe de « SGEH+SPENH ». En effet, la SGEP et la SPENH sont toutes deux dans la solution (32.58).

(3) La variation des constantes peut être vue comme une façon cool de trouver une solution particulière de l'équation non homogène.

(4) La simplification ne se fait que après avoir remplacé Kh' par Kfh, c'est-à-dire après avoir utilisé le fait que z_H est solution de l'homogène. Sinon, la simplification n'est pas du tout évidente à priori. Il se peut même que, visuellement, les termes Kh' et Kfh ne se ressemblent pas du tout. Un exemple de cela arrivera par exemple dans l'exemple 32.18, pour arriver à l'équation (32.86).

[3] Je ne sais plus qui a eu l'idée de changer le nom de la constante de C vers K au moment de la transformer en fonction, mais c'est une bonne idée.

32.4 Équations à variables séparées

DEFooZHNTooSVlSQeX

Définition 32.14.
*Une **équation à variables séparées** est une équation de la forme*

$$y'(t) = u(t)f\big(y(t)\big) = u(t)(f \circ y)(t). \tag{32.59}$$

EqDiffSeparee

où $u\colon I \to \mathbb{R}$ et $f\colon J \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues données.

Les propositions 32.15 et 32.17 résolvent ce type d'équation, mais avant de voir cela, nous allons donner quelques indications « pratiques ».

32.4.1 La méthode rapide

On peut évidemment mettre tous les y et y' d'un côté :

$$\frac{y'}{f(y)} = u(x). \tag{32.60}$$

Une fois que cela est fait, on écrit $y' = \frac{dy}{dx}$, et on envoie le dx du côté des x :

$$\frac{dy}{f(y)} = u(x)dx. \tag{32.61}$$

Maintenant il suffit de prendre l'intégrale des deux côtés : comme la position des dx et dy l'indiquent, il faut intégrer par rapport à y d'un côté et par rapport à dx de l'autre côté.

L'intégrale à gauche est facile : c'est $\ln(y)$. À droite, par contre, ça dépend tout à fait de u.

32.4.2 La méthode plus propre

$$y'(t) = u(t)f\big(y(t)\big). \tag{32.62}$$

Nous considérons U, une primitive de u sur I et G, une primitive de $1/f$ sur J. Si $I' \subseteq I$ et $y\colon I' \to J$, alors y est solution de (32.59) si et seulement si il existe une constante C telle que

$$G\big(y(t)\big) = U(t) + C. \tag{32.63}$$

EqSolSepThe

La recherche des solutions de l'équation différentielle se ramène donc à la recherche de primitives et de solutions d'une équation algébrique (il faut isoler $y(t)$ dans (32.63)). Réciproquement toute solution régulière de cette dernière relation est solution de l'équation différentielle.

Remarque : lorsque nous cherchons U et G, nous ne cherchons que *une* primitive. Il ne faut pas considérer des constantes d'intégration à ce niveau.

32.4.3 Les théorèmes

ProJLykrK

Proposition 32.15.
Soient des intervalles I et J de $\mathbb{R}$. Nous considérons des fonctions continues $u\colon I \to \mathbb{R}$ et $f\colon J \to \mathbb{R}$, et nous supposons que f ne s'annule pas sur J. Soit U, une primitive de u sur I, et G, une primitive de $1/f$ sur J.

Si I' est un intervalle, une application $y\colon I' \to J$ est une solution de

$$y'(t) = u(t)f\big(y(t)\big) \tag{32.64}$$

EQooJVCQooGoVPVA

si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$G\big(y(t)\big) = U(t) + C. \tag{32.65}$$

EqSoluceEqDiffSep

Démonstration. Il s'agit d'utiliser la proposition 12.205 pour dériver la fonction composée $G \circ y$. La dérivée de $G\big(y(t)\big)$ est

$$(G \circ y)'(t) = G'\big(y(t)\big)y'(t) = \frac{y'(t)}{f\big(y(t)\big)}. \tag{32.66}$$

EQooDVWQooPQZyUM

(1) $\Rightarrow$ Soit y une solution de $y'(t) = u(t)f\big(y(t)\big)$. Alors y vérifie

$$\frac{y'(t)}{f\big(y(t)\big)} = u(t). \tag{32.67}$$

Nous avons vu dans (32.66) qu'une primitive du membre de gauche est $G\circ y$. Une primitive du membre de droite est U. Le corolaire 12.224 dit qu'il existe une constante C telle que $G\circ y = u + C$.

(2) $\Leftarrow$ Il suffit de dériver des deux côtés.

□

Cette proposition dit que toutes les solutions qui ne s'annulent jamais sur un intervalle ont la forme $G\big(y(t)\big) = U(t) + C$ et peuvent donc être trouvées en calculant des primitives.

La formule (32.65) peut être obtenue de la façon heuristique suivante, en écrivant $y' = dy/dt$, et en passant le dt à droite. Nous trouvons successivement

$$\begin{aligned} y' &= u(t)f(y) \\ dy &= u(t)f(y)dt \\ \frac{dy}{f(y)} &= u(t)dt \\ \int \frac{dy}{f(y)} &= \int u(t)dt \\ G(y) &= U(t) + C. \end{aligned} \tag{32.68}$$

PROPooIGWTooULXrKI

Proposition 32.16.
Soient $0 < r < R$ ainsi que $\alpha \in \mathbb{R}$. Une fonction $y\colon]r, R[\to \mathbb{R}$ est une solution de

$$y'(x) = \frac{\alpha}{x}y(x), \tag{32.69}$$

EQooBQCTooTtShNw

si et seulement si il existe $K > 0$ tel que

$$y(x) = Kx^\alpha. \tag{32.70}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Vu que le logarithme est une primitive de la fonction inverse (proposition 15.97), nous pouvons utiliser la proposition 32.15 avec les fonctions $U(x) = \alpha\ln(x)$ et $G(t) = \ln(t)$. Si y est une solution de (32.69), alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln\big(y(x)\big) = \alpha\ln(x) + C \tag{32.71}$$

pour tout $x \in]r, R[$. En prenant l'exponentielle des deux côtés, et en utilisant le fait que $\alpha\ln(x) = \ln(x^\alpha)$,

$$y(x) = e^C e^{\ln(x^\alpha)} \tag{32.72}$$

En posant $K = e^C$, nous avons un $K > 0$ tel que $y(x) = Kx^\alpha$.

(2) $\Leftarrow$ Il suffit de dériver en utilisant la proposition 14.295. Pas de soucis de domaine parce que nous ne considérons que $x \in]r, R[$.

□

PropOkmXmC

Proposition 32.17 (Unicité[1, 238])**.**
Soient des intervalles I et J dans $\mathbb{R}$. Nous considérons

(1) Une application continue $u\colon I \to \mathbb{R}$,

(2) Une application continue $f\colon J \to \mathbb{R}$ ne s'annulant pas.

(3) $t_0 \in I$ et $y_0 \in J$.

(4) La primitive U de u telle que $U(t_0) = 0$.

(5) Une primitive G de $1/f$.

Alors

(1) *L'application* $G\colon J \to \mathbb{R}$ *est injective.*

(2) *Si* $y\colon I' \to J$ *est une solution de* SUBEQooAQXMooEnniZW

$$\begin{cases} y'(t) = u(t)f\big(y(t)\big) & \text{EQooJIACooFbjdHb} \quad (32.73a)\\ y(t_0) = y_0 & (32.73b) \end{cases}$$

où I' *est un intervalle de* I *contenant* t_0*, alors*

$$y(t) = G^{-1}\big(U(t) + G(y_0)\big). \tag{32.74}$$

Démonstration. L'application G vérifie $G' = 1/f$ pour une certaine constante C. Vu que f ne s'annule pas, elle est de signe constante et donc G' est soit partout strictement croissante, soit partout strictement décroissante (proposition 12.209). L'application G est donc injective et inversible.

Soit une solution $y\colon I \to J$ de (32.73). Juste pour le plaisir nous dérivons l'application $G \circ y$.

$$\begin{aligned}
(G\circ y)'(t) &= G'\big(y(t)\big)y'(t) && (32.75a)\\
&= \frac{y'(t)}{f\big(y(t)\big)} && (32.75b)\\
&= \frac{u(t)f\big(y(t)\big)}{f\big(y(t)\big)} && \text{eq. (32.73a)} \quad (32.75c)\\
&= u(t) && \text{pcq. } f \neq 0 \quad (32.75d)\\
&= U'(t). && (32.75e)
\end{aligned}$$

Vu que $(G \circ y)' = U'$, il existe un nombre $C \in \mathbb{R}$ tel que $(G \circ y)(t) = U(t) + C$, et donc tel que

$$y(t) = G^{-1}\big(U(t) + C\big). \tag{32.76}$$ EQooNCTIooYgGObD

Nous savons de plus que y vérifie $y(t_0) = y_0$. En calculant (32.76) en t_0 et en tenant compte de $U(t_0) = 0$ nous trouvons $y_0 = G^{-1}(C)$ et donc $C = G(y_0)$. Nous avons montré que si y est une solution du problème (32.73), alors

$$y(t) = G^{-1}\big(U(t) + G(y_0)\big). \tag{32.77}$$

□ ExYCPtxgZ

Exemple 32.18.
Résoudre l'équation différentielle

$$y - \cos(t)y' = \cos(t)\big(1 - \sin(t)\big)y^2. \tag{32.78}$$

La fonction $y = 0$ est solution. En posant $z = 1/y$, nous trouvons l'équation

$$z + \cos(t)z' = \cos(t)\big(1 - \sin(t)\big) \tag{32.79}$$ EDEqII107EqpourZ

à laquelle z doit satisfaire. L'équation homogène est

$$z'_H = -\frac{z_H}{\cos(t)}. \tag{32.80}$$

Ceci est une équation à variables séparées que nous résolvons en suivant les méthodes données plus haut : nous posons

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{\cos(t)},\\
f(z) &= -z,\\
U(t) &= \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right] \quad \text{(voir formulaire)},\\
G(z) &= \ln\left(\frac{1}{z}\right).
\end{aligned} \tag{32.81}$$ EqEDufUGII107

La solution z_H est donnée par l'équation

$$\ln\left(\frac{1}{z}\right) = \ln\left[K\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right], \tag{32.82}$$

c'est-à-dire

$$z_H(t) = \frac{K}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)}. \tag{32.83}$$

Nous appliquons maintenant la méthode de variation des constantes sur cette solution afin de trouver la solution générale de l'équation (32.79). En utilisant la règle de Leibniz, $z' = K'z_H + Kz'_H$, nous trouvons

$$\frac{K}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)} + \cos(t)\left(\frac{K'}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)} - \frac{K}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)}\right) = \cos(t)\big(1-\sin(t)\big). \tag{32.84}$$

Malgré leurs apparences, les deux termes en K se simplifient. En effet, en vertu de l'équation $z'_H = \frac{-z_H}{\cos(t)}$, nous avons

$$\frac{-K}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)} = \frac{-K}{\cos(t)\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)}. \tag{32.85}$$

Le travail de voir quel est le lien entre $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)$ et $\cos(t)$ est en réalité fait dans votre formulaire au moment où vous l'avez utilisé pour intégrer u pour obtenir le $U(t)$ de (32.81).

Après cette simplification durement méritée, nous trouvons l'équation suivante pour $K(t)$:

$$\frac{K'}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)} = 1-\sin(t). \tag{32.86}$$ EDEqFracII107exoVVprb

Résoudre cela revient à trouver la primitive de

$$\big(1-\sin(t)\big)\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right), \tag{32.87}$$

ce qui est relativement compliqué. La réponse est

$$\begin{aligned} K(t) = {} & \ln\left(\sin\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right)+1\right) + \ln\left(\sin\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right)-1\right) \\ & + 2\,\ln\sec\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right) + 2\,\sin^2\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right) \end{aligned} \tag{32.88}$$

Nous pouvons un peu simplifier en utilisant le fait que $\ln(a+b)+\ln(a-b) = \ln(a^2-b^2)$:

$$K(t) = \ln\left(-\cos^2\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right)\right) + 2\,\ln\sec\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right) + 2\,\sin^2\left(\frac{2\,x+\pi}{4}\right). \tag{32.89}$$

Il me semble toutefois qu'il faudrait prendre des valeurs absolues pour les logarithmes.

△

32.5 Équations linéaires d'ordre supérieur

32.5.1 Équations et systèmes linéaires à coefficients constants

SUBSECooMXLVooALNtge

Nous regardons l'équation

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = v(t) \tag{32.90}$$ EqLinConstantRappels

où les coefficients a_k sont maintenant des constantes. Il faut commencer par résoudre le polynôme caractéristique

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{32.91}$$

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les solutions avec multiplicité $\mu_1, \ldots, \mu_k$, alors le **système fondamental** de solutions linéairement indépendantes est l'ensemble suivant de solutions à l'équation homogène :

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{\mu_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ & \vdots \\ & e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \ldots, t^{\mu_k-1}e^{\lambda_k t}. \end{aligned} \tag{32.92}$$

Nous notons y_i ces solutions. La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par

$$y_H = \sum_i c_i y_i. \tag{32.93}$$

Afin de trouver la solution générale de l'équation non homogène, nous appliquons la méthode de variation des constantes, en imposant les $n-1$ conditions

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i^{(l)}(t) = 0 \tag{32.94}$$

EqVarCstSubtil

avec $l = 0, \ldots, n-2$. Ces conditions plus l'équation de départ (32.90) forment un système de n équations différentielles pour les n fonctions inconnues $c_i(t)$.

Cette condition peut paraitre mystérieuse. Il est cependant encore possible de travailler sans poser la condition (32.94) en suivant la recette, en calculant des wronskiens[4]. Des exemples sont donnés dans les exercices sur le second ordre.

32.5.2 Si les coefficients ne sont pas constants ?

Une équation différentielle linéaire d'ordre n sur I est une équation de la forme

$$y^{(n)} + u_1(t) y^{(n-1)} + \cdots + u_{n-1}(t) y' + u_n(t) y = v(t) \tag{32.95}$$

EqLinRappels

où v et u_k sont des fonctions continues fixées de I vers $\mathbb{R}$.

Pour résoudre cette équation, il faut commencer par résoudre l'équation homogène correspondante (c'est-à-dire celle que l'on obtient en posant $v(t) = 0$). Ensuite, nous trouvons la solution de l'équation (32.95) en appliquant la méthode de la **variation des constantes**.

Donnons un exemple du pourquoi la méthode de variations des constantes est efficace. Soit l'équation

$$u' + f(t)u = g(t), \tag{32.96}$$

EqDiffExempleVarCst

et disons que u_H est une solution de l'équation homogène. La méthode de variations des constantes consiste à poser $u(t) = K(t)u_H(t)$, et donc $u'(t) = K'u_H + Ku_H'$. En remettant dans l'équation de départ,

$$K'u_H + Ku_H' + fKu_H = g. \tag{32.97}$$

La somme $Ku_H' + fKu_H$ est nulle, par définition de u_H. Par conséquent, il ne reste que

$$K' = \frac{g(t)}{u_H}. \tag{32.98}$$

Lorsqu'on utilise la méthode de variation des constantes, nous trouvons toujours une simplification « miraculeuse ».

Dans l'immédiat, nous ne considérons que le cas où les u_i sont des constantes. Le cas où les u_i deviennent des fonctions de t sera vu plus tard.

32.6 Système d'équations linéaires

32.6.1 La magie de l'exponentielle...

SUBSECooMDKIooKaaKlZ

Prenons l'équation différentielle très simple

$$y' = ay. \tag{32.99}$$

La solution est $y(t) = Ae^{at}$. Et si on a la donnée de Cauchy $y(t_0) = y_0$, alors

$$y(t) = Ae^{at}e^{-at_0}e^{at_0} = e^{a(t-t_0)}y(t_0). \tag{32.100}$$

EqytexposimpleProp

Donc on a le facteur multiplicatif $e^{a(t-t_0)}$ qui sert à faire passer de $y(0)$ à $y(t)$. C'est un peu un opérateur d'évolution. Ce qui fait la magie de l'exponentielle, c'est son développement en série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \tag{32.101}$$

EqDevExpoMag

qui est tel que chaque terme est la dérivée du terme suivant.

Maintenant, si on a un système

$$\bar{y}' = A\bar{y}, \tag{32.102}$$

il n'est pas du tout étonnant d'avoir comme solution $\bar{y}(t) = e^{At}$ où l'exponentielle de la matrice est définie exactement par la série (32.101). C'est un peu longuet, mais dans le cours, c'est effectivement ce qui est prouvé. La matrice résolvante $R(t, t_0)\colon \bar{y}_0 \to \bar{y}(t; t_0, y_0)$ est donnée par

$$R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}, \tag{32.103}$$

exactement comme dans l'équation (32.100).

[4] Définition 32.48.

32.6.2 ... mais la difficulté

Maintenant, il est suffisant de calculer des exponentielles de matrices pour résoudre des systèmes. Hélas, il est en général très difficile de calculer des exponentielles. Tu peux essayer de prouver les deux suivantes :

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow e^A = \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \\ S = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow e^S = \begin{pmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{32.104}$$

La première, tu vas la revoir si tu fais de la géométrie différentielle ou de la mécanique quantique : l'algèbre de Lie du groupe des matrices orthogonales de déterminant 1 est l'algèbre des matrices antisymétriques.

La seconde se retrouve en relativité parce que e^S est la matrice qui préserve $x^2 - y^2$, tout comme e^A préserve $x^2 + y^2$. Quelques mots sur l'uutilisation des fonctions hyperboliques en relativité dans 42.4.8.1.

32.6.3 La recette

Afin d'éviter de devoir calculer explicitement des exponentielles de matrices, nous faisons appel à toutes sortes de trucs, dont la forme de Jordan. Le résultat final est la méthode suivante. Soit le système homogène

$$\bar{y}' = A\bar{y}. \tag{32.105}$$

(1) D'abord, nous calculons les valeurs propres de A.

(2) Ensuite les vecteurs propres.

ItemRapSystDc

(3) Une bonne valeur propre, c'est une valeur propre dont l'espace propre a une dimension égale à sa multiplicité. C'est-à-dire que si λ est de multiplicité m, alors on a, dans les bons cas, m vecteur propres linéairement indépendants.

Dans ce cas, si $v_1, \dots, v_m$ sont les vecteurs, alors on a les solutions linéairement indépendantes suivantes :

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ v_1 \\ \vdots \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \dots, \begin{pmatrix} \vdots \\ v_m \\ \vdots \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \tag{32.106}$$

Pour chaque bonne valeur propre, ça nous fait un tel paquet de solutions linéairement indépendantes.

(4) Si λ n'est pas une bonne valeur propre, alors les choses se compliquent. Mettons que λ ait k vecteurs propres en moins que sa multiplicité. Dans ce cas, il faut chercher des solutions sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_1^{(k)} t^k + \dots + a_1^{(0)} \\ \vdots \\ a_n^{(k)} t^k + \dots + a_n^{(0)} \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \tag{32.107}$$

EqEqRapAsTestPolk

C'est-à-dire qu'on prend comme coefficient de $e^{\lambda t}$, un vecteur de polynômes de degré k. Il faut mettre cela dans l'équation de départ pour voir quelles sont les contraintes sur les constantes $a_i^{(j)}$ introduites.

ItemRapSystDe

(5) Nous avons un cas particulier du cas précédent. Si λ est une valeur propre de multiplicité m qui n'a que un seul vecteur propre v, alors il faut chercher des polynômes de degré $m-1$, et on peut directement fixer le coefficient de t^{m-1}, ce sera l'unique vecteur propre :

$$\left[\begin{pmatrix} \vdots \\ v \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^{(m-2)} \\ \vdots \\ a_n^{(m-2)} \end{pmatrix} t^{m-2} + \dots \right] e^{\lambda t}. \tag{32.108}$$

Cela économise quelques calculs par rapport à poser brutalement (32.107).

32.6.4 Système d'équations linéaires avec matrice constante

Nous considérons l'équation différentielle

$$y'(t) = Ay(t) \tag{32.109}$$

pour la fonction $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et A est une matrice ne dépendant pas de t. Nous supposons que A est diagonalisable pour les vecteurs propres v_i et les valeurs propres λ_i correspondantes.

La matrice

$$R(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}v_1 & \dots & e^{\lambda_n t}v_n \end{pmatrix} \tag{32.110}$$

est la **matrice résolvante** du système. Alors la solution du système (32.109) pour la condition initiale $y(0) = y_0$ est

$$y(t) = R(t)y_0. \tag{32.111}$$

En effet

$$AR(t) = \begin{bmatrix} A \begin{pmatrix} \uparrow \\ e^{\lambda_1 t}v_1 \\ \downarrow \end{pmatrix} & \dots & A \begin{pmatrix} \uparrow \\ e^{\lambda_n t}v_n \\ \downarrow \end{pmatrix} \end{bmatrix} = R'(t). \tag{32.112}$$

Par conséquent $y'(t) = R'(t)y_0 = AR(t)y_0 = Ay(t)$.

32.6.5 Système d'équations linéaires avec matrice non constante

ThoNYEXqxO

Théorème 32.19 ([807]).
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $M\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une fonction. Si les composantes M_{ij} sont des fonctions continues sur I alors :

(1) pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in R^n$ le système

$$y'(t) = M(t)y(t) \tag{32.113}$$

admet une unique solution maximale définie sur I telle que $y(t_0) = y_0$;

(2) l'ensemble des solutions de l'équation (32.113) sur I est un espace vectoriel de dimension n.

32.7 Réduction de l'ordre

SecWGdleRM

Afin de diminuer l'ordre d'une équation dans laquelle le paramètre n'apparaît pas, il y a deux changements de variables très utiles. Le premier, le plus simple, est simplement de poser $z(t) = y'(t)$, ce qui donne

$$z'(t) = y''(t). \tag{32.114}$$

Le second, *qui n'est pas le même*, est $z\big(y(t)\big) = y'(t)$, qui entraîne

$$y''(t) = z'\big(y(t)\big)y'(t) = z'\big(y(t)\big)z\big(y(t)\big). \tag{32.115}$$

Dans ce second cas, il faut également changer de variable, et utiliser $y(t)$ comme variable au lieu de t.

Si ça ne marche pas, il faut suivre la procédure ci-après.

Nous supposons avoir une équation différentielle d'ordre p dans laquelle $y^{(p)}$ est isolée des autres dérivées :

$$y^{(p)}(t) = f\big(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)\big) \tag{32.116}$$

où f est une fonction $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, et la fonction cherchée est $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

La méthode proposée ici consiste à transformer cette équation d'ordre p en un système d'équations d'ordre 1. Pour cela nous posons

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R}^p \\ (t, x) &\mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_p \\ f(t, x_1, \dots, x_p) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{32.117}$$

Nous considérons alors l'équation différentielle

$$Y'(t) = F\big(t, Y(t)\big). \tag{32.118}$$

pour $Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$. La fonction $y = Y_1$ résout l'équation (32.116) si et seulement si la fonction Y résout l'équation (32.118).

De plus si l'équation (32.116) est donnée avec les conditions initiales $y^{(k)} = a_k$ $(k = 0, \dots, p-1)$ alors l'équation (32.118) vient avec les conditions initiales

$$Y(t_0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}, \tag{32.119}$$

c'est-à-dire $Y(t_0) = A_0$ avec $A_0 \in \mathbb{R}^p$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39 nous donne existence et unicité locale de la solution au système 32.118. Lorsque le système est linéaire, c'est-à-dire sous la forme $Y'(t) = M(t)Y(t)$, alors il y a mieux : le théorème 32.19.

EXooSHMMooHVfsMB

Exemple 32.20.
Nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} -u''(t) - u(t) = 1 & \text{(32.120a)} \\ u(0) = a_0 \in \mathbb{R} & \text{(32.120b)} \\ u'(0) = a_1 \in \mathbb{R}, & \text{(32.120c)} \end{cases}$$

et nous voulons montrer que ce système accepte une unique solution. Vu que l'équation différentielle se présente sous la forme $u'' = f(t, u)$ avec $f(t, u) = -1 - u$ nous posons

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ -1 - x_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{32.121}$$

et nous considérons l'équation différentielle

$$Y' = F(t, Y) \tag{32.122}$$

pour la fonction $Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. La fonction F est lipschitzienne (et même globalement) par rapport à Y. En effet,

$$\|F(x) - F(y)\|^2 = (x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2 = \|x - y\|^2. \tag{32.123}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39 s'applique et en posant $Y_0 = (a_0, a_1)$, il existe une unique solution à l'équation $Y' = F(t, Y)$ vérifiant $Y(0) = Y_0$. Nous notons $t \mapsto Y(t)$ cette solution.

En quoi cela nous aide ? Nous posons $u(t) = Y_1(t)$. Alors

$$u'(t) = Y_1'(t) = F_1'(t, Y) = Y_2(t). \tag{32.124}$$

En dérivant encore,

$$u''(t) = Y_2'(t) = F_2'(t, Y) = -1 - Y_1(t) = -1 - u(t), \tag{32.125}$$

ce qu'il fallait. La fonction $t \mapsto Y_1(t)$ est solution de notre équation de départ. Quid des conditions initiales ? Vu que $u = Y_1$ et $u' = Y_2$ nous avons[5]

$$u(0) = Y_1(0) = (Y_0)_1 = a_0 \tag{32.126}$$

et

$$u'(0) = (Y_0)_2 = a_1. \tag{32.127}$$

Toutes les prescriptions sont respectées.

Si vous voulez vraiment résoudre cette équation, il faudra plus de travail. D'abord résoudre l'équation homogène associée, c'est-à-dire l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, ce qui va donner

$$u_H(t) = Ae^{it} + Be^{-it}, \tag{32.128}$$

et ensuite faire le coup de la variation des constantes pour déterminer la solution générale du problème non homogène. △

[5] Dans les équations suivantes, il faut faire attention aux notations : Y_0 est le vecteur Y_0, tandis que Y_1 est la première composante de la fonction Y.

EXooJNOMooYqUwTZ

Exemple 32.21.
Nous reprenons l'équation différentielle

EQooGUYPooQUStii
$$-u''(t) - u(t) = 1. \tag{32.129}$$

Nous avons déjà vu dans l'exemple 32.20 que cette équation avait une solution unique pour toute condition initiale. Cette fois nous voulons étudier les solutions lorsque nous imposons les conditions aux limites $u(0) = u(\pi) = 0$. Nous allons voir qu'il n'y a pas de telles solutions.

Pour ce faire, soit une solution u. D'abord u'' existant, la fonction u est de classe au moins C^1. Mais $u'' = -1 - u$, donc u'' est également C^1, ce qui donne la régularité C^3 pour u. En continuant ainsi nous trouvons que u est de classe C^∞.

Le truc est de considérer la fonction $v(t) = \sin(t)$ qui vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} -v'' - v = 0 & \text{(32.130a)} \\ v(0) = 0 & \text{(32.130b)} \\ v'(0) = 1. & \text{(32.130c)} \end{cases}$$

Nous calculons le produit scalaire sur $L^2\big(]0,\pi[\big)$ de (32.129) avec v :

EQooQWGEooFbsVzq
$$\langle u'', v\rangle + \langle u, v\rangle = -\langle v, 1\rangle. \tag{32.131}$$

Le calcul de $\langle v, 1\rangle$ est simplement l'intégrale de $\sin(t)$ pour t allant de 0 à π, c'est-à-dire $\langle v, 1\rangle = 2$. Vu que u et v sont toutes deux des fonctions qui s'annulent en 0 et en π nous pouvons faire des intégrations par partie les yeux fermés et exprimer $\langle u'', v\rangle$ sans dérivées sur u :

$$\langle u'', v\rangle = -\langle u', v'\rangle = \langle u, v''\rangle = -\langle u, v\rangle \tag{32.132}$$

où la dernière égalité n'est autre que le fait que $v = \sin$, donc $v'' = -v$. Le membre de gauche de (32.131) vaut donc zéro alors que celui de droite vaut -2.

Nous concluons que le problème aux limites posé n'admet pas de solutions. △

32.8 Autour de Cauchy-Lipschitz

SECooNKICooDnOFTD

Dans cette section nous étudions les équations différentielles du type

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & \text{(32.133a)} \\ y(t_0) = y_0. & \text{(32.133b)} \end{cases}$$

32.8.1 Fuite des compacts et explosion en temps fini

Théorème 32.22 (Fuite des compacts[808, 570])**.**
Nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & \text{(32.134a)} \\ y(t_0) = y_0, & \text{(32.134b)} \end{cases}$$

où $f\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue et Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Soit la solution maximale $y_M\colon J_M =]t_{min}, t_{max}[\to \Omega$. Si $t_{max} < \sup(I)$ alors $y_M(t)$ sort de tout compact de Ω lorsque $t \to t_{max}$.

Démonstration. Soit K un compact de Ω et nous considérons une suite (t_m) dans $]t_{min}, t_{max}[$ telle que $t_m \to t_{max}$. Si nous supposons que $y_M(t)$ ne sort pas de K alors nous avons $y_M(t_m) \in K$, c'est-à-dire une suite dans un compact. Quitte à passer à une sous-suite, nous supposons qu'elle est convergente. Soit $x_1 \in K$ la limite $\lim_{m\to\infty} y_M(t_m) = x_1$.

Vu que $t_{max} \in I$, la condition initiale $y(t_{max}) = x_1$ est valide et le théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39 nous donne une unique solution maximale y_P définie sur un ouvert J_P autour de t_{max}.

Nous allons maintenant construire une solution au problème initial qui contredit la maximalité de y_M. Attention : il n'est pas évident à priori que $y_P(t) = y_M(t)$ sur l'intersection des domaines. Si c'était évident, la proposition serait démontrée.

Soit $\tilde{J} = J_M \cup J_P \cap]t_{min}, +\infty[$ et la fonction

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y_M(t) & \text{si } t < t_{max} \\ y_P(t) & \text{si } t \geqslant t_{max}. \end{cases} \tag{32.135}$$

La fonction $\tilde{y}$ est continue par construction parce que

$$\lim_{t\to t_{max}} y_M(t) = x_1 = y_P(t_{max}). \tag{32.136}$$

Nous vérifions à présent que $\tilde{y}$ est une solution : $\tilde{y}'(t_{max}) = f\big(t_{max}, y(t_{max})\big)$:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\tilde{y}(t_{max}-\epsilon) - \tilde{y}(t_{max})}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{y_M(t_{max}-\epsilon) - y_P(t_{max})}{\epsilon} \tag{32.137a}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{y_M(t_{max}-\epsilon) - y_P(t_{max}-\epsilon) + y_P(t_{max}-\epsilon) - y_P(t_{max})}{\epsilon} \tag{32.137b}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{y_P(t_{max}-\epsilon) - y_P(t_{max})}{\epsilon} \tag{32.137c}$$

$$= y'_P(t_{max}). \tag{32.137d}$$

Donc $\tilde{y}$ est solution pour la condition initiale $\tilde{y}(t_{max}) = x_1$ et coïncide avec y_P en t_{max} et avec y_M avant t_{max}. Donc en réalité y_P, y_M et $\tilde{y}$ sont identiques et cela contredit la maximalité de y_M. □

CorGDJQooNEIvpp

Corolaire 32.23 (Explosion en temps fini)**.**
Soit (y_m, J) la solution maximale du problème de Cauchy (17.146) :

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & \text{(32.138a)}\\ y(t_0) = y_0, & \text{(32.138b)} \end{cases}$$

avec $f\colon U = I\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ où I est ouvert dans $\mathbb{R}$ et Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Nous supposons que f est continue sur U et localement lipschitzienne par rapport à y.

Si la solution maximale est définie sur $J =]t_{min}, t_{max}[$ alors nous avons l'alternative suivante :

ItemOLYYooJVkRfj

(1) Soit $t_{max} = \sup(I)$,

ITEMooUKFAooXwRNSB

(2) soit $t_{max} < \sup(I)$ et $\lim_{t\to t_{max}} \|y(t)\| = \infty$.

Le résultat tient aussi mutatis mutandis *pour $t_{\min}$.*

Remarque 32.24.
Attention : ceci n'est pas une simple paraphrase de la fuite des compacts. L'information supplémentaire que ce corolaire donne est que la solution sort de tout compact *pour ne plus y retourner.*

Démonstration. L'hypothèse $t_{max} < \sup(I)$ signifie que la solution finit d'exister avant que les hypothèses sur f cessent d'être vraies. C'est-à-dire que la solution maximale est moindre que ce que nous aurions pu espérer.

Soit un compact K. Supposons que que pour tout $t_0 < t_{max}$ il existe $t \in]t_0, t_{max}[$ tel que $y_M(t) \in K$. Alors cela crée une suite t_k dans J telle que $y_M(t_k)$ est dans K. Comme dans le théorème de la fuite des compacts nous concluons l'impossibilité de la chose.

Donc pour tout compact K de Ω, il existe $T < t_{max}$ tel que $y_M(t) \in \Omega \setminus K$ pour tout $t \in [T, t_{max}[$. En prenant des boules fermées de plus en plus grandes en guise de compacts nous concluons que

$$\lim_{t\to t_{max}} \|y_M(t)\| = \infty. \tag{32.139}$$

□

NORMooZROGooZfsdnZ

32.25.
Notons que si $t_{max} < \infty$, si nous sommes dans l'alternative 32.23(2) et si la solution maximale y est de classe C^1 (ce qui est le cas lorsqu'on utilise Cauchy-Lipschitz 17.39) alors la dérivée de y est également non bornée dans un voisinage de t_{max}.

Mais si f est globalement bornée, alors dans l'équation $y' = f(t,y)$, la dérivée y' sera globalement bornée. Dans ce cas, la solution ne peut pas exploser en temps fini et existe donc globalement.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 32.26
Êtes-vous d'accord avec 32.25 ?

Exemple 32.27.
Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = y(y-1)\sin(yt) & \text{(32.140a)}\\ y(0) = \dfrac{1}{2}. & \text{(32.140b)} \end{cases}$$

La fonction $f(t,y) = y(y-1)\sin(yt)$ ayant une dérivée bornée partout, elle est localement lipschitzienne et le théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39 s'applique. Pour toute condition initiale, une solution maximale unique existe.

Si nous oublions la condition initiale, il est facile de trouver des solutions constantes : $y' = 0$ avec $y(t) = k$ donne l'équation

$$0 = k(k-1)\sin(kt). \tag{32.141}$$

Les solutions $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = 1$ sont des solutions existant pour tout t.

Le graphe de la solution correspondante à la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ ne pouvant pas croiser les graphes de y_1 et y_2, elle est obligée d'exister pour tout t parce qu'elle ne peut pas exploser en temps fini. △

32.8.2 Écart entre deux conditions initiales

PROPooOPRRooQgYFDk

Proposition 32.28 ([804, 809])**.**
Soit une fonction $f\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et globalement lipschitzienne en sa seconde variable (Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$). Soient deux solutions $y_1\colon I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $y_2\colon I_2 \to \mathbb{R}^n$ aux problèmes

$$\begin{cases} y_i'(t) = f\big(t, y_i(t)\big) & \text{(32.142a)} \\ y_i(t_0) = a_i. & \text{(32.142b)} \end{cases}$$

Alors pour tout $t \in I_1 \cap I_2$ nous pouvons estimer l'écart entre y_1 et y_2 par la formule

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leqslant e^{L|t-t_0|}\|a_1 - a_2\|, \tag{32.143}$$

où L est la constante de Lipschitz de f.

Démonstration. Nous avons d'abord les majorations suivantes, qui semblent juste jouer avec les notations, mais qui utilisent le fait (contenu dans le théorème de Cauchy-Lipschitz) que y_i soit de classe C^1 :

$$\begin{aligned} \|y_1(t) - y_2(t)\| &= \| \int_{t_0}^{t} \big(y_1'(s) - y_2'(s)\big)\|ds & \text{(32.144a)} \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|f\big(s, y_1(s)\big) - f\big(s, y_2(s)\big)\|ds & \text{(32.144b)} \\ &\leqslant L \int_{t_0}^{t} \|y_1(s) - y_2(s)\|ds. & \text{(32.144c)} \end{aligned}$$

C'est à ce moment que nous utilisons le lemme de Grönwall. Vu que

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leqslant L \int_{t_0}^{t} \|y_1(s) - y_2(s)\|ds, \tag{32.145}$$

nous sommes dans les hypothèses de Grönwall 32.6 en posant

$$\begin{aligned} u(t) &= \|y_1(t) - y_2(t)\| & \text{(32.146a)} \\ b(t) &= \|y_1(0) - y_2(0)\| & \text{(32.146b)} \\ a(t) &= L. & \text{(32.146c)} \end{aligned}$$

Nous avons la majoration

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leqslant \|y_1(0) - y_2(0)\| + L \int_0^t \|y_1(0) - y_2(0)\| e^{L(t-s)}ds. \tag{32.147}$$

Le calcul de l'intégrale intérieure donne

$$\int_0^t e^{L(t-s)}ds = -\frac{1}{L}(e^{-Lt} - 1). \tag{32.148}$$

Avec ça, nous avons

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leqslant e^{Lt}\|y_1(0) - y_2(0)\|. \tag{32.149}$$

□

32.29.
Notons que la proposition 32.28 est plutôt une mauvaise nouvelle parce que les solutions restent seulement linéairement proches l'une de l'autre lorsqu'on rapproche les conditions initiales, mais elle divergent exponentiellement vite avec le temps. Donc deux trajectoires arbitrairement proches au départ finissent assez vite par être bien séparées.

Cette proposition est cependant cruciale parce qu'elle explique que pour des petits t, les solutions ne s'écartent pas beaucoup, c'est-à-dire que pour t fixé, l'application qui à une donnée initiale fait correspondre la solution en t est continue. C'est le premier pas pour parler de régularité du flot.

32.8.3 Flot d'un champ de vecteurs

Nous reprenons l'équation différentielle du théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39. En ce qui concerne les notations, I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et l'application $f\colon I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est continue et localement Lipschitz en sa seconde variable. Pour $a\in\mathbb{R}^n$, nous notons (J_a,y_a) la solution maximale (donc $y_a\colon J_a\to\mathbb{R}^n$) du problème EQooADJMooRAZWIm

$$\begin{cases} y_a'(t)=f\big(t,y_a(t)\big) & \text{(32.150a)}\\ y_a(0)=a. & \text{(32.150b)}\end{cases}$$

Nous noterons aussi de temps en temps $\varphi(t,a)=y_a(t)$.

Nous savons que $t\mapsto y_a(t)$ est de classe C^1, et cela est directement dans le théorème de Cauchy-Lipschitz. Une question d'une toute autre difficulté est la régularité de $a\mapsto y_a(t)$ pour t fixé, et encore pire : celle de $(t,a)\mapsto y_a(t)$.

Il se fait que l'application $(t,a)\mapsto y_a(t)$ a la même régularité que celle de f, mais cela va être un peu long à prouver. En ce qui concerne la régularité C^1, ce sera le théorème 32.36 dont la démonstration, comme vous pouvez le voir sera copieuse et demandera des propositions intermédiaires pas simples.

Définition 32.30.
Si t est fixé, l'application

$$\begin{aligned}\varphi_t\colon\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}^n\\ x&\mapsto\varphi(t,x)=y_x(t),\end{aligned}\tag{32.151}$$

*est le **flot** du problème de Cauchy (32.150).*

L'application $t\mapsto\varphi_t$ est ce qui est appelé le groupe à un paramètre de flot, pour des raisons qui arriverons plus tard[6]*.*

Le but est d'étudier les propriétés du flot : est-il continu, un difféomorphisme, existe, pour quels t ? Où se cache le champ de vecteurs du titre dans l'équation différentielle ?

Nous posons

$$\mathcal{D}=\bigcup_{x\in\Omega}\big(J_x\times\{x\}\big).\tag{32.152}$$

Comme tout produit d'espaces métrique, l'ensemble $\mathcal{D}$ est muni d'une métrique via la définition 7.281. PROPooUDQWooNFrNOQ

Proposition 32.31 ([804]).
Soit un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Soit une application $f\colon I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne en sa seconde variable. Pour $a\in\mathbb{R}^n$, nous notons (J_a,y_a) la solution maximale (donc $y_a\colon J_a\to\mathbb{R}^n$) du problème

$$\begin{cases} y_a'(t)=f\big(t,y_a(t)\big) & \text{(32.153a)}\\ y_a(0)=a. & \text{(32.153b)}\end{cases}$$

Nous posons

$$\mathcal{D}=\bigcup_{x\in\Omega}\big(J_x\times\{x\}\big).\tag{32.154}$$

Nous définissons la fonction φ par $\varphi(t,x)=y_x(t)$ là où ça existe.

L'ensemble $\mathcal{D}$ est ouvert. L'application $\varphi\colon\mathcal{D}\to\Omega$ est localement lipschitzienne.

Démonstration. Soit $(s,a)\in\mathcal{D}$ et (J_a,y_a) la solution maximale passant par a en $t=0$. Par définition de $\mathcal{D}$ nous avons $s\in J_a$. Nous considérons J, un compact inclus dans J_a et contenant 0 et s en son intérieur. Nous posons

$$K=J\times y_a(J).\tag{32.155}$$

[6] ou pas…

Vu que y_a est continue, cela est un compact. Chaque point de K possède un voisinage ouvert sur lequel f est lipschitzienne[7] ; nous considérons un sous recouvrement fini et le maximum des constantes de Lipschitz. Cela nous crée un voisinage V de K dans $I\times\Omega$ dans lequel f est lipschitzienne.

Vu que V est ouvert et K est compact avec $K\subset V$, nous pouvons trouver un ouvert V' et un compact K' tels que

$$K\subset V'\subset K'\subset V. \tag{32.156}$$

Sur ce V', la fonction f est de plus bornée parce que continue sur le compact K'. Nous renommons V' en V. Sur V nous avons :

- $\|f\|_{\infty,V}\leqslant M$,
- f est lipschitzienne en sa seconde variable, de constante de Lipschitz L.

En tant qu'espace produit, nous avons une distance sur $I\times\Omega$ donnée en 7.281 :

$$d\big((t,y),(t',y')\big)=\max\big\{|t-t'|,\|y-y'\|\big\}. \tag{32.157}$$

Nous posons

$$V_\epsilon(K)=\{z\in I\times\Omega \text{ tel que } d(z,K)<\epsilon\} \tag{32.158a}$$
$$W_\epsilon=\{(t,y)\in J\times\Omega \text{ tel que } \|y-y_a(t)\|<\epsilon\}. \tag{32.158b}$$

(1) $\overline{W_\epsilon}\subset\overline{V_\epsilon(K)}$

Soit $(t,y)\in W_\epsilon$. Nous avons :

$$d\big((t,y),K\big)=\inf_{(t',y')\in K}d\big((t,y),(t',y')\big) \tag{32.159a}$$
$$=\inf_{(t',y')\in K}\max\{|t-t'|,\|y-y'\|\}. \tag{32.159b}$$

SUBEQooUCZXooRpAitk

Mais demander $(t,y)\in W_\epsilon$ signifie que $t\in J$ et $\|y-y_a(t)\|\leqslant\epsilon$. Dans K nous avons l'élément $\big(t,y_a(t)\big)$ qui vérifie

$$d\big((t,y),(t,y_a(t))\big)=\|y-y_a(t)\|\leqslant\epsilon. \tag{32.160}$$

Donc l'infimum de (32.159b) est majoré par ϵ. Nous avons prouvé que $W_\epsilon\subset V_\epsilon(K)$ et donc même inclusion pour les fermetures.

(2) **Il existe $\epsilon>0$ tel que $\overline{V_\epsilon(K)}\subset V$**

Supposons que $\overline{V_\epsilon(K)}$ ne soit inclus dans V pour aucun ϵ. Alors nous considérons

$$z_n\in\overline{V_{1/n}(K)}\setminus V. \tag{32.161}$$

Nous avons par définition $d(z_n,K)\leqslant\frac{1}{n}$. Vu que K est compact, il comprend (au moins) un élément réalisant la distance : soit $z'_n\in K$ tel que

$$d(z_n,z'_n)=d(z_n,K). \tag{32.162}$$

Nous avons $d(z_n,z'_n)\to0$, de telle sorte que les valeurs d'adhérence de (z_n) et (z'_n) sont les mêmes. Et comme (z'_n) est une suite dans un compact, elle a des valeurs d'adhérence. Soit z_∞ l'une d'elles. Vu que c'est une valeur d'adhérence d'une suite contenue dans le compact K, elle est également dans K : $z_\infty\in K$. Mais en même temps, z_n est hors de l'ouvert V, et donc dans le fermé V^c. Les valeurs d'adhérences restent dans le fermé, c'est-à-dire $z_\infty\notin V$. Vu que $K\subset V$, il y a contradiction.

Donc il existe $\epsilon>0$ tel que $\overline{V_\epsilon(K)}\subset V$.

(3) **Il existe ϵ tel que $\overline{W_\epsilon}\subset V$**

Il suffit de prendre le ϵ dont nous venons de parler pour avoir

$$\overline{W_\epsilon}\subset\overline{V_\epsilon(K)}\subset V. \tag{32.163}$$

[7] Cela est à peu près la définition d'être localement lipschitzienne : 12.345, voir aussi 12.346.

Soit le ϵ en question, et $T > 0$ tel que $J \subset [-T, T]$. Nous posons $r = \epsilon e^{-LT}$. Soit $b \in \overline{B(a,r)}$ et

$$X = \{\tau \in J_+ \text{ tel que }]0,\tau] \subset J_b \text{ et } \big(t, y_b(t)\big) \in \overline{W_\epsilon}\, \forall\, t \in [0,\tau]\}. \tag{32.164}$$

Nous allons prouver que $X = J_+$ en prouvant qu'il est ouvert, fermé et non vide dans $J_+ = J \cap]0,\infty[$. Nous parlons bien de la topologie de J_+, celle induite[8] de $\mathbb{R}$. Vu que $0 \in J$, l'ensemble J_+ est ouvert à gauche, mais comme il est compact, il ne va certainement pas jusqu'à $+\infty$, de telle sorte qu'il est fermé à droite. Les ouverts de J_+ sont les ensembles de la forme $\mathcal{O} \cap J_+$ où $\mathcal{O}$ est ouvert de $\mathbb{R}$. Il y en a de la forme $]0, m]$.

(1) **X est fermé**

C'est parce que $\overline{W_\epsilon}$ et J_b sont fermés.

(2) **X est ouvert**

Soit $\tau \in X$. Si $\tau = \sup J_+$ alors $X = J_+$ est un ouvert de J_+. Supposons donc que $0 < \tau < \sup J_+$. Dans ce cas nous avons

$$\big(\tau, y_b(\tau)\big) \in \overline{W_\epsilon} \subset V, \tag{32.165}$$

et nous pouvons résoudre localement le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & \text{(32.166a)} \\ y(\tau) = \varphi(\tau, b) = y_b(\tau). & \text{(32.166b)} \end{cases}$$

Ce y existe jusqu'à $\tau+\eta$ (pour au moins un petit η), et par l'unicité de la solution, $y = y_b$ sur $[\tau, \tau+\eta[$. Ceci pour dire que le flot $\varphi(.,b)$ existe au moins jusqu'à $\tau + \eta$.

Grâce à la proposition 32.28 nous pouvons évaluer

$$\|\varphi(\tau,b) - \varphi(\tau,a)\| = \|y_a(\tau) - y_b(\tau)\| \leqslant e^{L\tau}\|b-a\|. \tag{32.167}$$

Comme nous avions choisi $r = \epsilon e^{-LT}$ et $b \in \overline{B(a,r)}$ nous avons aussi $\|b-a\| \leqslant \epsilon e^{-LT}$ et donc

$$\|\varphi(\tau,b) - \varphi(\tau,a)\| \leqslant \epsilon e^{L(\tau-T)} < \epsilon \tag{32.168}$$

parce que nous avions $\tau < \sup J_+ \leqslant T$, ce qui garantit que $e^{L(\tau-T)} < 1$.

Est-ce que ceci nous garantit que $\tau + \eta \in X$? Il faudrait $\big(\tau+\eta, y_b(\tau+\eta)\big) \in \overline{W_\epsilon}$, c'est-à-dire $\|y_b(\tau+\eta) - y_a(\tau+\eta)\| \leqslant \epsilon$. L'ensemble J_+ étant fermé dans l'ouvert J_a, ce dernier déborde certainement. Prenons donc η assez petit pour que y_a existe jusqu'en $\tau + \eta$.

Vu que y_a et y_b sont continues, et qu'en τ elles sont distantes de moins de ϵ, en $\tau + \eta$, elles restent distantes de moins de ϵ (quitte à prendre encore η plus petit).

Ceci nous permet de conclure que X est ouvert.

(3) **X est non vide**

La solution y_b au problème

$$\begin{cases} y_b'(t) = f\big(t, y_b(t)\big) & \text{(32.169a)} \\ y_b(0) = b & \text{(32.169b)} \end{cases}$$

existe au moins localement et vérifie $\|y_b(0) - y_a(0)\| = \|b-a\| \leqslant \epsilon e^{-LT} < \epsilon$. Par continuité nous avons

$$\|y_b(t) - y_a(t)\| < \epsilon \tag{32.170}$$

pour tout t dans un voisinage de 0. Donc X est non vide.

(4) **Conclusion pour X**

La partie X est ouverte, fermée et non vide dans J_+ qui est connexe. Donc $X = J_+$ par la proposition 7.105(4).

La conclusion $X = J_+$ nous enseigne que pour tout $t \in J_+$ nous avons $]0,t] \subset J_b$ et $\big(t, y_b(t)\big) \in \overline{W_\epsilon}$. Nous pouvons faire la même chose pour J_- et au final nous avons que pour tout $\tau \in J$ nous avons d'abord $\tau \in J_b$, ce qui prouve $J \subset J_b$. De plus pour tout $t \in J$ nous avons aussi

$$\big(t, y_b(t)\big) \in \overline{W_\epsilon} \subset V. \tag{32.171}$$

[8] Définition 7.27.

Nous en concluons que

$$J \times \overline{B(a,r)} \subset V. \tag{32.172}$$

Nous savons de plus que pour tout $b \in \overline{B(a,r)}$, $J \subset J_b$. Cela signifie que

$$J \times \overline{B(a,r)} \subset \mathcal{D}. \tag{32.173}$$

Mais $J \times \overline{B(a,r)}$ est un voisinage de (s,a) qui était au début de la preuve un point générique choisi dans $\mathcal{D}$. Donc $\mathcal{D}$ est ouvert parce qu'il contient un voisinage de chacun de ses points.

Il nous reste à voir que $\varphi\colon \mathcal{D} \to \Omega$ est localement lipschitzienne. Soit donc le point générique (s,a) dans $\mathcal{D}$ et l'ensemble V qui avait été construit plus haut. Nous allons montrer que φ est lipschitzienne sur $J \times \overline{B(a,r)} \subset V$. D'abord sur V, l'application f est lipschitzienne, donc

$$\|\varphi(t,b_1) - \varphi(t,b_2)\| \leqslant e^{Lt}\|b_1 - b_2\| \leqslant e^{LT}\|b_1 - b_2\| \tag{32.174}$$

pour tout $t \in J$ et $b_1, b_2 \in \overline{B(a,r)}$.

Ensuite, f est bornée, majorée par M sur V, donc

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t_1,b) - \varphi(t_2,b)\| &= |\int_{[t_1,t_2]} y'(s)ds| && \text{(32.175a)}\\
&= |\int_{[t_1,t_2]} f\big(s, y_b(s)\big)ds| && \text{(32.175b)}\\
&\leqslant \int_{[t_1,t_2]} |f\big(s, y_b(s)\big)|ds && \text{(32.175c)}\\
&\leqslant M|t_1 - t_2|. && \text{(32.175d)}
\end{aligned}$$

Et enfin nous prouvons que φ est localement lipschitzienne. En posant $k = \max\{e^{LT}, M\}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t_1,b_1) - \varphi(t_2,b_2)\| &\leqslant \|\varphi(t_1,b_1) - \varphi(t_1,b_2)\| + \|\varphi(t_1,b_2) - \varphi(t_2,b_2)\| && \text{(32.176a)}\\
&\leqslant e^{LT}\|b_1 - b_2\| + M|t_1 - t_2| && \text{(32.176b)}\\
&\leqslant k\big(\|b_1 - b_2\| + |t_1 - t_2|\big) && \text{(32.176c)}\\
&\leqslant 2k \max\{\|b_1 - b_2\|, |t_1 - t_2|\} && \text{(32.176d)}\\
&= 2kd\big((b_1,t_1),(b_2,t_2)\big). && \text{(32.176e)}
\end{aligned}$$

Le flot φ est donc lipschitzien de constante $2k$. □

Exemple 32.32.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 32.33

Cet exemple doit être lu attentivement. Il me semble prouver que le flot n'est pas dérivable en la condition initiale sans que f le soit. Le document [810] semble dire le contraire. Je ne suis pas assez sûr de mon coup pour contredire.

Il n'y a pas de raisons de penser que $a \mapsto y_a(t)$ soit mieux que continue sans hypothèses supplémentaires sur f. Pour illustrer cela nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial s} = f\big(X(s), s\big) & \text{(32.177a)}\\ X(t) = x & \text{(32.177b)} \end{cases}$$

où t et x sont des paramètres fixés. Nous allons étudier la dérivabilité de X en x lorsque

$$f(x,t) = |x|. \tag{32.178}$$

Cela est un exemple typique de fonction autant lipschitzienne que l'on veut sans être dérivable. L'équation différentielle est

$$\frac{\partial X}{\partial s}(s) = |X(s)|. \tag{32.179}$$

Si $x > 0$ alors $X(s) > 0$ dans un voisinage de $s = t$ et nous avons $X(s) = Ke^s$. La constante K se fixe par la condition initiale $X(t) = x$:

$$X(s) = xe^{s-t}. \tag{32.180}$$

Et cette solution tient en réalité pour tout s parce que $X(s)$ est alors toujours positif.

Si au contraire $x<0$ nous avons la solution

$$X(s)=xe^{t-s}. \tag{32.181}$$

Au final,

$$X(s;x,t)=\begin{cases} xe^{t-s} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ xe^{s-t} & \text{si } x>0 \end{cases} \tag{32.182}$$

L'application $(s,x,t)\mapsto X(s;x,t)$ est continue. En ce qui concerne la dérivée partielle $\partial_x X$ en $x=0$ nous avons :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(s,0,t)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{X(s,\epsilon,t)-X(s,0,t)}{\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{X(s,\epsilon,t)}{\epsilon}. \tag{32.183}$$

EQooTQXQooAtRxNT

La limite à droite donne :

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{X(s,\epsilon,t)}{\epsilon}=\frac{\epsilon e^{s-t}}{\epsilon}=e^{s-t}. \tag{32.184}$$

La limite à gauche donne :

$$\lim_{\epsilon\to 0^-}\frac{X(s,\epsilon,t)}{\epsilon}=e^{t-s}. \tag{32.185}$$

Les deux limites n'étant pas égales, la limite (32.183) n'existe pas[9] et l'application $(s,x,t)\mapsto X(s,x,t)$ n'est pas dérivable par rapport à x. △

PROBooYUYQooSBsrNh

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 32.34
Je ne suis pas tout à fait certain de la définition du V dans le lemme 32.35. Il faudrait écrire la preuve complète pour s'assurer.

LEMooOJSNooXTJoEf

Lemme 32.35 ([811]).
Soit un application $A\colon \overline{B(t_0,\tau)}\times\overline{B(a,R)}\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ continue par rapport à sa première variable ($t_0\in\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}^n$). Nous considérons l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t}(t,b)=A(t,b)\psi(t,b) & \text{(32.186a)}\\ \psi(t_0,b)=\psi_0. & \text{(32.186b)} \end{cases}$$

Alors il existe un voisinage V de a dans lequel nous avons l'estimation

$$\|\psi(t,v)-\psi(t,w)\|\leqslant\|\psi_0\|\tau\max_{s\in\overline{B(t_0,\tau)}}\|A(s,v)-A(s,w)\|\times \\ \times\exp\left(\tau\max_{s\in\overline{B(t_0,\tau)}}\max\{\|A(s,v)\|,\|A(s,w)\|\}\right) \tag{32.187}$$

pour tout $t\in\overline{B(t_0,\tau)}$ et $v,w\in V$.

THOooSTHXooXqLBoT

Théorème 32.36 (Régularité C^1 du flot [811]).
Soit un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit une fonction $f\in C^1\big(I\times\Omega,\mathbb{R}^n\big)$, $a\in\Omega$ et $t_0\in I$.

Il existe un voisinage $W\times V=\overline{B(t_0,\tau)}\times\overline{B(a,r)}$ de (t_0,a) dans $I\times\Omega$ et une unique application $\varphi\colon W\times V\to\Omega$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)=f\big(t,\varphi(t,x)\big) & \text{(32.188a)}\\ \varphi(t_0,x)=x & \text{(32.188b)} \end{cases}$$

pour tout $x\in V$.

L'application $(t,x)\mapsto\varphi(t,x)$ est de classe C^1.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 32.37
La preuve qui suit doit être lue avec beaucoup d'attention, en particulier sur les incohérences possibles de notations, et sur les oublis possibles de précautions oratoires type « quitte à encore réduire les voisinages V et W ».

[9] Si vous comptez donner ça à manger au jury d'un concours, soyez prudent et n'écrivez pas l'équation (32.183) au tableau. Réfléchissez comment rédiger cela correctement.

Démonstration. En termes de notations, pour $x \in \Omega$ fixé nous écrivons $y_x(t)$ pour $\varphi(t,x)$ et pour $t \in I$ fixé nous notons $\varphi_t(x)$ pour $\varphi(t,x)$.

De plus lorsque nous écrirons des choses comme $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous n'entendrons pas que g est effectivement définie sur tout $\mathbb{R}$. La notation « $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ » indiquera seulement que la variable de g est réelle, et que nous comptons préciser le domaine plus tard. Cette remarque s'applique seulement à cette démonstration et non à l'ensemble du livre.

Nous considérons $R > 0$ tel que $\overline{B(a,2R)} \subset \Omega$ et ensuite nous posons $V = \overline{B(a,R)}$. La fonction y_x, solution pour la condition initiale $y_x(t_0) = x$ est définie sur $W = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ et prend ses valeurs dans $\overline{B(x,R)}$. Ceci est parce que y_x est continue, alors en prenant τ assez petit, la valeur de $y_x(t)$ ne va pas s'éloigner de x lorsque t ne s'éloigne pas de t_0.

Nous savons déjà de la proposition 32.31 que φ est C^1 en t et localement lipschitzienne en sa seconde variable, avec une constante de Lipschitz uniforme sur $W \times V$. Elle est donc continue en tant que fonction

$$\varphi\colon V \times W \to \mathbb{R}^n. \tag{32.189}$$

(1) **La différentielle partielle Df** Pout t fixé nous notons $Df_{(t,x)}$ la différentielle de f par rapport à x. C'est-à-dire que

$$\begin{aligned} Df_{(t,x)}\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \frac{d}{ds}\Big[f(t,x+su)\Big]_{s=0}. \end{aligned} \tag{32.190}$$

C'est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$. Nous allons montrer que

$$(t,x) \mapsto Df_{(t,x)} \tag{32.191}$$

est continue en tant qu'application $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Pour cela nous introduisons l'application d'inclusion $i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $i(u) = (0,u)$. Elle donne

$$Df_{(t,x)}(u) = \frac{d}{ds}\Big[f\big((t,x) + s(0,u)\big)\Big]_{s=0} = df_{(t,x)} \circ i(u). \tag{32.192}$$

Autrement dit

$$Df_{(t,x)} = df_{(t,x)} \circ i. \tag{32.193}$$

Or l'application $(t,x) \mapsto df_{(t,x)}$ est continue par hypothèse (f est de classe C^1) et l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ A &\mapsto A \circ i \end{aligned} \tag{32.194}$$

EQooZTAPooCduWcl

est également continue. Donc $(t,x) \mapsto Df_{(t,x)}$ est continue[10].

(2) **L'équation aux variations**

Soit $x \in \Omega$. Nous introduisons l'opérateur

$$\begin{aligned} S_x\colon \mathbb{R} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ S_x(t,\psi) &= Df_{(t,y_x(t))} \circ \psi. \end{aligned} \tag{32.195}$$

Par ce que nous avons raconté, cela est une fonction continue en sa première variable et lipschitzienne en sa seconde variable. Nous identifions $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ à $\mathbb{R}^{n^2}$.

Toujours pour chaque x considéré nous posons l'équation différentielle ordinaire

EQooQONGooBrxuSA

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) = S_x\big(t,\psi(t,x)\big) & \text{(32.196a)} \\ \psi(t_0,x) = \mathrm{Id}\,. & \text{(32.196b)} \end{cases}$$

qui est une équation différentielle ordinaire pour $\psi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ rentrant dans le cadre de Cauchy-Lipschitz.

Quel est le domaine de définition de ψ pour sa première variable ? C'est un ouvert autour de t_0. Nous réduisons W de telle sorte que la solution ψ soit définie sur W. Idem pour la variable x qui est dans un voisinage de a.

L'équation (32.196) s'appelle l'**équation aux variations**. Nous allons montrer dans la douleur que ψ est continue et est la différentielle de φ_t, c'est-à-dire que

$$(d\varphi_t)_b = \psi(t,b). \tag{32.197}$$

[10] Si quelqu'un peut prouver ça de façon moins verbeuse, je suis preneur. Il me semble que quel que soit la façon dont on s'y prend, sous le capot, on passe par la continuité de l'application (32.194).

(3) **ψ est continue en (t,x) (début)**

Il s'agit de majorer les deux termes de

$$\|\psi(t_1,a_1)-\psi(t_2,a_2)\| \leqslant \|\psi(t_1,a_1)-\psi(t_2,a_1)\| + \|\psi(t_2,a_1)-\psi(t_2,a_2)\|. \tag{32.198}$$

EQooVUNUooExeQba

(3a) **Premier terme**

Nous avons

$$\begin{aligned}
\|\psi(t_1,b)-\psi(t_2,b)\| &= \| \int_{[t_1,t_2]} \frac{\partial\psi}{\partial t}(s,b)ds\| && (32.199a)\\
&\leqslant \int_{[t_1,t_2]} \|Df_{(s,y_b(s))}\circ\psi(s,b)\|ds && (32.199b)\\
&\leqslant \int_{[t_1,t_2]} \|Df_{(s,t_b(s))}\|\|\psi(s,b)\|ds && (32.199c)\\
&\leqslant |t_1-t_2| \max_{s\in[t_1,t_2]} \|Df_{(s,y_b(s))}\| \max_{s\in[t_1,t_2]} \|\psi(s,b)\|. && (32.199d)
\end{aligned}$$

SUBEQooLYMAooRMaMhn

Nous allons majorer le second maximum. Prenons $t\in[0,\tau]$; et posons $A(u,b)=Df_{(u,y_b(u))}$ pour alléger les notations. Par l'équation de définition de ψ nous avons

$$\psi(t,b)=\psi(0,b)+\int_{[0,t]} A(u,b)\psi(u,b)du, \tag{32.200}$$

et donc

$$\|\psi(t,b)\| \leqslant \|\psi_0\| + \int_{[0,t]} \|A(u,b)\|\|\psi(u,b)\|du. \tag{32.201}$$

En y appliquant le lemme de Grönwall dans sa version 32.5 nous trouvons

$$\begin{aligned}
\|\psi(s,b)\| &\leqslant \|\psi_0\| \exp\left(\int_{[0,s]} \|A(u,b)\|du\right) && (32.202a)\\
&\leqslant \|\psi_0\| \exp\left(s \max_{u\in[0,s]} \|A(u,b)\|\right). && (32.202b)
\end{aligned}$$

En retournant à (32.199d) nous avons $\psi_0=\mathrm{Id}$ et donc $\|\psi_0\|=1$ et

$$\max_{s\in[t_1,t_2]} \|\psi(s,b)\| \leqslant \max_{s\in[t_1,t_2]} \exp\left(s \max_{u\in[0,t]} \|Df_{(u,y_b(u))}\|\right) \tag{32.203}$$

Là dedans nous pouvons remplacer t par $\max\{|t_1|,|t_2|\}$. Posons enfin, pour alléger les expressions

$$\alpha(t_1,t_2,b)=\max_{s\in[t_1,t_2]} \|Df_{(s,y_b(s))}\|. \tag{32.204}$$

La majoration que nous retenons est :

$$\|\psi(t_1,b)-\psi(t_2,b)\| \leqslant |t_1-t_2|\alpha(t_1,t_2,b)\exp\big(\max\{|t_1|,|t_2|\}\alpha(0,t,b)\big). \tag{32.205}$$

Cela tend vers zéro lorsque $t_1\to t_2$.

(3b) **Deuxième terme**

En ce qui concerne le second terme,

$$\|\psi(t,b_1)-\psi(t,b_2)\| \tag{32.206}$$

nous utilisons le lemme 32.35 qui donne, pour $t\in[t_0-\tau,t_0+\tau]$,

$$\begin{aligned}
\|\psi(t,b_1)-\psi(t,b_2)\| \leqslant \tau \max_{s\in\overline{B}(0,\tau)} &\|Df_{s,y_{b_1}(s)}-Df_{s,y_{b_2}(s)}\|\times\\
&\times\exp\Big(\tau\max\{\|Df_{s,y_{b_1}(s)}\|,\|Df_{s,y_{b_2}(s)}\|\}\Big).
\end{aligned} \tag{32.207}$$

Dans notre cas, $t_0=0$, donc $t\in[-\tau,\tau]$. Vu la continuité de Df, nous avons

$$\max_{s\in\overline{B}(0,\tau)} \|Df_{s,y_{b_1}(s)}-Df_{s,y_{b_2}(s)}\|\to 0 \tag{32.208}$$

lorsque $b_1\to b_2$.

(3c) **ψ est continue en (t,x) (fin)**

Les deux bons calculs faits, nous avons, en repartant de (32.198),

$$\lim_{(t_1,b_1)\to(t_2,b_2)} \|\psi(t_1,b_1)-\psi(t_2,b_2)\| = 0, \tag{32.209}$$

ce qui signifie que ψ est une fonction continue de ses deux variables en même temps.

(4) **Différentiabilité de φ (début)**

Nous montrons maintenant que $D\varphi(t,x)$ existe. Pour rappel, D est la différentielle par rapport à la seconde variable. Nous sommes à étudier l'existence de $D\varphi_{(t,b)} = d(\varphi_t)_b$. Nous posons

$$\theta(t,h) = \varphi(t,b+h) - \varphi(t,b) = y_{b+h}(t) - y_b(t) \tag{32.210}$$

où b est le point où nous étudions la différentiabilité. Il est dans un voisinage du point a fixé depuis le début et autour duquel il existe un voisinage qui donne un sens à tout ce que nous avons fait jusqu'à présent. La dépendance de θ en b est implicite. Vu que φ est lipschitzienne en sa seconde variable, nous avons la majoration

$$\|\theta(t,h)\| \leqslant C\|h\| \tag{32.211}$$ EQooKYELooZlfeed

dès que $t\in V$ et $b, b+h\in W$.

De plus, parce que t_0 est le temps de la condition initiale nous avons

$$\theta(t_0,h) = y_{b+h}(t_0) - y_b(t_0) = a+h-a = h. \tag{32.212}$$

Et aussi, par définition de ψ :

$$\psi(t,b) = \psi_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial\psi}{\partial t}(s,b)ds = \psi_0 + \int_{t_0}^{t} Df_{(s,y_b(s))}\circ\psi(s,b) \tag{32.213}$$

En appliquant à h et en se souvenant que $\psi_0 = \mathrm{Id}$,

$$\psi(t,b)h = h + \int_{t_0}^{t} \Big(Df_{s,y_b(s)}\circ\psi(s,b)\Big)h\,ds. \tag{32.214}$$

Puis on peut faire un calcul assez classique en se souvenant que $\theta(t_0,h)=h$:

$$\theta(t,h) = \theta(t_0,h) + \int_{t_0}^{t} \big[\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,b+h) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,b)\big]ds \tag{32.215a}$$

$$= h + \int_{t_0}^{t} \big[f\big(s,y_{b+h}(s)\big) - f\big(s,y_b(s)\big)\big]ds. \tag{32.215b}$$

On fait la différence entre les deux :

$$\theta(t,h) - \psi(t,b)h = -\int_{t_0}^{t} \big[Df_{s,y_b(s)}\circ\psi(s,b)h - f\big(s,y_{b+h}(s)\big) + f\big(s,y_b(s)\big)\big]ds. \tag{32.216}$$

Nous y ajoutons et soustrayons $Df_{s,y_b(s)}\theta(s,h)$ et nous retenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\|\theta(t,h) - \psi(t,b)h\| \leqslant &\int_{t_0}^{t} \|Df_{(s,y_b(s))}\psi(s,b) - Df_{(s,y_b(s))}\theta(s,h)\|ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} \|f(s,y_{b+h}(s)) - f(s,y_b(s)) + Df_{(s,y_b(s))}\theta(s,h)\|ds.\end{aligned} \tag{32.217}$$ EQooODHPooDYyBoH

Nous allons encore majorer ces deux termes séparément. Soit $\epsilon>0$.

(4a) **Premier terme**

Ce qui est dans la norme à majorer est

$$Df_{(s,y_b(s))}\big(\psi(s,b)h - \theta(s,h)\big). \tag{32.218}$$

Vu que Df est continue et que y_b est continue[11], l'application $s\mapsto Df_{s,y_b(s)}$ est continue et donc de norme majorée sur le compact $[t_0,t]$. Nous rapellons la notation

$$\alpha(t_0,t,b) = \max_{s\in[t_0,t]} \|Df_{s,y_b(s)}\|, \tag{32.219}$$

et nous majorons encore et toujours. D'abord

$$\int_{t_0}^{t} \|Df_{(s,y_b(s))}\big(\psi(s,b)h - \theta(s,h)\big)\|ds \leqslant \alpha(t_0,t,b)\int_{t_0}^{t} \|\psi(s,b)-\theta(s,h)\|ds. \tag{32.220}$$

[11] Il faut encore réduire les voisinages V et W pour que ceci ait un sens.

(4b) **Deuxième terme**

Pour traiter le deuxième terme, nous allons provisoirement noter $x = y_b(s)$ et $y = y_{b+h}(s)$; entre autres, $y - x = \theta(s,h)$. Ce qui est écrit dans le second terme de (32.217) est

$$f(s,y) - f(s,x) + Df_{(s,x)}\theta(s,h) = f(s,y) - f(s,x) + Df_{(s,x)}(y-x) \tag{32.221}$$

Comme D ne s'applique pas à la variable s, nous pouvons alléger la notation et déduire de la différentiabilité de f qu'il existe un $\eta > 0$ tel que $x, y \in W$ avec $\|y - w\| \leqslant \eta$ implique

$$\|f(y) - f(x) - Df_x(y-x)\| \leqslant \epsilon\|y - x\|. \tag{32.222}$$

Prenons $\|h\| \leqslant \eta/C$ (le C de (32.211)) ; en déballant les notations,

$$\|f\big(s, y_{b+h}(s)\big) - f\big(s, y_b(s)\big) - Df_{(s,y_b(s))}\theta(s,h)\| \leqslant \epsilon\|\theta(s,h)\| \leqslant \epsilon C\|h\|. \tag{32.223}$$

(4c) **Les deux termes ensemble**

En remettant les deux dans (32.217) nous trouvons la majoration

$$\|\theta(t,h) - \psi(t,b)h\| \leqslant |t - t_0|\epsilon C\|h\| + \alpha(t_0,t,v)\int_{t_0}^{t} \|\psi(s,b)h - \theta(s,h)\|ds \tag{32.224}$$

qui est encore de la graine à Grönwall avec

$$\begin{cases} u(t) = \|\theta(t,h) - \psi(t,b)\| & \text{(32.225a)} \\ b(t) = |t - t_0|\epsilon C\|h\| & \text{(32.225b)} \\ a(s) = \alpha(t_0,t,v), & \text{(32.225c)} \end{cases}$$

la troisième étant une fonction constante. Cela donne, pour $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$,

$$\|\theta(t,h) - \psi(t,b)h\| \leqslant |t - t_0|\epsilon C\|h\| + \int_{t_0}^{t} (s - t_0)\epsilon C\|h\|\alpha(t_0,t,b)\exp\left(\int_s^t \alpha(t_0,t,b)du\right)ds. \tag{32.226}$$

En valeur absolue, la différence $s - t_0$ est majorée par τ, l'intégrale dans l'exponentielle vaut $(t-s)\alpha(t_0,t,b)$, et restons avec

$$\|\theta(t,h) - \psi(t,b)h\| \leqslant \tau\epsilon C\|h\| + \tau\int_{t_0}^{t} \epsilon C\|h\|\alpha(t_0,t,b)e^{\alpha(t_0,t,b)(t-s)}ds. \tag{32.227}$$

En supposant $t > t_0$ nous pouvons calculer l'intégrale. Si vous m'avez suivi jusqu'ici, vous devriez avoir de tels maux de tête que je vous donne la réponse :

$$\int_{t_0}^{t} a(t_0,t,b)e^{(t-s)\alpha(t_0,t,b)}ds = e^{(t_0-t)\alpha(t_0,t,b)} - 1. \tag{32.228}$$

En remettant dans l'expression,

$$\|\theta(t,h) - \psi(t,b)h\| \leqslant \tau\epsilon C\|h\| + \epsilon C\|h\|\alpha(t_0,t,b)\tau\big(e^{(t-t_0)} - 1\big) = \tau\epsilon C\|h\|e^{(t-t_0)\alpha(t,t_0,b)}. \tag{32.229}$$

Nous pouvons majorer $t - t_0$ par τ et $\alpha(t,t_0,b)$ par $\alpha(t_0 - \tau, t_0 + \tau, b)$ pour avoir la majoration

$$\|\theta(t,h) - \psi(t,b)h\| \leqslant \tau\epsilon C\|h\|e^{\tau\alpha(t_0-\tau,t_0+\tau,b)}. \tag{32.230}$$

(4d) **Différentiabilité de $\varphi(t,b)$ (fin)**

Nous écrivons la définition 10.279 de la différentiabilité : nous voulons vérifier que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t,b+h) - \varphi(t,b) - \psi(t,b)h}{\|h\|} = 0. \tag{32.231}$$

Nous remplaçons $\varphi(t,b+h) - \varphi(t,b)$ par $\theta(t,h)$ et prenons la norme avec les majorations données :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\varphi(t,b+h) - \varphi(t,b) - \psi(t,b)h\|}{\|h\|} \leqslant \lim_{h\to 0} \tau\epsilon C e^{\tau e(t_0-\tau,t_0+\tau,b)}. \tag{32.232}$$

Cela étant valable pour tout ϵ, nous en déduisons la nullité de la limite.

Nous avons démontré que φ était différentiable par rapport à sa deuxième variable et que

$$D\varphi_{(t,b)} = \psi(t,b). \tag{32.233}$$

EQooPJFOooHuQIuw

(5) **Conclusion : φ est de classe C^1**

Nous avons déjà prouvé que $(t,b)\mapsto\psi(t,b)$ est continue. Donc de (32.233) nous déduisons que les dérivées partielles $(t,b)\mapsto\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t,b)$ sont continues. Mais comme φ est lipschitzienne en t, la dérivée partielle $(t,b)\mapsto\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,b)$ est également continue.

La continuité de toutes les dérivées partielles de φ nous donne la classe C^1 pour φ par le théorème 12.320.

□

PROPooINLNooDVWaMn

Proposition 32.38 (Régularité C^p du flot[812])**.**
Soit un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit une fonction $f\in C^p\big(I\times\Omega,\mathbb{R}\big)$, ainsi que $a\in\Omega$ et $t_0\in I$.

Il existe un voisinage $W\times V=\overline{B(t_0,\tau)}\times\overline{B(a,r)}$ de (t_0,a) dans $I\times\Omega$ et une unique application $\varphi\colon W\times V\to\Omega$ telle que

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)=f\big(t,\varphi(t,x)\big) & (32.234a)\\ \varphi(t_0,x)=x & (32.234b)\end{cases}$$

pour tout $x\in V$.

L'application $(t,x)\mapsto\varphi(t,x)$ est de classe C^p.

Démonstration. Nous savons déjà par le théorème 32.36 que $(t,x)\mapsto\varphi(t,x)$ est de classe C^1. Nous supposons que f est de classe C^p avec $p\geqslant 2$.

Vu que φ et f sont de classe C^1, nous avons aussi que l'application $(t,x)\mapsto f\big(t,\varphi(t,x)\big)$ est de classe C^1. L'équation donne alors immédiatement le fait que

$$(t,x)\mapsto\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) \tag{32.235}$$

est de classe C^1.

En ce qui concerne la régularité par rapport aux autres variables, il faudra travailler un peu plus.

(1) **Une équation différentielle pour le flot** Nous allons commencer par un habile jeu d'écriture : la formule

$$\varphi(t,x)=x+\int_{t_0}^t f\big(s,\varphi(s,x)\big)ds \tag{32.236}$$

devient

$$\varphi_t(x)=x+\int_{t_0}^t f\big(s,\varphi_s(x)\big)ds. \tag{32.237}$$

EQooQGVOooYMEgcM

Dans le même ordre d'idée nous notons $f_s(x)=f(s,x)$, et ce qui se trouve dans l'intégrale (32.237) n'est autre que la fonction

$$g_s(x)=(f_s\circ\varphi_s)(x). \tag{32.238}$$

Tout cela pour différentier l'égalité (32.237) par la proposition 17.25 :

$$\begin{aligned}(d\varphi_t)_x&=\mathrm{Id}+\int_{t_0}^t(dg_s)_x ds & (32.239a)\\ &=\mathrm{Id}+\int_{t_0}^t(df_s)_{\varphi_s(x)}\circ(d\varphi_s)_s ds. & (32.239b)\end{aligned}$$

Nous dérivons ensuite cela par rapport à t :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((d\varphi_t)_x\Big)=(df_t)_{\varphi_t(x)}\circ(d\varphi_t)_x. \tag{32.240}$$

EQooBETGooXKWRxX

Cela est une égalité dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Nous introduisons la fonction

$$\begin{aligned}F\colon I\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\Omega&\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\\ (t,A,x)&\mapsto(df_t)_{\varphi_t(x)}\circ A.\end{aligned} \tag{32.241}$$

En fait, à la place de I et Ω il faut prendre des petits voisinages dans lesquels les choses ont un sens. Ce que dit l'équation 32.240 est que l'application

$$\begin{aligned} A\colon I\times\Omega &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\\ (t,x) &\mapsto (d\varphi_t)_x \end{aligned} \tag{32.242}$$

vérifie l'équation différentielle EQooTOJMooLXLfVv

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t}(t,x) = F\big(t,A(t,x),x\big) & \text{(32.243a)}\\ A(t_0,x) = \mathrm{Id}\,. & \text{(32.243b)} \end{cases}$$

(2) **Une autre équation différentielle**

Nous n'oublions pas l'équation différentielle pour la dérivée par rapport à t :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) = f\big(t,\varphi(t,x)\big). \tag{32.244}$$ EQooYOJPooKEgjec

(3) **Réécriture pour la différentielle**

Nous allons récrire l'équation (32.243) de façon à ce que le paramètre x soit inclus dans la condition initiale. De cette manière, la solution pourra profiter de la régularité C^1 du flot déjà prouvée dans le théorème 32.36.

Soit

$$\begin{aligned} g\colon I\times\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\Omega\big) &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\Omega\\ \big(t,(A,x)\big) &\mapsto \Big(F(t,a,x),0\Big). \end{aligned} \tag{32.245}$$

Nous posons $E=\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\times\Omega$; c'est cet espace qui va jouer le rôle de Ω. Nous considérons à présent l'équation différentielle suivante pour $z_x\colon I\to E$: EQooSMYOooDaxgQx

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} z_1'(t)\\ z_2'(t)\end{pmatrix} = z'(t) = g(t,z(t)) = \begin{pmatrix} F\big(t,z_1(t),z_2(t)\big)\\ 0\end{pmatrix} & \text{(32.246a)}\\ z(t_0) = (\mathrm{Id},x). & \text{(32.246b)} \end{cases}$$

Il devrait y avoir un indice (Id,x) à z parce que c'est sa condition initiale. La fonction g est de classe C^p, donc cette équation admet une unique solution dont le flot est de classe C^1. Autrement dit, si S est dans un voisinage de Id, l'application

$$(t,x)\mapsto z(t) \tag{32.247}$$

est de classe C^1. Nous allons montrer qu'en posant $A(t,x)=z_1(t)$, nous avons une solution de (32.243) (l'unicité de la solution impose que cette solution est effectivement la différentielle de $d\varphi_t$). D'abord, la seconde ligne de l'équation différentielle est $z_2'(t)=0$, c'est-à-dire $z_2(t)=x$ pour tout t.

Sachant cela, la première équation devient

$$\begin{cases} z_1'(t) = F\big(t,z_1(t),x\big) & \text{(32.248a)}\\ z_1(t_0) = \mathrm{Id}, & \text{(32.248b)} \end{cases}$$

qui est l'équation différentielle pour A. Rappel : il y a partout une dépendance de z en sa condition initiale x que nous n'avons pas écrite pour des raisons de légèreté notationnelle. Il n'en reste pas moins que le flot de l'équation différentielle pour z est C^1, c'est-à-dire que $(t,x)\mapsto z_1(t)$ est de classe C^1.

Par conséquent, $(t,x)\mapsto A(t,x)$ est également C^1.

(4) **Régularité C^2 du flot**

Le fait que A soit C^1 n'implique pas que le flot le soit parce que le fait le flot suive la même équation différentielle que A ne n'implique pas qu'il soit égal. Il y a un raisonnement à faire.

Le fait est que si A est une solution de (32.243), alors $z(t)=\big(A(t,x),x\big)$ est solution de (32.246). C'est l'unicité de cette dernière qui permet de déduire l'unicité de la solution pour A.

Nous avons donc que l'unique solution A du système (32.243) est égale à $A(t,x)=(d\varphi_t)_x$ et est de classe C^1 par rapport à (t,x).

Donc $(t,x)\mapsto\varphi(t,x)$ est de classe C^2.

(5) **Régularité C^p**

Nous avons vu que le flot de $y' = f(t,y)$ est de classe C^2 dès que f est de classe C^2. Supposons que f soit de classe C^p et montrons que si le flot est de classe C^k $(k<p)$ alors il est de classe C^{k+1}.

Vu que le flot d'une équation différentielle de classe C^p est de classe C^k, en particulier celui de (32.246) est de classe C^k. Donc aussi la solution pour $A(t,x) = (d\varphi_t)_x$ est de classe C^k. Et vu que $(t,x) \mapsto (d\varphi_t)_x$ est de classe C^k, l'application φ est de classe C^{k+1}.

□
NORMooWEWVooXbGmfE

32.39.
Le théorème d'inversion locale 17.47 nous permet de dire que, pour t fixé, le flot $x \mapsto \varphi_t(x)$ est un C^p-difféomorphisme local.

PROPooPYHWooIZhQST
Proposition 32.40 (Cauchy-Lipschitz avec paramètre, régularité C^p[813, 814, 815])**.**
Soit un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, un connexe ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et un intervalle ouvert Λ de $\mathbb{R}^d$. Soit une fonction $f \in C^p(I \times \Omega \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$ localement lipschitzienne en Ω. Soient $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$ et $\lambda_0 \in \Lambda$. Il existe un voisinage compact de (t_0, y_0, λ_0) sur lequel le problème

$$\begin{cases} y'_\lambda(t) = f\big(t, y_\lambda(t), \lambda\big) & \text{(32.249a)} \\ y_\lambda(t_0) = y_0 & \text{(32.249b)} \end{cases}$$

possède une unique solution. De plus $(t,\lambda) \mapsto y_\lambda(t)$ est de classe C^p par rapport à ses deux variables.

Démonstration. Nous récrivons immédiatement le problème pour la fonction $y\colon I \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ donné par $y(t,\lambda) = y_\lambda(t)$: SUBEQooXMYMooKfpqQW

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(t,\lambda) = f\big(t, y(t,\lambda), \lambda\big) & \text{(32.250a)} \\ y(t_0) = y_0. & \text{(32.250b)} \end{cases}$$

Nous allons montrer que ce problème est en réalité équivalent à un problème sans paramètre. Nous posons $E = \Omega \times \Lambda$ et

$$\begin{aligned} g\colon I \times E &\to E \\ (t,x) &\mapsto \big(f(t,x_1,x_2),0\big) \end{aligned} \tag{32.251}$$

où x_1 est la composante Ω de x et x_2 est la composante Λ de x. Pour une valeur $\mu \in \Lambda$ donnée nous considérons le problème au condition initiales SUBEQSooIBTNooHzYImh

$$\begin{cases} x'(t) = g\big(t, x(t)\big) & \text{(32.252a)} \\ x(t_0) = (y_0, \mu). & \text{(32.252b)} \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz que nous prenons sous la forme 32.38 nous indique que ce problème admet une unique solution maximale et que le flot $\big(t,(y_0,\mu)\big) \mapsto x_{(y_0,\mu)}(t)$ est de classe C^p.

Nous passons maintenant à la résolution du problème (32.250)

(1) **Existence d'une solution C^1**

Nous montrons à présent que la fonction y donnée par

$$y(t,\mu) = x_{(t_0,\mu)}(t)_1 \tag{32.253}$$

est solution de (32.250). Vu que x a deux composantes, nous pouvons un peu déballer l'équation. Afin d'éviter les notations laborieuses nous allons noter x pour $x_{(t_0,\mu)}$ et donc $x_1(t)$ pour $x_{(t_0,\mu)}(t)$. Nous avons l'équation différentielle

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\big(t, x_1(t), x_2(t)\big) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{32.254}$$

avec la condition initiale

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \mu \end{pmatrix}. \tag{32.255}$$

La seconde ligne de l'équation donne immédiatement $x_2(t) = \mu$ pour tout t. En injectant dans la première ligne :

$$x'_1(t) = f\big(t, x_1(t), \mu\big). \tag{32.256}$$

Or vue la définition de y, le nombre $x_1'(t)$ n'est autre que $\frac{\partial y}{\partial t}(t,\mu)$. La fonction y que nous avons définie vérifie donc

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t,\mu) = f\big(t, y(t,\mu), \mu\big) \tag{32.257}$$

et la condition initiale $y(t_0) = x_1(t_0) = y_0$. Elle est donc bien solution du problème initial.

De plus l'application $(t,\mu) \mapsto y(t,\mu) = x_{(t_0,\mu)}(t)_1$ est de classe C^p.

(2) **Unicité**

Pour l'unicité, soit on invoque la proposition 17.42 qui donne l'unicité dans les fonctions continues et a fortiori dans les fonctions C^1. Soit on fait le jeu inverse : on prouve qu'à chaque solution de (32.250) correspond une solution de (32.252), et l'unicité de la solution x donne l'unicité du côté de y.

□

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 32.41
Je ne suis pas du tout sûr de la proposition 32.42. Écrivez-moi si vous avez un commentaire, et surtout si vous avez une preuve. La proposition 32.38 entre certainement dans la preuve.

PROPooKPCQooQNMLQL

Proposition 32.42.
Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$, un ouvert connexe V de $\mathbb{R}^n$, une application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^p, ainsi qu'une application $y\colon I \times V \times I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{s}(s,x,t) = f\big(y(s,x,t), s\big) & \text{(32.258a)} \\ y(t,x,t) = x. & \text{(32.258b)} \end{cases}$$

Alors y est de classe C^p.

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 32.43
L'énoncé du lemme 32.44 est douteux. À mon avis il doit être supprimé et remplacé par la proposition 32.42, pourvu que cette dernière soit vraie.

LEMooQWDNooOjNXhl

Lemme 32.44.
Soient t et x fixés, ainsi que f de classe C^p. Nous considérons la solution $y_{x,t}$ de

EQooKHSKooEFCsMQ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial s}(s) = f\big(y(s), s\big) & \text{(32.259a)} \\ y_{x,t}(t) = x & \text{(32.259b)} \end{cases}$$

Alors l'application $t \mapsto y_x(s)$ est de classe C^p.

Démonstration. Soit t fixé, et l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial s}(s) = -f\big(z(s), t-s\big) & \text{(32.260a)} \\ z(0) = x. & \text{(32.260b)} \end{cases}$$

Par le théorème 32.38, la solution z est de classe C^p en (s,x). En posant $y(s) = z(t-s)$ il est vite vérifié que y est solution de (32.259). C'est alors bien de classe C^p en t. □

32.8.4 Stabilité de Lyapunov

DefKMCGooOeFKlA

Définition 32.45.
*Dans le cas de l'équation différentielle $y'(t) = f\big(y(t),t\big)$ pour $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, un point $a \in \mathbb{R}^n$ est un **point d'équilibre** lorsque la fonction constante $y(t) = a$ est une solution.*

*Le point d'équilibre $a \in \mathbb{R}^n$ est **stable** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|y(0) - a\| < \delta$ implique $\|y(t) - a\| < \epsilon$ pour tout t.*

ThoBSEJooIcdHYp

Théorème 32.46 (Théorème de stabilité de Lyapunov[1, 816, 433, 808])**.**
Soit l'équation différentielle

EqZZLBooKBkZkG

$$\begin{cases} y'(t) = f(y) & \text{(32.261a)} \\ y(0) = y_0 & \text{(32.261b)} \end{cases}$$

avec une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous supposons que l'application linéaire df_0 n'a que des valeurs propres dont la partie réelle est strictement négative.

Alors

ItemGZEAooAhxuDQi

(1) Il existe $k > 0$ tel que si $\|y_0\| < k$ alors la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$,

ItemGZEAooAhxuDQii

(2) pour le même nombre $k > 0$, si $\|y_0\| < k$ alors $y(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ exponentiellement vite,

(3) la solution $y = 0$ est un point d'équilibre attractif.

Démonstration. Placer ici une phrase intelligente[12].

(1) **Prolégomène**

Le théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39 nous enseigne que l'équation différentielle considérée possède une unique solution maximale (entre autres parce qu'une fonction de classe C^1 est localement Lipschitz) et nous nommons J l'intervalle sur lequel elle est définie.

(2) **Système linéarisé**

Nous posons $A = df_0$. La fonction $y_L(t) = e^{tA}y_0$ est solution du système linéarisé

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) & \text{(32.262a)}\\ y(0) = y_0. & \text{(32.262b)} \end{cases}$$

Pour évaluer la norme de y_L nous utilisons le lemme 15.173 : il existe un polynôme P tel que

$$\|y_L(t)\| \leqslant P\big(|t|\big)\sum_{i=1}^{r} e^{\operatorname{Re}\lambda_i t}\|y_0\|. \tag{32.263}$$

Mais par hypothèse, $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ et si nous posons $\lambda = \max\{\operatorname{Re}(\lambda_i)\}$ nous avons $\lambda < 0$ et

$$\|y_L(t)\| \leqslant P\big(|t|\big)e^{\lambda t}\|y_0\|. \tag{32.264}$$

Donc quel que soit y_0 nous avons $\lim_{t\to\infty}\|y_L(t)\| = 0$ c'est-à-dire $\lim_{t\to\infty} y_L(t) = 0$.

(3) **Une forme linéaire**

Nous définissons la forme bilinéaire suivante sur $\mathbb{R}^n$:

$$b(x,y) = \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}y\rangle dt. \tag{32.265}$$

D'abord cela est bien défini pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ parce que

$$\big|\langle e^{tA}x, e^{tA}y\rangle\big| \leqslant \|e^{tA}x\|\|e^{tA}y\| \leqslant P_1\big(|t|\big)P_2\big(|t|\big)e^{2\lambda t}\|x\|\|y\|, \tag{32.266}$$

qui est intégrable entre 0 et ∞ à cause de la décroissance exponentielle[13]. Montrons que b est définie positive. Soit donc $x \neq 0$ et calculons

$$b(x,x) = \int_0^\infty \|e^{tA}x\|^2 dt. \tag{32.267}$$

Ce qui est dans l'intégrale est forcément (pas strictement) positif pour tout t. Mais si $x \neq 0$ alors $\|x\|^2$ est strictement positif et sur un voisinage de $t = 0$ nous avons aussi $\|e^{tA}x\|^2$ qui est strictement positif. Ergo $b(x,x) > 0$ dès que $x \neq 0$, ce qui signifie que b est strictement définie positive (lemme 8.232).

Nous notons $q\colon V \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée à b et aussi la norme qui va avec : $\|x\|_q = \sqrt{q(x)}$. En ce qui concerne le gradient $\nabla q\colon V \to V$, nous avons le petit calcul suivant[816] qui se base sur une des nombreuses formules du lemme 12.280[14] :

$$\begin{aligned} \nabla q(x)\cdot y &= \frac{d}{dt}\Big[q(x+ty)\Big]_{t=0} & \text{(32.268a)}\\ &= \frac{d}{dt}\Big[q(x) + t^2q(y) + 2tb(x,y)\Big]_{t=0} & \text{(32.268b)}\\ &= 2b(x,y). & \text{(32.268c)} \end{aligned}$$

[12] Parce que sinon l'environnement `description` qui suit donne un mauvais effet.
[13] Proposition 15.127.
[14] Le fait que q soit différentiable est simplement le fait que b soit bilinéaire.

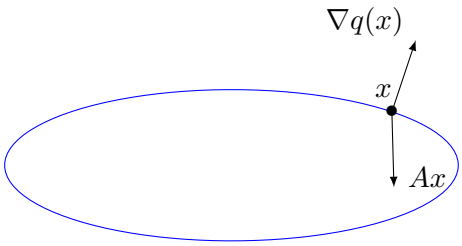
Nous avons aussi

$$\begin{aligned}\nabla q(x)\cdot Ax &= 2b(x,Ax) && (32.269a)\\ &= 2\int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}Ax\rangle && (32.269b)\\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\Big(\langle e^{tA}x, e^{tA}x\rangle\Big)(t)dt && (32.269c)\\ &= \lim_{T\to\infty}\Big[\langle e^{tA}x, e^{tA}x\rangle\Big]_{t=0}^{t=T}. && (32.269d)\end{aligned}$$

Mais vu que $\|e^{tA}x\|\to 0$, pour $t\to\infty$ il ne reste que terme $t=0$ de la différence, c'est-à-dire

$$\nabla q(x)\cdot Ax = 2b(x,Ax) = -\|x\|^2. \tag{32.270}$$ EqUCOGooEFxZSO

Étant donné que $\nabla q(x)$ est le vecteur dirigé vers l'extérieur de l'ellipsoïde de la courbe de niveau de q au point x, le vecteur Ax est dirigé vers l'intérieur.



(4) **Majoration de $q\big(y(t)\big)'$** Nous posons

$$\begin{aligned}r\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n\\ x &\mapsto f(x)-Ax.\end{aligned} \tag{32.271}$$

Soit y la solution maximale au problème (32.261) que nous pouvons aussi écrire sous la forme

$$y'(t) = r\big(y(t)\big) + Ay(t). \tag{32.272}$$

Calculons un peu … subeqsZCOLooOzTBLr

$$\begin{aligned}q\big(y(t)\big)' &= b\big(y(t),y(t)\big)' && (32.273a)\\ &= 2b(y,y') && (32.273b)\\ &= 2b\big(y,Ay\big)+2b\big(y,r(y)\big) && (32.273c)\\ &= -\|y\|^2+2b\big(y,r(y)\big) && (32.270)\text{ avec } x=y(t) \quad (32.273d)\\ &\leqslant -\|y\|^2+2\|y(t)\|_q\|r\big(y(t)\big)\|_q && \text{Cauchy-Schwarz : } |b(a,b)|\leqslant\|a\|_q\|b\|_q. \quad (32.273e)\end{aligned}$$

Chacun des deux termes peut encore être majoré. En ce qui concerne le premier, par équivalence des normes[15], il existe une constante C telle que $\|y\|\geqslant C\|y\|_q$. En renommant immédiatement C^2 en C, $\|y\|^2\geqslant C\|y\|_q^2 = Cq(y)$.

Pour le second, nous allons utiliser la différentiabilité de r et le théorème des accroissements finis. Vu que $df_0=A$ nous avons $dr_0=df_0-A=0$ et de plus r est de classe C^1 parce que f l'est. Toutes les normes étant équivalentes[16] sur $\mathbb{R}^n$ nous pouvons exprimer la continuité de dr pour la norme $\|.\|_q$: si $\epsilon>0$ est fixé alors il existe $\alpha>0$ tel que $\|x\|<\alpha$ implique $\|dr_x\|_q<\epsilon$. Nous pouvons écrire les accroissements finis[17] pour la fonction r :

$$\|r(x)-r(0)\|_q \leqslant \sup_{a\in[0,x]}\|df_a\|\|x\|_q. \tag{32.274}$$ EqIDTHooCsMSVs

La chose facile à remarquer est que $r(0)=f(0)=0$. En ce qui concerne les choses difficiles, vu que dr est continue (parce que r est C^1) il existe un $\delta>0$ tel que $\|dr_a\|_q<\epsilon$ dès que $a\in B_q(0,\delta)$. Si

[15] Définition 10.58 et théorème 10.61.
[16] Théorème 10.61.
[17] Théorème 10.337.

nous prenons $\|x\|_q < \delta$ alors cette majoration est valable pour tous les éléments sur lequel est pris le supremum dans la formule (32.274). Donc

$$\|r(x)\|_q \leqslant \epsilon\|x\|_q \tag{32.275}$$

tant que $\|x\|_q \leqslant \delta$. Par conséquent, tant que $\|y(t)\|_q \leqslant \delta$ nous avons $\|r\big(y(t)\big)\| \leqslant \epsilon\|y(t)\|_q$. Nous continuons le calcul (32.273) :

$$\begin{aligned} q\big(y(t)\big)' &\leqslant Cq(y) + 2\epsilon\|y(t)\|_q^2 && \text{(32.276a)}\\ &= -(C-2\epsilon)q(y). && \text{(32.276b)} \end{aligned}$$

Si ϵ est petit on a $C - 2\epsilon > 0$ et on pose $\beta = C - 2\epsilon$ pour écrire

$$q\big(y(t)\big)' \leqslant -\beta q\big(y(t)\big) \tag{32.277}$$

EqEYJIooHySBic

tant que $\|y(t)\|_q < \delta$.

(5) **Deux nombres** Nous posons

subeqsFNPJooERJkxO

$$\begin{aligned} t_1 &= \min\{t > 0 \text{ tel que } q\big(y(t)\big) = \delta\} && \text{(32.278a)}\\ t_2 &= \max\{t < 0 \text{ tel que } q\big(y(t)\big) = \delta\}. && \text{(32.278b)} \end{aligned}$$

Le nombre t_1 est bien défini et est bien un minimum. J'en veux pour preuve que si $q\big(y(t_s)\big) = \delta$, on peut prendre le minimum seulement sur les $t \in [0, t_s]$; or par continuité $q\big(y(t)\big) = \delta$ définit un fermé. Bref t_1 est un infimum sur un compact (fermé borné) et donc bien un minimum atteint.

(6) **Si $q(y_0) < \delta$ alors $q\big(y(t)\big) < \delta$**

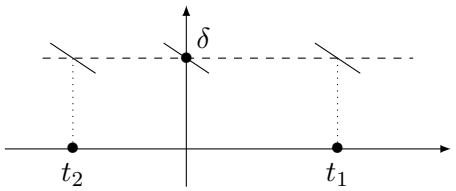
L'inégalité (32.277) est valable pour $t = 0$, $t = t_1$ et $t = t_2$; nous l'écrivons pour t_1 :

$$q\big(y(t)\big)'_{t=t_1} \leqslant -\beta q\big(y(t_1)\big) \leqslant -\beta\delta < 0 \tag{32.279}$$

Nous avons donc $q\big(y(t_1)\big) = \delta$ et $q\big(y(t)\big)'_{t=t_1} < 0$. Par conséquent pour tout t proche de t_1 avec $0 < t < t_1$ il y a $q\big(y(t)\big) > \delta$.

Pour la même raison, prise en $t = 0$ nous avons pour tout t proche de 0 avec $t > 0$ que $q\big(y(t)\big) < \delta$. Par continuité de $t \mapsto q\big(y(t)\big)$ cette fonction doit passer par la valeur δ dans $]t_2, 0[$ et $]0, t_1[$, ce qui contredit la maximalité de t_2 et la minimalité de t_1.

Ci-dessous, une partie de ce à quoi ressemble le graphe de $t \mapsto q\big(y(t)\big)$:



Deux conclusions :

- Vu que $q\big(y(t)\big)$ est borné pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous sommes dans le cas (1) de l'alternative du théorème d'explosion en temps fini 32.23. Donc la solution $y(t)$ existe sur tout $\mathbb{R}$ pourvu que $\|y_0\|$ soit assez petit. Plus précisément par équivalence des normes, il existe un nombre $D > 0$ tel que $\|x\| \geqslant D\|x\|_q$ pour tout x. Si $\|y_0\| \leqslant D\delta$ alors

$$D\|y_0\|_q \leqslant \|y_0\| \leqslant D\delta, \tag{32.280}$$

  qui donne immédiatement $\|y_0\|_q \leqslant \delta$, ce qui faut pour faire fonctionner l'existence de $y(t)$ pour tout t.
- Nous pouvons maintenant d'utiliser l'inégalité (32.277) pour tout $t \in \mathbb{R}$ sous la seule hypothèse que $q(y_0) < \delta$ au lieu de $q\big(y(t)\big) < \delta$.

La partie (1) de ce théorème est prouvée ; nous passons au reste à la partie (2). Pour cela nous supposons que $q(y_0) < \delta$.

(7) **À propos de $e^{\beta t}q(y)$**
En sous-entendant la dépendance en t dans y nous avons

$$\Big(e^{\beta t}q(y)\Big)' = \beta e^{\beta t}q(y) + e^{\beta t}q(y)' = e^{\beta t}\big(\beta q(y) + q(y)'\big), \tag{32.281}$$

mais nous avons déjà prouvé que $q(y)' \leqslant -\beta q(y)$ (équation (32.277)), donc

$$\Big(e^{\beta t}q(y)\Big)' \leqslant 0 \tag{32.282}$$

EqEJMEooFKuxTv

(8) **Décroissance exponentielle** Si $t \geqslant 0$, l'inégalité (32.282) donne

$$e^{\beta t}q\big(y(t)\big) \leqslant q(y_0), \tag{32.283}$$

c'est-à-dire

$$q\big(y(t)\big) \leqslant e^{-\beta t}q(y_0) \tag{32.284}$$

lorsque $t \geqslant 0$. Par équivalence des normes, nous avons des nombres D_1 et D_2 tels que

$$D_1\|x\|_q \leqslant \|x\| \leqslant D_2\|x\|_q \tag{32.285}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Nous avons donc pour tout $t \geqslant 0$ que

$$\|y(t)\| \leqslant D_2\|y(t)\|_q \leqslant D_2\|y_0\|_q e^{-\beta t}. \tag{32.286}$$

Pour rappel, $\beta > 0$, ce qui prouve la partie (2) du théorème.

(9) **Point d'équilibre**
Le point $y = 0$ est point d'équilibre (définition 32.45) parce que $f(0) = 0$, donc $y(t) = 0$ fonctionne. Dans ce cas, $y_0 = 0$.

(10) **Stabilité**
La stabilité est le fait que $\|y(t)\|_q \leqslant \delta$ dès que $\|y_0\|_q \leqslant \delta$.

□

32.8.5 Système proies-prédateurs de Lotka-Volterra

Le système de **Lotka-Volterra** est l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy & \text{(32.287a)} \\ y' = -cy + dxy & \text{(32.287b)} \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des constantes positives, et avec la condition $x(t_0) > 0$, $y(t_0) > 0$.
En ce qui concerne l'interprétation des équations[817],

(1) $x(t)$ est le nombres de proies,

(2) $y(t)$ est le nombres de prédateurs,

(3) Les proies ont une reproduction rapide qui mène à une croissance exponentielle en absence de prédation (d'où le terme ax).

(4) Au contraire, les prédateurs meurent (ou migrent) rapidement lorsqu'ils n'ont pas de proies et nous supposons une décroissance exponentielle du nombre de prédateurs en l'absence de proies. D'où le terme $-cy$ avec le signe négatif.

(5) Les termes $-bxy$ et dxy sont les termes d'interaction entre les proies et les prédateurs. Ils sont proportionnels à la fréquence de leurs rencontres, lesquelles sont avantageuses pour les prédateurs et problématiques pour les proies.

ThoJHCLooHjeCvT

Théorème 32.47 (Lotka-Volterra[433]).
Soient des constantes positives a, b, c, d et le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x' = ax - bxy & \text{(32.288a)} \\ y' = -cy + dxy & \text{(32.288b)} \\ x(t_0) > 0, y(t_0) > 0. & \text{(32.288c)} \end{cases}$$

Alors

(1) Les solutions sont positives sur leur domaines.

(2) Les solutions existent sur $\mathbb{R}$.

(3) Les solutions sont périodiques.

Démonstration. Nous divisons la preuve.

(1) **Comment le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique** Le théorème de Cauchy-Lipschitz[18] ne peut pas s'appliquer tel quel parce qu'il demande une condition initiale pour avoir unicité. En ce qui concerne les notations, ce qui est noté « y » dans le théorème est ici le couple x, y et la fonction f est alors

$$f\big(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\big) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}. \tag{32.289}$$

C'est une fonction continue localement lipschitzienne partout par le lemme 12.349 et la proposition 12.348.

Nous savons cependant que les solutions sont de classe C^1 et que moyennant la donnée d'une condition initiale, la solution est unique.

(2) **Les solutions restent positives** Supposons $x(s) = 0$ pour un certain $s > t_0$. Alors la solution

$$\begin{cases} x(t) = 0 & \text{(32.290a)} \\ y(t) = \exp(-ct) & \text{(32.290b)} \end{cases}$$

est une solution pour $[t_0, s + \epsilon]$. Par unicité de la solution avec condition initiale $x(s) = 0$, nous avons aussi $x(t_0) = 0$ pour toutes les solutions, ce qui contredit notre condition.

De la même façon, avoir $y(s) = 0$ donne une solution avec $y(t) = 0$ pour tout t et donc une contradiction.

(3) **Solutions sur $\mathbb{R}$**

Nous montrons maintenant que les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.

Nous avons $x' < ax$, donc pour tout t où la solution est définie,

$$0 < x(t) < x(t_0)e^{a(t-t_0)}, \tag{32.291}$$

c'est-à-dire que la solution ne peut pas exploser en temps fini[19] : elle est bornée par le haut et le bas. Elle doit donc exister pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $y' < dxy$ donc

$$0 < y(t) < y(t_0)e^{d\int_{t_0}^{t} x(s)ds} \tag{32.292}$$

qui est également contraire à l'explosion en temps fini.

(4) **4 zones : monotonie**

Nous divisons $\mathbb{R}^2$ en quatre zones d'après les signes de $a - by$ et $c - dx$. Nous montrons que dans chacune de ces zones, les solutions sont monotones. Prenons par exemple la partie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a - by > 0\} \times \{c - dx < 0\}. \tag{32.293}$$

Vu l'équation $x' = x(a - by)$, tant que $\big(x(t), y(t)\big)$ est dans cette zone, la fonction x' a le signe de x et est donc positive. Donc x est croissante dans cette zone.

De la même façon, $y' = -y(c - dx)$, et y' a un signe constant dans la zone.

(5) **4 zones : on bouge**

Nous prouvons à présent qu'une solution ne reste pas dans une zone.

[18] Théorème 17.39.
[19] Voir le corolaire 32.23.

(5a) Supposons que $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$ soit dans la zone

$$\{a - by > 0\} \qquad \times \qquad \{c - dx > 0\} \tag{32.294a}$$
$$x' > 0 \qquad\qquad\qquad y' < 0 \tag{32.294b}$$

et que la solution reste dans cette zone (pour les $t > t_0$). Nous avons en particulier $x' > 0$, donc x est croissante tout en ayant la borne supérieure $x < c/d$. Par conséquent x a une limite que nous appelons $x_1 \in [0, \frac{c}{d}]$.
De la même façon, ; y est décroissante et bornée vers le bas par zéro. Donc y a une limite que nous notons $y_1 \in [0, y(t_0)]$.
Vu que x est bornée et de classe C^1 nous avons forcément $\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0$. Mais vu que $x' = ax - bxy$ nous devons avoir

$$ax_1 - bx_1y_1 = 0. \tag{32.295}$$

Mais ni $x_1 > 0$ donc $a - by_1 = 0$, ce qui donne $y_1 = \frac{a}{b}$ et aussi $x_1 = \frac{c}{d}$. Bref, y est décroissante et tend vers a/b ; donc $y(t_0) > a/b$, ce qui contredit que $y(t_0)$ soit dans la zone considérée.
Étant donné que $x' > 0$ et $y' < 0$, la solution sort de la zone pour entrer dans la zone …

(5b) Supposons que $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$ soit dans la zone

$$\{a - by > 0\} \qquad \times \qquad \{c - dx < 0\} \tag{32.296a}$$
$$x' < 0 \qquad\qquad\qquad y' > 0 \tag{32.296b}$$

et que la solution reste dans cette zone (pour les $t > t_0$). Les fonctions x et y sont convergentes. Par conséquent $\ln(y)$ converge aussi et vu que x est croissante,

$$\frac{y'}{y} = -c + dx \geqslant -x + dx(t_0) > 0 \tag{32.297}$$

Cela signifie que $\ln(y)'$ est toujours positive et bornée par le bas. Cela est impossible si y est borné.
Donc on sort de la zone pour entrer dans …

(5c) Supposons que $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$ soit dans la zone

$$\{a - by < 0\} \qquad \times \qquad \{c - dx < 0\} \tag{32.298a}$$
$$x' < 0 \qquad\qquad\qquad y' > 0 \tag{32.298b}$$

et que la solution reste dans cette zone (pour les $t > t_0$).
Le même type de raisonnement fait passer à la zone…

(5d) Supposons que $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$ soit dans la zone

$$\{a - by < 0\} \qquad \times \qquad \{c - dx > 0\} \tag{32.299a}$$
$$x' < 0 \qquad\qquad\qquad y' < 0 \tag{32.299b}$$

et que la solution reste dans cette zone (pour les $t > t_0$). Encore une fois, cela nous fait sortir de la zone et retourne vers la première zone.

À ce moment nous voyons déjà que la relation entre proies et prédateurs, c'est un peu le mythe de Sisyphe…

(6) **Une intégrale première**
Posons la fonction

$$H(x, y) = by + dx - a\ln(y) - c\ln(x). \tag{32.300}$$

Une simple dérivation montre que $t \mapsto H\big(x(t), y(t)\big)$ est constante. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto H\big(\frac{c}{d}, s\big) \end{aligned} \tag{32.301}$$

dont la dérivée n'est autre que $f'(s) = b - \frac{a}{s}$. La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $[\frac{a}{b}, \infty[$ et donc injective. Sur les changements de zones, il existe un t_0 tel que

$$x(t_0) = \frac{d}{c} \tag{32.302a}$$
$$y(t_0) > 0. \tag{32.302b}$$

Pour cette valeur t_0 nous avons alors $H\big(x(t_0),y(t_0)\big)=f\big(y(t_0)\big)$. En posant $s_0=y(t_0)>0$ nous avons

$$H(x_0,y_0)=f(s_0) \tag{32.303}$$

et f étant injective, ce s_0 est la seule valeur de s à vérifier $H(x_0,y_0)=f(s)$.

(7) **Conclusion**

La fonction x passant d'une zone à l'autre, il existe un $t_1>t_0$ tel que $x(t_1)=a/b$. Nous avons évidemment

$$H\big(x(t_1),y(t_1)\big)=H(x_0,y_0) \tag{32.304}$$

parce que H est constante le long du mouvement. Cela se traduit par

$$H\big(\frac{a}{b},y(t_1)\big)=f(s_0), \tag{32.305}$$

et donc $y(t_1)=f(s_0)=y(t_0)$. Avec tout cela nous avons

$$\begin{cases} y(t_1)=y(t_0) & \text{(32.306a)}\\ x(t_1)=x(t_2)=\frac{a}{b}. & \text{(32.306b)} \end{cases}$$

Cela est donc un point par lequel la solution repasse. Par unicité de la solution, elle est donc périodique.

□

32.9 Équation du second ordre

32.9.1 Wronskien

Nous considérons ici une équation différentielle de la forme

$$y''(t)+q(t)y(t)=0 \tag{32.307}$$ EqJDAAnWY

Dans ce point nous allons considérer la fonction q sans hypothèse de périodicité. L'équation de Hill (sous-section 32.9.4) sera la même équation, mais en supposant que q est périodique.

Nous commençons par argumenter que si q est continue, alors l'ensemble des solutions de l'équation (32.307) est un espace vectoriel de dimension deux. Pour cela il suffit d'appliquer la méthode de réduction de l'ordre (section 32.7) puis le théorème de dimension pour les systèmes linéaires (théorème 32.19). En effet si la fonction y_1 est solution de (32.307) si et seulement si le vecteur $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ est solution du système linéaire

$$Y'(t)=\begin{pmatrix}0&1\\-q(t)&0\end{pmatrix}Y(t). \tag{32.308}$$

DEFooISLFooPUcCIK

Définition 32.48.
*Soient deux solutions y_1 et y_2 de l'équation différentielle. Le **wronskien** de ces deux solutions est le déterminant*

$$W(t)=\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{vmatrix}. \tag{32.309}$$

Si nous considérons l'équation différentielle

$$y''+py'+qy=0, \tag{32.310}$$

le wronskien peut être déterminé sans savoir explicitement y_1 et y_2 parce que $W=y_1y_2'-y_1'y_2$, et en dérivant,

$$\begin{aligned} W'&=y_1y_2''+y_1'y_2'-y_1''y_2-y_1'y_2' && \text{(32.311a)}\\ &=y_1(-py_2'-qy_2)-(-py_1'-qy_1)y_2 && \text{(32.311b)}\\ &=-p\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{vmatrix}, && \text{(32.311c)} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$W'=-pW. \tag{32.312}$$ EqHEMRgM

Il suffit donc de savoir une condition initiale pour obtenir une équation différentielle pour W.

32.9.2 Avec second membre

Une équation différentielle du second ordre avec un second membre se présente sous la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = v(t) \tag{32.313}$$

où $v(t)$ est une fonction donnée. Le truc est de commencer par résoudre l'équation différentielle sans second membre, c'est-à-dire trouver la fonction $y_H(t)$ telle que

$$ay''_H(t) + by'_H(t) + cy_H(t) = 0. \tag{32.314}$$

Cela se fait en utilisant la méthode du polynôme caractéristique.

Ensuite, il faut trouver une solution particulière $y_P(t)$ de l'équation avec le second membre. Une seule. Pour y parvenir, il faut du doigté et un peu de technique. Il faut faire des essais en fonction de ce à quoi ressemble le $v(t)$:

(1) Si $v(t)$ est un polynôme, alors il faut essayer un polynôme,

(2) Si $v(t) = \cos(\omega t)$ ou bien $v(t) = \sin(\omega t)$, alors essayer $y_P(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$,

(3) Si $v(t) = e^{\omega t}$, alors essayer $y_P(t) = Ae^{\omega t}$.

32.9.3 Équation $y'' + q(t)y = 0$

subsecSyTwyM

Nous allons donner quelques propriétés des solutions de l'équation

$$y'' + qy = 0 \tag{32.315}$$

en fonction de telle ou telle hypothèse sur q.

Proposition 32.49.
Si $q\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue et si

$$\int_0^\infty |q(t)|dt \tag{32.316}$$

converge, alors

(1) toute solution bornée de $y'' + qy = 0$ vérifie $\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$,

(2) l'équation $y'' + qy = 0$ admet des solutions non bornées.

Démonstration. Soit y une solution bornée, et intégrons l'équation différentielle entre 0 et ∞ :

$$\int_0^\infty y''(t)dt = -\int_0^\infty q(t)y(t)dt. \tag{32.317}$$

La fonction y étant bornée, l'hypothèse sur q permet de dire que l'intégrale de droite existe. Par ailleurs,

$$\int_0^\infty y'' = \lim_{a\to\infty}\int_0^a y'' = \lim_{a\to\infty} y'(a) - y'(0). \tag{32.318}$$

Cela justifie que la limite $\lim_{t\to\infty} y'(t)$ existe. Posons $\alpha = \lim_{t\to\infty} y'(t)$ et supposons par l'absurde que $\alpha \neq 0$. Soit $\epsilon > 0$ et λ assez grand pour que

$$\|y' - \alpha\|_{[\lambda,\infty[} < \epsilon. \tag{32.319}$$

Soit aussi $x > \lambda$. Nous avons, pour $t \in [\lambda, x]$, que $|y'(t) - \alpha| < \epsilon$. Autrement dit, $\alpha \in]y'(t) - \epsilon, y'(t) + \epsilon[$ et donc que $y'(t) > \alpha - \epsilon$. Nous avons alors

$$y(x) = y(\lambda) + \int_\lambda^x y'(t)dt \tag{32.320a}$$

$$\geqslant y(\lambda) + \int_\lambda^x (\alpha - \epsilon)dt \tag{32.320b}$$

$$= y(\lambda) + (\alpha - \epsilon)(x - \lambda). \tag{32.320c}$$

En prenant la limite des deux côtés on voit que $y(x) \to \infty$ dès que $\alpha \neq 0$, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc $\alpha = 0$.

Pour la seconde partie de la proposition, nous devons prouver que l'équation $y'' + qy = 0$ possède des solutions non bornées. Si l'équation a seulement des solutions bornées et si $\{u, v\}$ est une base de solutions, alors nous avons $u', v' \to 0$. Si nous reprenons l'équation (32.312) avec $p = 0$ nous savons que dans notre cas le wronskien satisfait à $W' = 0$, c'est-à-dire qu'il est constant. Mais vu que u et v sont bornées et que les dérivées tendent vers zéro, nous avons $W(t) \to 0$ et donc $W(t) = 0$.

Or l'annulation identique du wronskien contredit que $\{u, v\}$ serait une base de solutions. Donc il existe des solutions non bornées. □

PropMYskGa

Proposition 32.50.
Soit l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Si q est C^1, strictement positive et croissante, alors toutes les solutions sont bornées.

Démonstration. Soit y une solution et multiplions l'équation par $2y'$ (qui est non nulle par hypothèse) :

$$2y'y'' + 2qy'y = 0. \tag{32.321}$$

Nous allons intégrer cela en nous souvenant que $2y'y''$ est la dérivée de $(y')^2$. Pour tout $t > 0$ nous avons

$$0 = y'(t)^2 - y'(0)^2 + 2\underbrace{\int_0^t q(t)y'(t)y(t)dt}_{\text{par partie}} \tag{32.322a}$$

$$= y'(t)^2 - y'(0)^2 + 2\left([qy^2]_0^t - \int_0^t q'y^2\right) \tag{32.322b}$$

$$\tag{32.322c}$$

Le terme qui nous intéresse est celui qui contient $y(t)$:

$$2q(t)y(t)^2 = -y'(t)^2 + y'(0)^2 + 2q(0)y(0)^2 + 2\int_0^t q'y^2 \tag{32.323}$$

Nous pouvons majorer $-y'(t)^2$ par zéro et remplacer toutes les constantes par K :

$$q(t)y(t)^2 \leqslant \int_0^t q'y^2 + K = \int_0^t \frac{q'}{q}qy^2. \tag{32.324}$$

C'est le moment d'utiliser le lemme de Grönwall 32.5 avec $\phi = qy^2$ et $\psi = q'/q$. Les hypothèses de croissance et de positivité ont été posées exprès. Bref, on a

$$qy^2 \leqslant K\exp\left(\int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)}ds\right) \tag{32.325a}$$

$$= K\exp\left(\ln\frac{q(t)}{q(0)}\right) \tag{32.325b}$$

$$= K\frac{q(t)}{q(0)}. \tag{32.325c}$$

Notons que $q(0)$ est strictement positif. Nous déduisons que

$$y^2 \leqslant \frac{K}{q(0)} \tag{32.326}$$

et donc y est bornée. □

32.9.4 Équation de Hill

SubSecDWwVVPa

L'équation **de Hill** est une équation différentielle de la forme

$$y'' + qy = 0 \tag{32.327}$$

EqPQMvzEZ

où

(1) $q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

(2) q est paire et π-périodique

Nous nous intéressons aux solutions complexes de cette équation différentielle.

Nous nommons $W \subset C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des solutions complexes de l'équation (32.327). Nous savons par ce qui a été dit en 32.9.3 que cet espace est de dimension deux. De plus avec les hypothèses faites ici sur q, nous savons que les solutions sont de classe C^3 parce que si y est une solution, alors l'équation $y'' = qy$ nous indique que y est C^1 parce que y'' existe (y' est dérivable et donc continue). Mais si y est de classe C^1, alors le membre de droite qy est C^1 et donc y'' est C^1, ce qui prouve que y est de classe C^3. La récurrence ne va pas plus loin parce que q est seulement de classe C^1.

Nous considérons l'application de translation

$$\begin{aligned} T\colon C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\to C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ (Ty)(x) &= y(x + \pi). \end{aligned} \tag{32.328}$$

En utilisant la règle de dérivation de fonctions composées, $(Ty)' = Ty'$ et $(Ty)'' = Ty''$, de telle sorte que si u est solution de l'équation (32.327), alors Tu est également solution. Donc W est un espace stable par T.

Le théorème 32.19 nous permet de choisir une base de W en imposant des conditions. Nous choisissons une base $\{y_1, y_2\}$ telles que

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \quad y_2(0) = 0 \\ y_1'(0) &= 0 \quad y_2'(0) = 1. \end{aligned} \tag{32.329}$$

Le théorème 32.19 nous assure que deux telles solutions existent et qu'elles forment une base de W parce que W est de dimension 2.

IVLzNaU

Lemme 32.51 ([807]).
Avec ce choix de base $\{y_1, y_2\}$ la matrice de T est donnée par

$$T = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}. \tag{32.330}$$

De plus la fonction y_1 est paire et la fonction y_2 est impaire.

Démonstration. Cherchons la matrice de T dans cette base en associant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ à y_1 et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à y_2. Si $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$Ty_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = ay_1 + cy_2. \tag{32.331}$$ EqSZhBPGv

En évaluant cela en $t = 0$,

$$(Ty_1)(0) = ay_1(0) + cy_2(0) = a, \tag{32.332}$$

donc $a = (Ty_1)(0) = y_1(\pi)$. En dérivant (32.331), en tenant compte du fait que $(Ty_1)' = Ty_1'$ et en évaluant en $t = 0$, nous trouvons de même $c = y_1'(\pi)$. Puis le même cinéma avec y_2 donne

$$T = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}. \tag{32.333}$$

Passons maintenant à la parité de y_1 et y_2. Nous posons $\psi(t) = y_1(-t)$. Alors $\psi'(t) = -y_1'(-t)$ et $\psi''(t) = y_1''(-t)$, tant et si bien que

$$\psi''(t) + q(t)\psi(t) = y_1''(-t) + q(t)y_1(-t) = 0. \tag{32.334}$$

donc ψ est une solution de l'équation. Mais

$$\begin{cases} \psi(0) = y_1(0) & \text{(32.335a)} \\ \psi'(0) = -y_1'(0) = 0, & \text{(32.335b)} \end{cases}$$

donc ψ a les mêmes conditions initiales que y_1. Par conséquent $\psi = y_1$ (par le l'unicité donnée dans le théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39) et y_1 est paire. Nous procédons de même en partant de $\varphi(t) = -y_2(-t)$ pour trouver que $\varphi = y_2$ et que donc que y_2 est impaire.

□

Remémorons nous toutefois, pour calmer tout enthousiasme excessif, que T dépend de deux solutions et donc de la fonction q donnée dans l'équation.

PropGJCZcjR

Proposition 32.52 ([128]).
Nous considérons l'équation $y'' + qy = 0$ et sa base de solutions $\{y_1, y_2\}$ en suivant les notations données plus haut.

(1) Si $|\operatorname{Tr}(T)| < 2$, alors toutes les solutions de l'équation sont bornées.

(2) Si $|\operatorname{Tr}(T)| = 2$ alors nous avons une solution non bornée.

(3) Si $|\operatorname{Tr}(T)| > 2$ alors toutes les solutions de l'équation sont non bornées.

(4) Le cas $|\operatorname{Tr}(T)| = 2$ se présente si et seulement si $y_1'(\pi)y_2(\pi) = 0$.

Démonstration. Remarquons que le déterminant de la matrice T est égal au wronskien des solutions y_1 et y_2 calculé en $t = \pi$. Calculons sa valeur :

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2. \tag{32.336}$$

En dérivant et en remplaçant y_i'' par $-qy_i$, nous trouvons tout de suite $W(y_1, y_2)' = 0$. Donc le wronskien est constant et il est facile de le calculer en $t = 0$:

$$W(y_1, y_2)(0) = 1 - 0 = 1. \tag{32.337}$$

Donc pour tout t nous avons $W(y_1, y_2)(t) = 1$. En particulier

$$\det(T) = W(y_1, y_2)(\pi) = 1, \tag{32.338}$$

et notons au passage que T est inversible.

Nous écrivons le polynôme caractéristique de T sous la forme $\chi_T = X^2 - \operatorname{Tr}(T)X + \det(T)$, c'est-à-dire

$$\chi_T = X^2 - \operatorname{Tr}(T)X + 1, \tag{32.339}$$

dont le discriminant est $\Delta = \operatorname{Tr}(A)^2 - 4$.

Nous passons à présent aux différents points de la proposition.

(1) Si $|\operatorname{Tr}(T)| < 2$, alors $\Delta < 0$ et χ_T a deux racines complexes conjuguées que nous notons ρ et $\bar{\rho}$. De plus le produit des racines étant le terme indépendant, $\rho\bar{\rho} = 1$; en particulier $|\rho| = |\bar{\rho}| = 1$. Notons $\{u, v\}$ une base de vecteurs propres : $Tu = \rho u$ et $Tv = \bar{\rho}v$. Il est vite vu que la fonction $|u|$ est π-périodique :

$$|u|(t + \pi) = |u(t + \pi)| = |(Tu)(t)| = |(\rho u)(t)| = |\rho||u|(t) = |u|(t). \tag{32.340}$$

La fonction $|u|$ est continue[20] et périodique ergo bornée. La fonction $|v|$ est bornée pour la même raison et par linéarité, toutes les fonctions de W sont bornées.

(2) Si $\operatorname{Tr}(T) = \pm 2$, alors $\Delta = 0$ et χ_T a une racine réelle double[21] qui doit être ± 1. Soit u un vecteur propre de T pour la valeur propre ± 1. Nous avons

$$|u|(t + \pi) = |Tu(t)| = |\pm u(t)|, \tag{32.341}$$

ce qui prouve encore que $|u|$ est périodique et donc bornée.

Notons que nous n'avons pas d'informations sur le fait qu'une autre solution soit ou non bornée.

(3) Si $|\operatorname{Tr}(T)| > 2$, alors χ_T a deux racines réelles distinctes r et r' avec $rr' = 1$ (toujours les relations coefficients-racines). En raison de quoi $r' = r^{-1}$ et quitte à échanger r et r' nous supposons $|r| > 1$. L'opérateur est maintenant diagonalisable et nous considérons $\{u, v\}$ une base de vecteurs propres pour les valeurs propres r et r'. Une solution non nulle de l'équation s'écrit donc sous la forme

$$y = \alpha u + \beta v \tag{32.342}$$

avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

[20] La fonction u elle-même n'est cependant pas garantie d'être périodique.

[21] Ce qui n'implique pas le fait d'avoir deux vecteurs propres pour cette valeur propre, mais tout de même au moins un, voir l'exemple 8.114.

- Si $\alpha = 0$, alors $\beta \neq 0$ et nous choisissons une valeur t telle que $v(t) \neq 0$. Dans ce cas,
$$y(t + n\pi) = \beta v(t + n\pi) = \beta(T^n v)(t) = \beta(r')^n v(t), \tag{32.343}$$
et en faisant $n \to -\infty$ nous obtenons $\pm\infty$ suivant le signe de β.
- Si $\alpha \neq 0$, alors nous fixons[22] t tel que $u(t) \neq 0$. Alors
$$y(t + n\pi) = \alpha r^n u(t) + \beta(r')^n(t). \tag{32.344}$$
En faisant $n \to \infty$, nous avons $(r')^n \to 0$ tandis que le premier terme tend vers $\pm\infty$ suivant le signe de α.

(4) D'abord le théorème de Cayley-Hamilton 8.116 nous indique que $\chi_T(T) = 0$, c'est-à-dire que
$$T^2 - \mathrm{Tr}(T)T + 1 = 0. \tag{32.345}$$ EqFHVSsUO
Nous avons déjà mentionné le fait que T était inversible. Multiplions donc (32.345) par T^{-1} :
$$T + T^{-1} = \mathrm{Tr}(T)\mathbb{1}_2. \tag{32.346}$$ EqPNxjBOy
Vu que T^{-1} est l'endomorphisme $T^{-1}u(t) = u(t - \pi)$, sa matrice est donnée par
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix} \tag{32.347}$$
où nous avons utilisé le fait que y_1 était paire et y_2 impaire (lemme 32.51). Si nous notons $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $T^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ et
$$T + T^{-1} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}. \tag{32.348}$$
L'équation (32.346) donne alors, vu que $\mathrm{Tr}(T) = a + d$,
$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{pmatrix}, \tag{32.349}$$
ce qui donne immédiatement $a = d$. La matrice de T a donc comme forme $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Tr}(T) = 2a$.

Donc $\mathrm{Tr}(T) = \pm 2$ si et seulement si $a = \pm 1$ et vu que $1 = \det(T) = a^2 - bc$, nous avons $a = \pm 1$ si et seulement si $bc = 0$, ce qui signifie exactement $y_1'(\pi)y_2(\pi) = 0$.

□

32.10 Différents types d'équations différentielles

32.10.1 Équation homogène

SubSecEqDiffHomo

Une équation différentielle **homogène** est une équation de la forme
$$y' = f(t, y) \tag{32.350}$$
où $f(\lambda t, \lambda y) = f(t, y)$ pour tout $\lambda \neq 0$.

Elle se présente sous la forme
$$y' = \frac{\text{degré } n \text{ en } t, y}{\text{degré } n \text{ en } t, y}, \tag{32.351}$$
avec pas de y' à droite : juste du y et du t.

Lemme 32.53.
L'équation $y' = f(t, y)$ est homogène si et seulement si $f(t, y)$ est une fonction de y/t seulement.

Pour résoudre l'équation homogène, on pose
$$z(t) = \frac{y(t)}{t}, \tag{32.352}$$ EqDiffHomoPoser
donc $tz = y$, et
$$y'(t) = tv'(t) + v(t), \tag{32.353}$$
à remettre dans l'équation de départ.

[22] Mais pas trop hein ; nous aurons encore besoin d'assigner à t d'autres valeurs dans d'autres théorèmes.

32.10.2 Équation de Bernoulli

SubSecBernh

C'est une équation du type

$$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha \tag{32.354}$$

EqBerNDiffalp

où $\alpha \neq 0$ ou 1. Pour la résoudre, on divise l'équation par y^α, et on pose $u = y^{1-\alpha}$, et on tombe sur une équation linéaire

$$u' = (1-\alpha)\big(a(t)u + b(t)\big). \tag{32.355}$$

32.10.3 Équation de Riccati

SubSecRicatti

Définition 32.54 ([818]).
C'est une équation de la forme

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t). \tag{32.356}$$

EqDiffGFeneRicatti

En général, on ne peut pas la résoudre, mais si on en connaît *à priori* des solutions particulières, alors on peut s'en sortir.

(1) Si on sait que $y_1(t)$ est une solution, alors on pose

$$y(t) = y_1(t) + \frac{1}{u(t)}, \tag{32.357}$$

et on obtient une équation linéaire

$$u' = -\big(2y_1(t)a(t) + b(t)\big)u - a(t). \tag{32.358}$$

(2) Si y_1 et y_2 sont solutions, alors nous avons y sous forme implicite

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = Ke^{\int a(t)\left(y_1(t)-y_2(t)\right)dt}. \tag{32.359}$$

Pour résoudre une équation de Ricatti, il faut donc d'abord deviner une ou deux solutions.

32.10.4 Équation différentielle exacte

SubSecEqDiffExacte

32.10.4.1 Résolution lorsque tout va bien

Avant de vous lancer dans les équations différentielles exacte, vous devez lire la section sur les formes différentielles 12.24. Une équation différentielle exacte est de la forme $P(t,y)+Q(t,y)y'=0$ que nous allons écrire sous la forme

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0. \tag{32.360}$$

EqExacteDiff

Nous savons que si $\partial_y P = \partial_t Q$, alors il existe une fonction $f(t,y)$ telle que $Pdt+Qdy = df$. Pour trouver une telle fonction, nous pouvons simplement intégrer la forme $Pdt+Qdy$. En effet, si $\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2$ est un chemin tel que $\gamma(0)=(0,0)$ et $\gamma(1)=(t,y)$, alors en définissant

$$f(t,y) = \int_\gamma [Pdt+Qdy] = \int_0^1 \big[(P\circ\gamma)(u) + (Q\circ\gamma)(u)\big]\big(\gamma'(u)\big)du, \tag{32.361}$$

nous avons $df = Pdt+Qdy$. N'importe quel chemin fait l'affaire. Calculons avec $\gamma(u)=(tu,yu)$. La dérivée de ce chemin est donnée par

$$\gamma'(u) = t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{32.362}$$

Étant donné que $dt\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = a$ et $dy\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = b$, nous avons

$$\begin{aligned} f(t,y) &= \int_0^1 [Pdt+Qdy]\big(\gamma(u)\big)\left(t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)du \\ &= \int_0^1 P\big(\gamma(t)\big)tdu + \int_0^1 Q\big(\gamma(t)\big)ydu \\ &= \int_0^1 \big[tP(tu,uy) + yQ(tu,yu)\big]du. \end{aligned} \tag{32.363}$$

Nous retrouvons exactement la formule (20.319). Si ça t'étonne, c'est que tu n'as pas compris ;) Dans le cas où nous avons la fonction f qui vérifie $P = \partial_t f$ et $Q = \partial_y f$, l'équation (32.360) devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0, \tag{32.364}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\Big[f\big(t, y(t)\big)\Big] = 0, \tag{32.365}$$

dont la solution

$$f\big(t, y(t)\big) = C \tag{32.366}$$

donne la solution $y(t)$ sous forme implicite.

32.10.4.2 Facteur intégrant (quand tout ne va pas bien)

Si la forme $Pdt + Qdy$ n'est pas exacte, il n'existe pas de fonction f qui résolve l'affaire. Nous pouvons toutefois essayer de trouver un **facteur intégrant**. Nous cherchons une fonction M telle que

$$(MP)dt + (MQ)dy \tag{32.367}$$

soit exacte. Nous cherchons donc $M(t, y)$ telle que $\partial_y(MP) = \partial_t(MQ)$. En utilisant la règle de Leibniz, nous trouvons l'équation suivante pour M :

$$M(\partial_y P - \partial_t Q) = Q(\partial_t M) - P(\partial_y M). \tag{32.368}$$ EqDuFacteurIntegrant

Cette équation est en générale extrêmement difficile à résoudre, mais dans certains cas particuliers, il est possible d'en trouver une solution à tâtons.

32.11 Distributions pour les équations différentielles

SecTNgeNms

Nous commençons par définir l'espace $C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$ en disant que $t \mapsto u_t$ est dans cet espace si

(1) pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons $u_t \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$,

(2) l'application $t \mapsto u_t$ est de classe C^∞.

Pour définir ce que nous entendons par une fonction de classe C^k à valeurs dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ nous nous souvenons de la proposition 30.61.

32.11.1 Équation de Schrödinger

ThoLDmNnBR

Théorème 32.55 (Équation de Schrödinger[128])**.**
Soit $g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et le problème

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - i\Delta\tilde{u} = 0 & \text{(32.369a)} \\ u_0 = g & \text{(32.369b)} \end{cases}$$ EqIKhGuiq

où $\tilde{u} \in C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)\big)$ est lié à u par la remarque 30.80. Alors

(1) Il existe une unique solution dans $C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$. ItemVFracYji

(2) Cette solution u vérifie de plus $\tilde{u} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. ItemVFracYjiii

Démonstration. Nous allons donner explicitement une fonction $u \in C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$ et nous allons vérifier l'équation (32.369a) en testant sur une fonction $\psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Cela prouvera le point (2) ainsi que la partie existence de (1). Dans ce qui suit toutes les transformées de Fourier seront par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^d$ ou par rapport à ξ. Jamais par rapport à $t \in \mathbb{R}$.

(1) **Existence** Pour $t \in \mathbb{R}$ nous posons[23]

$$u_t = \mathcal{F}^{-1}(f_t \hat{g}) \tag{32.370}$$

[23] En utilisant la définition (30.80) du produit d'une distribution par une fonction.

où $f_t \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est la fonction $f_t(x) = e^{-it\|x\|^2}$. Pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons

$$u_t(\varphi) = (f\hat{g})\big(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\big) = \hat{g}\big(f\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\big) = g\Big(\mathcal{F}\big(f\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\big)\Big). \tag{32.371}$$

Le fait que $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ soit une fonction Schwartz fait partie de la proposition 29.62. Pour chaque t nous avons bien $u_t \in \mathscr{S}'(\Omega)$.

De plus la fonction $h(t,x) = e^{-it\|x\|^2}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x)$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, et par conséquent l'application

$$t \mapsto \hat{g}\big(h(t,.)\big) \tag{32.372}$$

est également C^∞ par la proposition 30.63. Ceci pour dire que $u \in C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$. Il faut encore vérifier que cette fonction est bien une solution de notre problème. Nous testons cette équation sur $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$. Pour alléger les notations nous posons $\psi_t\colon x \mapsto \psi(t,x)$ et par conséquent aussi $(\partial_t\psi_t)(x) = (\partial_t\psi)(t,x)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\heartsuit &= (\partial_t\tilde{u} - i\Delta\tilde{u})(\psi) && \text{(32.373a)}\\
&= -\tilde{u}(\partial_t\psi) - i\tilde{u}(\Delta\psi) && \text{(32.373b)}\\
&= -\int_{\mathbb{R}} u_t\big((\partial_t\psi_t) + i(\Delta\psi_t)\big)dt && \text{(32.373c)}
\end{aligned}$$

Ici nous nous souvenons du lemme 29.65 qui nous dit que nous pouvons permuter $\mathcal{F}^{-1}$ et ∂_t. Et pour l'autre terme il faut utiliser le lemme 29.21 avec $|\alpha| = 2$ et une somme pour obtenir que

$$\widehat{\Delta\varphi}(x) = -\|x\|^2\hat{\varphi}(x), \tag{32.374}$$

qui dans notre cas s'écrit sous la forme

$$\mathcal{F}^{-1}\Big((\Delta\psi_t)\Big)(x) = -\|x\|^2\mathcal{F}^{-1}\psi(t,x). \tag{32.375}$$

En remettant bout à bout,

$$\begin{aligned}
\heartsuit &= -\int_{\mathbb{R}} (f_t\hat{g})\Big((\partial_t - i\|.\|^2)\mathcal{F}^{-1}\psi_t\Big)dt && \text{(32.376a)}\\
&= -\int_{\mathbb{R}} \hat{g}\Big(x \mapsto e^{-it\|x\|^2}(\partial_t - i\|x\|^2)(\mathcal{F}^{-1}\psi)(t,x)\Big)dt && \text{(32.376b)}
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations nous notons $\check{\psi}_t(x) = (\mathcal{F}^{-1}\psi)(t,x)$. Nous avons

$$\partial_t\Big(e^{-it\|x\|^2}\check{\psi}_t(x)\Big) = -i\|x\|^2e^{-it\|x\|^2}\check{\psi}_t(x) + e^{-it\|x\|^2}(\partial_t\check{\psi}_t)(x) = e^{-it\|x\|^2}\big(\partial_t - i\|x\|^2\big)\check{\psi}_t(x); \tag{32.377}$$

cela nous permet d'un peu factoriser une dérivée dans $\heartsuit$:

$$\begin{aligned}
\heartsuit &= -\int_{\mathbb{R}} \hat{g}\left(\partial_t\Big(e^{-it\|.\|^2}\check{\psi}_t(.)\Big)\right)dt && \text{(32.378a)}\\
&= -\int_{\mathbb{R}} \partial_t\hat{g}\left(e^{-it\|.\|^2}\check{\psi}_t(.)\right)dt && \text{(32.378b)}\\
&= -\lim_{N\to\infty}\Big[\hat{g}\Big(e^{-it\|.\|^2}\check{\psi}_t(.)\Big)\Big]_{t=-N}^{t=N}. && \text{(32.378c)}
\end{aligned}$$

Histoire de bien comprendre les notations, il ne s'agit pas de calculer $\hat{g}\big(e^{-it\|.\|^2}\check{\psi}_t\big)$ pour un t général et de remplacer ensuite t par N et $-N$. En effet la valeur de $\hat{g}\big(e^{-it\|.\|^2}\check{\psi}_t\big)$ pour un t donné est celle qu'on obtient en calculant $\hat{g}(\dots)$ après avoir remplacé t par ce que l'on veut. Par conséquent, en posant $\varphi(t,\xi) = e^{-i\|\xi\|^2}\check{\psi}_t(\xi)$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\heartsuit &= \lim_{N\to\infty}\left[g\left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\varphi(t,\xi)d\xi\right)\right]_{t=-N}^{t=N} && \text{(32.379a)}\\
&= \lim_{N\to\infty} g\left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\varphi(N,\xi)d\xi\right) - \lim_{N\to\infty} g\left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\varphi(-N,\xi)d\xi\right) && \text{(32.379b)}
\end{aligned}$$

La limite commute avec g parce que cette dernière est une distribution (continue). De plus la limite commute avec l'intégrale parce que ce qui est dedans est Schwartz. La fonction φ étant Schwartz, la limite est nulle. Donc

$$\heartsuit = 0. \tag{32.380}$$

Cela signifie que la fonction u proposée est bien une solution de l'équation de Schrödinger dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$.

(2) **Unicité**

Nous considérons deux solutions $u_1, u_2 \in C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\big)$ et la fonction $u = u_1 - u_2$ doit satisfaire au problème

$$\begin{cases} (\partial_t \tilde{u} - i\Delta\tilde{u})(\psi) = 0 & (32.381a)\\ u_0 = 0. & (32.381b)\end{cases}$$

Nous allons montrer que seule la fonction $u_t = 0$ peut satisfaire à cela pour tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Nous allons même montrer qu'en imposant ces équations seulement sur la partie de $\mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ qui est à support compact par rapport à $\mathbb{R}$, la seule solution est $u_t = 0$. Soit donc $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ à support compact vis-à-vis de sa variable t. Alors

$$0 = -\tilde{u}(\partial_t\psi + i\Delta\psi) = -\int_{\mathbb{R}} u_t\Big((\partial_t\psi_t) + i(\Delta\psi_t)\Big)dt \tag{32.382}$$

où encore une fois $\partial_t\psi_t$ est la fonction $x \mapsto (\partial_t\psi)(t,x)$. Maintenant nous utilisons la proposition 30.83 pour dire que

$$\frac{d}{dt}\Big(u_t(\psi_t)\Big) = u_t^{(1)}(\psi_t) + u_t\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,.)\right) \tag{32.383}$$

pour écrire

$$0 = -\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}\big(u_t(\psi_t)\big) - u_t^{(1)}(\psi_t) + u_t\big(i(\Delta\psi)(t,.)\big)dt \tag{32.384}$$

Le premier terme est facile :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}\Big(u_t(\psi_t)\Big)dt = \lim_{N\to\infty}\Big[u_t(\psi_t)\Big]_{t=-N}^{t=N} = 0 \tag{32.385}$$

parce que ψ est à support compact par rapport à t. Nous restons donc avec

$$\int_{\mathbb{R}} u_t^{(1)}(\psi_t) - iu_t\big((\Delta\psi)(t,.)\big)dt = 0 \tag{32.386}$$

Nous traitons le terme en $u_t^{(1)}$ en utilisant le fait évident $T(\varphi) = (\mathcal{F}T)(\mathcal{F}^{-1}\varphi)$ et en remarquant le lemme 30.84 :

$$u_t^{(1)}(\psi_t) = (\mathcal{F}u_t^{(1)})(\mathcal{F}^{-1}\psi_t) = (\mathcal{F}u)_t^{(1)}(\mathcal{F}^{-1}\psi_t). \tag{32.387}$$

Pour l'autre terme on fait un peu la même chose en nous souvenant ce que fait la transformée de Fourier en traversant le laplacien :

$$u_t(\Delta\psi_t) = (\mathcal{F}u_t)(\mathcal{F}^{-1}\Delta\psi_t) = (\mathcal{F}u_t)\big(x \mapsto -\|x\|^2(\mathcal{F}^{-1}\psi_t)(x)\big). \tag{32.388}$$

En recollant encore :

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}u)_t^{(1)}(\mathcal{F}^{-1}\psi_t) + i(\mathcal{F}u_t)\big(\|.\|^2\mathcal{F}^{-1}\psi_t\big)dt = 0. \tag{32.389}$$ EqHQGaGpt

Cette équation est valable tant que $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ avec support compact en t. Nous allons nous en créer une super cool. D'abord nous choisissons $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et nous considérons[24]

$$\psi(t,x) = \mathcal{F}\Big(\xi \mapsto e^{it\|\xi\|^2}\varphi(\xi)\chi(t)\Big)(x). \tag{32.390}$$ EqEVtJcnz

Notons que la transformée de Fourier conserve le fait qu'une fonction soit Schwartz[25], mais pas le fait d'avoir support compact. Cependant nous ne prenons que la transformée de Fourier par rapport à x. Le résultat est donc une fonction ψ qui est Schwartz par rapport à x et support compact par rapport à t. Nous pouvons donc écrire (32.389) en utilisant la fonction (32.390) :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}u)_t^{(1)}\Big(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\chi(t)\Big) + i(\mathcal{F}u_t)\Big(x \mapsto \|x\|^2 e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\chi(t)\Big)dt. \tag{32.391}$$ EqHPUyZFz

Là dedans, $\chi(t)$ peut sortir à la fois de la transformée de Fourier et de l'application des distributions ; il doit seulement rester dans l'intégrale. Dans le second terme nous allons utiliser l'égalité (due entre

[24] Le candidat qui parvient à effectivement présenter ça comme développement, il est fort.
[25] Proposition 29.22.

autre à la proposition 30.83) : EqCRGfbLU

$$\frac{d}{dt}\big(\hat{u}_t(e^{it\|\cdot\|^2}\varphi)\big) = \frac{d}{dt}\Big(u_t\big(\mathcal{F}e^{it\|\cdot\|^2}\varphi\big)\Big) \tag{32.392a}$$
$$= u_t^{(1)}\big(\mathcal{F}e^{it\|\cdot\|^2}\varphi\big) + u_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}e^{it\|\cdot\|^2}\varphi\right) \tag{32.392b}$$
$$= (\mathcal{F}u_t^{(1)})\big(x\mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big) + (\mathcal{F}u_t)\big(x\mapsto i\|x\|^2e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big) \tag{32.392c}$$
$$= (\mathcal{F}u)_t^{(1)}\big(x\mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big) + (\mathcal{F}u_t)\big(x\mapsto i\|x\|^2e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big) \text{ lem. 30.84.} \tag{32.392d}$$

Et là, magie c'est exactement ce qui est dans (32.391). Donc

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{d}{dt}\hat{u}_t\big(x\mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big)\chi(t)dt = 0 \tag{32.393}$$

pour toute fonctions à support compact χ. Donc la proposition 29.28 nous dit que

$$\partial_t\hat{u}_t\big(x\mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big) = 0. \tag{32.394}$$

C'est zéro partout et non seulement presque partout parce qu'en plus nous avons la continuité. Par conséquent pour tout $t\in\mathbb{R}$ nous avons

$$\hat{u}_t\big(x\mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\big) = \hat{u}_0\big(x\mapsto\varphi(x)\big) = 0. \tag{32.395}$$

Et cela est vrai pour toute fonction $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous considérons donc $t_0\in\mathbb{R}$ et une fonction $\theta\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ pour construire

$$\varphi(x) = e^{-it_0\|x\|^2}\theta(x). \tag{32.396}$$

Nous avons alors $\hat{u}_{t_0}\big(x\mapsto\theta(x)\big) = 0$, ce qui signifie que $\hat{u}_{t_0} = 0$. Du coup pour tout $\theta\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons $u_{t_0}(\mathcal{F}\theta) = 0$, mais comme la transformée de Fourier est une bijection de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 29.62) nous avons en fait $u_{t_0}(\theta) = 0$ pour tout $\theta\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire $u_{t_0} = 0$ pour tout $t_0\in\mathbb{R}$ et au final $u = 0$.

□

32.12 Équations différentielles du premier ordre

Définition 32.56 (Équation différentielle du premier ordre)**.**
*Une **équation différentielle du premier ordre** est une équation qui, sur un intervalle donné, I, décrit la relation entre une variable réelle, notée x ou t dans I, une fonction $y : I\to\mathbb{R}$, et la dérivée première de y qui on note y'.*

Souvent on écrit «$y'(x)$ = une formule contenant x et $y(x)$», c'est à dire

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \text{pour } x\in I, \tag{32.397}$$ ed_generale

où f est une fonction de deux variables réelles.

Remarque 32.57.
La théorie des fonctions de deux variables ne sera pas abordée dans ce cours, nous allons nous contenter de prendre f dans (32.397) comme une simple notation.

On peut presque toujours omettre d'écrire la dépendance de y en x et écrire simplement (32.397) sous la forme $y' = f(x, y)$.

Définition 32.58 (Solution particulière d'une équation différentielle du premier ordre)**.**
*Une **solution particulière** de l'équation (32.397) sur l'intervalle I est une fonction $z : I\to\mathbb{R}$ telle que :*

(1) z est dérivable sur I ;

(2) $z'(x) = f(x, z(x))$, pour tout $x\in I$.

Définition 32.59 (Solution générale d'une équation différentielle du premier ordre)**.**
*Résoudre une équation différentielle veut dire trouver l'ensemble qui contient toutes ses solutions particulières. Cet ensemble s'appelle **solution générale** de l'équation.*

Exemple 32.60. (1) Résoudre une équation du type $y'(x) = f(x)$ revient à trouver l'ensemble des primitives de la fonction f, qui est donc la solution générale de cette équation. Il y a donc une infinité de solutions particulières, déterminées par une constante additive.

Si $f(x) = \sin(x)$ alors la solution générale sera $\mathcal{Y} = \{-\cos(x) + C \,:\, C \in \mathbb{R}\}$.

(2) L'équation

$$y' = y, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{32.398}$$ equation_exponentielle

a peut-être été abordée dans votre cours de terminale lors de la définition de la fonction exponentielle. Sa solution générale est $\mathcal{Y} = \{Ce^x \,:\, C \in \mathbb{R}\}$. Ici aussi il y a une infinité de solutions particulières.

△

Remarque 32.61.
La solution générale d'une équation différentielle du premier ordre est une famille à un paramètre de fonctions.

Définition 32.62 (Équation différentielle du second ordre)**.**
Une ***équation différentielle du second ordre*** *est une équation qui, sur un intervalle donné, I, décrit la relation entre une variable réelle, notée x ou t dans I, une fonction $y : I \to \mathbb{R}$, et les dérivées première et seconde de y qui on note y' et y'' respectivement.*

On utilise la forme générale

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{pour } x \in I. \tag{32.399}$$ ed_generale_second_ordre

où f est une fonction de trois variables réelles.

On peut définir de manière analogue les équations différentielles d'ordre supérieur. Les définitions de solution particulière et de solution générale se généralisent aux équations différentielles d'ordre supérieur à un.

Définition 32.63 (Trajectoire)**.**
La trajectoire tracée par une solution particulière y de l'équation (32.397) est le graphe de y en tant que fonction de x.

Exemple 32.64.
Nous allons regarder de plus près l'équation (32.398), $y' = y$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous savons que les solutions sont données par

$$\mathcal{Y} = \{Ce^x \,:\, C \in \mathbb{R}\}. \tag{32.400}$$

Soient y_1 et y_2 deux solutions distinctes de cette équation. Les seules solutions qui s'annulent en un point sont les solutions identiquement nulles. Nous supposons n'être pas dans ce cas y_1 et y_2 ne s'annulent pas.

Supposons qu'il existe un point $\bar{x}$ tel que $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$ alors forcément $y_1(\bar{x})/y_2(\bar{x}) = 1$. Le rapport $y_1(\bar{x})/y_2(\bar{x})$ vaut C_1/C_2 et par conséquent $C_1 = C_2$. Ce résultat contredit l'hypothèse que les deux solutions soient distinctes. On a donc montré que *deux trajectoires distinctes de cette équation ne se croisent jamais.*

La figure 32.1 représente quelques trajectoires de l'équation. Si on les avait tracées toutes elles recouvriraient tout le plan. Cela veut dire que *par tout point (x, y) passe une et une seule trajectoire de l'équation (32.398).*

△

Définition 32.65 (Condition initiale)**.**
Une ***condition initiale*** *pour l'équation (32.397) sur l'intervalle I est un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in I \times \mathbb{R}$.*

On dit que la solution particulière z de (32.397) satisfait la condition initiale $(\bar{x}, \bar{y}) \in I \times \mathbb{R}$ si $z(\bar{x}) = \bar{y}$.

Définition 32.66 (Problème de Cauchy)**.**
L'association d'une équation différentielle et d'une condition initiale est appelée ***problème de Cauchy***

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in I, \\ y(\bar{x}) = \bar{y}. \end{cases} \tag{32.401}$$ plme_cauchy

Remarque 32.67.
Sous des conditions assez générales qui seront toujours vérifiées dans ce cours, tout problème de Cauchy admet une et une seule solution.

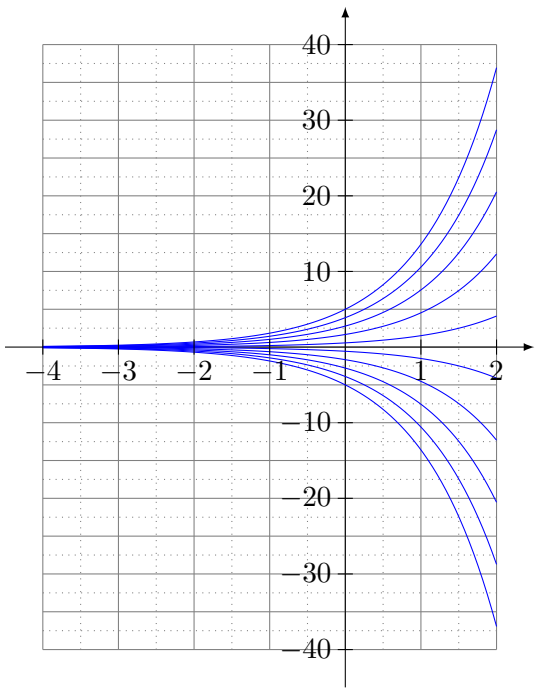


FIGURE 32.1 : Quelques trajectoires de l'équation $y' = y$. LabelFigSBTooEasQsT

Pour passer de la solution générale d'une équation différentielle de premier ordre à une solution particulière il faut choisir une valeur du paramètre. Comme il y a un seul paramètre une seule condition (la trajectoire de la solution doit passer par un point fixe du plan) peut suffire. Pour une équation différentielle de second ordre comme (32.399), nous aurons besoin de plus de conditions. Sans rentrer dans les détails, nous allons constater ce fait dans l'exemple suivant.

Exemple 32.68.
La solution générale de l'équation

$$y'' = -y, \tag{32.402}$$ eq_expcompl

est $\mathcal{Y} = \{C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \ : \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$. Remarquez que l'équation est du second ordre et que sa solution générale est une famille d'équations à deux paramètres réels. Ce sera toujours les cas pour les équations abordées dans la section 32.15. Pour déterminer une solution particulière de (32.402) il faut fixer les valeurs des deux paramètres et donc, en général, il sera nécessaire de donner deux conditions. △

Remarque 32.69.
Une condition comme $y(0) = 4$ nous dit que la constante $C_1 = 4$ mais elle ne nous permet pas de trouver C_2. Il y a donc une infinité de solutions de (32.402) qui satisfont à la condition $y(0) = 4$.

On peut fixer les deux conditions de deux manières différentes.

(1) Problème de Cauchy : on fixe une terne de valeurs réels $\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'$ et on cherche la solution telle que $y(\bar{x}) = \bar{y}$, $y'(\bar{x}) = \bar{y}'$.

Exemple 32.70.
Les conditions $y(0) = 4$, $y'(0) = 15$ permettent de trouver la solution $z(x) = 4\cos(x) + 15\sin(x)$. △

(2) Problème aux bords : on fixe deux points dans le plan x-y, $A = (\bar{x}, \bar{y})$ et $B = (\tilde{x}, \tilde{y})$, et on cherche la solution dont la trajectoire passe par A et B, c'est à dire, on impose $y(\bar{x}) = \bar{y}$, $y(\tilde{x}) = \tilde{y}$.

Exemple 32.71.
Les conditions $y(0) = 4$, $y(\pi/2) = 15$ permettent de trouver la solution $z(x) = 4\cos(x) + 15\sin(x)$. △

32.13 Premier ordre, variables séparables

Pour certaines équations différentielles la recherche d'une solution particulière se réduit à une recherche de primitive moyennant un changement de variables.

Définition 32.72 (Équation différentielle du premier ordre à variables separables)**.**
Une ***équation différentielle du premier ordre à variables séparables*** *est une équation qui, pour tous les x dans un intervalle donné, I, peut se mettre sous la forme*

$$f(y)y' = g(x), \tag{32.403}$$ eq_var_sep

où f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Nous pouvons intégrer les deux côtés de l'égalité par rapport à x et obtenir

$$\int f(y(x))y'(x)\,dx = G(x) + C,$$

où G est une primitive de g et C une constante réelle. Il est facile à ce point d'effectuer un changement de variable dans le membre de gauche de l'équation en posant (sans surprise) $y = y(x)$ et donc $y'(x)\,dx = dy$.

$$\int f(y(x))y'(x)\,dx = \int f(y)\,dy = F(y(x)) + C,$$

où F est une primitive de f et C une constante réelle. En somme nous avons

$$F(y(x)) = G(x) + C,$$

et, si F admet une fonction réciproque, alors

$$y(x) = F^{-1}(G(x) + C). \tag{32.404}$$

Remarque 32.73.
L'expression de F^{-1} peut être difficile à calculer. Il sera alors préférable de garder y dans la forme implicite.

Exemple 32.74.
L'équation

$$3y^2y' = x, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{32.405}$$ ex_un_var_sep

est une équation à variables séparables. Pour reprendre les notations du début du chapitre, ici $f(y) = 3y^2$ et $g(x) = x$. En intégrant de deux côtés on trouve

$$y^3 = \frac{x^2}{2} + C.$$

La fonction $F(y) = y^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc nous pouvons écrire la solution générale de l'équation (32.405) dans la forme

$$\mathcal{Y} = \left\{ \left(\frac{x^2}{2} + C \right)^{1/3} \text{ tel que } C \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

Exemple 32.75.
En intégrant de deux côtés l'équation à variables séparables

$$2yy' = x, \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{32.406}$$

on trouve

$$y^2 = \frac{x^2}{2} + C.$$

La fonction $F(y) = y^2$ est *n'est pas inversible* sur tout $\mathbb{R}$, et on sait que $\sqrt{y^2} = |y|$. Au moment de rendre y explicite on doit choisir entre

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C \right)^{1/2} \qquad \text{ou} \qquad y = -\left(\frac{x^2}{2} + C \right)^{1/2}.$$

Ce choix se fait suivant la condition initiale, si elle est donnée. Si il n'y a pas de condition initiale nous pouvons écrire que la solution générale est l'ensemble

$$\mathcal{Y} = \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tels que } y^2 = \frac{x^2}{2} + C \text{ et } C \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

Exemple 32.76.
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} e^y y' = \frac{1}{x+3}, & x \in]-\infty, -3[, \\ y(-4) = 0. \end{cases} \tag{32.407}$$

En intégrant des deux côtés nous trouvons

$$e^y = \ln(|x+3|) + C.$$

Nous pouvons alors imposer la condition initiale et obtenir $e^0 = \ln(|-4+3|)+C$, c'est à dire $C = 1-\ln(1) = 1$.

Remarque 32.77.
L'énoncé du problème de Cauchy dit que x peut varier dans $]-\infty, -3[$, mais nous voyons maintenant que la solution n'est pas définie sur toute la demi-droite, parce que e^y est toujours positif et $\ln(|x+3|)+1$ est positif seulement pour $x < -(1/e+3) \approx -3,3679$.

Donc la solution du problème de Cauchy est $y(x) = \ln(|x+3|)+1$ pour tout $x \in]-\infty, -(1/e+3)[$. △
exemple_eq_hom

Exemple 32.78.
Attention, cet exemple est le plus important de la section !
On considère l'équation à variables séparables

$$y' = \sin(x)y, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{32.408}$$
EqYNXooFzYeZS

Dans ce cas, pour pouvoir écrire l'équation dans la forme (32.403) il faut pouvoir multiplier les deux côtés par $1/y$. Il faut donc éliminer tout de suite le cas où $y = 0$.

Si $y = 0$ alors $y' = 0$ et on a une solution constante (on dit souvent : une solution stationnaire) de l'équation. Par ailleurs les trajectoires des solutions ne peuvent pas se croiser ; donc si y_G est une solution non nulle de l'équation (32.408) alors $y_G(x) \neq 0$ pour tout x[26]. Il n'y a donc aucun danger à diviser par y dans la recherche d'une solution non identiquement nulle.

Supposons maintenant que $y \neq 0$ et écrivons $y'/y = \sin(x)$. En intégrant des deux côtés on trouve

$$\ln(|y|) = -\cos(x) + C,$$

d'où

$$|y| = e^{-\cos(x)+C} = e^C e^{-\cos(x)}.$$

Si on avait imposé une condition initiale alors on pourrait déterminer une solution particulière de l'équation en choisissant une valeur de la constante C. Nous pouvons observer cependant que la fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+,\star}$ et par conséquent il n'y a pas de perte de généralité en disant que la solution générale de l'équation est

$$\mathcal{Y} = \left\{ y \,:\, |y| = Ke^{-\cos(x)}, \text{ pour } K \in \mathbb{R}^{+,\star} \right\} \cup \{y \equiv 0\}.$$

Il n'empêche qu'il serait plus élégant d'écrire la solution générale de l'équation sous une forme plus explicite, sans valeur absolue. Nous pouvons le faire en nous nous rappelant que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

Il suffit alors d'autoriser K dans $\mathbb{R}^\star$ pour éliminer la valeur absolue.

Pour écrire la solution générale de façon encore plus compacte nous observons que si $K = 0$ alors $y \equiv 0$, c'est à dire, on retrouve la solution constante nulle.

Finalement, la solution générale de cette équation sera toujours écrite sous la forme suivante

$$\mathcal{Y} = \left\{ y = Ke^{-\cos(x)}, \text{ pour } K \in \mathbb{R} \right\}. \tag{32.409}$$

△

[26] Ça vaut la peine de prendre un peu de temps pour bien comprendre cela.

32.14 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 32.79 (Équation différentielle linéaire du premier ordre)**.**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle .

*Une **équation différentielle linéaire du premier ordre** est une équation différentielle de la forme*

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad \text{pour } x \in I, \tag{32.410}$$

eq_lin_ordre_un

où a, b, c sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \neq 0$ pour tout $x \in I$.

On dit que a, b, c sont les coefficients de l'équation (32.410).

remarque_lineaire

Remarque 32.80.
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *linéaire* si pour tout x_1, x_2 dans $\mathbb{R}$ et pour tout couple de constantes λ et μ on a

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2). \tag{32.411}$$

eq_linearite

Ces équations différentielles sont dites linéaires parce que la partie de l'équation qui contient y (le membre de gauche) satisfait la propriété (32.411) par rapport à y. En effet par les propriétés de la dérivée nous avons que

$$a(x)(\lambda y_1 + \mu y_2)' + b(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(a(x)y_1' + b(x)y_1) + \mu(a(x)y_2' + b(x)y_2).$$

Définition 32.81.
*L'équation (32.410) est dite **homogène** quand c est la fonction nulle. Si (32.410) n'est pas homogène on dit que l'équation*

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{32.412}$$

eq_lin_ordre_un_hom

*est son **équation homogène associée**.*

Toute équation linéaire du premier ordre homogène est une équation du premier ordre à variables séparables, comme nous en avons vu l'exemple 32.78. Nous n'allons pas répéter les détails du procédé pour trouver sa solution générale, qui aura la forme suivante

À retenir 32.82

$$\mathcal{Y}_h = \left\{ Ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} \,:\, K \in \mathbb{R} \right\}. \tag{32.413}$$

solgeneqlinordre1

Proposition 32.83. *(1) Soit y_p une solution particulière de l'équation (32.410) et y_h une solution particulière de l'équation homogène associée (32.412). Alors la fonction somme $z = y_p + y_h$ est encore une solution particulière de l'équation (32.410).*

(2) Soient y_1 et y_2 deux solutions particulières de (32.410). Alors la fonction différence $w = y_1 - y_2$ est une solution particulière de (32.412).

Démonstration. (1)

$$a(x)\left(y_p + y_h\right)' + b(x)\left(y_p + y_h\right) - c(x) = \left(a(x)y_p' + b(x)y_p - c(x)\right) + \left(a(x)y_h' + b(x)y_h\right) = 0. \tag{32.414}$$

(2)

$$a(x)\left(y_1 - y_2\right)' + b(x)\left(y_1 - y_2\right) = \left(a(x)y_1' + b(x)y_1 - c(x)\right) - \left(a(x)y_2' + b(x)y_2 - c(x)\right) = 0. \tag{32.415}$$

□

Cette proposition permet de démontrer le théorème suivant, qui est le plus important de cette section.

Théorème 32.84.
Soit y_p une solution particulière de l'équation (32.410) et $\mathcal{Y}_h$ la solution générale de l'équation (32.412), alors la solution générale de l'équation (32.410) est l'ensemble

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_h + y_p = \{z = y_h + y_p \,:\, y = h \in \mathcal{Y}_h\}. \tag{32.416}$$

À retenir 32.85
La résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre comporte trois étapes :

(1) résolution de l'équation homogène associée ;

(2) recherche d'une solution particulière de l'équation non homogène ;

(3) somme de la solution générale de l'équation homogène et de la solution particulière trouvée au point précédent.

La partie qui nous manque encore est de savoir comment trouver une solution particulière de l'équation non homogène (32.410). Si la fonction c dans (32.410) est une constante ou un polynôme simple, ou une exponentielle alors on peut essayer de deviner. Cette méthode cependant n'est pas la plus sure pour des débutants.

Exemple 32.86.
On considère l'équation

$$y' - 5y = 10, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{32.417}$$

Comme tous les coefficients de l'équation sont constants on peut essayer de trouver une solution constante.

Toutes les fonctions constantes ont une dérivée nulle, par conséquent, si une solution constante existe elle doit satisfaire $-5y = 10$, ce qui veut dire que la solution constante est $y(x) \equiv -2$. △

Exemple 32.87.
On considère l'équation

$$xy' + y = x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}^{+,\star}. \tag{32.418}$$

Comme le membre de droite de l'équation est un polynôme de degré un on cherche une solution de la forme $y(x) = Ax + B$ avec A et B dans $\mathbb{R}$.

Par substitution on obtient $Ax+(Ax+B) = x+1$, c'est-à-dire que une solution particulière de l'équation est $y(x) = x/2 + 1$. △

Exemple 32.88.
L'équation

$$xy' - y = x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}^{+,\star}. \tag{32.419}$$

ressemble beaucoup à celle de l'exemple précédent, cependant il n'existe pas un polynôme de degré un qui en soit solution.

Dans un cas comme celui-ci, il faut rapidement abandonner la divination et replier sur la méthode, plus technique mais plus sure, dite *variation de la constante*. △

32.14.1 Méthode de variation de la constante

- Soit $\mathcal{Y}_h$ la solution générale de l'équation homogène associé à (32.410). Il s'agit d'une famille à un paramètre de fonctions. La première étape de cette méthode consiste à construire un candidat solution particulière y_p en remplaçant le paramètre dans $\mathcal{Y}_h$ par une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à déterminer.

  Exemple 32.89.
  L'équation homogène associée à $y' - y = \cos(x)$ est $y' - y = 0$, dont la solution générale est $\mathcal{Y}_h = \{Ce^x : C \in \mathbb{R}\}$. Le candidat solution sera alors $y_p = C(x)e^x$, avec C fonction à déterminer. △

- La deuxième étape de cette méthode consiste à injecter y_p dans l'équation. Cela permet de trouver une équation différentielle à variables séparables pour C, en principe plus facile à résoudre que l'équation de départ.

  Exemple 32.90.
  On continue avec l'exemple précédent. On a $y_p' = C'(x)e^x + C(x)e^x$, d'où

  $$(C'(x)e^x + C(x)e^x) - C(x)e^x = \cos(x),$$

  c'est-à-dire

  $$C'(x) = \cos(x)e^{-x}.$$

  △

- La troisième étape de la méthode consiste à trouver une solution particulière de l'équation différentielle pour C et, par conséquent déterminer une y_p.

Exemple 32.91.
La solution générale de

$$C'(x) = \cos(x)e^{-x}.$$

est $\mathcal{C} = \left\{e^{-1}\frac{(\sin(x)-\cos(x))}{2} + K \,:\, K \in \mathbb{R}\right\}$. Il nous suffit une solution particulière, nous pouvons donc choisir $K = 0$ et alors la solution particulière de (32.410) sera $y_p(x) = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2}$. △

Remarque 32.92.
Le plus souvent en intégrant l'équation pour C on en trouvera la solution générale. Dans ce cas on peut remplacer C par cette solution générale et obtenir d'un seul coup la solution générale de l'équation (32.410) , c'est-à-dire sans faire la somme entre la solution générale de l'homogène associée et la solution particulière.

Exemple 32.93.
Dans l'exemple qu'on vient de voir la solution générale de (32.410) est

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_h + y_p = \left\{Ce^x + \frac{(\sin(x) - \cos(x))}{2} \,:\, C \in \mathbb{R}\right\}. \tag{32.420}$$

On obtient le même résultat est écrivant $\mathcal{Y} = \left\{e^{-x}\left(e^{-1}\frac{(\sin(x)-\cos(x))}{2} + K\right) \,:\, K \in \mathbb{R}\right\}$. Notez qu'on a changé le nom du paramètre de C à K seulement pour souligner qu'on obtient de même résultat par deux chemins différents, sinon les deux expressions sont équivalentes ! △

32.15 Équations différentielles linéaires du second ordre

Secordredeux

Définition 32.94 (Équation différentielle linéaire du second ordre)**.**
Une ***équation différentielle linéaire du second ordre*** *est une équation différentielle de la forme*

eq_lin_ordre_deux

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x), \quad \text{pour } x \in I, \tag{32.421}$$

où a, b, c et d sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \neq 0$ pour tout $x \in I$.
On dit que a, b, c et d sont les coefficients de l'équation (32.421).

Dans ce cours nous allons étudier exclusivement le cas où a, b et c sont des fonctions constantes.

Définition 32.95 (Équation différentielle linéaire du second ordre homogène)**.**
Une ***équation différentielle linéaire du second ordre homogène*** *est une équation différentielle de la forme (32.421), telle que le coefficient d est nul.*

À toute équation de la forme (32.421) on peut associer une équation homogène exactement comme on a fait dans la section précédente pour les équations linéaires du premier ordre.

32.15.1 Équations différentielles linéaires du second ordre homogènes à coefficients constants

Remarque 32.96.
L'application qui à la fonction y fait correspondre $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$ est linéaire, au sens de la remarque 32.80.

Cela nous dit en particulier, que si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène alors toute leur combinaison de la forme $z = \lambda y_1 + \mu y_2$, avec λ et μ dans $\mathbb{R}$, est encore une solution.

> Jusqu'ici nous avons toujours travaillé avec des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans cette section nous nous autorisons à passer par des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais cela sera uniquement une étape dans nos calculs. Au final toutes les solutions que nous allons considérer sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La solution générale **à valeurs dans les complexes** d'une équation de ce type a la forme

sol_gen_ordre_deux_hom

$$\mathcal{Y}_h^{\mathbb{C}} = \{C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \,:\, C_1, C_2 \in \mathbb{C},\, x \in I\}, \tag{32.422}$$

où r_1 et r_2 sont aussi des nombres complexes. Remarquez que la solution générale est une famille à deux paramètres. Il faut aussi observer que en tout cas l'intervalle I dans lequel varie x est un intervalle dans $\mathbb{R}$, parce que I est une des données du problème.

À partir de cette information nous pouvons, pour toute équation donnée, chercher la solution générale **complexe** par substitution. Il suffit de remplacer y dans l'équation par e^{rx} et chercher les valeurs de r qui nous conviennent.

Si notre équation de départ est

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{pour } x \in I, \tag{32.423}$$ eq_lin_ordre_deux_hom

alors la substitution nous donne

$$e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0.$$

Il est connu que la fonction exponentielle ne prend pas la valeur 0, par conséquent ce qui s'annule est le polynôme de degré deux $ar^2 + br + c$. Il est donc très facile de trouver les valeurs de r qu'on pourra utiliser comme r_1 et r_2 dans la solution générale **complexe**.

Si $b^2 - 4ac > 0$ **:** le polynôme admet deux solutions réelles et distinctes, r_1 et r_2 ;

Si $b^2 - 4ac < 0$ **:** le polynôme admet deux solutions complexes conjuguées, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$;

Si $b^2 - 4ac = 0$ **:** le polynôme admet une solution réelle double $r = r_1 = r_2$.

Il faut maintenant écrire la solution générale **réelle** de l'équation, qui est celle que nous intéresse vraiment. La façon de l'obtenir est différente dans les trois cas.

Si $b^2 - 4ac > 0$ **:** la solution générale réelle a la même forme que la solution complexe, (32.422), il suffit de prendre les paramètres C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}$ plutôt que dans $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{Y}_h = \{C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \,:\, C_1, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in I\}, \tag{32.424}$$ sol_gen_reelle_ordre_deux_hom

Si $b^2 - 4ac < 0$ **:** le polynôme admet deux solutions complexes conjuguées, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$; Il faut alors utiliser les formules suivantes

$$\begin{aligned} e^{\alpha+i\beta} &= e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ e^{\alpha-i\beta} &= e^{\alpha}(\cos(\beta) - i\sin(\beta)). \end{aligned} \tag{32.425}$$

La somme $e^{r_1 x} + e^{r_2 x}$, où x est dans $I \in \mathbb{R}$, vaut

$$e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) = 2e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

et la différence $e^{r_1 x} - e^{r_2 x}$ vaut

$$e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) - e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) = 2e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Par ces deux calculs élémentaires nous avons trouvé deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui n'ont pas de zéros en commun. Elles sont les génératrices de la famille des solutions réelles de l'équation différentielle (la solution générale)

$$\mathcal{Y}_h = \{e^{\alpha x}\left(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\right) \,:\, C_1, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in I\}, \tag{32.426}$$ sol_gen_reelle_ordre_deux_hom_complconj

Si $b^2 - 4ac = 0$ **:** le polynôme admet une solution réelle double $r = r_1 = r_2$. Dans ce cas la solution générale de l'équation est la famille

$$\mathcal{Y}_h = \{(C_1 + C_2 x)e^{rx} \,:\, C_1, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in I\}. \tag{32.427}$$ sol_gen_reelle_ordre_deux_hom_doublerac

Pour justifier cette formule nous observons d'abord que toute fonction $x \mapsto Ce^{rx}$, pour $C \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle (par construction). Ensuite nous utilisons la méthode de variation de la constante. On trouve rapidement que si une fonction de la forme $x \mapsto C(x)e^{rx}$ est une solution alors $C(x)$ est un polynôme de degré au plus 1, c'est-à-dire $C(x) = C_1 + C_2 x$ avec C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}$.

32.15.2 Linéaires du second ordre à coefficients constants, non homogènes

Nous ne présentons pas une méthode générale pour la résolution de ces équations. Comme dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre non homogènes, la solution générale de (32.421) est donnée par la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée. La recherche d'une solution particulière est facilitée par le fait que les coefficients de (32.421) sont supposés constants, c'est-à-dire que a, b et c sont des fonctions constantes. Il faut essayer de deviner la forme d'une solution particulière à partir de la forme du second membre de l'équation, la fonction d. Si d est un polynôme il faut essayer avec un polynôme du même degré, si d est une exponentielle, par exemple $d(x) = e^{5x}$, on pourra essayer avec un multiple de la même fonction exponentielle, dans l'exemple $f(x) = ke^{5x}$, avec k à determiner. Si d est une combinaison linéaire de sinus et cosinus, comme par exemple $12\cos(x) + 2\sin(x)$, on peut essayer avec $k_1\cos(x) + k_2\sin(x)$.

Exemple 32.97.
On considère l'équation différentielle

$$y'' + 12y' + 36y = -192e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{32.428}$$ exemple_non_hom

Son équation homogène associée est

$$y'' + 12y' + 36y = 0, \tag{32.429}$$ exemple_hom_ass

dont le polynôme caractéristique est $r^2 + 12r + 36$. Ce polynôme admet une racine double, qui est -6, par conséquent la solution générale de (32.429) est

$$\mathcal{Y}_h = \left\{(C_1 + C_2x)e^{-6x} \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Le membre de droite de (32.428) est une fonction exponentielle, nous allons donc chercher une solution particulière de (32.428) de la forme $f(x) = ke^{2x}$. Par substitution nous trouvons

$$ke^{2x}(4 + 12 \times 2 + 36) = -192e^{2x},$$

ce qui veut dire que k doit être -3.

La solution générale de l'équation (32.428) est donc

$$\mathcal{Y} = \left\{(C_1 + C_2x)e^{-6x} - 3e^{2x} \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

△

Exemple 32.98.
Nous allons résoudre l'équation

$$y'' + 12y' + 36y = 12\cos(x) + 2\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{32.430}$$

Cette équation a comme homogène associée l'équation (32.429), comme dans l'exemple précédent. Il nous suffit donc de trouver une solution particulière de (32.428).

Nous pouvons essayer avec $f(x) = k_1\cos(x) + k_2\sin(x)$. Par substitution on trouve

$$\begin{aligned} -\left(k_1\cos(x) + k_2\sin(x)\right) + 12\left(-k_1\sin(x) + k_2\cos(x)\right) + 36\left(k_1\cos(x) + k_2\sin(x)\right) \\ = 12\cos(x) + 2\sin(x) \end{aligned}$$

Cette équation doit être satisfaite pour toute valeur de x, en particulier pour $x = 0$ et $x = \pi/2$. Cela revient à considère séparément les coefficients des fonctions sinus et cosinus. Il faut alors que k_1 et k_2 soient solutions du système

$$\begin{cases} -k_1 + 12k_2 + 36k_1 &= 12, \\ -k_2 - 12k_1 + 36k_2 &= 2. \end{cases}$$

On trouve $k_1 = 396/1369$ et $k_2 = 214/1369$, et la solution générale de notre équation est

$$\mathcal{Y} = \left\{(C_1 + C_2x)e^{-6x} + \frac{396}{1369}\cos(x) + \frac{214}{1369}\sin(x) \,:\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

△

Exemple 32.99.
Nous allons résoudre l'équation

$$y'' + 12y' + 36y = 10x^2 + 3, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{32.431}$$

Cette équation a comme homogène associée l'équation (32.429), comme dans l'exemple précédent. Il nous suffit donc de trouver une solution particulière de (32.428).

Nous pouvons essayer avec $f(x) = k_1x^2 + k_2x + k_3$. Par substitution on trouve

$$(2k_1) + 12\left(2k_1x + k_2\right) + 36\left(k_1x^2 + k_2x + k_3\right) = 10x^2 + 3.$$

Pour trouver les bonnes valeurs des coefficients nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} 36k_1 & = 10, \\ 24k_1 + 36k_2 & = 0, \\ 2k_1 + 12k_2 + 36k_3 & = 3, \end{cases}$$

ce qui donne $k_1 = 5/18$, $k_2 = -5/27$ et $k_3 = 7/54$. La solution générale de notre équation est

$$\mathcal{Y} = \left\{ (C_1 + C_2x)e^{-6x} + \frac{5}{18}x^2 - \frac{5}{27}x + \frac{7}{54} \ : \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

32.16 Fonction de Green

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y''(x) = g(x) & \text{(32.432a)} \\ y(0) = y(1) = 0 & \text{(32.432b)} \end{cases}$$

pour $x \in]0,1[$ et où g est continue sur $]0,1[$.

Nous définissons la fonction de Green

$$G(x,t) = \begin{cases} t(x-1) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1 \\ x(t-1) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{32.433}$$

et nous allons montrer que

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t)g(t)dt \tag{32.434}$$

EQooCOFDooERUIhe

est l'unique solution.

(1) **Unicité**

Si y_1 et y_2 sont des solutions, alors $y_1'' = y_2''$ et donc $y_1(x) = y_2(x) + ax + b$. Les conditions aux bords donnent alors $0 = y_1(0) = y_2(0) + b = b$. D'où $b = 0$. En imposant $y_1(1) = 0$ nous trouvons alors immédiatement $a = 0$, ce qui donne $y_1 = y_2$.

(2) **Existence**

Il est vite vérifié qu'avec (32.434) nous avons $y(0) = y(1) = 0$ parce que $G(0,t) = G(1,t) = 0$ pour tout t. Nous fixons une valeur pour $x \in]0,1[$ et nous découpons l'intégrale :

$$y(x) = \int_0^x G(x,t)g(t)dt + \int_x^1 G(x,t)g(t)dt. \tag{32.435}$$

Pour calculer $y'(x)$, il faut dériver à la fois à travers l'intégrale et dans la borne. Si vous connaissez une formule pour faire cela, c'est bien pour vous. Nous allons faire ça à la main et poser

$$I(x,y) = \int_0^y t(x-1)g(t)dt. \tag{32.436}$$

La dérivation de I par rapport à x se fait en utilisant le théorème 17.24 :

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x,y) = \int_0^y tg(t)dt. \tag{32.437}$$

Pour la dérivation par rapport à y, il s'agit du théorème fondamental de l'analyse, plus précisément le lien primitive et intégrale de la proposition 14.287 :

$$\frac{\partial I}{\partial y}(x,y) = y(x-1)g(y). \tag{32.438}$$

Maintenant nous considérons la fonction $\varphi_I(x) = I(x,x)$. Elle satisfait à

$$\varphi_I'(x) = \frac{\partial I}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial I}{\partial y}(x,x) = \int_0^x tg(t) + x(x-1)g(x). \tag{32.439}$$

Le même jeu avec $J(x,y) = \int_y^1 x(t-1)g(t)dt$ donne

$$\varphi_J'(x) = \int_0^x (t-1)g(t)dt - x(x-1)g(x). \tag{32.440}$$

En remettant les bouts ensemble,

$$y'(x) = \int_0^x tg(t)dt + \int_1^x (1-t)g(t)dt. \tag{32.441}$$

Le calcul de la dérivée seconde donne alors

$$y''(x) = xg(x) + (1-x)g(x) = g(x). \tag{32.442}$$

Nous pouvons aussi, sur cette équation, estimer la variation de la solution en termes d'une variation de g. Soit donc une fonction continue δ_g sur $[0,1]$ et $\tilde{g} = g + \delta_g$. Nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} \tilde{y}''(x) = \tilde{g}(x) & \text{(32.443a)} \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}(1) = 0. & \text{(32.443b)} \end{cases}$$

Par ce que nous venons de faire, l'unique solution est

$$\tilde{y}(x) = \int_0^1 G(x,t)\tilde{g}(t)dt = \int_0^1 G(x,t)g(t)dt + \int_0^1 G(x,t)\delta_g(t)dt = y(x) + \delta_y(x) \tag{32.444}$$

où δ_y est une fonction continue ainsi définie :

$$\delta_y(x) = \int_0^1 G(x,t)\delta_g(t)dt. \tag{32.445}$$

Supposons que $\|\delta_g\|_\infty = \epsilon$. Alors des majorations donnent

$$|\delta_y(x)| \leqslant \epsilon \int_0^1 |G(x,t)|dt = \epsilon(1-x)\int_0^x tdt + \epsilon x \int_x^1 (1-t)dt = \frac{\epsilon}{2}x(1-x). \tag{32.446}$$

EQooRJZPooCSlUGi

Mais la fonction $x \mapsto x(1-x)$ a son maximum en $x = \frac{1}{2}$, donc nous pouvons donner une majoration indépendante de x :

$$\|\delta_y\|_\infty \leqslant \frac{1}{8}\|\delta_g\|_\infty. \tag{32.447}$$

EQooTWQHooUPYRuc

Notons que la majoration (32.447) en norme uniforme a l'air plus impressionnante, mais la majoration (32.446) donnant une majoration séparée pour chaque x est en réalité plus précise.

Chapitre 33

Équations aux dérivées partielles

33.1 Symbole principal, équation des caractéristiques

Soit l'équation différentielle semi-linéaire d'ordre k

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)(\partial^\alpha u)(x) + F\Big(x, u(x), (Du)(x), \dots, (D^{k-1}u)(x)\Big) = 0 \tag{33.1}$$

EQooEZXSooOxZTFi

pour la fonction $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

DEFooWPGHooNIMAuS

Définition 33.1.
*Le **symbole principal** de l'équation (33.1) est l'application*

$$\begin{aligned} \sigma\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R} \\ (x,\xi) &\mapsto \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha \end{aligned} \tag{33.2}$$

où si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ alors $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_d^{\alpha_d}$.

DEFooYYNOooZlZMxu

Définition 33.2.
*Une **caractéristique** de l'équation (33.1) est une surface S de $\mathbb{R}^d$ donnée par l'équation $\phi(x) = 0$ où ϕ satisfait à*

$$\begin{cases} \sigma\big(x, \nabla\phi(x)\big) = 0 & \text{(33.3a)} \\ \nabla\phi(x) \neq 0 & \text{(33.3b)} \end{cases}$$

pour tout $x \in S$. Ici, σ est le symbole principal (définition 33.1) de l'équation différentielle.

33.2 Méthode des caractéristiques pour l'ordre 1

SECooHKSLooOCYNDz

Nous[819, 820] voulons étudier l'équation d'ordre 1

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + c(x,y)u(x,y) = f(x,y) \tag{33.4}$$

EQooGJKZooCCEpRj

Le champ de vecteurs associé à cette équation est

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{33.5}$$

et l'équation peut être écrite sous la forme

$$(v \cdot \nabla u) + cu = f. \tag{33.6}$$

DEFooNYVSooZRjNcH

Définition 33.3.
*Le **flot** de ce champ de vecteurs sont les courbes paramétriques $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ vérifiant $\gamma'(t) = v\big(\gamma(t)\big)$.*

Les équations du flot pour l'équation (33.4) sont [EQooURBTooVdFzZR]

$$\begin{cases} x'(t) = a\big(x(t), y(t)\big) & (33.7a)\\ y'(t) = b\big(x(t), y(t)\big). & (33.7b)\end{cases}$$

Ce sont des équations différentielles ordinaires. Un système de deux équations couplées du premier ordre.

Quel est l'intérêt du flot ? Nous allons voir que sur la ligne $t \mapsto \gamma(t)$, la fonction u est constante. Or des solutions γ au système (33.7), il y en aura plusieurs : une pour chaque valeur des constantes d'intégration. Pour peu que ces lignes recouvrent tout le plan, nous pourrons résoudre l'équation de départ ligne par ligne.

Nous posons

$$\tilde{u}(t) = u\big(x(t), y(t)\big) \quad (33.8a)$$
$$\tilde{c}(t) = c\big(x(t), y(t)\big) \quad (33.8b)$$
$$\tilde{f}(t) = f\big(x(t), y(t)\big). \quad (33.8c)$$

La fonction $\tilde{u}$ est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ normale qui se dérive normalement, en suivant la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned}\tilde{u}'(t) &= \frac{\partial u}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t) && (33.9a)\\ &= a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} && (33.9b)\\ &= f\big(x(t), y(t)\big) - c\big(x(t), y(t)\big)u\big(x(t), y(t)\big) && (33.9c)\\ &= \tilde{f}(t) - \tilde{c}(t)\tilde{u}(t). && (33.9d)\end{aligned}$$

Nous avons pour $\tilde{u}$ l'équation différentielle ordinaire

$$\tilde{u}' + \tilde{c}\tilde{u} = \tilde{f} \quad (33.10)$$

qui est résolue par la proposition 32.12.

33.2.1 Un exemple complet un peu minimal

Nous considérons l'équation différentielle[819]

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - (x - y)u = 0. \quad (33.11)$$

Et nous allons la résoudre.

Les équations du flot, sont simples parce que les coefficients sont des constantes : $x'(t) = 1$, $y'(t) = -1$. Donc

$$x(t) = t + C_1 \quad (33.12a)$$
$$y(t) = -t + C_2. \quad (33.12b)$$

À priori nous avons une caractéristique pour chaque choix de (C_1, C_2) et nous espérons que le tout recouvre le plan $\mathbb{R}^2$. En fait seule une des deux constantes doit être laissée libre, l'autre consiste seulement en décaler le paramètre t. Nous posons donc $C_1 = 0$ et nous considérons les courbes caractéristiques

$$\gamma_C(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t + C \end{pmatrix}. \quad (33.13)$$

Ces courbes recouvrent bien tout le plan. Pour savoir les valeurs de u sur la courbe γ_C, nous devons résoudre l'équation différentielle ordinaire

$$\tilde{u}_C' + \tilde{c}\tilde{u}_C = \tilde{f}, \quad (33.14)$$

en sachant que $\tilde{c}(t) = c\big(x(t), y(t)\big) = -\big(x(t) - y(t)\big) = 2t - C$. Cela se fait en suivant la méthode décrite dans l'exemple 32.9 et résumée dans la proposition 32.12.

En termes de notations, $\tilde{u}_C(t) = u\big(\gamma_C(t)\big)$. Récrivons l'équation :

$$\tilde{u}'(t) - (2t - C)\tilde{u}(t) = 0. \quad (33.15)$$

La méthode pour la résoudre est de mettre les $\tilde{u}$ d'un côté et les t de l'autre :

$$\frac{\tilde{u}'}{u} = 2t - C. \tag{33.16}$$

En intégrant par rapport à t des deux côtés,

$$\ln(\tilde{u}) = t^2 - Ct + K_C, \tag{33.17}$$

c'est-à-dire (avec redéfinition de K_C)

$$\tilde{u}(t) = K_C e^{t^2 - Ct} \tag{33.18}$$

ou encore

$$u\big(\gamma_C(t)\big) = K_C e^{t^2 - Ct} \tag{33.19}$$

EQooSSTJooEQfRnP

où C est le paramètre que nous déterminons en sachant sur quelle caractéristique se trouve le point (x, y) où nous voulons calculer $u(x, y)$ et K est une constante (strictement positive parce que si vous avez suivi le mouvement, c'est une exponentielle) qui doit être déterminée par les conditions initiales. Dès que K est fixé pour un des points de la courbe γ_C, alors il est fixé pour tous les points.

Ce que nous avons obtenu est qu'il existe un K_C tel que pour tout t nous avons

$$u\big(\gamma_C(t)\big) = K_C e^{t^2 - Ct}. \tag{33.20}$$

Soit donc un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Nous devons d'abord déterminer où ce point se trouve par rapport aux caractéristiques, c'est-à-dire quelle est la valeur de C pour laquelle (x_0, y_0) est sur la courbe γ_C, et ensuite déterminer pour quelle valeur de t nous aurons $\gamma_C(t) = (x_0, y_0)$. À résoudre :

$$\gamma_C(t_0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ -t_0 + C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{33.21}$$

Donc $t_0 = x_0$ et $C = x_0 + y_0$. En reprenant (33.19) nous avons

$$u\big(\gamma_C(t_0)\big) = K e^{x_0^2 - (x_0 + y_0)x_0} = K e^{-x_0 y_0}. \tag{33.22}$$

Pour peu que des conditions soient données sur chaque caractéristique, nous pouvons déterminer K. Attention : ce K est une constante d'intégration de l'équation différentielle ordinaire pour $\tilde{u}$. Donc elle n'est valable que sur chaque caractéristique séparément. Cela n'est donc pas du tout une constante sur $\mathbb{R}^2$.

Nous pouvons maintenant écrire la solution générale de l'équation de départ. L'équation cartésienne de la courbe γ_C est

$$x + y = C. \tag{33.23}$$

Donc K est une fonction de $x + y$, pas de x et y séparément. Cela est important à comprendre. À priori nous avons

$$u(x, y) = K(x, y)e^{-xy} \tag{33.24}$$

où $K(x, y)$ est constante sur la courbe γ_C contenant (x, y). Nous avons

- si $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$,
- alors il existe C tel que (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont sur γ_C,
- alors $K(x_1, y_1) = K(x_2, y_2)$.

Donc il existe une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $K(x, y) = f(x + y)$.

Au final, la solution générale de l'équation est

$$u(x, y) = f(x + y)e^{-xy} \tag{33.25}$$

où f est une fonction à déterminer par les conditions initiales qui peuvent être données. Typiquement nous espérons que les conditions imposent une et une seule valeur de u sur chacune des courbes γ_C.

33.2.2 Un théorème d'existence et d'unicité

La méthode des caractéristiques donne essentiellement une preuve de l'unicité des solutions aux équations de transport, et une méthode pour construire cette solution. En effet, la procédure suivante permet de construire $u(x_0, y_0)$.

- Trouver la caractéristique passant par le point (x_0, y_0)
- Calculer en quel point elle passe par une condition initiale donnée.
- Attribuer à $u(x_0, y_0)$ la valeur trouvée sur la caractéristique là où elle passe par une condition initiale.

Rien ne permet à priori de savoir que cette procédure construit effectivement une solution. En particulier, comment calculer $\partial_x u$? Le quotient différentiel serait

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{u(x+\epsilon,y)-u(x,y)}{\epsilon}, \tag{33.26}$$

mais la caractéristique donnant la valeur de $u(x+\epsilon, y)$ est différente pour chaque ϵ. Rien à priori ne permet d'affirmer que le calcul soit simple, ni qu'il arrive à une solution du problème donné.

D'où la nécessité d'avoir un résultat un peu rigoureux donnant des conditions sous lesquelles les choses vont bien.

PROPooVQLBooQyFfEH

Proposition 33.4 (Équation de transport à coefficients variables[820, 810])**.**
Soit une fonction $c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 en ses deux variables et uniformément lipschitzienne en sa première variable[1] *et $g \in C^1(\mathbb{R})$. Alors l'équation aux dérivées partielles de premier ordre*

SUBEQSooKWBFooKkpihH

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + c(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y) = 0 & \text{(33.27a)} \\ u(x,0) = h(y) & \text{(33.27b)} \end{cases}$$

admet une unique solution de classe C^1.

Cette solution est construite de la façon suivante[2]*. D'abord nous considérons la solution X au problème*

SUBEQSooTOCE

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial s}(s;x,t) = c\big(X(s;x,t),s\big) & \text{(33.28a)} \\ X(t;x,t) = x, & \text{(33.28b)} \end{cases}$$

et ensuite le problème (33.27) a pour unique solution

EQooLFYNooJewRhE

$$u(x,t) = h\big(X(0;x,t)\big). \tag{33.29}$$

Démonstration. Nous commençons par étudier l'existence et l'unicité de la fonction X définie par le problème 33.28. La fonction c ici est dans les hypothèses de la fonction f du théorème de Cauchy-Lipschitz global 17.40. D'où l'existence et l'unicité de la fonction $s \mapsto X(s;x,t)$ sur $\mathbb{R}$ pour chaque (x,y) donné[3].

La proposition 32.42 nous dit que X est de classe C^2 en (s,x,t). Donc nous pourrons dériver et permuter les dérivées autant que nous voudrons (sans exagérer : ordre 2 au maximum).

(1) **Unicité** Nous montrons que u doit être constante sur le chemin

$$\gamma_{(x,t)}(s) = \begin{pmatrix} X(s;x,t) \\ s \end{pmatrix}. \tag{33.30}$$

En effet, en posant

$$\varphi(s) = u\big(\gamma(s)\big) = u\big(X(s;x,t),s\big), \tag{33.31}$$

et en dérivant nous obtenons

$$\varphi'(s) = \frac{\partial u}{\partial t}\big(X(s;x,t),s\big)\frac{\partial X}{\partial s}(s;x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}\big(X(s;x,t)\big) = 0. \tag{33.32}$$

Par conséquent la valeur commune de tous les $u\big(\gamma_{(x,t)}(s)\big)$ doit être celle en $\gamma_{(x,t)}(0) = h(X(0;x,t))$

Cela prouve l'unicité parce que la valeur de u est fixée en tout point. Nous devons encore vérifier que la fonction u ainsi construite est bien une solution du problème. C'est l'objet de la partie « existence » de la preuve.

[1] Dans [810], on ne demande que continue puis uniformément lipschitzienne. Moi je crois que ce n'est pas assez pour assurer la dérivabilité de X par rapport à x, et encore moins pour permuter les dérivées dans $\partial^2_{tx} Y$.

[2] Le fait que la construction ait un sens fait partie des choses à prouver

[3] Avec l'énoncé tel que donné dans [820], il faut utiliser la technique de 32.25 pour l'existence globale, parce que la fonction b là-dedans n'est pas dans les mêmes hypothèses.

(2) **Existence**

Même l'existence est divisée en plusieurs étapes.

(2a) **Mise en place**

Nous prouvons que la fonction u donnée par (33.29) est une solution du problème. Nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = h'\big(X(0;x,t)\big)\frac{\partial X}{\partial t}(0;x,t) \tag{33.33}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = h'\big(X(0;x,t)\big)\frac{\partial X}{\partial x}(0;x,t), \tag{33.34}$$

de sorte qu'en posant

$$g(s;x,t) = \frac{\partial X}{\partial t}(s;x,t) + c(x,t)\frac{\partial X}{\partial x}(s;x,t) \tag{33.35}$$

nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = h'\big(X(0;x,t)\big)g(0;x,t). \tag{33.36}$$

(2b) **Une équation différentielle pour g**

Nous allons prouver que

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s;x,t) = \alpha_{(x,t)}(s)g(s;x,t) \tag{33.37}$$

avec[4]

$$\alpha_{(x,t)}(s) = \frac{\partial c}{\partial x}\big(X(s;x,t),s\big). \tag{33.38}$$

D'abord nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s;x,t) = \frac{\partial^2 X}{\partial s\partial t}(s;x,t) + c(x,t)\frac{\partial^2 X}{\partial s\partial x}(s;x,t). \tag{33.39}$$

Nous permutons les dérivées et nous tenons compte de (33.28) :

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s;x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(c\big(X(s;x,t),s\big)\Big) + c(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Big(c\big(X(s;x,t),s\big)\Big). \tag{33.40}$$

Nous dérivons maintenant plus en profondeur. D'une part

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(c\big(X(s;x,t),s\big)\Big) = \frac{\partial c}{\partial x}\Big(X(s;x,t),s\Big)\frac{\partial X}{\partial t}(s;x,t) \tag{33.41}$$

et d'autre part,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(c\big(X(s;x,t),s\big)\Big) = \frac{\partial c}{\partial x}\Big(X(s;x,t),s\Big)\frac{\partial X}{\partial x}(s;x,t), \tag{33.42}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s}(s;x,t) &= \frac{\partial c}{\partial x}\big(X(s;x,t),s\big)\Big[\frac{\partial X}{\partial t}(s;x,t) + c(x,t)\frac{\partial X}{\partial x}(s;x,t)\Big] &\text{(33.43a)}\\ &= \alpha_{(x,t)}(s)g(s;x,t). &\text{(33.43b)}\end{aligned}$$

(2c) **Une condition initiale pour g**

Nous montrons maintenant que $g(t;x,t) = 0$. La condition initiale pour X est $X(t;x,t) = x$ pour tout $t, x \in \mathbb{R}$. Nous dérivons cette dernière par rapport à x et à t :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(t;x,t) = 1 \tag{33.44a}$$

EQooQKVLooMpfFDC

$$\frac{\partial X}{\partial s}(t;x,t) + \frac{\partial X}{\partial t}(t;x,t) = 0. \tag{33.44b}$$

EQooNAWYooTzYkuQ

Mais $\partial_s X(t;x,t) = c\big(X(t;x,t),t\big)$, donc la relation (33.44b) donne

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t;x,t) = -c\big(X(t;x,t),t\big) = -c(x,t) \tag{33.45}$$

EQooVOMVooUhxkIx

où nous avons tenu compte du fait que $X(t;x,t) = x$.

Voyons à présent ce que (33.44a) et (33.45) donnent pour $g(t;x,t)$:

$$g(t;x,t) = \frac{\partial X}{\partial t}(t;x,t) + c(x,t)\frac{\partial X}{\partial x}(t;x,t) = -c(x,t) + c(x,t) = 0. \tag{33.46}$$

[4] La ligne suivante est une de celles qui me font penser qu'il manque des hypothèses dans [810]. Il faut bien pouvoir dériver c.

(2d) **Conclusion pour g**
La fonction g vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial s}(s) = \alpha(s)g(s) & (33.47a) \\ g(t) = 0. & (33.47b) \end{cases}$$

Bien entendu, $g(s) = 0$ est une solution. Mais la solution à ce système est unique par Cauchy-Lipschitz 17.39. Ici nous utilisons le fait que

$$(s, y) \mapsto \alpha(s)y \tag{33.48}$$

est continue. C'est-à-dire entre autres que

$$s \mapsto \frac{\partial c}{\partial x}\big(X(s; x, t), s\big) \tag{33.49}$$

doit être continue. C'est le cas parce que c est de classe C^1 en sa première variable.

□

Les hypothèses de la proposition 33.4 sont loin d'être optimales. Voici un exemple dans lequel c n'est même pas dérivable par rapport à t et qui se passe très bien quand même.

Exemple 33.5.
Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + |t - 1|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 & (33.50a) \\ u(x, 0) = h(x) & (33.50b) \end{cases}$$

où h est une fonction bien régulière ; mettons C^p. En suivant la méthode de la proposition nous devrions poser l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial s}(s; x, t) = |s - 1| & (33.51a) \\ X(t; x, t) = x. & (33.51b) \end{cases}$$

Cela est la caractéristique passant par (x, t). Cependant il sera plus simple de chercher les caractéristiques en demandant qu'elles passent par $(x_0, 0)$. Nous allons donc plutôt résoudre pour X_{x_0} l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial s}(s) = |s - 1| & (33.52a) \\ X_{x_0}(0) = x_0 & (33.52b) \end{cases}$$

et les courbes caractéristiques seront les chemins

$$\gamma_{x_0}(s) = \begin{pmatrix} X_{x_0}(s) \\ s \end{pmatrix}. \tag{33.53}$$

La résolution donne d'abord

$$X_{x_0}(s) = \begin{cases} -\frac{s^2}{2} + s + K_1 & \text{si } s < 1 \\ \frac{s^2}{2} - s + K_2 & \text{si } s > 1. \end{cases} \tag{33.54}$$

Vu que la condition initiale est donnée pour $s = 0$, nous fixons K_1 pour la condition initiale et K_2 pour la continuité :

$$X_{x_0}(s) = \begin{cases} -\frac{s^2}{2} + s + x_0 & \text{si } s < 1 \\ \frac{1}{2} + x_0 & \text{si } s = 1 \\ \frac{s^2}{2} - s + 1 + x_0 & \text{si } s > 1. \end{cases} \tag{33.55}$$

Soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Quelle caractéristique passe par là ? Nous allons déterminer la fonction $x_0(x, t)$ qui donne le x_0 tel que la caractéristique γ_{x_0} passe par (x, t). Nous devons résoudre

$$\begin{pmatrix} X_{x_0}(s) \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{33.56}$$

Directement : $s = t$. Et ensuite $X_{x_0}(t) = x$. Nous avons

$$x_0(x,t) = \begin{cases} x + \frac{t^2}{2} - t & \text{si } t < 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } t = 1 \\ x - \frac{t^2}{2} + t - 1 & \text{si } t > 1. \end{cases} \tag{33.57}$$

Le truc presque étonnant est que x_0 est de classe C^1. En effet le calcul de

$$\frac{\partial x_0}{\partial t}(1) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{x_0(x, 1+\epsilon) - x_0(x,1)}{\epsilon} \tag{33.58}$$

se fait en séparant les limites $\epsilon \to 0^+$ et $\epsilon \to 0^-$. Le résultat est que $\partial_t x_0(1) = 0$. Nous avons donc

$$\frac{\partial x_0}{\partial t}(t) = \begin{cases} t - 1 & \text{si } t < 1 \\ 0 & \text{si } t = 1 \\ -t + 1 & \text{si } t > 1. \end{cases} \tag{33.59}$$

Cela étant continu, la fonction x_0 est de classe C^1 en t, et la dérivée en x étant toujours 1, elle est de classe C^1.

En ce qui concerne la solution de l'équation de départ,

$$u(x,t) = h\big(X_{x_0(x,t)}(0)\big) = h\big(x_0(x,t)\big). \tag{33.60}$$

Pourvu que h soit assez régulière, la fonction u est facilement de classe C^1. △

33.3 Méthode des caractéristiques pour l'ordre 2

33.3.1 Principe général

Soit l'opérateur différentiel agissant sur $C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$D = a(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{33.61}$$

Nous voulons résoudre des équations du type $Du = 0$ pour $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Pour commencer[819], et c'est le point crucial, nous voyons D comme un polynôme en ∂_x et ∂_y et nous le factorisons : si

$$aX^2 + bXY + cY^2 = (\alpha X + \beta Y)(\gamma X + \delta Y) \tag{33.62}$$

alors nous avons

$$D = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x} + \delta\frac{\partial}{\partial y}\right) + \text{ termes d'ordre inférieurs.} \tag{33.63}$$

Les « termes d'ordre inférieurs » sont ceux de la forme $\alpha(x,y)\frac{\partial\delta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$.

L'astuce est de poser

$$v = (\gamma\partial_x + \delta\partial_y)u, \tag{33.64}$$

et de résoudre le système [SUBESQooGCMNooEDWQHd]

$$\begin{cases} (\alpha\partial_x + \beta\partial_y)v = 0 & \text{(33.65a)} \\ (\gamma\partial_x + \delta\partial_y)u = v. & \text{(33.65b)} \end{cases}$$

Cela sont deux équations différentielles du premier ordre pour lesquelles nous avons déjà des techniques décrites en la section 33.2.

Afin que les fonctions α, β, γ et δ soient réelles, il faut que $b^2 - 4ac \geqslant 0$. Sachant que $a = \alpha\gamma$, $b = \alpha\delta + \beta\gamma$ et $c = \beta\delta$ cette condition sur a, b et c donne

$$(\alpha\delta + \beta\gamma)^2 - 4\alpha\gamma\beta\delta \geqslant 0. \tag{33.66}$$

Cela revient à

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \geqslant 0. \tag{33.67}$$

Nous supposons à présent que l'inégalité soit stricte (cas hyperbolique). Nous avons en particulier que

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{33.68}$$

Cette condition implique que les équations

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x,y) \quad \frac{dy}{dt} = \beta(x,y) \tag{33.69}$$

sont indépendantes des équations

$$\frac{dx}{dt} = \gamma(x,y) \quad \frac{dy}{dt} = \delta(x,y) \tag{33.70}$$

Ce sont les équations caractéristiques des équations (33.65).

33.3.2 Exemple : l'équation d'onde

SUBSECooYBBKooUOIlCS

Nous considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{33.71}$$

où c est une constante réelle. Nous en cherchons des solutions de classe C^2.

L'opérateur différentiel est donné par le polynôme $P(T,X) = T^2 - c^2X^2$ qui se factorise en

$$P = (T + cX)(T - cX), \tag{33.72}$$

c'est-à-dire que nous pouvons récrire l'équation des ondes sous la forme

$$(\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u = 0. \tag{33.73}$$

Nous posons donc $v = (\partial_t - c\partial_x)u$ et nous avons le système[809]

$$\begin{cases} (\partial_t + c\partial_x)v = 0 & \text{SUBEQooLQAPooVoJccp} \quad (33.74a) \\ (\partial_t - c\partial_x)u = v & \text{SUBEQooPWXMooDjThlJ} \quad (33.74b) \end{cases}$$

La méthode des caractéristiques est efficace pour résoudre la première, et pour trouver la solution générale de l'homogène associée à la seconde.

Nous nous lançons dans la résolution de (33.74a). Le flot est $v = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$, et nous cherchons ses courbes intégrales sous la forme $\varphi(t) = \big(t, x(t)\big)$. Immédiatement, $x'(t) = c$, ce qui donne

$$\gamma_C(t) = \begin{pmatrix} t \\ ct + C \end{pmatrix}. \tag{33.75}$$

Cela donne une caractéristique pour chaque valeur de C. En posant $\tilde{v}_C(t) = v(t, ct + C)$ nous avons

$$\tilde{v}_C'(t) = \frac{\partial v}{\partial t}\big(\gamma_C(t)\big) + c\frac{\partial v}{\partial t}\big(\gamma_C(t)\big) = 0. \tag{33.76}$$

Donc $\tilde{v}_C$ est une fonction constante. Donc v est constant sur la courbe γ_C dont l'équation cartésienne est $x - ct = C$. Cela implique que

$$v(t,x) = f(x - ct) \tag{33.77}$$

où f est une fonction de classe C^1. En effet si (t_1, x_1) et (t_2, x_2) vérifient $x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2$ alors $v(t_1, x_2) = v(t_2, x_2)$. Le fait que f soit C^1 est une demande que v soit au final dans C^2.

Nous devons maintenant résoudre l'équation (33.74b)

$$(\partial_t - c\partial_x)u = v. \tag{33.78}$$

Nous allons agir conformément à la stratégie expliquée par le lemme 32.7. Nous devons résoudre $Du = v$ avec

$$\begin{aligned} D\colon C^2(\mathbb{R}) &\to D(C^2(\mathbb{R})) \\ u &\mapsto (\partial_t - c\partial_x)u. \end{aligned} \tag{33.79}$$

Par la même méthode des caractéristiques que celle déjà menée plus haut nous trouvons $\ker(D)$ comme solution générale de $(\partial_t - c\partial_x)u_G = 0$. C'est-à-dire

$$u_G = g(x + ct) \tag{33.80}$$

où g est une fonction quelconque de classe C^2.

Il nous faut maintenant une solution particulière de

$$(\partial_t - c\partial_x)u_P(t,x) = f(x-ct). \tag{33.81}$$

Si F est une primitive de f alors

$$u_P(t,x) = -\frac{1}{2c}F(x-ct) \tag{33.82}$$

fonctionne. Vu que f est quelconque dans $C^1(\mathbb{R})$, la fonction F est un élément quelconque de $C^2(\mathbb{R})$. Au final, la solution générale de l'équation des ondes est

$$u(t,x) = g_1(x+ct) + g_2(x-ct) \tag{33.83}$$

où g_1 et g_2 sont des éléments de $C^2(\mathbb{R})$.

33.4 Classification des équations du second ordre

Soit une équation générale d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + \beta u = f. \tag{33.84}$$

En ce qui concerne son symbole principal nous avons

$$\sigma(x,y,\xi_1,\xi_2) = a(x,y)\xi_1^2 + b(x,y)\xi_1\xi_2 + c(x,y)\xi_2^2, \tag{33.85}$$

ce qui donne l'équation des caractéristiques

$$a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + b\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{33.86}$$

EQooSAFNooEimPhO

Si nous nous posons sur un point (x_0,y_0) tel que $\nabla\phi(x_0,y_0) = 0$ et $\partial_x\phi(x_0,y_0) \neq 0$ alors, via le théorème de la fonction implicite[5], la condition $\phi(x,y) = 0$ définit une fonction $y \mapsto x(y)$ vérifiant

$$\phi\big(x(y),y\big) = 0 \tag{33.87}$$

pour tout y dans un voisinage de y_0.

Nous pouvons obtenir une équation différentielle ordinaire pour x de la façon suivante. D'abord nous posons $\varphi(y) = \phi\big(x(y),y\big)$ et ensuite nous calculons la dérivée de φ (qui est nulle par construction) :

$$0 = \varphi'(y) = \frac{\partial\phi}{\partial x}x' + \frac{\partial\phi}{\partial y}. \tag{33.88}$$

Nous pouvons donc remplacer $\partial_y\phi$ par $x'\partial_x\phi$ dans l'équation des caractéristiques (33.86) :

$$a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + bx'\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + c\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 (x')^2 = 0. \tag{33.89}$$

Vu que nous avons supposé $(\partial_x\phi) \neq 0$ sur un voisinage de (x_0,y_0) nous pouvons simplifier par $(\partial_x\phi)^2$ et avoir l'équation différentielle ordinaire

$$a\big(x(y),y\big) + b\big(x(y),y\big)x'(y) + c\big(x(y),y\big)x'(y)^2 = 0. \tag{33.90}$$

Notons que, conformément à ce que raconte le théorème des fonctions implicites, nous avons pris un voisinage de y_0 suffisamment petit pour que $x(y)$ reste dans un voisinage de x_0. Ce voisinage étant, nous pouvons le restreindre pour nous assurer du signe de a, b et c. Cela est évidemment très théorique parce que le théorème de la fonction implicite parle de l'existence de voisinages, mais pas de façon de les construire.

Nous donnons la classification suivante.

Définition 33.6 (elliptique, hyperbolique, parabolique)**.**
Types d'équations différentielles.

(1) Si $b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation est ***elliptique****.*

[5] Théorème 17.48.

*(2) Si $b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation est **hyperbolique**.*

*(3) Si $b^2 - 4ac = 0$ alors l'équation est **parabolique**.*

Exemple 33.7.
Un exemple d'équation parabolique est l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{33.91}$$

où $\alpha > 0$ est une constante. Cette équation est avec $b = c = 0$, donc elle est parabolique. △

Une équation aux dérivées partielles peut changer de nature selon le point.

Exemple 33.8.
Soit l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (x^2 - y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{33.92}$$

Son $b^2 - 4ac$ vaut $4(x^2 - y^2)$. Elle peut donc être hyperbolique, parabolique ou elliptique selon le point où l'on se trouve. △

33.4.1 Problème au limite

Dans les définitions qui suivent nous considérons un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ assez régulier et possédant en particulier un vecteur normal extérieur $n(x)$ pour tout point $x \in \partial\Omega$.

Définition 33.9.
*Un problème aux limites **de Dirichlet** est d'imposer la condition*

$$u(x) = g(x) \tag{33.93}$$

pour tout $x \in \Gamma \subset \partial\Omega$. C'est-à-dire imposer la valeur de u sur une partie du bord du domaine.

Définition 33.10.
*Un problème aux limites de **Von Neumann** est d'imposer*

$$\frac{\partial u}{\partial n} \cdot x = g(x) \tag{33.94}$$

pour tout $x \in \Gamma \subset \partial\Omega$. C'est-à-dire imposer les valeurs de la dérivée normale de u sur une partie du bord.

Exemple 33.11.
Lorsqu'on veut imposer un flux de chaleur aux bords d'un domaine pour l'équation de la chaleur, il s'agit de poser des conditions de type Von Neumann. △

Définition 33.12.
*Soit un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ et un opérateur différentiel L sur une partie de $\mathrm{Fun}(\Omega)$. Soit une fonction g sur $\partial\Omega$. Un problème **aux limites stationnaires** est un problème du type : trouver u définie sur Ω telle que*

$$\begin{cases} L(u) = f & \text{(33.95a)} \\ u|_{\partial\Omega} = g. & \text{(33.95b)} \end{cases}$$

Définition 33.13.
*Un problème **aux limites d'évolution** est du type : trouver $u \in \mathrm{Fun}\left(]0,\infty[\times \Omega\right)$ tel que*

$$\begin{cases} \frac{\partial^m u}{\partial t^m} + L(u) = f & \text{sur }]0,\infty[\times \Omega \\ u(t,.) = g(t,.) & \text{sur }]0,\infty[\times \partial\Omega \\ u(0,.) = u_0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{33.96}$$

où u_0 est une fonction sur Ω.

L'opérateur L ne doit pas opérer sur la partie « t » de u.

DEFooSNIRooBFYSFh

Définition 33.14 (Problème bien posé au sens de Hadamard)**.**
*Un problème aux limites est **bien posé au sens de Hadamard** si*

(1) Il admet une unique solution.

(2) La solution dépend de façon continue en les données du problème.

La continuité est au sens des normes sur les fonctions sur $\partial\Omega$ et sur Ω en ce qui concerne les fonctions « données » du problème et des normes pour les fonctions sur Ω ou $\bar{\Omega}$ en ce qui concerne la solution.

Exemple 33.15 (Un problème de Dirichlet bien posé)**.**
Trouver la fonction u définie sur $\Omega = [0,1]^2$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{33.97}$$

△

33.5 Principe du maximum

LEMooSPVUooDQOeom

Lemme 33.16 ([652])**.**
Soit un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soit une matrice symétrique strictement définie positive A telle que $A_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ pour laquelle il existe $\lambda > 0$ minorant toutes les valeurs propres de toutes les matrices $A(x)$ pour $x \in \Omega$[6]*.*

Nous posons $L' = -\sum_{ij} A_{ij}\partial_{ij}$. Si $u \in C^2(\Omega)$ atteint un minimum local en $x_0 \in \Omega$, alors

$$(L'u)(x_0) \leqslant 0. \tag{33.98}$$

Démonstration. Nous allons bien entendu diagonaliser A. Si T est une matrice nous avons, en posant $u(x) = v(Tx)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_k \frac{\partial v}{\partial x_k}(Tx)T_{ki} \tag{33.99}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \sum_{kl} T_{ki}T_{lj}\frac{\partial^2 v}{\partial x_l \partial x_k}(Tx). \tag{33.100}$$

Si T est en particulier une matrice orthogonale diagonalisant A (théorème 8.225) nous avons $T^{-1} = T^t$ et

$$\sum_{ij} T_{ki}A_{ij}T_{jl}^{-1} = D_{kl} = \lambda_k\delta_{kl} \tag{33.101}$$

où les λ_k sont les valeurs propres de A. Notons que partout ici, tout est fonction de x sur Ω : tant A que T que les λ_k. Avec tous ces résultats nous calculons vite que

$$(Lu)(x_0) = -\sum_k \lambda_k(\partial_k^2 v)(Tx_0). \tag{33.102}$$

Si $x_0 \in \Omega$ est un minimum local de u, alors l'application v a un minimum local en $T^{-1}x_0$. Et donc

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}(Tx_0) \geqslant 0. \tag{33.103}$$

Du coup,

$$(Lu)(x_0) \leqslant 0. \tag{33.104}$$

□

LEMooDVUYooHEkrsL

Lemme 33.17 ([652])**.**
Soit un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soit une matrice symétrique strictement définie positive A telle que $A_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ pour laquelle il existe $\lambda > 0$ minorant toutes les valeurs propres de toutes les matrices $A(x)$ pour $x \in \Omega$.

Nous posons

$$L = -\sum_{ij} A_{ij}\partial_{ij}^2 + \sum_i b_i\partial_i + c \tag{33.105}$$

où $b_i, c \in C^0(\bar{\Omega})$.

Soit $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ telle que $Lu \geqslant 0$ sur Ω. Alors

[6] Cela est plus que dire que toutes les $A(x)$ son symétriques strictement définie positive.

ITEMooZNUVooNGPXVc

(1) *Si $c = 0$ alors*

$$\min_{\bar{\Omega}}(u) = \min_{\partial\Omega}(u). \tag{33.106}$$

EQooOJRWooIMemRN

ITEMooQOQIooJqTzdA

(2) *Si $c \geqslant 0$ alors*

$$\min_{\bar{\Omega}}(u) \geqslant \min_{\partial\Omega}(-u_-) \tag{33.107}$$

EQooGSXVooGUnRnt

où u_- est défini par

$$u_-(x) = \begin{cases} 0 & si\ u(x) \geqslant 0 \\ -u(x) & si\ u(x) \leqslant 0. \end{cases} \tag{33.108}$$

Démonstration. D'abord, vu que Ω est borné, la fermeture $\bar{\Omega}$ est compacte et u y atteint son minimum. De plus $\partial\Omega$ est également compact (borné et le complémentaire est ouvert parce que Ω est ouvert). Donc u y atteint également son minimum. Cela pour dire que les minimums écrits dans (33.106) et (33.107) ont un sens.

Pour (1).

(1) $\underline{Lu \geqslant \eta > 0}$

Nous supposons qu'il existe $\eta > 0$ tel que $(Lu)(x) \geqslant \eta$ pour tout $x \in \Omega$. Soit x_0 le point minimum sur $\bar{\Omega}$. Si $x_0 \in \Omega$ alors il est intérieur et $\partial_i u(x_0) = 0$ par la proposition 17.69. Dans ce cas nous avons

$$(Lu)(x_0) = (L'u)(x_0) > 0, \tag{33.109}$$

ce qui contredit le lemme 33.16. Nous en déduisons que le minimum de u sur $\bar{\Omega}$ n'est pas atteint dans Ω, mais sur $\partial\Omega$. Pour la définition de la frontière, voir 7.166. Ici nous avons $\bar{\Omega} \setminus \Omega = \partial\Omega$.

Cela prouve (33.106) dans ce cas.

(2) $\underline{Lu \geqslant 0 \text{ sur } \Omega}$

Nous prenons maintenant le cas général. Nous posons

$$u_{\gamma,\epsilon}(x) = u(x) - \epsilon e^{\gamma x_1}. \tag{33.110}$$

Nous avons[7]

$$L(e^{\gamma x_1}) = e^{\gamma x_1}\big(-A_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma\big). \tag{33.111}$$

Soit γ suffisamment grand pour que

$$\lambda\gamma^2 - \|b_1\|_{\bar{\Omega}}\gamma > 0. \tag{33.112}$$

Ici λ minore toutes les valeurs propres des $A(x)$ et nous notons que γ ne dépend pas de ϵ. En utilisant l'inégalité du lemme 8.232(3), pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\sum_{ij} A_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2, \tag{33.113}$$

ce qui donne avec $\xi = e_1$: $A_{11} \geqslant \lambda$, et même pour être plus précis : $A_{11}(x) \geqslant \lambda$ pour tout x. Ces inégalités donnent

$$-A_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma \leqslant -\lambda\gamma^2 + \|b_1\|_{\bar{\Omega}}\gamma < 0. \tag{33.114}$$

Nous avons donc

$$L(e^{\gamma x_1}) = e^{\gamma x_1}\big(-A_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma\big) \leqslant -\lambda\gamma^2 + \|b_1\|_{\bar{\Omega}}\gamma < 0. \tag{33.115}$$

EQooXCGQooLGMnvJ

Nous posons

$$\eta = \epsilon\big(\lambda\gamma^2 - \|b_1\|_{\bar{\Omega}}\gamma\big)\min_{\bar{\Omega}}(e^{\gamma x_1}), \tag{33.116}$$

où le minimum a un sens parce que Ω est borné. Nous avons $\eta > 0$.

C'est le moment de calculer ce que u_ϵ peut pour nous :

$$\begin{aligned} L(u_\epsilon) &= Lu - \epsilon L(e^{\gamma x_1}) && \text{(33.117a)} \\ &\geqslant -\epsilon L(e^{\gamma x_1}) && \text{(33.117b)} \\ &= -\epsilon e^{\gamma x_1}\big(-A_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma\big) && \text{(33.117c)} \\ &\geqslant -\epsilon e^{\gamma x_1}\big(\lambda\gamma^2 - \|b_1\|_{\bar{\Omega}}\gamma\big) && \text{(33.117d)} \\ &\geqslant \eta > 0. && \text{(33.117e)} \end{aligned}$$

SUBEQooIZTWooVjjITZ

SUBEQooHBALooSXxUeL

Justification :

[7] Nous abusons un peu de l'écriture parce que ce que nous calculons vraiment est $L\big(x \mapsto e^{\gamma x_1}\big)$.

- (33.117b) parce que $Lu \geqslant 0$.
- (33.117d) par (33.115).

La fonction u_ϵ est donc dans le cas précédent et nous avons

$$\min_{x\in\bar{\Omega}} \big(u(x) - \epsilon e^{\gamma x_1}\big) = \min_{x\in\partial\Omega} \big(u(x) - \epsilon e^{\gamma x_1}\big). \tag{33.118}$$

Mentionnons le fait que le choix fait de γ ne dépend pas de ϵ. Nous pouvons donc encore faire varier ϵ sans toucher à γ et en maintenant toutes les inégalités prouvées jusqu'ici.

Vu que l'expression $e^{\gamma x_1}$ est majorable sur $\bar{\Omega}$ nous avons convergence uniforme

$$u_\epsilon \xrightarrow{\|.\|_{\bar{\Omega}}} u \tag{33.119}$$

pour $\epsilon \to 0$.

Supposons qu'aucun point de $\partial\Omega$ ne réalise le minimum de u. Alors il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) > u(x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Mais comme $\partial\Omega$ est compact, il existe $\eta > 0$ tel que

$$u(x_0) < u(x) + \eta. \tag{33.120}$$

Soit ϵ tel que $\|u - u_\epsilon\|_{\bar{\Omega}} < \eta/2$. Nous avons

$$u(x_0) < u(x) - \eta \tag{33.121}$$

et donc aussi

$$u_\epsilon(x_0) < u(x_0) + \frac{\eta}{2} < u(x) - \frac{\eta}{2} < u_\epsilon(x), \tag{33.122}$$

ce qui signifierait que u_ϵ prend son minimum dans Ω. Or nous savons que ce n'est pas le cas.

Donc il existe un point de $\partial\Omega$ qui réalise le minimum de u.

Pour (2).
Supposons pour commencer que $u \geqslant 0$ sur Ω. Alors par continuité $u \geqslant 0$ sur $\bar{\Omega}$. Alors $u_- = 0$ et

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geqslant 0, \tag{33.123}$$

ce qui fait que l'inégalité (33.107) est évidente.

Nous supposons donc que l'ensemble

$$\Omega_- = \{x \in \Omega \text{ tel que } u(x) < 0\} \tag{33.124}$$

est non vide. Notons que c'est également un ouvert.

Soit $\bar{L}u = Lu - cu$. Vu que $c \geqslant 0$ et que $Lu \geqslant 0$ nous avons $\bar{L}u \geqslant 0$ sur Ω_-. Par le point (1) nous avons

$$\min_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x). \tag{33.125}$$

Mais le minimum de u est certainement atteint dans Ω_-, donc

$$\min_{x\in\bar{\Omega}_-} u(x) = \min_{x\in\bar{\Omega}} u(x). \tag{33.126}$$

Cela nous donne une première bonne égalité :

$$\min_{x\in\partial\Omega_-} u(x) = \min_{x\in\bar{\Omega}} u(x). \tag{33.127}$$

Nous pouvons la prolonger :

$$\begin{aligned}
\min_{x\in\bar{\Omega}} u(x) &= \min_{x\in\partial\Omega_-} u(x) && \text{(33.128a)}\\
&= \min_{x\in\partial\Omega_-} \big(-u_-(x)\big) && \text{(33.128b)}\\
&= \min_{x\in\partial\Omega_-\cap\partial\Omega} \big(-u_-(x)\big) && \text{(33.128c)}\\
&= \min_{x\in\partial\Omega} \big(-u_-(x)\big) && \text{(33.128d)}
\end{aligned}$$

SUBEQooUYFXooKKrHiF

SUBEQooKIHRooPiADmK

Justifications :

- Pour (33.128c) nous avons la décomposition

$$\partial\Omega_- = \big(\partial\Omega_- \cap \Omega\big) \cup \big(\partial\Omega_- \cap \partial\Omega\big). \tag{33.129}$$

  Or sur $\partial\Omega_- \cap \Omega$ nous avons $u(x) = 0$ et donc pas le minimum.

- Pour (33.128d). Sur $\partial\Omega$, le minimum est atteint dans la partie $\partial\Omega_-$ parce que le reste ne contient que des valeurs positives de u.

Cela prouve ce que nous voulions. □

Théorème 33.18 (Principe du maximum fort)**.**
Soit un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit une matrice A dont

- *A_{ij} est dans $C^0(\bar{\Omega})$*
- *$A(x)$ est symétrique strictement définie positive pour tout x.*
- *Il existe $\lambda > 0$ minorant toutes les valeurs propres des toutes les matrices $A(x)$ sur $\bar{\Omega}$.*

Soit $b_i, c \in C^0(\bar{\Omega})$ avec $c(x) \geqslant 0$ sur $\bar{\Omega}$.
Soit $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\sum_{ij} A_{ij}\partial_{ij}u(x) + \sum_i b_i\partial_i u(x) \geqslant 0 & \text{(33.130a)} \\ u(x) \geqslant 0 \ \forall x \in \partial\Omega. & \text{(33.130b)} \end{cases}$$

Alors $u \geqslant 0$ sur $\bar{\Omega}$.

Démonstration. Nous appliquons le lemme 33.17(2) :

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geqslant \min_{\partial\Omega}(-u_-). \tag{33.131}$$

Vu que $u(x) \geqslant 0$ sur $\partial\Omega$, nous avons $u_- = 0$ sur $\partial\Omega$ et donc $\min_{\bar{\Omega}} u \geqslant 0$. □

33.6 Quelques exemples

33.6.1 Un changement de variables

Soit l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{33.132}$$

EQooPGDPooTjiVhB

sur $\Omega =]0, \infty[\times \mathbb{R}$. Nous imposons la condition aux bords

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{33.133}$$

EQooJHPVooMkvQDe

Nous cherchons les solutions sous la forme

$$u(t, x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \tag{33.134}$$

Nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}xt^{-3/2}f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \tag{33.135}$$

ainsi que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}}f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \tag{33.136}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{t}f''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \tag{33.137}$$

En remettant le tout dans l'équation de départ et en simplifiant par $1/t$ (qui est permis parce que $t > 0$) :

$$-\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\frac{x}{\sqrt{t}} - f''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 0. \tag{33.138}$$

EQooCRKIooYNhvaA

Nous résolvons l'équation différentielle

$$\frac{z}{2}g'(z)+g''(z)=0 \tag{33.139}$$

EQooEFQPooGWVoUq

pour la fonction g de la variable réelle z. Cela fait, la réponse sera $f=g\circ z$ où z serait la fonction

$$z(x,t)=x/\sqrt{t}, \tag{33.140}$$

Pour résoudre (33.139) nous commençons par résoudre pour la dérivée $h=g'$, c'est-à-dire l'équation différentielle

$$\frac{z}{2}h(z)+h'(z)=0 \tag{33.141}$$

qui donne

$$\frac{h'(z)}{h(z)}=-z/2. \tag{33.142}$$

Une intégration fournit $\ln\big(h(z)\big)=-z^2/4+K$ et donc

$$h(z)=Ke^{-z^2/4} \tag{33.143}$$

et

$$g(z)=C+K\int_0^z e^{-s^2/4}ds. \tag{33.144}$$

Nous ne pouvons pas aller plus loin parce que nous ne sommes pas capables de calculer la primitive demandée. Nous laissons donc g sous cette forme et nous posons

$$u(x,t)=g(x/\sqrt{t}), \tag{33.145}$$

en pleine confiance du fait que cela soit une solution de l'équation aux dérivées partielles (33.132).

Nous devons fixer K et C de telle façon à respecter les conditions aux bords (33.133). D'abord écrivons aussi explicitement que possible la fonction u :

$$u(t,x)=K+C\int_0^{x\sqrt{t}} e^{-s^2/4}ds. \tag{33.146}$$

Il faut calculer $u(0,x)$ en termes de C et K. Pour cela nous calculons, pour un x fixé :

$$\lim_{t\to0^+}u(t,x)=K+C\lim_{t\to0^+}\int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-s^2/4}ds. \tag{33.147}$$

En utilisant un petit changement de variables sur l'intégrale gaussienne de l'exemple 14.308, et en remarquant que la fonction est symétrique,

$$\lim_{t\to0^+}u(t,x)=\begin{cases}K+C\sqrt{\pi} & \text{si } x>0\\ K-C\sqrt{\pi} & \text{si } x<0.\end{cases} \tag{33.148}$$

À résoudre :

$$\begin{cases} K+C\sqrt{\pi}=1 & \text{(33.149a)}\\ K-C\sqrt{\pi}=0. & \text{(33.149b)}\end{cases}$$

Solution : $C=1/2\sqrt{\pi}$ et $K=1/2$. Au final,

$$u(t,x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-s^2/4}. \tag{33.150}$$

Notons que cela donne une valeur pour $u(t,0)$:

$$u(t,0)=\frac{1}{2}. \tag{33.151}$$

Chapitre 34

Numérique

D'autres lectures agréables dans [821].

34.1 Introduction

À quels types de problèmes peut-on s'attendre lorsqu'on se lance dans du calcul numérique, et en particulier dans la résolution numérique d'équations (algébrique, différentielles ou aux dérivées partielles, etc.) ?

Quelques réflexions en vrac sur ce sujet.

(1) Les erreurs de représentation de nombres : troncature et propagation de décalages (*drift*),

(2) Erreur de compensation (*cancellation*),

(3) Conditionnement, stabilité : les réponses peuvent fortement dépendre des paramètres,

(4) Si on utilise une méthode itérative, comment savoir à quel moment on s'arrête ? Calculer la différence $|x_k - x_{k-1}|$ mène-t-il à une erreur de cancellation ?

(5) Lors d'une implémentation, les matrices des systèmes à résoudre sont souvent très grandes et/ou très creuses. Cela pose la question de la manière de les enregistrer.

(6) Pour la parallélisation, il faut faire attention au fait que parfois créer un nouveau processus demande plus de ressources que le mini-calcul qu'on voulait faire. Donc il ne faut pas toujours paralléliser tout ce qui est théoriquement parallélisable.

(7) Le fait que certaines méthodes sont non-déterministes (Monte-Carlo) mène à des problèmes pour les tests unitaires des implémentations.

34.2 Représentations numériques

Dans cette section, les séquences de chiffres écrites entre crochet sont à comprendre comme des séquences de chiffres qui représentent une quantité suivant un codage donné.

34.2.1 Entier relatif en complément à deux (binaire)

Si nous avons m bits pour coder un entier relatif, une idée serait de prendre le premier bit pour le signe (0 pour positif et 1 pour négatif) et les autres pour la valeur absolue. Deux inconvénients :

(1) Il y a deux codages pour le zéro, donc gaspillage.

(2) L'algorithme pour faire la somme passe mal. Par exemple pour faire $1 + (-1)$, le 1 est codé comme [001] et le -1 par [101] et la somme se ferait naïvement comme

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Donc le résultat est [110] qui s'interprète comme -2. Complètement faux.

Une solution est d'utiliser le **complément à deux**, qui est la façon usuelle de représenter des entiers signés.

Les entiers positifs se codent normalement, en laissant à zéro le premier bit (donc si nous disposons de m bits, nous codons sur $m-1$ bits).

Les entiers négatifs se codent en trois étapes.

- coder la valeur absolue
- inverser tous les bits (d'où le nom de « complément à deux »)
- soustraire 1.

Exemple 34.1.
Pour coder -1 nous faisons

- Nous codons 1 : [001]
- Nous inversons tous les bits : [110]
- Nous faisons -1 : [101].

△

Avec ce système, la somme passe bien : calculer $1+(-1)$ donne

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$$

La réponse est donc [110] qu'il faut interpréter via le complément à deux.

$$110 \xrightarrow{+1} 111 \xrightarrow{\text{complément}} 000. \tag{34.1}$$

Et ce dernier [000] s'interprète comme zéro.

Définition 34.2 (Entier signé en complément à deux[822])**.**
La suite de bits $[a_{m-1}\dots a_0]$ *s'interprète via la formule*

$$-a_{m-1}2^{m-1}+\sum_{i=0}^{m-2}a_i2^i. \tag{34.2}$$ EQooXFHKooHRXDmZ

Le premier bit donne effectivement le signe du nombre, mais l'interprétation d'un nombre n'est pas aussi simple que ce que l'on pourrait croire de prime abord.

Exemple 34.3 (Entier signé en 8 bits)**.**
Que pouvons nous faire avec 8 bits ? Le plus grand nombre est codé par [01111111] qui vaut $\sum_{k=0}^{6}2^k = 2^7-1=127$. (avez-vous utilisé la somme (1.888) ?)

Le plus petit nombre codable en 8 bits n'est pas [11111111] mais bien [10000000] (cela est plus clair en regardant la formule (34.2) qu'en tentant de suivre la construction du complément à deux) qui signifie $-2^7=-128$.

Nous pouvons donc coder tous les nombres de -128 à 127. △

Plus généralement un système qui codes des entiers signés en N bits utilisant le complément à deux peut coder de $-(2^{N-1})$ à $2^{N-1}-1$.

34.4 (Le dépassement)**.**
Que se passe-t-il lorsque nous commettons un dépassement ? Calculons sur 3 bits la somme $[011]+[001]$ qui revient à ajouter 1 au nombre le plus grand :

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}$$

qui signifie $-2^2=-4$. Lors d'un dépassement, nous retombons automatiquement sur le plus petit.

Ce phénomène est bien connu des personnes qui programment sans faire attention dans certains languages de programmation qui ne font pas attention à votre place.

Définition 34.5 (Représentation en virgule fixe)**.**
Soit x un réel. On définit sa ***représentation en virgule fixe*** *par*

$$x = \{[x_n x_{n-1} ... x_0, x_{-1} ... x_{-m}], b, s\} \tag{34.3}$$

avec $b \in \mathbb{N}, b \geqslant 2$, $s \in \{0, 1\}$ et $x_j \in \mathbb{N}, x_j < b$ suivant la formule

$$x = (-1)^s \sum_{j=-m}^{n} x_j . b^j. \tag{34.4}$$

34.2.2 Représentation en virgule flottante

DEFooLYONooBNskty

Définition 34.6 (Représentation en virgule flottante[823])**.**
La ***représentation en virgule flottante normalisée*** *en base b d'un nombre est la donnée de*

(1) Un bit s pour le signe

(2) Un entier non signé *q de e chiffres pour l'exposant*

(3) Une suite de chiffres $[a_1 \dots a_m]$ pour la mantisse.

Ces données s'interprètent via la formule

$$\mathrm{fl}(s, q, [a_1, \dots, a_m]) = (-1)^s \sum_{j=1}^{m} b^j a_j \times b^{q-d} \tag{34.5}$$

EQooAGWJooRuBbBn

où $d = b^{e-1}$ est le ***décalage****.*

Une idée à retenir est que l'exposant est un entier non signé parce qu'il est plus simple d'introduire un décalage dans la formule (34.5) que de compliquer l'écriture de l'exposant.

34.2.3 Simple précision, IEEE-754

En écriture binaire, la représentation en virgule flottante est un peu différente parce qu'il y a une idée supplémentaire ; la simple précision que nous allons voir maintenant n'est donc pas un cas particulier de 34.6 avec $b = 2$.

Nous commençons par une description informelle de la précision simple avant de donner la définition. La représentation en **précision simple** d'un nombre se fait sur 32 bits répartis comme suit :

(1) 1 bit pour le signe,

(2) 8 bits pour l'exposant interprété comme nombre entier non signé

(3) 23 bits pour la mantisse

Soit le triple

$$\big(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]\big) \tag{34.6}$$

Dans le cas générique, l'idée est de donner 24 bits pour la mantisse, mais en gardant en tête le fait que de toutes façons, le premier bit doit être 1, sinon il suffirait de décaler, c'est-à-dire changer l'exposant. Par conséquent la mantisse ne reçoit que 23 bits ; il y a un « 1 » sous-entendu en première position. Donc la mantisse $[a_1, \dots, a_{23}]$ est à lire comme le nombre

$$1, a_1 \dots a_{23} = 1 + \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}. \tag{34.7}$$

Exemple 34.7.
La mantisse $[011100 \dots 0]$ signifie $1,0111 = 1 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$. △

Cela pour justifier la formule

$$\mathrm{sp}\big(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]\big) = (-1)^s \big(1 + \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}\big) 2^{q-127}. \tag{34.8}$$

Notons :

(1) Le « 1+ » dans la parenthèse correspond au 1 implicite en première position de la mantisse.

(2) Il y a un décalage de 127 dans l'exposant, parce que q est un entier non signé.

Notons que cette règle du 1 implicite dans la mantisse empêche d'écrire le nombre 0, et ne permet pas d'écrire des nombres franchement petits parce que le 1 implicite est en *première* position dans la mantisse.

D'où l'idée de donner une règle particulière lorsque l'exposant vaut 0. Lorsque l'exposant est $q = 0$, alors nous ne considérons pas de 1 implicite dans la mantisse, et le décalage de l'exposant est -126 au lieu de -127. D'où la formule

$$\mathrm{sp}(s, q = 0, [a_1 \dots a_{23}]) = (-1)^s 2^{-126} \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}. \tag{34.9}$$

En particulier, si $q = 0$ et $a = [0 \dots 0]$, nous avons le nombre zéro exact (il y a deux possibilités pour le code).

Enfin, nous avons des cas particuliers lorsque l'exposant est maximum, c'est-à-dire lorsque $q = [1111\,1111] = 2^8 - 1 = 255$. Dans ce cas, le nombre codé est soit $+\infty$ soit NaN. Nous posons

$$\mathrm{sp}(s, q = 255, a = 0) = +\infty \tag{34.10}$$

et

$$\mathrm{sp}(s, q = 255, a \neq 0) = NaN. \tag{34.11}$$

Il y a en réalité plusieurs valeurs différentes de NaN, mais nous n'entrons pas dans ces détails[824].

DEFooEIOZooYLDVjs

Définition 34.8 (Représentation en simple précision (binaire))**.**
La représentation en ***précision simple*** *d'un nombre se fait sur* 32 *bits répartis comme suit :*

(1) 1 *bit pour le signe,*

(2) 8 *bits pour l'exposant interprété comme nombre entier non signé*

(3) 23 *bits pour la mantisse*

Un nombre est représenté par un triple

$$\big(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]\big) \tag{34.12}$$

Selon que l'exposant $q - d$ soit égal à 0, $2^8 - 1 = 255$ ou autre chose, les règles d'interprétation sont différentes. Il y a donc trois cas.

Exposant q générique[825] *Si $q \neq 0$ et $q \neq 255$ alors le nombre est* ***normalisé****. La règle de lecture est alors*

$$\mathrm{sp}\big(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]\big) = (-1)^s \big(1 + \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}\big) 2^{q-127}. \tag{34.13}$$

EQooEFEKooIrUaKj

Exposant q égal à 0 *Le nombre est dit* ***dénormalisé*** *et la règle de lecture est*

$$\mathrm{sp}\big(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]\big) = (-1)^s 2^{-126} \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}. \tag{34.14}$$

EQooRTBFooIplydi

Exposant q égal à 255 *La règle de lecture est alors au cas par cas ou à peu près.*

(1) $\mathrm{sp}(s, q = 255, a = 0) = +\infty$.
(2) $\mathrm{sp}(s, q = 255, a \neq 0) = \mathrm{NaN}$.

Vous pouvez jouer avec la simple précision dans [826].

Exemple 34.9 (Plus petit normalisé)**.**
Pour faire un nombre normalisé, il faut au minimum $q = 1$. En prenant $a_j = 0$ nous obtenons le plus petit nombre normalisé possible en simple précision. La formule (34.13) donne

$$\mathrm{sp}(1, q = 1, a = 0) = 2^{1-127} = 2^{-126} \simeq 1.17549435082229 \times 10^{-38}. \tag{34.15}$$

△

Exemple 34.10 (Plus grand normalisé)**.**
L'exposant q ne peut pas être maximum, sous peine de tomber dans les règles spéciales de $+\infty$ ou NaN. Donc $q = [1111\,1110] = 2^8 - 2 = 254$. En ce qui concerne la mantisse, il faut la prendre maximale, c'est-à-dire $a_j = 1$ pour tout j. Nous avons alors le nombre

$$\mathrm{sp}(1, q = 254, a = [1 \dots 1]) = \big(1 + \sum_{j=1}^{23} 2^{-j}\big)2^{254-127} = (1 - \frac{1}{2^{24}})2^{128} \tag{34.16a}$$

$$= 3.40282346638528859811704183484516925440 \times 10^{38} \tag{34.16b}$$

EQooFRPYooRnxiFP

où nous avons utilisé la somme (1.888) (et Sage pour le dernier calcul). △

Notons ceci avec Sage :

```
SageMath Version 7.0, Release Date: 2016-01-19
Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
Type "help()" for help.

sage: A=(1- (1/2**24)  )*2**(128)
sage: type(A)
<type 'sage.rings.rational.Rational'>
```

tex/sage/sageSnip003.sage

La précision du nombre donné en (34.16b) aurait été embarrassante si le type avait été un nombre en simple précision. Précision technique : en Python, le type `int` n'a pas de limite supérieure à part la mémoire.

Exemple 34.11 (Plus petit non nul dénormalisé)**.**
Pour être dénormalisé il faut $q = 0$ (ce qui est toutefois assez logique si nous voulons un petit nombre), et pour ne pas être nul, il faut une mantisse non nulle. Donc $a = [0 \dots 01]$. La formule (34.14) donne alors

$$\mathrm{sp}(s = 0, q = 0, a = [0 \dots 01]) = 2^{-126}2^{-23} = 2^{-149} \simeq 1.40129846432482 \times 10^{-45}. \tag{34.17}$$

△

EXEMooRHENooGwumoA

Exemple 34.12 (Plus grand dénormalisé)**.**
Pour être dénormalisé il faut toujours $q = 0$, mais cette fois nous prenons la plus grande mantisse possible :

$$\mathrm{sp}(s = 0, q = 0, a = [1 \dots 1]) = 2^{-126} \sum_{j=1}^{23} 2^{-j} = 2^{-126}(1 - 2^{-23}) = 1.17549421069244 \times 10^{-38} \tag{34.18}$$

△

Notons ceci avec Sage :

```
sage: B=2**(-126)*(1-2**(-23))
sage: A=2**(-126)
sage: n(A-B)
1.40129846432482e-45
```

tex/sage/sageSnip004.sage

Vu que $2^{-23} \simeq 1.2 \times 10^{-7}$, approximer la parenthèse par 1 donne une faute sur la septième décimale, ce qui est visible en simple précision.

34.3 Problèmes pour écrire des nombres

DEFooRUHVooGgoyiP

Définition 34.13.
*L'**erreur relative** commise en remplaçant un nombre réel x par une valeur approchée $\hat{x}$ est définie par*

$$\epsilon_x := \left| \frac{x - \hat{x}}{x} \right|. \tag{34.19}$$

L'erreur relative n'est pas influencée par l'ordre de grandeur de x. En effet, l'ordre de grandeur de $\hat{x}$ est certainement la même que celle de x, dans la majorité des cas sans problèmes. Du coup si $x' = 200x$ alors $\hat{x'} \simeq 200\hat{x}$ et le 200 se simplifie.

Le nombre de chiffres significatifs correct dans l'approximation est donné par $-\log_{10}(\epsilon_x)$. La partie entière de ce nombre est le nombre de chiffres tout à fait exacts et la partie décimale donne une idée sur le fait que le chiffre suivant est plus ou moins bien.

Remarque 34.14.
Si nous voulons donner $x \in \mathbb{R}$ à un ordinateur, nous sommes soumis à deux erreurs :

(1) D'abord, vu que nous ne pouvons pas taper sur le clavier toutes les décimales de x, nous faisons une **erreur de troncature**.

(2) L'ordinateur devant convertir cela en base deux, il commet une seconde erreur, dite **erreur d'assignation**.

34.3.1 Troncature : la base

Supposons que nous voulions écrire le nombre (écrit ici en base 10)

$$0.4567894251 \tag{34.20}$$

de façon plus facile à lire, on peut demander de ne laisser que t chiffres significatifs. Disons $t = 3$.

Technique de troncature On garde 3 chiffres significatifs : 0.456. Facile.

Technique d'arrondi Vu que le premier qu'on supprime est un 7, le dernier qu'on garde est majoré de 1 : on écrit 0.457.

Que faire si le premier chiffre rejeté est un 5 ? En première approximation, nous pouvons prendre la règle suivante : si le premier chiffre rejeté est un 5, il faut augmenter de 1 de dernier chiffre gardé parce qu'il y a presque certainement encore un chiffre non nul derrière.

Remarque 34.15.
Les ordinateurs travaillent tous en mode d'arrondi.

Exemple 34.16.
Si on doit entrer le nombre 0.38358546 dans un ordinateur qui ne garde que 3 chiffres significatifs, il faut taper 0.384 au clavier (erreur classique dans les exercices). △

34.3.2 Troncature : le drift

Soit une machine ne pouvant retenir que 3 chiffres significatifs et effectuant les arrondis vers le haut lorsque le chiffre à éliminer est un 5. Nous notons $\oplus$ et $\ominus$ les opérations d'addition et soustraction avec arrondis[827]. Les égalités comprenant plus de trois chiffres significatifs sont des égalités au sens de la machine. Nous écrirons donc sans états d'âme :

$$1 \oplus 0.555 = 1.555 = 1.56. \tag{34.21}$$

Considérons la suite numérique

$$\begin{cases} x_0 = 1.00 & \text{(34.22a)} \\ x_n = (x_{n-1} \ominus y) \oplus y & \text{(34.22b)} \end{cases}$$

avec $y = -0.555$.

Nous avons

$$x_1 = (1 \oplus 0.555) \ominus 0.555 = 1.56 \ominus 0.555 = 1.005 = 1.01 \tag{34.23}$$

et ensuite

$$x_2 = (1.01 \oplus 0.555) \ominus 0.555 = 1.565 \ominus 0.555 = 1.57 \ominus 0.555 = 1.015 = 1.02. \tag{34.24}$$

Et ainsi de suite. La suite est donc croissante alors que la définition nous donnerait envie d'avoir $x_n = x_0$ pour tout n.

Remarque 34.17.
En réalité, cette suite se stabilise à $x_n = 10$ pour tout n à partir de $n = 845$. En effet,

$$(10 \oplus 0.555) \ominus 0.555 = 10.555 \ominus 0.555 = 10.6 \ominus 0.555 = 10.045 = 10. \tag{34.25}$$

Le fait est qu'à ce moment, l'erreur de troncature est assez loin dans les décimales pour que le premier chiffre négligé soit un "0" au lieu d'un "5".

Notons toutefois que cette stabilité n'est pas là pour nous rassurer parce qu'elle n'en est pas moins complètement fausse.

La règle de troncature adoptée dans Sage est d'arrondir au nombre pair le plus proche lorsque le premier nombre à négliger est un 5. Donc 12.5 s'arrondit à 12 plutôt que 13.

Exemple 34.18.
Soient les expressions (algébriquement égales) :

(1) $A = x(x + 1)$

(2) $B = x^2 + x$

Nous savons que

$$x = \text{fl}(x) = 10^{-30} \tag{34.26}$$

et

$$1 = \text{fl}(1) \tag{34.27}$$

parce que pour 1 et 10^{-30}, il n'y a pas d'erreurs d'assignation.

En précision simple, $10^{-30} + 1 = 1$ parce qu'en précision simple, il n'y a que 7 ou 8 chiffres significatifs[1].

Nous avons $A = 10^{-30}$, mais x^2 donne un `underflow` parce que 10^{-60} ne peut pas être représenté en précision simple. En pratique, beaucoup de logiciels en font 0. Dans ce cas, en réalité B donne effectivement 10^{-30} après avoir fait $x^2 + x = 0 + x = 10^{-30}$. △

34.3.3 Quelques bonnes règles

(1) Si on a plusieurs nombres à additionner ou soustraire, il vaut mieux commencer par sommer ou soustraire ceux dont on sait qu'ils ont le même ordre de grandeur. Il n'y a donc pas tout à fait « associativité » des erreurs.

(2) Les opérations délicates sont l'addition et la soustraction. La multiplication et la division sont sans dangers, à part l'erreur de dépassement du maximum. Dans une multiplication, on perd au pire quelques chiffres significatifs, mais certainement les derniers, pas les premiers.

34.3.4 Erreur de "cancellation"

Lorsque deux nombres sont de même ordre de grandeur, avec plusieurs nombres significatifs identiques, la cancellation est le fait que, suite à la soustraction, tous les chiffres significatifs ou presque se sont simplifiés et qu'il ne reste plus que des chiffres non significatifs.

Exemple 34.19 ([828])**.**
Sur une machine ne gardant que 4 chiffres significatifs, faire

$$0.5678 \times 10^6 - 0.5677 \times 10^6 = 0.0001 \times 10^6 = 0.1000 \times 10^3. \tag{34.28}$$

Le fait est que les trois derniers zéros ne sont pas significatifs, mais maintenant la machine nous fait croire qu'ils le sont.

Une autre façon de voir ce problème est d'imaginer qu'il faille calculer la différence

$$0.5678\,289798 \times 10^6 - 0.5677\,3136907 \tag{34.29}$$

sur cette machine. Certes la machine nous autorise à avoir 4 chiffres significatifs, donc au moment d'entrer les nombres nous perdons un beau paquet de chiffres. Mais au moment de faire la différence, nous perdons (presque) tout le reste. Donc là où nous pouvions espérer avoir 4 chiffres significatifs de la différence, nous n'en avons que 1. Les trois derniers zéros de la réponse (0.1000×10^3) sont faux. △

[1] Erreur de « relation normale ».

REMooRQIJooNLdAZE

Remarque 34.20.
L'erreur de cancellation provoque des chiffres significatifs faux, mais ne provoque pas de faute dans l'*ordre de grandeur* des réponses[2]. Donc si nous voulons nous assurer que a et b sont égaux « à erreur numérique près », le test

$$|a-b|<\epsilon \tag{34.30}$$

est valide, malgré l'erreur de cancellation qui ne manquera pas de se produire dans le calcul de la différence.

Exemple 34.21.
Soit à résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a,b,c\neq 0$ et $b^2-4ac>0$. Solution :

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{34.31}$$

Supposons que $|4ac|\ll b^2$ avec tout de même pas tellement petit qu'on se perd dans la précision. Bref, on suppose que seules quelques dernières décimales de b^2-4ac sont différentes de zéro.

On a :

$$\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{\tilde{b}^2}=|\tilde{b}| \tag{34.32a}$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{34.32b}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{34.32c}$$

Si $b>0$, nous avons une erreur de cancellation dans x_2 parce qu'on fait la différence entre deux nombres presque égaux. Donc x_2 mal calculé. Par contre x_1 est bien calculé.

Si par contre $b<0$, c'est le contraire.

Avec $a=10^{-3}$, $b=0.8$, $c=-1.2\times 10^{-5}$. À la main nous obtenons : $x_1=-800$, $x_2=1.5\times 10^{-5}$, et un ordinateur se tromperait …

```
1
2
3  SageMath Version 7.0, Release Date: 2016-01-19
4  Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
5  Type "help()" for help.
6
7 sage: f(x)=10**(-3)*x**2+0.8*x-1.2*10**(-5)
8 sage: solve(f(x)==0,x)
9 [x == -1/50*sqrt(400000030) - 400, x == 1/50*sqrt(400000030) - 400]
10 sage: numerical_approx(-1/50*sqrt(400000030))
11 -400.000015000000
12 sage: numerical_approx( 1/50*sqrt(400000030) - 400  )
13 0.0000149999996779115
```

tex/sage/sageSnip001.sage

Donc Sage ne tombe pas dans le piège. △

Comment résoudre ce problème ? Ou, autre façon de poser la question : comment Sage a fait pour résoudre le problème ?

Utilisons les relations coefficients-racines :

$$x_1+x_2=-b/a \tag{34.33a}$$

$$x_1x_2=c/a \tag{34.33b}$$

La première lie les deux racines par des opérations de addition et soustractions, et donc n'est pas intéressantes. La seconde est bien. Si nous connaissons x_1, nous calculons

$$x_2=\frac{c}{ax_1}. \tag{34.34}$$

Quitte à redéfinir x_1 et x_2, la solution bien calculée est :

$$x_1=\frac{-b-\operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{34.35}$$

[2] Est-ce bien vrai, cela ?

Exemple 34.22.
Nous considérons :

$$f(x) = \cos(x + \delta) - \cos(x). \tag{34.36}$$

Cela a une erreur de cancellation lorsque $|\delta| \ll |x|$. On élimine l'erreur de cancellation par

$$f(x) = -2\sin(\delta/2)\sin\left(x + \frac{\delta}{2}\right). \tag{34.37}$$

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 34.23
Pourquoi la condition pour avoir l'erreur est $\delta \ll x$ et non simplement $\delta \ll 1$?

△

Exemple 34.24.
Pour

$$f(x) = \sqrt{x + \delta} - \sqrt{x}. \tag{34.38}$$

On fait la coup du binôme conjugué :

$$f(x) = \frac{\delta}{\sqrt{x + \delta} + \sqrt{x}}. \tag{34.39}$$

Plus d'erreur de cancellation, vu qu'au dénominateur nous avons une somme de deux positifs. △

Les erreurs de cancellation ne se résolvent pas en augmentant la précision des nombres donnés.

Exemple 34.25 (Dans la vie réelle)**.**
La préparation de l'exemple 17.45 nous a porté à calculer la différence entre $\exp(x)$ et $f_{30}(x)$ où f_{30} est censée être une bonne approximation de l'exponentielle. Des erreurs de cancellation sont donc à craindre.

Et en effet, le code suivant produit un résultat non déterministe :

```
1 f=1/152444172305856930250752000000*x^28 + 1/10888869450418352160768000000*x↩
    ^27 + 1/155112100433309859840000000*x^25 + 1/3102242008666197196800000*x↩
    ^24 + 1/258520167388849766400000*x^23 + 1/51090942171709440000*x^21 + ↩
    1/1216451004088320000*x^20 + 1/121645100408832000*x^19 + ↩
    1/355687428096000*x^17 + 1/10461394944000*x^16 + 1/1307674368000*x^15 + ↩
    1/6227020800*x^13 + 1/239500800*x^12 + 1/39916800*x^11 + 1/362880*x^9 + ↩
    1/20160*x^8 + 1/5040*x^7 + 1/120*x^5 + 1/12*x^4 + 1/6*x^3 + x - cos(x) +↩
     2 -exp(x)
2 a=numerical_approx(10)
3 print(f(a))
```

tex/sage/sageSnip016.sage

Voir la question ici :
https://ask.sagemath.org/question/37946/undeterministic-numerical-approximation/

△

34.3.5 Calcul d'une dérivée

Pour calculer la dérivée de f en a, il est loisible d'utiliser la formule

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \tag{34.40}$$

Le numérateur est alors sujet à une erreur d'absorption dans le calcul de $a + h$ et ensuite une erreur de cancellation dans le calcul de la différence.

En utilisant la formule

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} \tag{34.41}$$

nous pouvons espérer avoir une erreur de cancellation plus petite.

34.3.6 Erreur d'absorption

L'addition d'un nombre avec un nombre très différent peut faire perdre de l'information sur le plus petit. Par exemple avec 4 chiffres significatifs,

$$0.5678 \oplus 0.0001237 = 0.5679 \tag{34.42}$$

où nous avons perdu presque toute l'information du petit nombre.

Une situation particulièrement ennuyeuse est celle où justement c'est le petit nombre qui nous intéresse parce que le grand est censé se simplifier :

$$(0.0001327 \oplus 0.5678) \ominus 0.5678 = 0.5679 \ominus 0.5678 = 0.0001 \tag{34.43}$$

qui ne possède qu'un seul chiffre significatif correct alors que voyant le calcul, la réponse aurait pu être trouvée.

Moralité : si certains manipulations algébrique peuvent faire apparaitre des simplifications avant de passer le calcul à la machine, il est bon de les effectuer.

34.4 Conditionnement et stabilité

DEFooYIFAooSJbMkC

Définition 34.26.
Soit F une fonction à valeurs réelles définie sur $X \times D$ où X et D sont des espaces vectoriels réels normés. Le problème de la recherche des solutions de

$$F(x,d) = 0 \tag{34.44}$$

*est dit **stable** autour de $d_0 \in D$ si*

ItemProbStableB

(1) la solution $x = x(d)$ existe et est unique pour tout d ;

(2) Pour tout $\eta > 0$, et pour tout d_0, il existe un nombre $K > 0$ tel que $\|d - d_0\| < \eta$ entraine $\|x(d) - x(d_0)\| \leqslant K \|d - d_0\|$.

La seconde condition est le fait que x soit lipschitzienne[3] sur un voisinage de d_0.

ExooXJONooTAYZVc

Exemple 34.27 (Stabilité de la différence)**.**
Prenons le problème qui consiste à calculer la différence entre deux nombres : $x = a - b$. Cela se traduit par

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \big(x,(a,b)\big) &\mapsto x - a + b. \end{aligned} \tag{34.45}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \big|x(a,b) - x(a',b')\big| &= |a - b - a' + b'| && \text{(34.46a)} \\ &\leqslant |a - a'| + |b - b'| && \text{(34.46b)} \\ &= \|(a,b) - (a',b')\|_1 && \text{(34.46c)} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la norme $\|.\|_1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par la proposition 10.59 sur les équivalences de normes, le nombre $K = \sqrt{2}$ fonctionne pour toute valeurs de η.

La problème de la différence est donc un problème stable. △

Exemple 34.28 (Stabilité de la multiplication)**.**
Si a est fixé, le problème de calculer ab (b est la donnée) est stable. En effet ce problème est donné par la fonction $F(x,b) = x - ab$, dont la solution est $x(b) = ab$. Nous avons donc

$$\big|x(b) - x(b')\big| = |ab - ab'| = |a||b - b'|. \tag{34.47}$$

La constante de Lipschitz de ce problème est donc $|a|$. △

Définition 34.29.
Le nombre

$$K_{abs}(d_0,\eta) := \sup_{d \text{ tel que } |d_0 - d| < \eta} \frac{\|x(d) - x(d_0)\|_X}{\|d - d_0\|_D} \tag{34.48}$$

EqDefAABSOLU

[3] Définition 12.342.

est appelé le ***conditionnement absolu*** *du problème autour de d_0.*

Soit $F(x,d)=0$ un problème stable de conditionnement absolu $K_{abs}(d,\eta)$. Le conditionnement relatif est défini par

$$K_{rel}(d,\eta) := K_{abs}(d,\eta)\frac{\|d\|_D}{\|x(d)\|_X}. \tag{34.49}$$

DEFEQooSXDBooYbvGrC

Le problème est dit ***bien conditionné*** *près de d si $K_{rel}(d,\eta)$ est petit.*

Exemple 34.30 (Mauvais conditionnement de la différence)**.**
Reprenons le problème de la différence, mais en fixant a. Nous avons donc $x(b)=a-b$ et le conditionnement absolu est

$$\sup\frac{|x(b)-x(b_0)|}{|b-b_0|}=1 \tag{34.50}$$

Le conditionnement relatif est :

$$K_{rel}(b_0,\eta)=\frac{|b|}{|a-b|}. \tag{34.51}$$

Et donc le problème est mal conditionné autour de a.

Autrement dit, si a' est un nombre proche de a, calculer la différence $a-a'$ est un problème mal conditionné. △

Exemple 34.31 (Bon conditionnement de la multiplication)**.**
Pour le problème $F(x,b)=x-ab$ nous avons

$$K_{abs}=\sup_{b'}\frac{|ab-ab'|}{|b-b'|}=|a|. \tag{34.52}$$

Et aussi

$$K_{rel}=a\frac{|b|}{|ab|}=1. \tag{34.53}$$

Le conditionnement relatif du problème de la multiplication est donc toujours 1. Il est donc toujours un problème bien conditionné. △

Ne pas confondre :

Le conditionnement provient du problème lui-même.

La stabilité provient de l'algorithme de résolution.

Exemple 34.32 (Un problème mal conditionné)**.**
Le système

$$\begin{cases} 2.1x+3.5y=8 & \text{(34.54a)}\\ 4.19x+7.0y=15 & \text{(34.54b)}\end{cases}$$

Solution : $x=100$, $y=-57.714285\ldots$ (périodique)

Perturbons : nous remplaçons 4.19 par 4.192. L'erreur relative est : 4.77×10^{-4}.

Solution : $\bar{x}=125$, $\bar{y}=-72.714285\ldots$, avec donc erreur relative de 0.26. Autrement dit : l'erreur relative sur la solution est grande même avec une petite erreur relative sur la donnée.

C'est un problème mal conditionné.

Le fait est que c'est une intersection de deux droites presque parallèles. Donc effectivement une petite perturbation d'une des deux droites donne une grande perturbation du point d'intersection.

Le fait est qu'un ordinateur effectue *toujours* une perturbation, au moins de l'ordre 10^{-16} pour ne fut-ce que représenter les nombres. C'est-à-dire une perturbation sur les six nombres définissant le système. Il n'y a donc pas d'espoir d'obtenir un algorithme donnant une bonne réponse. △

Un résultat pratique pour étudier le conditionnement d'un problème est le suivant.

CorConditionnementNormeNabla

Corolaire 34.33.
Soit $x=x(d)$ un problème stable. Supposons $\mathbb{D}$ de dimension finie, supposons que U est ouvert dans $\mathbb{D}$. Supposons encore $x\colon U\to\mathbb{R}$ différentiable en d_0. Alors quand η est petit, on a

$$K^{\eta}_{abs}(d_0)\sim\|\nabla x(d_0)\|. \tag{34.55}$$

LemITCxqyS

Lemme 34.34.
Tout problème de la forme $x=x(d)$ avec $d\in\mathbb{R}$ et $x\in C^1(\mathbb{R})$ est stable.

Démonstration. Il faut démontrer qu'une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifie automatiquement la condition (2) de la définition de la stabilité. Pour cela, remarquons qu'une fonction C^1 possède une dérivée continue, et donc bornée sur tout compact[4]

Prenons $\eta > 0$ et $d_0 \in \mathbb{R}$ et puis un d tel que $|d - d_0| < \eta$. Par le théorème des bornes atteintes, la fonction x' est bornée sur l'intervalle $[d_0 - \eta, d_0 + \eta]$. Appelons K un majorant de x' sur cet intervalle. La fonction

$$x(d) = x(d_0) + K|d - d_0| \tag{34.56}$$

majore $x(d)$, et donc on a

$$\big|x(d) - x(d_0)\big| \leqslant K|d - d_0|. \tag{34.57}$$

Attention : vérifier si ce raisonnement est correct avec $d_0 > d$, et adapter au besoin. □

ExRZrOeoi

Exemple 34.35.
Un exemple de problème stable de la forme $x = x(d)$ avec $d \in \mathbb{R}$ et $x \in C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$.

La fonction

$$x(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \geqslant 0 \\ x & \text{si } d < 0 \end{cases} \tag{34.58}$$

est continue, mais pas C^1 (non dérivable en $x = 0$). La dérivée est partout bornée par 1, et donc le problème est stable.

Un autre exemple très classique serait de prendre $x(d) = |d|$. Dans ce cas, on peut prendre n'importe que η et $K = 1$. Le calcul est que

$$|x(d) - x(d_0)| < K|d - d_0| \tag{34.59a}$$
$$\big||d| - |d_0|\big| < |d - d_0|. \tag{34.59b}$$

Cette dernière inéquation est correcte, comme on peut le voir en mettant au carré les deux membres.

△

PIluknK

Exemple 34.36.
Un exemple de problème instable de la forme $x = x(d)$ avec $d \in \mathbb{R}$ et $x \in C^0(\mathbb{R})$.

Un exemple assez classique de fonction dont la dérivée n'est pas bornée sans pour autant que la fonction aie un comportement immoral[5] est $x \mapsto \sqrt{x}$. Afin d'avoir une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, nous regardons la fonction

$$x(d) = \sqrt{|d|}. \tag{34.60}$$

Si nous considérons maintenant $d_0 = 0$ et n'importe quel η, nous avons

$$\frac{|x(d) - x(d_0)|}{|d - d_0|} = \frac{\sqrt{d}}{d} = \frac{1}{\sqrt{d}}. \tag{34.61}$$

Il n'est pas possible de trouver un K qui majore ce rapport. Le problème est donc mal conditionné.

Attention : dans ce calcul nous avons supposé $d > 0$. Pensez à adapter au cas $d < 0$. △

Exemple 34.37 (Problème bien conditionné avec algorithme instable)**.**
Soit à calculer

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx \tag{34.62}$$

avec $n \geqslant 0$. Par partie, nous obtenons :

$$I_n = 1 - nI_{n-1}. \tag{34.63}$$

D'autre part, $I_0 = \frac{e-1}{e}$, $I_1 = \frac{1}{e}$. Puis par récurrence, c'est tout en main.

Du côté de l'ordinateur, nous lui donnons forcément une approximation de I_1, parce que nous lui donnons une approximation de e. Soit l'erreur ϵ_1 sur I_1.

Sans démonstration :

Lemme 34.38.
Nous avons $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

[4] Un compact est un ensemble fermé et borné, typiquement un intervalle du type $[a, b]$.
[5] Penser à $x \mapsto x \sin(1/x)$.

Mais numériquement, il n'est pas possible de rester longtemps sous ϵ_1 parce que nous n'espérons pas avoir une erreur plus petite que ça. Donc à partir du moment où $I_n < \epsilon_1$, les valeurs sont toutes complètement fausses. Cela est le mieux que l'on puisse espérer. Mais la réalité est pire.

En réalité, en lançant le calcul sur un ordinateur, les valeurs sont même croissantes avec n à partir d'un certain moment.

On peut étudier l'erreur et montrer que l'erreur est donnée par :

$$\epsilon_n = (-1)^{n-1} n! \epsilon_1. \tag{34.64}$$

Mais comme la factorielle est tellement forte que c'est sans espoir d'aller loin en essayant très fort de donner une petite erreur sur ϵ_1.

△

Il existe heureusement un algorithme stable pour cette intégrale. La formule est :

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n). \tag{34.65}$$

Si nous savons un I_N avec N grand, cette formule donne les I_i avec $i = N, N-1, \dots, 2$. Posons donc $I_N = a \in \mathbb{R}$ n'importe comment. Donc ϵ_N est grand. Mais il se trouve que l'erreur sur ϵ_1 est donnée par

$$\epsilon_1 = \frac{(-1)^{N-1}}{N!}\epsilon_N. \tag{34.66}$$

Donc même en prenant vraiment n'importe quoi pour I_N, nous obtenons de bonnes approximations pour I_i avec les petits i. Même avec $I_{20} = 1000$ (qui est complètement faux), nous trouvons énormément de chiffres significatifs corrects pour I_1.

34.4.1 Comment choisir et penser le K ?

La formule (34.48) contient une formule qui ressemble étrangement à la dérivée. La stabilité d'un problème est très liée à la dérivée de F. La stabilité et la dérivée ne sont pas les mêmes choses, mais il n'est pas mauvais de penser au K de la stabilité comme la dérivée. Ou plus précisément : le supremum de la dérivée.

Un fil conducteur du lemme 34.34 et des exemples 34.35, 34.36 est que l'on a un K qui fonctionne lorsque la dérivée est bornée sur l'intervalle $]d_0 - \eta, d_0 + \eta[$. Dans le cas où ce supremum existe, le prendre en guise de K fonctionne souvent.

Il faut cependant parfois faire acte d'imagination. La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. Il n'empêche que $K = 1$ fait fonctionner la définition de la stabilité. Remarquez que $K = 1$ est le supremum de la dérivée là où elle existe.

À partir du moment où c'est clair que le K est le supremum de la dérivée, on comprend pourquoi c'est le gradient qui arrive dans le corolaire 34.33. En effet, le gradient indique la direction de plus grande pente. C'est donc bien dans cette direction qu'il faut chercher la « plus grande dérivée ».

Proposition 34.39.
Pour le problème stable $x = x(d)$ avec $x \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a

$$K_{abs}(d) \sim \|dx_d\| \tag{34.67}$$

où dx_d désigne la différentielle de x en d et la norme est la norme opérateur.

34.5 Un peu de points fixes

SECooWUVTooMhmvaW

34.5.1 Choix de la fonction à point fixe

Pour l'équation $f(x) = 0$, il existe une infinité de fonctions g pour lesquelles l'équation est équivalente à $x = g(x)$.

Exemple : $f(x) = x^2 - 2 - \ln(x)$, nous pouvons faire

(1) $x = x^2 - 2 - \ln(x) + x$

(2) Poser $x^2 = 2 + \ln(x)$ et donc

$$x = -\sqrt{2 + \ln(x)} \tag{34.68a}$$

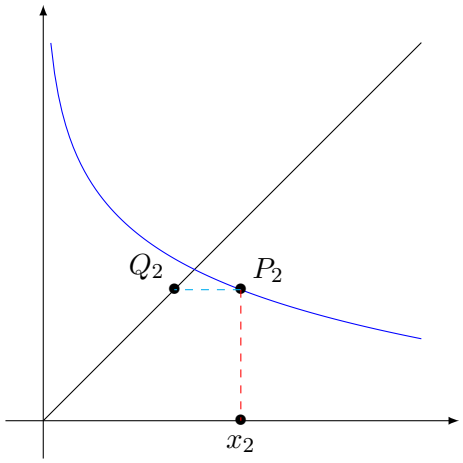
$$x = \sqrt{2 + \ln(x)}. \tag{34.68b}$$

(3) Ou encore
$$x = \frac{2 + \ln(x)}{x} \tag{34.69}$$
où nous savons déjà que $x \neq 0$ parce que $x = 0$ n'est pas dans le domaine de f.

(4) Ou par l'exponentielle :
$$x = e^{x^2 - 2}. \tag{34.70}$$

Dans tous ces cas nous pouvons construire une suite (x_n) en posant un nombre arbitraire pour x_0 et ensuite la récurrence
$$x_{n+1} = g(x_n). \tag{34.71}$$

Graphiquement, la solution de l'équation est l'intersection entre les courbes $y = x$ et $y = g(x)$. Un petit dessin pour montrer la convergence :



Attention : cette méthode ne converge pas toujours. Parfois elle converge de façon monotone, et parfois pas. Le choix de la fonction g qui fait $x = g(x)$ peut énormément changer la vitesse de convergence.

Théorème 34.40 (Condition suffisante pour existence d'un point fixe)**.**
Une fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$ admet au moins un point fixe dans $[a, b]$.

Théorème 34.41 (Condition suffisante pour l'unicité)**.**
Soit f continue sur $[a, b]$ avec $g(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$. Supposons qu'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ nous ayons $|g'(x)| \leqslant k$ alors

(1) La fonction g possède un unique point fixe dans $[a, b]$.

(2) Pour tout $x_0 \in [a, b]$, tous les termes de la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ sont dans $[a, b]$.

(3) Ladite suite (x_n) converge vers le point fixe.

Théorème 34.42.
Soit f continue sur $[a, b]$ avec $g(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$. Supposons

(1) qu'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ nous ayons $|g'(x)| \leqslant k$ et

(2) g est p fois dérivable sur $[a, b]$.

(3) $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \ldots = g^{(p-1)}(\alpha)$ et $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$ où α est l'unique point fixe.

Alors la suite (x_n) converge avec un ordre p.

Exemple 34.43.
Nous reprenons
$$f(x) = x^2 - 2 - \ln(x). \tag{34.72}$$
Et nous voulons résoudre $f(x) = 0$. Graphiquement c'est l'intersection entre $y = x^2 - 2$ et $y = \ln(x)$. Il est vite tracé de savoir qu'il y a deux solutions : $\alpha_1 \in [0, 1]$ et $\alpha_2 \in [\sqrt{2}, 2]$.

Déjà un petit problème : l'intervalle $[0, 1]$ ne va pas parce que f n'y est pas continue. Un petit raffinement d'analyse nous fournit $\alpha_1 \in [e^{-2}, 1]$.

Nous avons au moins les fonctions de points fixes suivantes :

$$g_1(x) = \sqrt{2 + \ln(x)} \tag{34.73a}$$
$$g_2(x) = e^{x^2-2}. \tag{34.73b}$$

Pour la première, il y avait un $\pm$ qui a été négligé parce que nous savons que les deux solutions cherchées sont positives. Travaillons avec la première. D'abord

$$g_1'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}}. \tag{34.74}$$

Nous avons $\lim_{x\to e^{-2}} g_1'(x) = +\infty$. Il ne sera donc pas possible de trouver $0 < k < 1$ tel que $|g'(x)| \leqslant k$. Tentons quand même la méthode :

$$x_0 = 0.5 \tag{34.75}$$

Il se fait que cela est plus proche de α_1 que de α_2. Mais en réalité la suite converge vers α_2.

Passons à la seconde méthode.

$$g_2'(x) = 2xe^{x^2-2}. \tag{34.76}$$

Sur l'intervalle $[e^{-2}, 1]$, g_2' est croissante et prend toutes ses valeurs dans $[e^{-2}, 1]$. Nous pouvons prouver que

$$|g_2'(x)| \leqslant 2e^{-1} < 1. \tag{34.77}$$

Donc poser $k = 2e^{-1}$ fait fonctionner la proposition. Donc quel que soit le x_0 pris dans cet intervalle, nous aurons une suite convergente vers un point fixe à l'intérieur de l'intervalle. C'est-à-dire convergente vers α_1.

Cela est un exemple de problème pour lequel changer de fonction g change réellement la vie. △

34.5.2 Convergence quadratique

DEFooSUTRooAcXXjj

Définition 34.44.
*Une suite (x_n) a une convergence **quadratique** vers α si elle converge vers α et si il existe un C tel que pour tout n nous ayons*

EQooMWBIooLGashp
$$\|x_{n+1} - \alpha\| \leqslant C\|x_n - \alpha\|^2. \tag{34.78}$$

Il est bien entendu possible de parler de convergence quadratique si la relation (34.78) a lieu seulement à partir d'un certain indice.

Le lemme suivant donne l'importance du choix de point de départ lorsqu'on utilise une méthode itérative dont la convergence est quadratique.

LEMooLQMAooICcmrn

Lemme 34.45.
Soit une suite $x_n \to \alpha$ de convergence quadratique. Si $\|x_0 - \alpha\| \leqslant r$ alors

EQooVYRIooTxetPn
$$\|x_n - \alpha\| \leqslant \frac{1}{C}(Cr)^{2^n} \tag{34.79}$$

Démonstration. Nous pourrions directement prouver la formule (34.79) par récurrence, mais nous allons la reconstruire un peu. Nous cherchons

EQooZCZVooHqpkqs
$$\|x_n - \alpha\| \leqslant C^{k(n)}r^{2^n}. \tag{34.80}$$

Nous avons les inégalités

$$\|x_{n+1} - \alpha\| \leqslant C\|x_n - \alpha\|^2 \tag{34.81a}$$
$$\leqslant CC^{2k(n)}r^{2^{n+1}} \tag{34.81b}$$
$$= C^{2k(n)+1}r^{2^{n+1}} \tag{34.81c}$$

d'où nous voyons que la fonction k doit vérifier

$$\begin{cases} k(0) = 0 & \text{(34.82a)} \\ k(n+1) = 2k(n) + 1 & \text{(34.82b)} \end{cases}$$

La première équation est l'hypothèse $\|x_0 - \alpha\| \leqslant r$ comparée à la formule (34.80). Il est vite vérifié que $k(n) = 2^n - 1$. D'où le résultat. □

Si le point de départ est choisi de façon à avoir $Cr < 1$ alors nous avons là un très bon majorant parce qu'il s'agit d'un majorant convergeant très rapidement vers zéro. Si au contraire $Cr > 1$ alors ce majorant ne sert à rien.

34.46.
Le fait d'avoir une convergence quadratique signifie que le nombre décimales correctes double (environ) à chaque itération, dans n'importe quelle base. En effet supposons que x_n ait k décimales correctes ; cela signifie que $|x_n-\alpha|\sim 10^{-k}$. Donc

$$|x_{n+1}-\alpha|\lessapprox M10^{-2k}. \tag{34.83}$$

Cela est le double de décimales correctes de $|x_n-\alpha|$, moins l'ordre de grandeur de M.

Pour la méthode de bissection, le nombre de décimales augmente de 1 à chaque itération, mais seulement en base 2. En base 10, de façon générique[6] il faut entre 3 et 4 itérations pour avoir une décimale de plus.

NTooVXLXooXlAGEq

34.47 (Condition d'arrêt[829])**.**
D'autre part, lorsqu'une méthode a une convergence quadratique, nous avons un test d'arrêt. Pour ce voir, nous avons la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{C|x_n-\alpha|^2}{|x_n-\alpha|}=0. \tag{34.84}$$

Cette limite est alors également valable sans les valeurs absolues et si nous soustrayons $x_n-\alpha$ au numérateur, la limite devient -1 :

$$-1=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-\alpha}. \tag{34.85}$$

Ou encore

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{x_n-\alpha}=1. \tag{34.86}$$

Cela a pour conséquence que si n est grand,

(1) x_{n+1} a le même ordre de grandeur que $x_n-\alpha$.

(2) x_n-x_{n+1} et $x_n-\alpha$ ont le même signe.

Donc si nous voulons une approximation de α avec une erreur ϵ, il suffit d'arrêter le calcul lorsque $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\epsilon$. Et ce faisant nous savons de plus si l'approximation est par excès ou par défaut.

34.5.3 Convergence

PROPooRPHKooLnPCVJ

Proposition 34.48 (Convergence d'une méthode de point fixe[829])**.**
Soit $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1 et α un point fixe attractif[7] *de g. Soit k tel que $|g'(\alpha)|<k<1$ et δ tel que $\|g'\|_{B(\alpha,\delta)}<k$.*

Alors

ITEMooOQKMooTRSvUo

(1) La fonction g est k-contractante[8] *sur $B(\alpha,\delta)$.*

ITEMooFTAQooPBsBcR

(2) Nous avons $g\big(B(\alpha,\delta)\big)\subset B(\alpha,\delta)$.

ITEMooFSOAooKlcxih

(3) Pour tout $x_0\in B(\alpha,\delta)$ la suite $x_{n+1}=g(x_n)$ converge vers α et

$$|x_n-\alpha|\leqslant|x_0-\alpha|k^n. \tag{34.87}$$

Si de plus $g'(\alpha)=0$ et g est de classe C^2 alors nous avons convergence quadratique (définition 34.44).

Démonstration. Vu que α est un point fixe attractif de g nous pouvons considérer un k tel que $|g'(\alpha)|<k<1$. Et comme g est de classe C^1, la fonction g' est continue et donc bornée sur toute boule du type $\overline{B(\alpha,\delta)}$. Soit δ le plus grand nombre tel que $\|g'\|_{\overline{B(\alpha,\delta)}}\leqslant k$. Nous notons $I=\overline{B(\alpha,\delta)}$ pour cette valeur de δ.

Pour tout $x\in I$ nous avons, en utilisant le théorème des accroissements finis 12.216(2) : SUBEQooYXLHooSCnnRA

$$\begin{aligned}|g(x)-\alpha|&=|g(x)-g(\alpha)| &(34.88a)\\ &\leqslant\sup_{t\in I}|g'(t)||x-\alpha| &(34.88b)\\ &\leqslant k|x-\alpha| &(34.88c)\\ &<\delta &(34.88d)\end{aligned}$$

[6] C'est-à-dire sauf coup de malchance ou coup de chance.
[7] Définition 17.29.
[8] Définition 17.33

parce que $k < 1$ et $|x - \alpha| \leqslant \delta$. Par conséquent $g(x) \in B(\alpha, \delta)$. Cela prouve le point (2). Pour le point (1), soient $x, y \in B(\alpha, \delta)$ et

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \sup_{a \in I} |g'(a)||x - y| \leqslant k|x - y|. \tag{34.89}$$

Pour le point (3) nous avons $|g(x_n) - \alpha| \leqslant k|x_n - \alpha|$, c'est-à-dire

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant k|x_n - \alpha|. \tag{34.90}$$

Le résultat annoncé s'obtient par récurrence sur n.

En ce qui concerne la convergence quadratique, c'est du Taylor (proposition 12.481). Développons $g(x_n)$ autour de $g(\alpha)$:

$$g(x_n) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2}(x_n - \alpha)^2 \epsilon(x_n - \alpha) \tag{34.91}$$

avec $\lim_{t \to 0} \epsilon(t) = 0$. En posant $C = \frac{1}{2} \sup_{t < \delta} |\epsilon(t)|$ nous avons $|g(x_n) - g(\alpha)| \leqslant C|x_n - \alpha|^2$, c'est-à-dire

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant C|x_n - \alpha|^2. \tag{34.92}$$

□

Ce corolaire est une paraphrase de la proposition 34.48. Il en retient seulement les points intéressants en pratique.

CORooHKZCooEXRzcW

Corolaire 34.49.
Soit α une solution de l'équation $x = g(x)$, avec g continue sur un voisinage de α et dérivable dans l'intérieur. Nous supposons que

$$|g'(\alpha)| < 1. \tag{34.93}$$

Alors il existe un rayon δ tel que si $x_0 \in B(\alpha, \delta)$, la suite (x_n) converge vers α.

Certes cette proposition demande moins d'hypothèses, mais en réalité, il ne donne pas de vrais moyens de choisir un point de départ x_0. Avec les deux théorèmes précédents, nous pouvions prendre x_0 n'importe où dans $[a, b]$. Le fait est que pour choisir x_0 nous pouvons tracer et donner à la main un x_0 proche de ce qui semble être α. Si ça ne converge pas, il faut donner un x_0 plus proche. La proposition nous assure que si nous jouons bien à choisir x_0 très proche, la suite finira par converger.

Notons que le corolaire 34.49 a encore l'inconvénient de demander de calculer $g'(\alpha)$ alors que α est inconnu. La résolution de l'inéquation $|g'(x)| < 1$ nous donne un certain nombre d'intervalles dans $\mathbb{R}$.

Soient I_n les intervalles solutions de l'inéquation. Si $\alpha \in I_n$ alors la méthode converge. Sinon, c'est pas garanti. En tout cas nous ne devons pas savoir réellement α pour appliquer le théorème. Il suffit de savoir que α est dans un des I_n.

34.6 Méthode de Newton

SECooIKXNooACLljs

L'objectif de la méthode de Newton est d'évaluer une racine α de l'équation $f(x) = 0$ lorsque nous avons déjà une approximation x_0 de la racine α.

C'est la méthode de Newton qui est à l'origine de la suite de la proposition 1.527 donnant une suite dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers $\sqrt{A}$.

DEFooXSOQooAnWqKM

Définition 34.50.
*Le nombre α est une **racine simple** de l'équation $f(x) = 0$ si $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$. Le nombre α est une **racine multiple** d'ordre r de $f(x) = 0$ si*

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0 \tag{34.94}$$

et $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Exemple 34.51.
La fonction $x \mapsto x^3$ admet une racine d'ordre 3 en $x = 0$. △

34.6.1 « Justification » par la formule de Taylor

Soit une fonction f continue et dérivable sur $[a,b]$. Soit α une racine de f et x_n une de ses approximations. Nous notons l'erreur θ et nous avons $\alpha = x_n + \theta$. Du coup nous avons $f(x_n + \theta) = f(\alpha) = 0$.

Écrivons la série de Taylor du théorème 12.471 autour de x_n : il existe une fonction $\epsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$ telle que

EQooOPUBooYaznay
$$f(\alpha) = f(x_n + \theta) = f(x_n) + \theta f'(x_n) + \theta^2\epsilon(\theta). \tag{34.95}$$

Nous isolons le θ du terme d'ordre 1 en nous souvenant que le membre de gauche est nul :

$$\theta = -\frac{f(x_n) - \theta^2\epsilon(\theta)}{f'(x_n)} \tag{34.96}$$

Vu que $\alpha = x_n + \theta$, nous pouvons écrire

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n) + \theta^2\epsilon(\theta)}{f'(x_n)}. \tag{34.97}$$

Il est donc raisonnable de poser

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{34.98}$$

en espérant que cela soit une meilleure approximation de α que x_n.

En tout cas l'erreur sur x_{n+1} est

$$\alpha - x_{n+1} = x_n + \theta - x_n + \frac{f(x_n) + \theta^2\epsilon(\theta)}{f'(x_n)} = \theta + \frac{f(x_n) + \theta^2\epsilon(\theta)}{f'(x_n)}, \tag{34.99}$$

qui ne doit pas être fondamentalement plus grand que θ dès que θ est petit, surtout que si x_n est une approximation de α, nous pouvons espérer que $f(x_n)$ soit également petit. Là où les choses peuvent déraper en grand, c'est si $f'(x_n)$ est petit.

Cette méthode de Newton ne converge pas toujours. Le pire est lorsque par malheur il y a une bosse pas loin de la racine. Alors il y a un risque de tomber sur $f'(x_{n+1}) = 0$ ou en tout cas très proche de zéro. Dans ce cas le point x_{n+2} est envoyé très loin.

34.6.2 « Justification » par points fixes

SUBSECooIBLNooTujslO
Nous savons que pour résoudre $f(x) = 0$ par une méthode de point fixe, il y a de nombreux choix possibles de fonctions g telles que $g(x) = x$ donne la même solution que $f(x) = 0$. Soit α une solution de $f(x) = 0$ et cherchons une fonction g de la forme

EQooYVFIooJXnJXa
$$g(x) = x - kf(x). \tag{34.100}$$

Nous savons par la proposition 34.48 que la fonction g donne une convergence quadratique lorsque $g'(\alpha) = 0$. Pour la forme (34.100) nous avons $g'(\alpha) = 1 - kf'(\alpha)$, ce qui nous donne l'idée de poser $k = \frac{1}{f'(\alpha)}$.

Le fait est que $f'(\alpha)$ n'est pas connu, mais nous pouvons l'approximer par $f'(x)$ lorsque x est proche de α. D'où l'idée de considérer la fonction

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{34.101}$$

et donc la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ c'est-à-dire

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{34.102}$$

Dès que x_n est proche de α, sous l'hypothèse (raisonnable par continuité) que $f'(x_n)$ soit proche de $f'(\alpha)$, la méthode devrait donner une convergence quadratique.

Remarque 34.52.
Cette justification par points fixes n'est pas vraiment différente de celle par Taylor parce que Taylor est utilisé dans la preuve de la proposition 34.48.

Définition 34.53 (Méthode de Newton)**.**
*La **méthode de Newton** pour la fonction f est la suite définie par récurrence*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{34.103}$$

Cette définition ne précise pas la valeur de x_0, ni de condition d'arrêt.

34.6.3 Convergence de la méthode de Newton

THOooDOVSooWsAFkx

Théorème 34.54 (Convergence quadratique de la méthode de Newton[829]).
Soit f une fonction continue vérifiant $f(\alpha)=0$ et $f'(\alpha)\neq 0$. Nous considérons la fonction

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{34.104}$$

que nous supposons être de classe C^2.

Si C est une majoration de $\|g''\|$ sur un intervalle contenant α, alors en posant $\delta=1/C$ nous avons

ITEMooVXSKooWCVWQc

(1) La boule $B(\alpha,\delta)$ est préservée par g : $g\big(B(\alpha,\delta)\big)\subset B(\alpha,\delta)$.

ITEMooZPSXooGgbfhG

(2) Pour tout $x_0\in B(\alpha,\delta)$ nous avons convergence quadratique vers α de la suite définie par $x_{n+1}=g(x_n)$.

ITEMooZCXZooCjeWPl

(3) Nous avons l'estimation

EQooFAIPooDpoNWK

$$|x_n-\alpha|\leqslant\frac{1}{C}\big(C|x_0-\alpha|\big)^{2^n} \tag{34.105}$$

où C est la constante de la définition de convergence quadratique.

Démonstration. Nous commençons par calculer la dérivée de g :

$$g'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}, \tag{34.106}$$

d'où nous déduisons que $g'(\alpha)=0$. Ensuite nous utilisons abondamment la formule des accroissements finis (théorème 12.340) en commençant par

EQooZITHooEbGVKG

$$|g(t)-g(\alpha)|\leqslant\|g'\|_{[t,\alpha]}|t-\alpha| \tag{34.107}$$

où par $\|f\|_A$ nous entendons la norme uniforme de f sur A, c'est-à-dire $\|f\|_A=\sup_{x\in A}\|f(x)\|$. Note : nous écrivons $[t,\alpha]$, mais ça pourrait être $[\alpha,t]$.

Si $x\in[t,\alpha]$ alors

$$\begin{aligned}|g'(x)|&=|g'(x)-g'(\alpha)| &(34.108a)\\ &\leqslant\|g''\|_{[x,\alpha]}|x-\alpha| &(34.108b)\\ &\leqslant\|g''\|_{[x,\alpha]}|t-\alpha| &(34.108c)\\ &\leqslant\|g''\|_{[t,\alpha]}|t-\alpha|. &(34.108d)\end{aligned}$$

En particulier, $\|g'\|_{[t,\alpha]}\leqslant\|g''\|_{[t,\alpha]}|t-\alpha|$, et nous pouvons continuer les majorations (34.107) :

$$|g(t)-g(\alpha)|\leqslant\|g''\|_{[t,\alpha]}|t-\alpha|^2. \tag{34.109}$$

La fonction g étant de classe C^2, la dérivée seconde g'' est bornée (nous supposons déjà travailler sur un compact contenant α). Soit C une borne. Nous sommes en mesure de prouver le point (1) avec $\delta=1/C$. En effet si $t\in B(\alpha,1/C)$ alors

$$|g(t)-\alpha|=|g(t)-g(\alpha)|\leqslant C|t-\alpha|^2\leqslant C\frac{1}{C^2}=\frac{1}{C}, \tag{34.110}$$

ce qui prouve que $g(t)\in B(\alpha,1/C)$.

Le point (2) se prouve de la même manière : si $x_n\in B(\alpha,1/C)$ alors

$$|x_{n+1}-\alpha|=|g(x_n)-g(\alpha)|\leqslant C|x_n-\alpha|^2, \tag{34.111}$$

ce qui est bien la convergence quadratique.

La majoration du point (3) s'obtient par récurrence sur n. Pour $n=0$, la relation (34.105) devient $|x_0-\alpha|\leqslant|x_0-\alpha|$ qui est vraie. Ensuite par la convergence quadratique et la récurrence,

$$|x_{n+1}-\alpha|\leqslant C|x_n-\alpha|^2\leqslant C\big[\frac{1}{C}(C|x_0-\alpha|)^{2^n}\big]^2=\frac{1}{C}\big[C|x_0-\alpha|\big]^{2^{n+1}}. \tag{34.112}$$

□

34.55.
Dans les cas pratiques, nous commençons souvent par résoudre l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie. Au moment où nous sommes assez proche de la solution nous commençons Newton.

La raison est que la dichotomie fonctionne toujours : nous allons toujours nous approcher de la solution. Si par contre le point de départ est mal choisi, la méthode de Newton peut envoyer n'importe où, y compris très loin de la solution.

La proposition suivante nous indique que dans le cas d'une fonction convexe, le choix de point de départ de la méthode de Newton n'est pas tellement crucial parce qu'ils sont tous bons. De plus la convergence se faisant de façon décroissante (si on part de la droite), nous savons que le résultat sera une approximation par excès de α.

PROPooVTSAooAtSLeI

Proposition 34.56 (Newton dans le cas convexe)**.**
Soit f de classe C^2 et une racine α telle que $f'(\alpha) > 0$. Soit $b > \alpha$ tel que f soit convexe sur $[\alpha, b]$.

Alors pour tout $x_0 \in [\alpha, b]$ la suite de la méthode de Newton est

(1) décroissante

(2) reste dans $[\alpha, b]$

(3) converge vers α.

Démonstration. Nous savons par la proposition 17.83(2) que la fonction f' est croissante, et par hypothèse $f'(\alpha) > 0$, donc sur $[\alpha, b]$ nous avons $f' > 0$. Par conséquent, nous avons aussi $f > 0$ sur $[\alpha, b]$.

Le graphe de f est au dessus de la tangente de f en $x = x_n$ (proposition 17.89). Si nous nommons t_x la fonction qui donne la tangente en x nous avons $t_{x_n}(\alpha) < 0$ parce que $f(\alpha) = 0$. Par conséquent

$$t_{x_n}(x) = 0 \tag{34.113}$$

pour $\alpha < x < x_n$. Cela prouve que $x_{n+1} \in [\alpha, b]$, et que (x_n) est une suite décroissante

Étant donné que (x_n) est une suite décroissante dans le compact $[\alpha, b]$, elle est convergente. Notons β sa limite. Nous avons la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{34.114}$$

En passant à la limite $n \to \infty$ nous avons l'équation

$$\beta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}. \tag{34.115}$$

Vu que $f(x) > 0$ sur $]\alpha, b]$ nous avons automatiquement $\beta = \alpha$. □

34.6.4 Racine carrée par la méthode de Newton

Nous avons vu dans la proposition 1.527 une suite dont la limite était $\sqrt{A}$.

EXooDLSVooMHPpcl

Exemple 34.57.
Utilisation de la méthode de Newton pour calculer $\sqrt{A}$. La première idée serait d'appliquer le théorème 34.54 à la fonction $f(x) = x - \sqrt{A}$. Je vous laisse voir pourquoi ça ne marche pas.

Nous faisons $f(x) = x^2 - A$. Le calcul donne :

$$g(x) = x - \frac{x^2 - A}{2x} = \frac{1}{2}\big(x + \frac{A}{x}\big). \tag{34.116}$$

Cela explique la formule (1.770). △

34.6.5 Formalisation de l'algorithme

La méthode de Newton consiste a exprimer la solution x de $f(x) = 0$ avec $f \in C^1(\mathbb{R})$ comme limite d'une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par la formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{34.117}$$

où x_0 est arbitraire.

Si on veut exprimer cela en termes d'algorithmes, nous disons que l'algorithme de Newton est donné par la suite de problèmes

$$F_n(x_{n+1}, x_n, f) = x_{n+1} - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{34.118}$$ EqFPourNewtonUn

La donnée du problème est la fonction f, et rien que elle.

Plus précisément, une fois que la fonction f est donnée, il existe une infinité de problèmes : pour chaque $a \in \mathbb{R}$ nous avons le problème

$$G_a(x_n, f) = x - a + \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{34.119}$$

La méthode de Newton consiste à sélectionner une partie de ces problèmes de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_0 = G_{x_0} & \text{(34.120a)} \\ F_n = G_{x_n}. & \text{(34.120b)} \end{cases}$$

Le problème F_0 fournit un nombre x_1 qui nous permet de sélectionner le problème G_{x_1} qui va fournir le nombre x_2, etc.

Au moment de calculer le conditionnement de F_n, nous ne devons pas voir x_{n-1} comme fonction de x_0 et de la donnée f. Il ne faut donc pas dériver à travers les x_n.

Proposition 34.58.
Si une racine est multiple, alors l'ordre de convergence de la méthode de Newton est 1.

Voici un algorithme possible :

```python
def Newton(f,x0,toll,maxit):
    fp=f.derivative()
    n=0
    x=x0
    diff=toll+1
    while abs(diff)>toll and n<maxit:
        n=n+1
        diff=-f(x)/fp(x)
        x=x+diff
    return x,n
```

tex/frido/codeSnip_2.py

Commentaires :

(1) Notons que dans un langage vraiment numérique comme Matlab, il faut passer f' en argument.

(2) Dans le `while` il faudrait mettre $x_{n+1} - x_n$ (en valeur absolue), mais cette différence est aussi utilisée pour calculer x_{n+1} donc on la calcule une seule fois.

(3) Il faudrait faire une vérification sur $f(x_n) \neq 0$. Il n'y a pas tellement de choix que de changer le point initial.

34.6.6 Caractéristiques

L'algorithme de Newton a les caractéristiques suivantes :

(1) Pour résoudre le problème numéro n, il faut avoir résolu le problème numéro $n-1$.

(2) Aucune des solutions x_n aux problèmes intermédiaires n'est une solution au problème de départ (à moins d'un coup de chance).

(3) Étant donné que la donnée du problème F_n est la fonction f de départ, nous avons $d_m = d_n = d$ pour tout m et n.

THOooMACHooLofCVu

Théorème 34.59.
Soit f continue sur un voisinage de α, racine simple. Alors il existe un voisinage de α de rayon σ tel que pour tout x_0 dans ce voisinage, la méthode converge vers α avec ordre de convergence $p = 2$.

Donc dès qu'on a continuité autour de la solution recherchée, il suffit de prendre x_0 assez proche pour que tout se passe bien. Cela se fait par localisation des racines, par exemples en traçant la fonction avec un bon niveau de zoom. Le fait est qu'on cherche disons 3 décimales à la main (travail sur ordinateur et graphique) et Newton donne les 20 décimales suivantes à la vitesse de la lumière.

34.6.7 Exemple de la racine carrée

Nous allons nous lancer dans un exemple : le cas de la racine carrée. Soit à calculer une approximation numérique de $\sqrt{2}$. Il s'agit d'une racine de la fonction $f(x) = x^2 + 2$. La fonction de la méthode de Newton associée est :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^2 - 2}{2x}. \tag{34.121}$$

Cherchons un intervalle autour de $\sqrt{2}$ sur lequel nous avons convergence de la méthode de Newton. Cela s'obtient grace à la proposition 34.48 qui nous informe qu'il suffit de trouver un intervalle autour de $\sqrt{2}$ sur lequel $|g'(x)| \leqslant 1$.

Nous avons

$$g'(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}, \tag{34.122}$$

et nous cherchons à résoudre $|g'(x)| \leqslant 1$. D'abord $g'(x) = 1$ n'a aucune solutions alors que $g'(\sqrt{2}) = 0$. Donc nous avons $g'(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Par contre l'équation $g'(x) = -1$ a des solutions : $x = \pm\sqrt{2/3}$.

Nous avons donc convergence de la méthode de Newton pour x_0 dans un intervalle de la forme

$$[\sqrt{2/3}, \sqrt{2} + \ldots] \tag{34.123}$$

où les les trois points représentent l'expression qu'il faut pour que ce soit symétrique autour de $\sqrt{2}$. La valeur précise n'a pas tellement d'importance parce, vu que nous sommes en train de chercher $\sqrt{2}$, il est peu probable que nous ayons déjà en main une bonne approximation de nombres du type $\sqrt{2/3}$.

Proposition 34.60.
La méthode de Newton pour la fonction $f(x) = x^2 - 2$ converge vers $\sqrt{2}$ pour toute valeur de départ dans $]0, +\infty[$.

Démonstration. La fonction $f(x) = x^2 - 2$ est convexe et $f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} > 0$. Donc la méthode converge vers $\sqrt{2}$ pour tout $x_0 \geqslant \sqrt{2}$ par la proposition 34.56.

Si par contre $x_0 \in]0, \sqrt{2}[$ nous avons

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 2}{2x_0}. \tag{34.124}$$

En posant $h(x) = (x^2 + 2)/2x$ et en résolvant $h'(x) = 0$ nous trouvons $x = \sqrt{2}$. Et là, $h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Donc $h(x)$ est toujours plus grand que $\sqrt{2}$ pour tout $x \in]0, \sqrt{2}[$.

En d'autres termes, si $x_0 \in]0, \sqrt{2}[$ alors $x_1 \geqslant \sqrt{2}$ et nous retombons dans le premier cas. □

34.6.8 Si multiplicité

Supposons que α soit de multiplicité r (définition 34.50).

Cela se remarque en voyant que la méthode de Newton demande plutôt 20 itérations que 5. Le problème que cela pose est que chaque itération, les évaluations provoquent des erreurs. Donc moins d'itérations, c'est mieux.

Nous pouvons modifier la formule avec

$$x_{n+1} = x_n - r\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{34.125}$$

Il est possible de prouver que cette suite est à nouveau à convergence quadratique.

Ou alors on pose $F(x) = f^{(r-1)}(x)$ et α est une racine simple pour F. Donc faire Newton pour F est à nouveau quadratique, tout en donnant la même solution parce que $F(\alpha) = 0$ et $F'(\alpha) \neq 0$.

La seconde façon est bien parce que le théorème de localisation fonctionne 34.59

Et si r n'est pas connu ?

Il est toujours possible de faire $r = 2$ puis $r = 3$ et caetera jusqu'au moment où l'on remarque que le nombre d'itérations baisse un grand coup.

Mais ça demande beaucoup de calculs. Le mieux est de changer de méthode.

34.6.9 Et la dérivée ?

Un des problèmes de la méthode de Newton est que l'on doit pouvoir calculer la dérivée. Typiquement, il faut savoir f de façon analytique. Si cela n'est pas possible, nous pouvons changer de méthode et utiliser la méthode des sécantes décrite en 34.9.

34.6.10 Méthode de Newton : le cas général

LemXdObnV

Lemme 34.61.
Soient A et B deux matrices inversibles telles que la matrice $(A+\epsilon B)$ soit inversible pour tout ϵ assez petit. Alors il existe une matrice $X(\epsilon)$ telle que

$$(A+\epsilon B)^{-1} = (A^{-1} + \epsilon X) \tag{34.126}$$

et telle que $\lim_{\epsilon\to 0} X(\epsilon) = -A^{-1}BA^{-1}$.

Démonstration. Le candidat matrice X est relativement simple à trouver en écrivant

$$(A+\epsilon B)(A^{-1}+\epsilon X) = \mathbb{1} + \epsilon AX + \epsilon BA^{-1} + \epsilon^2 BX. \tag{34.127}$$

En imposant que cela soit $\mathbb{1}$, nous trouvons

$$X(\epsilon) = -(A+\epsilon B)^{-1}BA^{-1}. \tag{34.128}$$

La matrice $X(\epsilon)$ étant un inverse à droite de $(A+\epsilon B)$, son déterminant est non nul et X est inversible. Par conséquent elle est également inversible au sens usuel. Le calcul de la limite est direct :

$$\lim_{\epsilon\to 0} -(A+\epsilon B)^{-1}BA^{-1} = A^{-1}BA^{-1} \tag{34.129}$$

parce que l'inverse est une fonction continue sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. □

Remarque 34.62.
Un calcul naïf nous permet de trouver le même résultat de façon plus heuristique. En effet un développement usuel (dans $\mathbb{R}$) est

$$\frac{1}{a+\epsilon b} = \frac{1}{a} - \frac{\epsilon b}{a^2} + \dots \tag{34.130}$$

Si nous récrivons cela avec des matrices, nous écrivons (attention : passage heuristique !) :

$$(A+\epsilon B)^{-1} = A^{-1} - \epsilon A^{-1}BA^{-1} + \dots \tag{34.131}$$

Notons le choix de généraliser b/a^2 par $a^{-1}ba^{-1}$. Dans les réels les deux écritures sont équivalentes, mais pas dans les matrices.

Étudions si $A^{-1} - \epsilon A^{-1}BA^{-1}$ est bien un inverse à ϵ^2 près de $(A+\epsilon B)$:

$$(A+\epsilon B)(A^{-1}+\epsilon A^{-1}BA^{-1}) = \mathbb{1} - \epsilon BA^{-1} + \epsilon BA^{-1} - \epsilon^2 BA^{-1}BA^{-1} = \mathbb{1} - \epsilon^2 BA^{-1}BA^{-1}. \tag{34.132}$$

Par conséquent, à des termes en ϵ^2 près la matrice $A^{-1} - \epsilon A^{-1}BA^{-1}$ est bien un inverse de $A+\epsilon B$.

ThoHGpGwXk

Théorème 34.63 (Méthode de Newton[830])**.**
Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^2 et un point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = 0$. Nous supposons que df_a est inversible.

Alors il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x_0 \in V$ la suite définie par récurrence

$$x_{n+1} = x_n - (df_a)^{-1}\big(f(x_n)\big) \tag{34.133}$$

converge vers a. De plus la vitesse est quadratique au sens où il existe $C > 1$ tel que

EqtkiDXt

$$\|x_n - a\| \leqslant C^{-1-2^n}. \tag{34.134}$$

Démonstration. Étant donné que df_a est inversible et que df est continue, l'application df_x est continue[9] pour tout x dans un voisinage de a. Nous prenons $r > 0$ tel que df_x est inversible pour tout $x \in B(a,r)$.

[9] Nous pouvons voir df comme l'application qui à x fait correspondre la matrice $df_x \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Cette application étant continue et la non inversibilité d'une matrice étant donnée par l'annulation du déterminant, les matrices inversibles forment un ouvert dans l'ensemble des matrices.

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} F\colon B(a,r) &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x - (df_x)^{-1}\big(f(x)\big). \end{aligned} \tag{34.135}$$

Cela est une application C^1. La clef est de montrer que l'application de F à un point $a+h$ rapproche de a pourvu que h soit assez petit. Nous avons la formule suivante :

$$F(a+h) - F(a) = h - \big(df_{a+h}\big)^{-1}\big(f(a+h)\big). \tag{34.136}$$

Nous allons maintenant utiliser un développement de Taylor par rapport à h en suivant la formule (12.1375). Nous avons

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|^2\xi(h) \tag{34.137}$$

où $\xi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction qui tend vers une constante lorsque $h \to 0$. Nous avons aussi

$$df_{a+h} = df_a + \|h\|\tau(h) \tag{34.138}$$

où $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ est une application qui tend vers une constante lorsque $h \to 0$. En ce qui concerne l'inverse nous utilisons le lemme[10] 34.61 :

$$\big(df_a + \|h\|\tau(h)\big)^{-1} = (df_a)^{-1} + \|h\|A(h) \tag{34.139}$$

où A est une autre matrice fonction de h qui tend vers une constante lorsque h tend vers zéro. En substituant le tout dans (34.136) nous trouvons

$$F(a+h) - F(a) = \|h\|^2(df_a)^{-1}\xi(h) + \|h\|\big(A(h)\circ df_a\big)(h) + \|h\|^3A(h)\xi(h). \tag{34.140}$$

En ce qui concerne la norme nous utilisons le fait que si T est un opérateur, $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$. Nous trouvons

$$\begin{aligned} \|F(a+h) - F(a)\| &\leqslant \|h\|^2\|(df_a)^{-1}\|\|\xi(h)\| + \|h\|^2\|A(h)\circ df_a\| + \|h\|^3\|A(h)\|\|\xi(h)\| && \text{(34.141a)} \\ &= \|h\|^2\alpha(h) && \text{(34.141b)} \end{aligned}$$

pour une certaine fonction $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui tend vers une constante lorsque $h \to 0$.

En posant $C = \lim_{h\to 0}\alpha(h)$ nous avons la majoration

$$\|F(x) - a\| \leqslant C\|x-a\|^2. \tag{34.142}$$

Nous pouvons également supposer que $C > 1$. Afin de prouver la vitesse de convergence (34.134), nous allons encore redéfinir r en demandant $r < 1/C^2$. De cette manière nous avons

$$\|x_0 - a\| \leqslant \frac{1}{C^2} \tag{34.143}$$

et la récurrence sur n est :

$$\|x_{n+1} - a\| = \|F(x_n) - a\| \leqslant C\|x_n - a\|^2 \leqslant C\big(C^{-1-2^n}\big)^2 = C^{-1-2^{n+1}}. \tag{34.144}$$

Note : ce dernier calcul est le lemme 34.45 appliqué à $r = (1/C^2)$. □

Remarque 34.64.
La valeur de la constante C a été fixée par l'équation (34.142). Certes nous pouvons toujours choisir C plus grand afin d'augmenter la vitesse de convergence, mais le point de départ x_0 devant être dans une boule de taille $1/C^2$ autour de a, demander C plus grand revient à demander un point de départ plus précis.

34.7 Estimation de l'ordre de convergence

Définition 34.65 ([831]).
*Nous disons que la suite (x_n) de limite x est **convergente d'ordre** q pour $q > 1$ si il existe $\mu > 0$ tel que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^q} = \mu. \tag{34.145}$$

En particulier :

[10] Pour l'inversibilité de $\|h\|\tau(h)$, notons que df_a est inversible et que par hypothèse la somme $df_a + \|h\|\tau(h)$ est inversible.

- *la convergence d'ordre 2 est dite quadratique,*
- *la convergence d'ordre 3 est dite cubique,*
- *la convergence d'ordre 4 est dite quartique.*

Comment estimer numériquement l'ordre p de convergence de la méthode ? Soit une suite (x_n) convergente vers α. Considérons les 4 termes x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n. Alors nous pouvons écrire l'approximation

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1} - x_{n-2}|} \simeq \left(\frac{|x_{n-1} - x_{n-2}|}{|x_{n-1} - x_{n-3}|} \right)^p. \tag{34.146}$$

Cette approximation ne serait pas trop mauvaise tant que n est assez grand pour que la convergence soit bien engagée. Passons au logarithme :

$$\ln \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1} - x_{n-2}|} \simeq p \ln \left(\frac{|x_{n-1} - x_{n-2}|}{|x_{n-1} - x_{n-3}|} \right). \tag{34.147}$$

et donc

$$p \simeq \frac{\ln \left(\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1} - x_{n-2}|} \right)}{\ln \left(\frac{|x_{n-1} - x_{n-2}|}{|x_{n-1} - x_{n-3}|} \right)}. \tag{34.148}$$

Avec cette approximation, en réalité nous calculons une suite (p_i) qui sont les approximations de p à partir des termes i à $i+3$ de la suite (x_n). Il s'agit d'une suite d'estimations de p.

(1) Dans le cas de la bissection, nous obtenons toujours $p_i = 1$.

(2) Dans le cas de la méthode de Newton (34.6) nous avons $p = 2$. Mais les premières valeurs de p_i peuvent être aussi bien 0 que 7. Après quelques itérations pourtant les p_i se regroupent autour de 2.

En tout cas, le plus important est de savoir si $p > 1$ ou non. Rappel : nous voulons la superlinéarité parce que nous voulons utiliser le test d'arrêt de la différence entre deux termes, voir 34.47.

34.8 Autres méthodes

34.8.1 Méthode de Schröder

La formule est

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \tag{34.149}$$

Cette méthode est d'ordre 2 pour toute racine et toute valeur de multiplicité. Le problème de cette méthode est qu'elle demande 3 évaluations de f. Son efficacité :

$$E = \sqrt[3]{2} \simeq 1.25 \tag{34.150}$$

Cela est donc moins efficace que Newton.

34.8.2 Halley

Il a $p = 3$ lorsque α est racine simple. Mais encore $p = 1$ pour les racines multiples. Plus efficace que Newton pour les racines simples, mais même problème pour les racines multiples.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \tag{34.151}$$

34.9 Méthode des sécantes variables

SECooIUEUooVcHAoc

Si nous n'avons pas de formule analytique pour f, mais seulement la possibilité de calculer $f(x)$ pour tout x. Newton ne fonctionne pas, mais la bissection fonctionne.

Nous pouvons approximer

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}. \tag{34.152}$$

En substituant dans la formule de Newton, nous obtenons

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{34.153}$$

Il s'agit de prendre la droite qui passe par $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ et par $(x_n, f(x_n))$ et de prendre l'intersection de cette droite avec l'axe $y = 0$. Cela donne le x_{n+1}.

Pour cette méthode, il ne faut pas seulement x_0 mais également x_1.

L'ordre de convergence est le nombre d'or

$$p = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \simeq 1.618. \tag{34.154}$$ EQooQEFCooUsGVjP

Cela est donc superlinéaire.

Le nombre d'évaluations est $s = 1$ (il y a deux apparitions de f dans la formule, mais l'une des deux est récupérée dans l'itération suivante). Donc l'efficacité est

$$E = p. \tag{34.155}$$

Donc bien efficace.

Proposition 34.66.
Si α est racine simple, il existe un voisinage de α tel que pour tout choix de x_0, x_1 dans ce voisinage, la méthode converge.

Psychologiquement, on est tenté de prendre x_0 et x_1 de part et d'autre de α (pensant à la bissection), mais en réalité ce n'est pas obligatoire du tout et n'a aucune influence. Il faut seulement les prendre très proches de α.

Remarque 34.67.
La méthode de la sécante est souvent écrite sous la forme

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{34.156}$$ EQooYVKLooKTFjwv

C'est évidemment algébriquement équivalent.

Les formules (34.154) et (34.156) ont toutes deux des erreurs de cancellation. Laquelle est la plus grave ?

Dans la première, si la fraction est mal calculée, elle ne fait que modifier x_n. C'est-à-dire qu'on peut espérer qu'à la prochaine itération, ça aille mieux. En tout cas, dans ce cas si la fraction est mal calculée, ça ne détruit pas tout.

Dans la seconde, c'est la valeur elle-même qui risque d'être mal calculée. Et si la fraction est mal calculée, alors on casse complètement l'éventuelle bonne approximation que nous avions déjà.

34.9.1 Aitken

La méthode du Δ^2 de Aitken est une méthode d'accélération de la convergence.

Soit (x_n) une suite qui converge. Nous voudrions une nouvelle suite (y_n) telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - \alpha}{x_n - \alpha} = 0. \tag{34.157}$$

C'est la définition d'une convergence accélérée.

La façon de faire est :

$$y_n = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}. \tag{34.158}$$

La première expression a deux cancellations (la seconde une seule) et de plus la première est y_n elle-même alors que la seconde est une correction.

Donc la seconde expression est numériquement meilleure.

L'opérateur Δ appliqué à une suite est :

$$(\Delta x)_n = x_{n+1} - x_n \tag{34.159}$$

Donc

$$(\Delta^2 x)_n = (\Delta x)_{n+1} - (\Delta x)_n = x_{n+2} - x_{n+1} - x_{n+1} + x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n. \tag{34.160}$$

L'accélération a alors la formule

$$y_n = \frac{(\Delta x)_n^2}{(\Delta^2 x)_n}. \tag{34.161}$$

Le problème est que ça accélère tellement que l'on arrive vite à des erreurs de cancellations, et donc à une précision en pics oscillants.

34.10 Équations algébrique

C'est une équation du type $P(x) = 0$ où P est un polynôme. Soit un polynôme de degré n. Nous en savons des choses.

(1) L'équation a exactement n solutions dans $\mathbb{C}$ en comptant les multiplicités.

(2) Les racines complexes arrivent par paire complexes conjuguée. Elles sont donc toujours en nombre pair.

Si donc nous avons $n = 3$, nous ne pouvons pas avoir 2 racine réelles. Il y en a donc 1 ou 3 réelles. Pas zéro ni deux.

Quelques méthodes : Müller, matrice compagnon, Laguerre.

34.10.1 Résoudre un système linéaire

Pour résoudre un système linéaire d'équations, nous échelonnons la matrice du système. Soit à résoudre le système $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{34.162}$$

En termes de problèmes, on écrit $F\big(x, (A, b)\big) = Ax - b$. La donnée de ce problème est le couple (A, b).

En ce qui concerne l'algorithme, on pose comme premier problème

$$F_1\big(x_1, (A_1, b_1)\big) = A_1 x_1 - b_1 = 0 \tag{34.163}$$

avec $A_1 = A$ et $b_1 = b$.

Ensuite, on commence à échelonner et le second problème est

$$F_2\big(x_2, (A_2, b_2)\big) = A_2 x_2 - b_2 = 0 \tag{34.164}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}. \tag{34.165}$$

Le troisième problème sera

$$F_3\big(x_3, (A_3, b_3)\big) = A_3 x_3 - b_3 = 0 \tag{34.166}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{34.167}$$

Ce problème est facile à résoudre « à la main ». Nous nous arrêtons donc ici avec l'algorithme, et nous trouvons le x_3 qui résous le problème F_3.

34.10.2 Caractéristiques

L'algorithme de résolution de systèmes linéaires d'équations a les propriétés suivantes, à mettre en contraste avec celles de Newton :

(1) Pour résoudre le problème numéro n, il n'a pas fallu résoudre le problème numéro $n - 1$.

(2) Toutes les solutions x_n des problèmes intermédiaires sont solutions du problème de départ. Nous avons $F_n(x, d_n) = 0$ pour tout n (ici, $d_n = (A_n, b_n)$).

(3) D'un problème à l'autre, les données changent énormément : la matrice échelonnée peut être très différente de la matrice de départ.

34.10.3 Définitions

Nous allons maintenant formaliser en donnant quelques définitions pour nommer les propriétés que nous avons vues. D'abord, un algorithme est une suite de problèmes. Un **algorithme** pour résoudre un problème $F(x,d)=0$ est une suite de problèmes $\{F_n(x_n,d_n)=0\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 34.68.
*Un tel algorithme est dit **fortement consistant** si pour toutes données admissibles d_n, on a*

$$F_n(x,d_n)=0 \quad \forall\, n, \tag{34.168}$$

où x est la solution de $F(x,d)=0$.

L'algorithme des matrices est fortement consistant, mais pas l'algorithme de Newton.

Définition 34.69.
*Un algorithme est **consistant** si $\lim_{n\to\infty} F_n(x,d_n)=0$.*

Dans le cas de l'algorithme de Newton, c'est plutôt une telle consistance qu'on attend.

L'algorithme est dit **stable** si pour tout n le problème correspondant est stable. Dans ce cas, on note K^{num} le **conditionnement relatif asymptotique** défini par

$$K^{\text{num}}=\limsup_n K_n \tag{34.169}$$

où K_n est le conditionnement relatif du problème $F_n(x_n,d_n)=0$.

DefAlgoConverge

Définition 34.70.
*Un algorithme est dit **convergent** (en d) si pour tout $\epsilon>0$, il existe $N=N(\epsilon)$ et $\delta=\delta(N,\epsilon)$ tels que pour $n\geqslant 0$ et $|d-d_n|<\delta$, on ait $|x(d)-x_n(d_n)|<\epsilon$.*

RemConvAlgoNewton

Remarque 34.71.
Dans le cas de l'algorithme de Newton, nous avons vu que la donnée d_n du problème F_n était en fait la même que la donnée initiale d, donc nous avons $d_n=d$, et par conséquent nous avons toujours $|d-d_n|<\delta$. Dans ce cas, la définition de la convergence revient à demander que la suite numérique des x_n converge vers la solution x.

Remarque 34.72.
Dans le cas des matrices par contre, les données sont très différentes les unes des autres, nous avons donc en général que $|d-d_n|>\delta$. Mais en revanche nous savons que tous les problèmes intermédiaires F_n acceptent une solution unique[11] $x_n(d_n)=x(d)$. Par conséquent, $|x_n(d_n)-x(d)|$ est toujours plus petit que ϵ. L'algorithme des matrices est donc toujours un algorithme convergent.

34.11 Équations non linéaires

Certaines équations non linéaires sont résolubles explicitement, par exemples les polynômes de degré jusqu'à 4 ou des choses comme

$$\sin^2(x)+3\sin(x)+5=0. \tag{34.170}$$

Mais ces exemples sont très rares.

Nous allons étudier des équations du type $f(x)=0$, dans $\mathbb{R}$.

(1) Un problème écrit sous la forme $x=g(x)$ peut utiliser des théorèmes de points fixes.

(2) Un problème sous la forme $f(x)=0$ peut utiliser des méthodes de bissection, Newton ou autres.

Il y a évidemment beaucoup de façons de transformer un problème pour passer d'une forme à l'autre.

Exemple 34.73.
Soit $f(x)=x^2-a=0$ avec $a>0$. Nous pouvons l'écrire

$$x^2+x-a=x \tag{34.171}$$

qui donne une forme $g(x)=x$ pour $g(x)=x^2+x-a$.

Ou encore $x=\frac{a}{x}$ et donc $g(x)=a/x$ (si par ailleurs on sait que $x\neq 0$). Notons que $x\neq 0$ n'est pas une hypothèse très forte parce qu'on la vérifie directement sur a. △

[11] Nous n'envisageons que le cas où le déterminant est non nul.

Exemple 34.74.
Soit l'équation à résoudre

$$f(x) = x^2 - 2 - \ln(x) = 0 \tag{34.172}$$

Les solutions de cette équation peuvent être vues comme les intersections avec l'axe X du graphe $y = x^2 - 2 - \ln(x)$. Tracer peut donc aider. Par ailleurs, il faut noter que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty, \tag{34.173}$$

donc les solutions sont certainement contenues dans un compact de $\mathbb{R}$.

À part tracer nous pouvons écrire

$$x^2 - 2 = \ln(x). \tag{34.174}$$

Et là, ce sont deux fonctions dont nous pouvons tracer le graphe pour trouver graphiquement les points d'intersection. Une étude de fonction montre vite qu'il y a exactement deux solutions, qu'elles sont strictement positives. Pour trouver des bornes, il faut calculer par exemple pour $x = 2$ les valeurs de $\ln(x)$ et $x^2 - 2$ pour voir si le graphe de $x^2 - 2$ est déjà plus haut. △

La majorité des méthodes numériques de résolution d'équations du type $f(x) = 0$ ou $x = g(x)$ seront sous la forme de suites. Avec questions à la clef :

(1) Quel point de départ choisir ?

(2) Convergence ?

(3) Est-ce que la limite est bien une solution ?

(4) Vu que la limite est unique, comment faire si l'équation a plusieurs solutions ? (souvent c'est le choix du point initial qui va jouer sur ce point)

34.75.
Si la fonction est très plate, il est possible d'avoir

$$|f(\tilde{\alpha})| \leqslant \epsilon \tag{34.175}$$

sans que $\tilde{\alpha}$ ne soit une bonne approximation.

Lorsqu'on fait tourner une méthode itérative résolvant $f(x) = 0$, il n'est pas suffisant de s'arrêter lorsque

$$f(x_n) \leqslant \epsilon_1. \tag{34.176}$$

Il faut aussi s'assurer que, si $\bar{x}$ est la solution exacte, $|x_n - \bar{x}| \leqslant \epsilon_2$. Ici ϵ_1 et ϵ_2 sont deux « précisions » que nous nous fixons au départ.

Évidemment, vérifier la condition $|x_n - \bar{x}| \leqslant \epsilon_2$, il faudrait savoir $\bar{x}$. Et savoir $\bar{x}$ c'est justement le problème. Nous sommes donc amenés à faire des estimations de $|x_n - \bar{x}|$.

34.76.
Lorsque nous effectuons une méthode itérative, il faut donc contrôler deux grandeurs :

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant \epsilon_1 \tag{34.177a}$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \epsilon_2. \tag{34.177b}$$

Proposition 34.77.
Soit p l'ordre de convergence de la suite (x_n) vers $\bar{x}$. Si $p > 1$ et $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \epsilon_2$ alors $|\bar{x} - x_n| \leqslant \epsilon_2$.

34.11.1 Méthode de bissection

Il y a ce théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 34.78.
Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]a, b[$.

Pour démarrer une bissection, il est toujours bon de prendre l'intervalle $[a, b]$ de façon à ne contenir qu'une seule solution.

Soit donc un premier intervalle $[a_0, b_0]$ tel que $f(a_0)f(b_0) < 0$ et ne contenant qu'une seule solution. À chaque itération nous considérons la moitié de l'intervalle précédent, mais la moitié contenant la solution.

Le test d'arrêt de la méthode de bissection se base uniquement sur la taille de l'intervalle qui reste. En effet si nous avons

$$|b_n - a_n| \leqslant \epsilon \tag{34.178}$$

nous avons certainement

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant \frac{\epsilon}{2} \tag{34.179}$$

où x_n est le point du milieu de $[a_n, b_n]$.

34.79.
La fonction f n'intervient dans la méthode que via son signe, pas via ses valeurs exactes.

34.80.
Notons que le théorème des valeurs intermédiaires n'est pas très puissant pour choisir l'intervalle de départ ; penser à la fonction

$$f(x) = x^2 - 5 \tag{34.180}$$

sur l'intervalle $[-10, 10]$. Il y a bien deux solutions dans l'intervalle, mais elles sont invisibles du théorème des valeurs intermédiaires. La fonction $x \mapsto x^2$ a sa solution en $x = 0$, mais elle aussi n'est pas visible.

34.81.
Certes la méthode de bissection assure la convergence vers une solution, mais elle n'assure pas la convergence monotone. Il peut arriver que $|\bar{x} - x_n| < |\bar{x} - x_{n+1}|$. C'est le cas lorsque la solution est très proche du milieu de l'intervalle choisi. Le x_0 est alors proche de $\bar{x}$ alors que x_1 sera à une distance de $\bar{x}$ d'environ un quart de l'intervalle de départ.

Supposons déjà avoir trouvé un intervalle $[a, b]$ dans lequel se trouve une unique solution à $f(x) = 0$. Voici un algorithme possible.

```
from __future__ import division

def bissection(f, a, b, toll, nmax):
    """
    f : une fonction
    a,b : les limites de l'intervalle
    toll : la tolérance. C'est l'amplitude de l'intervalle à partir duquel ↩
       nous nous arrêtons.
    nmax : le nombre maximum d'itérations.

    Nous supposons que b>a.

    Retourne un tuple (x,n) où 'x' est la solution approchée et 'n' est le ↩
       nombre d'itérations effectuées
    """
    n = -1
    amp = toll + 1 # Pour s'assurer que l'on entre dans le cycle
    while amp > toll and n < nmax :
        n = n + 1
        amp=abs(b - a)
        x = a + amp / 2
        if f(a) * f(x) < 0:
            b = x
        elif f(a)*f(x) > 0:
            a = x
        else :      # Problème ZERO
            amp = 0
    return (x, n)
```

tex/frido/codeSnip_1.py

Plusieurs remarques :

(1) Le fait de retourner le nombre d'itérations effectuées permet à l'utilisateur de savoir la précision et si le nombre maximum d'itérations est dépassé. Si ce `n` retourné est égal à `nmax`, l'utilisateur sait que le `x` retourné n'est pas fiable.

(2) La ligne `from __future__ import division` fait en sorte que l'opération `/` est bien la division usuelle. Sinon, le défaut en Python 2 est que `/` soit la division *entière*, c'est-à-dire que $1/2 = 0$ en Python 2. En Python 3, le symbole `/` désigne bien la division usuelle, mais Sage utilise Python 2[12].

(3) Même si l'intervalle $[a, b]$ contient plus d'une solution, la méthode fonctionne et donne une solution. Il est simplement éventuellement très compliqué de savoir laquelle.

(4) Nous faisons `amp=toll+1` parce que nous voulons absolument lancer le cycle au moins une fois. Sinon, le `x` à retourner ne serait pas défini au moment de sortir du cycle (si le cycle n'est pas exécuté).

(5) Calculer le point milieu d'un intervalle $[a, b]$ est par la formule $(a + b)/2$ sauf que cette opération est numériquement dangereuse parce qu'à cause de l'arithmétique en précision finie, il est possible que cela tombe *exactement* sur a ou b. D'où le fait de calculer le point milieu par

$$x = a + \frac{amp}{2}. \tag{34.181}$$

(6) Dans le cas `Problème ZERO` nous déduisons $f(x) = 0$. Attention que c'est pas que $f(x) = 0$ mais simplement que en mettant x dans f, la *machine* retourne son zéro.

Il peut cependant avoir une fonction telle que $f(1) = 10^{-50}$ et $f(2) = 0$. L'algorithme de bissection risque de s'arrêter si $x_n = 1$. Parce que la machine risque de calculer $f(x_n) = 0$.

Quoi qu'il en soit, nous y mettons `amp=0` pour être sûr de sortir de la boucle dès la prochaine vérification.

(7) Il y a moyen de sauver les valeurs de $f(a)$ et $f(x)$ pour ne pas les recalculer, et en particulier au moment de faire `b=x` nous pouvons poser `fa=fx`.

Si τ est la précision de la solution voulue, nous pouvons fixer à priori le nombre d'itérations à faire grâce à la formule

$$n \geqslant \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\tau} \right) \right\rceil. \tag{34.182}$$

Il y a un "$\geqslant$" et non une égalité parce qu'en arithmétique numérique, le nombre obtenu à droite pourrait ne pas être le bon à 1 près.

Ici pour $\nu \in \mathbb{R}$ le nombre $\lceil \nu \rceil$ est le plus petit entier à être plus grand ou égal à ν.

34.82.
Notons l'importance de la continuité de f. Par exemple que ferait la bissection sur la fonction $f(x) = 1/x$ pour l'intervalle $[-3, 1]$?

Il y a changement de signe sans avoir de racine.

Vu que 2^{10} est déjà 1024. Donc si on veut de la précision de l'ordre de 1/1000, dix itérations suffisent. Si donc nous avons besoin de 200 itérations pour atteindre la précision voulue, c'est l'occasion de trouver un intervalle plus petit. Par exemple en traçant la fonction, en faisant un zoom et en trouvant des valeurs de a et b qui sont déjà proches.

34.83.
Dans le monde réel, il arrive souvent d'utiliser une méthode de bissection pour se donner un point de départ pour une autre méthode.

34.12 Efficacité

Définition 34.84.
*L'**efficacité** est le nombre*

$$E = \sqrt[s]{p} \tag{34.183}$$

où p est l'ordre de convergence de la méthode et s est le nombre de fois qu'il faut calculer une valeur de la fonction à chaque itération (nous ne comptons pas l'initialisation).

Que le nombre de d'évaluations de f intervienne est logique parce que chaque évaluation provoque une erreur possible.

[12] Cela était vrai au moment d'écrire l'exemple. Aujourd'hui, Sage utilise la version 3. Il n'y a aucune raison d'importer `future`.

Exemple 34.85 (Bissection)**.**
Pour la méthode de bissection, nous avons $s = 1$ parce que chercher x_{n+1}, il faut seulement calculer $f(x_n)$. △

Exemple 34.86 (Newton)**.**
Pour l'algorithme de Newton nous avons $p = 2$ et il y a deux évaluations à chaque itération (une fois f et une fois f'), donc $s = 2$ et $E = \sqrt{2}$. △

34.13 Exemples sous forme d'exercices

Exemple 34.87.
Nous supposons une machine acceptant 5 chiffres significatifs. Elle retient les nombres sous la forme $\pm 0.x \cdots \times 10^{\cdots}$.

$x = 1.403$, $y = 0.4112 \times 10^{-3}$, $z = -0.4111 \times 10^{-3}$.

Soient $a = (x \oplus y) \oplus z$ et $b = (y \oplus z) \oplus x$.

(1) D'abord la calculer à la main.

(2) Quel est le calcul préférable ?

(3) Donner l'erreur relative avec 3 chiffres significatifs.

Dans le cas du calcul à la main, il faut en faire un seul parce que, algébriquement, $a = b$.

Nous avons $x = 1.403$, $y = 0.0004112$ et $z = -0.0004111$. Et la somme donne :

$$a = b = 1.4030001 = 0.14030001 \times 10^1. \tag{34.184}$$

Faisons d'abord la normalisation de x, c'est-à-dire $\mathrm{fl}(x)$.

$$\mathrm{fl}(x) = 0.1403 \times 10^1. \tag{34.185}$$

et y est déjà normalisé :

$$\mathrm{fl}(y) = 0.4112 \times 10^{-3}. \tag{34.186}$$

Il n'y a pas d'erreurs d'assignation pour ces deux nombres.

Pour faire la somme, il faudra déjà un peu casser les nombres pour les écrire de façon à pouvoir les sommer. En effet, il faut écrire les deux nombres avec le même exposant de 10 (le plus grand), pour pouvoir les mettre en colonne :

$$0.1403 \times 10^1 \to 0.1403 \times 10^1 \tag{34.187a}$$

$$0.4112 \times 10^{-3} \to 0.00004 \times 10^1. \tag{34.187b}$$

La somme donne 0.14034×10^1. Et ça, c'est à nouveau arrondi. Le premier chiffre supprimé est un 4, donc

$$x \oplus y = 0.1403 \times 10^1. \tag{34.188}$$

Et là on remarque que nous avons la même chose que x. C'est un classique du calcul numérique.

Nous avons aussi

$$\mathrm{fl}(z) = 0.4111 \times 10^{-3}. \tag{34.189}$$

Et pour faire la somme de cela avec $x \oplus y$ nous devons le remettre sous la forme d'un 10^1 :

$$\mathrm{fl}(z) \to -0.00004 \times 10^1 \tag{34.190}$$

(erreur de conversion), et en sommant on trouve

$$(x \oplus y) \oplus z = 0.140216 \times 10^1, \tag{34.191}$$

qui est encore arrondi. Le premier chiffre supprimé est un 6, donc

$$\mathrm{fl}(a) = 0.1403 \times 10^1, \tag{34.192}$$

Nous avons donc $x \oplus y = x$. Le nom de l'erreur qui consiste à avoir $x \oplus y = x$ est **relation anormale**.

Calculons b.

Les nombres y et z ont même ordre de grandeur, donc pas d'erreur au moment de les mettre sous forme sommable.

$$\text{fl}(y) + \text{fl}(z) = 0.00010 \times 10^{-3}. \tag{34.193}$$

Cela est renormalisé et arrondi : $\text{fl}(x) \oplus \text{fl}(y) = 0.1000 \times 10^{-6}$.

Notons que nous avons ici commis potentiellement une erreur de cancellation parce que entre y et z, il y a 3 chiffres sur 4 qui sont identiques. Seul le chiffre 1 est significatif en réalité.

Il faut maintenant ajouter x à cela. D'abord

$$\text{fl}(x) = 0.1403 \times 10^{1}. \tag{34.194}$$

Pour cette somme, il faudra remettre notre 0.1000×10^{-6} avec une puissance 10^1. Et là, nous obtenons zéro parce que vraiment ce nombre est trop petit pour être écrit avec 10^1. Résultat des courses :

$$\text{fl}(b) = 0.1403 \times 10^{1}. \tag{34.195}$$

Dans le premier calcul nous avons deux "relations anormales" et dans le second nous en avons une plus une cancellation.

Nous préférons avoir deux relations anormales, parce que l'erreur de cancellation est plus grave : elle consiste à une perte de chiffre significatifs. Le fait est que faisant la différence à l'ordinateur nous avons obtenu 0.1 qui est certes exact, mais qui est un coup de bol : la différence aurait aussi bien pu être 0.19 avec d'autres nombres, machinement égaux.

Note : avec les données ici, il n'y a en fait pas d'erreur de cancellation. Mais il y a une erreur potentielle de cancellation, potentiellement grave.

En ce qui concerne l'erreur relative. Dans la formule

$$\epsilon_r = \frac{|a - a^*|}{|a|}, \tag{34.196}$$

la différence ne peut pas être calculée à la calculatrice justement parce qu'elle est très potentiellement sujette à erreur de cancellation.

$$\epsilon_r = \frac{|0.1030001 \times 10^1 - 0.1403 \times 10^1|}{0.14030001 \times 10^1} = \frac{0.1 \times 10^{-6}}{0.14030001 \times 10^1} \simeq 0.712758 \times 10^{-7}. \tag{34.197}$$

En passant à 3 chiffres significatifs, 0.713×10^{-7} (le premier chiffre supprimé est un 7).

△

Exemple 34.88.
Soient $x = 0.1 \times 10^{21}$ et $y = 0.5 \times 10^{20}$ et les expressions

(1) $z_1 = \frac{x-y}{y} + \frac{x+y}{x}$

(2) $z_2 = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

Ces deux expressions sont algébriquement équivalentes.

(1) Calculer les valeurs.

(2) On suppose une machine en précision simple. Laquelle des deux expressions est préférable ?

Pour z_1, en arithmétique exacte :

$$z_1 = \frac{0.5 \times 10^{20}}{0.5 \times 10^{20}} + \frac{1.5 \times 10^{20}}{1 \times 10^{20}} = 0.25 \times 10^{1}. \tag{34.198}$$

Le calcul exact de z_2 donne la même chose.

(1) **Calcul de z_1**

Les deux valeurs sont mémorisables et la différence $x - y$ se fait sans erreurs de cancellation. Idem pour la somme $x + y$. Idem pour les divisions.

(2) **Calcul de z_2**

Pour faire x^2, c'est pas possible parce que c'est de l'ordre de 10^{40} alors que nous sommes en précision simple. Idem pour le produit xy.

Morale : z_2 donne un `overflow` alors que z_1 fonctionne de façon exacte.

Remarque 34.89.
En réalité le z_1 n'est pas tout à fait calculable de façon exacte sur la machine parce qu'elle doit d'abord convertir en binaire, ce qui n'est pas toujours possible. Mais sur notre machine qui fonctionne en base 10, il n'y a pas de problèmes.

△

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 34.90
Dans l'exemple suivant, je ne sais plus du tout ce qu'est la fonction g. Par conséquent, je ne sais pas quel est le signe à indiquer dans $g(x_2)$ du dernier tableau.

Si vous avez tout suivi jusqu'ici, écrivez-moi pour éclaircir ces points.

Exemple 34.91.
Soit la fonction

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 - e^{-x}. \tag{34.199}$$

(1) Identifier la plus grande des solutions réelles de $f(x) = 0$.

(2) Effectuer une bissection pour la savoir.

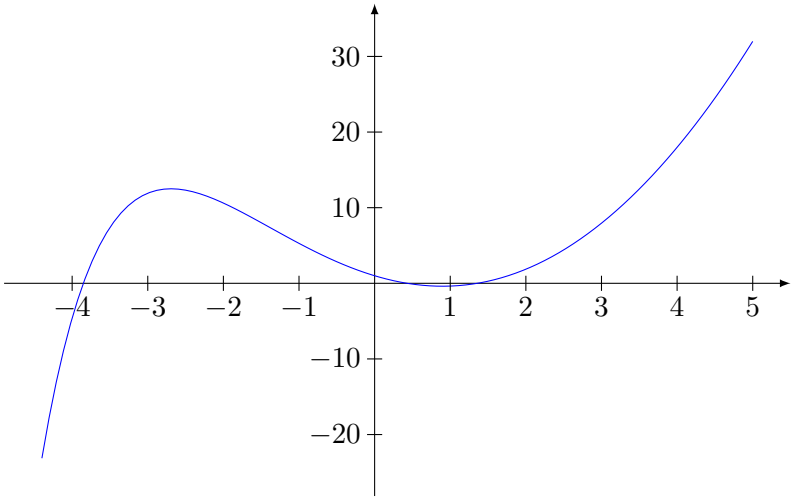
(3) Sachant que

$$\alpha \simeq 1.358500220734946, \tag{34.200}$$

quelle est l'erreur relative[13] ?

Note : si c'est pour chercher à la main des approximations pour démarrer, il est évidemment préférable de dessiner $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 2$ et $f_2(x) = -e^{-x}$ séparément.

Quoi qu'il en soit, voici un graphique :



Nous voyons trois racines : $\alpha_1 \in [0, 0.5,]$, $\alpha_2 \in [1, 1.5]$ et $\alpha_0 \in [-4, -3.5]$.

Note : ce serait une très intéressante question de savoir prouver qu'il y a exactement 3 racines et qu'elles sont dans ces intervalles[14].

La plus grande solution est α_2. Pour le reste, Python fait très bien le boulot.

```
#!/usr/bin/python3

import math


def fun(x:float)->float:
    return 2*x**2-4*x+2-math.exp(-x)

```

[13] Définition 34.13.

[14] Si vous avez une idée de comment faire, écrivez-moi.

```python

def one_step(a:float, b:float)->tuple[float, float]:
    """
    One step of bissection.

    a: minial value of the root
    b: max value of the root

    return a new min and max for the interval in which the root lies.
    """
    f_a = fun(a)
    f_b = fun(b)
    check = f_a * f_b
    if check > 0:
        raise ValueError("la fonction doit avoir des signes opposés")
    middle = (a+b)/2
    value = fun(middle)

    # Pour bien faire, il faudrait traiter ici le cas 'value == 0'

    if f_a * value > 0:
        # f a le même signe en a et au milieu.
        return middle, b
    # Ici on sait que f_a et value ont un signe opposé
    return a, middle



a = 1
b = 1.5

for step_num in range(1, 11):
    a,b = one_step(a,b)
    middle = (a+b)/2
    value = fun(middle)
    print(f"étape {step_num} -- a={a}, b={b}, m={middle}, f(m)={value}")
```

tex/frido/codeSnip_6.py

Au bout de 10 itérations, on trouve ceci comme estimation : $\hat{\alpha} = 1.358642578125$. En ce qui concerne l'erreur relative, elle vaut

$$|\frac{\alpha - \hat{\alpha}}{\alpha}| \simeq 0.00010479. \tag{34.201}$$

Pour être propre, vous devriez modifier le programme pour qu'il vous calcule l'erreur relative à chaque étape. △

34.14 Approximations de fonctions

(1) D'habitude on n'approxime pas une fonction sur tout son domaine, mais seulement sur une partie.

(2) Il y a le problème du choix de la classe des fonctions qui vont approximer. Nous allons travailler avec des polynômes.

(3) Il nous faut un critère disant si une approximation est bonne ou non.

34.14.1 Critère d'interpolation

À partir de $n+1$ abscisses points distinctes x_i, nous calculons $y_i = f(x_i)$. Il y a ce théorème qui dit qu'il existe un unique polynôme de degré (au plus) $n+1$ passant par les points (x_i, y_i).

Proposition-Définition 34.92 (Base de Lagrange)**.**
Étant donnés $n+1$ valeurs distinctes x_i, l'espace des polynômes de degré n admet la base

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{34.202}$$

pour $i = 0, \dots, n$.

Soit par exemple les valeurs de f données dans

x_i	$y_i = f(x_i)$
$x_0 = 5$	1
$x_1 = -7$	-23
$x_2 = 6$	-54
$x_3 = 0$	-954

Les polynômes de Lagrange pour ces données dépendent seulement des x_i, pas des y_i. En particulier,

$$L_0^{(3)}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}, \tag{34.203}$$

etc.

La réponse est que

$$L_0^{(3)}(x) = \frac{x^3 + 13x^2 + 42x}{660} \tag{34.204a}$$

$$L_1^{(3)}(x) = \frac{-x^3 - x^2 + 30x}{84} \tag{34.204b}$$

$$etc. \tag{34.204c}$$

Ce qu'il y a de bien avec cette base est que en posant $a_i = f(x_i)$ alors le polynôme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i L_i^{(n)}(x) \tag{34.205}$$

passe par les points $(x_i, f(x_i))$. Du coup il suffit d'écrire

$$P_3(x) = L_0^{(3)}(x) - 23L_1^{(n)}(x) - 54L_2^{(n)}(x) - 954L_3^{(n)}(x) = 4x^3 + 35x^2 - 84x - 954. \tag{34.206}$$

Un inconvénient de cette base est qu'elle est complètement dépendante des points choisis. Si on ajoute un point ou qu'on en prend un à peine différent, tous les coefficients changent. Mais en pratique, ajouter des points est quelque chose qui arrive souvent parce que souvent, après avoir vu le résultat d'un polynôme d'interpolation, on veut ajouter un point pour avoir un meilleur résultat.

34.93.
Une habitude : le premier et le dernier nœud se choisissent aux extrémités de l'intervalle sur lequel nous voulons une approximation.

Le but d'une approximation est d'avoir des approximations de $f(x^*)$ pour des valeurs de x^* qui ne soit pas une des abscisses données (parce que sur ces points, le polynôme et la fonction sont égaux). Nous considérons donc

$$f(x^*) \simeq P_n(x^*). \tag{34.207}$$

Si x^* est dans l'intervalle $I = [x_{min}, x_{max}]$ alors nous disons que nous calculons f par **interpolation**. Si au contraire x^* est en dehors de cet intervalle nous parlons d'**extrapolation**.

Si x^* est pris à l'extérieur de I, alors l'erreur risque d'être très grande, surtout parce que les polynômes tendent tous vers $\pm\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$.

Autant l'interpolation via polynômes est le plus souvent valable, il faut garder à l'esprit que les extrapolations sont souvent mauvaises si x^* est trop loin des extrémités de I.

34.14.2 Base de Newton

Après la base canonique et la base de Lagrange, nous voyons la base de Newton. Soient encore $n+1$ points donnés du graphe de f.

Définition 34.94.
*La **base de Newton** pour les abscisses x_i est l'ensemble des polynômes suivants :*

$$1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \tag{34.208}$$

Notons que ces polynômes n'utilisent pas le dernier point des x_i. Le polynôme passant par les points est

$$P_n(x) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j). \tag{34.209}$$

Le calcul des c_i n'est pas absolument évident. Mais si nous ajoutons un point d'interpolation, les polynômes déjà calculés sont encore bons ; en particulier

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + c_{n+1}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j). \tag{34.210}$$

Et cela est bien, parce que ça donne une façon de les calculer par récurrence.

Il y a plusieurs façons de calculer les c_i.

Les différences divisées sont des façons d'approximer les dérivées.

Définition 34.95.
*Soient $n+1$ nœuds x_i pour la fonction f. Les **différences divisées** sont :*

Ordre 0

$$f[x_i] = f(x_i) \tag{34.211}$$

Ordre 1

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}. \tag{34.212}$$

Ordre 2

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}. \tag{34.213}$$

Ordre n

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}. \tag{34.214}$$

Les ordres font référence à l'ordre de dérivation qui est approximé.

Nous avons alors

$$c_i = f[x_0, \dots, x_i]. \tag{34.215}$$

Cela donne effectivement une méthode de récurrence pour trouver les coefficients c_i.

Remarque 34.96.
Pour calculer c_0, il faut seulement calculer $f[x_0] = f(x_0)$. Mais pour calculer c_1 il faut $f[x_0]$ et $f[x_1]$. Et pour c_2 il faut $f[x_0, x_1, x_2]$ qui demande $f[x_0, x_1]$ et $f[x_1, x_2]$, qui demande etc.

Il faut donc calculer en réalité tous les $f[x_i]$ pour terminer le calcul. Par contre, pour ajouter un point, il ne faut pas tout recalculer, et même pas tout conserver en mémoire. Il faut seulement garder en mémoire la dernière diagonale.

Exemple 34.97.
Soit les nœuds

x	$f(x)$
3	1
1	-3
5	2
6	4

Trouver le polynôme d'interpolation via la base de Newton.

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
3	1	$\frac{1+3}{2} = 2$	$\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} = \frac{2-\frac{5}{4}}{-2} = -\frac{3}{8}$
1	-3	$\frac{-3-2}{-4} = \frac{5}{4}$	$\frac{\frac{5}{4}-2}{-5} = \frac{3}{20}$
5	2	$\frac{2-4}{-1} = 2$	$\frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3} = \frac{4}{40}$
6	4	...	...

Le polynôme d'interpolation sera

$$P_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \tag{34.216}$$

△

Un exercice typique serait de donner tout pour 3 points puis de demander le polynôme qui aurait un quatrième point.

34.14.3 Méthode des minimums quadratiques

Soient $m+1$ points connus sur le graphe de la fonction f que nous devons approximer. Au lieu d'exiger que notre approximation ne passe par tous les points, nous allons chercher une approximation qui minimise la somme des carrés des erreurs sur ces points.

Soit $\mathcal{F}$ une classe de fonctions dans laquelle nous allons chercher l'approximation. Nous cherchons $g \in \mathcal{F}$ qui minimise

$$E(g) = \sum_{i=0}^{m} \big(f(x_i) - g(x_i)\big)^2 \omega_i \tag{34.217}$$

EQooJGQVooKwZZVJ

où $\omega_i > 0$ est une pondération. Souvent on prend $\omega_i = 1$, mais pas toujours. La fonction E sur $\mathcal{F}$ est la **fonction d'erreur**.

34.98.
À part dans les exercices à la main, le nombre de points est grand, du type du milliard. Il est bien entendu pas envisageable de faire passer un polynôme *exactement* par un milliard de points, parce que cela demanderait un polynôme de degré un milliard.

Plus généralement, d'un point de vue scientifique, avoir n paramètres libres pour n données expérimentales, ça ne passe pas Popper.

Afin de faire de la science qui passe Popper nous nous restreignons à une classe de fonction $\mathcal{F}$ dont la dimension n'est pas grande : $\dim(\mathcal{F}) \ll m$. Et nous notons $\dim(\mathcal{F}) = n + 1$.

Exemple 34.99.
La qualité d'une expérience peut être influencée par des paramètres extérieurs comme l'humidité, le vent, etc. Donc il est normal d'avoir des mesures moins précises que d'autres. On les pèse moins. △

Soit $g \in \mathcal{F}$, et une base $\{g_i\}_{i=0,\dots,n}$ de $\mathcal{F}$. Nous écrivons

$$g = a_0 g_0 + a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n \tag{34.218}$$

La fonction donnée E donnée en (34.217), est, à partir du moment où $\mathcal{F}$ et une base sont choisis, une fonction des paramètres a_i que nous nommons $F(a_0, \dots, a_n)$. Il faut minimiser F, c'est-à-dire poser

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 0 \tag{34.219}$$

pour $j = 0, \dots, n$. Cela sont $n+1$ équations pour $n+1$ inconnues. Notons que ces équations sont linéaires parce que chacun des termes est du type

$$\left(f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j g_j(x_i) \right)^2, \tag{34.220}$$

et lors de la dérivation par rapport à a_j, nous obtenons du degré 1.

34.14.4 Notre espace de Hilbert

Nous allons maintenant formaliser un peu tout cela. Dans [832] il est expliqué que si ω est une fonction strictement positive, alors l'espace $L^2_\omega\big([a,b]\big)$ dérivé de la norme

$$\|f\|^2_{L^2_\omega} = \int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx \tag{34.221}$$

est un espace de Hilbert. Nous allons tenter le coup avec $\omega = \sum_{i=0}^{m} \omega_i \delta_{x_i}$ où δ_a est la distribution de Dirac[15] centrée en a.

Sur l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nous considérons la relation d'équivalence $f \sim g$ si $f(x_i) = g(x_i)$ pour tout $i = 0, \dots, m$. Nous notons L^2_ω cet ensemble.

[15] Définition 30.58.

Proposition 34.100.
La formule

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)g(x_i)\omega_i \tag{34.222}$$

EQooVUKMooIjpkXO

définit un produit scalaire sur L^2_ω. Ce dernier devient un espace de Hilbert.

Démonstration. Pour être un produit scalaire (définition 8.163), la forme considérée doit être symétrique et strictement définie positive. La symétrie de la formule (34.222) ne fait pas de doute. Le fait que ce soit semi-défini positif non plus. Pour le strict,

$$\langle f, f\rangle = \sum_{i=0}^{m} |f(x_i)|^2\omega_i. \tag{34.223}$$

Étant donné que $\omega_i > 0$ pour tout i, l'annulation de $\langle f, f\rangle$ implique l'annulation de $f(x_i)$ pour tout i. Cela signifie que f est dans la classe de 0 et donc est nul dans L^2_ω.

En ce qui concerne la complétude, la proposition 7.346 répond à notre place, étant donné que L^2_ω est de dimension finie. Une base est donnée par exemple par $e_i(x) = \delta_{x,x_i}$. Ici le δ est celui de Kronecker, et non celui de Dirac. □

Lemme 34.101.
Si la classe de fonctions $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de L^2_ω et si $f \in L^2_\omega$ il existe un unique élément g de $\mathcal{F}$ minimisant la distance à f.

Démonstration. Le théorème de projection (au choix 12.150 ou 25.7) nous assure l'existence et l'unicité d'un élément de $\mathcal{F}$ minimisant la distance à $f \in L^2_\omega$. □

34.102.
Ce lemme est gentil, mais ne nous donne pas de méthodes pour trouver ce minimum. Nous allons donc écrire explicitement un système d'équations permettant de le trouver. Si $\{g_\alpha\}$ est une base (finie) de $\mathcal{F}$ alors nous cherchons le minimisant sous la forme $g = \sum_\alpha a_\alpha g_\alpha$.

Nous devons minimiser

$$E(g) = \sum_{i=0}^{m} \big(f(x_i) - g(x_i)\big)^2\omega_i = \sum_{i=0}^{m} \big(f(x_i) - \sum_\alpha a_\alpha g_\alpha(x_i)\big)^2\omega_i. \tag{34.224}$$

Vu que cela est maintenant plutôt une fonction des coefficients a_α que de la fonction g nous la notons $F(a_0, \ldots, a_n)$. Il s'agit d'étudier le système d'équations

$$\frac{\partial F}{\partial a_\alpha} = 0. \tag{34.225}$$

Un tout petit peu de calcul mène au système

$$\sum_i \sum_\beta a_\beta \omega_i g_\alpha(x_i)g_\beta(x_i) = \sum_i \omega_i g_\alpha(x_i)f(x_i). \tag{34.226}$$

À droite nous reconnaissons $\langle f, g_\alpha\rangle$, et à gauche, $\sum_\beta a_\beta\langle g_\alpha, g_\beta\rangle$. Donc le système s'écrit

$$\sum_\beta a_\beta\langle g_\alpha, g_\beta\rangle = \langle f, g_\alpha\rangle. \tag{34.227}$$

Il y a une équation pour chaque valeur de α.

La matrice $A \in \mathbb{M}(n+1, \mathbb{R})$ donnée par $\langle g_\alpha, g_\beta\rangle$ étant strictement définie positive (c'est un produit scalaire), le système a une unique solution. Et comme cette matrice est de plus symétrique, elle est diagonalisable par le théorème spectral 8.225. Toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Notons pour la curiosité que si l'on considère la matrice $B \in \mathbb{M}(m \times n)$ donnée par

$$B_{ij} = \sqrt{\omega_i}g_j(x_l), \tag{34.228}$$

alors nous avons $A = B^tB$.

34.14.5 Droite de régression

La droite de régression est le cas particulier $n = 1$, c'est-à-dire un système 2×2. Nous cherchons $P = a_0+a_1x$. Et la base choisie est $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$. Nous avons

$$\langle g_0, g_0\rangle = \sum_i \omega_i g_0(x_i)g_0(x_i) = \sum_i \omega_i \tag{34.229a}$$

$$\langle g_0, g_1\rangle = \sum_i \omega_i x_i \tag{34.229b}$$

$$\langle g_1, g_1\rangle = \sum_i \omega_i x_i^2. \tag{34.229c}$$

Donc pour approximer une fonction f il faut résoudre le système

$$\begin{pmatrix} \sum_i \omega_i & \sum_i \omega_i x_i \\ \sum_i \omega_i x_i & \sum_i \omega_i x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, g_0\rangle \\ \langle f, g_1\rangle \end{pmatrix}. \tag{34.230}$$

Pour calculer les produits $\langle f, g_\alpha\rangle$ il suffit de savoir f sur les points x_i. Et encore heureux, parce que toute la méthode est basée sur le fait que nous ne connaissons pas f ailleurs. C'est pour cela que nous avons défini L^2_ω comme un ensemble quotient.

Exemple 34.103.
Faisons la droite de régression pour les données avec tous les poids $\omega_i = 1$.

x_i	$f(x_i)$
-5	18
-3	7
1	0
3	7
4	16
6	50
8	67

Nous avons

$$\langle f, g_0\rangle = \sum_i f(x_i) = 165 \tag{34.231a}$$

$$\langle f, g_1\rangle = \sum_i f(x_i)x_i = 810. \tag{34.231b}$$

et donc le système

$$\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 14 & 160 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 165 \\ 810 \end{pmatrix} \tag{34.232}$$

dont résolution donne la droite de régression. △

Proposition 34.104.
Si tous les poids sont identiques, alors la droite de régression passe par le barycentre des points donnés :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{m} x_i & (34.233a) \\ y_M = \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{m} y_i. & (34.233b) \end{cases}$$

Cela donne une vérification possible de la réponse trouvée.

Définition 34.105.
*L'**erreur quadratique** est la fonction $F(a_0, \dots, a_n)$ dont il est question plus haut. Et si une solution est connue, son erreur quadratique est la valeur de F pour cette solution.*

34.15 Conditionnement d'une matrice

SECooQGLRooZQzzsA

Soit le système d'équations linéaires $Au = b$ avec la matrice inversible A ainsi que le système perturbé $(A + \Delta A)u' = (b + \Delta b)$. Nous notons $\Delta u = u' - u$ et nous voudrions pouvoir dire des choses de l'erreur relative $\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|}$.

Exemple 34.106 ([442]).
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \tag{34.234}$$

et $b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix}$. La solution de $Au = b$ est $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Si nous conservons la même matrice mais nous considérons $b = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \end{pmatrix}$. La solution devient $u' = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 4.3 \end{pmatrix}$

En norme $\|.\|_\infty$ nous avons[16]

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \frac{0.1}{32} = 0.003125 \tag{34.235}$$

et

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} = \frac{1.7}{6} = 0.28. \tag{34.236}$$

Cela montre environ amplification d'un facteur 100 entre l'erreur sur b et l'erreur sur la solution. △
DEFooBKQWooJuoCGX

Définition 34.107.
*Le **conditionnement** de la matrice inversible $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est le nombre positif*

$$\mathrm{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|. \tag{34.237}$$

Cette dénomination sera justifiée par le corolaire 34.113 parce qu'il est évident que le conditionnement d'une matrice est lié au conditionnement du problème de résolution d'un système linéaire.

Remarque 34.108.
Le conditionnement dépend de la norme choisie, mais cette dependence est contrôlée par la proposition 10.59 qui nous indique que si le conditionnement d'une matrice est grand dans une norme, il sera grand dans une autre norme.

D'autre part, lorsque nous écrirons $\|A\|$ nous supposerons toujours que $\|.\|$ est une norme d'algèbre[17] et donc que nous avons toujours

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|. \tag{34.238}$$

De plus nous supposerons toujours avoir une norme subordonnée à une norme sur l'espace $\mathbb{C}^n$, de telle sorte à avoir

$$\|Au\| \leqslant \|A\|\|u\| \tag{34.239}$$

pour tout $u \in \mathbb{C}^n$. Voir aussi le lemme 10.81.

Proposition 34.109 ([442]).
Si A est une matrice inversible et si $\alpha \in \mathbb{C}$ nous avons :

(1) $\mathrm{Cond}(A) \geqslant 1$

(2) $\mathrm{Cond}(A) = \mathrm{Cond}(A^{-1})$

(3) $\mathrm{Cond}(\alpha A) = \mathrm{Cond}(A)$.

Si $Q \in \mathrm{O}(n)$ alors

(1) Nous avons $\mathrm{Cond}_2(Q) = 1$ où Cond_2 est le conditionnement pour la norme $\|.\|_2$.

(2) Nous avons aussi

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \mathrm{Cond}_2(AQ) = \mathrm{Cond}_2(QA). \tag{34.240}$$

Démonstration. Nous savons que $\mathrm{Cond}(\mathbb{1}) = 1$ et donc

$$1 = \|\mathbb{1}\| \leqslant \|A\|\|A^{-1}\| \tag{34.241}$$

parce que la norme utilisée est une norme matricielle.

Les deux autres formules sont évidentes à partit du fait que la définition du conditionnement de A est symétrique entre A et A^{-1}.

[16] La proposition 10.59(3) montre que si nous voulions des estimations en norme $\|.\|_2$, il y aurait au maximum un facteur $\sqrt{2}$ par-ci par-là.
[17] Définition 10.78.

En ce qui concerne les formules relatives à la matrice orthogonale Q nous savons par la proposition 8.44(3) qu'une matrice orthogonale est une bijection de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\}$. Par conséquent

$$\|AQ\| = \sup_{x \text{ tel que } \|x\|=1} \|AQx\| = \sup_{Q^{-1}x \text{ tel que } \|x\|=1} \|AQQ^{-1}x\| = \|A\|. \tag{34.242}$$

Donc $\|AQ\| = \|A\|$. Les assertions s'ensuivent immédiatement en remarquant que Q^{-1} est également orthogonale. □

Soit une matrice inversible $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. La matrice A^*A est hermitienne[18] et le théorème 10.32 nous assure que ses valeurs propres sont réelles. Par la remarque 10.33, ses valeurs propres sont même positives.

PROPooNUAUooIbVgcN

Proposition 34.110 ([442]).
Soit une matrice inversible $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, et $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ les valeurs propres de A^*A. Alors nous avons la formule

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_1}}. \tag{34.243}$$

Démonstration. Par le théorème 12.122, la norme de A est liée au au rayon spectral de A^*A par

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\mu_n}. \tag{34.244}$$

Vu que le spectre de AA^* est le même que celui de A^*A (lemme 12.105) nous avons aussi

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho\big((A^{-1})^*A^{-1}\big)} = \sqrt{\rho\big((A^*A)^{-1}\big)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \tag{34.245}$$

parce que la plus grande valeur propre de $(A^*A)^{-1}$ est l'inverse de la plus petite de A^*A.

Ces deux calculs étant,

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_1}}. \tag{34.246}$$

□

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 34.111
À mon avis ce qui est dans la proposition 17.114 est le conditionnement de la matrice ou sa racine carrée ou un truc du genre. Il faut voir le lien entre les valeurs propres de A et celles de AA^*.

34.15.1 Perturbation du vecteur

PROPooGIXFooAhJkIs

Proposition 34.112 (Système linéaire : perturbation du vecteur[442]).
EQooYQIGooPXqWoX
Soit une matrice inversible A et les systèmes d'équations linéaires

$$Au = b \tag{34.247a}$$
$$Au' = b'. \tag{34.247b}$$

En notant $\Delta u = u' - u$ et $\Delta b = b' - b$ nous avons

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leqslant \mathrm{Cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}. \tag{34.248}$$

EQooESXRooMYuvRa

Démonstration. En soustrayant les équations (34.247) nous avons $\Delta b = A\Delta u$, et donc $\Delta u = A^{-1}\Delta b$. D'une part nous avons alors

$$\|\Delta u\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\Delta b\|. \tag{34.249}$$

Et d'autre part, $\|b\| \leqslant \|A\|\|u\|$, ce qui donne

$$\frac{\|b\|}{\|A\|} \leqslant \|u\|. \tag{34.250}$$

En mettant les deux ensemble,

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|\Delta b\|}{\|b\|}\|A\| = \mathrm{Cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}. \tag{34.251}$$

□

[18] Définition 8.174.

Le corolaire suivant justifie le nom « conditionnement » au conditionnement d'une matrice.

CORooXKPWooJVHVvh

Corolaire 34.113.
Soit $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ fixée et le problème de résoudre $Au = b$, c'est-à-dire la fonction

$$F(u,b) = Au - b. \tag{34.252}$$

(1) Ce problème est stable pour toute valeur de b.

(2) Nous avons une majoration pour le conditionnement relatif[19] *:*

EQooZHQJooTMKYfr

$$K_{rel}(\eta, b_0) \leqslant \mathrm{Cond}(A). \tag{34.253}$$

Démonstration. (1) **Stabilité** Vu que A est inversible, il existe une solution unique à tout système de la forme $Au = b'$. De plus $u(b) = A^{-1}b$, donc

$$\|u(b) - u(b_0)\| = \|A^{-1}(b - b_0)\| \leqslant \|A^{-1}\|\|b - b_0\|, \tag{34.254}$$

de telle sorte que la condition 34.26(2) fonctionne avec $K = \|A^{-1}\|$.

(2) **Conditionnement** En partant de la définition 34.49, et en utilisant la majoration de la proposition 34.112 sous la forme

$$\|u(b) - u(b_0)\| \leqslant \mathrm{Cond}(A)\|u(b_0)\|\frac{\|\Delta b\|}{\|b_0\|}, \tag{34.255}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
K_{rel}(b_0,\eta) &= K_{abs}(b_0,\eta)\frac{\|b_0\|}{\|u(b_0)\|} && \text{(34.256a)}\\
&= \sup_{\|b-b_0\|\leqslant\eta}\frac{\|u(b)-u(b_0)\|}{\|b-b_0\|}\frac{\|b_0\|}{\|u(b_0)\|} && \text{(34.256b)}\\
&\leqslant \sup_b \mathrm{Cond}(A)\frac{\|u(b_0)\|}{\|b_0\|}\|\Delta b\|\frac{1}{\|b-b_0\|}\frac{\|b_0\|}{\|u(b_0)\|} && \text{(34.256c)}\\
&= \mathrm{Cond}(A). && \text{(34.256d)}
\end{aligned}$$

□

REMooAIKIooJEBEqi

Remarque 34.114.
La notion de conditionnement relatif dépend aussi de la norme choisie. Dans la formule (34.253) il faut prendre le conditionnement $\mathrm{Cond}(A)$ pour la norme dans laquelle le K_{rel} est écrit. Encore une fois, toutes les normes étant équivalentes, cette majoration est à constante près bonne pour toutes les normes. Si la dimension est très grande, cette constante peut par contre être grande.

34.15.2 Perturbation de la matrice

Proposition 34.115 (Système linéaire : perturbation de la matrice[442])**.**
Soient les systèmes linéaires

$$Au = b \tag{34.257a}$$
$$A'u' = b \tag{34.257b}$$

avec A et A' inversibles. Nous notons $\Delta A = A' - A$. Alors

ITEMooJMTKooSEBavB

(1)

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u'\|} \leqslant \mathrm{Cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \tag{34.258}$$

(2)

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leqslant \mathrm{Cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\big(1 + \alpha(\|\Delta A\|)\big) \tag{34.259}$$

où $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$.

[19] Si vous doutez de la norme à prendre, lisez la remarque 34.114

Démonstration. D'abord nous avons

$$0 = A'u' - Au \tag{34.260a}$$
$$= (A' - A)u' - Au' - Au \tag{34.260b}$$
$$= \Delta A u' + A\Delta u. \tag{34.260c}$$

Par conséquent, $\Delta u = -A^{-1}(\Delta A)u'$ et

$$\|\Delta u\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|u'\|. \tag{34.261}$$

Donc

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u'\|} \leqslant \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \text{Cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}. \tag{34.262}$$

Cela est (1).

Pour l'autre inégalité, nous avons $A' = A + \Delta A$ et donc

$$\|A'^{-1}\| = \|(A + \Delta A)^{-1}\| \tag{34.263}$$

Nous repartons alors de (34.261) en changeant le rôle de A et A' (et donc aussi de u et u'). Ce changement étant, $\|\Delta u\|$ et $\|\Delta A\|$ ne changent pas. Nous avons :

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leqslant \|A'^{-1}\|\|\Delta A\| \tag{34.264a}$$
$$= \|(A + \Delta A)^{-1}\|\|\Delta A\|\frac{\text{Cond}(A)}{\|A\|\|A^{-1}\|} \tag{34.264b}$$
$$= \frac{\|(A + \Delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\text{Cond}(A). \tag{34.264c}$$

Il reste à voir que

$$\lim_{\|\Delta A\|\to 0}\frac{\|(A + \Delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = 1, \tag{34.265}$$

ou autrement dit que

$$\lim_{A\to A'}\frac{\|A'^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = 1 \tag{34.266}$$

où la limite est celle dans $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Par définition de la topologie, la norme est continue (quelle qu'elle soit par l'équivalence de norme 10.61). Par le théorème 10.345, l'application $A \mapsto A^{-1}$ est également continue et commute donc avec la limite. Nous avons donc

$$\lim_{A'\to A}\|A'^{-1}\| = \|(\lim_{A'\to A}A')^{-1}\| = \|A^{-1}\|. \tag{34.267}$$

Donc la limite du quotient (34.266) est bien 1. □

34.16 Système linéaires (généralités)

Soit un système d'équations linéaires $Ax = b$ avec $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Le problème est évidemment de savoir si il existe une unique solution x et de la déterminer. Nous supposons l'existence et l'unicité. C'est-à-dire que les conditions équivalentes[20] sont vérifiées :

(1) A est inversible, c'est-à-dire qu'il existe une matrice notée A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$.

(2) $\det(A) \neq 0$.

Note : si nous avons un système pas carré du type $Bx = v$ avec $B \in \mathbb{M}(n \times m)$ alors nous pouvons nous ramener à un système carré en écrivant

$$B^tBx = B^tv. \tag{34.268}$$

Mais attention : bien que B^tB soit symétrique et semi-définie positive, certaines valeurs propres peuvent être nulles.

34.116.
Deux choses générales en calcul numérique :

[20] L'équivalence est la proposition 8.15(2).

(1) On ne calcule pas l'inverse d'une matrice.

(2) On ne calcule même pas son déterminant.

Par conséquent nous ne faisons pas $x = A^{-1}v$.

Il faut garder en tête le fait que dans la pratique, la matrice A possède des millions de lignes et colonnes, si pas pire. Pour une matrice de taille de l'ordre du million, il y a 1000 milliards d'entrées. Si on compte 32 bits par nombre (précision simple, définition 34.8), c'est-à-dire 4 octets, il faut 4000 giga-octets pour enregistrer la matrice. Même pour la mémoire actuellement disponible, ce n'est pas rien. Surtout que souvent, la précision simple n'est pas utilisée, mais la précision double, ce qui donne 8000 giga pour enregistrer la matrice.

Heureusement, dans la majorité des cas pratiques, les matrices géantes qui apparaissent sont pleines de zéros.

Définition 34.117.
Une matrice est ***creuse*** *si elle possède beaucoup de zéros. Une matrice non creuse est dite* ***dense****.*

Notons que lorsqu'on parle de matrice comprenant beaucoup de « zéros », nous pensons à des éléments très petits, et non de vrai zéros.

Les matrices creuses ne sont pas mémorisées entièrement, mais plutôt comme un dictionnaire (i, j, v) qui donne la valeur v de A_{ij}.

Définition 34.118.
Une matrice est de « grande dimension » si elle ne peut pas être mise en mémoire sur un ordinateur donné. Sur certains ordinateurs, ça commence à 5000 *inconnues. Mais sur des plus forts, on peut aller jusqu'au million ou le milliard.*

Si la matrice est de petite dimension, il est possible d'utiliser des méthodes dites « directes ». Sinon, il faudra utiliser des méthodes itératives.

34.16.1 Les méthodes directes

Une méthode directe consiste à successivement transformer un système $A^{(0)}x = b^{(0)}$ en de nouveaux systèmes $A^{(i)}x = b^{(i)}$ dont la solution est identique jusqu'à obtenir un système $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ qui est à résolution immédiate.

L'avantage d'une méthode directe est qu'elle fournit une réponse exacte, pour autant que les calculs intermédiaires soient bien faits (ce qui n'est pas le cas sur un ordinateur).

Une méthode directe fonctionne en général avec un nombre de pas fixés par la taille du système. Par exemple pour un système $n \times n$, la méthode de Gauss demande exactement n pas, et il n'y a pas moyen de faire mieux. Or chaque pas demande de recalculer tous les éléments de la matrice. Encore une fois, si la matrice a une taille de l'ordre du milliard, cela fait 10^{18} éléments à recalculer un milliard de fois (sans compter les éléments du vecteur b). Infaisable.

Souvent une méthode directe passe par une factorisation $A = BC$ avec $B, C \in \mathbb{M}(n \times n)$.

Quelques types de matrices dont la résolution est immédiate :

- Matrice diagonale.
- Matrice orthogonale parce que si A est orthogonale alors $Ax = v$ se résout par $x = A^t v$ qui n'est pas particulièrement lourd à faire numériquement.
- Matrice triangulaire.

Remarque 34.119.
Pour une matrice diagonale, le déterminant et l'inverse sont faciles. Mais également pour la triangulaire. Pour une matrice triangulaire, le déterminant est le produit des éléments diagonaux, et il se fait qu'il y a une algorithme facile pour calculer l'inverse.

Donc en fait les matrices à résolution immédiates sont des matrices pour lesquelles l'inverse et le déterminant sont facile à calculer.

34.16.2 Méthodes itératives

Si la matrice est trop grande, il n'est pas possible de faire des manipulations de matrices à chaque itération.

En général, les méthodes itératives ne convergent pas toujours. Mais lorsqu'une méthode converge, c'est une propriété de la matrice, et donc la convergence aura lieu pour tout vecteur de départ x_0. Cela est très différent du cas des équations non linéaires type Newton pour lesquelles la convergence peut fortement dépendre du point de départ.

34.17 Système linéaires (méthodes directes)

Les matrices que nous sommes autorisés à inverser sont les matrices

- orthogonales : l'inverse est la transposée
- diagonales : l'inverse est diagonale avec les inverses sur la diagonale
- triangulaires : nous en parlons maintenant.

34.17.1 Inversion de matrice triangulaire

Si T est une matrice triangulaire (mettons supérieure pour fixer les idées), il est possible d'en calculer l'inverse sans trop d'efforts. Notons B la matrice inverse que nous allons construire ligne par ligne. Vu que $BT = \mathbb{1}$ nous avons

$$\delta_{1j} = \sum_{k=1}^{n} B_{1k}T_{kj} = \sum_{k=1}^{j} B_{1k}T_{kj} \tag{34.269}$$

parce que $T_{kj} = 0$ pour $k > j$. Donc nous pouvons calculer les éléments B_{1j} un par un parce que chacun ne dépend que des précédents. Le même procédé fonctionne pour les autres lignes :

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{j} B_{ij}T_{kj}. \tag{34.270}$$

Et tu notes que le calcul peut être parallélisé : le calcul de la ligne numéro j ne dépend pas du résultat des autres lignes.

34.17.2 Transformation gaussienne

DEFooOJRKooDcrbeU

Définition 34.120 (Transformation gaussienne[833])**.**
*Soit $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x_k \neq 0$. La k^e **transformation gaussienne** pour x est la matrice*

$$M_k(x) = \mathbb{1} - T_k(x) \tag{34.271}$$

où $T_k(x)$ est la matrice unité à qui on a ajouté le vecteur

$$\tau_k(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{k+1}/x_k \\ \vdots \\ x_n/x_k \end{pmatrix} \tag{34.272}$$

à la k^e colonne.

Autrement dit, la matrice $M_k(x)$ est la matrice

$$M_k(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & -x_{k+1}/x_k & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & -x_n/x_k & 0 & & 1 \end{pmatrix} \tag{34.273}$$

EQooMWXLooBDtsKS

En coordonnées nous avons

$$\big(M_k(x)\big)_{ij} = \delta_{ij} - \tau_k(x)_i\delta_{kj}. \tag{34.274}$$

34.121.
Les matrices de transformation gaussienne sont des matrices triangulaires de diagonale unitaire (c'est-à-dire avec des 1 sur la diagonale).

Lemme 34.122.
Si $x \in \mathbb{R}^n$ alors nous avons

$$M_k(x)x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{34.275}$$

Démonstration. Nous avons

$$\big(M_k(x)x\big)_i = \sum_l M_k(x)_{il}x_l = \sum_l \big(\delta_{il} - \tau_k(x)_i\delta_{kl}\big)x_l = x_i - \tau_k(x)_i x_k. \tag{34.276}$$

Si $i \leqslant k$ nous avons $\tau_k(x)_i = 0$ et donc $\big(M_k(x)x\big)_i = x_i$. Si par contre $i \geqslant k+1$ alors $\tau_k(x)_i = \frac{x_i}{x_k}$ et alors $\big(M_k(x)x\big)_i = 0$. □

LEMooPFWWooUmMsVH

Lemme 34.123.
Si $y \in \mathbb{R}^n$ vérifie $y_i = 0$ pour $i > k$ alors $M_{k+1}(x)y = y$.

Démonstration. C'est une simple vérification :

$$\big(M_{k+1}(x)y\big)_i = \sum_l \big(\delta_{il} - \tau_{k+1}(x)_i\delta_{k+1,l}\big)y_l = y_i - \tau_{k+1}(x)_i y_{k+1}. \tag{34.277}$$

Mais comme $y_{k+1} = 0$ il nous reste automatiquement y_i. □

Le sens de ce lemme est si un vecteur est déjà « gaussiannisé » au niveau k, alors en lui appliquant une transformation gaussienne de niveau plus élevé que k, il ne change pas. Ce fait est important parce qu'il assure que lorsque l'on avance dans le processus de Gauss, chaque étape ne détruit pas les précédentes.

Le lemme suivant nous indique que l'inverse d'une matrice de transformation gaussienne est facile à calculer[21].

LEMooFHZDooZiKdbr

Lemme 34.124.
L'inverse de la transformation gaussienne

$$M_k(x)_{ij} = \delta_{ij} - \tau_k(x)_i\delta_{kj}. \tag{34.278}$$

est la matrice donnée par

$$M_k(x)^{-1}_{ij} = \delta_{ij} + \tau_k(x)_i\delta_{kj}. \tag{34.279}$$

Autrement dit, il suffit de changer le signe de la partie non diagonale.

Démonstration. Il s'agit d'une simple vérification, utilisant le produit matriciel explicite, et en remarquant que $\tau_k(x)_k = 0$ pour tout k. □

34.17.3 Méthode de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations linéaires

Pour résoudre un système d'équations linéaires, on procède comme suit :

(1) Écrire le système sous forme matricielle.

$$\text{p.ex. } \begin{cases} 2x + 3y &= 5 \\ x + 2y &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

(2) Se ramener à une matrice avec un maximum de 0 dans la partie de gauche en utilisant les transformations admissibles :

(2a) Remplacer une ligne par elle-même + un multiple d'une autre ;

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{L_1 - 2.L_2 \mapsto L_1'}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

[21] Elle rentre d'ailleurs dans la catégorie des matrices triangulaires dont nous avons déjà discuté l'inverse.

(2b) Remplacer une ligne par un multiple d'elle-même ;

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{-L_1\mapsto L_1'}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

(2c) Permuter des lignes.

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{L_1\mapsto L_2' \text{ et } L_2\mapsto L_1'}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

(3) Retransformer la matrice obtenue en système d'équations.

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -2 \\ y &= 3 \end{cases}$$

Remarques :

- Si on obtient une ligne de zéros, on peut l'enlever :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

- Si on obtient une ligne de zéros suivie d'un nombre non-nul, le système d'équations n'a pas de solution :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \cdots \\ \cdots \\ 0x + 0y + 0z = 7 \end{cases} \Rightarrow \textbf{Impossible}$$

- Si on moins d'équations que d'inconnues, alors il y a une infinité de solutions qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

34.17.4 Méthode de Gauss sans pivot (décomposition LU)

La méthode de Gauss est souvent aussi appelée méthode « LU » qui va décomposer $A = LU$ où L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure. La décomposition est même plus précise que cela : on demande que L ait seulement des 1 sur la diagonale.

Si A est une matrice nous notons

$$\Delta_k(A) = (A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k} \tag{34.280}$$

la matrice tronquée dont nous ne gardons que le carré $k \times k$ en haut à gauche.

LEMooXEJFooGiYoyb

Lemme 34.125.
Soit S une matrice triangulaire inférieure. Soient également A et B telles que $B = SA$. Alors

$$\Delta_k(B) = \Delta_k(S)\Delta_k(A). \tag{34.281}$$

Démonstration. En effet nous avons

$$\Delta_k(B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} S_{il}A_{lj}. \tag{34.282}$$

EQooHBZZooHtjjsE

Dans la somme sur l il ne reste que les termes $l \leqslant i$. Mais dans le calcul des éléments de matrice $\Delta_k(B)_{ij}$, nous avons évidemment $i, j \leqslant k$. Donc $l \leqslant i \leqslant k$. Les seuls éléments de matrice de A qui sont utilisés dans la somme (34.282) sont les éléments A_{lj} avec $l, j \leqslant k$.

Nous pouvons donc limiter la somme à $l = k$ au lieu de $l = n$ et écrire $\Delta_k(A)_{lj}$ au lieu de A_{lj}.

Même chose en ce qui concerne S. À partir du moment où l est limité à k, les éléments S_{il} et $\Delta_k(S)_{il}$ sont les mêmes. □

THOooUXKJooYaPhiu

Théorème 34.126 (Décomposition LU[834, 1])**.**
Soit une matrice A inversible telle que $\det(\Delta_k(A)) \neq 0$ pour tout k. Alors il existe un unique couple de matrices (L, U) telles que

- *U soit triangulaire supérieure*
- *L soit triangulaire inférieure, de diagonale unité*
- *$A = LU$.*

De plus pour tout $k \leqslant n$ nous avons

$$\Delta_k(A) = \Delta_k(L)\Delta_k(U). \tag{34.283}$$

Démonstration. Nous allons prouver par récurrence le fait suivant : pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$ il existe des matrices E_i $(i = 1, \dots, k)$ telles que en posant

$$A_k = E_k \dots E_1 A, \tag{34.284}$$

- E_j est une transformation gaussienne[22] pour la j^{e} colonne,
- pour tout $j \leqslant k$, $A_{ij} = 0$ dès que $i > j$. Autrement dit la matrice A_k est triangulaire supérieure jusqu'à (non comprise) la $(k+1)^{\text{e}}$ colonne (laquelle est quelconque). Exemple pour fixer les idées : pour une matrice $A \in \mathbb{M}(4 \times 4)$, la matrice A_2 doit avoir la forme

$$A_2 = E_2E_1A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & \circledast & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \tag{34.285}$$

  où les éléments notés $*$ sont à priori non nuls,
- l'élément de matrice $(A_k)_{k+1,k+1}$ est non nul (celui entouré dans l'exemple).

La chose un peu triste dans cette démonstration est que l'initialisation va être très ressemblante au pas de récurrence.

(1) **Initialisation : $k = 1$**

Vu que $\Delta_1(A)$ est inversible, l'élément A_{11} est non nul. Il existe donc une transformation gaussienne E_1 telle que la première colonne de la matrice $A_1 = E_1A$ soit nul sauf la première composante. En particulier $(A_1)_{21} = 0$.

Par le lemme 34.125, nous avons $\Delta_2(A_1) = \Delta_2(E_1)\Delta_2(A)$, donc[23]

$$\det\big(\Delta_2(A_1)\big) = \det\big(\Delta_2(E_1)\big)\det\big(\Delta_2(A)\big). \tag{34.286}$$

Étant donnée la forme (34.273), toutes les matrices du type $\Delta_k(E_i)$ ont un déterminant unité, et par hypothèse $\Delta_2(A)$ est inversible, donc de déterminant non nul. Par conséquent $\det\big(\Delta_2(A_1)\big) \neq 0$. Mais comme ce déterminant est le produit des éléments diagonaux (c'est une matrice triangulaire), ces derniers ne sont pas nuls. Finalement, $(A_1)_{22} \neq 0$.

(2) **Le pas de récurrence**

Nous supposons avoir $A_k = E_k \dots E_1 A$ avec $(A_k)_{k+1,k+1} \neq 0$. Alors il existe une transformation gaussienne E_{k+1} de la $(k+1)^{\text{e}}$ colonne telle que $A_{k+1} = E_{k+1}A_k$ soit une matrice dont la $(k+1)^{\text{e}}$ colonne n'ait que des zéros en dessous de la $(k+1)^{\text{e}}$ position. Vu le lemme 34.123, cette transformation n'affecte pas les colonnes précédentes.

La matrice A_{k+1} est donc triangulaire supérieure jusqu'à la $(k+1)^{\text{e}}$ colonne.

Vu que le produit $E_{k+1} \dots E_1$ est une matrice triangulaire inférieure, le lemme 34.125 fonctionne encore et nous avons

$$\Delta_{k+1}(A_{k+1}) = \Delta_{k+1}(E_{k+1} \dots E_1)\Delta_{k+1}(A). \tag{34.287}$$

En ce qui concerne les déterminants, par hypothèse, nous avons $\det\big(\Delta_{k+1}(A)\big) \neq 0$ ainsi que $\det\big(\Delta_{k+1}(E_{k+1} \dots E_1)\big)$ 1. Donc

$$\det\big(\Delta_{k+1}(A_{k+1})\big) \neq 0. \tag{34.288}$$

Cette matrice étant triangulaire de déterminant non nul, ses éléments diagonaux sont tous non nuls ; en particulier $(A_{k+1})_{k+2,k+2} \neq 0$.

[22] Transformation gaussienne, définition 34.120.
[23] Le déterminant est multiplicatif, proposition 8.15(1).

En poussant la récurrence jusqu'au bout, la matrice

$$A_{n-1} = E_{n-1} \dots E_n A \tag{34.289}$$

est triangulaire supérieure.

Nous posons alors $L = (E_{n-1} \dots E_n)^{-1}$ et $U = A_{n-1}$. Cela prouve l'existence parce que

$$A = (E_{n-1} \dots E_1)^{-1} A_{n_1}. \tag{34.290}$$

Encore une fois, le lemme 34.125 nous donne

$$\Delta_k(A) = \Delta_k\Big((E_{n_1} \dots E_1)^{-1}\Big)\Delta_k(A_{n-1}), \tag{34.291}$$

ou encore $\Delta_k(A) = \Delta_k(L)\Delta_k(U)$.

En ce qui concerne l'unicité, si $A = L_1U_1 = L_2U_2$ alors $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$. Vu qu'à gauche nous avons une matrice triangulaire inférieure et que à droite nous avons une triangulaire inférieure, nous savons que les deux membres représentent une matrice diagonale. Mais à gauche, la diagonale est unitaire. Donc les deux membres représentent la matrice unité. □

34.127.
En pratique, pour résoudre $Ax = b$, il faut seulement appliquer les transformations gaussiennes à la matrice élargie $(A|b)$ pour finir sur un système du type

$$Ux = b' \tag{34.292}$$

qui est immédiatement soluble. Autrement dit, en effectuant les annulations de colonnes, la matrice U est « gratuite ».

Il n'est pas indispensable de calculer la matrice L qui, elle, demande à chaque étape de se souvenir de la matrice E_i utilisée. Si il faut résoudre plusieurs systèmes $Ax_i = b_i$, nous pouvons encore travailler avec la matrice encore plus élargie $(A|b_1 \dots b_m)$.

Si par contre nous ne connaissons pas à l'avance l'ensemble des vecteurs b avec lesquels il faudra résoudre le système, il est bon de calculer la décomposition $A = LU$ in extenso, c'est-à-dire de garder une trace des matrices L et U séparément. Dans ce cas, résoudre $Ax = b$ revient à résoudre $Ly = b$, et ensuite $Ux = y$. Ce sont deux systèmes de résolution directe parce que les matrices sont triangulaires.

34.128.
Le fait que

$$\Delta_k(A) = \Delta_k(L)\Delta_k(U) \tag{34.293}$$

nous dit que si après avoir calculé L et U nous remarquons que le système est un peu plus petit ou un peu plus grand que prévu, tout le travail n'est pas perdu. En particulier si le système est plus petit que prévu, l'adaptation de L et U est immédiate.

Notons que U et L sont inversibles, et que $\det(L) = 1$. Donc $\det(U) = \det(A)$.

Exemple 34.129.
Pour travailler la méthode de Gauss pour le système $Ax = b$, nous introduisons la matrice un peu augmentée $(A|b)$. Nous faisons un exemple. Soit à résoudre

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ -2 & 1 & 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 28 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{34.294}$$

Nous introduisons la matrice augmentée

$$(A|b)^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 3 & 10 & 28 \\ -2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}. \tag{34.295}$$

Le premier pas consiste à annuler tous les éléments sous la diagonale de la première colonne. Autrement dit, nous prenons le 2 comme pivot. Nous introduisons les multiplicateurs $l_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{i1}}$. La nouvelle matrice est :

$$(A|b)^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \end{pmatrix} \tag{34.296}$$

où nous avons utilisé les multiplicateurs $l_{21} = 2$, $l_{31} = -1$.

Et la matrice suivante est :

$$(A|b)^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{34.297}$$

où nous avons utilisé le multiplicateur $l_{32} = 2$.

Cela est un système de résolution immédiate :

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 & \text{(34.298a)} \\ y + 4z = 6 & \text{(34.298b)} \\ 2z = 2. & \text{(34.298c)} \end{cases}$$

La troisième donne $z = 1$. Ensuite $y + 4 = 6$, donc $y = 2$. Et la première donne : $2x + 2 + 3 = 11$, c'est-à-dire $2x = 6$, enfin : $x = 3$.

Solution : $(x, y, z) = (3, 2, 1)$.

Nous notons surtout que dans $(A|b)^{(2)}$ nous avons une matrice triangulaire supérieure. Où est la matrice triangulaire inférieure ? En réalité la matrice L est la matrice des multiplicateurs :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{34.299}$$

△

Le problème de cette méthode est que faisant ainsi nous risquons d'avoir un zéro sur un des pivots. Par exemple tomber sur

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \end{pmatrix}. \tag{34.300}$$

Le zéro sur la deuxième ligne nous ennuie si nous voulons tout faire dans l'ordre. Mais notons qu'en échangeant les deux dernières lignes, tout va bien : le système donné par

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \tag{34.301}$$

fonctionne très bien. Et même tellement bien qu'il est de résolution immédiate, dans ce cas.

Un autre problème est que si un des pivots est 10^{-14}, le multiplicateur sera de l'ordre 10^{14}, qui est mal représenté en mémoire. Il est donc bon de prendre les pivots le plus grand possible. Si le pivot est le plus grand nombre en valeur absolue d'une colonne, alors les nombres x_{k+i}/x_k qui entrent dans la matrice de transformation gaussienne sont des nombres dans $[-1, 1]$ qui sont bien représentés en mémoire.

Tout cela nous incite à développer une méthode de Gauss qui permet de tenir une trace des permutations.

34.17.5 Matrice de permutation élémentaire

Définition 34.130.
*Une **matrice de permutation élémentaire** est une matrice obtenue en permutant deux lignes de la matrice identité. Nous notons P_{ij} la matrice obtenue en inversant les lignes i et j de la matrice identité.*

Les autres opérations sur les lignes sont répertoriées en 4.92.

Exemple 34.131.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{12}. \tag{34.302}$$

△

Lemme 34.132.
La matrice $P_{ij}A$ est la matrice A avec ses lignes i et j inversées.

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$(P_{ij}A)_{kl} = \sum_m (P_{ij})_{km} A_{ml} \tag{34.303}$$

et de faire trois cas selon que $k = i$, $k = j$ ou k différent de i et j. Si $k = i$ alors $(P_{ij})_{im} = \delta_{mj}$ et si k est différent de i et j alors $(P_{ij})_{mk} = \delta_{km}$ (troisième cas similaire au premier). □

Et la matrice AP_{12} est la A avec ses deux premières *colonnes* échangées.
Avec ces notations, notre matrice $(A|b)^{0'}$ est

$$P_{12}(A|b)^{(0)}. \tag{34.304}$$

Puis la matrice $(A|b)^{(1')}$ est

$$P_{23}(A|b)^{(1)}. \tag{34.305}$$

Et la matrice P qui arrive dans $PA = LU$ est la matrice $P = P_{23}P_{21}$, qui est une matrice de permutations non élémentaire. Elle vaut :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34.306}$$

LEMooYIYIooYhnaOt

Lemme 34.133 ([835]).
Si $i, j > k$ alors les matrices de permutation élémentaires ont la relation de « commutation » suivante avec les transformations gaussiennes :

$$M_k(x)P_{ij} = P_{ij}M_k\big(P_{ij}(x)\big). \tag{34.307}$$

Démonstration. Il suffit de calculer les éléments de matrice :

$$\big(P_{ij}M_k(x)\big)_{st} = (P_{ij})_{st} - \sum_m (P_{ij})_{sm}\tau_k(x)_m\delta_{kt}, \tag{34.308}$$

mais

$$\sum_m (P_{ij})_{sm}\tau_k(x)_m = \big(P_{ij}\tau_k(x)\big)_s = \tau_k\big(P_{ij}(x)\big)_s \tag{34.309}$$

parce que $i, j > k$ implique que dans $P_{ij}\tau_k(x)$ nous inversons deux élément non nuls de $\tau_k(x)$, tout en laissant le k^{e} élément. Le dénominateur ne change pas et il s'agit réellement d'une inversion de ligne. Donc

EQooIBVJooTOWCGT

$$\big(P_{ij}M_k(x)\big)_{st} = (P_{ij})_{st} - \tau_k\big(P_{ij}x\big)_s\delta_{kt}. \tag{34.310}$$

De l'autre côté,

$$\big(M_k(y)P_{ij}\big)_{st} = (P_{ij})_{st} - \tau_k(y)_s(P_{ij})_{kt}. \tag{34.311}$$

Mais comme $i, j > k$ la k^{e} ligne de P_{ij} est la même que celle de la matrice unité, donc $(P_{ij})_{kt} = \delta_{kt}$.

$$\big(M_k(y)P_{ij}\big)_{st} = (P_{ij})_{st} - \tau_k(y)_s\delta_{kt}. \tag{34.312}$$

Cela correspond bien à (34.310). □

34.18 Méthode de Gauss avec pivot partiel (décomposition PLU)

34.18.1 L'idée

À chaque pas, nous faisons une permutation de ligne. Nous permutons à chaque pas la première ligne avec celle qui a le pivot le plus grand (en valeur absolue). Donc :

$$(A|b)^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 3 & 10 & 28 \\ -2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \tag{34.313}$$

Nous commençons par déplacer des lignes :

$$(A|b)^{(0')} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ -2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}. \tag{34.314}$$

Les multiplicateurs sont $l_{21} = 1/2$ et $l_{31} = -1/2$. Le fait est que les multiplicateurs ont toujours le plus grand dénominateur possible et nous avons alors toujours $0 \leqslant |l_{ij}| \leqslant 1$, qui sont des nombres relativement petits, et bien représentés en mémoire.

Nous avons la nouvelle matrice

$$(A|b)^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & -1/2 & -2 & -3 \\ 0 & 5/2 & 12 & 17 \end{pmatrix}. \tag{34.315}$$

Le pivot serait $-1/2$. Nous cherchons un pivot plus grand en dessous de ce $-1/2$ (et pas au dessus, sinon on casserait les zéros déjà trouvés). Nous trouvons le $5/2$ qui est plus grand. Nous permutons donc les deux dernières lignes :

$$(A|b)^{(1')} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & 5/2 & 12 & 17 \\ 0 & -1/2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \tag{34.316}$$

où le pivot est maintenant $l_{32} = -1/5$. La matrice suivante :

$$(A|b)^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & 5/2 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix} \tag{34.317}$$

Dans ce cas, la matrice L n'est pas aussi simple à construire parce que nous avons permuté des choses. Dans ce cas, la matrice L est encore de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 \\ . & . & 1 \end{pmatrix}. \tag{34.318}$$

Mais vu que nous avons permuté les lignes 2 et 3 au deuxième pas, nous devons permuter l_{21} et l_{31} avant de remplir la matrice L avec les multiplicateurs :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}. \tag{34.319}$$

Notons que ces L et U ne sont pas les mêmes que le LU obtenu sans pivot. Où est l'unicité ? Elle est que en fait maintenant nous n'avons pas $A = LU$, mais

$$PA = LU \tag{34.320}$$

où P est une matrice de permutation.

34.18.2 Le théorème

PROPooGCPAooDrlrGu

Proposition 34.134 (Méthode de Gauss avec pivot partiel[835]).
Soit une matrice inversible $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Il existe

- *une matrice de permutations P*
- *une matrice triangulaire inférieure de diagonale unitaire L,*
- *une matrice triangulaire supérieure inversible U*

telles que

$$PA = LU. \tag{34.321}$$

Notons que cette proposition ne demande que l'hypothèse d'inversibilité pour A. Il n'y a pas d'hypothèses sur tous les mineurs comme c'était le cas avec Gauss sans pivot.

Démonstration. Nous prouvons par récurrence qu'il existe des matrices Q_k, E_1, ..., E_k et A_k telles que

EQooOBXWooXxwXSe

$$Q_k A = E_1 \dots E_k A_k \tag{34.322}$$

avec

(1) Q_k est une matrice de permutation

(2) E_i est une transformation gaussienne sur la i^{e} ligne

(3) A_k est triangulaire supérieure jusqu'à la k^{e} colonne.

Sachant que $\det(Q_k) = \pm 1$, et que $\det(E_i) = 1$, le passage au déterminant dans (34.322) nous donne $\det(A_k) \neq 0$ et si nous notons $\Omega_k(A)$ la matrice tronquée de A, ne gardant que les entrées plus grandes que k, nous avons

$$\det(A_k) = \prod_{i=1}^{k} (A_k)_i i \det\big(\Omega_{k+1}(A_k)\big). \tag{34.323}$$

Donc : $(A_k)_{ii} \neq 0$ pour $i \leqslant k$ et $\det\big(\Omega_{k+1}(A_k)\big) \neq 0$.

Pour fixer les idées, voici une image de $k = 2$:

$$\begin{array}{c} \overset{\Delta_k(A_2)}{\overbrace{}} \\ \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{*} & \boxed{*} & * & * & * \\ \boxed{0} & \boxed{*} & * & * & * \\ 0 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{$\boxed{\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array}}$}} \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right) \\ \underbrace{}_{\Omega_{k+1}(A_2)} \end{array} \tag{34.324}$$

Étant donné que $\det\big(\Omega_{k+1}(A_k)\big) \neq 0$, parmi les nombres $(A_k)_{i,k+1}$ $(i \geqslant k+1)$, au moins un est non nul et nous posons r_{k+1} tel que $|(A_k)_{r_{k+1},k+1}|$ soit maximum parmi ces éléments.

Le nombre r_{k+1} est enregistré parce qu'il servira à écrire la matrice P plus tard. Les matrices E_i ne sont pas enregistrées, parce que nous verrons qu'elles vont encore changer. Seule la dernière sera enregistrée.

La composante $(k+1, k+1)$ de la matrice

$$P_{r_{k+1},k+1} A_k \tag{34.325}$$

est non nulle et peut donc servir de pivot. Soit M_{k+1} la transformation gaussienne pour la $(k+1)^{\text{e}}$ colonne de la matrice $P_{r_{k+1},k+1}A_k$. La matrice

$$A_{k+1} = M_{k+1} P_{r_{k+1},k+1} A_k \tag{34.326}$$

EQooCFIFooNDvPFE

est alors une matrice triangulaire supérieure jusqu'à la $(k+1)^{\text{e}}$ colonne. En posant $E_{k+1} = M_{k+1}^{-1}$ nous avons

$$P_{r_{k+1},k+1} E_{k+1} A_{k+1} = A_k, \tag{34.327}$$

et nous nous sentons en droit de récrire l'équation de départ (34.322) :

$$Q_k A = E_1 \dots E_k A_k = E_1 \dots E_k P_{r_{k+1},k+1} E_{k+1} A_{k+1}. \tag{34.328}$$

Le lemme 34.133 nous permet de ramener la matrice $P_{r_{k+1},k+1}$ en première position, quitte à modifier un peu (pas beaucoup) chacune des matrices E_i $(i = 1, \dots, k)$. C'est pour cela que nous n'enregistrons pas les matrices E_i. Nous avons donc

$$P_{r_{k+1},k+1} Q_k A = E_1' \dots E_k' E_{k+1} A_{k+1} \tag{34.329}$$

où

- Le produit $P_{r_{k+1},k+1} Q_k$ est encore une matrice de permutation, et mieux : elle vaut

$$\prod_{i=1}^{k+1} P_{r_i,i}. \tag{34.330}$$

  Cela montre qu'il est suffisant d'enregistrer les nombres r_i pour reconstituer cette partie.

- La matrice E_i' est une transformation gaussienne pour la i^{e} colonne.

- La matrice A_{k+1} est triangulaire supérieure jusqu'à la $k+1^{\text{e}}$ ligne.

La récurrence est maintenant finie et nous pouvons écrire avec $k = n$:

$$Q_n A = E_1 \dots E_n A_n \tag{34.331}$$

EQooFUEUooHVPFwn

où le produit $E_1 \dots E_n$ est triangulaire inférieure et A_n est triangulaire supérieur.

Maintenant nous enregistrons la matrice $U = A_n$, le produit $L = \prod_{i=1}^{n} E_n$ et les nombres r_i qui permettent de retrouver P. □

Note : dans l'équation (34.331) nous avons bien entendu massivement renommé les E'_i en E_i. En réalité la matrice E_1 vient avec n primes sur la tête.

Dans les exemples 34.138, 34.139 et 34.140, nous allons résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{34.332}$$

d'abord de façon exacte, et ensuite en supposant une machine ne tenant que 8 chiffres significatifs en utilisant la méthode de Gauss avec ou sans pivot.

Commençons par voir comment se passe en pratique la décomposition $PA = LU$ de Gauss avec pivot partiel.

EXooAZTDooTUXZJb

Exemple 34.135.
Décomposons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34.333}$$

Sur la première colonne, le plus grand nombre est 3. Nous commençons par permuter la première et la troisième ligne en utilisant la matrice de permutation $P_1 = P_{3,1}$ et nous enregistrons $r_1 = 3$. Nous avons alors la matrice

$$A'_0 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{34.334}$$

EQooJCCLooQZVajj

Pour trouver la matrice A_1 nous suivons l'équation (34.326). Bien que le résultat net soit des combinaisons de lignes : $L_2 \to L_2 - 2L_1/3$ et $L_3 \to L_3 - L_1/3$ (que nous pourrions savoir dès à présent), il est important de passer par la matrice gaussienne pour obtenir la matrice L_1.

La matrice de transformation gaussienne pour la première colonne de (34.334) est :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{34.335}$$

et $L_1 = M_1^{-1}$. Le lemme 34.124 nous dit comment calculer facilement cet inverse :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{34.336}$$

En suivant l'équation (34.326) nous posons $A_1 = M_1 A'_0$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 3 \end{pmatrix} \tag{34.337}$$

EQooUBRPooRJbCYn

et nous avons

$$Q_1 A = L_1 A_1 \tag{34.338}$$

où L_1, A_1 et $r_1 = 3$ sont enregistrés. La matrice Q_1 peut être retrouvée en sachant r_1 parce que P est la matrice de permutation $P_{r_1,1}$.

Nous travaillons maintenant sur la deuxième colonne de A_1. Le plus grand élément en valeur absolue (sur ou sous la diagonale) est $-2/3$. Nous posons $r_2 = 3$ et

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -2/3 & 3 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \tag{34.339}$$

et la matrice gaussienne pour la deuxième colonne est

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \tag{34.340}$$

Le $-1/2$ provient du calcul $-\big((-1/3)/(-2/3)\big)$. L'inverse de cette matrice est facile :

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \tag{34.341}$$

et la matrice suivante à enregistrer est

$$A_2 = M_2 P_{3,2} A_1 = M_2 A_1' = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -2/3 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}. \tag{34.342}$$

Notons toutefois que pour calculer cette matrice, seul le dernier élément demande un calcul. La première colonne ne change pas (par construction), la seconde gagne un zéro en dernière ligne (la matrice M_2 sert à ça) et sur la dernière colonne, seule la dernière ligne est sujette à changement.

Avec la matrice A_2, la trigonalisation supérieure est faite. La décomposition n'est cependant pas terminée. Nous devons encore trouver la partie triangulaire inférieure. Nous en sommes à

$$Q_1 A = L_1 A_1 = L_1 P_{3,2} L_2 A \tag{34.343}$$

où Q_1 est la première matrice de permutation.

Utilisant le lemme 34.133, il est facile de permuter L_1 avec $P_{3,2}$:

$$L_1 P_{3,2} = P_{3,2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1'} \tag{34.344}$$

Nous avons donc

$$P_{3,2} P_{3,1} A = L_1' L_2 A \tag{34.345}$$

Deux multiplications matricielles plus tard nous terminons :

$$PA = LU \tag{34.346}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -2/3 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}. \tag{34.347}$$

△

Notons que Sage utilise la méthode de Gauss avec pivots :

```
sage: A=matrix([ [1,2,3],[2,5,0],[3,8,0] ])
sage: A
[1 2 3]
[2 5 0]
[3 8 0]
sage: A.LU()
(
[0 1 0]  [  1   0   0]  [   3    8    0]
[0 0 1]  [1/3   1   0]  [   0 -2/3    3]
[1 0 0], [2/3 1/2   1], [   0    0 -3/2]
)
```

tex/sage/sageSnip006.sage

Mais attention : Sage crée une décomposition $A = PLU$ et non $PA = LU$. D'où le fait que la matrice de permutations de Sage est l'inverse de celle donnée ici.

34.18.3 D'un point de vue algorithmique

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 34.136

Je ne suis pas certain de l'optimalité de ce que je raconte ici. Je décris simplement ce que j'ai fait pour écrire mon programme finitediff.

Si vous êtes expert en calcul numérique, n'hésitez pas à donner votre avis.

Nous décrivons à présent la décomposition $A = PLU$ (du théorème 34.134, avec le P à droite). En suivant l'exemple 34.135 nous voyons assez bien comment créer les matrices U et P au fur et à mesure. La construction de L est peut-être moins évidente.

Écrivons un exemple très explicite pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}. \tag{34.348}$$

Nous commençons par permuter des lignes pour avoir un grand pivot :

$$P_{12}A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}. \tag{34.349}$$

Et nous effectuons l'élimination avec la matrice

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{34.350}$$

Cela donne le premier résultat :

$$M_1P_{12}A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & 5/2 & 12 \end{pmatrix} \tag{34.351}$$

EQooKTBLooHeQkgk

Nous continuons avec P_{23} pour avoir un nouveau grand pivot :

$$P_{23}M_1P_{12}A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 5/2 & 12 \\ 0 & -1/2 & -2 \end{pmatrix}. \tag{34.352}$$

Nous utilisons la matrice

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} \tag{34.353}$$

et au final :

$$M_2P_{23}M_1P_{12}A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 5/2 & 12 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} = U. \tag{34.354}$$

L'égalité obtenue est

$$M_2P_{23}M_1P_{12}A = U. \tag{34.355}$$

Pour avoir la décomposition PLU il faut écrire

$$A = P_{12}M_1^{-1}P_{23}M_2^{-1}U, \tag{34.356}$$

EQooWKUYooUBQYtc

et permuter P_{23} avec M_1^{-1}, ce qui est facile par le lemme 34.133.

Remarque 34.137.
Nous ne devons permuter la matrice M_k avec une matrice de permutations qu'à partir de la deuxième étape. En effet l'équation (34.351) revient à

$$A = M_1^{-1}P_{12}m_U \tag{34.357}$$

qui est dans le bon ordre. Ce n'est qu'à partir de la seconde étape que des matrices de permutations apparaissent à droite des matrices gaussiennes.

Cependant dans un cas 4×4, cette méthode deviendrait fastidieuse parce que nous aurions encore des étapes à faire. En repartant de (34.356), mais avec m_U (la matrice pas encore tout à fait triangularisée) au lieu de U, nous aurons, pour un certain $k > 3$:

$$M_3P_{3k}M_2P_{23}M_1P_{12}A = U, \tag{34.358}$$

ce qui fait :

$$A = P_{12}M_1^{-1}P_{23}M_2^{-1}P_{3k}M_3^{-1}U. \tag{34.359}$$

Tous les P_{ij} peuvent être mis à gauche parce que leurs indices sont toujours strictement supérieurs à ceux des M_l placés devant eux. Mais c'est fastidieux.

Nous allons donc permuter à chaque étape pour ne retenir que l'important. Si à une certaine étape nous avons

$$A = P_{1,r_1} \dots P_{k,r_k} M_1^{-1} \dots M_k^{-1} m_U \tag{34.360}$$

avec

$$m_U = P_{k+1,r_{k+1}} M_{k+1}^{-1} U \tag{34.361}$$

alors nous allons directement permuter $P_{k+1,r_{k+1}}$ avec tous les M_i^{-1}. Si nous notons P_k la permutation (pas élémentaire) à l'étape k et L_k la matrice triangulaire inférieure à de l'étape k,

$$A = P_k L_k m_U = P_k L_k P_{k+1,r_{k+1}} M_{k+1}^{-1} m'_U. \tag{34.362}$$

Nous enregistrons alors $P_{k+1} = P_k P_{k+1,r_{k+1}}$ et pour L_{k+1} nous partons de L_k et nous faisons deux opérations suivantes :

- nous permutons, sur ses colonnes non triviales, les indices $k+1$ et r_{k+1},
- nous multiplions par M_{k+1}^{-1}, ce qui revient à simplement lui ajouter une colonne non triviale.

Notons que $r_{k+1} \geqslant k+1$, de telle sorte que sur les colonnes non triviales (qui sont jusqu'au numéro k), la permutation des lignes $k+1$ et r_{k+1} ne change pas l'aspect de la matrice : elle reste multi-gaussienne de dernière colonne k.

34.18.4 Exemples

Nous nous lançons dans la résolution du système

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{34.363}$$

ExooNTECooXvTcoh

Exemple 34.138.
Nous commençons de façon exacte, par la méthode de Gauss sans pivot. La première transformation gaussienne est

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix} \tag{34.364}$$

et nous calculons

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{-9} \end{pmatrix}. \tag{34.365}$$

Vu que cette dernière est triangulaire supérieure, nous avons fini la méthode de Gauss et $U = E_1 A$. En ce qui concerne la matrice L, elle est donnée par $L = E_1^{-1}$, c'est-à-dire

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^9 & 1 \end{pmatrix}. \tag{34.366}$$

Au final nous avons la décomposition $A = LU$ exacte suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^9 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & 1 - 10^9 \end{pmatrix}. \tag{34.367}$$

Résoudre le système $Ax = b$ revient à résoudre $LUx = b$ et donc résoudre successivement les systèmes

$$\begin{cases} Ly = b & \text{(34.368a)} \\ Ux = y. & \text{(34.368b)} \end{cases}$$

D'abord le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{34.369}$$

donne $y_1 = 1$ et $y_2 = 2 - 10^9$.

Ensuite nous résolvons

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & 1 - 10^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - 10^9 \end{pmatrix}. \tag{34.370}$$

Cela donne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10^9}{1-10^9} \\ \frac{2-10^9}{1-10^9} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{34.371}$$

C'est également le résultat que trouve Sage :

```
sage: var('y')
y
sage: solve(    [10**(-9)*x+y==1,x+y==2],[x,y]    )
[[x == (1000000000/999999999), y == (999999998/999999999)]]
```

tex/sage/sageSnip007.sage

△
EXooNVRNooJgQmQc

Exemple 34.139 ([835]).
Nous recommençons tout le calcul avec une précision limitée à 8 chiffres significatifs, sans pivot.

Nous avons à nouveau la transformation gaussienne

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix}, \tag{34.372}$$

mais pour calculer U nous effectuons le produit matriciel

$$U = E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & * \end{pmatrix}. \tag{34.373}$$

Nous détaillons à présent le calcul de l'élément noté $*$. Le calcul de $10^9 \ominus 1$ donne

$$999999999 = 9.99999999 \times 10^8, \tag{34.374}$$

mais la précision étant limitée à 8 chiffres, un arrondi arrive. Étant donné que le premier chiffres supprimé est un 9 nous retombons sur 10^9, et donc notre machine à précision limitée donnera

$$U = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & -10^9 \end{pmatrix}. \tag{34.375}$$

Ensuite le calcul de $L = E_1^{-1}$ ne cause pas de problèmes :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix}. \tag{34.376}$$

Maintenant il s'agit de résoudre les systèmes $Ly = b$ et $Ux = y$. Du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{34.377}$$

nous tirons tout de suite $y_1 = 1$ et ensuite $10^9 + y_2 = 2$, c'est-à-dire $y_2 = 2 - 10^9$, qui en précision limitée donne encore $y_2 = -10^9$. À résoudre maintenant :

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & -10^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10^9 \end{pmatrix}. \tag{34.378}$$

Cela donne immédiatement $x_2 = 1$ et ensuite

$$10^{-9} x_1 + 1 = 1, \tag{34.379}$$

donc $x_1 = 0$. La solution trouvée est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{34.380}$$

EQooBGWEooVGSVoe

qui est complètement faux au niveau de la première variable. △
EXooNCRSooTfmPFr

Exemple 34.140 ([835]).
Nous résolvons encore le même système en précision limitée, mais en utilisant cette fois la méthode de Gauss avec pivot partiel.

Le plus grand élément de la première colonne est 1 ; nous utilisons donc la permutation $P_{1,2}$:

$$P_{1,2} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix}. \tag{34.381}$$

La matrice de transformation gaussienne pour la première colonne de cette matrice est

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-9} & 1 \end{pmatrix} \tag{34.382}$$

et nous posons

$$A_1 = M_1 P_{1,2} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -10^{-9}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U \tag{34.383}$$

où un arrondi a eu lieu pour $-10^{-9} + 1 = 1$. En inversant M_1 nous avons

$$L_1 = M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix}. \tag{34.384}$$

La décomposition est

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \tag{34.385}$$

Le moment de résoudre est venu. Vu que $PLUx = b$ nous devons résoudre les systèmes

$$\begin{cases} Pz = b & \text{(34.386a)} \\ Ly = z & \text{(34.386b)} \\ Ux = y. & \text{(34.386c)} \end{cases}$$

Pour z c'est facile :

$$z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{34.387}$$

Pour y il y a un arrondi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{34.388}$$

Tout de suite : $y_1 = 2$ et ensuite $2 \times 10^{-9} + y_2 = 1$, ce qui donne $y_2 = 1 \ominus 2 \times 10^{-9} = 1$. Donc

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{34.389}$$

Et enfin pour x c'est le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{34.390}$$

Nous avons $x_2 = 1$ et ensuite $x_1 + 1 = 2$ c'est-à-dire $x_1 = 1$. Au final la solution trouvée est

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{34.391}$$

Cette solution est considérablement meilleure que (34.380). △

34.141.
L'utilisation du pivot non seulement assure le fait que la trigonalisation va bien se passer (on évite les zéros en pivot), mais aussi et surtout, en choisissant de prendre le plus grand pivot possible, nous obtenons une meilleur stabilité numérique.

34.19 Résolution de systèmes linéaires (suite)

34.19.1 Déterminant

Pour calculer un déterminant lorsque nous avons la décomposition $A = LU$ nous pouvons faire

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(U) \tag{34.392}$$

parce que L est triangulaire avec des 1 sur la diagonale.

Si par contre nous avons fait des pivots, nous avons $PA = LU$. Il nous faut le déterminant de P, qui n'est autre que ± 1. Nous avons

$$\det(P) = (-1)^s \tag{34.393}$$

où s est le nombre de permutations effectives effectuées. Nous précisons « effectives » parce qu'il ne faut pas compter le pas où nous n'avons pas permuté (les cas où le bon pivot était présent du premier coup). Nous avons alors

$$\det(A) = (-1)^s \det(U). \tag{34.394}$$

34.19.2 Plusieurs termes indépendants

Mettons un système $Ax = b$ qu'il faut résoudre pour plusieurs b différents. C'est typiquement le cas où l'on voudrait calculer l'inverse de A. Mais on va directement se calmer. Soient donc à résoudre $Ax_1 = b_1$, ..., $Ax_n = b_n$.

Les opérations (avec ou sans pivot) que nous faisons ne dépendent que de la matrice A, mais aucune décision concernant les pivots ou la matrice des multiplicateurs ne dépend de b. Autre façon de dire : si le système $(A|b_1)$ devient $(U|y_1)$, le système $(A|b_i)$ devient $(U|y_i)$ avec le même U.

Nous ne sommes donc pas obligés de faire tout le travail autant de fois qu'il n'y a de systèmes à résoudre. Donc si on a plusieurs systèmes à résoudre avec la même matrice, on fait mieux de retenir une fois pour toute la décomposition LU (avec ou sans pivots), avant de vraiment résoudre.

Ou alors on peut aussi faire que, au lieu de faire $(A|b_i)$ plein de fois, faire une seule fois

$$(A|b_1 \dots b_n). \tag{34.395}$$

Et on fait tout le travail sur tous les vecteurs d'un en même temps.

Soit e_i la base canonique. Si nous notons x_n les solutions des problèmes $Ax_i = e_i$, tous les problèmes $Ax_i = e_i$ s'écrivent d'un seul coup

$$AX = Y \tag{34.396}$$

où X est la matrice des x_i en colonnes, et Y est celle des e_i en colonnes. Oh, mais $Y = \mathbb{1}$ évidemment. Donc

$$AX = \mathbb{1}. \tag{34.397}$$

Si nous supposons que A est inversible, alors ce X est l'inverse.

Donc pour calculer l'inverse d'une matrice de dimension non trop grande, il suffit d'utiliser la méthode de Gauss sur les vecteurs de la base canonique. Cette idée est la base du calcul de l'inverse par matrice companion. En effet, si nous partons du problème

$$(A|\mathbb{1}) \tag{34.398}$$

et nous appliquons la méthode de Gauss avec pivot, nous arrivons à

$$(U|L^{-1}P). \tag{34.399}$$

Attention : le produit $L^{-1}P$ est une permutation des *colonnes* de L^{-1}. Vu que L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, L^{-1} est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Donc si la matrice n'est pas trop grande, on peut assez facilement remettre les colonnes de $L^{-1}P$ dans l'ordre pour recomposer une matrice triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale.

Une autre façon de calculer l'inverse, si $A = LU$ est connue, il suffit de faire

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}. \tag{34.400}$$

Et il existe un algorithme facile pour l'inverse d'une matrice triangulaire.

34.19.3 Cholesky

La méthode de Gauss s'applique sans hypothèses sur la matrice A, à part qu'elle doit être de petite dimension, comme pour toute méthode directe. Souvent nous savons des choses sur la matrice. Ici nous allons supposer que A est symétrique et définie positive.

Comment numériquement vérifier ces hypothèses ? En ce qui concerne la symétrie, il suffit de faire le test complet :

$$A^t = A. \tag{34.401}$$

La vérification de cela coûte au maximum n^2 comparaisons (et en fait la moitié de ça moins la diagonale).

Le fait que A soit définie positive est facile à vérifier pour utiliser Cholesky parce que il suffit de le faire, et si il n'y a pas de nombres complexes qui arrivent, c'est que la matrice était définie positive.

Un lemme très simple à mettre en oeuvre numériquement nous permet de traiter certains cas.

Lemme 34.142.
Une matrice symétrique possédant un élément négatif sur la diagonale n'est pas définie positive.

Démonstration. Un simple calcul ou effort d'imagination montre que $\langle Me_k, e_k\rangle = M_{kk}$. Donc si M doit être définie positive, M_{kk} doit être positive par le lemme 8.232. □

Ce lemme est un moyen déjà de faire quelques vérifications. Et si les éléments diagonaux de A sont tous négatifs, on peut prendre $-A$.

LEMooVEIYooZbShQb

Lemme 34.143.
Si A est une matrice symétrique strictement définie positive, alors pour tout k, la matrice tronquée $\Delta_k(A)$ l'est également.

Démonstration. Le fait que $\Delta_k(A)$ soit symétrique est évident. Le fait qu'elle soit définie positive l'est moins. Soit $y \in \mathbb{R}^k$ et le vecteur $\tau y \in \mathbb{R}^n$, qui est « complété » avec des zéros.

Nous avons $\langle \Delta_k(A)y, y\rangle_k = \langle A\tau y, \tau y\rangle_n$. En effet

$$\langle \Delta_k(A)y, y\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} A_{il}y_l y_i. \tag{34.402}$$

Et à droite :

$$\langle A\tau y, \tau y\rangle = \sum_{i=1}^{n}(A\tau y)_i(\tau y)_i = \sum_{i=1}^{k}(A\tau y)_i y_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{n} A_{il}(\tau y)_l y_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} A_{il}y_l y_i \tag{34.403}$$

où nous avons utilisé le fait que $(\tau y)_i = 0$ dès que $i > k$ et que $(\tau y)_i = y_i$ sinon.

En conséquence de quoi $\langle \Delta_k(A)y, u\rangle > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^k$ et la matrice $\Delta_k(A)$ est strictement définie positive. □

LEMooLBQLooIYvacH

Lemme 34.144.
Si T est une matrice triangulaire, alors $(T_{ii})^{-1} = (T^{-1})_{ii}$.

Démonstration. Il suffit de se rendre compte que le coefficient ii de l'égalité $\mathbb{1} = TT^{-1}$ donne

$$1 = \sum_l T_{il}(T^{-1})_{li}. \tag{34.404}$$

Dans la somme il ne reste que le terme $l = i$. □

Nous allons chercher une décomposition de type LU sous la forme $A = LL^t$, c'est-à-dire $U = L^t$. Attention : maintenant nous n'avons plus des 1 sur la diagonale. Ce n'est donc pas exactement la décomposition LU dont nous parlions plus haut. C'est pour cela que nous n'allons pas la noter LL^t mais BB^t.

Théorème 34.145 (Cholesky[834])**.**
Soit une matrice réelle symétrique strictement définie positive. Il existe une unique matrice réelle B telle que

- *B est triangulaire inférieure,*
- *la diagonale de B est positive,*
- *$A = BB^t$.*

Démonstration. Par la décomposition LU du théorème 34.126 nous avons des matrices L et U telles que $A = LU$. Soit D la matrice diagonale donnée par

$$D_{ii} = \sqrt{U_{ii}}. \tag{34.405}$$

Cette définition fonctionne parce que $U_{ii} > 0$. En effet nous savons que $\Delta_k(A) = \Delta_k(L)\Delta_k(U)$, et en passant au déterminant,

$$\det\big(\Delta_k(A)\big) = \det\big(\Delta_k(U)\big). \tag{34.406}$$

Vu que $\Delta_k(A)$ est strictement définie positive par le lemme 34.143, son determinant est strictement positif[24] et nous avons

$$\det\big(\Delta_k(U)\big) > 0. \tag{34.407}$$

En appliquant cela à $k = 1$ nous avons $U_{11} > 0$ puis de proche en proche, $U_{ii} > 0$ pour tout i.

[24] Le théorème 8.225 donne une diagonalisation par des matrices de déterminant 1. Vu que les valeurs propres forment sur la diagonale, et qu'elles sont toutes positives, el déterminant est positif.

Nous posons :

$$B = LD \qquad \text{qui est triangulaire inférieure} \tag{34.408a}$$
$$C = D^{-1}U \qquad \text{qui est triangulaire supérieure.} \tag{34.408b}$$

Nous avons bien entendu $A = BC$ et nous allons prouver que $C = B^t$. Vu que $A = A^t$ nous pouvons identifier BC et C^tB^t :

$$BC = C^tB^t. \tag{34.409}$$

En mettant les matrices triangulaires supérieures à gauche et inférieures à droite :

$$C(B^t)^{-1} = B^{-1}C^t, \tag{34.410}$$

qui sont donc deux matrices diagonales. Nous montrons que cette diagonale est en réalité l'identité.

D'abord

$$B_{ii} = \sum_{l=1}^{n} L_{il}D_{li} = L_{ii}\sqrt{U_{ii}} = \sqrt{U_{ii}} \tag{34.411}$$

parce que $L_{ii} = 1$. Notons en passant que la diagonale de B est positive. Ensuite

$$C_{ii} = \sum_{l=1}^{n}(D^{-1})_{il}U_{li} = (D^{-1})_{ii}U_{ii} = \frac{1}{\sqrt{U_{ii}}}U_{ii} = \sqrt{U_{ii}}. \tag{34.412}$$

Donc B et C ont des diagonales égales. Calculons alors la diagonale de $B^{-1}C^t$:

$$\left(B^{-1}C^t\right)_{ii} = \sum_{l}(B^{-1})_{il}(C^t)_{li} = (B^{-1})_{ii}C_{ii} \tag{34.413}$$

parce que encore une fois, de la somme il ne reste que le terme $l = i$.

Mais B est une matrice triangulaire qui tombe sous le coup du lemme 34.144. Donc $(B^{-1})_{ii} = (B_{ii})^{-1} = (C_{ii})^{-1}$. Nous avons alors

$$(B^{-1}C^t)_{ii} = 1. \tag{34.414}$$

Cela conclut l'existence de la décomposition de Cholesky.

En ce qui concerne l'unicité, soient $A = BB^t = CC^t$. Nous regroupons les supérieures et les inférieures :

$$B^t(C^t)^{-1} = B^{-1}C. \tag{34.415}$$

EQooRRJHooJrFBLn

Ces deux matrices sont donc diagonales et nous posons $D = B^{-1}C$, c'est-à-dire $C = BD$. Nous remplaçons donc C par BD dans (34.415) :

$$A = BB^t = BD(BD)^t = BDD^tB^t. \tag{34.416}$$

Donc $DD^t = \mathbb{1}$, ce qui signifie que les éléments diagonaux de D sont ± 1. Nous montrons qu'ils sont positifs : à partir de $C = BD$ nous déballons

$$C_{ii} = \sum_{l} B_{il}D_{li}, \tag{34.417}$$

et donc

$$B_{ii}D_{ii} = C_{ii}. \tag{34.418}$$

En sachant que les conditions de la décomposition de Cholesky demandent les éléments diagonaux positifs nous en déduisons que D_{ii} est positif et donc égal à 1. Finalement $D = \mathbb{1}$ et $B = C$. □

Prenons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & -7 \\ -2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \tag{34.419}$$

Elle est symétrique et définie positive. Nous posons

EQooFMWUooFdTgiF

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} & \text{(34.420a)} \\ l_{i1} = a_{i1}/l_{11} & \text{(34.420b)} \end{cases}$$

pour $i=2,\dots,n$. Et aussi [EQooJTVGooEkynpH]

$$\begin{cases} l_{jj}=(a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{jk}^2)^{1/2} & (34.421a)\\ l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk})/a_{jj} & (34.421b)\end{cases}$$

pour $i=j+1,\dots,n$.

Les formules (34.420) nous disent comment remplir la première colonne. Cela donne la matrice

$$L=\begin{pmatrix}\sqrt{4}=2 & . & .\\ 2/2=1 & . & .\\ -2/2=-1 & . & .\end{pmatrix} \quad (34.422)$$

Les formules (34.421) donnent les autres colonnes en fonction des précédentes.

Dans Sage :

```
sage: A=matrix(  [  [4,2,-2],[2,10,-7],[-2,-7,9]  ]   )
sage: A
[ 4  2 -2]
[ 2 10 -7]
[-2 -7  9]
sage: A.cholesky()
[ 2  0  0]
[ 1  3  0]
[-1 -2  2]
```

tex/sage/sageSnip005.sage

34.20 Système linéaire (méthodes itératives)

Nous trouvons des méthodes itératives lorsque les matrices sont grandes, ce qui arrive lorsque l'on discrétise une équation différentielle.

Nous allons chercher des méthodes de la forme $x_{n+1}=Bx_n+q$; ce sont des méthodes stationnaires. La convergence d'une méthode est toujours liée à la matrice B et en général, la convergence ne dépend pas du choix du vecteur initial. Nous faisons donc souvent $x_0=0$ et donc $x_1=q$. Voilà donc une itération de faite gratuitement.

Nous notons e_k le **vecteur d'erreur** qui est défini par $e_k=x-x_k$. Et le **vecteur résidu** $r_k=q-Bx_k$. Attention : ici k n'est pas un indice mais un numéro de vecteur.

Notons que si x est solution, alors $q-Bx=0$, ce qui motive le vecteur résidu.

Les conditions d'arrêt d'un algorithme seraient

$$\begin{cases}\|e_k\|_\infty \ll \epsilon_1 & (34.423a)\\ \|r_k\|_\infty < \epsilon_2 & (34.423b)\end{cases}$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont des précisions décidées à l'avance par l'utilisateur.

Proposition 34.146.
Si A est une matrice inversible, alors

$$\lim_{k\to\infty} e_k=\lim_{k\to\infty} r_k=0. \quad (34.424)$$

Vu que $r_k=Ae_k$, si la matrice A est mal conditionnée, il peut arriver que r_k reste grand alors que e_k est déjà petit.

Remarque 34.147.
Dans les méthodes stationnaires, nous avons $x_{n+1}=Bx_n+q$ avec B et q fixés au départ de l'algorithme. Il existe des méthodes non stationnaires pour lesquelles l'itération prend la forme $x_{n+1}=B_nx_n+q_n$ avec B_n et q_n qui changement avec les étapes.

[PROPooAQSWooSTXDCO]

Proposition 34.148.
Pour la méthode $x_{n+1}=Bx_n+q$ nous avons équivalence de

(1) La méthode converge pour tout x_0

(2) B est une matrice convergente[25]

(3) $\rho(B) < 1$ (rayon spectral).

De plus si $\|B\| < 1$ alors la méthode converge (quelle que soit la norme algébrique).

La norme d'une matrice (en tout cas, certaines normes) est quelque chose de facile à calculer à l'ordinateur. Typiquement $\|.\|_\infty$ est un simple maximum. Cependant si après avoir calculé $\|B\|_i$ pour des dizaines de normes i différentes, nous avons toujours $\|B\|_i \geqslant 1$, alors nous ne pouvons rien conclure.

34.20.1 La méthode générale

Nous décomposons la matrice A sous la forme $A = M - N$ avec M inversible. Le système $Ax = b$ devient

$$Mx - Nx = b \tag{34.425}$$

puis $Mx = Nx + b$ et finalement

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b, \tag{34.426}$$

et voilà une méthode stationnaire avec $B = M^{-1}N$ et $q = M^{-1}b$.

Mais ici nous voyons que M doit être non seulement inversible, mais en plus doit être facilement calculable. En sachant que nous travaillons avec des grandes matrices, il n'est pas question d'inverser M avec une méthode de Gauss.

En bref, il faut choisir M triangulaire parce que c'est en gros la seule que nous pouvons inverser facilement[26].

Remarque 34.149.
La matrice B ne doit pas spécialement être inversible. Si elle ne l'est pas, ce n'est pas un problème.

34.20.2 Jacobi

Nous décomposons

$$A = D - E - F \tag{34.427}$$

EQooOCJYooCqsfQM

où D est la diagonale de A, $-F$ est la partie triangulaire supérieure (sans la diagonale) et $-E$ la triangulaire inférieure (sans la diagonale). Donc D, E et F sont simplement des extractions de parties de la matrice A (et quelques changements de signes).

La méthode de Jacobi prend $M = D$ et $N = (E + F)$. L'inverse de M est facile à calculer parce que M est diagonale. Nous notons B_J la matrice B de la méthode de Jacobi.

Remarque 34.150.
Il se peut que la matrice A ait des zéros sur la diagonale, même si elle est inversible. Et cela est un problème parce qu'alors la matrice D ici construite n'est pas inversible. Dans ce cas, avant de nous lancer dans la méthode de Jacobi, il faut permuter deux lignes de A et donc de b.

Attention cependant que l'on pourrait vouloir effectuer ces permutations en mettant sur la diagonale des nombres les plus grands possibles (parce qu'ensuite, ce qui rentre dans les calculs, c'est D^{-1} qui aura alors des petits nombres). Mais il faut toutefois faire en sorte que le rayon spectral de la matrice B résultante reste plus petit que 1.

Chaque changement dans A induit des changements dans B et donc sur la convergence de la méthode.

34.20.3 Gauss-Seidel

Nous partons de la même décomposition $A = D - E - F$ que dans (34.427). La méthode de Gauss-Seidel prend $M = (D - E)$ et $N = F$.

34.20.4 Autres

Voir la méthode des gradients, et des gradients conjugués.

[25] C'est-à-dire $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$.
[26] Les matrices orthogonales sont aussi facilement inversibles, mais ne se prêtent pas bien à une décomposition de type somme.

34.21 Indices connectés, matrice irréductible

Définition 34.151.
*Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Nous disons que les indices i et j sont **directement connectés** si $A_{ij} \neq 0$ ou $A_{ji} \neq 0$.*

DEFooADAAooAAMscc

Définition 34.152.
*Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Nous disons que les indices i et j sont **connectés** si il existe un ensemble d'indices $i_0 = i, i_1, \dots, i_{r-1}, i_r = j$ tels que $A_{i_k,i_{k+1}} \neq 0$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant r$.*

Par exemple pour que les indices 1 et 4 soient connectés, on peut avoir les éléments A_{13}, A_{32} A_{24} non nuls.

DEFooXIREooQtlzkO

Définition 34.153 ([836]).
*Une matrice carrée A est **réductible** si il existe une permutation σ telle que*

$$\sigma^t A \sigma = \begin{pmatrix} K & L \\ 0 & M \end{pmatrix} \tag{34.428}$$

EQooGGZKooUyXSJk

où K et M sont carrées.

Notons que par définition de la matrice d'une application linéaire,

$$B_{ij} = \langle e_i, Be_j \rangle = \langle e_i, \sigma^t A \sigma e_j \rangle = \langle \sigma e_i, A \sigma e_j \rangle = A_{\sigma(i),\sigma(j)}. \tag{34.429}$$

PROPooZTYDooZAxQxF

Proposition 34.154 ([836]).
Soit une matrice carrée A. Les faits suivants sont équivalents :

ITEMooYULAooVqgOnt

(1) A est réductible.

ITEMooNLVXooYSQKwO

(2) Il existe une partition non triviale I, J de $\{1,\dots,n\}$ telle que $I \cup J = \{1,\dots,n\}$, $I \cap J = \varnothing$ et pour tout $i \in I$, et pour tout $j \in J$, $A_{ij} = 0$.

ITEMooVNOHooRUNpwG

(3) La matrice A admet des indices non connectés (définition 34.152).

Démonstration. Dans plusieurs sens…

(1) **(1) implique (2)**
Nous notons j^* la taille de la matrice K dans (34.428). Nous avons $B_{ij} = 0$ si

$$\begin{cases} j^* + 1 \leqslant i \leqslant n & \text{(34.430a)} \\ 1 \leqslant j \leqslant j^*. & \text{(34.430b)} \end{cases}$$

Donc en posant $I = \sigma\{j^*+1,\dots,n\}$ et $J = \sigma\{1,\dots,j^*\}$ nous avons une partition non triviale de $\{1,\dots,n\}$ telle que si $i \in I$ et $j \in J$ alors $i = \sigma(i_0)$, $j = \sigma(j_0)$ et

$$A_{ij} = A_{\sigma(i_0),\sigma(j_0)} = B_{i_0,j_0} = 0. \tag{34.431}$$

(2) **(2) implique (1)** Soit une partition I, J comme indiquée dans l'hypothèse. Soit j^* le nombre d'éléments dans J. Soit σ une permutation de $\{1,\dots,n\}$ telle que $\sigma\{j^*+1,\dots,n\} = I$ et $\sigma\{1,\dots,j^*\} = J$. Nous posons ensuite $B = \sigma^t A \sigma$. Par construction si $i \in I$ et $j \in J$ alors $A_{ij} = 0$.

Mais si

$$\begin{cases} J^* + 1 \leqslant i \leqslant n & \text{(34.432a)} \\ 1 \leqslant j \leqslant j^*. & \text{(34.432b)} \end{cases}$$

alors $B_{ij} = A_{\sigma(i)\sigma(j)} = 0$. Donc B a la bonne forme.

(3) **(3) implique (2)**
Soient i et j deux indices non connectés : il n'existe pas de chaines partant de i et arrivant à j. Nous notons I l'ensemble des indices connectés à i, et J les autres. Pat hypothèses ces ensembles sont non vides.

Si $k \in I$ et $l \in J$ alors $A_{kl} = 0$ parce que sinon on aurait une chaine de i à k puis de k à l et donc de i à l, ce qui signifierait que l est connecté à i.

(4) **(2) implique (3)** Soit une partition I, J comme dans l'hypothèse. Si $j \in J$ est connecté à $i \in I$ alors il existe une chaine

$$i = i_0, i_1, \dots, i_r = j. \tag{34.433}$$

Si i_s est le premier dans J alors $i_{s-1} \in I$ et $A_{i_{s-1},i_s} = 0$, ce qui empêche la chaine de connecter j à i.

□

34.22 Localisation des valeurs propres

Sur l'ensemble $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ à coefficients réels nous introduisons l'ordre partiel[27] donné par $A \geqslant B$ lorsque $A_{ij} \geqslant B_{ij}$ pour tout i et j. Nous définissons de façon similaire les relations $A \leqslant B$, $A < B$ et $A > B$.

Si $x \in \mathbb{R}^n$ nous notons $|x| = \big(|x_1|, \dots, |x_n|\big)$ et $x \leqslant y$ lorsque $x_i \leqslant y_i$ pour tout i.

PROPooGVRVooZEvKcn

Proposition 34.155.
Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$.

ITEMooXQOPooPVLjFh

(1) Si $A \geqslant 0$ et si $x \leqslant y$ alors $Ax \leqslant Ay$.

ITEMooQLCJooKIbws

(2) Si $A \geqslant 0$ alors $Ax \leqslant |Ax| \leqslant A|x|$.

Démonstration. Pour la première inégalité, pour tout i et k nous avons $A_{ik}x_k \leqslant A_{ik}y_k$ et donc

$$(Ax)_i = \sum_k A_{ik}x_k \leqslant \sum_k A_{ik}y_k = (Ay)_k. \tag{34.434}$$

Pour la seconde, d'abord l'inégalité $Ax \leqslant |Ax|$ est évidente. Ensuite vu que $A_{ik} \geqslant 0$ nous avons

$$|Ax|_i = |\sum_k A_{ik}x_k| \leqslant \sum_k A_{ik}|x_k| = \big(A|x|\big)_i. \tag{34.435}$$

□

Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Nous notons

$$r_i = \sum_{j \neq i} |A_{ij}|. \tag{34.436}$$

Notons la somme sur la ligne i, pas sur la colonne : la somme est horizontale.

Définition 34.156.
Les ensembles

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - A_{ii}| \leqslant r_i\} \tag{34.437}$$

*sont les **disques de Gershgorin**. Nous allons également noter $B_i = \text{Int}(D_i)$ les boules ouvertes correspondantes.*

THOooUJNFooHpvCCF

Théorème 34.157 (Gershgorin)**.**
Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors $\lambda \in D_i$ pour un certain i.

Démonstration. Soit une valeur propre λ et un de ses vecteurs propres $u \in \mathbb{R}^n$: $Au = \lambda u$ avec $u \neq 0$. Soit i un indice réalisant le maximum $|u_i| = \max\{|u_k|\}_k$. Nous écrivons la i^{e} ligne de $Au = \lambda u$:

$$\sum_k A_{ik}u_k = \lambda u_i, \tag{34.438}$$

c'est-à-dire $A_{ii}u_i + \sum_{k \neq i} A_{ik}u_k = \lambda u_i$, ou encore

$$A_{ii} + \sum_{k \neq i} A_{ik}\frac{u_k}{u_i} = \lambda, \tag{34.439}$$

qui donne

$$|A_{ii} - \lambda| \leqslant \sum_{k \neq i} |A_{ik}|\frac{|u_k|}{|u_i|} \leqslant \sum_{k \neq i} |A_{ik}| \tag{34.440}$$

parce que $|u_i| \geqslant |u_k|$. Notons que sur la ligne précédente, $|.|$ est le module dans $\mathbb{C}$, pas la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. □

[27] Définition 1.24.

THOooTXAPooQqsBCj

Théorème 34.158 (Gershgorin 2[836]).
Soit une matrice irréductible $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et une valeur propre λ de A. Si elle est sur la frontière de l'union des disques de Gershgorin, alors elle est sur le bord de tous les disques.

Démonstration. Soit une valeur propre λ de A telle que $\lambda \in \partial\big(\bigcup_i D_i\big)$. Alors λ n'est dans l'intérieur d'aucune boule et nous avons $|\lambda - A_{ii}| \geqslant r_i$ pour tout i.

Soit un vecteur propre u de A tel que $\|u\|_\infty = 1$. Nous posons $I = \{1 \leqslant i \leqslant n \text{ tel que } |u_i| = 1\}$ et $J = \{1 \leqslant j \leqslant n \text{ tel que } |u_j| < 1\}$. Par hypothèse I n'est pas vide, et de plus $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J = \{1,\dots,n\}$ parce qu'aucune composante de u n'a un module[28] plus grand que 1.

La i^{e} composante de la relation $Au = \lambda u$ peut s'écrire

$$(A_{ii} - \lambda)u_i + \sum_{k\neq i} A_{ik}u_k = 0. \tag{34.441}$$

Forts de cela nous écrivons les inégalités suivantes :

$$r_i \leqslant |\lambda - A_{ii}| = \big|(\lambda - A_{ii})u_i\big| = |\sum_{k\neq i} A_{ik}u_k| \leqslant \sum_{k\neq i} |A_{ik}||u_k| \leqslant \sum_{k\neq i} |A_{ik}| = r_i. \tag{34.442}$$

Donc les inégalités sont des égalités :

$$r_i = |\lambda - A_{ii}| = \big|(\lambda - A_{ii})u_i\big| = |\sum_{k\neq i} A_{ik}u_k| = \sum_{k\neq i} |A_{ik}||u_k| = \sum_{k\neq i} |A_{ik}|. \tag{34.443}$$

EQooBIBJooFlscrx

En particulier l'égalité $\sum_{k\neq i} |A_{ik}||u_k| = \sum_{k\neq i} |A_{ik}|$ donne

$$\sum_{k\neq i} |A_{ik}|\big(|u_k| - 1\big) = 0. \tag{34.444}$$

Donc pour tout $k \in J$ nous avons $A_{ik} = 0$. Vu que A est irréductible, cela donnerait une partition impossible $\{1,\dots,n\} = I \cup J$. Nous en déduisons que J est vide et donc que $|u_j| = 1$ pour tout j. En repartant de (34.443) nous avons alors

$$r_i = \big|(\lambda - A_{ii})u_i\big| = |\lambda - A_{ii}||u_i| = |\lambda - A_{ii}|. \tag{34.445}$$

Cela prouve que $\lambda \in \partial D_i$ pour tout i. □

EXooUKQIooQqteHx

Exemple 34.159.
Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{34.446}$$

D'abord nous rappelons que si vous voulez entrer cette matrice dans Sage (ou plus généralement dans Python2[29]), vous devez faire attention au 1/2 qui, tel quel, est évalué à 0. Nous vous rappelons donc que tous vos codes Sage doivent commencer par ceci :

```
# -*- coding: utf8 -*-
from __future__ import unicode_literals
from __future__ import division
```

tex/sage/sageSnip015.sage

Les éléments non nuls hors diagonale sont B_{13}, B_{31} et B_{23}. Elle n'est donc pas irréductible ; nous avons par exemple la partition $I = \{1,3\}$, $J = \{2\}$ pour le critère de la proposition 34.154(2).

Les disques de Gershgorin sont

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - 2| \leqslant 1\} \tag{34.447a}$$
$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - 1| \leqslant 1/2\} \tag{34.447b}$$
$$D_3 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - 3| \leqslant 1\} \tag{34.447c}$$

Les valeurs propres de la matrice sont sur des bords de disques de Gershgorin, sans être sur tous les bords, comme ça aurait été le cas par le théorème 34.158 si la matrice avait été irréductible. Elles sont sur

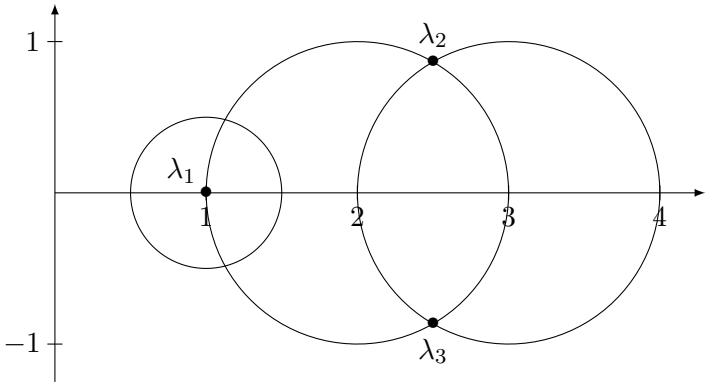


FIGURE 34.1 : Les disques de Gershgorin et les valeurs propres pour l'exemple 34.159. LaberHgDNRRooJWRHgOCw

la figure 34.1 ; notez en particulier les valeurs propres λ_2 et λ_3 qui sont sur le bord de deux disques mais pas sur le bord des trois disques en même temps.

△ EXooDQYDooPxqHjZ

Exemple 34.160.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{34.448}$$

Nous avons

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leqslant 1\}, \tag{34.449a}$$
$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z-1| \leqslant 2\}, \tag{34.449b}$$
$$D_3 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z-2| \leqslant 3\}, \tag{34.449c}$$

Le polynôme caractéristique est

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 6. \tag{34.450}$$

Une fois remarqué que $\lambda_1 = -1$ est une racine, les autres sont faciles à trouver (division euclidienne de $\chi(\lambda)$ par $\lambda + 1$) : $\lambda_2 = 2 + i\sqrt{2}$ et $\lambda_3 = 2 - i\sqrt{2}$.

La matrice A est irréductible. En effet les éléments non diagonaux non nuls sont A_{12}, A_{23} et A_{31}. Ils peuvent former une chaine reliant tous les indices entre eux.

Les contraintes sur la localisation des valeurs propres est donc qu'elles doivent être dans ou sur les disques de Gershgorin, mais que celles qui sont sur le bord d'un disque doivent être sur le bord de tous les disques en même temps. C'est cela que nous observons sur la figure 34.2. Notez en particulier la position de la valeur propre λ_1.

△

34.22.1 Matrices à diagonale dominante

DEFooLSUTooHuXabV

Définition 34.161 ([837, 836]).
*La matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est **à diagonale dominante** si pour tout i,*

$$\sum_{j \neq i} |A_{ij}| \leqslant |A_{ii}| \tag{34.451}$$

où $|.|$ est la module dans $\mathbb{C}$ ou la valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

*Elle est **à diagonale fortement dominante** si elle est à diagonale dominante et si il existe un i tel que*

$$\sum_{j \neq i} |A_{ij}| < |A_{ii}|. \tag{34.452}$$

*Elle est **à diagonale strictement dominante** si*

$$\sum_{j \neq i} |A_{ij}| < |A_{ii}| \tag{34.453}$$

EQooQLNLooJCLram

[28] Les composantes de u sont à priori dans $\mathbb{C}$, et non spécialement dans $\mathbb{R}$, même si A est une matrice réelle.
[29] Que vous n'avez aucune raison d'utiliser autre que Sage.

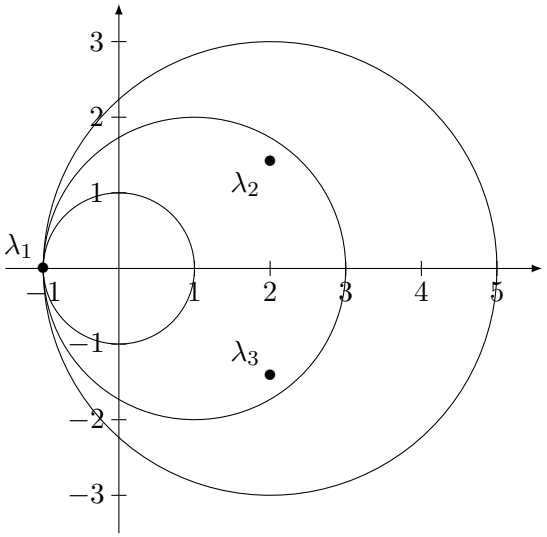


FIGURE 34.2 : Les disques de Gershgorin et les valeurs propres pour l'exemple 34.160. LabelFigDisqueGershgorinLkd

pour tout i (entier entre 1 et n).

Nous avons les inclusions suivantes :

$$\text{strictement dominante} \subset \text{fortement dominante} \subset \text{dominante}. \tag{34.454}$$

LEMooMQAEooUCkQxU

Lemme 34.162.
Si A est dans un des deux cas suivant :

- *diagonale strictement dominante,*
- *diagonale dominante et irréductible*[30]

alors $A_{ii} \neq 0$ pour tout i.

Démonstration. Si A est à diagonale strictement dominante, alors l'inégalité stricte (34.453) n'est pas possible.

Si A est à diagonale dominante, alors si $A_{ii} = 0$, toute la ligne est nulle. Dans ce cas, la matrice ne peut pas être irréductible. □

Proposition 34.163 ([837])**.**
Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

Démonstration. Soit une matrice A à diagonale strictement dominante. Soit x tel que $Ax = 0$. Le but est de montrer que $x = 0$. Soit un indice i_0 réalisant la norme maximum :

$$|x_{i_0}| = \|x\|_\infty. \tag{34.455}$$

Nous écrivons la composante i_0 de l'égalité $Ax = 0$:

$$\sum_k A_{i_0 k} x_k = 0, \tag{34.456}$$

et nous séparons le terme $k = i_0$ des autres :

$$\sum_{k \neq i_0} A_{i_0 k} x_k + A_{i_0 i_0} x_{i_0} = 0. \tag{34.457}$$

Nous prenons le module et majorons les sommes :

$$|A_{i_0 i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{k \neq i_0} |A_{i_0 k}||x_k| \leqslant \sum_{k \neq i_0} |A_{i_0 k}||x_{i_0}|. \tag{34.458}$$

[30] Définition 34.153.

Si $|x_{i_0}|$ est non nul nous pouvons simplifier :

$$|A_{i_0i_0}| \leqslant \sum_{k\neq i_0} |A_{i_0k}|. \tag{34.459}$$

Hélas, l'hypothèse de diagonale strictement dominante implique l'inégalité stricte dans le sens inverse. Impossible. Nous en déduisons que $|x_{i_0}| = 0$. Donc $\|x\|_\infty = 0$, ce qui signifie que $x = 0$.

Le fait que le noyau de A se réduise à $\{0\}$ implique l'inversibilité de A. □

PROPooTQWUooSLoniQ

Proposition 34.164.
Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ une matrice qui est dans un des deux cas suivants :

- *à diagonale strictement dominante*
- *à diagonale dominante et irréductible*

Si $A = D - M$ où D est la diagonale de A (et M est « le reste ») alors D est inversible et

$$\rho(D^{-1}M) < 1 \tag{34.460}$$

où ρ est le rayon spectral (thème 40).

Démonstration. Le lemme 34.162 nous dit que les éléments diagonaux de A sont non nuls. Cela donne déjà le fait que la matrice D est inversible et que la produit $D^{-1}M$ ait un sens. Nous posons $T = D^{-1}M$. Nous avons alors

$$T_{ii} = \sum_k (D^{-1})_{ik}M_{ki}. \tag{34.461}$$

Si $k = i$ alors $M_{ki} = 0$ et si $k \neq i$ alors $D_{ik} = 0$. Donc $T_{ii} = 0$ pour tout i.

En ce qui concerne les autres éléments de T,

$$T_{ij} = \sum_k (D^{-1})_{ik}M_{kj} = \sum_k \frac{1}{A_{ik}}\delta_{ik}M_{kj} = -\frac{A_{ij}}{A_{ii}}. \tag{34.462}$$

Notes :

- Les hypothèses sur A jouent pour dire que $A_{ii} \neq 0$.
- Le signe moins est dû au fait que $M_{ij} = -A_{ij}$ lorsque $i \neq j$.

En faisant la somme des modules :

$$\sum_{j\neq i} |T_{ij}| = \sum_{j\neq i} \frac{|A_{ij}|}{|A_{ii}|} = \frac{1}{|A_{ii}|}\sum_{j\neq i} |A_{ij}| \leqslant 1. \tag{34.463}$$

La dernière inégalité est le fait que A soit à diagonale dominante.

(1) **Si A est à diagonale strictement dominante** Alors nous avons l'inégalité stricte

$$\sum_{j\neq i} |T_{ij}| < 1. \tag{34.464}$$

Et le théorème de Gershgorin 34.157 dit que le spectre de T est contenu dans l'union des disques

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - T_{ii}| \leqslant r_i\} \tag{34.465}$$

où

$$r_i = \sum_{j\neq i} |T_{ij}|. \tag{34.466}$$

Mais nous avons prouvé que pour tout i, $T_{ii} = 0$ et $\sum_{j\neq i} |T_{ij}| < 1$. Donc toutes ces boules sont contenues dans $B(0, 1)$. Cela prouve que $\rho(T) < 1$.

(2) **Diagonale dominante, irréductible**
La matrice T est alors également irréductible parce que les éléments non nuls de A et de T sont les mêmes : $T_{ij} = -A_{ij}/A_{ii}$. Nous utilisons alors le second théorème de Gershgorin 34.158. Si λ est une valeur propre de T, alors soit

$$\lambda \in \bigcup_i B\big(0, r_i\big) \tag{34.467}$$

soit

$$\lambda \in \bigcap_i \partial B(0, r_i). \tag{34.468}$$

Vu que $r_i \leqslant 1$ pour tout i, dans le premier cas λ est dans l'union des boules *ouvertes* de rayon 1. Le nombre λ est donc une la boule ouverte de rayon 1. Bref, $|\lambda| < 1$.

Dans le second cas, l'intersection de deux cercles de même centre sont soit vide soit tout le cercle (auquel cas les rayons sont égaux). Dans le second cas, ledit rayon est certainement strictement plus petit que 1 parce que

$$r_i = \sum_{j \neq i} |T_{ij}| = \sum_{j \neq i} \frac{|A_{ij}|}{|A_{ii}|} < 1. \tag{34.469}$$

□

34.22.2 M-matrice

DEFooZAWWooEAujPy

Définition 34.165.
*Une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ est une **M-matrice** si*

(1) $A_{ii} > 0$ pour tout i,

(2) $A_{ij} \leqslant 0$ si $i \neq j$

(3) A est inversible et $A^{-1} \geqslant 0$.

PROPooWVHXooCfsvGq

Proposition 34.166.
Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ telle que $A_{ii} > 0$ pour tout i et $A_{ij} \leqslant 0$ pour tout $i \neq j$. Nous posons $A = D - M$ où D est la diagonale de A.

La matrice A est une M-matrice si et seulement si $\rho(D^{-1}M) < 1$.

Démonstration. En deux morceaux.

(1) **Si $\rho(D^{-1}M) < 1$** Nous posons encore $T = D^{-1}M$. Par le théorème 15.169, la matrice $\mathbb{1} - T$ est inversible et

$$(\mathbb{1} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k. \tag{34.470}$$

D'autre part, via des calculs déjà faits, et les hypothèses sur les signes des éléments de A,

$$T_{ij} = -\frac{A_{ij}}{A_{ii}} \geqslant 0. \tag{34.471}$$

Donc tous les éléments de T sont positifs (ou nuls). Par conséquent $T^k \geqslant 0$ pour tout k et $(\mathbb{1} - T)^{-1}$ est positive.

Mais $A = D - M = D(\mathbb{1} - D^{-1}M) = D(\mathbb{1} - T)$. Vu que D et $\mathbb{1} - T$ sont inversibles, nous savons que A est inversible et

$$A^{-1} = (\mathbb{1} - T)^{-1}D^{-1}, \tag{34.472}$$

qui est un produit de matrices positives. Donc $A^{-1} \geqslant 0$.

Au final, A est une M-matrice.

(2) **Si A est une M-matrice**

Soit une valeur propre λ de $T = D^{-1}M$ et un vecteur propre u : $Tu = \lambda u$. Vu que $T \geqslant 0$ nous avons d'une part $|\lambda u| = |\lambda||u|$ et d'autre part $|\lambda u| = |Tu| \leqslant T|u|$, ce qui donne

$$|\lambda||u| \leqslant T|u|. \tag{34.473}$$

Dans cette inégalité nous substituons T par $\mathbb{1} - (\mathbb{1} - T)$ pour avoir

$$|\lambda||u| \leqslant |u| - (\mathbb{1} - T)|u| \tag{34.474}$$

ou encore

EQooGFEOooBpiDJR

$$(\mathbb{1} - T)|u| \leqslant \big(1 - |\lambda|\big)|u|. \tag{34.475}$$

Mais $(\mathbb{1}-T)^{-1}=A^{-1}D\geqslant 0$ parce que A et D sont positives. Donc en appliquant $(\mathbb{1}-T)^{-1}$ à l'inégalité (34.475), elle est conservée (proposition 34.155(2)) :

$$|u|\leqslant(\mathbb{1}-T)^{-1}\big(1-|\lambda|\big)|u|. \tag{34.476}$$

Si $|\lambda|\geqslant 1$ alors toutes les composantes de $\big(1-|\lambda|\big)|u|$ sont négatives et l'inégalité n'est possible qu'avec $|u|=0$. Dans ce cas, λ n'est pas une valeur propre (le vecteur propre soit être non nul).

Nous en déduisons que $|\lambda|<1$ et donc que $\rho(T)=\rho(D^{-1}M)<1$.

□

Le théorème suivant résume ce que nous avons vu en donnant une condition suffisante facile à vérifier pour être une M-matrice.

THOooLZGSooSevggj

Théorème 34.167.
Soit $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ telle que

(1) $A_{ii}>0$

(2) $A_{ij}\leqslant 0$ *pour* $i\neq j$

(3) vérifiant une des deux conditions suivantes :

- *à diagonale strictement dominante*
- *à diagonale dominante et irréductible.*

Alors A est une M-matrice.

Démonstration. Au vu de la proposition 34.166, il suffira de montrer que $\rho(D^{-1}M)<1$ où D et M sont la décomposition $A=D-M$ habituelle. C'est le cas grâce à la proposition 34.164. □

PROPooZDMQooIZAbKK

Proposition 34.168.
Soit $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, une M-matrice irréductible. Alors $A^{-1}>0$.

Démonstration. Nous posons $T=D^{-1}M$. En comparant la définition 34.165 de M-matrice et la caractérisation de la proposition 34.166, nous avons $\rho(D^{-1}M)<1$. Par conséquent

$$(\mathbb{1}-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k \tag{34.477}$$

par la proposition 34.166. D'autre part, $A^{-1}=(\mathbb{1}-T)^{-1}D$ où les éléments D sont strictement positifs. Donc nous devons encore prouver que $(\mathbb{1}-T)^{-1}>0$. Nous savons que $T\geqslant 0$, et vu que

$$\big(\sum_k T^k\big)_{ij}=\sum_k (T^k)_{ij} \tag{34.478}$$

il nous suffit de prouver que pour chaque (ij), un des $(T^k)_{ij}$ est strictement positif. Soient donc deux indices i et j. Vu que A est irréductible, ils sont connectés par une suite d'indice $i=i_0,i_1,\dots,,i_r=j$ tels que

$$T_{i_k,i_{k+1}}=-\frac{A_{i_k,i_{k+1}}}{A_{i_k,i_k}}>0. \tag{34.479}$$

Or les indices i_k sont choisis de telle sorte que les numérateurs soient non nuls et donc strictement négatifs. Nous avons, en général :

$$(T^k)_{ij}=\sum_{l_1,\dots,l_{r-1}}T_{i,l_1}T_{l_1,l_2}\dots T_{l_{r-1},j}. \tag{34.480}$$

Chacun des termes est positif ou nul, mais pour $k=r$, il y a entre autres le terme

$$T_{i,i_1}T_{i_1,i_2}\cdots T_{i_r,j}\neq 0. \tag{34.481}$$

Donc $(T^r)_{ij}>0$ et $\sum_{k=0}^{\infty}(T^k)_{ij}>0$. Et par conséquent

$$A^{-1}=(\mathbb{1}-T)^{-1}D>0. \tag{34.482}$$

□

THOooWIFGooBQpddF

Théorème 34.169.
Soit une M-matrice $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{R}^n$ tel que $(Ag)_i \geqslant 1$ pour tout i. Alors $\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty$.

Démonstration. Nous posons $u = (1,\dots,1)$ et considérons $x \in \mathbb{R}^n$. Vu que A est une M-matrice, nous avons $A^{-1} \geqslant 0$, donc

$$|A^{-1}x| \leqslant A^{-1}|x| \leqslant \|x\|_\infty A^{-1}u \leqslant \|x\|_\infty g. \tag{34.483}$$

Justifications :

- La première inégalité est la proposition 34.155(2).
- La seconde provient de

$$\big(B|x|\big)_i = \sum_k B_{ik}|x_k| \leqslant \sum_k B_{ik}\|x\|_\infty = \|x\|_\infty \sum_k B_{ik}u_k = \|x\|_\infty Bu. \tag{34.484}$$

- Étant donné que $A^{-1} \geqslant 0$ nous conservons l'inégalité et $Ag \geqslant u$ implique $g \geqslant A^{-1}u$ (c'est la proposition 34.155(1)).

En ce qui concerne la norme de A^{-1} nous avons donc

$$\|A^{-1}\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|A^{-1}x\|_\infty \leqslant \sup_{\|x\|_\infty=1} \|x\|_\infty\|g\|_\infty = \|g\|_\infty. \tag{34.485}$$

□
PROPooQBWQooBbeZLO

Proposition 34.170.
Une matrice de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ qui

(1) est symétrique,

(2) Vérifie une des deux conditions suivantes

- *est irréductible à diagonale fortement dominante*
- *est à diagonale strictement dominante,*

(3) vérifie $A_{ii} > 0$ pour tout i

est strictement définie positive.

Démonstration. D'après le théorème de Gershgorin 34.157, chaque valeur propre de A est dans un des disques fermés

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - A_{ii}| \leqslant r_i\}. \tag{34.486}$$

Par hypothèse, les centres de ces disques sont réels et strictement positifs. Mais le fait que A soit à diagonale dominante donne que le rayon de ces cercles sont plus petits que A_{ii}. Donc D_i n'intersecte pas $]-\infty,0[$. Mais le fait que A soit symétrique implique que les valeurs propres soient réelles (théorème 8.225(1)). Cela montre que les valeurs propres de A sont toutes dans $[0,\infty[$.

Si la matrice A est à diagonale strictement dominante, alors les inégalités sont strictes et le théorème est prouvé.

Sinon nous somme dans le cas irréductible à diagonale fortement dominante et nous avons le théorème de Gershgorin numéro 2 34.158. Soit une valeur propre λ. Soit elle est dans un des disques ouvert (qui est inclus dans $]0,\infty[$), soit elle est dans l'intersection des bords des disques. Mais au moins un des disques n'intersecte pas 0 (parce que la diagonale est fortement dominante). Dans ce cas non plus λ ne peut pas être nul.

Nous en déduisons que dans tous les cas, les valeurs propres sont toutes réelles strictement positives. □

Chapitre 35

Méthode des différences finies

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 35.1
Dans toute la partie sur la méthode des différences finies, il y a un flottement entre Ω et $\bar{\Omega}$.

D'une part je ne vois pas bien pourquoi on ne peut pas se contenter de travailler avec une fonction $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ avec Ω ouvert dans $\mathbb{R}$ et u même pas définie sur le bord.

Mais d'autre part, de nombreuses sources demandent de la régularité sur un fermé, à commencer par Wikipédia :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_des_différences_finies

Si vous avez une idée sur la question, écrivez-moi, ou répondez directement sur la page de discussion de la page Wikipédia, sur laquelle j'ai laissé une question.

35.1 Problèmes de dimension un

Soit $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $h > 0$. Nous définissons les opérations suivantes (qui sont supposées approximer la dérivée $u'(x)$ lorsqu'elle existe).

Définition 35.2.
*La **différence progressive** est*

$$(D_h^+ u)(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \tag{35.1}$$

*la **différence régressive** est*

$$(D_h^- u)(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \tag{35.2}$$

*la **différence centrée** est*

$$(D_h^0 u)(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}. \tag{35.3}$$

Nous ne noterons pas toujours la dépendance en h, c'est-à-dire que nous noterons D^+u au lieu de $D_h^+ u$ lorsque cela ne pose pas de problème.

Notons que u'' peut être approximé par $D_h^+ D_h^+ u$, $D_h^0 D_h^+$, $D_h^+ D_h^-$, et encore de nombreuses autres possibilités.

Voici un lemme qui dit que tout cela n'est pas si mal, pourvu que u soit assez régulière.

LEMooZECZooVKxOZZ

Lemme 35.3.
Soit un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}$, soit $x \in \Omega$ et $h > 0$ tel que $\overline{B(x,h)} \subset \Omega$.

(1) Si $u \in C^2(\Omega)$ alors

$$|u'(x) - D_h^+ u(x)| \leqslant \frac{h}{2} \|u''\|_\Omega \tag{35.4}$$

et

$$|u'(x) - D_h^- u(x)| \leqslant \frac{h}{2} \|u''\|_\Omega. \tag{35.5}$$

ITEMooSAWJooJUTWAb

(2) Si $u \in C^3(\Omega)$ alors

$$|u'(x) - D_h^0(x)| \leqslant \frac{h^2}{2} \|u^{(3)}\|_\Omega \tag{35.6}$$

ITEMooRWUHooZJLKuL

(3) Si $u \in C^4(\Omega)$ alors

$$|u''(x) - D_h^- D_h^+ u(x)| \leqslant \frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\|_\Omega. \tag{35.7}$$

Démonstration. Nous prouvons le point (3). D'abord nous regardons de quoi nous avons besoin :

$$D^-D^+u(x) = \frac{(D^+u)(x) - (D^+u)(x-h)}{h} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \tag{35.8}$$

EQooBLIIooWHXbqD

Nous allons y mettre les approximations de $u(x+h)$ et $u(x-h)$ par Taylor, proposition 12.482(2) :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x+\theta_1 h) \tag{35.9}$$

avec $\theta_1 \in [0,1]$. De même,

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x-\theta_2 h) \tag{35.10}$$

avec $\theta_2 \in [0,1]$.

Donc

$$u(x+h) + u(x-h) - 2u(x) = h^2u''(x) + \frac{h^4}{4!}\Big(u^{(4)}(x+\theta_1 h) + u^{(4)}(x-\theta_2 h)\Big), \tag{35.11}$$

ce qui donne

$$(D^-D^+u)(x) = u''(x) + \frac{h^2}{4!}\Big(u^{(4)}(x+\theta_1 h) + u^{(4)}(x-\theta_2 h)\Big). \tag{35.12}$$

Chacun des deux termes dans la parenthèse peut être majoré par $\|u^{(4)}\|_\Omega$ parce que $x+\theta_1 h$ ne prend ses valeurs que dans $[x, x+h] \subset \overline{B(x,h)} \subset \Omega$. Quoi qu'il en soit nous ne pouvons pas dire mieux que

$$|u''(x) - D^-D^+u(x)| \leqslant \frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\|_{\overline{\Omega}}. \tag{35.13}$$

□

Remarque 35.4 ([1]).
Si nous avons l'égalité

$$|u'(x) - D_h^+u(x)| \leqslant \delta \tag{35.14}$$

EQooHSPFooTJIoFy

pour tout x, il faut faire attention en écrivant

$$\|u' - D_h^+u\|_\infty \leqslant \delta \tag{35.15}$$

parce que l'inégalité (35.14) n'est valable que pour les x tels que $[x-h, x+h] \subset \Omega$, de telle sorte que l'inégalité n'est pas spécialement correcte sur $\overline{\Omega}$. Il faut donc d'abord se mettre d'accord sur ce que signifie $\|.\|_\infty$. Est-ce une norme supremum sur Ω ou sur $\bar{\Omega}$?

35.1.1 Un schéma à cinq points

35.1.1.1 Poser le système

Soit $\Omega =]0,1[$ et l'équation différentielle

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f \quad \text{sur } \Omega \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases} \tag{35.16}$$

EQooXJBWooRhCsLy

où c est une fonction positive et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nous considérons $h > 0$ assez petit pour que le reste ait un sens. Si nous cherchons des solutions dans $C^4(\Omega)$, le lemme 35.3 nous dit que

$$|u''(x) - D^-D^+u(x)| = \eta(h^2) \tag{35.17}$$

où η est une fonction telle que $\lim_{t\to 0}\eta(t) = 0$. Nous pouvons récrire l'équation différentielle sous la forme

$$-D^-D^+u(x) + c(x)u(x) = f(x) + \eta(h^2). \tag{35.18}$$

Si nous négligeons le terme $\eta(h^2)$ qui est supposé être petit nous pouvons tenter de résoudre pour la fonction u_h

$$-D^-D^+u_h(x)+c(x)u_h(x)=f(x). \tag{35.19}$$

Notons ici l'importance de la notion de problème bien posé parce qu'en remplaçant le paramètre (fonctionnel) f par $f+\eta(h^2)$, nous modifions les solutions. Dans la mesure où le problème est bien posé, cette petite modification ne modifiera pas trop la solution et nous pouvons espérer que $\|u-u_h\|$ soit petit pour une norme ou une autre.

Utilisant l'expression (35.8) pour D^-D^+ nous avons l'équation suivante pour u_h :

$$\frac{1}{h^2}\Big(2u_h(x)-u_h(x+h)-u_h(x-h)\Big)+c(x)u_h(x)=f(x). \tag{35.20}$$ EQooECLXooFxZEeA

Avons-nous gagné quelque chose ? Pas encore. L'idée de la discrétisation est de ne considérer u_h qu'en certains points, et de prendre ces points à intervalles réguliers de taille h. Soient donc N un nombre entier et $h=1/(N+1)$. Nous posons

$$x_k=kh \tag{35.21}$$

pour $k=0,\dots,N+1$. Avec cela nous avons

$$\overline{\Omega}=\bigcup_{k=0}^{N}[x_k,x_{k+1}] \tag{35.22a}$$

$$x_0=0 \tag{35.22b}$$

$$x_{N+1}=1. \tag{35.22c}$$

Nous posons surtout

$$\Omega_h=\{x_i\}_{i=1,\dots,N} \tag{35.23}$$

et

$$\overline{\Omega_h}=\{x_i\}_{i=0,\dots,N+1}. \tag{35.24}$$

Enfin, nous ne considérons plus u_h que comme une fonction $u_h\colon\overline{\Omega_h}\to\mathbb{R}$. C'est-à-dire que u_h est un vecteur à $N+2$ composantes.

L'équation (35.20) devient

$$\frac{1}{h^2}\big(2u_h(x_i)-u_h(x_{i+1})-u_h(x_{i-1})+c(x_i)u_h(x_i)\big)=f(x_i) \tag{35.25}$$ EQooZMVMooTqlpkF

pour $i=1,\dots,N$. Sur les bords, cette équation n'est pas possible parce que x_{i-1} ou x_{i+1} n'existerait pas. Au contraire, sur les bords nous avons les conditions aux bords

$$u_h(x_0)=\alpha \tag{35.26}$$

et

$$u_h(x_{N+1})=\beta. \tag{35.27}$$

Nous posons $c_i=c(x_i)$ et $u_i=u_h(x_i)$. Les nombres u_0 et u_{N+1} sont donnés par les conditions aux bords, et les inconnues du problème sont donc les nombres u_i $(i=1,\dots,N)$. Pour les déterminer, nous devons résoudre un système d'équations linéaire.

L'écriture du système linéaire à résoudre consiste essentiellement à écrire (35.25) en séparant les cas $i=1$ et $i=N$ parce que nous connaissons déjà les valeurs de u_0 et u_{N+1}. Le système que nous avons est :

$$\begin{cases}\left(\frac{2}{h^2}+c_1\right)u_1-\frac{1}{h^2}u_2=f_1+\frac{\alpha}{h^2} & i=1 \quad (35.28a)\\ \left(\frac{2}{h^2}+c_N\right)u_N-\frac{1}{h^2}u_{N-1}=f_N+\frac{\beta}{h^2} & i=N \quad (35.28b)\\ \left(\frac{2}{h^2}+c_i\right)u_i-\frac{1}{h^2}u_{i+1}-\frac{1}{h^2}u_{i-1}=f_i & \text{autres.} \quad (35.28c)\end{cases}$$

Cela se met sous la forme matricielle

$$L_hU_h=F_h \tag{35.29}$$

pour

$$F_h=\big(f_1+\frac{\alpha}{h^2},f_2,\dots,f_{N-1},f_N+\frac{\beta}{h^2}\big) \tag{35.30}$$ EQooMNTJooYPYoAj

et les éléments non nuls de L_h sont :

$$(L_h)_{i,i-1} = -\frac{1}{h^2} \qquad \text{pour } i = 2, \dots, N \tag{35.31a}$$

$$(L_h)_{i,i+1} = -\frac{1}{h^2} \qquad \text{pour } i = 1, \dots, N-1 \tag{35.31b}$$

$$(L_h)_{i,i} = \frac{2}{h^2} + c_i \qquad \text{pour } i = 1, \dots, N. \tag{35.31c}$$

Cette matrice est pleine de zéros, à part les trois diagonales centrales, et il existe des méthodes efficaces pour résoudre le système d'équations correspondant.

35.1.1.2 Propriétés du système

La matrice est la suivante :

$$L_h = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + c_1 & -1/h^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1/h^2 & \frac{2}{h^2} + c_2 & -1/h^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1/h^2 & \frac{2}{h^2} + c_3 & -1/h^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1/h^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1/h^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1/h^2 & \frac{2}{h^2} + c_N \end{pmatrix} \tag{35.32}$$

où nous avions déjà posé l'hypothèse $c_i \geqslant 0$ pour tout i.

LEMooGGHQooNnVsuu

Lemme 35.5.
La matrice L_h est irréductible[1] *à diagonale fortement dominante*[2].

Démonstration. Nous décomposons la preuve en plusieurs parties, en notant L pour L_h, afin d'alléger les notations.

(1) **La première ligne** Sur la première ligne, seuls deux éléments sont non nuls et nous avons $|L_{11}| = \frac{2}{h^2} + c_1$ parce que c est une fonction positive et $|L_{12}| = \frac{1}{h^2}$. Nous avons donc

$$|L_{11}| - |L_{12}| = \frac{2}{h^2} + c_1 - \frac{1}{h^2} = \frac{1}{h^2} + c_1 > 0. \tag{35.33}$$

L'inégalité stricte est importante.

(2) **La dernière ligne** Elle est semblable à la première.

(3) **Les autres lignes** Sur les autres lignes nous avons trois éléments non nuls et

$$\sum_{j \neq i} |L_{ij}| = \frac{2}{h^2} \leqslant \frac{2}{h^2} + c_i = L_{ii}. \tag{35.34}$$

(4) **Diagonale fortement dominante** Nous avons prouvé jusqu'à présent que L_h était une matrice à diagonale fortement dominante.

(5) **Irréductible** Nous allons utiliser la caractérisation de la proposition 34.154(3). Pour cela, nous considérons la chaine d'éléments non nuls

$$L_{12}, L_{23}, \dots, L_{N-1,N} = -\frac{1}{h^2}. \tag{35.35}$$

Soient deux indices i et j avec $i < j$. Cette suite d'indice (ou une sous-suite) rend i et j connectés.

Si par contre $i > j$, il faut considérer la suite inversée grâce au fait que L_h est symétrique :

$$L_{N,N-1}, L_{N-1,N-2}, \dots, L_{32}, L_{21} = -\frac{1}{h^2}. \tag{35.36}$$

□

[1] Caractérisation 34.154.
[2] Définition 34.161.

PROPooOQJVooJMTkVM

Proposition 35.6.
Soit le problème

$$\begin{cases} -u''(x)+c(x)u(x)=f \quad \text{sur } \Omega \\ u(0)=\alpha \\ u(1)=\beta \end{cases} \tag{35.37}$$

EQooEUHQooWHRelr

où c est une fonction positive et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Nous considérons $h>0$ assez petit pour que le reste ait un sens. Et nous approximons u'' par D^-D^+u.

La matrice L_h des différences finies associée à ce problème est

(1) une M-matrice,

(2) strictement définie positive,

(3) d'inverse $L_h^{-1}>0$.

Démonstration. Le théorème 34.167 dit que L_h est une M-matrice. La proposition 34.170 nous donne aussi que L_h est strictement définie positive.

Le lemme 35.5 dit que L_h est irréductible, ce qui permet à la proposition 34.168 de conclure que $L_h^{-1}>0$. □

Cela étant rappelé, nous pouvons continuer.

LEMooDXPRooOhwqSZ

Lemme 35.7.
Soit $\Omega=]0,1[$, soit $N\in\mathbb{N}$ et $h=1/(N+1)$. La solution $w_h\colon\Omega_h\to\mathbb{R}$ du problème discrétisé

SUBEQooFJKIooLvzMBG

$$\begin{cases} -(D^-D^+w_h)(x_k)=1 & \text{(35.38a)} \\ w_h(0)=0 & \text{(35.38b)} \\ w_h(1)=0 & \text{(35.38c)} \end{cases}$$

pour tout $x_k=kh$ $(k=1,\dots,N)$ donne les valeurs exactes des $w(x_k)$ lorsque w est la solution de

SUBEQooCRFWooJeg

$$\begin{cases} -w''(x)=1 & \text{(35.39a)} \\ w(0)=0 & \text{(35.39b)} \\ w(1)=0. & \text{(35.39c)} \end{cases}$$

Démonstration. Un enseignement de la proposition 35.6 est que le système (35.38) peut être écrit sous la forme d'un système linéaire $L_h^0w_h=F_h$ où L_h^0 est inversible. Il y a donc unicité de la solution.

D'autre part, la solution du système (35.39) est $w(x)=\frac{1}{2}(x-x^2)$, qui est de classe C^∞. Le lemme 35.3(3) dit que $D^-D^+w=w''$. Donc les valeurs $w(x_k)$ résolvent aussi le système (35.38). □

Lemme 35.8 (Quelques estimations)**.**
La matrice L_h du problème sus-mentionné en (35.37) vérifie[3] *:*

(1) $\|L_h\|_\infty\leqslant\frac{4}{h^2}+\|c\|_\infty$

(2) $\|L_h^{-1}\|_\infty\leqslant\frac{1}{8}$.

Démonstration. Nous nous souvenons de la formule (10.213) :

$$\|A\|_\infty\leqslant\max_{i=1,\dots,n}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|. \tag{35.40}$$

La première ligne a pour somme : $\frac{3}{h^2}+c_1$, la dernière a pour somme $\frac{3}{h^2}+c_n$ et les autres ont pour somme $\frac{4}{h^2}+c_i$. Elles sont donc toutes majorées par $\frac{4}{h^2}+\|c\|_\infty$.

Pour l'estimation de $\|L_h^{-1}\|_\infty$ nous allons nous appuyer sur le théorème 34.169.

Commençons par considérer le problème

SUBEQSooRENKooZaRjvL

$$\begin{cases} -w''=1 & \text{(35.41a)} \\ w(0)=w(1)=0. & \text{(35.41b)} \end{cases}$$

[3] Dans le CTES d'analyse numérique de Marseille, l'estimation donnée est $\|L_h^{-1}\|_\infty\leqslant\frac{1}{4}$.

La première équation dit que w est un polynôme de degré 2. En écrivant $w(x) = ax^2 + bx + c$ et en imposant toutes les contraintes, nous trouvons l'unique solution

$$w(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - x). \tag{35.42}$$

Le lemme 35.7 nous dit que la fonction w prise aux points $x_k = kh$ donne les valeurs de w_h.

La matrice L_h^0 est une M-matrice et le vecteur w_h vérifie $L_h^0 w_h = \mathbb{1}$. Donc le théorème 34.169 s'applique et

$$\|(L_h^0)^{-1}\| \leqslant \|w_h\|_\infty = \frac{1}{8}. \tag{35.43}$$

L'obtention de $1/8$ n'est rien d'autre que la recherche du maximum (en valeur absolue) de la parabole $x \mapsto (x - x^2)/2$ pour $x \in [0, 1]$. Le maximum est atteint pour $x = 1/2$; calcul de dérivée et tout ça …

Nous retournons maintenant à notre matrice originale L_h. Nous avons

$$L_h - L_h^0 = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_n) \geqslant 0, \tag{35.44}$$

et aussi

$$L_h^{-1} - (L_h^0)^{-1} = \underbrace{L_h^{-1}}_{\geqslant 0} \underbrace{(L_h^0 - L_h)}_{\leqslant 0} \underbrace{(L_h^0)^{-1}}_{\geqslant 0} \tag{35.45}$$

parce que L_h est une M-matrice. Donc tous les coefficients de $L_h^{-1} - (L_h^0)^{-1}$ sont négatifs. Cela implique

$$L_h^{-1} \leqslant (L_h^0)^{-1}. \tag{35.46}$$

Mais nous savons que les coefficients de L_h^{-1} sont positifs, donc le maximum de ses coefficients en valeur absolue est plus petit que ceux de $(L_h^0)^{-1}$, c'est-à-dire

$$\|L_h^{-1}\|_\infty \leqslant \|(L_h^0)^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{8}. \tag{35.47}$$

□

35.1.2 Exemple

Soit $\Omega =]0, 1[$ et une fonction $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe C^4 vérifiant

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \sin(x) & \text{(35.48a)} \\ u(0) = 0 & \text{(35.48b)} \\ u(1) = 0. & \text{(35.48c)} \end{cases}$$

Nous allons écrire la méthode des différences finies pour $h = 1/4$. Nous posons donc les points

$$\begin{cases} x_0 = 0 & \text{(35.49a)} \\ x_1 = 1/4 & \text{(35.49b)} \\ x_2 = 1/2 & \text{(35.49c)} \\ x_3 = 3/4 & \text{(35.49d)} \\ x_4 = 1. & \text{(35.49e)} \end{cases}$$

Puisque nous avons supposé u de classe C^4, le lemme 35.3(3) nous donne[4]

$$u''(x) = (D^- D^+ u)(x) + \alpha(h) \tag{35.50}$$

avec $\lim_{h\to 0} \alpha(h)/h = 0$. L'équation discrétisée serait alors SYSTooNEQHooOWJSbT

$$\begin{cases} -(D^- D^+ u)(x) + u(x) = \sin(x) & \text{(35.51a)} \\ u(0) = u(1) = 0. & \text{(35.51b)} \end{cases}$$

où nous n'avons pas précisé l'indice h au bas des opérateurs D^+ et D^-. Les équations (35.51) ne doivent être posées que pour x_1, x_2 et x_3 parce que les valeurs en x_0 et x_4 sont déjà connues.

[4] Nous ferions n'importe quoi pour ne pas écrire $u''(x) = (D^- D^+ u)(x) + o(h^2)$. Notez que vous faites ce que vous voulez : écrivez avec la notation « petit o » si cela vous chante.

(1) **Pour x_1**
$$\frac{u_2-2u_1+u_0}{h^2}+u_1=\sin(x_1) \tag{35.52}$$

(2) **Pour x_2**
$$\frac{u_3-2u_2+u_1}{h^2}+u_2=\sin(x_2) \tag{35.53}$$

(3) **Pour x_3**
$$\frac{u_4-2u_3+u_2}{h^2}+u_3=\sin(x_3). \tag{35.54}$$

Nous tenons compte du fait que $u_0=u_4=0$ et que $h=1/4$ pour écrire le système
$$\begin{pmatrix}-31 & 16 & 0\\ 16 & -31 & 16\\ 0 & 16 & -31\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix} \tag{35.55}$$
où les s_k sont des nombres parfaitement connus : par exemple $s_1=\sin(x_1)=\sin(1/4)\simeq 0.247403959254523$.

35.2 Problèmes de dimension deux

Nous allons considérer le système
$$\begin{cases}-\Delta u=f & \text{sur } \Omega\\ u=g & \text{sur } \partial\Omega\end{cases} \tag{35.56}$$
SYSooTANLooRgnIMp
où $\Omega=]0,a[\times]0,b[$.

Remarque 35.9.
Pourquoi un signe moins devant le laplacien ? Pour avoir la proposition 35.6 qui dira que la matrice correspondant aux différences finies appliquées à ce système est une M-matrice. Sinon, c'est la matrice $-L_h$ qui en serait une.

35.2.1 Discrétisation en croix

Nous allons maintenant déduire une discrétisation du laplacien en discrétisant les opérations ∂_x^2 et ∂_y^2. Nous discrétisons Ω en mailles carrées de côté h : $x_k=kh$ et $y_k=kh$. L'opération de dérivée partielle ∂_x est discrétisée par
$$(D_x^+u)(x,y)=\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} \tag{35.57}$$
ou
$$(D_x^-u)(x,y)=\frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h} \tag{35.58}$$
ou
$$(D_x^0u)(x,y)=\frac{u(x+h,y)-u(x-h,y)}{2h} \tag{35.59}$$
où le h est sous-entendu dans les opérateurs D^0, D^+ et D^-.

La dérivée partielle seconde ∂_x^2u peut être approximée par toutes les combinaisons imaginables, par exemple
$$(D_x^-D_x^+u)(x,y)=\frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}. \tag{35.60}$$
Pour évaluer la différence entre $(\partial_x^2u)(x,y)$ et $(D^-D^+u)(x,y)$, il est possible d'utiliser le théorème de Taylor en deux dimensions, mais nous pouvons également recycler ce qui a été fait. Nous posons $u_y(x)=u(x,y)$ et alors $(\partial_x^2u)(x,y)=u_y''(x)$ et le lemme 35.3(3) donne, si u_y est de classe C^4,
$$|u_y''(x)-D^-D^+u_y(x)|\leqslant\frac{1}{12}h^2\|u_y^{(4)}\|_\infty. \tag{35.61}$$
Là, les opérateurs D^+ et D^- sont ceux à une dimension. Mais nous avons $(D^-D^+u_y)(x)=(D^-D^+u)(x,y)$ (à droite ce sont les opérateurs à deux dimensions), donc
$$\big|(\partial_x^2u)(x,y)-(D^-D^+u)(x,y)\big|\leqslant\frac{1}{12}h^2\|\partial_x^4u\|_\infty \tag{35.62}$$

et nous pouvons écrire

$$(\partial_x^2 u)(x,y) = (D^- D^+ u)(x,y) + h^2 R(x,y,h) \tag{35.63}$$

où R est une fonction qui dépend de x, y et h, mais aussi de u. Le point important est que R soit majoré par une quantité indépendante de h, de telle sorte que nous ayons quelques garanties que négliger ce terme soit une bonne approximation lorsque $h \to 0$.

Au niveau de la discrétisation, nous considérons x_i avec $i = 0, \dots, N_x$ et y_j avec $j = 0, \dots, N_y$. La discrétisation de $-(\Delta u)(x,y) = f(x,y)$ donne, pour $i = 1, \dots, N_x - 1$ et $j = 1, \dots, N_y - 1$,

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i+1,j} + 4u_{ij} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = f_{ij}. \tag{35.64}$$

Les équations avec i ou j valant 0 ou N_x, N_y sont les valeurs aux bords.

35.10.
Nous notons pour référence ultérieure la discrétisation suivante du laplacien :

$$(\Delta_h u)(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}\big(-4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\big). \tag{35.65}$$

Elle vérifie

$$\Delta_h f = \Delta f + h^2 \alpha(h). \tag{35.66}$$

Cette discrétisation est dite « en croix » parce que les points exploités forment une croix.

35.2.2 Discrétisation en carré

L'opérateur laplacien est défini par $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, mais il existe de nombreuses autres façons de l'écrire.

Lemme 35.11.
Le laplacien est invariant par changement de coordonnées orthogonales. Plus précisément, si A est une matrice orthogonale, en posant $u_i = \sum_k A_{ik} e_k$ nous avons

$$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} f = \Delta f. \tag{35.67}$$

Démonstration. Nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_k A_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{35.68}$$

et donc

$$\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} = \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sum_k A_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \sum_{ijk} (A^t)_{ji} A_{ik} \partial^2 f = \sum_{jk} (A^t A)_{jk} \partial_{jk}^2 f. \tag{35.69}$$

En particulier si A est une matrice orthogonale, $(A^t A)_{jk} = \delta_{jk}$ et le résultat est prouvé. □

Les plus convaincus diront que $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ et que le produit scalaire est invariant sous changement de coordonnées orthogonales.

Nous avons déjà déduit la discrétisation (35.65) du laplacien :

$$(\Delta_h u)(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}\big(-4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\big). \tag{35.70}$$

Nous allons maintenant en déduire une par l'idée de décomposer le laplacien dans la base $u = e_1 + e_2$, $v = e_1 - e_2$. Pour cela nous introduisons les opérations (le nombre h dont dépendent ces opérateurs est sous-entendu)

$$(D_u^+ f)(x,y) = \frac{f(x+h, y+h) - f(x,y)}{h} \tag{35.71a}$$

$$(D_v^+ f)(x,y) = \frac{f(x+h, y-h) - f(x,y)}{h} \tag{35.71b}$$

$$(D_u^- f)(x,y) = \frac{f(x,y) - f(x-h, y-h)}{h} \tag{35.71c}$$

$$(D_v^- f)(x,y) = \frac{f(x,y) - f(x-h, y+h)}{h}. \tag{35.71d}$$

Puisque

$$\partial_u^2 + \partial_v^2 = 2\Delta, \tag{35.72}$$

nous discrétisons le laplacien par

$$\Delta'_h = \frac{1}{2}\big(D_u^- D_u^+ + D_v^- D_v^+\big). \tag{35.73}$$

Un peu de calcul donne : EQooLHBDooSBFkho

$$(\Delta'_h f)(x,y) = \frac{1}{2h^2}\Big(-4f(x,y) + f(x+h,y+h) + f(x-h,y+h) \tag{35.74a}$$

$$+ f(x+h,y-h) + f(x-h,y-h)\Big). \tag{35.74b}$$

35.2.3 Résolution de la discrétisation en croix

Les équations (35.64) forment un système d'équations linéaires à résoudre. Certaines peuvent être simplifiées parce qu'elles « touchent » le bord. Nous verrons cela un peu plus tard.

Nous allons d'abord numéroter correctement les équations de façon à ne pas avoir deux mais un seul indice. Notre fonction de numérotation sera

$$\varphi(i,j) = (j-1)(N_x - 1) + i \tag{35.75}$$

avec $i = 1, \dots, N_x - 1$ et $j = 1, \dots, N_y - 1$. Cela correspond à numéroter les points de l'intérieur du quadrillage ligne par ligne de bas en haut, et de gauche à droite. Avec cela les équations (35.64) vont être numérotées par un seul indice I allant de $\varphi(1,1) = 1$ à $\varphi(N_x - 1, N_y - 1) = (N_x - 1)(N_y - 1)$.

Si $I = \varphi(i,j)$ alors nous avons vite

$$\varphi(i+1,j) = I + 1 \tag{35.76a}$$

$$\varphi(i,j+1) = I + N_x - 1 \tag{35.76b}$$

$$\varphi(i-1,j) = I - 1 \tag{35.76c}$$

$$\varphi(i,j-1) = I - N_x + 1. \tag{35.76d}$$

Nous posons $U_I = u_{\varphi^{-1}(I)}$, et l'équation (35.64) devient

$$\frac{1}{h^2}(-U_{I+1} + 4U_I - U_{I-1} - U_{I+N_x-1} - U_{I-N_x+1}) = f_I. \tag{35.77}$$

Pour écrire la matrice représentant ce système, nous devons simplifier les équations qui doivent l'être. Par exemple avec $I = 1$, le terme $U_{I-1} = U_0$ vaut $u_{0,1} = f_{0,1}$. Ce n'est donc pas réellement une inconnue de notre problème.

Nous voulons mettre les équations sous la forme du système

$$L_h U = F. \tag{35.78}$$

Sur la ligne numéro I de L_h, les éléments non nuls sont : SUBEQQooSRQNooYrCNhj

$$L_{I,I} = 4 \tag{35.79a}$$

$$L_{I,I+1} = -1 \tag{35.79b}$$

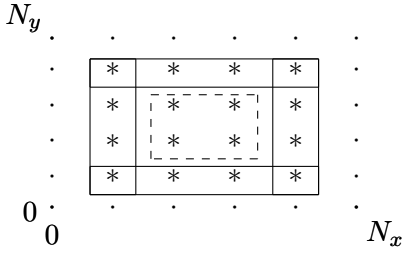
$$L_{I,I-1} = -1 \tag{35.79c}$$

$$L_{I,I+N_x-1} = -1 \tag{35.79d}$$

$$L_{I,I-N_x+1} = -1 \tag{35.79e}$$

pour peu qu'ils existent. Par exemple pour $I = 1$, il n'y a pas d'éléments $L_{I,I-1}$. Les indices I et J de $L_{I,J}$ vont de 1 à $\varphi(N_x - 1, N_y - 1) = (N_y - 1)(N_x - 1)$.

Voici un dessin de notre situation :



À chaque élément du quadrillage correspond une équation.

- Aux points simples sur le bord, correspondent des équations triviales parce que la fonction u y est directement donnée par les conditions aux bords.
- Aux points étoilés entourés en traits continus correspondent des équations « incomplètes » parce que certains termes de l'équation (35.64) sont donnés par les conditions aux bords. Elle correspondent aussi aux lignes incomplètes de la matrice L_h où certains éléments donnés en (35.79) n'existent pas.

  Le membre de droite de ces équations est par contre enrichi de ce qui à gauche est « donné ».
- Aux points étoilés du centre entourés en traits discontinus correspondent des équations complètes.

Notons que $f_{0,0}$ ne joue aucun rôle dans notre histoire parce que dans les équations (35.64), chaque point (i,j) du maillage n'est lié qu'aux quatre points situés « à côté ».

PROPooWGTRooVjWhYY

Proposition 35.12.
La matrice L_h est

ITEMooOOHPooDsvUPP

(1) irréductible et à diagonale fortement dominante[5]*,*

(2) une M-matrice,

(3) inversible avec $L_h > 0$,

(4) symétrique,

(5) strictement définie positive.

Démonstration. On divise la preuve.

(1) **Irréductible** Une matrice $n \times n$ dont les deux premières diagonales sont entièrement composées d'éléments non nuls est toujours irréductible. En effet, la première lie l'élément $(1,2)$ à l'élément $(n-1,n)$ et donc permet de dire que tous les $i<j$ sont connectés.

La seconde diagonale lie l'élément $(n,n-1)$ à l'élément $(2,1)$.

(2) **Diagonale fortement dominante** En ce qui concerne la dominance de la diagonale, il faut sommer sur les lignes. Or chaque ligne contient (en valeur absolue) un 4 sur la diagonale et au plus quatre éléments qui valent 1. D'où

$$|L_{II}| \geqslant \sum_{J \neq I} |L_{IJ}|. \tag{35.80}$$

La première ligne n'est jamais complète : elle contient un 4 sur l'élément $(1,1)$ et au maximum, deux 1, plus à droite. Donc la matrice L_h est à diagonale fortement dominante.

(3) **M-matrice**

D'après ce que nous venons de voir (proposition 35.12), le théorème 34.167 s'applique et L_h est une M-matrice[6].

(4) **Inverse strictement positif** La proposition 34.168 nous assure qu'une M-matrice irréductible est d'inverse strictement positif. Donc $L_h^{-1} > 0$.

(5) **Symétrique** La ligne numéro I est

$$\big(\dots, \underbrace{-1}_{I-N_x+1}, \dots, -1, 4, -1, \dots, \underbrace{-1}_{I+N_x-1}, \dots\big) \tag{35.81}$$

Prenons par exemple l'élément $(I, I-N_x+1)$ qui vaut -1. Son symétrique est l'élément $(I-N_x+1, I)$ qui se trouve sur la ligne $I-N_x+1$. Sur cette dernière ligne nous avons un -1 sur la colonne $I-N_x+1+N_x-1=I$. Donc l'élément $(I-N_x+1, I)$ vaut bien -1 et la matrice est symétrique.

(6) **Strictement définie positive** Vu que la matrice L_h est symétrique, irréductible à diagonale fortement dominante (proposition 35.12), et comme ses éléments diagonaux sont strictement positifs (ils valent 4), la proposition 34.170 nous dit que L_h est strictement définie positive.

□

[5] Définition 34.161. Le cas 1×1 est discutablement à diagonale fortement dominante, il faut avouer.

[6] Notons que c'est ici que nous sommes content d'avoir posé $-\Delta u = f$ dans le système (35.56), avec un signe négatif devant le laplacien. Sinon tous les signes auraient changé, et la matrice $-L_h$ aurait été une M-matrice, au lieu de L_h.

35.3 Consistance, convergence

35.3.1 Définitions, mise en place

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et un opérateur différentiel L sur Ω. Nous considérons le problème qui consiste à trouver une fonction u sur Ω telle que

$$Lu = f \tag{35.82}$$

pour une fonction f donnée.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 35.13
La définition suivante est une invention personnelle, n'est pas précise et mérite des commentaires de la part de la lectrice.

Définition 35.14 ([1]).
*Un **schéma numérique** de pas h pour $Lu = f$ est la donnée de*

(1) un nombre $h > 0$ supposé petit,

(2) une quantité N de points x_i dans Ω formant l'ensemble discret Ω_h,

(3) une matrice L_h de taille $N \times N$,

(4) une solution $u_h \colon \Omega_h \to \mathbb{R}$ de l'équation $(L_h u_h)(x_i) = f_i$ où nous avons posé $f_i = f(x_i)$.

35.15.
Évidemment pour qu'un schéma mérite le nom de schéma de pas h pour l'équation $Lu = f$, il faut que le nombre h soit lié au choix des points x_i, et que la matrice L_h soit liée à l'opérateur L. La définition n'impose pas formellement de tels liens, parce qu'il y a de nombreuses façons d'approximer une équation différentielle en un système linéaire, sans compter que même l'équation $(L_h u_h)_i = f_i$ peut se résoudre de beaucoup de façons, exactes ou approchées.

Cela pour dire que le lien entre la solution exacte u et la solution approchée n'a rien d'évident, et va dépendre des choix faits lors de la discrétisation et lors de la résolution du système linéaire. Nous allons supposer dans un premier temps que l'équation $L_h u_h = f$ est résolue exactement (nous avons un peu parlé de ces problèmes dans les sections 34.15 et suivantes).

Définition 35.16.
*L'erreur **de consistance** d'un schéma numérique est la fonction $\tau_h \colon \Omega_h \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\tau_h(x_i) = (L_h u)_i - (Lu)(x_i). \tag{35.83}$$

EQooPFBBooJumDZO

Il y a un jeu de notation pas tout à fait évident dans la définition (35.83). En effet, L_h est une matrice, et ne s'applique donc à priori pas immédiatement à une fonction. Ce que signifie la notation $(L_h u)_i$ est que l'on applique la matrice L_h au vecteur $j \mapsto u(x_j)$ et que l'on prend la composante i du résultat.

Définition 35.17.
*Nous disons que le schéma est **consistant** avec l'opérateur différentiel L lorsque*

$$\lim_{h \to 0^+} \|\tau_h\| = 0 \tag{35.84}$$

EQooMPQYooCZsaAT

où la norme $\|.\|$ est souvent la norme uniforme, c'est-à-dire $\|\tau_h\| = \max_i \tau_h(x_i)$.

Notons que le lien entre h et le choix des x_i fait partie de la définition du schéma. Sur un segment de longueur ℓ, lorsque h n'est pas un diviseur de ℓ, le schéma devrait expliquer ce que l'on fait pour que la limite (35.84) ait un sens.

Définition 35.18.
*Le schéma (Ω_h, L_h) est **consistant à l'ordre** p avec l'opérateur différentiel L pour la norme $\|.\|$ si il existe une constante C indépendante de h telle que*

$$\|\tau_h\| \leqslant Ch^p. \tag{35.85}$$

Définition 35.19.
*L'**erreur de discrétisation** entre la solution u du problème $Lu = f$ et la solution approchée u_h sur Ω_h est la fonction*

$$\begin{aligned} e_h \colon \Omega_h &\to \mathbb{R} \\ x_i &\mapsto u(x_i) - u_i. \end{aligned} \tag{35.86}$$

où $u_i = u_h(x_i)$ est la solution approchée.

Le schéma discret $(L_h u_h)(x_i) = f_i$ est ***convergent*** *si $\lim_{h\to 0} \|e_h\| = 0$. Si de plus, il existe une constante C, et $p > 0$, tels que*

$$\|e_h\| \leqslant Ch^p, \tag{35.87}$$

*alors nous disons que le schéma est convergent à l'***ordre** *p.*

Si l'erreur de consistance est petite, le *problème* est bien approximé par le système linéaire. Cela n'implique cependant pas que la solution trouvée soit bien approximée.

Exemple 35.20 (Deux opérateurs différentiels proches dont les solutions sont loin)**.**
Soit la partie $\Omega =]0, \infty[$, et les problèmes

$$\begin{cases} L_1 u = u' = 0 & \text{(35.88a)} \\ u(0) = 1 & \text{(35.88b)} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} L_2 v = v' - \epsilon v = 0 & \text{(35.89a)} \\ v(0) = 1. & \text{(35.89b)} \end{cases}$$

Les solutions exactes sont $u(x) = 1$ et $v(x) = e^{\epsilon x}$.

En ce qui concerne les opérateurs, quelle que soit la norme utilisée, nous avons

$$\begin{aligned} \|L_1 - L_2\| &= \sup_{\|f\|=1} \|L_1(f) - L_2(f)\| & \text{(35.90a)} \\ &= \sup_{\|f\|=1} \|\epsilon f\| & \text{(35.90b)} \\ &= \epsilon. & \text{(35.90c)} \end{aligned}$$

Donc lorsque ϵ est petit, l'opérateur L_2 approxime bien l'opérateur L_1. Pour toutes les normes. Mais

$$\big|u(x) - v(x)\big| = |1 - e^{\epsilon x}|, \tag{35.91}$$

donc quel que soit ϵ nous avons $\|u - v\|_\infty = \infty$. Et d'ailleurs, quelle que soit la norme raisonnable que nous mettons sur l'espace des fonctions, avoir $\|u - v\| = \infty$ semble inévitable.

Donc deux opérateurs différentiels proches peuvent avoir des solutions lointaines. △

35.3.2 Exemple

Soit l'opérateur différentiel L donné par

$$Lu = -u'' + cu \tag{35.92}$$

où c est une fonction. Nous considérons sur $\Omega =]0, 1[$ l'équation différentielle

$$Lu = 0. \tag{35.93}$$

En ce qui concerne la discrétisation, nous définissons le maillage $\Omega_h = \{x_i = ih\}$ avec $i = 0, \dots, N + 1$. La solution approchée discrètement sera le vecteur v qui peut être vu comme fonction $v\colon \Omega_h \to \mathbb{R}$. Les nombres v_0 et v_{N+1} sont à priori donnés par les conditions aux bords. Pour les autres v_i nous avons les équations

$$(L_h v)_i = -\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} + c(x_i)v_i. \tag{35.94}$$

Cela est la définition de l'opérateur L_h, et le vecteur v solution de $L_h v = 0$, est la solution du problème au sens de la méthode des différences finies (pour peu qu'il existe, soit unique et tout ça).

Pour calculer l'erreur de consistance, nous considérons une fonction u et nous posons $u_i = u(x_i)$. Le vecteur (u_i) ainsi construit est approximé par v (on espère). Nous avons :

$$\tau_h(x_i) = -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - c(x_i)u_i - (Lu)(x_i). \tag{35.95}$$

Pour étudier cela nous développons $u_{i+1} = u(x_i + h)$ et $u_{i-1} = u(x_i - h)$ à l'ordre 4 : il existe $\alpha_i \in [x_i, x_i + h]$ et $\beta_i \in [x_i - h, x_i]$ tels que

$$u_{i+1} = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\alpha_i) \tag{35.96}$$

et

$$u_{i-1} = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\beta_i). \tag{35.97}$$

Après simplification de plusieurs termes,

$$\tau_h(x_i) = -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - c_iu_i + u''(x_i) + c_iu_i = \frac{h^2}{4!}\big(u^{(4)}(\alpha_i) + u^{(4)}(\beta_i)\big). \tag{35.98}$$

Parler de la consistance du schéma demande d'étudier $\lim_{h\to 0^+} \|\tau_h\|$, et pour cela, il faut préciser la norme avec laquelle nous voulons travailler. L'ordre de consistance va dépendre de la norme utilisée.

Pour la norme $\|.\|_\infty$, les nombres $u^{(4)}(\alpha_i)$ et $u^{(4)}(\beta_i)$ se majorent par $\|u^{(4)}\|_\infty$ et nous avons

$$\|\tau_h\|_\infty \leqslant \frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\|_\infty. \tag{35.99}$$

Nous avons consistance d'ordre 2.

Remarque 35.21.
La valeur de $\|\tau_h\|_\infty$ dépend de la fonction u sur laquelle nous la calculons. Cependant nous avons convergence $\|\tau_h\|_\infty \to 0$ pour toute fonction (de classe disons, C^4).

La constante C pour laquelle nous avons $\|\tau_h\| \leqslant Ch^2$ et donc qui nous vaut de pouvoir dire que la consistance est d'ordre 2 ne dépend pas de h, ni des valeurs ponctuelles de u ou de ses dérivées, mais dépend des normes de u et de ses dérivées (en l'occurrence seulement de la norme de $u^{(4)}$.)

Étudions la consistance pour la norme L_1 :

$$\|\tau_h\|_1 = \sum_i |\tau_h(x_i)| \leqslant \frac{h^2}{12}\sum_i \|u^{(4)}\|_\infty \tag{35.100}$$

où nous avons majoré chacun des $u^{(4)}(\alpha_i)$ par $\|u^{(4)}\|_\infty$. Combien de termes dans la somme ? Nous avons $h = 1/(N-1)$ et donc $N = (1+h)/h$, ce qui donne

$$\|\tau_h\|_1 \leqslant N\frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\|_\infty = (1+h)Ch. \tag{35.101}$$

La constante $1+h$ se majore par n'importe quelle constante strictement plus grande que 1. Nous pouvons donc la rentrer dans C et écrire

$$\|\tau_h\|_1 \leqslant Ch \tag{35.102}$$

et donc avoir la consistance à l'ordre 1.

35.3.3 Consistance, stabilité et convergence

LEMooUOUMooPCoAtA

Lemme 35.22.
Soit un opérateur différentiel L, soit u la solution de $Lu = f$ et un schéma numérique (L_h, Ω_h) pour cette équation. Nous notons u_h la solution de $L_hu_h = f$. Alors nous avons

$$L_he_h = \tau_h \tag{35.103}$$

Et si de plus L_h est inversible,

$$\|e_h\| \leqslant \|L_h^{-1}\|\|\tau_h\|. \tag{35.104}$$

Démonstration. Par définition u_h est solution de $L_hu_h = f$ en tant que fonction sur Ω_h. Nous avons donc

$$L_he_h = L_hu_h - L_hu \tag{35.105}$$

où u doit être compris comme la restriction de u à Ω. En appliquant au point x_i,

$$(L_he_h)(x_i) = \underbrace{(L_hu_h)(x_i)}_{=f_i} - (L_hu)(x_i), \tag{35.106}$$

mais $f_i = (Lu)(x_i)$ parce que u est solution de $Lu = f$. Donc

$$(L_he_h)(x_i) = (Lu)(x_i) - (L_hu)(x_i) = \tau_h(x_i). \tag{35.107}$$

Si la matrice L_h est inversible nous avons $e_h = L_h^{-1}\tau_h$ et donc

$$\|e_h\| \leqslant \|L_h^{-1}\|\|\tau_h\| \tag{35.108}$$

par le lemme 10.81. □

Bien entendu, en tant qu'opérateur linéaire sur un espace de dimension finie, l'opérateur L_h^{-1} est borné pour chaque h. Mais si il n'y a pas une borne uniforme en h, alors le lemme 35.22 dit qu'il n'y a pas d'espoir de majorer $\|e_h\|$ de façon à passer à la limite $\lim_{h\to 0}\|L_h^{-1}\|$.

Définition 35.23.
Un schéma numérique est ***stable*** *si il existe une constante $C>0$ indépendante de h telle que $\|L_h^{-1}\|\leqslant C$.*
THOooEPQQooUQMcgF

Théorème 35.24.
En deux parties.

(1) *Si un schéma discret est consistant et stable, alors il est convergent.*

(2) *Si de plus il est consistant à l'ordre p, alors il est convergent à l'ordre p.*

Démonstration. Nous savons du lemme 35.22 (qui s'applique parce que l'inversibilité de L_h est dans la définition de la stabilité) que $\|e_h\|\leqslant\|L_h^{-1}\|\|\tau_h\|$ et que $\|L_h^{-1}\|\leqslant C$. En passant à la limite[7],

$$\lim_{h\to 0}\|e_h\|\leqslant C\lim_{h\to 0}\|\tau_h\|=0. \tag{35.109}$$

La dernière limite est le fait que le schéma soit consistant. Le schéma est donc convergent.

Si de plus il est consistant à l'ordre p, alors

$$\|e_h\|\leqslant C\|\tau_h\|\leqslant C'h^p \tag{35.110}$$

Il est donc également convergent à l'ordre p. □

35.3.4 Exemple : schéma à cinq points, laplacien en croix

Nous avions développé le schéma dont l'opérateur sur Ω_h est (voir (35.64))

$$(L_hu_h)(x_i,y_j)=\frac{1}{h^2}\big(-u_{i+1,j}-u_{i,j+1}+4u_{i,j}-u_{i-1,j}-u_{i,j-1}\big). \tag{35.111}$$

Proposition 35.25.
Le schéma est :

(1) *consistant à l'ordre 2,*

(2) *stable pour la norme uniforme et*
$$\|L_h^{-1}\|_\infty\leqslant\frac{1}{8}, \tag{35.112}$$

(3) *convergent à l'ordre 2 pour la norme $\|.\|_\infty$.*

Démonstration. Cet opérateur avait été construit de telle sorte à avoir (voir (35.63))

$$(\Delta u)(x_i,y_j)=(L_hu)(x_i,y_i)+h^2R(x,y,h) \tag{35.113}$$

où R peut être majoré indépendamment de h. En tant que fonctions sur Ω_h nous avons

$$\tau_h=\Delta u-L_hu=h^2R(x,y,h), \tag{35.114}$$

et donc $\|\tau_h\|_\infty\leqslant Ch^2$, parce que le lemme 35.3(3) donne aussi

$$\|R\|_\infty\leqslant C\max\{\|\frac{\partial^4u}{\partial x^4}\|_\infty,\|\frac{\partial^4u}{\partial y^4}\|_\infty\}. \tag{35.115}$$

En ce qui concerne la stabilité nous allons utiliser le théorème 34.169. Nous considérons la fonction

$$g(x,y)=-\frac{1}{4}(x^2+y^2), \tag{35.116}$$

qui vérifie $-\Delta g=1$ sur le carré $[0,1]^2$. Nous considérons le vecteur g_h d'indices $(i,j)\mapsto g_{ij}=g(x_i,y_j)$ sur lequel nous calculons L_h :

$$(L_hg_h)_{ij}=\frac{1}{h^2}(-g_{i+1,j}-g_{i,j+1}+4g_{ij}-g_{i-1,j}-g_{i,j-1}); \tag{35.117}$$

[7] Toutes les limites $h\to 0$ sont en réalité des limites $h\to 0^+$, mais nous allégeons cette notation.

en remplaçant les g par leurs valeurs en termes de x_i, x_{i-1}, x_{i+1}, y_j, y_{j-1} et y_{j+1}, et en tenant compte du fait que $x_k = kh$ et $y_l = lh$, nous avons :

$$(L_h g_h)_{ij} = \frac{1}{4}\big((i+1)^2 - j^2 + i^2 + (j+1)^2 - 4i^2 - 4j^2 + (i-1)^2 + j^2 + i^2 + (j-1)^2\big) = 1. \tag{35.118}$$

Donc $L_h g_h = 1$.

Comme L_h est une M-matrice (proposition 35.12(2)), le théorème 34.169 nous dit alors que L_h^{-1} vérifie

$$\|L_h^{-1}\|_\infty \leqslant \|g_h\|_\infty. \tag{35.119}$$

Mais

$$\|g_h\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty = g\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big) = \frac{1}{8}. \tag{35.120}$$

Notons que cela est bien une inégalité et non une égalité parce que rien n'assure que le point $(1/2, 1/2)$ soit sur le maillage ; donc rien n'assure que la valeur $g(1/2, 1/2)$ ne soit parmi les valeurs du vecteur discrétisé g_h.

Notre schéma numérique est stable et consistant à l'ordre 2 pour la norme $\|.\|_\infty$. Le théorème 35.24 dit alors que le schéma est convergent à l'ordre 2 pour la même norme. □

35.4 Autres laplaciens

Nous avons vu le laplacien en croix (35.65) EQooOBWUooDEWKYv

$$(\Delta_h f)(x,y) = \frac{1}{h^2}\big(-4f(x,y) + f(x+h,y) + f(x-h,y) \tag{35.121a}$$

$$+ f(x,y+h) + f(x,y-h)\big) \tag{35.121b}$$

qui vérifie

$$\Delta_h f = \Delta f + Kh^2, \tag{35.122}$$ EQooQITHooZVJlVa

ainsi que le laplacien en carré (35.74) EQooUOYVooRpAMOC

$$(\Delta'_h f)(x,y) = \frac{1}{2h^2}\Big(-4f(x,y) + f(x+h,y+h) + f(x-h,y+h) \tag{35.123a}$$

$$+ f(x+h,y-h) + f(x-h,y-h)\Big) \tag{35.123b}$$

qui vérifie également $\Delta'_h f = \Delta f + Kh^2$.

À priori toutes combinaisons de la forme

$$a\Delta_h + b\Delta'_h \tag{35.124}$$

avec $a + b = 1$ sont valable comme tentative de discrétiser le laplacien. Ce sont des schémas à 9 points. Évidemment la matrice L_h correspondante va être moins creuse, mais nous pouvons espérer ajuster a et b de telle sorte à obtenir une consistance d'un ordre supérieur à 2.

Nous allons développer les $\Delta_h f$ et $\Delta'_h f$ à l'ordre 4 (reste à l'ordre 6). Quelques remarques avant de commencer.

(1) Allez relire la proposition 12.377 et les notations qui vont avec pour comprendre les différentielles.

(2) Écrivez les formules du type (12.1045) pour $d^2 f$ et $d^4 f$.

(3) Allez relire le développement de Taylor du théorème 12.475.

(4) À l'ordre zéro, il n'y a rien, parce que le terme $-4f(x,y)$ compense les quatre termes d'ordre zéro des autres termes.

(5) Aux ordres impairs, il n'y a rien. En effet, prenons un nombre impair l et la formule

$$(d^l f)_x(h,\dots,h) = \sum_{i_1,\dots,i_l} h_{i_1}\dots h_{i_l} \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_l}}(x). \tag{35.125}$$

Nous avons

$$(d^l f)_x(h,\dots,h) + (d^l f)_x(-h,\dots,-h) = 0. \tag{35.126}$$

Or dans les expressions (35.123) et (35.121), les termes arrivent par paires opposées.

Commençons par calculer $h^2(\Delta_h f)(x,y)$.

Ordre 4 . Le premier terme est :

$$(d^2 f)_{(x,y)}\big((h,0),(h,0)\big) = h^2 (d^2 f)_{(x,y)}\big((1,0),(1,0)\big). \tag{35.127}$$

La formule (12.1045) à peine adaptée permet de calculer ça explicitement.

Il y a encore les termes du même type avec $(0,1)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$.

Ordre 4 Cette fois, ce sont 4 termes du type

$$h^4 (d^4 f)_{(x,y)}\big((1,0),(1,0),(1,0),(1,0)\big) \tag{35.128}$$

à calculer.

Cela fait beaucoup de termes à calculer. Je vous laisse vous persuader que le programme suivant en Sage nous donne les coefficients.

```
#! /usr/bin/env python3
# -*- coding: utf8 -*-


x,y=var("x,y")

C=[]
C.append(x)
C.append(y)

def coef4(h):
    S=0
    for i in [0,1]:
        for j in [0,1]:
            for k in [0,1]:
                for l in [0,1]:
                    S=S+h[i]*h[j]*h[k]*h[l]*C[i]*C[j]*C[k]*C[l]
    return S

def coef2(h):
    S=0
    for i in [0,1]:
        for j in [0,1]:
            S=S+h[i]*h[j]*C[i]*C[j]
    return S

cross=[]
square=[]

cross.append(  [1,0] )
cross.append(  [-1,0] )
cross.append(  [0,1] )
cross.append(  [0,-1] )

square=[]
square.append(  [-1,-1] )
square.append(  [1,-1] )
square.append(  [-1,1] )
square.append(  [1,1] )


print("Cross scheme :")

K=sum(  coef2(v) for v in cross    )
```

```
L=sum(  coef4(v) for v in cross   )
print(K)
print(L)

print("square scheme :")

K=sum(  coef2(v) for v in square   )
L=sum(  coef4(v) for v in square   )
print(K)
print(L)
```

tex/sage/coefs.sage

Le résultat est, en utilisant la formule

$$\partial_x^4 f + 2\partial_{xxyy}^4 f + \partial_y^4 f = \Delta\Delta f, \tag{35.129}$$

nous avons

$$(\Delta_h f)(x,y) = \frac{1}{2}(2\partial_x^2 f + 2\partial_y^2 f)(x,y) + \frac{1}{4!}2h^2(\partial_x^4 f + \partial_y^4 f)(x,y) + Kh^4 \tag{35.130a}$$

$$= (\Delta f)(x,y) + \frac{1}{12}h^2(\partial_x^4 f + \partial_y^4 f)(x,y) + Kh^4 \tag{35.130b}$$

$$= \Delta f + \frac{h^2}{12}\Delta\Delta f - \frac{h^2}{12}2\partial_{xxyy}^4 f + Kh^4 \tag{35.130c}$$

$$= \Delta f + \frac{h^2}{12}\Delta\Delta f - \frac{h^2}{6}\partial_{xxyy}^4 f + Kh^4 \tag{35.130d}$$

où K est une constante qui peut être majorée en termes des dérivées quatrièmes de f. En particulier la plus grande des normes supremum de ces dérivées.

Le même genre de calculs donnent

$$(\Delta'_h f)(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}4\Delta f + \frac{h^2}{4!}(4\partial_x^4 f + 24\partial_x^2\partial_y^2 f + 4\partial_y^2 f)\Big] + Kh^4. \tag{35.131}$$

Ça donne :

$$(\Delta'_h f) = \Delta f + \frac{h^2}{12}\Delta\Delta f + \frac{h^2}{3}\partial_{xxyy}^4 f + Kh^4 \tag{35.132}$$

avec redéfinition du K ; nous ne le préciserons plus à chaque fois.

Nous avons donc le résultat proposé dans [838] :

$$a\Delta_h f + b\Delta'_h f = (a+b)\Delta f + (a+b)\frac{h^2}{12}\Delta^2 f + h^2\frac{1}{6}(a-2b)\partial_{xxyy}^4 f + Kh^4. \tag{35.133}$$

L'idée est d'appliquer ça à une fonction u qui vérifie l'équation différentielle $-\Delta u = f$ (attention au clash de notation pour f). Le mieux est de supprimer le terme en $\partial_{xxyy} f$ en demandant $a - 2b = 0$. Nous avons donc à résoudre le système

$$\begin{cases} a + b = 1 & \text{(35.134a)} \\ a - 2b = 0. & \text{(35.134b)} \end{cases}$$

Qui propose une décomposition PLU pour résoudre ce système linéaire ? Quelle que soit la manière, la solution est

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3}. \tag{35.135}$$

Nous allons donc étudier la discrétisation à neuf points

$$L_h = \frac{2}{3}\Delta_h + \frac{1}{3}\Delta'_h. \tag{35.136}$$ EQooRFJVooVplhEr

En faisant quelques additions nous trouvons que l'opération

$$(L_h u)(x_i, y_j) = \frac{1}{6h^2}\Big(-20u_{ij} + 4\big(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\big) + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}\Big) \tag{35.137}$$ EQooKBIIooDWciKl

vérifie

$$L_h f = \Delta f + \frac{h^2}{12}\Delta^2 f + Kh^4. \tag{35.138}$$ EQooTLHQooXgZGef

35.4.1 Travail avec le laplacien à 9 points

Nous allons écrire un schéma numérique pour l'équation différentielle $-\Delta u = f$ utilisant la discrétisation à 9 points du laplacien. Nous recopions ses propriétés fondamentales (35.136), (35.137), (35.138) :

$$L_h = \frac{2}{3}\Delta_h + \frac{1}{3}\Delta'_h, \tag{35.139}$$

et

$$\begin{aligned}(L_h u)(x_i, y_j) = \frac{1}{6h^2}\Big(&- 20u_{ij} + 4\big(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\big) \\ &+ u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}\Big),\end{aligned} \tag{35.140}$$

et

$$L_h f = \Delta f + \frac{h^2}{12}\Delta^2 f + Kh^4. \tag{35.141}$$

EQooSUKTooXyWQQm

Nous appliquons (35.141) à u et nous isolons Δu :

$$\Delta u = L_h u - \frac{h^2}{12}\Delta^2 u + Kh^4 = \frac{1}{6h^2}T_h u + \frac{h^2}{12}\Delta f + Kh^4 \tag{35.142}$$

où nous avons utilisé $\Delta^2 u = -\Delta f$ et avons noté

$$T_h u = -20u_{ij} + 4(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}. \tag{35.143}$$

Nous imposons maintenant $\Delta u = -f$ en écrivant

$$\frac{1}{6h^2}T_h u = -f - \frac{h^2}{12}\Delta f + \alpha(h)h^4. \tag{35.144}$$

Une idée est de remplacer Δf par son approximation en croix (35.122) :

$$T_h u = -6h^2 f - \frac{h^4}{2}(\Delta_h f + Kh^2) + \alpha(h)h^6 \tag{35.145}$$

Avec quelques calculs nous trouvons le schéma numérique suivant : EQooKUMVooCVrzjt

$$20u_{ij} - 4(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) - u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1} \tag{35.146a}$$

$$= \frac{h^2}{2}(8f_{ij} + f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}) + \alpha(h)h^6. \tag{35.146b}$$

En oubliant le terme en $\alpha(h)h^6$, nous obtenons un système d'équations linéaires.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 35.26
Il me semble que ce schéma donne une convergence d'ordre 6. *C'est correct ?*

Chapitre 36

Variables aléatoires et théorie des probabilités

36.1 Espace de probabilité

Définition 36.1.
*Une **mesure de probabilité** sur un espace mesurable*[1] $(\Omega, \mathcal{A})$ *est une mesure positive telle que* $P(\Omega) = 1$. *Dans ce cas, le triple* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *est un **espace de probabilité**.*

Un point $\omega \in \Omega$ est une **observation**, une partie mesurable $A \in \mathcal{A}$ est un **événement**. L'ensemble $A \cup B$ représente l'événement A ou B tandis que l'ensemble $A \cap B$ représente l'événement A et B.

Si les A_n sont des événements, nous avons défini en 9.44 limite supérieure et la limite inférieure de la suite A_n par

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k \tag{36.1}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} A_k \tag{36.2}$$

Si $\omega \in \liminf A_n$, alors ω réalise tous les A_n sauf un nombre fini.

Nous avons

$$\limsup A_n = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \omega \in A_n \text{pour une infinité de } n\}. \tag{36.3}$$

Théorème 36.2 (Borel-Cantelli)**.**
Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \tag{36.4}$$

alors $P(\limsup A_n) = 0$.

Démonstration. La condition $\sum_{n\geqslant 1} P(A_n) < \infty$ signifie que la fonction

$$\varphi = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{1}_{A_n} \tag{36.5}$$

est P-intégrable. Par conséquent, elle est finie presque partout (au sens de P), c'est-à-dire

$$P(\varphi = \infty) = 0. \tag{36.6}$$

Les points ω sur lesquels $\varphi(\omega) = \infty$ sont ceux tels que

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \infty, \tag{36.7}$$

c'est-à-dire les ω qui appartiennent à une infinité d'ensembles A_n, ou encore les $\omega \in \limsup A_n$. Nous avons donc montré que

$$\{\omega \text{ tel que } \varphi(\omega) = \infty\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \omega \in A_n \text{pour une infinité de } n\} = \limsup A_n. \tag{36.8}$$

Or l'hypothèse signifie que la probabilité du membre de gauche est nulle. □

[1] Espace mesurable : 14.1, mesure positive : 14.18.

CORooUWLZooFLYmcY

Corolaire 36.3.
Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(\complement A_n) < \infty$, alors presque surement tous les B_n sont réalisés à l'exception d'un nombre fini.

36.2 Variables aléatoires

DEFooSZRXooQUSZYU

Définition 36.4.
*Une **variable aléatoire** est une application mesurable*

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)). \tag{36.9}$$

Nous convenons que $\mathbb{R}^1 = \bar{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire que dans le cas où la variable aléatoire X est réelle, nous acceptons les valeurs $\pm\infty$.

DEFooRNKZooRczFwB

Définition 36.5 (densité[839])**.**
*Une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est **absolument continue** si il existe une fonction positive et intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$,*

$$P(X \in A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x) f(x) dx. \tag{36.10}$$

*Nous disons alors que f est la **densité** de X.*

Cela ne devrait pas être sans rappeler la proposition 14.317 et la définition 14.213.

PROBooSWDQooHlSZPD

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 36.6
Je ne suis pas 100% certain de la proposition 36.7. Écrivez-moi si vous avez un doute ou une preuve.

PROPooDXCVooBxaToe

Proposition 36.7 ([1])**.**
Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire à densité, alors sa densité est donnée par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto P(X < x). \end{aligned} \tag{36.11}$$

36.2.1 Loi d'une variable aléatoire

DEFooBKJVooRJdMeA

Proposition-Définition 36.8 (Loi d'une variable aléatoire[840])**.**
Soient un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ainsi qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. En définissant

$$\begin{aligned} P_X : \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R}^+ \\ B &\mapsto (P \circ X^{-1})(B), \end{aligned} \tag{36.12}$$

le triple $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), P_X)$ est un espace probabilisé.

*La mesure P_X est la **loi** de la variable aléatoire X*

36.2.2 Indépendance

DEFooVYCUooKWvReO

Définition 36.9 ([841])**.**
*Nous disons que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont **indépendants** si pour tout choix $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ nous avons*

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}). \tag{36.13}$$

*Les sous tribus $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ sont **indépendantes** si pour tout choix $A_i \in \mathcal{A}_i$, les événements A_i sont indépendants.*

Exemple 36.10.
Soit $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Soient $A = [0,a] \times [0,1]$ et $B = [0,1] \times [0,b]$. Nous avons $P(A) = a$ et $P(B) = b$ ainsi que $P(A \cap B) = ab$. △

LemIndepEvenCompl

Lemme 36.11.
Les événements $(A_i)_{i=0,\dots,n}$ sont indépendants si et seulement si les événements que nous obtenons en remplaçant certains des A_i par $\complement A_i$ le sont.

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons nous contenter de prouver que les événements $\complement A_0, A_1, \dots, A_n$ sont indépendants sous l'hypothèse que les événements $A_0, A_1, \dots, A_n$ sont indépendants. Soit I un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$. Nous avons

$$P\big(\complement A_0 \bigcap_{i\in I} A_i\big) = P\big(\bigcap_{i\in I} A_i \setminus \bigcap_{i\in I} A_i \cap A_0\big) \tag{36.14a}$$
$$= P\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) - P\big(\bigcap_{i\in I} A_i \cap A_0\big) \tag{36.14b}$$
$$= P\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big)\big(1 - P(\complement A_0)\big) \tag{36.14c}$$
$$= P\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big)P(\complement A_0). \tag{36.14d}$$

□

LemTribIndepProdProb

Lemme 36.12.
Les tribus $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ sont indépendantes si et seulement si

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n) \tag{36.15}$$

pour tout $A_i \in \mathcal{A}_i$.

Démonstration. L'implication dans le sens direct découle immédiatement des définitions.

Nous supposons avoir un choix $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ avec $A_i \in \mathcal{A}_i$ et nous devons montrer que ces événements sont indépendants, c'est-à-dire que si $J \subset \{1, \dots, n\}$ alors les événements $(A_j)_{j\in J}$ sont indépendants. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que si $i \notin J$, $A_i = \Omega$. Alors nous avons

$$P\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big) = P\big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\big) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = \prod_{j\in J} P(A_j) \tag{36.16}$$

parce que $P(A_i) = P(\Omega) = 1$ lorsque i n'est pas dans J. □

DefNJUkotc

Définition 36.13.
*Nous disons que les variables aléatoires $X_k \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ sont **indépendantes** lorsque les tribus engendrées*[2] *$\mathcal{A}_{X_1}, \dots, \mathcal{A}_{X_n}$ le sont.*

Remarque 36.14.
Il n'a de sens de dire que X_1 et X_2 sont indépendants que si X_1 et X_2 sont des applications dont l'espace de départ est identique.

Si nous voulons modéliser le jet de deux pièces indépendantes, le mauvais choix est de faire $\Omega = \{0, 1\}$, y mettre la mesure d'équiprobabilité, et de considérer les deux variables aléatoires

$$X_i(\omega) = \begin{cases} f & \text{si } \omega = 0 \\ p & \text{si } \omega = 1. \end{cases} \tag{36.17}$$

Ces deux variables sont évidemment pas indépendantes. Il faut poser $\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, y mettre la mesure d'équiprobabilité et poser

$$X_1(x, y) = \begin{cases} f & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \end{cases}, \tag{36.18}$$

$$X_2(x, y) = \begin{cases} f & \text{si } y = 0 \\ p & \text{si } y = 1 \end{cases}, \tag{36.19}$$

Ces variables aléatoires sont indépendantes. Par exemple

$$X_1^{-1}\{p\} = \{(1, 0), (1, 1)\} \tag{36.20a}$$
$$X_2^{-1}\{p\} = \{(0, 1), (1, 1)\} \tag{36.20b}$$

et on a bien

$$P\big(X_1^{-1}\{p\} \cap X_2^{-1}\{p\}\big) = P\{(1, 1)\} = \frac{1}{4} \tag{36.21}$$

[2] Définition 14.6.

ainsi que

$$P\{X_i^{-1}(p)\} = \frac{1}{2} \tag{36.22}$$

pour $i = 1$ et $i = 2$.

PropMLbfRTk

Proposition 36.15.
Soient $(X_k : \Omega \to \mathbb{R}^{d_k})$ des variables aléatoires indépendantes.

(1) *Si $B_k \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^{d_k})$. Alors*

$$P(X_k \in B_k \forall k \leqslant n) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n). \tag{36.23}$$

ItemHRjuTTii

(2) *Les événements $\{X_i \in B_i\}$ sont indépendants.*

ItemHRjuTTiii

(3) *Les tribus engendrées par des X_i et d'autres sont indépendantes. Plus précisément, si I et J sont deux ensembles disjoints de $\mathbb{N}$ alors les tribus*

$$\sigma(\{X_i, i \in I\}) \tag{36.24}$$

et

$$\sigma(\{X_i, i \in J\}) \tag{36.25}$$

sont indépendantes.

Démonstration. Lorsque nous écrivons $X_i \in B_i$, nous parlons de l'événement

$$(X_i \in B_i) = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_i(\omega) \in B_i\} = X_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}_{X_i}. \tag{36.26}$$

Vu que par hypothèse les tribus $(\mathcal{A}_i)$ sont indépendantes, le lemme 36.12 nous montre que

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in B_i\Big) = \prod_i P(X_i \in B_i). \tag{36.27}$$

Il reste à voir que l'ensemble $X_i^{-1}(B_i)$ fait partie de la tribu $\mathcal{A}$ de départ. Cela est la définition du fait que l'application X_i soit une variable aléatoire : elle doit être mesurable en tant qu'application

$$X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^d)). \tag{36.28}$$

Les affirmations (2) et (3) ne sont que des façons alternatives d'exprimer la même chose. □

Proposition 36.16.
Les événements $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ sont indépendants[3] *si et seulement si les variables aléatoires associées $\mathbb{1}_{A_1}, \dots, \mathbb{1}_{A_n}$ le sont.*

Démonstration. La tribu engendrée par la variable aléatoire $\mathbb{1}_{A_k}$ est

$$\mathcal{A}_{\mathbb{1}_{A_k}} = \{\varnothing, A_k, \complement A_k, \Omega\}. \tag{36.29}$$

EqtribAAimtu

En effet si $1 \in B$, alors $A_i \subset \mathbb{1}_{A_i}^{-1}(B)$, et si $0 \in B$, alors $\complement A_i \subset \mathbb{1}_{A_i}^{-1}(B)$. Les éléments 0 et 1 sont tous deux soit dans B, soit hors de B. Cela donne les 4 possibilités énumérées dans (36.29).

Supposons que les événements (A_i) sont indépendants. Nous devons vérifier que les tribus le soient, c'est-à-dire que les événements A_i et $\complement A_j$ sont indépendants. Cela est une conséquence du lemme 36.11. □

PROPooSYNQooAlpGdI

Proposition 36.17.
Soient des variables aléatoires indépendantes $X_k : \Omega \to \mathbb{R}^{d_k}$ et des fonctions boréliennes $f_k : \mathbb{R}^{d_k} \to \mathbb{R}^{p_k}$. Alors les variables aléatoires

$$f_k \circ X_k \tag{36.30}$$

sont indépendantes.

Démonstration. Le théorème 14.119 assure que les applications

$$f_k \circ X_k : \Omega \to \mathbb{R}^{p_k} : \tag{36.31}$$

sont $\mathcal{A}_{X_k}$-mesurables. En particulier pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^{p_k}$, nous avons $X_k^{-1} \circ f_k^{-1}(B) \in \mathcal{A}_{X_k}$. Nous avons donc

$$\sigma(f_k \circ X_k) \subset \sigma(X_k), \tag{36.32}$$

et par conséquent les tribus $\sigma(f_k \circ X_k)$ sont indépendantes étant donné que les tribus $\sigma(X_k)$ le sont. □

[3] Événements indépendants, définition 36.9.

LEMooWBAZooLVVRjO

Lemme 36.18.
Soient des variables aléatoires $X, Y : \Omega \to E$ que nous supposons être indépendantes et identiquement distribuées. Si $f : E \to F$ est mesurable,alors les variables aléatoires $f \circ X$ et $f \circ Y$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

LemHOjqqw

Lemme 36.19 (Lemme de regroupement[842])**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus indépendantes dans $\mathcal{A}$. Si $(M_j)_{j\in J}$ est une partition de I, alors les tribus

$$\mathcal{B}_j = \sigma\Big(\bigcup_{i\in M_j} \mathcal{A}_i\Big) \tag{36.33}$$

sont indépendantes.

Si les variables aléatoires $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ sont indépendantes, et si f et g sont des fonctions mesurables, alors les variables aléatoires $f(X_2, X_3, X_5)$ et $g(X_1, X_4)$ sont indépendantes.

36.2.3 Lois conjointes et indépendance

Définition 36.20 (Loi conjointe et loi marginale)**.**
*Si nous considérons n variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, la loi du n-uplet $X = (X_1, \dots, X_n)$ est une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ appelée la **loi conjointe** des lois X_i. Dans ce cas, les variables aléatoires X_i elles-mêmes sont dites lois **marginales** de X.*

PROPooCXSWooByucuN

Proposition 36.21 ([1])**.**
Soient un espace de probabilité Ω ainsi que deux variables aléatoires indépendantes

$$X_1 : \Omega \to \mathbb{R}^k \tag{36.34a}$$
$$X_2 : \Omega \to \mathbb{R}^l \tag{36.34b}$$

Nous supposons que X_1 et X_2 ont des densités $f_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$.

(1) En notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, avons égalité des mesures[4]

$$P_X = f \cdot \lambda = P_{X_1} \otimes P_{X_2} \tag{36.35}$$

(2) La variable aléatoire

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R}^{k+l} \\ \omega &\mapsto \big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) \end{aligned} \tag{36.36}$$

a pour densité la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f_1(x) f_2(y). \end{aligned} \tag{36.37}$$

Démonstration. Nous commençons par considérer un borélien de la forme $B_1 \times B_2$ avec $B_1 \in \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^k)$ et $B_2 \in \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^l)$. Par définition de P_X et par indépendance (proposition 36.15) nous avons d'une part

$$P_X(B_1 \times B_2) = P(X \in B_1 \times B_2) \tag{36.38a}$$
$$= P(X_1 \in B_1 \cap X_2 \in B_2) \tag{36.38b}$$
$$= P(X_1 \in B_1) P(X_2 \in B_2). \tag{36.38c}$$

Et d'autre part nous pouvons utiliser le théorème de Fubini 14.302 parce que f_1 et f_2 sont positives :

$$(f \cdot \lambda)(B_1 \times B_2) = \int_{B_1 \times B_2} f(x, y)\, dx\, dy \tag{36.39a}$$
$$= \int_{B_1 \times B_2} f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy \tag{36.39b}$$
$$= \int_{B_1} f_1(x) \int_{B_2} f_2(x) \tag{36.39c}$$
$$= P(X_1 \in B_1) P(X_2 \in B_2). \tag{36.39d}$$

Les mesures P_X et $f \cdot \lambda$ sont donc égales sur ces boréliens. La partie unicité du théorème 14.246(1) dit qu'alors elles sont égales sur tous les boréliens et qu'en plus, elles sont égales à $P_{X_1} \otimes P_{X_2}$. □

[4] Voir les définitions 36.8 et 14.212.

PROPooANJQooPjBPSy

Proposition 36.22 ([1]).
Soient des variables aléatoires indépendantes $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ de densités $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous considérons la variable aléatoire

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ \omega &\mapsto \big(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\big). \end{aligned} \tag{36.40}$$

Nous avons :

(1) La variable aléatoire X admet la densité

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i). \end{aligned} \tag{36.41}$$

ITEMooNIMQooGqFKNn

(2) Nous avons, pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^n$:

$$P(X \in B) = \int_B \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) dx \tag{36.42}$$

Démonstration. Il s'agit de faire une récurrence sur la proposition 36.21. □

PropPXXXPXPXPX

Proposition 36.23.
Les variables aléatoires $\{X_i\}$ sont indépendantes[5] *si et seulement si*

$$P_{(X_1,\dots,X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n} \tag{36.43}$$

où les mesures P_{X_i} sont les lois des variables aléatoires introduites en 36.8 et le produit des mesures est défini dans 14.246.

DefFonrepConj

Définition 36.24 (densité conjointe)**.**
Soient $\{X_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des variables aléatoires réelles (pas spécialement indépendantes). Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui satisfait

(1) $f(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

(2) $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$,

ItemDefFonrepConjiii

(3) Si les parties A_i sont mesurables dans $\mathbb{R}$, nous avons

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in A_i) = \int_{\prod_i A_i} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \tag{36.44}$$

est nommée ***densité conjointe*** *de X_1,…,X_n*

PROBooPVIXooNLpmIn

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 36.25
Il manque un théorème d'unicité pour la densité conjointe. Écrivez-moi si vous en connaissez un.

36.26.
Il y a une différence entre la densité conjointe de $X_1, \dots, X_n$ et la densité de la variable aléatoire $\omega \mapsto \big(X_1(\omega, \dots, X_n(\omega))\big)$. La densité de cette dernière est une fonction f qui doit satisfaire

$$P(X \in B) = \int_B f(x) dx \tag{36.45}$$

pour tout borélien B. La densité conjointe ne vérifie cela que pour les boréliens très particuliers qui se présentent comme produits cartésiens de boréliens de $\mathbb{R}$.

PropDensiteConjIndep

Proposition 36.27.
Si les variables aléatoires X_1,…X_n sont indépendantes et ont des densités f_{X_1},…,f_{X_n}, alors la variable aléatoire conjointe $X = (X_1, \dots, X_n)$ a pour densité conjointe la fonction

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n). \tag{36.46}$$

[5] Variables aléatoires indépendantes, définition 36.13.

Démonstration. En partant de la définition de l'indépendance et de la fonction de densité conjointe, ainsi qu'en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{A_1\times\ldots\times A_n} f_X(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n &= P(X_1\in A_1,\ldots,X_n\in A_n)\\ &= P(X_1\in A_1)\ldots P(X_n\in A_n)\\ &= \left(\int_{A_1} f_{X_1}(x_1)dx_1\right)\ldots\left(\int_{A_n} f_{X_n}(x_n)dx_n\right)\\ &= \int_{A_1\times\ldots\times A_n} f_{X_1}(x_1)\ldots f_{X_n}(x_n)dx_1\ldots dx_n.\end{aligned} \tag{36.47}$$

La fonction $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto f_{X_1}(x_1)\ldots f_{X_n}(x_n)$ vérifie donc la condition (3) de la définition 36.24. La vérification des autres conditions est immédiate. □

LEMooLNIZooDWUvRN

Lemme 36.28 ([843])**.**
Si les variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes[6] *et identiquement distribuées de densité*[7] *f. Nous considérons la variable aléatoire*

$$\begin{aligned}X\colon\Omega &\to \mathbb{R}^n\\ \omega &\mapsto \big(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega)\big).\end{aligned} \tag{36.48}$$

Alors la densité de variable aléatoire X est

$$\begin{aligned}g\colon\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto n!\prod_{i=1}^{n} f(x_i)\mathbb{1}_{\{x_1<\ldots<x_n\}}.\end{aligned} \tag{36.49}$$

Démonstration. Nous devons vérifier les différents points de la définition 36.24.

(1) $g\geqslant 0$ Celle-là, elle est facile.

(2) **Les parties $\mathbb{R}^n_\sigma$** Soit $\sigma\in S_n$ (une permutation de $\{1,\ldots,n\}$). Nous considérons les parties

$$\mathbb{R}^n_\sigma = \{x\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } x_{\sigma(1)}<\ldots<x_{\sigma(n)}\}, \tag{36.50}$$

et la bijection

$$\begin{aligned}\varphi\colon\mathbb{R}^n_{\mathrm{Id}} &\to \mathbb{R}^n_\sigma\\ x &\mapsto \big(x_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,x_{\sigma^{-1}(n)}\big).\end{aligned} \tag{36.51}$$

EQooLQDGooQJNLsd

Nous avons

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\sigma\in S_n}\mathbb{R}^n_\sigma\cup Z \tag{36.52}$$

où Z est de mesure (le Lebesgue) nulle. Cela a pour conséquence que

$$\int_{\mathbb{R}^n} s(x)dx = \sum_{\sigma\in S_n}\int_{\mathbb{R}^n_\sigma} s(x)dx \tag{36.53}$$

EQooIEWWooZgQRTM

pour toute fonction s intégrable.

(3) **Une formule intermédiaire** Nous prouvons, pour tout $\sigma\in S_n$, la formule $\int_{\mathbb{R}^n_\sigma}\prod_{i=1}^n f(x_i) = \int_{\mathbb{R}^n_{\mathrm{Id}}}\prod_{i=1}^n f(x_i)$. Pour cela nous fixons $\sigma\in S_n$.

Vu que le produit est commutatif nous avons

$$\prod_{i=1}^{n} f\big(x_{\sigma^{-1}(i)}\big) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{36.54}$$

EQooJEDAooQMmHrb

(4) **Intégrale 1** Nous prouvons que $\int_{\mathbb{R}^n} g = 1$. Pour cela nous utilisons le théorème de Fubini 14.305(3) :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^{n} f(x_i)dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}\prod_{i=1}^{n} f(x_i)dx_n\right)dx_1\ldots dx_{n-1} \tag{36.55a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\prod_{i=1}^{n-1} f(x_i)\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x_n)dx_n}_{=1}\Big)dx_1\ldots dx_{n-1} \tag{36.55b}$$

[6] Variables aléatoires indépendantes, définition 36.13.
[7] Définition 36.5.

Par récurrence sur n, nous déduisons que $\int_{\mathbb{R}^n} g = 1$.

(5) $P(X \in A)$

Soit un borélien $A \subset \mathbb{R}^n$. Vu qu'à partie de mesure nulle près, A est l'union disjointe des A_σ, nous avons, en utilisant la proposition 36.22(2),

$$P(X \in A) = \int_A \prod_i f(x_i)dx = \sum_{\sigma \in S_n} \int_{A_\sigma} \prod_i f(x_i)dx. \tag{36.56}$$

Pour un σ donné, nous considérons l'application φ de (36.51). Nous avons $A_\sigma = \varphi(A_{\mathrm{Id}})$ et donc

$$P(X \in A) = \sum_\sigma \int_{\varphi_\sigma(A_{\mathrm{Id}})} \prod_i f(x_i)dx. \tag{36.57}$$

Là-dessus, nous utilisons φ_σ comme changement de variables dans l'intégrale, théorème 14.282(2) :

$$\begin{aligned}
P(X \in A) &= \sum_\sigma \int_{\varphi_\alpha(A_{\mathrm{Id}})} \prod_i f(x_i)dx && (36.58a)\\
&= \sum_\sigma \int_{A_{\mathrm{Id}}} f\big(\varphi_\alpha(x)_i\big)dx && (36.58b)\\
&= \sum_\sigma \int_{A_{\mathrm{Id}}} \prod_i f(x_i)dx && (36.58c)\\
&= n! \int_{A_{\mathrm{Id}}} \prod_i f(x_i)dx \qquad \text{cf. justif.} && (36.58d)\\
&= n! \int_A \prod_i f(x_i)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n_{\mathrm{Id}}}(x)dx. && (36.58e)
\end{aligned}$$

SUBEQooEJBQooFyLbct

Justification pour (36.58d). Les termes de la somme sur σ sont tous les mêmes, et il y en a $n!$.

□

36.2.4 Densité jointe

PROPooGXEOooWMAuIp

Proposition 36.29 ([844]).
Soit un ouvert A de $\mathbb{R}$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f' est mesurable.

Si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des variables aléatoires, nous définissons l'application

$$\begin{aligned} F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto P\big(X \leqslant x, Y \leqslant y\big). \end{aligned} \tag{36.59}$$

DEFooUOKQooMIjDkr

Définition 36.30 ([845]).
*Lorsque cela a un sens, nous définissons la **densité jointe** de X et Y par*[8]

$$f_{X,Y}(x, y) = (\partial^2_{1,2} F_{X,Y})(x, y). \tag{36.60}$$

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 36.31
Pour la proposition 36.32, vous pouvez essayer de répondre aux questions suivantes :

(1) *ahttps://math.stackexchange.com/questions/4961906/random-variable-density-from-basis-of-topology-to-borel-sets*

(2) *https://math.stackexchange.com/questions/4961074/is-the-join-density-the-density-of-the-vector?noredirect=1&lq=1*

Bref. Soyez très prudent. N'ayez confiance en personne.

PROPooPDIWooHzjqcZ

Proposition 36.32 ([1]).
Soient deux variables aléatoires $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Nous supposons

(1) que la densité jointe[9] *$f_{X,Y}$ soit bien définie.*

[8] Vous préférez peut-être la notatoin $\partial_{xy} F_{X,Y}$.
[9] Définition 36.30.

(2) Pour toute borélien Z de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}$, nous avons

$$P(X \in Z) = P(Y \in Z) = 0. \tag{36.61}$$

Alors pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^2$, nous avons

$$P\big((X,Y) \in B\big) = \int_B f_{X,Y}. \tag{36.62}$$

Démonstration. Vu que $F_{X,Y}$ est croissante en ses deux variables, la fonction $f_{X,Y}$ est positive. Et en tant que dérivée d'une fonction mesurable, elle est également mesurable (proposition 36.29). Nous pouvons donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli 14.302 :

$$\int_B f_{X,Y} = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\mathbb{1}_B(x,y)dxdy \tag{36.63a}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\mathbb{1}_B(x,y)dy\right] dx. \tag{36.63b}$$

(1) **Sur un rectangle** Nous supposons que soit un rectangle ouvert : $B =]a,b[\times]c,d[$. Les intégrales deviennent :

$$\int_B f_{X,Y} = \int_a^b \left[\int_c^d f_{X,Y}(x,y)dy\right] dx. \tag{36.64}$$

Nous nous fixons à présent x et nous nous concentrons sur l'intégrale intérieure : $\int_c^d f_{X,Y}(x,y)dy$. Nous posons

$$\begin{aligned} G_x\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto (\partial_x F_{X,Y})(x,y), \end{aligned} \tag{36.65}$$

de telle sorte que $F_{X,Y}(x,y) = G'_x(y)$ et que

$$\int_c^d f_{X,Y}(x,y)dy = \int_c^d G'_x(y)dy \tag{36.66a}$$
$$= G_x(d) - G_x(c) \tag{36.66b}$$
$$= (\partial_x F_{X,Y})(x,d) - (\partial_x F_{X,Y})(x,c). \tag{36.66c}$$

Nous passons à l'intégrale sur x. Pour le premier terme, nous posons

$$\begin{aligned} H\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x,d), \end{aligned} \tag{36.67}$$

de telle sorte à avoir $(\partial_x F_{X,Y})(x,d) = H'(x)$ et

$$\int_a^b (\partial_x F_{X,Y})(x,d) = H(b) - H(a) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d). \tag{36.68}$$

En faisant de même pour le second terme, nous trouvons

$$\int_B f_{X,Y} = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c) \tag{36.69a}$$
$$= P(X \leqslant b, Y \leqslant d) - P(X \leqslant a, Y \leqslant d) - P(X \leqslant b, Y \leqslant c) + P(X \leqslant a, Y \leqslant c). \tag{36.69b}$$

SUBEQooLUZJooTpqbGO

Nous divisons $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \leqslant b, y \leqslant d\}$ en 4 parties :

$$A_1 = \{x \leqslant a, c \leqslant y \leqslant d\} \tag{36.70a}$$
$$A_2 = \{a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\} = B \tag{36.70b}$$
$$A_3 = \{a \leqslant x \leqslant b, y \leqslant c\} \tag{36.70c}$$
$$A_4 = \{x \leqslant a, y \leqslant c\}. \tag{36.70d}$$

Faites quelques dessins pour voir quelle partie ressemble à quoi. Il n'est pas trop compliqué de voir que

$$\{X \leqslant b, Y \leqslant d\} = \{(X,Y) \in A_4\} \cup \{(X,Y) \in A_1\}. \tag{36.71}$$

En faisant de même pour les différents termes de (36.69b), nous trouvons

$$\int_B f_{X,Y} = P\big((X,Y) \in A_2\big) = P\big((X,Y) \in B\big). \tag{36.72}$$

(2) **Théorème d'extension** Nous voulons utiliser le théorème d'extension des mesures 14.34 en considérant $\mathcal{E}$, l'ensemble des rectangles ouverts de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées rationnelles[10]. Nous posons

$$\mu_1(B) = P\big((X,Y) \in B\big) = \big(P \circ (X,Y)^{-1}\big)(B) \tag{36.73}$$

EQooPFXUooQumsUl

et

$$\mu_2(B) = \int_B f_{X,Y} \tag{36.74}$$

pour tout borélien B de $\mathbb{R}^2$. Nous allons prouver que μ_1 et μ_2 sont des mesures[11].

(3) **μ_1 est une mesure** La formule (36.73) a un sens parce que si B est mesurable dans Ω, alors

$$(X,Y)^{-1}(B) \in \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}) \qquad \text{prop. 14.129} \tag{36.75a}$$
$$= \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^2) \qquad \text{prop. 14.131.} \tag{36.75b}$$

À partir de là, μ_1 est une mesure par la proposition 14.47. En effet P est une mesure sur Ω et $(X,Y)\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ est mesurable.

(4) **μ_2 est une mesure** Vu que $F_{X,Y}$ est croissante en ses deux arguments, il n'y a pas de problèmes pour que $f_{X,Y}$ soit positive. Donc tant que B est borélien, $\int_B F_{X,Y}$ existe et est dans $[0,\infty]$.

Nous avons évidemment $\mu_2(\varnothing) = 0$. Ensuite, si les A_i sont des boréliens disjoints de $\mathbb{R}^2$, alors

$$\mu_2\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \int_{\bigcup_i A_i} f_{X,Y} \tag{36.76a}$$
$$= \sum_i \int_{A_i} f \tag{36.76b}$$
$$= \sum_i \mu_2(A_i). \tag{36.76c}$$

(5) **$\sigma(\mathcal{E})$ contient $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^2)$** Pour utiliser le théorème 14.34 nous devons encore prouver que la tribu engendrée par $\mathcal{E}$ contient les boréliens de $\mathbb{R}^2$. Vu que $\mathcal{E}$ est dénombrable, la proposition 14.35 dit que $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$.

(6) **Autres hypothèses** Vérifions vite fait les autres hypothèses du théorème 14.34. Si A et B sont des rectangles, $A \cap B$ est encore un rectangle. En posant $E_n =]-n,n[\times]-n,n[$, nous avons bien $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$. Et en plus $\lim E_n = \mathbb{R}^2$.

(7) **Conclusion** Nous avons $\mu_1 = \mu_2$ sur $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^2)$, c'est-à-dire que pour tout $B \in Borelien(\mathbb{R}^2)$, nous avons

$$P\big((X,Y) \in B\big) = \int_B f_{X,Y}. \tag{36.77}$$

□

36.2.5 Espérance

DEFooQKFBooCBZtRG

Définition 36.33.
*Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, nous définissons l'**espérance** de X par*

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega). \tag{36.78}$$

EqdCBLst

Pour l'espérance de $f \circ X$, il y a le lemme de transfert 36.97.

PROPooESPWooAfLmeW

Proposition 36.34.
Soit une variable aléatoire X sur Ω. Nous avons :

ITEMooWSJVooAlZSBZ

(1) $E(X)$ existe et est finie si et seulement si $E(|X|) < \infty$.

ITEMooLDFWooXjyZyz

(2) Si $E(|X|) < \infty$, alors $|E(X)| \leqslant E(|X|) < \infty$.

[10] Pourquoi nous ne considérons que les rectangles de coordonnées rationnelles ? Nous allons comprendre cela plus tard.
[11] Définition 14.11.

ITEMooFJCTooEBeFaz

(3) *Si $0 < r \leqslant s$ alors si $E(|X|^s) < \infty$ alors $E(|X|^r) < \infty$.*

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** C'est le lemme 14.188.

(2) **Pour (2)** C'est la proposition 14.189.

(3) **Pour (3)** C'est la proposition 27.41.

□

LEMooEHTYooWmMAgf

Lemme 36.35 ([1])**.**
Soit un espace de probabilité Ω ainsi qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ prenant seulement les valeurs $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Alors

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k P(X = y_k). \tag{36.79}$$

Démonstration. Vu que l'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ne prend que les valeurs y_k, nous avons $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} X^{-1}(y_k)$, avec une union disjointe. Nous avons

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{\bigcup_i X^{-1}(y_i)} X(\omega) dP(\omega) && \text{(36.80a)}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{X^{-1}(y_k)} \underbrace{X(\omega)}_{=y_k} dP(\omega) && \text{(36.80b)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} y_k \int_{X^{-1}(y_k)} dP(\omega) && \text{(36.80c)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} y_k P\big(X^{-1}(y_k)\big) && \text{(36.80d)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} y_k P(X = y_k) && \text{(36.80e)}
\end{aligned}$$

SUBEQooVLTMooQflpAI

SUBEQooXRHOooJVuFtY

SUBEQooHDIBooNxnBwg

Justifications :

- Pour (36.80b), nous avons utilisé la σ-additivité de l'intégrale de la proposition 14.210.
- Pour (36.80d), l'intégrale de la fonction 1 donne la mesure de la partie, c'est le lemme 14.175.
- Pour (36.80e), la notation $P(X = y)$ signifie $P\big(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = y\}\big)$; c'est la mesure de $X^{-1}(y)$.

□

PROPooHJZWooGCpKLf

Proposition 36.36 ([846])**.**
Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire positive, alors

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X \geqslant t) dt. \tag{36.81}$$

Démonstration. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$ nous définissons

$$\Omega_t = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \geqslant t\}. \tag{36.82}$$

(1) $P(X \geqslant t) = E(\mathbb{1}_{\Omega_t})$ En utilisant le lemme 14.175, nous avons

$$E(\mathbb{1}_{\Omega_t}) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\Omega_t} d\omega = P(\Omega_t) = P(X \geqslant t). \tag{36.83}$$

(2) **Une expresion pour $X(\omega)$** Soit $\omega \in \Omega$. Nous allons montrer que $X(\omega) = \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\Omega_t}(\omega) dt$. Pour cela il faut remarquer que :

$$\mathbb{1}_{\Omega_t}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \geqslant t \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{36.84}$$

Avec cela nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{\Omega_t}(\omega)dt = \int_0^{X(\omega)} 1dt = X(\omega). \tag{36.85}$$

(3) **Le calcul** En utilisant les points précédents,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_\Omega X(\omega)d\omega && (36.86a)\\
&= \int_\Omega \int_0^\infty \mathbb{1}_{\Omega_t}(\omega)dt && (36.86b)\\
&= \int_0^\infty \int_\Omega \mathbb{1}_{\Omega_t}(\omega)dt && \text{Fubini-Tonelli (14.942)} \quad (36.86c)\\
&= \int_0^\infty E(\mathbb{1}_{\Omega_t})dt && (36.86d)\\
&= \int_0^\infty P(X \geqslant t)dt. && (36.86e)
\end{aligned}$$

□

La proposition suivante provient du fait que la mesure d'une loi conjointe est le produit des mesures lorsque les variables aléatoires sont indépendantes (proposition 36.23).

PROPooDKQDooREiSSf

Proposition 36.37 ([487]).
Si les variables aléatoires réelles $X_1,\dots,X_n$ sont intégrables et indépendantes, alors leur produit est intégrable et l'espérance[12] *du produit est égal au produit des espérances :*

$$E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \dots E(X_n). \tag{36.87}$$

LEMooIVIWooUUVStW

Lemme 36.38.
Soit une variable aléatoire à densité $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que pour tout choix $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_n < b_n$ nous ayons

$$P(X \in I) = \int_I f \tag{36.88}$$

où $I = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i]$.

Alors f est une densité pour X.

PROBooAHJSooWUuJhb

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 36.39
Je n'ai pas vérifié que ce lemme est correct. Soyez prudent. À mon avis il doit être bon parce que les pavés donnés engendrent la tribu des boréliens d'une façon ou d'une autre. C'est à peu près ce qui est dit dans [847].

Écrivez-moi si vous avez une preuve ou un contre-exemple.

36.2.6 Moment

DEFooTECPooMzGYgG

Définition 36.40.
*Soit $1 \leqslant p < \infty$. Le **moment** d'ordre p d'une variable aléatoire $X \in$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est l'espérance*

$$m_p(X) = E(X^p) \tag{36.89}$$

pour autant que X^p soit intégrable[13].

PROPooIQGWooZeQJgb

Proposition 36.41.
Soit une variable aléatoire X. Si elle admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}$, elle admet un moment d'ordre k pour tout $k \leqslant p$.

Démonstration. L'hypothèse est que $\int_\Omega |X|^p < \infty$, c'est-à-dire que $E(|X|^p) < \infty$. La proposition 36.34(3) conclut que $E(|X|^s) < \infty$ pour tout $s \leqslant p$. □

[12] Espérance d'une variable aléatoire, définition 36.33.
[13] C'est-à-dire que $\int_\Omega |X|^p < \infty$. Voir 14.187.

36.2.7 Somme et produit de variables aléatoires indépendantes

subsecscnvommevariablsindep

À propos de la somme de variables aléatoires, nous avons la proposition suivante.

PROPooBNUEooOUvpdp

Proposition 36.42.
La densité de la somme de deux variables aléatoires réelles indépendantes est le produit de convolution des densités :

$$f_{X+Y} = f_X * f_Y \tag{36.90}$$

dès que X et Y sont indépendantes.

Démonstration. Soient X et Y, deux variables aléatoires réelles indépendantes. Nous voudrions étudier la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$. Nous commençons par calculer la fonction de répartition en utilisant le résultat de la proposition 36.27 :

$$F_{X+Y}(z) = P(X + Y \leqslant z) = \int_{x+y\leqslant z} f_{X,Y}(x, y)dx\,dy \tag{36.91a}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} dy f_X(x)f_Y(y) \tag{36.91b}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dy \right) f_X(x)dx \tag{36.91c}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} F_Y(z - x)f_X(x)dx. \tag{36.91d}$$

Pour calculer la fonction de densité de S, nous dérivons la fonction de répartition :

$$f_{X+Y}(z) = \frac{dF_{X+Y}}{dz}(z) \tag{36.92a}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f_Y(z - x)f_X(x)dx, \tag{36.92b}$$

ce qui nous amène à dire que la densité de la somme est le produit de convolution[14] des densités :

EQooFKHHooWvUBMV

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(x - t)f_X(t)dt, \tag{36.93}$$

ou encore $f_{X+Y} = f_X * f_Y$. □

Notez que nous avons passé sous le silence la difficulté d'inverser la dérivée et l'intégrale. Un exemple sera donné au point 36.6.8.

LemEXYEXEYprodindep

Lemme 36.43.
Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes. Alors[15]

$$E(XY) = E(X)E(Y). \tag{36.94}$$

Démonstration. Par indépendance et par proposition 36.27, la fonction de densité conjointe de X et Y vaut $f_{X,Y} = f_X f_Y$. Par conséquent l'utilisation de Fubini sous la forme (14.969) entraine

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} xyf_{X,Y}(x, y)dxdy = E(X)E(Y). \tag{36.95}$$

□

Nous dirons tout un tas de chose sur l'indépendance et la variance en 36.6.13, mais pour l'instant nous allons mentionner et démontrer déjà ceci :

LemVarXpYsmindep

Lemme 36.44.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Alors

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y). \tag{36.96}$$

[14] Définition 27.78.
[15] Espérance d'une variable aléatoire, définition 36.33.

Démonstration. Par définition, $\mathrm{Var}(X+Y) = E\big([X+Y-E(X)-E(Y)]^2\big)$. En développant le carré et en utilisant le lemme 36.43,

$$\mathrm{Var}(X+Y) = E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y). \tag{36.97}$$

□
ExWLzkuWd

Exemple 36.45.
Deux variables aléatoires non indépendantes dont la covariance est nulle. Nous considérons la variable aléatoire

$$Z\colon \Omega \to \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\} \tag{36.98}$$

de loi uniforme. C'est-à-dire que $P\big(Z=z\big) = \frac{1}{4}$ pour tout z. Ensuite nous considérons les variables aléatoires $X = \mathtt{proj}_1 \circ Z$ et $Y = \mathtt{proj}_2 \circ Z$. Toute personne étant capable de compter jusqu'à 4 voit que

$$P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{4} \tag{36.99a}$$

$$P(X=0) = \frac{1}{2}, \tag{36.99b}$$

et les mêmes probabilités pour Y. De même $E(X) = E(Y) = 0$. Par conséquent

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) = 0 \tag{36.100}$$

parce que pour tout $\omega \in \Omega$ nous avons soit $X(\omega) = 0$ soit $Y(\omega) = 0$. Ces variables aléatoires X et Y ne sont donc pas corrélées.

Mais elles ne sont pas indépendantes pour autant, comme nous allons le voir pas plus tard qu'immédiatement. Nous avons

$$P(X=0|Y=0) = \frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)} = 0 \tag{36.101}$$

parce que X et Y ne peuvent pas être simultanément nulles, tandis que

$$P(X=0)P(Y=0) = \frac{1}{4}. \tag{36.102}$$

△

Définition 36.46.
*Si $E(X) = 0$ nous disons que la variable aléatoire est **centrée**. La variable aléatoire $X - E(X)$ est la variable aléatoire centrée associée à X.*

PropZBnsCgh

Proposition 36.47 ([848, 849])**.**
Soient deux variables aléatoires $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y). \tag{36.103}$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$E(X+Y) = \int_\Omega (X+Y)(\omega) dP(\omega), \tag{36.104}$$

et de faire jouer la linéarité de l'intégrale de la proposition 14.193. □

Une application de l'inégalité de Hölder (proposition 27.39) est la suivante. Si X et Y sont des variables aléatoires intégrables alors

$$E(XY) \leqslant E(X^2)^{1/2} E(Y^2)^{1/2}. \tag{36.105}$$

En effet

$$E(XY) \leqslant \|XY\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|X\|_{L^2(\Omega)} \|Y\|_{L^2(\Omega)}. \tag{36.106}$$

EqEXYleqXdYdNormHolder

36.2.8 Variance

DEFooBHQOooVzpsob

Définition 36.48 (Variance)**.**
*Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alors nous définissons la **variance** de X par*

$$\mathrm{Var}(X) = E\big([X - E(X)]^2\big). \tag{36.107}$$

PrropVarAlterfrom

Proposition 36.49.
La variance de la variable aléatoire X peut être exprimée par la formule

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{36.108}$$

EqtWqMGB

où $X^2 = X \cdot X$ et $E(X)^2 = E(X) \cdot E(X)$ sont des produits scalaires dans $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. De façon explicite, nous avons

$$E\big([X - E(X)]^2\big) = \int_\Omega \big(X(\omega) - E(X)\big) \cdot \big(X(\omega) - E(X)\big) dP(\omega) \tag{36.109}$$

où $E(X) \in \mathbb{R}^d$ est une constante. En développant le produit scalaire nous avons

$$\begin{aligned} E\big([X - E(X)]^2\big) &= E\big(X^2 - 2X \cdot E(X) + E(X)^2\big) && \text{(36.110a)}\\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 && \text{(36.110b)}\\ &= E(X^2) - E(X)^2. && \text{(36.110c)} \end{aligned}$$

□

Définition 36.50 (écart-type)**.**
*Nous définissons l'**écart-type** de X par*

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}, \tag{36.111}$$

c'est-à-dire

$$\sigma_X = \|X - E(X)\|_{L^2}. \tag{36.112}$$

Définition 36.51 (moyenne quadratique)**.**
*On définit encore la **moyenne quadratique** de X par*

$$\|X\|_{L^2} = \big[E(X^2)\big]^{1/2}. \tag{36.113}$$

Définition 36.52 (moyenne empirique)**.**
*Si les $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires on considère la **moyenne empirique***

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}. \tag{36.114}$$

Définition 36.53 (variance empirique)**.**
Si $(X_1, \dots, X_n)$ sont des variables aléatoires, nous notons $\bar{X}_n$ leur moyenne empirique, et la variable aléatoire

$$\bar{V}_n = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2 \tag{36.115}$$

*est la **variance empirique** de l'échantillon (X_i).*

LemEXYEXEYindep

Lemme 36.54.
Si X est une variable aléatoire,

(1) $\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$;

(2) Si de plus Y est une variable aléatoire indépendante de X, alors $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X + Y) &= E(X^2 + Y^2 + 2XY) - \big(E(X) + E(Y)\big)^2 && \text{(36.116a)}\\ &= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - E(X)^2 - E(Y)^2 + 2E(X)E(Y). && \text{(36.116b)} \end{aligned}$$

Étant donné que X et Y sont indépendantes nous avons $E(XY) = E(X)E(Y)$ par le lemme 36.43. □

36.2.9 Covariance

Soient X et Y, deux variables aléatoires réelles. Leur **covariance** est définie par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\Big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big] \tag{36.117}$$

EqHJWtttN

L'idée est que la covariance devient grande si X et Y s'écartent de leurs moyennes dans le même sens. Il existe une formule alternative :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \tag{36.118}$$

En ce qui concerne les dimensions plus hautes, si $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^d$ est un vecteur aléatoire de carré intégrable, nous définissons

$$\mathrm{Cov}(X) = E\Big[\big(X-E(X)\big)\otimes\big(X-E(X)\big)\Big] \tag{36.119}$$

EqZlvLWx

où par $a\otimes b$ nous entendons la matrice $(a\otimes b)_{ij}=a_ib_j$. Cela peut aussi être noté a^tb si l'on fait bien attention à qui est un vecteur colonne et qui est un vecteur ligne.

PropoVarXpYCov

Proposition 36.55.
Si X et Y sont deux variables aléatoires non spécialement indépendantes, nous avons

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y). \tag{36.120}$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul en partant de

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X+Y) &= E\big((X+Y)^2\big) - E(X+Y)^2\\ &= E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)\\ &\quad+\big(E(X)+E(Y)\big)^2-2E(X)^2-2E(X)E(Y)\\ &\quad-2E(Y)E(X)-2E(Y)^2.\end{aligned} \tag{36.121}$$

À partir d'ici il s'agit de recombiner tous les termes pour former la formule annoncée. □

Plus généralement nous avons la formule

$$\mathrm{Var}(\sum_i X_i) = \sum_i \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j). \tag{36.122}$$

36.2.10 Probabilité conditionnelle : événements

DEFooGJVHooVbhVYv

Proposition-Définition 36.56.
Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité et $B\in\mathcal{A}$ avec $P(B)>0$. Alors avec la formule

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \tag{36.123}$$

EqProbCond

*l'espace $(\Omega,\mathcal{A},P_B)$ est un espace probabilisé. Nous notons $P(A|B)$ le nombre $P_B(A)$ et nous le nommons **probabilité conditionnelle** de A sachant B.*

Démonstration. On vérifie que $(\Omega,\mathcal{A},P_B)$ est un espace de probabilité parce que $P_B(\Omega)=1$ et

$$P_B(\bigcup_i A_i) = \sum_i P_B(A_i) \tag{36.124}$$

si les A_i sont deux à deux disjoints. □

Une conséquence immédiate de (36.123) est que si A et B sont des événements indépendants alors

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A). \tag{36.125}$$

La probabilité conditionnelle à B est quelque chose qui ne tient compte que de ce qui se passe dans B. Si K est un événement tel que $A\cap B = K\cap B$, alors

$$P(A|B) = P(K|B). \tag{36.126}$$

EqOVHCWom

EXooIAYTooFjFTrT

Exemple 36.57 ([850]).
Soient des événements A, B et X dont A et B sont indépendants. Intuitivement, nous devrions avoir[16]

$$P(A|B\cap X)=P(A|X). \tag{36.127}$$

Cela est faux. Prenez par exemple $\Omega=\{1,2,3,4\}$ avec la mesure d'équiprobabilité. Ensuite $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$ et $X=\{1,4\}$. Alors $P(A)=1/2$, $P(B)=1/2$ de telle sorte que

$$P(A)P(B)=\frac{1}{4}=P(A\cap B) \tag{36.128}$$

parce que $A\cap B=\{1\}$. Les événements A et B sont donc bien indépendants. Nous avons

$$P(A|B\cap X)=\frac{P(A\cap B\cap X)}{P(B\cap X)}=\frac{P(\{1\})}{P(\{1\})}=1, \tag{36.129}$$

mais

$$P(A|X)=\frac{P(A\cap X)}{P(X)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}. \tag{36.130}$$

△

ThoBayesEtAutres

Théorème 36.58.
Soient $(B_n)_{n\geqslant 1}$ une partition finie de Ω telle que $P(B_i)>0$. Soit $A\in\mathcal{A}$ tel que $P(A)>0$.

(1) Si A, B et C sont des événements, alors

$$P(A\cap B|C)=P(A|B\cap C)P(B|C). \tag{36.131}$$

(2) Si $P(B)>0$, alors $P(A\cap B)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$.

*(3) On a la **formule des probabilités totales** :*

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)=\sum_i P(A\cap B_i). \tag{36.132}$$

*(4) On a la **formule de Bayes** :*

$$P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}. \tag{36.133}$$

Démonstration. (1) En développant le membre de droite,

$$\begin{aligned}P(A\cap B|C)&=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}\frac{P(B\cap C)}{P(C)}\\&=P(A\cap B|C).\end{aligned} \tag{36.134}$$

(2) C'est la définition de $P(A|B)$ et $P(B|A)$.

(3) Vu que les B_i forment une partition, nous avons

$$P(A)=\sum_i P(A\cap B_i)=\sum_i P(A|B_i)P(B_i). \tag{36.135}$$

(4) En utilisant les deux premiers points, nous trouvons

$$\begin{aligned}P(A|B_k)P(B_k)&=P(A\cap B_k)\\&=P(B_k|A)P(A)\\&=P(B_k|A)\sum_i P(A|B_i)P(B_i).\end{aligned} \tag{36.136}$$

□

[16] Probabilité conditionnelle, définition 36.56.

Lemme 36.59 ([1]).
Soient une variable aléatoire $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi qu'un réel $y \neq 0$ et qu'une partie $A \subset \Omega$ de mesure non nulle[17]*. Alors*

$$P(X\mathbb{1}_A = y) = P(X = y|A)P(A). \tag{36.137}$$

Démonstration. Juste pour être clair avec les notations,

- La notation $X = y$ désigne l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = y\} = X^{-1}(y)$
- De même $X\mathbb{1}_A = y$ désigne l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega)\mathbb{1}_A(\omega) = y\}$. Comme ici $y \neq 0$, il s'agit des éléments de A tels que $X(\omega) = y$, ou encore $X^{-1}(y) \cap A$.

Nous avons :

$$P(X = y|A) = \frac{P(X = y \cap A)}{P(A)} \tag{36.138a}$$
SUBEQooTJDIooHlIiTD

$$= \frac{P(A\mathbb{1}_A = y)}{P(A)}. \tag{36.138b}$$
SUBEQooDAATooBeClLa

Justifications :

- Pour (36.138a), c'est la définition 36.56.
- Pour (36.138b), vu que $y \neq 0$ nous avons

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = y\} \cap A = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } (X\mathbb{1}_A)(\omega) = y\}. \tag{36.139}$$

□
LEMooRDXRooQLMRGF

Lemme 36.60 ([1]).
Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nous considérons un mesurable $B \in \mathcal{F}$ ainsi que des mesurables $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. Alors

$$P\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i|B\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i|B). \tag{36.140}$$

Démonstration. Nous commençons par la définition 36.56 de la probabilité conditionnelle :

$$P\Big(\bigcup_i A_i|B\Big) = \frac{P\big(\bigcup_i A_i \cap B\big)}{P(B)} = \frac{P\big(\bigcup_i (A_i \cap B)\big)}{P(B)}. \tag{36.141}$$
EQooRUXMooNzxnxg

Ensuite, les A_i étant disjoints, les $A_i \cap B$ le sont aussi. Vu que P est une probabilité (et donc une mesure), elle vérifie la condition de la définition 14.18(2), qui donne ici

$$P\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty}(A_i \cap B)\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i \cap B). \tag{36.142}$$

En remettant dans (36.141),

$$P\Big(\bigcup_i A_i|B\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i|B). \tag{36.143}$$

□
LEMooVYDTooGELPRY

Lemme 36.61 ([1]).
Soient des ensembles E, F, G. Soit une application $f\colon E \times F \to G$. Soient des éléments $a \in G$, $x \in E$. Nous considérons des variables aléatoires $X\colon \Omega \to E$ et $Y\colon \Omega \to F$.

Soit $B \subset \Omega$ tel que $X(\omega) = x$ pour tout $\omega \in B$. Alors nous avons

$$P\big(f(X, Y) = a|B\big) = P\big(f(x, Y) = a|B\big). \tag{36.144}$$

[17] Ceci est exactement synonyme de « un événement de probabilité non nulle ».

Démonstration. Posons $A = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f\big(X(\omega), Y(\omega)\big) = a\}$. Ce que nous cherchons à calculer est $P(A|B)$ qui est défini en 36.56. En posant $A' = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f\big(x, Y(\omega)\big) = a\}$, nous avons

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f\big(X(\omega), Y(\omega)\big) = a, \omega \in B\} && (36.145a)\\ &= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f\big(x, Y(\omega)\big) = a, \omega \in B\} && (36.145b)\\ &= A' \cap B. && (36.145c)\end{aligned}$$

Donc

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = P(A'|B). \tag{36.146}$$

□

LEMooZTBSooLemswG

Lemme 36.62 ([1]).
Soient des ensembles E_i $(i = 1, \dots, n)$, F et E. Soient des variables aléatoires $X_i \colon \Omega \to E_i$ et $Y \colon \Omega \to E$, et une application $f \colon E_1 \times \dots \times E_n \to F$.

Nous supposons que Y est indépendante des X_i. Pour $y \in E$ et $z \in F$ nous avons

$$P\big(Y = y | f(X_1, \dots, X_n) = z\big) = P(Y = y). \tag{36.147}$$

LEMooWAOSooBsGucQ

Lemme 36.63 ([1]).
Soient des variables aléatoires $X_i \colon \Omega \to E_i$ $(i = 1, \dots, n)$ et $Y_i \colon \Omega \to F_i$. Nous supposons qu'elles sont toutes indépendantes. Nous considérons des applications $f \colon E_1 \times \dots \times E_n \to S$ et $g \colon F_1 \times F_m \to T$. Alors les variables aléatoires

$$\omega \mapsto f\big(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\big) \tag{36.148}$$

et

$$\omega \mapsto g\big(Y_1(\omega), \dots, Y_m(\omega)\big) \tag{36.149}$$

sont indépendantes.

36.2.11 Espérance conditionnelle

ThoMWfDPQ

Théorème-Définition 36.64 (Définition de l'espérance conditionnelle[689]).
Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire intégrable $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Pour chaque sous tribu $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$, il existe une (presque partout) unique variable aléatoire $Y \colon \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

(1) Y est $\mathcal{F}$-mesurable

(2) Y est P-intégrable

(3) pour tout $B \in \mathcal{F}$,

$$\int_B X dP = \int_B Y dP. \tag{36.150}$$

EqBwBkgE

Cette variable aléatoire sera notée $E(X|\mathcal{F})$ pour des raisons qui apparaîtront plus tard.

Démonstration. Remarquons que prendre $Y = X$ ne fonctionne pas parce qu'en général si $\mathcal{O}$ est mesurable dans $\mathbb{R}$, alors $X^{-1}(\mathcal{O})$ est dans la tribu $\mathcal{A}$, mais n'est pas automatiquement dans la tribu $\mathcal{F}$. Il faudra donc un peu plus travailler.

(1) **Unicité** Si Y_1 et Y_2 vérifient tous les deux les conditions, l'ensemble $\{Y_1 < Y_2\}$ est un élément de $\mathcal{F}$ et nous avons

$$\int_{\{Y_1 < Y_2\}} X = \int_{Y_1 < Y_2} Y_1 = \int_{Y_1 < Y_2} Y_2. \tag{36.151}$$

En particulier nous avons $\int_{\{Y_1 < Y_2\}} (Y_1 - Y_2) = 0$ et donc

$$(Y_1 - Y_2) \mathbb{1}_{Y_1 < Y_2} = 0 \tag{36.152}$$

presque partout. Le corolaire 14.200 montre alors que $Y_1 - Y_2 \geqslant 0$ presque partout. De la même manière, l'ensemble $\{Y_2 < Y_1\}$ est dans $\mathcal{F}$ et nous trouvons que $Y_2 - Y_1 \geqslant 0$ presque partout. Par conséquent $Y_1 = Y_2$ presque partout.

(2) **Existence dans le cas de carré intégrable**

Nous supposons à présent que $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et nous considérons K, le sous-ensemble de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ des fonctions $\mathcal{F}$-mesurables. Le théorème des projections 25.7 nous indique que

$$L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) = K \oplus K^\perp \tag{36.153}$$

par la décomposition $X = \texttt{proj}_K X + (X - \texttt{proj}_K X)$. La variable aléatoire $Y = \texttt{proj}_K X$ a les propriétés d'être $\mathcal{F}$-mesurable et $\langle Y - X, Z\rangle = 0$ pour tout $Z \in K$. Soit $A \in \mathcal{F}$, si nous considérons $Z = \mathbb{1}_A$, la dernière condition signifie que

$$\int_\Omega X\mathbb{1}_A = \int_\Omega Y\mathbb{1}_A, \tag{36.154}$$

ou encore

$$\int_A Y = \int_A X. \tag{36.155}$$

La variable aléatoire $Y = \texttt{proj}_K(X)$ répond donc à la question lorsque $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(3) **Existence en général**

Nous considérons maintenant que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Quitte à décomposer X en deux fonctions positives X_+ et X_- telles que $X = X_+ + X_-$, nous pouvons supposer que X est positive. Par hypothèse $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$; pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous posons

$$X_n(\omega) = \min\{X(\omega), n\}. \tag{36.156}$$

Étant donné que la mesure P est une mesure de probabilité, les constantes sont intégrables et $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. De plus la suite (X_n) est croissante et

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega). \tag{36.157}$$

Si nous notons encore K l'ensemble des variables aléatoires dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui sont $\mathcal{F}$-mesurables, pour chaque n nous avons donc la variable aléatoire

$$Y_n = \texttt{proj}_K X_n = E(X_n|\mathcal{F}) \tag{36.158}$$

qui est $\mathcal{F}$-mesurable et telle que

$$\int_A X_n = \int_A Y_n \tag{36.159}$$

pour tout $A \in \mathcal{F}$. Nous voudrions prouver que la variable aléatoire $Y = \lim_n Y_n$ existe et est la solution au problème, c'est-à-dire est $E(X|\mathcal{F})$.

Commençons par prouver que $Y_n \geqslant 0$ presque partout. Pour cela nous remarquons que l'ensemble $\{Y_n < 0\}$ est mesurable et

$$0 \geqslant \int_{Y_n<0} Y_n = \int_{Y_n<0} X_n \geqslant 0. \tag{36.160}$$

La première inégalité est évidente et la dernière est due au fait que X_n est positive. Par conséquent

$$\int_{Y_n<0} Y_n = 0 \tag{36.161}$$

et le lemme 14.200 conclut que $P(Y_n < 0) = 0$.

Soit $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire positive dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrons que $\texttt{proj}_K Z$ est encore positive. Pour cela nous considérons l'ensemble $A = \{\texttt{proj}_K Z < 0\}$ et les inégalités

$$0 \leqslant \int_A Z = \int_A \texttt{proj}_K Z \leqslant 0, \tag{36.162}$$

ce qui montre que $\int_A \texttt{proj}_K Z = 0$ et par conséquent que $P\{\texttt{proj}_K(Z) < 0\} = 0$. Cela nous montre que la projection depuis L^2 conserve la positivité.

Étant donné que $X_{n+1} - X_n \geqslant 0$ nous avons aussi

$$Y_{n+1} - Y_n \geqslant 0 \tag{36.163}$$

La suite de fonctions

$$n \mapsto Y_n = E(X_n|\mathcal{F}) \tag{36.164}$$

est croissante et vérifie le théorème de la convergence monotone :

$$\int_A X = \lim_{n\to\infty} \int_A X_n = \lim_{n\to\infty} \int_A E(X_n|\mathcal{F}) = \int_A \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{F}) = \int_A Y. \tag{36.165}$$

Par conséquent $E(X|\mathcal{F})$ existe et

$$Y = \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{F}) = E(X|\mathcal{F}). \tag{36.166}$$

□

NORMooHPHOooUuJWHR

36.65.
Vu la définition 36.64 nous pourrions croire que la variable aléatoire $E(X|\mathcal{F}) = X$ fait l'affaire. Il n'en est rien parce que la variable aléatoire X n'est pas spécialement $\mathcal{F}$-mesurable alors qu'il est requis que $E(X|\mathcal{F})$ le soit. Avec la tribu $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$, nous n'avons en général pas que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ pour tout borélien B.

Par contre si $\sigma(X)$ est la tribu engendrée par la variable aléatoire X, alors $E\big(X|\sigma(X)\big) = X$.

DefooKIHPooMhvirn

Définition 36.66.
*Soit Z une variable aléatoire. L'**espérance conditionnelle** « X sachant Z » est la variable aléatoire*

$$E(X|Z) = E(X|\sigma(Z)) \tag{36.167}$$

où $\sigma(Z)$ est la tribu engendrée par Z. Le membre de droite est une variable aléatoire définie en 36.64.

DEFooEYVCooCeyOXW

Définition 36.67.
Soient $A \in \mathcal{A}$ un événement et $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Nous définissons $P(A|\mathcal{F})$ par

$$P(A|\mathcal{F}) = E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}). \tag{36.168}$$

Notons que cela est une variable aléatoire et non un réel. Le membre de droite est l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ par rapport à $\mathcal{F}$ définie en 36.64.

Et l'espérance conditionnelle d'un événement par rapport à une variable aléatoire est :

$$E(A|X) = E\big(A|\sigma(X)\big). \tag{36.169}$$

Proposition 36.68.
Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ainsi qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et un événement A. Alors

$$E\big(P(A|X)\big) = P(A). \tag{36.170}$$

Démonstration. Tout le point de la preuve est de remarquer que $E(\mathbb{1}_A) = E(\mathbb{1}_A|X)$.

(1) **La formule $E(\mathbb{1}_A) = E(\mathbb{1}_A|X)$**

La notation $E(\mathbb{1}_A|X)$ est un raccourci pour écrire la variable aléatoire $E\big(\mathbb{1}_A|\sigma(X)\big)$. Cette dernière est l'application $\Omega \to \mathbb{R}^d$ telle que

$$\int_B E\big(\mathbb{1}_A|\sigma(X)\big) = \int_B \mathbb{1}_A \tag{36.171}$$

pour tout borélien B de $\mathbb{R}^d$ tout en étant $\sigma(X)$-mesurable. Comme expliqué en 36.65, il est tentant de dire $E\big(\mathbb{1}_A|\sigma(X)\big) = \mathbb{1}_A$, mais ce n'est pas le cas parce qu'il n'y a aucune raisons que $\mathbb{1}_A$ soit une application $\sigma(X)$-mesurable. Au niveau des espérances, par contre, l'égalité tient :

$$E\big(E(\mathbb{1}_A|X)\big) = \int_\Omega E(\mathbb{1}_A|X) = \int_\Omega \mathbb{1}_A = E(\mathbb{1}_A) \tag{36.172}$$

où nous avons utilisé le fait que Ω lui-même soit $\sigma(X)$-mesurable.

(2) **La preuve**

Nous avons alors

$$P(A) = E(\mathbb{1}_A) = E\big(E(\mathbb{1}_A|X)\big), \tag{36.173}$$

alors que $E(\mathbb{1}_A|X) = P(A|X)$. En mettant l'un dans l'autre :

$$P(A) = E\big(P(A|X)\big). \tag{36.174}$$

□
PropRGcscXj

Proposition 36.69 (Transitivité de l'espérance conditionnelle)**.**
Si $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}$ alors

$$E\Big(E(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2\Big) = E(X|\mathcal{B}_2). \tag{36.175}$$

Démonstration. Si $B \in \mathcal{B}_2$, nous avons

$$\int_B E\big(E(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2\big)dP = \int_B E(X|\mathcal{B}_1)dP = \int_B XdP. \tag{36.176}$$

La première égalité est la définition de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}_2$. La seconde égalité est celle de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}_1$ et le fait que $B \in \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$. Ce que nous avons prouvé est que

$$E\big(E(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2\big) \tag{36.177}$$

est une variable aléatoire $\mathcal{B}_2$-mesurable vérifiant la condition

$$\int_B E\big(E(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2\big) = \int_B E(X|\mathcal{B}_2) \tag{36.178}$$

pour tout $B \in \mathcal{B}_2$. C'est donc $E(X|\mathcal{B}_2)$ par la partie unicité du théorème 36.64. □

Proposition 36.70.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, soit $\mathcal{A}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ et X, une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable et intégrable. Alors la variable aléatoire $E(X|\mathcal{A})$ du théorème 36.64 est l'unique (presque partout) variable aléatoire à être $\mathcal{A}$-mesurable telle que nous ayons

$$E\big(E(X|\mathcal{A})Y\big) = E(XY). \tag{36.179}$$

pour toute variable aléatoire Y $\mathcal{A}$-mesurable.

Démonstration. Supposons pour commencer que Y soit une fonction simple positive, alors $Y = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i}$ et nous avons

$$\int_\Omega E(X|Y) = \sum_i a_i \int_{E_i} E(X|\mathcal{A}) \tag{36.180a}$$

$$= \sum_i a_i \int_{E_i} X \tag{36.180b}$$

$$= \int_\Omega XY. \tag{36.180c}$$

Maintenant si Y est mesurable et bornée, elle est limite croissante de fonctions étagées bornées (proposition 14.118) et le résultat tient par la convergence monotone, théorème 14.178.

Si Y n'est pas positive, nous séparons $Y = Y_+ - Y_-$.

Pour l'unicité, soit Z et Z' deux variables aléatoires telles que pour toute variable aléatoire Y,

$$\int_\Omega ZY = \int_\Omega XY = \int_\Omega Z'Y. \tag{36.181}$$

Si nous prenons $Y = \mathbb{1}_{\{Z \neq Z'\}}$, nous avons

$$0 = \int_\Omega (Z - Z')\mathbb{1}_{Z\neq Z'} = \int_{Z\neq Z'} Z - Z', \tag{36.182}$$

d'où le fait que $P(Z \neq Z') = 0$. □

Si X est une variable aléatoire dont la tribu engendrée est indépendante de la tribu $\mathcal{F}$, nous voudrions que la connaissance de $\mathcal{F}$ n'influence pas la connaissance de X, c'est-à-dire que

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X). \tag{36.183}$$

Ce que nous avons est même mieux. Nous avons le lemme suivant qui dit que conditionner une variable aléatoire par rapport à une tribu indépendante ne change pas notre connaissance de la variable aléatoire.

LemxUZFPV

Lemme 36.71 ([487]).
Les tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont indépendantes si et seulement si

$$E(U|\mathcal{F}_1) = E(U|\mathcal{F}_2) = E(U) \tag{36.184}$$

pour toute variable aléatoire U étant $\mathcal{F}_1$-mesurable.

Ici, par $E(U)$ nous entendons la variable aléatoire constante prenant la valeur numérique $E(U)$ en tout point de Ω.

Démonstration. Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont indépendantes, alors pour tout $B \in \mathcal{F}_2$ nous avons EqGGqgxl

$$\begin{aligned}
\int_B U dP &= E(U\mathbb{1}_B) && \text{(36.185a)}\\
&= E(U)E(\mathbb{1}_B) && \text{(36.185b)}\\
&= E(U)\int_\Omega \mathbb{1}_B dP && \text{(36.185c)}\\
&= \int_B E(U) dP. && \text{(36.185d)}
\end{aligned}$$

subeqBZWLNS

Justifications.

- L'intégrale $\int_B U dP$ a un sens même si $B \in \mathcal{F}_2$ alors que U est $\mathcal{F}_1$-mesurable. Le supremum (14.468) définissant l'intégrale est tout de même bien défini, en particulier, l'ensemble sur lequel on prend le supremum est non vide.
- Pour (36.185b), la variable aléatoire U est $\mathcal{F}_1$-mesurable (donc la tribu engendrée par U est dans $\mathcal{F}_1$) alors que $\mathbb{1}_B$ est $\mathcal{F}_2$-mesurable. Les tribus engendrées étant indépendantes, les variables aléatoires le sont et nous pouvons décomposer l'espérance.

Ce que montre le calcul (36.185) est que $E(U)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_2$-mesurable (parce que constante) dont l'intégrale sur chaque élément de $\mathcal{F}_2$ vaut l'intégrale de U. Par la partie unicité du théorème 36.64, nous déduisons que $E(U) = E(U|\mathcal{F}_2)$.

Pour l'autre sens, écrivez-moi si vous avez une démonstration. □

CorakyvMp

Corolaire 36.72.
Si X est une variable aléatoire et si $\mathcal{F}$ est une tribu, alors

$$E\big(E(X|\mathcal{F})\big) = E(X). \tag{36.186}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition (36.150) à $B = \Omega$:

$$E\big(E(X|\mathcal{F})\big) = \int_\Omega E(X|\mathcal{F})(\omega)dP(\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = E(X). \tag{36.187}$$

□

Exemple 36.73.
Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ avec probabilité $1/2$ et indépendantes. Nous considérons $S = X_1 + X_2$. La situation est modélisée par l'espace

$$\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \tag{36.188}$$

et les variables aléatoires

$$\begin{aligned}
X_i(\omega_1,\omega_2) &= \omega_i && \text{(36.189a)}\\
S(\omega_1,\omega_2) &= \omega_1 + \omega_2. && \text{(36.189b)}
\end{aligned}$$

Pour vérifier que de cette manière nous avons bien que X_1 est indépendante de X_2, nous commençons par voir les tribus associées. Un ouvert de $\mathbb{R}$ soit contient 0 et 1, soit contient un seul des deux soit n'en contient aucun des deux. En appliquant X_1^{-1} à chacune de ces quatre situations nous voyons que la tribu $\sigma(X_1)$ est

$$\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1) = \big\{\{(0,0),(0,1)\},\{(1,0),(1,1)\},\Omega,\varnothing\big\}. \tag{36.190}$$

De la même façon nous avons

$$\mathcal{F}_2 = \sigma(X_1) = \big\{\{(0,0),(1,0)\},\{(0,1),(1,1)\},\Omega,\varnothing\big\}. \tag{36.191}$$

Nous posons

$$A_0 = \{(0,0),(0,1)\} \tag{36.192a}$$
$$A_1 = \{(1,0),(1,1)\} \tag{36.192b}$$
$$B_0 = \{(0,0),(1,0)\} \tag{36.192c}$$
$$B_1 = \{(0,1),(1,1)\}. \tag{36.192d}$$

Étant donné que $A_i \cap B_j = (i,j)$, nous avons toujours que $P(A_i \cap B_j) = \frac{1}{4} = P(A_i)P(B_j)$. L'indépendance est donc assurée.

Calculons l'espérance conditionnelle $E(S|\mathcal{F}_1)$. Une fonction $\mathcal{F}_1$-mesurable doit être constante sur A_0 et A_1, donc l'espérance conditionnelle est une fonction constante sur A_0 et A_1 dont l'intégrale sur ces ensembles est égale à l'intégrale de S. Nous avons en particulier

$$\int_{A_0} E(S|\mathcal{F}_1) = \int_{A_0} S, \tag{36.193}$$

c'est-à-dire

$$E(S|\mathcal{F}_1)(0,0) + E(S|\mathcal{F}_1)(0,1) = S(0,0) + S(0,1) = 1. \tag{36.194}$$

Nous en concluons que $E(S|\mathcal{F}_1)(0,0) = E(S|\mathcal{F}_1)(0,1) = \frac{1}{2}$. Cela correspond à l'intuition que si on est au point $(0,1)$ ou au point $(0,0)$ en ne sachant que X_1, nous ne savons que le premier zéro, et donc l'espérance de la somme est $\frac{1}{2}$.

Un calcul très similaire montre que

$$E(S|\mathcal{F}_1)(1,0) = E(S|\mathcal{F}_1)(1,1) = \frac{3}{2}. \tag{36.195}$$

Cela correspond au fait qu'en ces points, nous ne savons que le fait que le premier tirage a donné 1, et donc que l'espérance est $\frac{3}{2}$.

Complétons ce tour d'horizon en mentionnant que la tribu engendrée par X_1 et X_2 est la tribu des parties de Ω, de telle façon que l'espérance conditionnelle de S sachant X_1 et X_2 est égale à S. △

PropRNBtfql

Proposition 36.74 ([487])**.**
Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et X,Y deux variables aléatoires sur Ω réelles. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Nous supposons que $X \in L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$, que $Z \in L^\infty(\Omega,\mathcal{B},P)$ et que $XZ \in L^1(\Omega,P)$. Alors

$$E(ZX|\mathcal{B}) = ZE(X|\mathcal{B}) \tag{36.196}$$

presque surement.

Démonstration. Nous commençons par prouver que

EqNDQWIea
$$\int_\Omega ZE(X|\mathcal{B}) = \int_\Omega ZX. \tag{36.197}$$

Si $Z = \mathbb{1}_B$ pour un ensemble $B \in \mathcal{B}$, alors cette égalité est vraie par définition de l'espérance conditionnelle[18]. Donc cette égalité est correcte tant que Z est une variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable et étagée. Nous considérons alors, grâce au lemme 14.116, une suite Z_n de variables aléatoires étagées et $\mathcal{B}$-mesurables avec $|Z_n| < Z$. Pour chaque n nous avons donc

EqNVpOSaH
$$\int_\Omega Z_n X = \int_\Omega Z_n E(X|\mathcal{B}). \tag{36.198}$$

Notre idée est de passer à la limite. Vu que Z et Z_n sont bornées (et donc intégrables sur Ω), pour chaque n nous avons $|Z_n X| \leqslant M|X|$ où M majore Z et donc tous les Z_n de façon uniforme vis-à-vis de n. Tout cela pour dire que le théorème de la convergence dominée fonctionne et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega Z_n X = \int_\Omega ZX. \tag{36.199}$$

[18] Théorème 36.64.

D'autre part vu que $X \in L^1$ et que $\Omega \in \mathcal{B}$ nous avons l'égalité $\int_\Omega E(X|\mathcal{B}) = \int_\Omega X$, ce qui prouve que $|E(X|\mathcal{B})|$ est intégrable. Cela nous permet d'utiliser encore la convergence dominée avec l'inégalité $|Z_n E(X|\mathcal{B})| \leqslant M|E(X|\mathcal{B})|$ pour écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega Z_n E(X|\mathcal{B}) = \int_\Omega Z E(X|\mathcal{B}). \tag{36.200}$$

En passant à la limite des deux côtés de (36.198) nous avons donc

$$\int_\Omega Z E(X|\mathcal{B}) = \int_\Omega ZX. \tag{36.201}$$

L'égalité (36.197) est prouvée.

Nous passons maintenant à la preuve de l'égalité demandée : $E(ZX|\mathcal{B}) = ZE(X|\mathcal{B})$. Pour cela il faut montrer que pour tout $B \in \mathcal{B}$ nous avons

$$\int_B Z E(X|\mathcal{B}) = \int_B ZX. \tag{36.202}$$

Cela n'est rien d'autre que l'égalité (36.197) que nous venons de prouver avec $Z\mathbb{1}_B$ au lieu de Z. □

Proposition 36.75.
Soit une variable aléatoire réelle $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour toute variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$, il existe une fonction borélienne $\mathcal{A}_Y$-mesurable $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que

$$E(X|Y) = h \circ Y. \tag{36.203}$$

Démonstration. Nous utilisons le résultat de Doob (théorème 14.119). Par définition $E(X|Y)$ est une variable aléatoire réelle $\mathcal{A}_Y$-mesurable, et il existe une fonction borélienne $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $E(X|Y) = h \circ Y$. □

Cette fonction $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nous permet de définir

$$E(X|Z = z) = h(z). \tag{36.204}$$

Cela est l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire par rapport à une valeur donnée d'une autre variable aléatoire.

DEFooOMLCooJgrbpx

Définition 36.76 (Espérence conditionnelle à un événement[851])**.**
Si X est une variable aléatoire et si A est un événement, nous définissons

$$E(X|A) = \frac{E(X\mathbb{1}_A)}{P(A)}. \tag{36.205}$$

Pour rappel, la définition de l'espérance d'une variable aléatoire est 36.33.

LEMooRTVBooCEeIxL

Lemme 36.77 ([1])**.**
Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nous considérons une variable aléatoire X à valeurs réelles, prenant ses valeurs dans la partie dénombrable

$$\{0\} \cup \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \tag{36.206}$$

avec $y_k \neq 0$. Si A est mesurable dans Ω, alors

$$E(X|A) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k P(X = y_k|A), \tag{36.207}$$

c'est-à-dire que nous prenons la somme sur les valeurs non nulles atteintes par X.

Démonstration. Nous partons de la définition 36.76 de l'espérance conditionnelle : $E(X|A) = E(X\mathbb{1}_A)/P(A)$. La variable aléatoire $X\mathbb{1}_A$ peut prendre les valeurs 0 et y_k. Nous pouvons utiliser le lemme 36.35 pour écrire

$$E(X\mathbb{1}_A) = 0 \times P(X\mathbb{1}_A = 0) + \sum_{k=0}^{\infty} y_k P(X\mathbb{1}_A = y_k) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k P(X\mathbb{1}_A = y_k). \tag{36.208}$$

EQooZSRJooZNtajK

Afin de traiter le dernier terme, nous prouvons que $\{X\mathbb{1}_A = y_k\} = X^{-1}(y_k) \cap A$. En effet si $\omega \in \{X\mathbb{1}_A = y_k\}$, c'est que

$$X(\omega)\mathbb{1}_A(\omega) = y_k. \tag{36.209}$$

Mais dans notre cas, $y_k \neq 0$, donc $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$, ce qui signifie $\omega \in A$. Donc $\omega \in A$ et $X(\omega) = y_k$, ce qui signifie $\omega \in X^{-1}(y_k) \cap A$. Nous avons donc

$$P(X\mathbb{1}_A = y_k) = P\big(X^{-1}(y_k) \cap A\big). \tag{36.210}$$

En utilisant (à l'envers) la définition de la probabilité conditionnelle 36.56,

$$P(X\mathbb{1}_A = y_k) = P\big(X^{-1}(y_k)|A\big)P(A). \tag{36.211}$$

En remettant ça dans (36.208) et dans la définition de $E(X|A)$,

$$E(X|A) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} y_k P(X\mathbb{1}_A = y_k)}{P(A)} = \frac{1}{P(A)} \sum_{k=0}^{\infty} P(X = y_k|A)P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k P(X = y_k|A) \tag{36.212}$$

□

36.2.12 Probabilité conditionnelle : tribu

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

LEMooXXTYooZCXiYr

Lemme 36.78.
Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω en éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints tels que $P(B_i) \neq 0$. Soit $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par les B_i. Une variable aléatoire réelle est $\mathcal{F}$-mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque B_i.

Proposition 36.79.
Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω en éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints tels que $P(B_i) \neq 0$. Soit $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par les B_i. Soit une variable aléatoire X. Alors nous avons :

$$E(X|\mathcal{F}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP \right) \mathbb{1}_{B_i}. \tag{36.213}$$

EqCibwoG

Démonstration. Si X est une variable aléatoire, alors la variable aléatoire $E(X|\mathcal{F})$ définie en 36.64 est une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable et elle est donc constante sur les ensembles B_i par le lemme 36.78 :

$$E(X|\mathcal{F}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \mathbb{1}_{B_i}. \tag{36.214}$$

Étant donné que, par construction, B_i est $\mathcal{F}$-mesurable, nous avons

$$\int_{B_i} X dP = \int_{B_i} E(X|\mathcal{F}) = \sum_j a_j \int_{B_i} \mathbb{1}_{B_j} = \sum_j a_j \delta_{ij} P(B_j) = a_i P(B_i). \tag{36.215}$$

Par conséquent

$$a_i = \frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP \tag{36.216}$$

et

$$E(X|\mathcal{F}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP \right) \mathbb{1}_{B_i}, \tag{36.217}$$

ce qu'il fallait. □

Notons que si $B \in \mathcal{A}$ alors la tribu engendrée par B est aussi celle engendrée par la partition $\{B, \complement B\}$ de Ω. Cette circonstance nous permet d'aller plus loin.

Proposition 36.80.
Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et un événement $B \in \mathcal{A}$ avec sa tribu engendrée $\mathcal{F} = \sigma(B)$. Alors

$$E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}) = P(A|B)\mathbb{1}_B + P(A|\complement B)\mathbb{1}_{\complement B}. \tag{36.218}$$

Démonstration. Nous allons particulariser la formule (36.213). Si $B \in \mathcal{A}$ nous considérons la partition $\{B, \complement B\}$ de Ω et la tribu engendrée

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, B, \complement B, \Omega\}. \tag{36.219}$$

La formule (36.213) devient

$$E(X|\mathcal{F}) = \left(\frac{1}{P(B)}\int_B XdP\right)\mathbb{1}_B + \left(\frac{1}{P(\complement B)}\int_{\complement B} XdP\right)\mathbb{1}_{\complement B}. \tag{36.220}$$

Si nous considérons $A \in \mathcal{A}$, nous écrivons cette égalité avec $X = \mathbb{1}_A$ pour obtenir

$$E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\mathbb{1}_B + \frac{P(A\cap\complement B)}{P(\complement B)}\mathbb{1}_{\complement B} = P(A|B)\mathbb{1}_B + P(A|\complement B)\mathbb{1}_{\complement B} \tag{36.221}$$

parce que nous avons reconnu la probabilité conditionnelle $P(A|B)$ de la définition 36.56. □

Remarque 36.81.
Le nombre $P\big(A|\sigma(B)\big) = P\big(\mathbb{1}_A|\sigma(B)\big)$ n'est pas la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Il nous reste à définir la probabilité conditionnelle d'un événement relativement à une variable aléatoire.
DEFooFRLFooNvXuPK

Définition 36.82.
Si la variable aléatoire X est à valeurs discrètes, nous disons que $P(A|X)$ est la variable aléatoire de valeur

$$P(A|X)(\omega) = P(A|X = X(\omega)). \tag{36.222}$$

Dans le cas d'une variable aléatoire à valeurs continues, cette définition ne fonctionne pas parce que la condition $X = X(\omega)$ est souvent de probabilité nulle, tandis que c'est toujours une mauvaise idée de conditionner par rapport à un événement de probabilité nulle. C'est la base du paradoxe de Borel. La bonne définition du conditionnement de l'événement A par rapport à la variable aléatoire X est
DEFooIUJMooBAVtMW

Définition 36.83.
Si A est un événement et X une variable aléatoire à valeurs continues dans $\mathbb{R}$, nous définissons

$$P(A|X) = P(A|\sigma(X)) = E\big(\mathbb{1}_A|\sigma(X)\big). \tag{36.223}$$

La première égalité est une notation. La seconde est la définition.

Cette définition s'appuie également sur la définition 36.64.

Proposition 36.84.
Si X est une variable aléatoire et si A est un événement, alors

$$E\big(P(A|X)\big) = P(A). \tag{36.224}$$

Démonstration. Nous commençons par le cas discret, c'est-à-dire $X\colon \Omega \to \mathbb{N}$. Nous notons $p_k = P(X = k)$. En décomposant l'intégrale sur Ω par rapport à l'union disjointe

$$\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = k\}, \tag{36.225}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
E\big(P(A|X)\big) &= \int_\Omega P(A|X)(\omega)dP(\omega) && \text{(36.226a)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} P(A|X = X(\omega))dP(\omega) && \text{(36.226b)}\\
&= \sum_k \int_{A_k} \frac{P(A\cap X = k)}{P(X = k)}dP(\omega) \qquad \text{dans } A_k,\ X(\omega) = k && \text{(36.226c)}\\
&= \sum_k \frac{1}{p_k}P(A\cap X = k)\underbrace{\int_{A_k} 1dP(\omega)}_{=P(A_k)=p_k} && \text{(36.226d)}\\
&= \sum_k P(A\cap X = k) && \text{(36.226e)}\\
&= P(A). && \text{(36.226f)}
\end{aligned}$$

Nous devons maintenant prouver la propriété dans le cas où X prend des valeurs continues. Pour cela il suffit d'appliquer le corolaire 36.72 :

$$E\big(E(\mathbb{1}_A|\sigma(A))\big) = E(\mathbb{1}_A) = P(A). \tag{36.227}$$

□

36.2.13 Variables de Rademacher indépendantes

SUBSECooWOOGooVxflVZ

Une variable aléatoire de Rademacher est une variable aléatoire qui prend les valeurs 1 et -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Nous pouvons en décrire une explicitement de la façon suivante. L'espace probabilité est à deux éléments : $\Omega = \{a, b\}$ avec la mesure $P(\{a\}) = P(\{b\}) = \frac{1}{2}$. La variable aléatoire est alors l'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ donnée par $X(a) = 1$ et $X(b) = -1$.

Soient X et Y deux variables aléatoires de Rademacher indépendantes. Cela donne $\Omega = \{a, b\}^2$ et

$$\begin{array}{cccc} X(a,a) = 1 & X(a,b) = 1 & X(b,a) = -1 & X(b,b) = -1 \\ Y(a,a) = 1 & Y(a,b) = -1 & Y(b,a) = 1 & Y(b,b) = -1 \end{array} \tag{36.228}$$

Remarque 36.85.
Si une variable aléatoire d'un certain type est donnée par une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$, pour construire des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, il faut considérer les variables aléatoires sur (au moins) le produit $\Omega \times \Omega$ muni de la mesure produit.

(1) **Tribu du produit XY**

Quelle est la tribu de la variable aléatoire produit XY ? Le produit XY peut prendre les valeurs 1 et -1. Nous avons

$$(XY)^{-1}(1) = \{(a,a), (b,b)\} \tag{36.229a}$$
$$(XY)^{-1}(-1) = \{(a,b), (b,a)\} \tag{36.229b}$$

La tribu est donc

$$\sigma(XY) = \{\Omega, \varnothing, A, B\} \tag{36.230}$$

avec $A = \{(a,a), (b,b)\}$ et $B = \{(a,b), (b,a)\}$.

(2) **Calcul de $E(X|XY)$**

La définition de l'espérance à calculer est le théorème 36.64. Pour chaque élément B de $\sigma(XY)$ nous avons besoin de $\int_B X = \int_B E(X|XY)$. Nous notons $V = E(X|XY)$ pour alléger la notation. Nous avons

$$4 \int_A V = V(a,a) + V(b,b) \tag{36.231}$$

et

$$4 \int_A X = X(a,a) + X(b,b) = 0. \tag{36.232}$$

Pourquoi le facteur 4 ? Parce que sur Ω^2 nous avons la mesure produit de celle que dont nous avions parlé sur $\{a, b\}$. C'est la mesure d'équiprobabilité et donc chaque singleton a mesure $1/4$. Pour plus de détails, il y a le théorème 14.246.

Nous en déduisons $V(a,a) + V(b,b) = 0$. Mais pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons $V^{-1}(t) \in \sigma(XY)$ parce que la contrainte est que V soit XY-mesurable. En particulier

$$V^{-1}\big(V(a,a)\big) \tag{36.233}$$

est un mesurable qui contient (a,a). C'est donc soit Ω, soit $\{(a,a), (b,b)\}$. Dans les deux cas nous avons $V(a,a) = V(b,b)$ et nous en déduisons $V(a,a) = V(b,b) = 0$.

En faisant de même avec $\int_B V = V(a,b) + V(b,a)$ nous déduisons $V(a,b) = V(b,a) = 0$ et au final nous avons

$$E(X|XY) = 0. \tag{36.234}$$

Cette égalité signifie $E(X|XY)(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega^2$.

(3) **Calcul de $E(X|X+Y)$** Il ne faudrait pas croire que, seulement parce que X a une espérance nulle, nous trouverons une espérance nulle quel que soit le conditionnement. Juste pour le plaisir, nous calculons $E(X|X+Y)$.

La variable aléatoire $X + Y$ peut prendre trois valeurs : -2, 0 et 2. La tribu engendrée par $X + Y$ doit en particulier contenir $A = \{(a,a)\}$, $B = \{(b,b)\}$ et $C = \{(a,b), (b,a)\}$.

Nous notons $V = E\big(X|\sigma(X+Y)\big)$. Vu que

$$\int_A V = \int_A X, \tag{36.235}$$

nous avons $V(a,a) = X(a,a) = 1$. Même chose pour B qui donne $V(b,b) = X(b,b) = -1$. En ce qui concerne l'intégrale sur C nous avons

$$V(a,b) + V(b,a) = X(a,b) + X(b,a) = 0. \tag{36.236}$$

EQooGWDYooTNxYAg

Par ailleurs l'ensemble $V^{-1}\big(V(a,b)\big)$ est un ensemble mesurable qui doit au moins contenir (a,b). Vu la tribu que nous avons, cela doit également contenir (b,a), de telle sorte que $V(a,b) = V(b,a)$. La relation (36.236) nous permet alors de conclure que $V(a,b) = V(b,a) = 0$.

Quoi qu'il en soit, l'espérance conditionnelle $E(X|X+Y)$ n'est pas nulle.

(4) **Calcul de $E(XY|\sigma(XY))$** . Celle-là, elle est facile par 36.65 : c'est XY.

Nous aurions pu croire que si X et Y sont indépendantes, alors

$$E(XY|\mathcal{A}) = E(X|\mathcal{A})E(Y|\mathcal{A}). \tag{36.237}$$

EQooHSVCooAcgRhw

L'exemple que nous venons de faire montre qu'il n'en est rien.

Exemple 36.86 ([852]).
Un autre exemple, peut-être plus simple, pour contredire l'équation (36.237). Soient X et Y des expériences indépendantes de pile ou face non truquées. Les résultats sont représentés par 0 et 1. Nous notons $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par l'événement « les résultats des deux lancers sont différents » ; c'est-à-dire la tribu engendrée par l'événement $A = (1,0),(1,0)$. La variable aléatoire X et la tribu $\mathcal{A}$ sont indépendants (définition 36.9), donc, donc $E(X|\mathcal{A}) = E(X) = 1/2$. Pareil pour Y. En revanche, le produit XY est nul sur A donc $E(XY|\mathcal{A})$ aussi. Ça ne peut donc être égal à la constante $1/4 = (1/2)^2$. △

36.2.14 Un petit paradoxe

subSecGXVYooTDdZaB

Attention : ce qui est écrit ici est ma réflexion personnelle sur le sujet. Merci de me dire si je me trompe.

Soit une famille dont vous savez seulement qu'il y a exactement deux enfants. Trois situations :

ITEMooNUPAooWCXwBE

(1) Vous frappez, une fille ouvre la porte et dit « Bonjour, je suis l'aînée ». Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?

ITEMooBGIWooLnVCpm

(2) Vous frappez, une fille ouvre la porte et dit « Bonjour ». Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?

ITEMooCBNSooMaIwwB

(3) Vous demandez aux parents si il y a au moins une fille, ils répondent « oui ». Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

Dans les trois cas l'intuition dit que la probabilité est 1/2. Il semble que de plus la (2) et la (3) soient les mêmes parce que l'on sait qu'il y a une fille et on se demande quelle est la probabilité qu'il y ait deux filles.

Nous allons voir ça de plus près.

36.2.14.1 « Bonjour, je suis l'aînée »

Résolution Si nous notons X_0 et X_1 les variables aléatoires donnant le sexe des deux enfants, ce sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec $P(X_i = f) = \frac{1}{2}$. La formule (36.123) de la probabilité conditionnelle ainsi que l'indépendance donnent :

$$P(X_1 = f | X_2 = f) = \frac{P(X_1 = f, X_2 = f)}{P(X_2 = f)}. \tag{36.238}$$

Le numérateur vaut $\frac{1}{4}$ et le dénominateur vaut $\frac{1}{2}$; le résultat vaut $\frac{1}{2}$. Fin de l'histoire.

Simulation Voici un petit programme qui simule la situation. Il retourne clairement 1/2.

```
#! /usr/bin/python3
# -*- coding: utf8 -*-

"""
Vous frappez à la porte d'une famille qui a deux enfants. Une fille ouvre la porte et vous dit "Je suis l'aînée".
Quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ?
```

```
"""


import random

def famille():
    """
    return a pair of 'f' and 'g'.
    """
    a=[random.choice( ['g','f'] )]
    a.append(random.choice( ['g','f'] ))
    return a

def toctoc():
    """
    - Create a family with two children.
    - Pick the second one, the elder.
    - if it is a 'g', return None.
    - if it is a 'f', return the other one.
    """
    F=famille()
    if F[1] != 'f':
        return None
    else :
        if F[0]=='f':
            return 1
        else :
            return 0

N_girl_opens=0
N_girl_other=0
for k in range(1,10000):
    res=toctoc()
    if res is not None:
        N_girl_opens = N_girl_opens+1
        N_girl_other = N_girl_other + res

proba=N_girl_other/N_girl_opens
print(proba)        # ~0.5, intuitively correct.
```

tex/sage/simul_famille_aine.py

36.2.14.2 « Bonjour »

Nous frappons à la porte, une fille ouvre en disant « bonjour », sans préciser si elle est la première ou la seconde. Quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ? Naïvement on croirait que la probabilité est également $\frac{1}{2}$.

Un raisonnement moins naïf montre le contraire.

Et nous allons voir qu'un raisonnement encore moins naïf montre que la probabilité est bien $\frac{1}{2}$.

Premier raisonnement (incorrect) Voici le raisonnement qui est, à mon avis, faux. Vu que l'enfant qui ouvre la porte est une fille, la famille a une des compositions suivantes : fg, ff ou gf. Le cas où une fille ouvre la porte *et* que l'autre est également une fille est seulement le cas ff dont la probabilité est $\frac{1}{3}$.

Pour justifier cela nous considérons le couple de variables aléatoires (X_1, X_2) et le conditionnement $A = \{X_1 = f\} \cup \{X_2 = f\}$: évidemment $P(A) = \frac{3}{4}$. Nous calculons facilement la loi du couple (X_1, X_2) conditionné à A :

$$P(X_1 = f, X_2 = f|A) = \frac{P(\{X_1 = f, X_2 = f\} \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}. \tag{36.239}$$

Donc sachant A, la probabilité que la famille soit constituée de deux filles est $\frac{1}{3}$.

Comment faire mieux ? Ce calcul semble être correct, mais il ne l'est pas. Ce raisonnement fait l'hypothèse implicite que l'espace probabilisé décrivant la situation contient deux variables aléatoires X_1 et X_2 représentant les deux enfants. Or nous avons bien trois événements aléatoires dans l'histoires : le sexe des deux enfants et le *choix* de l'enfant qui ouvre la porte.

Certes, nous pouvons penser que cette troisième variable aléatoire ne change rien. Oui oui, on peut le penser. Mais ici, on ne doit pas penser, on doit *démontrer*.

Nous allons donc rédiger un calcul complet, en introduisant toutes les variables aléatoires, et en décrivant correctement l'espace probabilisé Ω et la mesure de probabilité P.

Peut-être que ça ne changera rien. Ou peut-être pas. Mais au moins nous serons surs d'avoir résolu le problème correctement.

La vraie réponse Nous considérons les variables aléatoires $X_0, X_1 : \Omega_E \to \{f, g\}$ avec probabilité $\frac{1}{2}$. De plus nous considérons une nouvelle variable aléatoire qui donne le numéro de l'enfant qui ouvre la porte :

$$\sigma : \Omega_C \to \{1, 2\}. \tag{36.240}$$

Notre espace de probabilité est donc l'ensemble $\Omega = \{f, g\} \times \{f, g\} \times 0, 1$ sur lequel nous considérons la mesure d'équiprobabilité[19].

Nous introduisons les variables aléatoires[20]

$$\begin{aligned} X_1 : \Omega &\to \{f, g\} \\ (s_1, s_2, n) &\mapsto s_1 \end{aligned} \tag{36.241}$$

et

$$\begin{aligned} X_2 : \Omega &\to \{f, g\} \\ (s_1, s_2, n) &\mapsto s_2 \end{aligned} \tag{36.242}$$

et

$$\begin{aligned} \sigma : \Omega &\to \{1, 2\} \\ (s_1, s_2, n) &\mapsto n \end{aligned} \tag{36.243}$$

Nous devons calculer

$$P\big(X_{1-\sigma} = f | X_\sigma = f\big) = \frac{P\big(X_{1-\sigma} = f, X_\sigma = f\big)}{P(X_\sigma = f)}. \tag{36.244}$$

Pour être explicite jusqu'au bout, nous énumérons tous les éléments de Ω :

(1) $g, g, 0$ (3) $g, f, 0$ (5) $f, g, 0$ (7) $f, f, 0$

(2) $g, g, 1$ (4) $g, f, 1$ (6) $f, g, 1$ (8) $f, f, 1$.

Et tant qu'à être explicite, l'événement vulgairement noté $\{X_\sigma = f\}$ est la partie

$$\{X_\sigma = f\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_{\sigma(\omega)}(\omega) = f\} \tag{36.245a}$$
$$= \{(s_1, s_2, n) \text{ tel que } X_n(s_1, s_2, n) = f\} \tag{36.245b}$$
$$= \{(s_1, s_2, n) \text{ tel que } s_n = f\}. \tag{36.245c}$$

Méditez la dernière égalité ; elle n'est pas totalement indispensable au raisonnement, mais elle est cool.

Nous avons

$$\{X_\sigma = f\} = \{(g, f, 1), (f, g, 0), (f, f, 0), (f, f, 1)\}. \tag{36.246}$$

et

$$\{X_{1-\sigma} = f\} \cap \{X_\sigma = f\} = \{(f, f, 0), (f, f, 1)\}. \tag{36.247}$$

Donc

$$P\big(X_{1-\sigma} = f, X_\sigma = f\big) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \tag{36.248}$$

et

$$P(X_\sigma = f) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}. \tag{36.249}$$

Au final,

$$P\big(X_{1-\sigma} = f | X_\sigma = f\big) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \tag{36.250}$$

[19] C'est une hypothèse forte faisant appel d'un part ce que l'on sait de la reproduction humaine, et d'autre part ce que l'on sait de la sociologie de deux enfants qui entendent une sonnette.

[20] Sur Ω, sur $\{f, g\}$ et sur $\{0, 1\}$ nous mettons la tribu des parties. Vérifiez que X_1, X_2 et σ sont mesurables.

Simulation Vous avez encore un doute ? Faites tourner la simulation suivante :

```
#! /usr/bin/python3
# -*- coding: utf8 -*-

"""
Vous frappez à la porte d'une famille qui a deux enfants. Une fille ouvre la porte.
Quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ?
"""


import random

def famille():
    """
    return a pair of 'f' and 'g'
    """
    a=[random.choice( ['g','f'] )]
    a.append(random.choice( ['g','f'] ))
    return a

def toctoc():
    """
    - Create a family with two children.
    - Choose one (the one who opens the door)
    - if it is a 'g', return None.
    - if it is a 'f', return the other one.
    """
    F=famille()
    s=random.choice([0,1])
    if F[s] != 'f':
        return None
    else :
        t=(s+1)%2
        if F[t]=='f':
            return 1
        else :
            return 0

N_girl_opens=0
N_girl_other=0
for k in range(1,10000):
    res=toctoc()
    if res is not None:
        N_girl_opens = N_girl_opens+1
        N_girl_other = N_girl_other + res

proba=N_girl_other/N_girl_opens
print(proba)        # ~0.5, intuitively correct.
```

tex/sage/simul_famille_simple.py

Le faisant tourner, la réponse est sans appel : la fréquence observée est beaucoup plus proche de 0.5 que de 0.33 ou 0.66.

36.2.14.3 Le parent qui répond aux questions

Nous avons une famille de deux enfants dont nous savons qu'au moins un des deux est une fille. Quelle est la probabilité que la famille contienne deux filles ? Cela est à priori la même question que celle où une fille ouvre la porte sans dire si elle est l'aînée ou non.

Simulation Commençons par la simulation :

```python
#! /usr/bin/python3
# -*- coding: utf8 -*-

"""
Vous savez qu'une famille a deux enfants.
Vous demandez à un parent si il y a une fille.
Réponse : Oui.
Question : quelle est la probabilité que ce soient deux filles ?
"""


import random

def famille():
    """
    return a pair of 'f' and 'g'.
    """
    a=[random.choice( ['g','f'] )]
    a.append(random.choice( ['g','f'] ))
    return a

def toctoc():
    """
    - Create a family with two children.
    - If 'gg', there are no girls -> return None
    - If 'gf', there is a girl but the other is a boy -> 0
    - If 'fg', there is a girl but the other is a boy -> 0
    - If 'ff', there is a girl and the other is a girl -> 1
    """
    F=famille()
    if F==['g','g'] :
        return None
    if F==['g','f']:
        return 0
    if F==['f','g']:
        return 0
    if F==['f','f']:
        return 1

N_at_least_one_girl=0
N_two_girls=0
for k in range(1,10000):
    res=toctoc()
    if res is not None:
        N_at_least_one_girl=N_at_least_one_girl+1
        N_two_girls=N_two_girls+res

proba=N_two_girls/N_at_least_one_girl
print(proba)        # ~0.333. Beware !
```

tex/sage/simul_famille_une_fille.py

Et là, bing, la réponse est clairement plutôt 0.33 que 0.5.

Résolution Nous avons les variables aléatoires X_1 et X_2 qui valent 0 ou 1 suivant que l'enfant soit une fille ou un garçon ; ce sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Nous définissons la variable aléatoire somme

$$S = X_1 + X_2 \tag{36.251}$$

qui compte le nombre de filles. La question est de calculer

$$P(S=2|S\geqslant 1)=\frac{P(S=2\cap S\geqslant 1)}{P(S\geqslant 1)}=\frac{P(S=2)}{P(S\geqslant 1)}. \tag{36.252}$$

L'événement $S=2$ est réduit au singleton $\{ff\}$ et sa probabilité est $\frac{1}{4}$. Au contraire l'événement $S\geqslant 1$ est l'ensemble $\{fg,gf,ff\}$ et sa probabilité est $\frac{3}{4}$. Nous avons donc

$$P(S=2|S\geqslant 1)=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}. \tag{36.253}$$

Et là, la réponse est 1/3 et non 1/2 comme d'aucuns auraient pu le croire.

Précision Notons que l'événement $S\geqslant 1$ n'est pas le même que l'événement $X_\sigma=f$. En effet

$$S\geqslant 1=\{(ff,1),(ff,2),(fg,1),(fg,2),(gf,1),(gf,2)\} \tag{36.254}$$

tandis que

$$\{X_\sigma=f\}=\{(ff,1),(ff,2),(fg,1),(gf,2)\}. \tag{36.255}$$

36.2.14.4 Conclusion

L'internet regorge de sites discutant du paradoxe des deux enfants[21].

Beaucoup insistent sur le fait que non seulement certaines informations apparemment anodines sont importantes, mais en plus *la façon* dont on obtient l'information est importante. Dans la situation « une fille ouvre », nous obtenons l'information « il y a au moins une fille » en en voyant une ; dans la situation « la parent dit qu'il y a au moins une fille », nous obtenons l'information « il y a au moins une fille » de façon plus « pure ».

Personnellement je ne souscris pas vraiment à cette façon de penser. Le fait est que la formule

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \tag{36.256}$$

n'est pas seulement une formule dans laquelle il faut remplacer A par « la question » et B par « ce qu'on sait ». Il faut également remplacer P par « la bonne » mesure de probabilité.

Il est important de construire le bon espace de probabilité, avec la bonne mesure. Et pour cela, il faut bien s'assurer d'introduire une variable aléatoire pour chaque événement aléatoire se produisant dans l'histoire.

36.2.14.5 Une analogie

Imaginez un parc de jeux réservée aux familles de deux enfants dont au moins une fille. Le videur à l'entrée a (au moins) trois stratégies possibles pour ne laisser entrer que les familles contenant au moins une fille.

(1) Regarder l'ensemble de la famille, et ne laisser entrer que les familles ayant au moins une fille.

(2) Ne regarder que l'aîné et ne laisser entrer que les familles dont l'aîné est une fille.
ITEMooRKUAooGtfavc

(3) Prendre un des deux enfants au hasard et ne laisser rentrer la famille que si cet enfant est une fille.

Je vous laisse déterminer à quel scénario correspondent ces trois stratégies. Notez que la stratégie (3) contient un énorme biais de sélection : la moitié des familles fille-garçon et garçon-fille sont supprimées, alors que toutes les familles fille-fille entrent.

36.2.14.6 La belle au bois dormant

Vous avez aimé les questions avec les filles qui ouvrent la porte ? Vous trouvez que Monty Hall est trop facile ?

Cadeau de numperphile : « Sleeping Beauty Paradox » https://www.youtube.com/watch?v=cW27QJYNXtU

[21] Par exemple [853].

36.2.15 Inégalité de Jensen

PropABtKbBo

Proposition 36.87 (Inégalité de Jensen)**.**
Soit g une fonction convexe[22] *sur $\mathbb{R}$ et une variable aléatoire $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $g \circ Y$ soit également L^1. Alors*

$$g\big(E(Y|\mathcal{F})\big) \leqslant E\big((g \circ Y)|\mathcal{F}\big). \tag{36.257}$$

Démonstration. La convexité de g et la proposition 17.91 nous donnent deux suites (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n x + b_n). \tag{36.258}$$

Nous avons alors

EqVAyCziG

$$a_n E(Y|\mathcal{F}) + b_n \overset{p.s.}{=} E\big(a_n Y + b_n|\mathcal{F}\big) \leqslant E(g \circ Y|\mathcal{F}). \tag{36.259}$$

L'inégalité est due au fait que $g \circ Y$ est le supremum sur les n de $a_n Y + b_n$. Pour chaque n, l'inégalité (36.259) est fausse sur un ensemble de mesure nulle $R_n \subset \Omega$. L'union

$$R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n \tag{36.260}$$

est encore de mesure nulle. Sur $\Omega \setminus R$, nous avons

$$a_n E(Y|\mathcal{F}) + b_n \leqslant E(g \circ Y|\mathcal{F}). \tag{36.261}$$

Vu que cela est vrai presque partout et pour tout n nous passons au supremum et nous avons encore presque partout l'inégalité

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\big(a_n E(Y|\mathcal{F}) + b_n\big) \leqslant E(g \circ Y|\mathcal{F}). \tag{36.262}$$

□

Si nous ne nous intéressons pas à $E(Y|\mathcal{F})$ mais seulement à $E(Y)$, alors une démonstration plus simple est donnée sur Wikipédia[854].

36.2.16 Fonction de répartition

DefooYAZVooNdxDCx

Définition 36.88.
*Si X est une variable aléatoire réelle, nous définissons sa **fonction de répartition** par*

$$\begin{aligned} F_X &: \mathbb{R} \to [0,1] \\ F_X(x) &= P(X \leqslant x). \end{aligned} \tag{36.263}$$

Remarque 36.89.
La fonction de répartition est discontinue en a si $P(X = a) > 0$. En particulier nous ne pouvons pas dire

$$P(X \geqslant a) = 1 - F_X(a). \tag{36.264}$$

LEMooMNXJooBdGXWg

Lemme 36.90.
La fonction de répartition de la loi exponentielle est

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \tag{36.265}$$

36.2.17 Fonction caractéristique

DefooEIVXooNtHLQQ

Définition 36.91.
*La **fonction caractéristique** de la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est la fonction réelle définie par*

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}). \tag{36.266}$$

[22] Définition 17.76.

Une autre façon d'écrire la définition est

$$\Phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itX} dP_X(x), \tag{36.267}$$

ou encore, si X a une densité f_X,

$$\Phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx \tag{36.268}$$

EqFnCaractfncadens

Nous reconnaissons la transformée de Fourier :

$$\Phi_X(t) = \hat{f}_X(-t/2\pi). \tag{36.269}$$

PropDerFnCaract

Proposition 36.92.
Soit X une variable aléatoire qui accepte un moment[23] *d'ordre $r \geqslant 1$. Alors la fonction caractéristique Φ_X est r fois continument dérivable et*

$$\Phi_X^{(r)}(t) = E\big((iX)^r e^{itX}\big). \tag{36.270}$$

EQooVOZTooFDkWjd

Démonstration. Nous étudions la fonction

$$\Phi(t) = \int_\Omega e^{itX(\omega)} dP(\omega). \tag{36.271}$$

Nous prouvons par récurrence que Φ est r fois dérivable et que

$$\Phi^{(k)}(t) = E\big((iX)^k e^{itX}\big) \tag{36.272}$$

pour tout $\leqslant r$.

Lorsque $r = 0$ c'est immédiat. Supposons que la récurrence soit correcte pour $k < r$, et prouvons pour $k+1$. Par hypothèse de récurrence,

$$\Phi^{(k)}(t) = E\big((iX)^k e^{itX}\big) = \int_\Omega \big(iX(\omega)\big)^k e^{itX(\omega)} d\omega. \tag{36.273}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\times\Omega &\to \mathbb{R} \\ (t,\omega) &\mapsto \big(iX(\omega)\big)^k e^{itX(\omega)}, \end{aligned} \tag{36.274}$$

et nous vérifions que ce f satisfait aux hypothèses du théorème 17.19.

(1) $\underline{f_t \in L(\Omega)}$ Pour chaque t fixé, nous posons $f_t(\omega) = f(t,\omega)$. Cette application est dans $L^1(\Omega)$ parce que

$$|f_t(\omega)| = |X(\omega)|^k. \tag{36.275}$$

La proposition 36.41 nous enseigne que X a un moment d'ordre k. Donc l'intégrale de $|f_t|$ existe et est finie.

(2) **Majoration** En posant $G(\omega) = |X(\omega)|^{k+1}$ nous avons $G \in L^1(\Omega)$ parce que $k+1 \leqslant r$ et que X a des moments finis à tous les ordres jusqu'à r. Et G vérifie aussi

$$|(\partial_t f)(t,\omega)| = \big|\big(iX(\omega)\big)^{k+1} e^{itX(\omega)}\big| = |X(\omega)|^{k+1}. \tag{36.276}$$

Toutes les hypothèses étant vérifiées, nous avons

$$\Phi^{(k+1)}(t) = \frac{d}{dt}\big[f(t,\omega)\big]_{t=0} = \int_\Omega (\partial_t f)(t,\omega) d\omega = E\big((iX)^{k+1} e^{itX}\big), \tag{36.277}$$

ce qu'il fallait. □

Exemple 36.93.
Sachant la fonction caractéristique de X, nous pouvons calculer les moments. Par exemple en posant $r = 2$ et $t = 0$ dans la formule (36.270) nous avons

$$E(X^2) = -\Phi_X''(0). \tag{36.278}$$

△

[23] Définition 36.40.

ThonMxtTy

Théorème 36.94.
Si $\Phi_X = \Phi_Y$, alors $P_X = P_Y$.

Notons que cela n'implique pas que $X = Y$. En effet X et Y peuvent même être définis sur des espaces probabilisés différents.

Dans le cas d'une variable aléatoire vectorielle, nous définissons $\Phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par

EqvdvDxg

$$\Phi_X(v) = E\big(e^{i\langle v, X\rangle}\big) \tag{36.279}$$

36.2.18 Fonction génératrice des moments, transformée de Laplace

Soit X une variable aléatoire. Sa **transformée de Laplace** ou **fonction génératrice des moments** est la fonction

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \tag{36.280}$$

pour chaque t tel que cette espérance existe.

Théorème 36.95 ([855]).
Soit X une variable aléatoire réelle et

$$I_X = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } E(e^{tX}) \text{ existe}\}. \tag{36.281}$$

La fonction

$$\begin{aligned} M_X : I_X &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto E(e^{tX}) \end{aligned} \tag{36.282}$$

*est la **transformée de Laplace** de X.*

(1) I_X est un intervalle contenant 0.

(2) Si I_X n'est pas réduit à $\{0\}$ alors M_X se développe en série entière

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n. \tag{36.283}$$

(3) Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors $I_{X+Y} = I_X \cap I_Y$ et

$$M_{X+Y} = M_X M_Y \tag{36.284}$$

sur I_{X+Y}.

Démonstration. Le fait que 0 soit dans I_X est évident : $E(1) = 1$. Pour montrer que I_X est un intervalle nous prenons $z \in I_X$ et $0 < s < z$ ou $z < s < 0$, puis nous montrons que $s \in I_X$. Il faut remarquer que dans tous les cas,

$$e^{sX} \leqslant 1 + e^{zX}. \tag{36.285}$$

En effet soit sX et zX sont tous deux à gauche de zéro et alors ils sont tous deux plus petit que 1 ; soit ils sont tous deux à droite de 0 et alors $e^{zX} > e^{sX}$ par croissance de l'exponentielle. Nous avons donc dans tous les cas que

$$E(e^{sX}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{sX} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} f_X(x)(1 + e^{zx}) = 1 + E(e^{zX}). \tag{36.286}$$

Soit maintenant $a > 0$ tel que $[-a, a] \subset I_X$. Étant donné que $e^{a|X|} < e^{aX} e^{-aX}$, l'espérance $E(e^{a|X|})$ existe toujours pour $|t|$. Nous avons

$$\left| M_X(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{E(X^n)}{n!} t^n \right| = \left| E\Big(e^{tX} - \sum_{n=0}^{N} \frac{X^n}{n!} t^n\Big) \right| \tag{36.287a}$$

$$= \left| E\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{X^n}{n!} t^n \Big) \right| \tag{36.287b}$$

$$\leqslant E\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|tX|^n}{n!} \right). \tag{36.287c}$$

Maintenant le but est de prendre la limite $N \to \infty$ en inversant la limite et l'espérance par le théorème de la convergence dominée (14.207). L'intégrale à traiter est

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|tX(\omega)|^n}{n!} dP(\omega). \tag{36.288}$$

L'intégrande est uniformément borné (en N) par $e^{tX(\omega)}$, qui est intégrable par hypothèse (choix de t). Du coup

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|tX(\omega)|^n}{n!} dP(\omega) = E\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|tX|^n}{n!} \right) = 0. \tag{36.289}$$

□

36.2.19 Théorème de transfert

LEMooHVFJooBDZYnT

Lemme 36.96.
Soient un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ainsi qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Nous considérons un autre espace probabilisé $(S, \mathcal{A}_S, \mu)$ ainsi que l'application

$$\begin{aligned} Y : \Omega \times S &\to \mathbb{R}^n \\ (\omega, s) &\mapsto X(\omega). \end{aligned} \tag{36.290}$$

Alors :

ITEMooDSIKooSqdyJb

(1) *L'application Y est une variable aléatoire sur*[24] $\big(\Omega \times S, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_S, P \otimes \mu\big)$.

ITEMooQMMHooPcGKoD

(2) *La loi de Y est la même*[25] *que celle de X.*

Démonstration. Tout repose sur le fait que Y soit la même chose que X, mais « diagonalisé » sur S. Commençons par prouver que si $B \subset \mathbb{R}^n$, alors $Y^{-1}(B) = X^{-1}(B) \times S$.

(1) **Dans un sens** Soit $(\omega, s) \in X^{-1}(B) \times S$. Alors $Y(\omega, s) = X(\omega) \in B$. Nous avons donc bien $X^{-1}(B) \times S \subset Y^{-1}(B)$.

(2) **Dans l'autre sens** Soit $(\omega, s) \in Y^{-1}(B)$. Nous avons $X(\omega) = Y(\omega, s) \in B$, donc $\omega \in X^{-1}(B)$ et donc $(\omega, s) \in X^{-1}(B) \times S$.

Passons maintenant à la preuve proprement dite.

(1) **Pour (1)** Soit un borélien $B \subset \mathbb{R}^n$. Nous avons $Y^{-1}(B) = X^{-1}(B) \times S$. La partie $X^{-1}(B)$ est un borélien de Ω, et S est un borélien de S. Donc $X^{-1}(B) \times S$ est un borélien de $\Omega \times S$. L'application Y est donc mesurable. Elle est une variable aléatoire.

(2) **Pour (2)** Soit un borélien B de $\mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\begin{aligned} P_Y(B) &= (P \otimes \mu)\big(Y^{-1}(B)\big) && \text{(36.291a)} \\ &= (P \otimes \mu)\big(X^{-1}(B) \times S\big) && \text{(36.291b)} \\ &= P\big(X^{-1}(B)\big)\mu(S) && \text{(36.291c)} \\ &= P\big(X^{-1}(B)\big) && \text{(36.291d)} \\ &= P_X(B). && \text{(36.291e)} \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $\mu(S) = 1$.

□

La proposition suivante permet de calculer en pratique les intégrales qui définissent par exemple l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.

[24] Produit de tribus, définition 14.127 ; produit de mesure, définition 14.246.
[25] La même ; pas seulement la même à abus de notation près. Ce lemme est une partie du bout manquant dont il est question dans [856].

PropintdPintdPXeR

Proposition 36.97 (Théorème de transfert[857])**.**
Si $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une variable aléatoire, alors dès que $f\colon \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ est telle qu'une des deux intégrales existe,

$$E(f \circ X) = \int_\Omega f\big(X(\omega)\big)dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dP_X(x) \tag{36.292}$$

où P_X est la loi de X[26]*.*

En particulier, ça marche si f est borélienne.

En utilisant cette proposition nous trouvons une formule pratique pour l'espérance d'une variable aléatoire réelle :

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} xdP_X(x), \tag{36.293}$$

en vertu de la proposition 36.97 appliquée à la fonction $f(x) = x$.

PROPooNNTNooOmCLvy

Proposition 36.98.
Une variable aléatoire réelle X est intégrable si et seulement si $P(x = \pm\infty) = 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}} |x|dP_X(x) < \infty. \tag{36.294}$$

Le lien entre la densité f_X de la variable aléatoire X et sa loi est

$$P_X(A) = \int_A f_X(x)dx \tag{36.295}$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$. Le lien entre la mesure de Lebesgue et celle de la loi de X est alors donné par

$$dP_X(x) = f_X(x)dx. \tag{36.296}$$

En particulier l'espérance de X peut être calculée à partir de sa densité via la formule

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xdP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx. \tag{36.297}$$

EqEspDensform

LEMooYVJAooXUkRTh

Lemme 36.99.
Soit une variable aléatoire $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ de densité g_X.

ITEMooBUWNooJkiRPp

(1) Nous avons

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^n} xg_X(x)dx. \tag{36.298}$$

ITEMooKZHAooKQQmno

(2) Si la fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ est borélienne, alors

$$E(f \circ X) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_X(x)dx. \tag{36.299}$$

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 36.100
Je n'ai pas vérifié le lemme 36.99. Écrivez-moi si vous en connaissez une démonstration, ou si vous croyez qu'il est faux.

À mon avis le point (1) est une variation autour de (36.297) et (2) utilise ça et le théorème de transfert 36.97.

LEMooAVTFooIQRvop

Lemme 36.101.
Soient des variables aléatoires $X_i\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \dots, n)$. Nous supposons qu'il existe une application $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$E\big(f(X_1, \dots, X_n)\big) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \tag{36.300}$$

pour tout fonction borélienne $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Alors g est une densité pour la variable aléatoire $(X_1, \dots, X_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

[26] Définition 36.8.

PROPooNYNUooTCJgpl

Proposition 36.102 ([858]).
Soient des variables aléatoires $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$. Nous posons $Z = (X_1, \dots, X_n)$ et nous supposons que Z est une variable aléatoire à densité notée f_Z.

Alors les X_i sont à densité et les densités de X_i sont

$$f_i(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_Z(x_1, \dots, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n. \tag{36.301}$$

PROPooVUTLooDPdhxK

Proposition 36.103.
Soient des variables aléatoires à densité $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$; nous notons f_i leurs densités. Nous posons $Z = (X_1, \dots, X_n)$.

(1) La variable aléatoire Z est à densité.

ITEMooUQEFooAAFXJY

(2) Les variables aléatoires X_i sont indépendantes si et seulement si $f_Z = \prod_{i=1}^{n} f_i$.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 36.104
Je n'ai pas vérifié si cette proposition est vraie. Écrivez-moi si vous connaissez une démonstration, ou si vous savez que c'est faux.

36.2.20 Changement de variables

THOooDSTYooXMWfNw

Théorème 36.105.
Soit $\mathcal{O}$, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{O}'$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ ainsi qu'un difféomorphisme C^1 $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une variable aléatoire prenant presque surement ses valeurs dans $\mathcal{O}$. Si nous supposons que X a la densité f_X, alors la variable aléatoire $Y = \varphi(X)$ accepte la densité $f_Y : \mathcal{O}' \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_Y(v) = f_X\big(\varphi^{-1}(v)\big) |J_{\varphi^{-1}}(v)|. \tag{36.302}$$

Démonstration. Nous devons vérifier la relation

$$P(Y \in B) = \int_B f_Y(v) dv \tag{36.303}$$

pour tout borélien $B \subset \mathcal{O}'$. Nous avons

$$\begin{aligned}
P(Y \in B) &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_B(v) dP_Y(v) && (36.304a)\\
&= E(\mathbb{1}_B \circ Y) && (36.304b)\\
&= E\big((\mathbb{1}_B \circ \varphi) \circ X\big) && (36.304c)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbb{1}_B \circ \varphi)(u) dP_X(u) && (36.304d)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbb{1}_B \circ \varphi)(u) f_X(u) du. && (36.304e)
\end{aligned}$$

À ce niveau, nous utilisons la formule de changement de variables du théorème 14.282. Nous trouvons alors

$$P(Y \in B) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_B\big(\varphi^{-1}(v)\big) f_X\big(\varphi^{-1}(v)\big) |J_{\varphi^{-1}}(v)| dv. \tag{36.305}$$

□

36.3 Convergence

DEFooZKLFooZkKuMC

Définition 36.106 ([859, 743]).
Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient des variables aléatoires[27] *$X_i : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

Nous avons plein de modes de convergence.

Convergence presque sure *Nous disons que X_i converge **presque surement** vers la variable aléatoire X et nous notons*

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \tag{36.306}$$

si

$$P\big(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_n(\omega) \to X(\omega)\}\big) = 1 \tag{36.307}$$

où la convergence $X_n(\omega) \to X(\omega)$ est la convergence usuelle dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

[27] Définition 12.26 pour la topologie et donc les boréliens sur la droite réelle achevée.

Convergence en probabilité *Nous disons que les variables aléatoires réelles X_n convergent* ***en probabilité*** *vers la variable aléatoire X si pour tout $\eta > 0$, on a*

$$P\big(|X_n - X| \geqslant \eta\big) \to 0, \tag{36.308}$$

et on note

$$X_n \xrightarrow{P} X. \tag{36.309}$$

Convergence L^p *Si X_n et X sont de classe L^p, alors nous pouvons également parler de la convergence L^p :*

$$X_n \xrightarrow{L^p} X. \tag{36.310}$$

En notant les intégrales comme des espérances, cette convergence signifie

$$E\big(|X_n - X|^r\big) \to 0. \tag{36.311}$$

Convergence en loi *Nous disons que X_n converge vers X* ***en loi*** *vers la variable aléatoire X et nous notons*

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X \tag{36.312}$$

EQooWSMPooHCyPwk

si pour toute fonction continue et bornée g nous avons

$$E\big(g(X_n)\big) \to E\big(g(X)\big). \tag{36.313}$$

La convergence en loi se distingue des autres modes de convergence en cela que les variables aléatoires X_n et X peuvent être définies sur des espaces probabilisés $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ et $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tous différents.

THOooMXFMooVHdSFE

Théorème 36.107 ([743]).
Soient des variables aléatoires X_n et X sur l'espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ alors $X_n \xrightarrow{P} X$.

ITEMooRPLIooHcFLCR

(2) Si $X_n \xrightarrow{P} X$ alors il existe une sous-suite (Y_n) de X_n telle que $Y_n \xrightarrow{p.s.} X$.

(3) Si les variables aléatoires X_n sont de classe L^r et si $X_n \xrightarrow{L^r} X$, alors $X_n \xrightarrow{P} X$.

ITEMooAYRCooCYLpWX

(4) Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si la famille $\{|X|^r\}$ est uniformément intégrable[28]*, alors $X_n \xrightarrow{L^r} X$.*

(5) Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si $\limsup_n E\big(|X_n|^r\big) \leqslant E(|X|^r)$ alors $X_n \xrightarrow{L^r} X$.

(6) Si $X_n \xrightarrow{L^r} X$, alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$ pour tout $0 < p \leqslant r$.

ITEMooPRGRooUqNKjB

(7) Si $X_n \xrightarrow{P} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

(8) Si $X_n \xrightarrow{P} X$ alors toute sous-suite (Y_n) contient une sous-sous-suite (Y'_n) telle que $Y'_n \xrightarrow{p.s.} X$

Notez les implications

$$\textit{presque sure} \;\Rightarrow\; \textit{en probabilité} \;\Rightarrow\; \textit{en loi}. \tag{36.314}$$

PROPooXRVOooEYQzGr

Proposition 36.108 ([1]).
Si X_n et X est sont des variables aléatoires telles que $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, alors

$$|X_n| \xrightarrow{\mathscr{L}} |X|. \tag{36.315}$$

LEMooADHZooGCxVvn

Lemme 36.109.
Nous avons $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si et seulement si il existe un événement $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) = 1$ et tel que $X_n(\omega) \to X(\omega)$ pour tout $\omega \in A$.

LEMooNTNIooKbLwgX

Lemme 36.110.
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$\begin{aligned} \min(X, n) \colon \Omega &\to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ \omega &\mapsto \min\big(X(\omega), n\big) \end{aligned} \tag{36.316}$$

est une variable aléatoire.

[28] Voir lemme 27.70.

(2) Nous avons la convergence presque sure[29]

$$\min(X,n) \xrightarrow{p.s.} X \tag{36.317}$$

Démonstration. Le fait que $\min(X,n)$ soit mesurable est le lemme 14.99. D'ailleurs pour la suite, nous la notons $X_n = \min(X,n)$. Sinon il faudrait écrire des choses comme $\min(X,n)(\omega)$ pour $X_n(\omega)$, et ça deviendrait compliqué.

Nous allons montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, nous avons $X_n(\omega) \to X(\omega)$. Ainsi le lemme 36.109 conclura.

Soit $\omega \in \Omega$. Si $X(\omega) = \infty$, alors nous avons $X_n(\omega) = n$ pour tout n et alors $X_n(\omega) \xrightarrow{\mathbb{R}} \infty = X(\omega)$.

Si par contre $X(\omega) < \infty$. Alors en choisissant $N > X(\omega)$ dans $\mathbb{N}$ (lemme 1.553), nous avons $X_n(\omega) = X(\omega)$ pour tout $n \geqslant N$. Et donc aussi $X_n(\omega) \to X(\omega)$. □

36.111.
Dans certains textes, la variable aléatoire $\min(X,n)$ est notée $X \wedge n$. Donc le lemme 36.110 s'écrit

$$X \wedge n \xrightarrow{p.s.} X \tag{36.318}$$

PROPooDWTWooPygbmK

Proposition 36.112 ([1, 743])**.**
Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et si X est intégrable, alors

$$E(X) = E\big(\liminf_n(X_n)\big). \tag{36.319}$$

Démonstration. Soit

$$A = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_n(\omega) \to X(\omega)\}. \tag{36.320}$$

Vu que $X_n \xrightarrow{p.s} X$, nous avons $P(A) = 1$ et donc, en posant $Z = \Omega \setminus A$, nous avons $P(Z) = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} E\big(\liminf(X_n)\big) &= \int_\Omega \liminf_n(X_n)d\omega && (36.321a)\\ &= \int_A \liminf_n(X_n)d\omega + \int_Z \liminf_n(X_n)d\omega && (36.321b)\end{aligned}$$

La seconde intégrale est nulle par le corolaire 14.168 ; vous noterez que rien ne garanti que $\liminf_n X_n(\omega) < \infty$ lorsque $\omega \in Z$ parce que rien ne garantit que $\liminf_n X_n(\omega) = X'\omega$.

Pour $\omega \in A$ nous avons $X_n(\omega) \to X(\omega)$, et à fortiori $\liminf_n X_n(\omega) = X(\omega)$. Donc

$$\begin{aligned} E\big(\liminf_n(X_n)\big) &= \int_A \liminf_n\big(X_n(\omega)\big)d\omega && (36.322a)\\ &= \int_A X(\omega)d\omega && (36.322b)\\ &= \int_A X(\omega)d\omega + \int_Z X(\omega)d\omega && (36.322c)\\ &= \int_\Omega X(\omega)d\omega && (36.322d)\\ &= E(X). && (36.322e)\end{aligned}$$

□

THOooEPYBooHlSuLI

Théorème 36.113 (Théorème de Vitali[743])**.**
Soient des variables aléatoires $X_n \in L^r(\Omega,\mathcal{A},P)$ avec $0 < r < \infty$. Nous supposons que[30] *$X_n \xrightarrow{P} X$. Nous avons équivalence entre*

SPITEMooGKRVooQoDfKm

(1) L'ensemble $\{|X_n|^r\}$ est uniformément intégrable[31]*.*

SPITEMooUYTKooBClYcR

(2) Nous avons $X \in L^r(\Omega)$ et $X_n \xrightarrow{L^r(\Omega)} X$.

SPITEMooQYLOooDiBvne

(3) $E\big(|X_n|^r\big) \to E\big(|X|^r\big)$.

SPITEMooRVFAooXUNQlf

(4) $\limsup_n E\big(|X_n|^r\big) \leqslant E\big(|X|^r\big)$.

[29] Définition 36.106.
[30] Convergence en probabilité, définition 36.106.
[31] Définition 27.69.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) ⇒ (2)**

Par le théorème 36.107(2), il existe une sous-suite (Y_n) de (X_n) telle que $Y_n \xrightarrow{p.s.} X$. Nous avons donc également $|Y_n|^r \xrightarrow{p.s.} |X|^r$. Nous utilisons 36.112 :

$$E\big(|X|^r\big) = E\big(\liminf_n |Y_n|^r\big) \quad \text{prop. 36.112} \tag{36.323a}$$
$$\leqslant \liminf_n \Big(E\big(|Y_n|^r\big)\Big) \quad \text{Fatou 14.182.} \tag{36.323b}$$

Nous nous souvenons que la partie $\{|X_n|^r\}$ est uniformément intégrable ; à fortiori la partie $\{|Y_n|^r\}$ l'est également. Le théorème 27.74(1) dit qu'il existe $M > 0$ tel que $E\big(|Y_n|^r\big) < M$. Nous avons donc

$$E\big(|X|^r\big) \leqslant \liminf_n \Big(E\big(|Y_n|^r\big)\Big) < M. \tag{36.324}$$

Cela prouve que $|X|^r \in L^1(\Omega)$, c'est-à-dire que $X \in L^r(\Omega)$. Voilà une bonne chose de faite. Nous devons encore prouver que $X_n \xrightarrow{L^r(\Omega)} X$.

Soit $\omega \in \Omega$. La c-r inégalité (proposition 27.137) donne

$$|X_n(\omega) - X(\omega)|^r \leqslant c_r\big(|X_n(\omega)|^r + |X(\omega)|^r\big). \tag{36.325}$$

EQooZYDGooKhtrqz

Vu que $\{|X_n(\omega)|\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable, les différents points de la proposition 27.72 et l'inégalité 36.325 montrent que $\{|X_n - X|^r\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.

Nous utilisons la proposition 27.74. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que pour tout n et pour toute partie $A \in \mathcal{A}$ telle que $P(A) \leqslant \delta_\epsilon$,

$$E\big(|X_n - X|^r \mathbb{1}_A\big) < \epsilon. \tag{36.326}$$

Vu que $X_n \xrightarrow{P} X$, si n est assez grand[32], nous avons $P\big(|X_n - X| \geqslant \epsilon\big) < \delta_\epsilon$. Pour de tels n, nous avons

$$E\Big(|X_n - X|^r \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \geqslant \epsilon\}}\Big) < \epsilon. \tag{36.327}$$

Par la σ-additivité de l'intégrale (et le recouvrement en $\{|X_n - X| = \epsilon\}$), nous avons

$$E\big(|X_n - X|^r\big) \leqslant E\Big(|X_n - X|^r \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \geqslant \epsilon\}}\Big) + E\Big(|X_n - X|^r \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leqslant \epsilon\}}\Big) \tag{36.328a}$$
$$< \epsilon + E\Big(|X_n - X|^r \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leqslant \epsilon\}}\Big) \tag{36.328b}$$

SUBEQooHHISooMueQQp

Sur la partie $\{|X_n - X| \leqslant \epsilon\}$, nous pouvons majorer $|X_n(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon$. Vu que $P(\Omega) = 1$ nous avons

$$E\Big(|X_n - X|^r \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leqslant \epsilon\}}\Big) = \int_\Omega |X_n(\omega) - X(\omega)|^r \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leqslant \epsilon\}} dP(\omega) \tag{36.329a}$$
$$\leqslant \int_\Omega \epsilon^r dP(\omega) = \epsilon^r \tag{36.329b}$$

Cela nous permet de majorer la seconde partie de (36.328b). Au final si n est grand,

$$E\big(|X_n - X|^r\big) \leqslant \epsilon + \epsilon^r. \tag{36.330}$$

Autrement dit, $E\big(|X_n - X|^r\big) \to 0$ ou encore

$$X_n \xrightarrow{L^r} X. \tag{36.331}$$

(2) **(2) ⇒ (3)**

C'est la proposition 27.77.

(3) **(3) ⇒ (4)**

Si la limite existe, alors, à fortiori, la limite supérieure existe et est égale.

[32] Dans [743], il choisit ϵ petit et non n grand. Je ne comprends pas pourquoi.

(4) **(4) ⇒ (1)**

Nous supposons que $E\big(|X_n|^r\big) \leqslant E\big(|X|^r\big)$. Pour chaque $\lambda > 0$, nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f_\lambda\colon [0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^r & \text{si } x^r \leqslant \lambda \\ \lambda^r - \lambda^r(x-\lambda) & \text{si } \lambda < x^r < \lambda+1 \\ 0 & \text{si } x^r \geqslant \lambda+1. \end{cases} \end{aligned} \tag{36.332}$$

(4a) **f_λ est continue** Si $x = \lambda$, la première ligne donne $f_\lambda(\lambda) = \lambda^r$ (parce que $\lambda > 0$), qui coïncide avec la valeur de la seconde ligne en $x = \lambda$. Si $x = \lambda + 1$, les seconde et troisième lignes donnent toutes deux 0.

(4b) **f_λ est bornée** Chacun des trois bouts de formule est borné.

(4c) **Une majoration avec f_λ** Soit $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Nous montrons que

$$f_\lambda \circ |g| \leqslant |g|^r \mathbb{1}_{\{|g|^r \leqslant \lambda+1\}}. \tag{36.333}$$

EQooVLGYooYEiVoS

Il y a trois possibilités en fonction de ce que vaut $|g(\omega)|^r$.

(4c.i) **Si $|g(\omega)| \leqslant \lambda$** Alors $(f_\lambda \circ |g|)(\omega) = |g(\omega)|^r$ alors que $\mathbb{1}_{\{|g|^r \leqslant \lambda+1\}}(\omega) = 1$.

(4c.ii) **Si $\lambda < |g(\omega)|^r < \lambda + 1$** Nous avons

$$\begin{aligned} (f_\lambda \circ g)(\omega) &= \lambda^r - \lambda^r\big(g(\omega) - \lambda\big) && && \text{(36.334a)} \\ &< \lambda^r - \lambda^r(\lambda - \lambda) && \text{pcq. } g(\omega) < \lambda && \text{(36.334b)} \\ &= \lambda^r && && \text{(36.334c)} \\ &\leqslant |g(\omega)|^r. && && \text{(36.334d)} \end{aligned}$$

(4c.iii) **Si $|g(\omega)|^r \geqslant \lambda + 1$** Nous avons $(f_\lambda \circ g)(\omega) = 0$.

(4d) **Une autre inégalité avec f_λ** Nous prouvons à présent que

$$|X|^r - (f_\lambda \circ X) \leqslant |X|^r \mathbb{1}_{\{|X|^r \geqslant \lambda\}}. \tag{36.335}$$

EQooNWROooBcZZTo

(4d.i) **Si $|X(\omega)| \leqslant \lambda$** Dans ce cas nous avons 0 à gauche de (36.335), et pas besoin de regarder à droite.

(4d.ii) **Si $\lambda < |X(\omega)|^r < \lambda + 1$** À gauche nous avons

$$\begin{aligned} \lambda^r - \lambda^r\big(|X(\omega)| - \lambda\big) &\leqslant \lambda^r - \lambda^r(\lambda - \lambda) && \text{(36.336a)} \\ &= \lambda^r && \text{(36.336b)} \\ &\leqslant |X(\omega)|^r. && \text{(36.336c)} \end{aligned}$$

Et à droite, nous avons la même chose.

(4d.iii) **Si $|X(\omega)| \geqslant \lambda + 1$** Alors nous avons 0 à gauche.

(4e) **Une limite avec l'espérance** Par hypothèse, $X_n \xrightarrow{P} X$. Par le théorème 36.107(7), cela implique la convergence en loi $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. Et donc $|X_n| \xrightarrow{\mathscr{L}} |X|$ et aussi[33]

$$E(f_\lambda \circ |X_n|) = E(f_\lambda \circ |X|) \tag{36.337}$$

EQooJGSVooBXkEnG

parce que f_λ est continue et bornée.

Avec tout ça, nous pouvons calculer un petit peu :

$$\begin{aligned} \limsup_n E\Big(|X_n|^r \mathbb{1}_{\{|X_n|^r > \lambda+1\}}\Big) &= \limsup_n \Big(E(|X_n|^r) - E\big(|X_n|^r \mathbb{1}_{\{|X_n|^r \leqslant \lambda+1\}}\big)\Big) && \text{(36.338a)} \\ &\leqslant E(|X|^r) - \limsup_n \Big(E\big(|X_n|^r \mathbb{1}_{\{|X_n|^r \leqslant \lambda+1\}}\big)\Big) && \text{(36.338b)} \\ &\leqslant E(|X|^r) - \liminf_n \Big(E\big(|X_n|^r \mathbb{1}_{\{|X_n|^r \leqslant \lambda+1\}}\big)\Big) && \text{(36.338c)} \\ &\leqslant E(|X|^r) - \liminf_n E(f_\lambda \circ |X_n|) && \text{de (36.333)} \\ & && \text{(36.338d)} \\ &\leqslant E(|X|^r) - E(f_\lambda \circ |X|) && \text{de (36.337)} \\ & && \text{(36.338e)} \\ &= E\big(|X|^r - (f_\lambda \circ |X|)\big) && \text{(36.338f)} \\ &\leqslant E\big(|X|^r \mathbb{1}_{\{|X|^r \geqslant \lambda\}}\big) && \text{(36.338g)} \end{aligned}$$

[33] Proposition 36.108.

Nous avons donc démontré que pour tout $\lambda > 0$,

$$\limsup_n E\Big(|X_n|^r \mathbb{1}_{\{|X_n|^r>\lambda+1\}}\Big) \leqslant E\big(|X|^r \mathbb{1}_{\{|X|^r\geqslant\lambda\}}\big). \tag{36.339}$$

Pour tester l'uniforme intégrabilité, il nous suffit maintenant de prendre la limite $\lambda \to \infty$. La proposition 27.73 dit que $E\big(|X|^r \mathbb{1}_{\{|X|^r\geqslant\lambda\}}\big) \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0$. Nous avons donc bien l'uniforme intégrabilité.

□

36.3.1 Convergence et fonction caractéristique

PrpopCaractCvL

Proposition 36.114 (Helly-Bray[743])**.**
Deux autres caractérisations de la convergence en loi[34]*.*

(1) Nous avons $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ si et seulement si

$$\Phi_{X_n}(v) \to \Phi_X(v) \tag{36.340}$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^d$. Ici Φ_X est la fonction caractéristique de X.

(2) Dans la définition de la convergence en loi nous pouvons indifféremment utiliser les fonctions continues et bornées, les fonctions continues à support compact ou les fonctions bornées uniformément continues.

Dans le cas particulier $d = 1$ nous avons quelques critères supplémentaires.

PropoFnrepCvL

Proposition 36.115.
Supposons que les variables aléatoires X_n soient réelles, et notons F_n la fonction de répartition de X_n. Si $F_n(x) \to F(x)$ pour tout x dans l'ensemble des points de continuité de F, alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

PROPooNRQJooXoCcbZ

Proposition 36.116.
Si les X_n sont des variables aléatoires réelles positives, et si X est une variable aléatoire positive, alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ si les transformées de Laplace des fonctions de répartition convergent ponctuellement, c'est-à-dire si

$$E\big(e^{-\alpha X_n}\big) \to E\big(e^{-\alpha X}\big) \tag{36.341}$$

pour tout $\alpha \geqslant 0$.

PROPooZMHKooLwCwqs

Proposition 36.117.
Si les X_n et X sont des variables aléatoires réelles discrètes à valeurs dans $\{x_0, x_1, \dots\}$ alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ si et seulement si

$$P(X_n = x_k) \to P(X = x_k) \tag{36.342}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

PropXncvXFXcvFxt

Proposition 36.118 ([841])**.**
Soient X_n et X des variables aléatoires réelles. Nous avons

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X \tag{36.343}$$

si et seulement si pour tout t où F_X est continue,

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t). \tag{36.344}$$

PropCvLfcvPsicst

Proposition 36.119 ([841])**.**
Soit X_n une suite de variables aléatoires $\Omega \to \mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Si $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} a$, alors

$$X_n \xrightarrow{P} a. \tag{36.345}$$

Démonstration. Quitte à passer aux composantes, nous pouvons supposer que $d = 1$. Soit $\eta > 0$; nous savons que l'inégalité $|x| > a$ a pour solution $x > a$ ou $x < -a$. Dans notre cas,

$$\begin{aligned}
P\big(|X_n - a| > \eta\big) &= P(X_n - a > \eta) + P(X_n - a < -\eta) && \text{(36.346a)}\\
&= P(X_n > \eta + a) + P(X_n < a - \eta) && \text{(36.346b)}\\
&= 1 - P(X_n \leqslant \eta + a) + P(X_n \leqslant a - \eta) - P(X_n = a - \eta) && \text{(36.346c)}\\
&\leqslant 1 - F_{X_n}(\eta + a) + F_{X_n}(a - \eta) && \text{(36.346d)}
\end{aligned}$$

[34] Définition 36.312

où la majoration est l'oubli du terme $P(X_n = a - \eta)$, lequel est positif ou nul et F_{X_n} est la fonction de répartition de X_n, définition 36.88. Nous allons utiliser la proposition 36.118. La fonction de répartition de la variable aléatoire constante $X = a$ est donnée par

$$F_a(t) = P(a \leqslant t) = \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t - a). \tag{36.347}$$

Par conséquent, la convergence en loi $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} a$ nous montre que

$$F_{X_n}(t) \to \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t - a) \tag{36.348}$$

pour tout $t \neq a$ parce que $t = 0$ est un point de discontinuité de $\mathbb{1}_{[0,\infty[}$. Nous avons par conséquent

$$P\big(|X_n - a| > \eta\big) = 1 - \mathbb{1}_{[0,\infty[}(\eta) + \mathbb{1}_{[0,\infty[}(-\eta) = 1 - 1 + 0 = 0 \tag{36.349}$$

parce que $\eta > 0$. □

Le lemme de Slutsky sera utilisé en combinaison avec la proposition 36.121 pour calculer des intervalles de confiance, voir par exemple ce qui se passe autour de l'équation (37.126).

LemgXDlhs

Lemme 36.120 (Slutsky[860])**.**
Soient X_n et Y_n des suites de variables aléatoires réelles telles que

$$\begin{aligned} X_n &\xrightarrow{\mathscr{L}} X \\ Y_n &\xrightarrow{P} a \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{36.350}$$

Alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X, a)$.

Démonstration. Étant donné que $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} a$, nous avons $Y_n \xrightarrow{P} a$ par la proposition 36.119. Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; nous devons prouver que

$$E\big(f(X_n, Y_n)\big) \to E\big(f(X, a)\big). \tag{36.351}$$

Soit $\epsilon > 0$. Nous avons

$$E\big(\|f(X_n, Y_n) - f(X, a)\|\big) \leqslant E\big(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\big) + E\big(\|f(X_n, a) - f(X, a)\|\big). \tag{36.352}$$

EqEparXnYnfXa

La fonction $g(t) = f(t, a)$ étant continue et bornée, la convergence en loi $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ donne

$$E\big(\|f(X_n, a) - f(X, a)\|\big) \to 0. \tag{36.353}$$

Étudions à présent le premier terme du membre de droite de (36.352). Pour tout $\eta > 0$ et toute variables aléatoires Z et Z' nous avons

$$E(Z) = E(Z\mathbb{1}_{|Z'|<\eta}) + E(Z\mathbb{1}_{|Z'|\geqslant\eta}). \tag{36.354}$$

Nous décomposons donc le premier terme de (36.352) en

$$\begin{aligned} E\big(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\big) = {} & E\big(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\mathbb{1}_{|Y_n - a|<\eta}\big) \\ & + E\big(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\mathbb{1}_{|Y_n - a|\geqslant\eta}\big). \end{aligned} \tag{36.355}$$

EqEXnADecomsecvolta

Choisissons maintenant une valeur de η telle que

$$|(x, y) - (x', y')| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| \leqslant \epsilon. \tag{36.356}$$

Un tel η existe par l'uniforme continuité de f. Dans le premier terme, $|Y_n - a| < \eta$, par conséquent

$$\|(X_n, Y_n) - (X_n, a)\| = |Y_n - a| < \eta \tag{36.357}$$

et donc

$$\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\| \leqslant \epsilon. \tag{36.358}$$

Le premier terme devient donc

$$E\big(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\mathbb{1}_{|Y_n - a|<\eta}\big) \leqslant \epsilon E(\mathbb{1}_{|Y_n - a|<\eta}) \leqslant \epsilon \tag{36.359}$$

parce que $E(\mathbb{1}_A) = P(A) \leqslant 1$. Pour le second terme de (36.355) nous effectuons la majoration

$$\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\| \leqslant 2\|f\|_\infty \tag{36.360}$$

tandis que la convergence $Y_n \xrightarrow{P} a$ entraine

$$P\big(|Y_n - a| \geqslant \eta\big) \to 0. \tag{36.361}$$

□

PropcvLsousfonc

Proposition 36.121 ([861]).
Soient X_i des variables aléatoires telles que

$$X_i \xrightarrow{\mathscr{L}} X \tag{36.362}$$

et h, une fonction mesurable sur l'espace d'arrivée de X_i. Soit C l'ensemble des points de continuité de h au sens

$$C = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } h \text{ est continue en } X_i(\omega)\}. \tag{36.363}$$

Alors si $P(X \in C) = 1$, nous avons

$$h(X_i) \xrightarrow{\mathscr{L}} h(X). \tag{36.364}$$

Une conséquence de cette proposition couplée au lemme de Slutsky est le résultat suivant, qui est donné sous le nom de théorème de Slutsky sur Wikipédia.

CorINgTPH

Corolaire 36.122.
En reprenant les notations du lemme de Slutsky, si

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X \tag{36.365a}$$

$$Y_n \xrightarrow{P} a, \tag{36.365b}$$

alors

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X + a \tag{36.366a}$$

$$X_n Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} aX \tag{36.366b}$$

$$Y_n^{-1} X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} a^{-1} X \tag{36.366c}$$

(36.366d)

pourvu que a soit inversible.

LEMooXWMXooYEwWBn

Lemme 36.123 (Borel-Cantelli).
Soit (A_n) une suite d'événements (avec $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout n).

(1) Si $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$ converge, alors

$$P(A_n \text{ i.s.}) = 0. \tag{36.367}$$

(2) Si la somme $\sum_n P(A_n)$ diverge, et si de plus les A_i sont indépendants, alors

$$P(A_n \text{ i.s.}) = 1. \tag{36.368}$$

La notation $P(A_n \text{ i.s.})$ signifie « infiniment souvent », c'est-à-dire

$$P(A_n \text{ i.s.}) = P\Big(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant N} A_k\Big) = P(\limsup A_n) \tag{36.369}$$

Une façon de paraphraser le lemme de Borel-Cantelli est que nous avons l'alternative

$$P(\limsup A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{n\geqslant 0} P(A_n) < \infty \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{36.370}$$

EqparaphrCantelli

Proposition 36.124.
Soit X_n, une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. Si

$$\sum_n P\big(\|X_n - X\| > \epsilon\big) < \infty \tag{36.371}$$

pour tout ϵ, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Démonstration. Fixons ϵ et considérons les événements $A_n = \|X_n - X\| > \epsilon$. L'hypothèse dit que

$$\sum_n P(A_{n,\epsilon}) < \infty \tag{36.372}$$

et le lemme de Borel-Cantelli implique que

$$P(\limsup \|X_n - X\| > \epsilon) = 0. \tag{36.373}$$

Un élément ω est dans $\limsup A_n$ si il est contenu dans tous les A_n, par conséquent, pour chaque ϵ nous avons l'inclusion

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_n(\omega) \to X(\omega)\} \subset \complement \limsup A_n. \tag{36.374}$$

Nous pouvons aller plus loin et écrire

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_n(\omega) \to X(\omega)\} = \complement\{\omega \in \Omega \text{ tel que } \|X_n - X\| > \epsilon, \forall \epsilon > 0\}. \tag{36.375}$$

EqProbomOmXnmXforalleps

Or la probabilité de l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } \|X_n - X\| > \epsilon\} \tag{36.376}$$

est 0 pour chaque ϵ, et par conséquent la probabilité du membre de droite de (36.375) est 1. □

Exemple 36.125.
Considérons une suite de 0 et de 1 dans laquelle le 1 arrive avec une probabilité p et le 0 avec une probabilité $1-p$. Une telle suite est modélisée par une suite de variables aléatoires de Bernoulli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes de paramètre p.

Question : une telle suite contient elle une infinité de 1 ? Considérons les événements indépendants $A_n = \{X_n = 1\}$. Nous avons

$$\sum_n P(A_n) = \sum_n P(X_n = 1) = \sum_n p = \infty. \tag{36.377}$$

Par Borel-Cantelli et son expression (36.370), nous avons alors

$$P(\limsup A_n) = 1. \tag{36.378}$$

Donc une infinité d'événements A_n se produisent, et nous avons bien une infinité de 1 dans la suite.

Remarque : dans ce raisonnement nous pouvons considérer une probabilité non constante p_n tant que la série $\sum_n p_n$ diverge. △

EXooSRQUooWEpXRi

Exemple 36.126.
À propos de maximum. La fonction $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donnée par $h(x_1, \dots, x_d) = \max_i\{x_i\}$ est une fonction continue. Nous voudrions prouver que si on a une famille (finie en $i = 1, \dots, l$) de suites (en n) de variables aléatoires $X_n^{(i)} \xrightarrow{p.s.} a$ convergeant toutes vers la même limite a, alors

$$M_n = \max_i\{X_n^{(i)}\} \xrightarrow{p.s.} a. \tag{36.379}$$

D'abord si nous avons l suites numériques $(x_n^{(i)})$, alors la suite

$$M_n = \max_i x_n^{(i)} \tag{36.380}$$

converge vers la même limite. En effet si $\epsilon > 0$ est donné, il suffit de prendre N_i l'entier tel que $|x_n^{(i)} - a| \leqslant \epsilon$ pour tout $n > N_i$. Et ensuite on prend $N > \max\{N_i\}$.

Si maintenant au lieu de suites numériques, nous avons des variables aléatoires, le résultat reste valable. Nous cherchons à prouver que

$$P\Big(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } \max\{X_n^{(i)}(\omega)\} \to a\}\Big) = 1. \tag{36.381}$$

EqMZcnwTh

Par ce que nous venons de dire sur les suites numériques, un élément ω n'est pas dans cet ensemble seulement si il y a un i pour lequel $X_n^{(i)}$ ne converge pas vers a. Or cela, pour chaque i est un événement de probabilité zéro.

Les ω qui ne fonctionneront pas dans l'équation (36.381) sont ceux de la réunion d'un ensemble fini d'ensembles de probabilité nulle. C'est donc de probabilité nulle. △

36.4 Loi des grands nombres, théorème central limite

36.4.1 Loi des grands nombres

Lemme 36.127 (Inégalité de Markov[862]).
Soit une variable aléatoire $X \in L^p$ et $\epsilon > 0$. Nous avons

$$P(|X| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{1}{\epsilon^r} E(|X|^r). \tag{36.382}$$

Démonstration. Nous avons

$$E(|X|^r) \geqslant \int_{|X|\geqslant\epsilon} X(\omega) dP(\omega) \geqslant \epsilon^r \int_{|X|\geqslant\epsilon} dP = \epsilon^r P(|X| \geqslant \epsilon). \tag{36.383}$$

□
CorEWhIsBB

Corolaire 36.128 ([862]).
Soit ϕ, une fonction croissante et positive ou nulle sur l'intervalle I. Soit aussi une variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $P(Y \in I) = 1$. Alors pour tout $b \in I$ tel que $\phi(b) > 0$ nous avons

$$P(Y \geqslant b) \leqslant \frac{E\big[\phi(Y)\big]}{\phi(b)}. \tag{36.384}$$

ThoefQyKZ

Théorème 36.129 (Loi forte des grands nombres).
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles

(1) indépendantes et identiquement distribuées,

(2) intégrables (c'est-à-dire dans L^1),

alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s.} E(X_1). \tag{36.385}$$

Note : étant donné que les variables aléatoires sont identiquement distribuées, nous avons évidemment $E(X_1) = E(X_2) = \dots$

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 36.130
Est-ce que les variables aléatoires doivent vraiment être réelles ?

CORooAYTPooMdAdoN

Corolaire 36.131.
Si les variables aléatoires réelles X_n sont

(1) indépendantes et identiquement distribuées,

(2) dans L^2

alors

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} E(X_1). \tag{36.386}$$

Démonstration. Nous voulons prouver que pour tout $\eta > 0$,

$$P\big(|\bar{X}_n - E(X_1)| > \eta\big) \to 0. \tag{36.387}$$

Remarquons d'abord que les variables aléatoires X_n étant identiquement distribuées, $E(\bar{X}_n) = E(X_1)$ parce que $E(X_i) = E(X_1)$ pour tout i. L'inégalité de Markov avec $r = 2$ nous donne

$$P\big(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| > \eta\big) \leqslant \frac{1}{\eta^2} E\big(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)|^2\big) \tag{36.388a}$$

$$= \frac{1}{\eta^2} \operatorname{Var}(\bar{X}_n) \tag{36.388b}$$

$$= \frac{1}{n\eta^2} \operatorname{Var}(X_1) \tag{36.388c}$$

où nous avons utilisé la la proposition 36.54 : $\operatorname{Var}(\bar{X}_n) = \operatorname{Var}(X_1)/n$. Au final nous avons prouvé que

$$P\big(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| > \eta\big) \leqslant \frac{1}{n\eta^2} \operatorname{Var}(X_1), \tag{36.389}$$

qui tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. □

Proposition 36.132.
Soient X_n des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $X_n \geqslant 0$. Nous acceptons $E(X_1) = \infty$, c'est-à-dire que nous relaxons la condition $X_n \in L^1$ par rapport à la loi des grands nombres.
Alors

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} E(X_1) \in [0, \infty]. \tag{36.390}$$

Démonstration. Si $E(X_1) < \infty$, nous sommes dans le cas de la loi des grands nombres. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$ nous considérons la suite de variables aléatoires

$$X_n^{(N)} = \min(X_n, N). \tag{36.391}$$

Nous avons évidemment $\bar{X}_n^{(N)} \leqslant \bar{X}_n$. Les variables aléatoires $X_n^{(N)}$ étant bornées par N, elles vérifient la loi des grands nombres pour chaque N séparément. Par conséquent nous avons pour chaque N la limite

$$\bar{X}_n^{(N)} \to E(X_1^{(N)}) \tag{36.392}$$

EqbarXNbtoXnubus

Nous supposons que $E(X_1) = \infty$, par conséquent $\lim_{N\to\infty} E(X_1^{(N)}) = \infty$. Soit $\eta > 0$ et choisissons N de telle manière à avoir

$$E(X_1^{(N)}) > \eta + 1. \tag{36.393}$$

La limite (36.392) nous permet de trouver n_0 tel que pour tout $n > n_0$ nous ayons $\bar{X}_n^{(N)} > \eta$. Au final,

$$\eta < \bar{X}_n^{(N)} \leqslant \bar{X}_n, \tag{36.394}$$

ce qui montre que $\bar{X}_n \to \infty$. □

Exemple 36.133.
La loi des grands nombres justifie la pratique courante d'approximer une grandeur physique par la moyenne empirique d'un grand nombre de mesures. △

Exemple 36.134.
Citons ici le dernier paragraphe de *Le mystère de Marie Roget* par Edgar Allan Poe, traduit par Charles Baudelaire[35].

> Rien, par exemple, n'est plus difficile que de convaincre le lecteur non spécialiste que, si un joueur de dés a amené les six deux fois coup sur coup, ce fait est une raison suffisante de parier gros que le troisième coup ne ramènera pas les six. Une opinion de ce genre est généralement rejetée tout d'abord par l'intelligence. On ne comprend pas comment les deux coups déjà joués, et qui sont maintenant complètement enfouis dans le Passé, peuvent avoir de l'influence sur le coup qui n'existe que dans le Futur. La chance pour amener les six semble être précisément ce qu'elle était à n'importe quel moment, c'est-à-dire soumise seulement à l'influence de tous les coups divers que peuvent amener les dés. Et c'est là une réflexion qui semble si parfaitement évidente, que tout effort pour la controverser est plus souvent accueilli par un sourire moqueur que par une condescendance attentive.

Dans le cours de la nouvelle, Edgar Poe cite et utilise la théorie des probabilités avec une justesse inaccoutumée dans la littérature. Mais dans ce paragraphe final, Poe montre de façon la plus formelle qu'il n'a *rien* compris à la loi des grands nombres. △

36.4.2 Théorème central limite

Lemexpznznsurnton

Lemme 36.135.
Soit $z_n \to z$ une suite convergente dans $\mathbb{C}$. Alors

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \to e^z. \tag{36.395}$$

ThoOWodAi

Théorème 36.136.
Si les variables aléatoires X_n sont

(1) indépendantes et identiquement distribuées de loi parente X,

(2) $X_1 \in L^2(\Omega, \mathcal{A})$,

[35] Disponible sur https://fr.wikisource.org/wiki/Le_Mystère_de_Marie_Roget

alors nous notons $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $m = E(X_1)$ *et* $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ *et nous avons*

$$\frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)}} = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0,1). \tag{36.396}$$

Démonstration. Nous allons écrire la démonstration dans le cas de variables aléatoires réelles. La proposition 36.114 dit que la suite X_n converge en loi vers X si et seulement si les fonctions caractéristiques convergent ponctuellement. Nous devons donc prouver, pour chaque[36] $t \in \mathbb{R}$, que

$$\Phi_{\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}}(t) \to \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t). \tag{36.397}$$

Supposons dans un premier temps que $E(X_i) = 0$ et $\sigma(X_i) = 1$. Dans ce cas nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}
\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} &= E\big(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n X_k}\big) && (36.398a)\\
&= \prod_{k=1}^n E\big(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_1}\big) && (36.398b)\\
&= \prod_{k=1}^n \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) && (36.398c)\\
&= \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n. && (36.398d)
\end{aligned}$$

Cette quantité est à priori complexe ; nous ne pouvons donc pas immédiatement passer au logarithme. Nous pouvons par contre utiliser un développement en puissances de t en nous servant de la proposition 36.92 et de l'hypothèse comme quoi $X_1 \in L^2$:

$$\Phi_{X_1}(t) = \Phi_{X_1}(0) + \Phi'_{X_1}(0)t + \Phi''_{X_1}(0)\frac{t^2}{2} + \alpha(t)t^2 \tag{36.399}$$

où α est une fonction qui a la propriété $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$.

En utilisant les hypothèses et la formule de dérivation de la fonction caractéristique,

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_1}(0) &= 1 && (36.400a)\\
\Phi'_{X_1}(0) &= E\big((iX)\big) = 0 && (36.400b)\\
\Phi''_{X_1}(0) &= E(-X^2) = -\mathrm{Var}(X_1) = -1. && (36.400c)
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \underbrace{1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n}}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\frac{t^2}{n}\alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}_{\in\mathbb{C}}, \tag{36.401}$$

de telle sorte que, en considérant une valeur fixée de t,

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{\frac{t^2}{2} + \beta_n}{n}\right)^n \tag{36.402}$$

où $\beta_n = t^2\alpha(t/\sqrt{n})$. Nous avons bien entendu $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$.

Nous pouvons appliquer le lemme 36.135 pour obtenir la limite

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = e^{-t^2/2}. \tag{36.403}$$

La convergence (36.397) est par conséquent prouvée dans le cas où $E(X_i) = 0$ et $\mathrm{Var}(X_i) = 1$.

Considérons maintenant des variables aléatoires avec $E(X_i) = m$ et $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. Elles peuvent être écrites sous la forme

$$X_i = \sigma X'_i + m \tag{36.404}$$

où X'_i est d'espérance nulle et de variance un. Nous avons alors

$$S_n = \sigma\sum_{i=1}^n X'_i + nm, \tag{36.405}$$

[36] Chuck Norris peut *vraiment* le faire pour *chaque* $t \in \mathbb{R}$

et

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S'_n}{\sqrt{n}} \tag{36.406}$$

où $S'_n = \sum_i X'_i$. L'étude de la variable aléatoire

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \tag{36.407}$$

revient donc à celle de $S'_n/\sqrt{n}$ qui vient d'être effectuée. □

36.137.
À propos du théorème central limite 36.136. Si pour une certaine variable aléatoire X on a $E(X) = m$, alors nous n'avons pas forcément $P(X = m + a) = P(X = m - a)$. Est-ce que le théorème central limite permet cependant d'affirmer que dans un certaine mesure nous avons

$$P(\bar{X}_n = m + a) = P(\bar{X}_n = m - a) \tag{36.408}$$

EQooNAGLooKYYWpY

lorsque n est grand ?

Tel quelle, l'équation (36.408) est en général fausse pour chaque n parce qu'il existe des distributions non symétriques. Mais bien entendu les deux membres tendent vers zéro pour $n \to \infty$. Mais cela n'est pas lié à la symétrie de la distribution gaussienne. C'est seulement le fait que la gaussienne n'a pas de masses ponctuelles.

Par contre, il y a effectivement une assurance de symétrie pour $\bar{X}_n$ lorsque $n \to \infty$. Le fait est que $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ où X est une gaussienne. La fonction de répartition de X est continue partout et la proposition 36.118 nous dit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(t). \tag{36.409}$$

Vu que le nombre $P\big(\bar{X}_n \in B(m + a, \delta)\big)$ peut être exprimé avec des sommes et différences F_{X_n}, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\bar{X}_n \in B(m + a, \delta)\big) = P\big(X \in B(m + a, \delta)\big). \tag{36.410}$$

Par symétrie de la gaussienne le membre de droite est égal à $P\big(X \in B(m - a, \delta)\big)$ et nous avons bien

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\bar{X}_n \in B(m + a, \delta)\big) = \lim_{n\to\infty} P\big(\bar{X}_n \in B(m - a, \delta)\big). \tag{36.411}$$

RemRHFDooGbaPYu

Remarque 36.138.
Le théorème central limite s'applique quelle que soit la distribution des variables aléatoires X_i (dans les limites de hypothèses) ; en particulier il ne dit rien sur la moyenne des X_i. Il dit seulement que l'écart de la moyenne « mesurée » à la moyenne « théorique » est une variable aléatoire gaussienne si on a mesuré assez de fois.

Autrement dit, si la durée d'attente à la poste est de 5 minutes, et si j'y vais 2000 fois, alors la probabilité que ma moyenne d'attente soit de 4 minutes est la même que la probabilité qu'elle soit de 6 minutes[37].

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 36.139
La remarque 36.138 est une interprétation personnelle. J'aimerais avoir l'avis de quelqu'un de plus compétent.

Remarque 36.140.
Nous pouvons obtenir la limite (36.403) d'une façon alternative. Nous considérons la détermination du logarithme complexe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$; cela est une fonction analytique (théorème 26.35) vérifiant l'équation

$$e^{\ln(z)} = z \tag{36.412}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et le développement

$$\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}. \tag{36.413}$$

[37] Et en l'occurrence, cette probabilité est nulle parce qu'on est en train de parler de variable aléatoire continue, mais vous voyez l'idée.

En particulier, $\ln(1+z) = z + z\alpha(z)$ où $\lim_{z\to 0}\alpha(z) = 0$. Nous reprenons à l'équation (36.402) en fixant t. Nous avons

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \exp\left[\ln\left(\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t)\right)\right] \tag{36.414a}$$

$$= \exp\left[n\ln\left(1+\frac{-\frac{t^2}{2}-\beta_n}{n}\right)\right] \tag{36.414b}$$

$$= \exp\left[-\frac{t^2}{2}-\beta_n+\big(-\frac{t^2}{2}-\beta_n\big)\alpha\left(\frac{-\frac{t^2}{2}-\beta_n}{n}\right)\right]. \tag{36.414c}$$

À la limite $n\to 0$ nous tombons sur $e^{-t^2/2}$.

Remarque 36.141.
Étant donné que la variable aléatoire

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \tag{36.415}$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$, nous avons la convergence des fonctions de répartition partout où la fonction de répartition de la normale est continue[38] (donc sur tout $\mathbb{R}$). En particulier,

$$\left|P\left(\frac{S_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right) - \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy\right| \to 0. \tag{36.416}$$

Nous avons la borne de **Berry-Esséen** qui donne une estimation de la vitesse de convergence : si $X\in L^3$, alors il existe une constante C, indépendante de x, des X_i et de n telle que

$$\left|P\left(\frac{S_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right) - \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy\right| \leqslant \frac{C\mu_3}{\sigma^3\sqrt{n}} \tag{36.417}$$

où $\mu_3 = E\big(|X_1-m|^3\big)$ est le moment d'ordre 3 de X. La chose à retenir est que la convergence est à la vitesse de $1/\sqrt{n}$.

En dimension $d>1$, nous avons encore un théorème central limite.

THOooADSIooFrWawC

Théorème 36.142.
Si $d>1$, et si nous avons des variables aléatoires X_n à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ avec

(1) les X_n sont indépendantes et identiquement distribuées

(2) les X_n sont dans L^2.

Alors nous notons $X_1 = (X_1^{(1)},\dots,X_1^{(d)})$. Nous avons

$$\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0,\Sigma) \tag{36.418}$$

où Σ est ma matrice de covariance du vecteur aléatoire X_1 :

$$\Sigma = \big(\operatorname{Cov}(X_1^{(1)},\dots,X_1^{(d)})\big)_{i,j=1,\dots,d}. \tag{36.419}$$

36.4.3 Marche aléatoire

Nous considérons un mobile qui se déplace sur l'axe $\mathbb{Z}$. À chaque pas de temps, nous supposons qu'il va faire un pas à gauche avec une probabilité p et un pas à droite avec une probabilité $(1-p)$. Nous nous demandons quel est le mouvement du mobile sur le long terme.

La position S_n du mobile à l'instant n est donnée par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{36.420}$$

où X_i est le pas effectué à l'instant i. Ce sont des variables de Bernoulli indépendantes avec

$$X_i \overset{\mathscr{L}}{=} p\delta_{-1} + (1-p)\delta_1 \tag{36.421}$$

[38] Proposition 36.118.

c'est-à-dire

$$P(X_i = -1) = p \tag{36.422a}$$
$$P(X_i = 1) = 1 - p. \tag{36.422b}$$

Ces variables vérifient les hypothèses de la loi des grands nombres :

(1) elles sont indépendantes et identiquement distribuées,

(2) elles sont intégrables.

Pour le second point, le calcul est

$$\int_\Omega |X_i| dP = \int_{\mathbb{R}} |x| dP_X = \int_{\mathbb{R}} |x|(p\delta_{-1} + (1-p)\delta_1) = |1-p| + |p| = 1. \tag{36.423}$$

Nous avons par conséquent

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s.} E(X_1) = (1-2p) \tag{36.424}$$

et

$$\frac{S_n}{n} \to (1-2p). \tag{36.425}$$

Si $p \neq 1/2$ nous pouvons conclure que

(1) si $p > 1/2$, alors $S_n \xrightarrow{p.s.} -\infty$

(2) si $p < 1/2$, alors $S_n \xrightarrow{p.s.} \infty$.

De plus nous connaissons la vitesse de divergence : elle est linéaire. Le mobile suit essentiellement l'équation $p(n) = (1-2p)n$.

Remarque 36.143.
Cela ne traite pas le cas $p = 1/2$. Dans ce cas, nous pouvons simplement dire que $S_n = o(n)$.

36.5 Les lois usuelles : du blabla

36.5.1 Loi de Bernoulli

36.144.
Nous, nous faisons des math. En math les mots « boules », « hasard », « en remettant dans l'urne » ne sont pas définis. Considérez donc l'ensemble du blabla ci-dessous comme nul et non avenu.

Une expérience de Bernoulli consiste à tirer au hasard un 0 ou un 1 avec une probabilité p de tomber sur 1 et $1-p$ de tomber sur zéro. Il s'agit donc d'une expérience qui réussit ou qui rate.

Le cas typique est une urne avec des boules indiscernables blanches ou noires. La probabilité p est la proportion de blanches dans l'urne (avec remise entre les tirages). Dans ce cas, nous avons l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où Ω représente l'ensemble des boules, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de Ω et P est l'équiprobabilité sur Ω. Une variable aléatoire est une application

$$\begin{aligned} X\colon \Omega &\to \{0,1\} \\ \omega &\mapsto \text{couleur de la boule } \omega. \end{aligned} \tag{36.426}$$

Nous notons $\mathscr{B}(1,p)$ la loi de Bernoulli. Elle a une expression très simple :

$$\mathscr{B}(0,1)\big(\{1\}\big) = p \tag{36.427a}$$
$$\mathscr{B}(0,1)\big(\{0\}\big) = 1 - p \tag{36.427b}$$

Une variable aléatoire réelle est de **Bernoulli** de paramètre p $(0 < p < 1)$ si

$$X\colon \Omega \to \mathbb{R} \tag{36.428}$$

avec $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$. En tant que mesure sur $\mathbb{R}$, nous avons

$$P_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0. \tag{36.429}$$

Une fonction h qui réalise le supremum de la formule (14.468) est par exemple une fonction en escalier qui vaut en x le plus petit entier plus grand ou égal à x. L'espérance d'une loi de Bernoulli est alors

$$E(x) = p. \tag{36.430}$$

Étant donné que la variable aléatoire X prend seulement les valeurs 0 et 1, nous avons pour tout ensemble mesurable B

$$P_{X^2}(B) = P(X^2 \in B) = P(X \in B), \tag{36.431}$$

et par conséquent $P_{X^2} = P_X$ et $E(X^2) = E(X)$. Nous trouvons donc la variance

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p). \tag{36.432}$$ EqVarBern

36.5.2 Loi binomiale

Une expérience binomiale consiste à répéter n expériences de Bernoulli de paramètre p et de compter le nombre de réussites. Une telle expérience peut être réalisée selon la procédure suivante.

Soit une urne contenant N boules dont une proportion p de 1 et $1-p$ de 0. Une expérience binomiale de paramètres n et p consistera à prendre n boules *avec remise* et à compter le nombre de 1 obtenus.

En termes d'espaces probabilisé, nous avons Ω qui est l'ensemble des tuples de taille n à valeurs dans $\{0,1\}$, la tribu $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de Ω, et la probabilité P est l'équiprobabilité :

$$P(\omega) = \frac{1}{N^n} \tag{36.433}$$

si il y a N boules dans l'urne. Nous construisons alors la variable aléatoire

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \tag{36.434}$$

où ω est une suite de taille n de 0 et de 1.

Calculons $P(X=k)$. Il s'agit de considérer tous les sous-ensembles de taille n de Ω contenant exactement k fois 1. Il y a $\binom{n}{k}$ manière de décider lesquelles des n boules seront blanches. Ensuite, chaque boule blanche peut être choisie parmi les m boules disponibles, et chaque boule noire peut être choisie parmi les $(N-m)$ disponibles. Nous avons donc

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \frac{m^k (N-m)^{n-k}}{N^k}. \tag{36.435}$$ EqformunPxkBin

En effet la mesure de probabilité sur Ω est la mesure de comptage renormalisée par le cardinal de Ω qui vaut N^m. Étant donné que $p = m/N$, nous transformons facilement (36.435) en

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{36.436}$$

Une variable aléatoire de loi binomiale étant une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, l'espérance[39] et la variance[40] s'obtiennent en sommant les espérances et variances termes à terme :

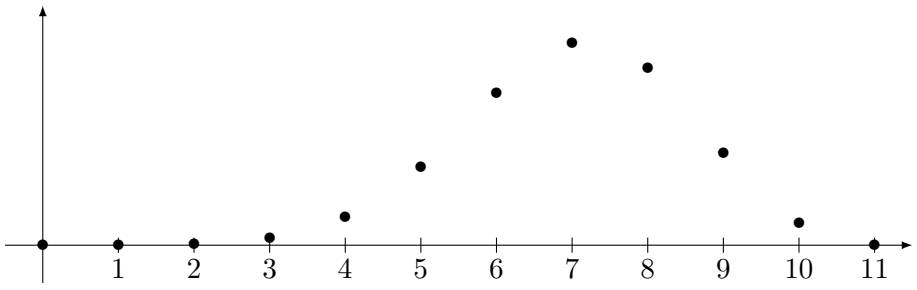
$$E(X) = np \tag{36.437}$$ EqDGbBgrv

et

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = np(1-p) \tag{36.438}$$ EqKLubWlh

en vertu de (36.432).

La loi binomiale lorsque $p = 0.7$ et $n = 10$.



[39] Valable même sans indépendance, proposition 36.47

[40] Lemme 36.44.

36.6 Les lois usuelles

36.6.1 Loi de Bernoulli

DEFooHKZIooBXmNBb

Définition 36.145.
*Une variable aléatoire $X : \Omega \to \{0,1\}$ est de **de Bernoulli** de paramètre $p \in [0,1]$ si $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$.*

PROPooJGAQooSSmybt

Proposition 36.146 ([1]).
Si $X : \Omega \to \{0,1\}$ est une variable aléatoire de Bernoulli, alors

ITEMooOKZQooOmIOJj

(1) $E(X) = p$,

ITEMooAWMOooOGhKzB

(2) $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.

Démonstration. En deux points.

(1) **Pour l'espérance** Nous devons calculer $E(X) = \int_\Omega X(\omega) d\omega$ en utilisant la définition (14.468). La fonction X est elle-même une fonction simple et donc étagée. En posant $A_0 = X^{-1}(\{0\})$, $A_1 = X^{-1}(\{1\})$ et $Z = \Omega \setminus (A_0 \cup A_0)$, la partie Z est de mesure nulle et nous avons

$$X(\omega) = 0 \times \mathbb{1}_{A_0}(\omega) + 1 \times \mathbb{1}_{A_1}(\omega) + f(\omega)\mathbb{1}_Z(\omega) \tag{36.439}$$

où f est une fonction qui n'a aucune importance. Nous avons donc

$$\int_\Omega X = 1 \times P(A_1) = p. \tag{36.440}$$

(2) **Pour la variance** La définition 36.48 nous pousse à faire le calcul suivant :

$$\mathrm{Var}(X) = \|X - E(X)\|_{L^2}^2 = \int_\Omega (X-p)^2 = (-p)^2 P(A_0) + (1-p)^2 P(A_1) = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p). \tag{36.441a}$$

Notez qu'ici nous n'avons pas précisé qu'il y avait aussi potentiellement une partie de mesure nulle.

□

36.6.2 Loi binomiale

DEFooTSYAooZSLIdY

Définition 36.147 ([1]).
*Une variable aléatoire $X : \Omega \to \{0,\dots,n\}$ est **binomiale** de paramètres n et p si il existe n variables aléatoires $Y_i : \Omega \to \{0,1\}$ $(i = 1,\dots,n)$ indépendantes[41] telles que*

$$X = Y_1 + \dots + Y_n. \tag{36.442}$$

PROPooIBZKooYikwjJ

Proposition 36.148 ([1, 863]).
Si $X : \Omega \to \{1,\dots,n\}$ est binomial de paramètres n, p alors

(1) Pour chaque $k = 1,\dots,n$ nous avons

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{36.443}$$

(2) Pour l'espérance :

$$E(X) = np. \tag{36.444}$$

(3) Pour la variance :

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p). \tag{36.445}$$

Démonstration. Soient des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes $(Y_i : \Omega \to \{0,1\})_{i=1,\dots,n}$ telles que $X = Y_1 + \dots + Y_n$.

[41] Je crois que ça implique que $\mathrm{Card}(\Omega) \geqslant 2^n$, mais ce n'est pas important ici.

(1) **Pour $P(X=k)$** Nous considérons l'ensemble $C_k = \{s \in \{0,1\}^n \text{ tel que } \sum_i s_i = k\}$ du lemme 1.382. Pour chaque $s \in C_k$ nous posons

$$\Omega_s = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \forall i, Y_i(\omega) = s_i\}. \tag{36.446}$$

Nous avons $P(X=k) = \sum_{s\in C_k} P(\Omega_s)$. Étant donné que les variables aléatoires Y_i sont indépendantes et que

$$P(Y_i = s_i) = \begin{cases} p & \text{si } s_i = 1 \\ 1-p & \text{si } s_i = 0, \end{cases} \tag{36.447}$$

nous avons

$$P(\Omega_s) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = s_i) = p^k(1-p)^{n-k}. \tag{36.448}$$

Pour le voir, vous pouvez couper le produit en deux parties : les facteurs avec $s_i = 1$ et ceux avec $s_i = 0$. Enfin nous pouvons faire le calcul

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{s\in C_k} P(\Omega_s) && \text{(36.449a)} \\ &= \sum_{s\in C_k} p^k(1-p)^{n-k} && \text{(36.449b)} \\ &= \text{Card}(C_k)p^k(1-p)^{n-k} && \text{(36.449c)} \\ &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} && \text{lem. 1.382.} \quad \text{(36.449d)} \end{aligned}$$

(2) **Pour l'espérance** Par additivité de l'intégrale,

$$E(X) = \int_\Omega X = \int_\Omega \sum_i Y_i = \sum_i \int_\Omega Y_i = \sum_i E(Y_i). \tag{36.450}$$

Vu que Y_i est de Bernoulli nous avons $E(Y_i) = p$ par 36.146(1). Nous avons donc $E(X) = np$.

(3) **Pour la variance** Les variables aléatoires Y_i étant indépendantes, le lemme 36.44 permet de juste les additionner. La valeur de $\text{Var}(Y_i) = p(1-p)$ est donnée dans le lemme 36.146(2). Donc $\text{Var}(X) = np(1-p)$.

□

36.6.3 Loi multinomiale

La loi multinomiale $\mathscr{M}(n;k;p_1,\dots,p_k)$ consiste à effectuer n épreuves d'une démarche aléatoire qui peut avoir k issues différentes avec probabilités $p_1,\dots,p_k$. Les variables aléatoires multinomiales sont N_i avec les contraintes

$$\sum_{i=1}^{k} N_i = n \tag{36.451a}$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1. \tag{36.451b}$$

La fonction de probabilité multinomiale est

$$P(N_1 = n_1,\dots,N_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\dots n_k!}p_1^{n_1}\dots p_k^{n_k}. \tag{36.452}$$

Chacune des N_i est une binomiale de probabilité p_i.

36.6.4 Loi géométrique

Soit (X_n) une suite indépendante et identiquement distribuée de lois de Bernoulli de paramètre p. Alors la variable aléatoire

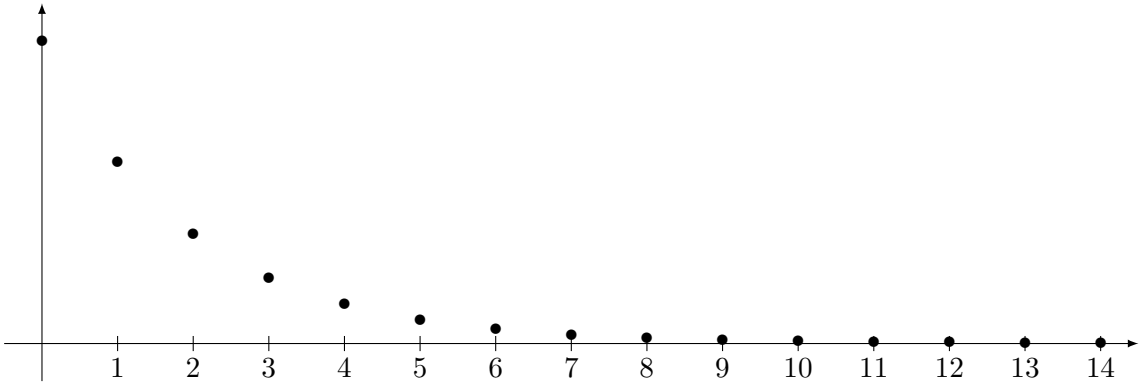
$$Z = \inf\{n \geqslant 1 \text{ tel que } X_n = 1\} \tag{36.453}$$

est une loi géométrique de paramètre p.

La loi géométrique compte donc le nombre d'expériences de Bernoulli à effectuer avant que le premier succès soit au rendez-vous. Nous avons

$$P(Z = k) = P(X_k = 1)P(X_1, \dots, X_{k-1} = 0) = p(1-p)^{k-1} \tag{36.454}$$

La loi géométrique de paramètre $p = 0.2$.



Note : si p est trop grand, on ne voit vite plus rien parce que la probabilité d'attendre longtemps est vite très faible.

36.6.5 Loi de Poisson

DEFooUWKHooUFKlcr

Définition 36.149 (Loi de Poisson)**.**
*Une variable aléatoire Z suit une **loi de Poisson** de paramètre λ, notée $\mathscr{P}(\lambda)$ si*

$$P(Z = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \tag{36.455}$$

EQooLGLUooLXohWe

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La loi de Poisson est une loi de probabilité discrète qui décrit le comportement du nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps fixé, si ces évènements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'évènement précédent.

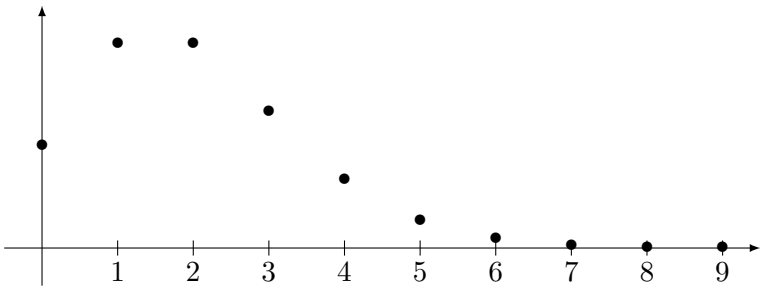
Si un événement se produit en moyenne p fois par seconde, la probabilité d'observer l'événement k fois durant n secondes est donnée par $P(Z = k)$ où Z est une loi de Poisson de paramètre $\lambda = pn$.

ThojDZjuj

Théorème 36.150 (Wikipédia)**.**
L'espérance et la variance d'une variable aléatoire de Poisson sont λ :

$$E(X) = \lambda \tag{36.456a}$$
$$\text{Var}(X) = \lambda. \tag{36.456b}$$

La loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.



36.6.6 Loi exponentielle

La loi exponentielle représente le temps qu'il faut attendre pour qu'une particule se désintègre si elle a en permanence une probabilité[42] λdt de se désintégrer entre t et $t + dt$. L'espérance est donc $1/\lambda$.

Il se passe donc en moyenne λ événements par seconde. La proposition 36.161 nous montrera que le nombre d'événements se produisant en une seconde suit une loi de Poisson de paramètre λ.

[42] Plutôt une densité qu'une probabilité. Vu que λ est fini et que dt est infinitésimal, λdt est infinitésimal, et si on veut c'est un bon ordre de grandeur pour la probabilité qu'un événement arrive entre t et $t + dt$.

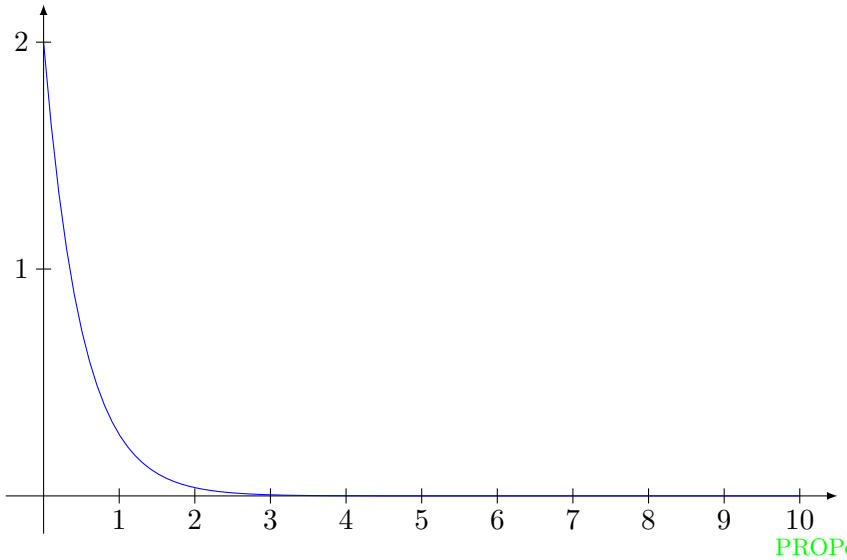
DEFooTSFNooULWNHY

Définition 36.151 (Loi exponentielle)**.**
*La **loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathscr{E}(\lambda)$ est la mesure de probabilité sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big)$ ayant pour densité*[43] *l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{36.457}$$

Voir la définition 36.8 pour ce qu'est la loi d'une variable aléatoire.

Densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.



PROPooKLJIooUFfGwa

Proposition 36.152 ([1])**.**
Soit une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Si pour tout $t > 0$ nous avons

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}, \tag{36.458}$$

alors X suit une loi exponentielle.

PROPooXRMWooYjPMWN

Proposition 36.153 ([1])**.**
Soient des variables aléatoires exponentielles X et Y sur Ω. Si pour tout t et u nous avons

$$P(X > t, Y > u) = P(X > t)P(Y > u), \tag{36.459}$$

alors X et Y sont indépendantes.

PROPooBZREooUTvonZ

Proposition 36.154 (Somme de variables aléatoires exponentielles indépendantes[864])**.**
Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont indépendantes et suivent une même loi exponentielle de paramètre λ, alors la densité de la somme $\sum_{k=1}^{n} X_k$ est

$$\begin{aligned} h_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{(\lambda t)^{n-1} \lambda e^{-\lambda t}}{(n-1)!} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{36.460}$$

EQooSCJHooUWxrgs

Démonstration. Nous y allons par récurrence sur n en commençant avec $n = 1$. Pour $n = 1$, il suffit de remarquer que la formule (36.460) se réduit à la densité d'une exponentielle :

$$\begin{aligned} h_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{36.461}$$

La proposition 36.42 dit que la densité de la somme sera le produit de convolution, et le lemme 27.80 nous assure que c'est commutatif :

$$h_{n+1}(t) = (h_n * h_1)(t) = (h_1 * h_n)(t). \tag{36.462}$$

[43] Densité, définition 36.5.

Pour $t \geqslant 0$, nous avons le calcul suivant :

$$h_{n+1}(t) = \int_{\mathbb{R}} h_1(t-x)h_n(x)dx \tag{36.463a}$$
$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-x)} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda x} \tag{36.463b}$$
$$= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\int_0^t x^{n-1}dx \tag{36.463c}$$
$$= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\frac{t^n}{n}, \tag{36.463d}$$

qui est bien la valeur attendue dans (36.460) pour $t \geqslant 0$.

Si $t < 0$, alors nous avons

$$h_{n+1}(t) = \int_{\mathbb{R}} h_1(t-x)h_n(x)dx. \tag{36.464}$$

Nous avons $h_1(t-x) \neq 0$ seulement sur $t \geqslant x$. Et nous avons $h_n(x)$ seulement si $x \geqslant 0$. Bref, l'intégrale se fait sur un ensemble vide, et $h_{n+1}(t) = 0$, comme il fallait. □

PropTxGcWn

Proposition 36.155.
Soit $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$. La fonction caractéristique est donnée par

EQooMDJFooKhZkIo

$$E(e^{itX}) = \frac{\lambda}{\lambda - it}. \tag{36.465}$$

L'espérance et la variance sont données par

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{36.466}$$

Démonstration. Pour la fonction caractéristique,

$$E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)dx \tag{36.467a}$$
$$= \lambda\int_0^{\infty} e^{x(-\lambda+it)}dx \tag{36.467b}$$
$$= \lim_{A\to\infty}\left[\frac{e^{x(-\lambda+it)}}{it-\lambda}\right]_{x=0}^{x=A} \tag{36.467c}$$
$$= \lambda\lim_{A\to\infty}\frac{e^{A(it-\lambda)}}{it-\lambda} - \frac{\lambda}{it-\lambda}. \tag{36.467d}$$

Le premier terme est nul parce que si on prend la norme,

$$\left|\frac{e^{A(-\lambda+it)}}{-\lambda+it}\right| = \frac{e^{-\lambda A}}{|it-\lambda|} \to 0. \tag{36.468}$$

Cela prouve la formule (36.465).

En ce qui concerne l'espérance nous faisons le calcul suivant :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^+} xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}. \tag{36.469}$$

Pour la variance, nous utilisons la formule (36.108). Nous avons

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)x = \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}. \tag{36.470}$$

Donc $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$. □

La loi exponentielle est une loi **sans mémoire** en ce sens que

$$P(X > x + y | X > y) = P(X > x). \tag{36.471}$$

En effet nous utilisons la règle de la probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{36.472}$$

Ici,

$$P(X > x + y|X > y) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > y)} = e^{-\lambda x}. \tag{36.473}$$

La proposition suivante montre que la loi exponentielle est à peu près la seule à être sans mémoire. D'où son importance dans l'étude des machines dont les pièces ne subissent pas d'usure.

PropREXaIBg

Proposition 36.156.
Soit X, une variable aléatoire admettant une densité continue f par rapport à la mesure de Lebesgue. Si elle est sans mémoire, alors elle est exponentielle.

Démonstration. Nous posons $\varphi(x) = P(X \geqslant x)$. Cela est la fonction de répartition de X (à part que cette dernière est $1 - \varphi(x)$ mais c'est pas grave), et est donnée par

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x f(t)dt. \tag{36.474}$$

Cette dernière intégrale vérifie les hypothèses du théorème 36.156, de telle sorte que φ soit une fonction dérivable et $\varphi'(x) = f(x)$.

D'autre part en utilisant la définition de la probabilité conditionnelle la propriété de ne pas avoir de mémoire donne

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) \tag{36.475}$$

et de plus $\varphi(0) = 0$. Calculons la dérivée de φ :

$$\varphi'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\varphi(x + \epsilon) - \varphi(x)}{\epsilon} = \varphi(x) \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\varphi(\epsilon) - 1}{\epsilon} = \varphi(x)\varphi'(0). \tag{36.476}$$

Donc φ vérifie l'équation différentielle de l'exponentielle.

□

Exemple 36.157.
Une machine a une durée de vie représentée par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit T_y la variable aléatoire qui représente le temps de vie restant sachant que la machine a déjà vécu un temps y. Nous voulons trouver la fonction de répartition de T_y. Nous avons

$$P(T_y > x) = P(X > x + y|X > y) = P(X > x) = e^{-\lambda x}. \tag{36.477}$$

Dans ce cas, la loi de T_y ne dépend pas de y. Cela signifie que la machine ne vieillit pas et surtout que le modèle n'est pas réaliste. △

Proposition 36.158.
Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{E}(\mu)$ sont indépendantes, alors

(1) $P(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

(2) $P(X > Y) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

(3) $P(X = Y) = 0$

(4) $\min(X, Y) \sim \mathscr{E}(\lambda + \mu)$.

De plus les variables aléatoires exponentielles ont une propriété d'absence de mémoire :

$$P(X > t + s|X > s) = P(X > t) = e^{-\lambda t}. \tag{36.478}$$

Démonstration. Étant donné que X et Y sont indépendantes, la densité conjointe est le produit des densités (36.27). Nous avons donc

$$P(X > Y) = \int_D \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dxdy \tag{36.479}$$

où D est le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x, y > 0, x > y\}$. Nous avons donc

$$P(X > Y) = \lambda\mu \int_0^\infty dx \int_0^x dy e^{-\lambda x} e^{-\mu y} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \tag{36.480}$$

```
sage: var('a,b')
(a, b)
sage: f(x,y)=exp(-a*x)*exp(-b*y)
sage: assume(a>0)
sage: assume(b>0)
sage: a*b*f.integrate(y,0,x).integrate(x,0,oo)
(x, y) |--> a*b/(a^2 + a*b)
```

Pour trouver la loi de $\min(X,Y)$, nous écrivons

$$\begin{aligned}
P\big(\min(X,Y)>t\big) &= P(X>t,Y>t) && && (36.481a)\\
&= P(X>t)P(Y>t) && \text{par indépendance} && (36.481b)\\
&= \big(1-F_X(t)\big)\big(1-F_Y(t)\big) && && (36.481c)\\
&= e^{-(\lambda+\mu)t}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(t) && && (36.481d)\\
&= 1-F_Z(t) && && (36.481e)
\end{aligned}$$

où $Z\sim\mathscr{E}(\lambda+\mu)$. □

36.6.7 Approximation de la binomiale par une Poisson

Proposition 36.159.
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires avec $X_n\sim\mathscr{B}(n,p_n)$ telle que np_n converge vers une constante $\lambda>0$. Alors $X_n\xrightarrow{\mathscr{L}}\mathscr{P}(\lambda)$.

Démonstration. Commençons par écrire la loi binomiale sous une forme plus adaptée au passage à la limite :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}p^k(1-p)^{n-k}. \tag{36.482}$$

Le produit au numérateur contient k termes dans lesquels nous mettons n en évidence. Nous trouvons

$$P(X=k)=\frac{(np)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}p^k(1-p)^{n-k}. \tag{36.483}$$

Lorsque nous passons à la limite, tous les facteurs du type $1-l/n$ tendent vers 1 ainsi que $(1-p_n)^{n-k}$. Les facteurs dont la limite n'est pas 1 sont donc

$$P(X_n=k)\simeq\frac{(np_n)^k}{k!}(1-p_n)^k. \tag{36.484}$$

Nous avons

$$\lim_{n\to\infty}(1-p_n)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n=e^{-\lambda}. \tag{36.485}$$

La thèse est alors obtenue en remettant les morceaux ensemble. □

Exemple 36.160.
Considérons un serveur informatique qui reçoit des requêtes. Toutes les 10^{-3} s il reçoit une requête avec une probabilité $p=0.05$. La variable aléatoire qui consiste à donner le nombre de requêtes effectivement effectuées en une seconde suit une loi binomiale $\mathscr{B}(1000,p)$.

Déterminons la probabilité que le serveur reçoive 20 requêtes en une seconde. Nous approximons $\mathscr{B}(1000,0.05)$ par $\mathscr{P}(50)$, et la réponse est

$$e^{-50}\frac{50^{20}}{20!}\simeq 7\cdot 10^{-7}. \tag{36.486}$$

△

36.6.8 Loi de Poisson et loi exponentielle

subsecPoissonetexpo

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. En utilisant le produit de convolution, nous pouvons trouver la fonction de densité de la somme (voir point 36.2.7). Commençons avec deux variables aléatoires X et Y. Les densités sont

$$\begin{aligned}
f_X(x)&=\mathbb{1}_{[x\geqslant 0]}\lambda e^{-\lambda x} && (36.487a)\\
f_Y(y)&=\mathbb{1}_{[y\geqslant 0]}\lambda e^{-\lambda y}, && (36.487b)
\end{aligned}$$

et la densité conjointe est alors

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-t\geqslant 0]} \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mathbb{1}_{[t\geqslant 0]} \lambda e^{-\lambda t} dt \tag{36.488a}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x 1\, dt \tag{36.488b}$$

$$= x\lambda^2 e^{-\lambda x}. \tag{36.488c}$$

Par récurrence si $S = X_1 + \cdots + X_n$ nous trouvons

$$f_S(x) = x^{n-1}\lambda^n e^{-\lambda x}. \tag{36.489}$$

PropGMntiy

Proposition 36.161 ([865]).
Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Nous considérons la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$ nous considérons

$$N_t = \max\{n \geqslant 1 \text{ tel que } \sum_{i=1}^n T_i \leqslant t\}. \tag{36.490}$$

Alors $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$.

Démonstration. Ce que nous devons calculer est

$$P(N_t = k) = P(S_n \leqslant t \leqslant S_{n+1}). \tag{36.491}$$

Nous introduisons la variable aléatoire $V_{n=1} = (X_1, \ldots, X_{n+1})$ ainsi que l'ensemble

$$A_{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } x_1 + \cdots + x_n \leqslant t \leqslant x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}\}. \tag{36.492}$$

Le problème est donc de calculer

$$P(S_n \leqslant t \leqslant S_{n+1}) = P(V_{n+1} \in A_{n+1}^+) = \int_{A_{n+1}^+} f_{n+1}(x)dx \tag{36.493}$$

où A_{n+1}^+ est la partie de A_{n+1} dans laquelle $x_i \geqslant 0$ pour tout i et f_{n+1} est la fonction de densité conjointe des variables aléatoires X_i. Nous effectuons le changement de variables

$$s_k = \sum_{i\leqslant k} x_i \tag{36.494a}$$

$$x_k = s_k - s_{k-1} \tag{36.494b}$$

dont le déterminant vaut 1. D'autre part par indépendance des variables aléatoires X_i, la fonction de partition jointe f_{n+1} s'exprime sous la forme

$$f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_{n+1}}(x_{n+1}) \tag{36.495a}$$

$$= \lambda^{n+1} e^{-\lambda(x_1+\cdots+x_{n+1})} \tag{36.495b}$$

$$= \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}}. \tag{36.495c}$$

En ce qui concerne les bornes de l'intégrale dans les variables s_i, nous voulons que tous les x_i soient positifs, par conséquent $s_1 \geqslant 0$ et ensuite l'équation $x_k = s_k - s_{k-1}$ demande $s_k \geqslant s_{k-1}$. Les bornes sont donc données par l'ensemble

$$0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant t \leqslant s_{n+1}, \tag{36.496}$$

c'est-à-dire $B_n \times]t, \infty[$ où

$$B_n = \{(s_1, \ldots, s_n) \text{ tel que } 0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant t\}. \tag{36.497}$$

Le théorème de Fubini nous permet de décomposer l'intégrale :

$$P(S_n \leqslant t \leqslant S_{n+1}) = \int_{B_n\times]t,\infty[} \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}} ds_1 \ldots ds_{n+1} \tag{36.498a}$$

$$= \lambda^{n+1} \left(\int_{B_n} ds_1 \ldots ds_n \right) \underbrace{\left(\int_t^\infty e^{-\lambda s_{n+1}} ds_{n+1} \right)}_{=\lambda^{-1}e^{-\lambda t}} \tag{36.498b}$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda t} \operatorname{Vol}(B_n) \tag{36.498c}$$

où $\mathrm{Vol}(B_n)$ est le volume de B_n qui reste à calculer. L'ensemble $C^n = [0,t]^n$ se décompose en cellules disjointes (à ensemble de mesure nulle près) de la forme

$$C_\sigma = \{0 \leqslant s_{\sigma(1)} \leqslant s_{\sigma(2)} \leqslant \dots \leqslant s_{\sigma(n)} \leqslant t\} \tag{36.499}$$

pour chaque permutation $\sigma \in S_n$. Il y a exactement $n!$ telles cellules dans C^n. Par conséquent

$$t^n = \mathrm{Vol}(C^n) = n!\,\mathrm{Vol}(C_\sigma) = n!\,\mathrm{Vol}(B_n) \tag{36.500}$$

et $\mathrm{Vol}(B_n) = \frac{t^n}{n!}$. Finalement nous avons

$$P(N_t = n) = P(S_n \leqslant t \leqslant S_{n+1}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(\lambda t)}. \tag{36.501}$$

□

36.6.9 Loi normale

La loi normale de paramètres m et $\sigma > 0$, notée $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$ est la loi donnée par la densité

$$\gamma_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]. \tag{36.502}$$

Proposition 36.162.
Si la variable aléatoire réelle X suit une loi normale $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$, alors nous avons $E(X) = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

Démonstration. L'espérance d'une variable aléatoire se calcule à partir de la formule (36.297) :

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] dx \tag{36.503a}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma \int_{\mathbb{R}} (\sigma u + m) e^{-u^2/2} \tag{36.503b}$$

où nous avons effectué le changement de variable $u = (x-m)/\sigma$. Nous utilisons ensuite l'intégrale remarquable

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}. \tag{36.504}$$

En ce qui concerne la variance, nous avons le même genre de calculs. □

La **loi normale réduite** est la densité

$$\gamma(x) = \gamma_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{36.505}$$

La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$ si et seulement si la variable aléatoire $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale réduite $\mathscr{N}(0,1)$.

PropFnCaractNorm

Proposition 36.163.
La fonction caractéristique de la distribution normale $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$ est

$$\Phi_{\mathscr{N}(m,\sigma^2)}(t) = \exp\left(itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \tag{36.506}$$

Démonstration. En suivant la formule (36.268), l'intégrale à calculer est

$$\Phi_{\mathscr{N}(m,\sigma^2)}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx. \tag{36.507}$$

Nous reconnaissons une transformée de Fourier. Afin de la calculer sans encombres, nous passons par les fonctions intermédiaires suivantes :

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ h(x) &= g\left(\frac{x}{\sigma}\right) \\ k(x) &= h(x-m). \end{aligned} \tag{36.508}$$

La fonction caractéristique que nous cherchons est $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\hat{k}(t)$. Les formules liées à la transformée de Fourier nous donnent

$$\hat{k}(t) = \hat{h}(t)e^{itm} \tag{36.509a}$$
$$\hat{h}(t) = \sigma\hat{g}(\sigma t) \tag{36.509b}$$
$$\hat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{2\pi}e^{-t^2/2}. \tag{36.509c}$$

Attention : l'intégrale à calculer est une transformée de Fourier *inverse*, d'où la formule (36.509a) qui a un signe de différence avec la formule usuelle. En recombinant toutes ces expressions nous trouvons

$$\Phi_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)} = e^{-\sigma^2t^2/2}e^{itm}, \tag{36.510}$$

ce qu'il nous fallait. □

Lemme 36.164.
Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors l'espérance de $X = e^{\beta Z}$ est

$$E(e^{\beta Z}) = e^{\beta^2/2}. \tag{36.511}$$

Démonstration. L'espérance se calcule en remarquant que $x^2 - 2\beta x = (x-\beta)^2 - \beta^2$:

$$E(e^{\beta Z}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x}e^{-x^2/2}dx \tag{36.512a}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-\beta)^2}e^{\beta^2/2} \tag{36.512b}$$
$$= \frac{e^{\beta^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}dy \tag{36.512c}$$
$$= e^{\beta^2/2}. \tag{36.512d}$$

□

36.6.10 Vecteurs gaussiens

Source : [487, 866].

Définition 36.165.
*Un vecteur aléatoire $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ est un **vecteur gaussien** si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont des variables aléatoires normales. En d'autres termes, X est un vecteur gaussien si pour tout vecteur u, la variable aléatoire $u \cdot X$ est gaussienne.*

Le vecteur moyenne d'un vecteur gaussien est $E(X) = \big(E(X_1), \dots, E(X_n)\big)$ et sa matrice de **variance-covariance** est la matrice

$$K_X = \mathrm{Var}(X) = E\Big[\big(X - E(X)\big) \otimes \big(X - E(X)\big)\Big] \tag{36.513}$$

où l'opération $\otimes$ est celle introduite autour de l'équation (10.796). Cela n'est rien d'autre que la matrice de covariance de la variable aléatoire $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$.

Lemme 36.166.
Si les variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes, alors le vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien.

Démonstration. Nous devons montrer que si X et Y sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, alors $X + Y$ est encore gaussienne. L'indépendance nous assure les égalités suivantes pour la fonction caractéristique :

$$\Phi_{X+Y}(t) = E\big(e^{it(X+Y)}\big) = E\big(e^{itX}\big)E\big(e^{itY}\big). \tag{36.514}$$

Dans le cas où X et Y sont gaussiens nous trouvons

$$\Phi_{X+Y}(t) = \exp\left(im_1t - \frac{\sigma_1^2t^2}{2}\right)\exp\left(im_2t - \frac{\sigma_2^2t^2}{2}\right) = \exp\left(i(m_1+m_2)t - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}\right). \tag{36.515}$$

Étant donné que la loi d'une variable aléatoire est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique (théorème 36.94), nous déduisons que $X + Y$ est une normale de moyenne $m_1 + m_2$ et de variance $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. □

Propfmzuol

Proposition 36.167.
La fonction caractéristique d'un vecteur gaussien est donnée par

$$\Phi_X(u) = \exp\left(iu \cdot E(X) - \frac{1}{2}u \cdot K_X u\right) \tag{36.516}$$

où K_X est la matrice de covariance de X.

Démonstration. Nous considérons la variable aléatoire réelle gaussienne $u \cdot X$. Son espérance $m = E(u \cdot X) = u \cdot E(X)$. Nous commençons par établir la formule suivante :

$$u^t K_X u = u \cdot K_X u = E\Big[\big([X - E(X)] \cdot u\big)^2\Big]. \tag{36.517}$$

Utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\sum_{kl} E(A_{kl})u_k u_l = \sum_{kl} E(A_{kl}u_k u_l), \tag{36.518}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}
K_X(u,u) &= E\Big([X - E(X)] \otimes [X - E(X)]\Big)(u,u) && \text{(36.519a)}\\
&= E\Big(\big([X - E(X)] \otimes [X - E(X)]\big)(u,u)\Big) && \text{(36.519b)}\\
&= E\Big(\big([X - E(X)] \cdot u\big)\big([X - E(X)] \cdot u\big)\Big) && \text{(36.519c)}\\
&= E\left(\big([X - E(X)] \cdot u\big)^2\right). && \text{(36.519d)}
\end{aligned}$$

Par la linéarité du produit scalaire et de l'espérance,

$$[X - E(X)] \cdot u = u \cdot X - E(u \cdot X), \tag{36.520}$$

ce qui nous ramène à la variable aléatoire $u \cdot X$. Nous avons alors

$$K_X(u,u) = E\left[\big([X - E(X)] \cdot u\big)^2\right] = \mathrm{Var}(u \cdot X). \tag{36.521a}$$

Nous avons donc obtenu une forme pour la variance de la variable aléatoire $u \cdot X$. Étant donné que $u \cdot X$ est gaussienne de moyenne $m = u \cdot E(X)$ et de variance $\sigma^2 = K_X(u,u)$, nous avons

$$\Phi_{u \cdot X}(t) = \exp\big(itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\big). \tag{36.522}$$

EqJJftOX

Par ailleurs nous avons $\Phi_X(u) = \Phi_{u \cdot X}(1)$ parce que

$$\Phi_X(u) = E\big(e^{iu \cdot X}\big) = \Phi_{u \cdot X}(1). \tag{36.523}$$

En utilisant la forme (36.522) pour $\Phi_{u \cdot X}$ nous trouvons

$$\Phi_X(u) = \Phi_{u \cdot X}(1) = \exp\big(im - \frac{1}{2}\sigma^2\big) = \exp\Big(iE(u \cdot X) - \frac{1}{2}u \cdot K_X u\Big). \tag{36.524}$$

□

ThoPRkxPdQ

Théorème 36.168.
Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$, un vecteur gaussien. Les composantes sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.

Démonstration. Nous savons que les variables aléatoires indépendantes sont non corrélées. Nous devons donc surtout prouver le contraire. Le fait que les variables aléatoires X_i soient non corrélées signifie que la matrice de covariance est

$$K_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_d^2 \end{pmatrix} \tag{36.525}$$

où $\sigma_k^2 = \text{Var}(X_k)$. Notons $m_k = E(X_k)$. Si $u \in \mathbb{R}^d$, nous avons en vertu de la proposition 36.167 que

$$\Phi_X(u) = \exp\Big(i(u_1m_1 + \cdots + u_dm_d) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2u_1^2 + \cdots + \sigma_d^2u_d^2)\Big) \tag{36.526a}$$
$$= \exp\big(iu_1m_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2u_1^2\big)\ldots\exp\big(iu_dm_d - \frac{1}{2}\sigma_d^2u_d^2\big) \tag{36.526b}$$
$$= \Phi_{X_1}(u_1)\ldots\Phi_{X_d}(u_d). \tag{36.526c}$$

Les variables aléatoires X_i sont donc indépendantes parce que la fonction caractéristique se factorise. □

Exemple 36.169.
Nous donnons à présent un exemple de deux variables aléatoires gaussiennes qui ne forment pas un vecteur gaussien. Pour ce faire nous devons chercher des variables aléatoires non indépendantes. Soit $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et ϵ une variable aléatoire (indépendante de Y) donnée par $P(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}$, $P(\epsilon = 1) = \frac{1}{2}$. Nous considérons le vecteur $(Y, \epsilon Y)$.

D'abord montrons que ϵY est une variable aléatoire gaussienne. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. Nous avons

$$P(\epsilon Y \in A) = P(\epsilon = 1, Y \in A) + P(\epsilon = -1, -Y \in A). \tag{36.527}$$

Par indépendance et par symétrie de Y[44] nous trouvons

$$P(\epsilon Y \in A) = P(\epsilon = 1)P(Y \in A) + P(\epsilon = -1)P(-Y \in A) \tag{36.528a}$$
$$= \frac{1}{2}P(Y \in A) + \frac{1}{2}P(-Y \in A) \tag{36.528b}$$
$$= P(Y \in A). \tag{36.528c}$$

Nous avons donc $Y \sim \epsilon Y$, et donc ϵY est gaussienne.

En ce qui concerne la covariance, nous savons que $E(Y) = E(\epsilon) = 0$, donc

$$\text{Cov}(Y, \epsilon Y) = E(Y \cdot \epsilon Y) = E(\epsilon Y^2) = E(\epsilon)E(Y^2) = 0. \tag{36.529}$$

Note : $E(Y^2) = 1$.

Les variables aléatoires Y et ϵY ne sont pas indépendantes. En effet si elles l'étaient, Y serait aussi indépendante de $(\epsilon Y)^2 = Y^2$, alors que Y et Y^2 ne sont pas indépendantes. Donc $X = (Y, \epsilon Y)$ n'est pas un vecteur gaussien. △

THOooLRZNooFXWwqy

Théorème 36.170 ([487]).
Soit $m \in \mathbb{R}^d$ et $K \in \mathbb{M}(d, \mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive. Alors il existe un vecteur gaussien de moyenne m et de matrice de covariance K.

Démonstration. Nous effectuons la preuve avec $m = 0$[45]. Nous choisissons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^r, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^r))$ où r est le rang de K muni de la probabilité de densité

$$\gamma(u) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}}\exp\big(-\frac{1}{2}\|u\|^2\big). \tag{36.530}$$

EqqzQZiQ

Nous considérons la variable aléatoire

$$\begin{aligned} Y_0 \colon \Omega &\to \mathbb{R}^r \\ u &\mapsto u. \end{aligned} \tag{36.531}$$

C'est une variable aléatoire gaussienne de loi $P_{Y_0} = \gamma\lambda_r$ où λ_r est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^r$. Sa densité (36.530) s'écrit comme le produit de r gaussiennes indépendantes ; sa matrice de covariance est donc $\mathbb{1}_{r\times r}$.

Étant donné que K est symétrique et positive, il existe une matrice $d \times r$ telle que $K = AA^t$. Pour voir cela, remarquons qu'il existe une matrice $d \times d$ qui fait le travail. En effet K se diagonalise par une orthogonale (théorème 8.225) :

$$K = ADA^t = A\sqrt{D}\sqrt{D}A^t \tag{36.532}$$

où D est une matrice diagonale contenant $d-r$ zéros et $\sqrt{D}$ est la matrice que l'on imagine. Donc la matrice $L = A\sqrt{D}$ est une matrice telle que $LL^t = K$. Maintenant, étant donné que les $d-r$ dernières lignes de D sont vides, les $d-r$ dernières lignes de L n'ont pas d'importance et peuvent être choisies nulles, voire même ne pas exister. La matrice $A \in \mathbb{M}(d \times r, \mathbb{R})$ qui réalise $AA^t = K$ est la « troncature » de L à ses r premières lignes.

[44] C'est-à-dire que $P(Y \in A) = P(Y \in -A) = P(-Y \in A)$.
[45] À mon avis le cas $m \neq 0$ se déduit alors facilement. Écrivez-moi pour me donner la preuve quand vous l'avez.

Nous considérons la variable aléatoire $Y = AY_0 : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Étant donné que AY_0 est une transformation linéaire d'un vecteur gaussien, c'est un vecteur gaussien. Nous avons encore $m(Y) = 0$ et

$$\text{Var}(Y) = E(Y \otimes Y) = E\big((AY_0) \otimes (AY_0)\big) = AE(Y_0 \otimes Y_0)A^t = AA^t = K \tag{36.533}$$

parce que $E(Y_0 \otimes Y_0) = \mathbb{1}$. Nous avons utilisé les formules du produit tensoriel introduit en (10.796), et en particulier la formule (10.799). □

Lorsqu'une matrice symétrique et positive K est donnée, nous avons créé un vecteur gaussien de covariance K en créant $X = AY$ où Y est le vecteur gaussien « le plus simple » et où A est donnée par $AA^t = K$. La proposition suivante montre l'inverse : un vecteur gaussien X peut se réduire au vecteur gaussien « le plus simple » en utilisant la transformation $Y = A^{-1}X$ où A est encore donnée par $AA^t = K$. Ce résultat nous permettra de voir les vecteurs gaussiens généraux comme des « changements de coordonnées » par rapport au vecteur gaussien simple $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ avec $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

PropGacmRi

Proposition 36.171.
Soit $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ le vecteur gaussien formé des variables aléatoires indépendantes $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Soit K une matrice symétrique et positive et la matrice A telle que $AA^t = K$. Alors le vecteur $X = AY$ est gaussien de covariance K.

Démonstration. Nous montrons que la covariance de $X = AY$ est donnée par K. Nous avons

$$\begin{aligned} K_X &= E\big([X - E(X)] \otimes [X - E(X)]\big) && \text{(36.534a)}\\ &= E\big(A(Y - E(Y)) \otimes A(Y - E(Y))\big) && \text{(36.534b)}\\ &= E\Big(A\big([Y - E(Y)] \otimes [Y - E(Y)]\big)A^t\Big) && \text{(36.534c)}\\ &= E(AA^t) && \text{(36.534d)}\\ &= K. && \text{(36.534e)} \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le lemme 10.272 ainsi que le fait que

$$[Y - E(Y)] \otimes [Y - E(Y)] = K_Y = \mathbb{1}. \tag{36.535}$$

Notons que $E(Y) = 0$, mais cela ne joue pas ici. □

Théorème 36.172.
Un vecteur gaussien $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si sa matrice de covariance est inversible. Dans ce cas nous avons la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{|\det(K_X)|}} \exp\left(-\frac{1}{2}[X - E(X)] \cdot K_X^{-1}[X - E(X)]\right). \tag{36.536}$$

EqzulwmY

Démonstration. Nous supposons que $E(X) = 0$. En utilisant la proposition 36.171, nous posons $X = AY$ où Y est un vecteur gaussien $Y \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{1})$ et $AA^t = K_X$. Si K n'est pas inversible, alors A n'est pas inversible non plus. Notons $r < d$ le rang de A. Étant donné que $X = AY$, la variable aléatoire X prend presque surement ses valeurs dans l'image de A, c'est-à-dire dans un sous-espace de dimension $r < d$ de $\mathbb{R}^d$. Ce sous-espace est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, mais de mesure 1 pour la mesure P_X. La mesure P_X ne peut donc pas avoir de densité par rapport à celle de Lebesgue.

Supposons maintenant que K_X soit inversible. La matrice A l'est aussi. Nous anticipons l'utilisation du théorème de changement de variable 14.282. Ici le changement de variable sera la transformation linéaire A dont le jacobien vaut

$$|\det(A^{-1})| = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{\sqrt{|\det K_X|}}. \tag{36.537}$$

Soit γ la densité de Y. Nous posons

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{|\det K_X|}} \gamma(A^{-1}X) \tag{36.538}$$

où γ est le produit des densités de d gaussiennes usuelles $\mathcal{N}(0, 1)$. Nous allons d'abord montrer que cette formule est bien la fonction (36.536) et ensuite que X admet f_X comme densité. Nous avons

$$\gamma(A^{-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|A^{-1}x\|^2\right), \tag{36.539}$$

et

$$\begin{aligned}\|A^{-1}x\|^2 &= \langle A^{-1}x, A^{-1}x\rangle && (36.540a)\\ &= \langle (A^{-1})^t A^{-1}x, x\rangle && (36.540b)\\ &= \langle (AA^t)^{-1}x, x\rangle && (36.540c)\\ &= x\cdot K_X^{-1}x, && (36.540d)\end{aligned}$$

ce qui nous donne bien la formule (36.536). Nous vérifions maintenant que f_X est bien une densité pour X. Soit B un borélien de $\mathbb{R}^d$. Nous avons d'abord

$$P(X\in B) = P(AY\in B) = P(Y\in A^{-1}B). \tag{36.541}$$

Ici nous avons utilisé le fait que A était bijectif. Nous avons ensuite

$$P(X\in B) = \int_{A^{-1}B}\gamma(t)dy = \int_B \gamma\big(A^{-1}x\big)|J_{A^{-1}}(x)|dx = \int_B f_X(x)dx. \tag{36.542}$$

C'est ici que nous avons utilisé le théorème de changement de variable 14.282. □

36.6.11 Variable aléatoire de Rademacher

Une variable aléatoire **de Rademacher** est une variable aléatoire de loi

$$\epsilon\sim\delta_0-\delta_1, \tag{36.543}$$

sur l'ensemble $\Omega=\{0,1\}$. C'est la variable aléatoire qui prend valeur 1 ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Parmi les propriétés évidentes de cette variable aléatoire nous avons $E(\epsilon)=0$ et $E(\epsilon^2)=1$.

PropCZRNRsf

Proposition 36.173 (Inégalité de Khintchine[128])**.**
Soient $r_1,\dots,r_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de Rademacher et une combinaison linéaire

$$X=\sum_{i=1}^n a_i r_i \tag{36.544}$$

avec $a_i\in\mathbb{R}$. Alors

EqYBZlMga

$$\|X\|_2 \leqslant \sqrt{e}E\big(|X|\big). \tag{36.545}$$

Démonstration. Pour rappel la définition est que

$$\|X\|_2 = \sqrt{E\big(|X|^2\big)}. \tag{36.546}$$

Vu que c'est de la quantité $E\big(|X|\big)$ que nous voulons parler, nous notons l'inégalité

$$E\big(|X|\big) = \int_\Omega \big|X(\omega)\big|dP(\omega) \geqslant \Big|\int_\Omega X(\omega)dP(\omega)\Big| = \big|E(X)\big|. \tag{36.547}$$

Nous supposons que $\sum_{j=1}^n a_j^2=1$; sinon nous multiplions les a_j par ce qu'il faut pour l'avoir et ce facteur sortira des deux côtés de (36.545).

Nous allons passer par la variable aléatoire intermédiaire

$$Y=\prod_{j=1}^n(1+ia_jr_j) \tag{36.548}$$

et pour presque tout $\omega \in \Omega$ nous avons

$$|Y(\omega)| = \prod_{j=1}^{n} |1 + ia_j r_j(\omega)| \tag{36.549a}$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \sqrt{1 + a_j^2 \underbrace{r_j(\omega)^2}_{=1}} \tag{36.549b}$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \sqrt{1 + a_j^2} \tag{36.549c}$$
$$\leqslant \prod_{j=1}^{n} \sqrt{e^{a_j^2}} \tag{36.549d}$$
$$= \sqrt{\prod_{j=1}^{n} e^{a_j^2}} \tag{36.549e}$$
$$= \sqrt{e^{\sum a_j^2}} \tag{36.549f}$$
$$= \sqrt{e}. \tag{36.549g}$$

Donc $\|Y\|_\infty \leqslant \sqrt{e}$ où $\|.\|_\infty$ est la norme supremum sur Ω. Cela nous permet de donner une première inégalité à propos de $E(|X|)$. D'abord

$$\big|E(XY)\big| = \Big|\int_\Omega X(\omega)Y(\omega)dP(\omega)\Big| \leqslant \int_\Omega \big|X(\omega)\big|\|Y\|_\infty dP(\omega) = \|Y\|_\infty E\big(|X|\big), \tag{36.550}$$

ensuite en remplaçant $\|Y\|_\infty$ par la majoration que nous venons de donner de $|Y(\omega)|$,

$$\sqrt{e}E\big(|X|\big) \geqslant \big|E(XY)\big|. \tag{36.551}$$

EqYVbzyGb

Il nous reste à prouver que $\big|E(XY)\big| \geqslant \|X\|_2$.

Pour ce faire nous commençons par noter que pour chaque j nous avons $E(r_j) = 0$ et $E(ia_j r_j^2) = ia_j$; en utilisant l'indépendance des r_j et le lemme 36.43 nous avons alors

$$E(r_j Y) = E\Big(r_j(1 + ia_j r_j) \prod_{k\neq j}(1 + ia_k r_k)\Big) \tag{36.552a}$$
$$= E\big(r_j(1 + ia_j r_j)\big) \prod_{k\neq j} E(1 + ia_k r_k) \tag{36.552b}$$
$$= ia_j \prod_{k\neq j} \big(1 + ia_k E(r_k)\big) \tag{36.552c}$$
$$= ia_j. \tag{36.552d}$$

Par conséquent, en utilisant la proposition 36.47 dans le cas non indépendant,

$$E(XY) = \sum_{j=1}^{n} a_j E(r_j Y) = \sum_j a_j i a_j = i \sum_j a_j^2 = i. \tag{36.553}$$

Nous pouvons compléter l'équation (36.551) en

$$\sqrt{e}E\big(|X|\big) \geqslant \big|E(XY)\big| = 1, \tag{36.554}$$

et nous nous empressons de montrer que $\|X\|_2 = 1$. En effet $\|X\|_2 = \sqrt{E(|X|^2)}$ alors que

$$\|X\|_2^2 = E\big((\sum_i a_i r_i)^2\big) \tag{36.555a}$$
$$= E\Big(\sum_k a_k^2 r_k^2 + 2\sum_{i\neq j} a_i a_j r_i r_j\Big) \tag{36.555b}$$
$$= \sum_k a_k^2 + 2\sum_{i\neq j} a_i a_j E(r_i r_j) \tag{36.555c}$$
$$= 1 \tag{36.555d}$$

□

36.6.12 Loi de Student

Définition 36.174.
La loi χ^2 à d degrés de liberté est la loi de la variable aléatoire $Y_1^2 + \cdots + Y_n^2$ si les (Y_i) sont des variables aléatoires normales indépendantes centrées et réduites.

La loi de ***Student*** *à d degrés de liberté est la loi de la variable aléatoire*

$$\frac{X}{\sqrt{K/d}} \tag{36.556}$$

où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $K \sim \chi^2(d)$ sont des variables aléatoires indépendantes. Cette loi est notée $\mathcal{T}(d)$

Nous avons une illustration de la densité de la loi $\chi^2(10)$ à la figure 36.1.

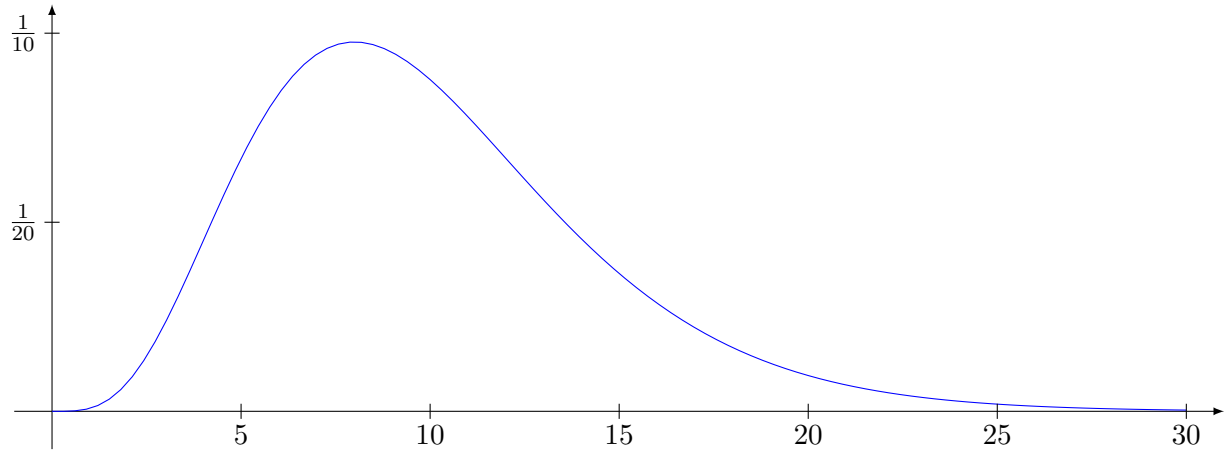


FIGURE 36.1 : La densité de $\chi^2(10)$. LabelFigChiSquared

L'importance de cette loi sera dans le théorème de Cochrane 37.15.

36.6.13 Indépendance, covariance et variance de somme

subsecTTHohur

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles, nous avons défini la covariance par (36.117) :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\Big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big] \tag{36.557}$$

Une clef est le lemme 36.43 qui dit que lorsque X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$. Nous avons les liens suivants.

(1) Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

(2) La réciproque n'est pas vraie par l'exemple 36.45.

(3) Si Z est un vecteur gaussien, les composantes Z_i sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariance est diagonale, c'est-à-dire que les Z_i sont deux à deux non corrélées ; c'est le théorème 36.168.

(4) En ce qui concerne la variance d'une somme,

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y). \tag{36.558}$$

Donc lorsque X et Y ne sont pas corrélées, la variance est sympa avec la somme. En particulier lorsqu'elles sont indépendantes, mais pas seulement.

36.7 Estimation des grands écarts

Si S_n est une somme de variables aléatoires de Bernoulli X_i indépendantes de probabilité p, l'espérance de S_n/n est p, et nous voudrions savoir quelle est la probabilité d'avoir un taux de succès un peu plus important :

$$P\big(\frac{S_n}{n} \geqslant p + \epsilon\big). \tag{36.559}$$

La loi des grands nombres nous permet de dire que ça ne va pas être très grand. En effet si nous posons

$$Y_i = X_i - p - \epsilon \tag{36.560}$$

et

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{S_n}{n} - p - \epsilon, \tag{36.561}$$

la loi des grands nombres (théorème 36.129) nous indique que

$$Z_n \xrightarrow{p.s.} E(Y_1) = -\epsilon. \tag{36.562}$$

Le théorème 36.107 sur le lien entre les types de convergence nous donne immédiatement la convergence en loi. C'est-à-dire que pour tout $\eta > 0$,

$$P\Big(|Z_n + \epsilon| \geqslant \eta\Big) \to 0. \tag{36.563}$$

En prenant $\eta = \frac{\epsilon}{2}$,

$$P(Z_n = 0) \leqslant P\big(|Z_n + \epsilon| \geqslant \frac{\epsilon}{2}\big) \to 0. \tag{36.564}$$

Tout cela montre que

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\frac{S_n}{n} \geqslant p + \epsilon\big) = 0. \tag{36.565}$$

Autrement dit, la probabilité de tomber à une distance fixée de la moyenne tend vers zéro lorsque le nombre d'essais augmente. Rien d'étonnant.

Le théorème suivant nous indique la vitesse de convergence. Elle est exponentielle et le coefficient est donné en fonction de p et de ϵ.

ThoYYaBXkU

Théorème 36.175 ([128]).
Soient des variables aléatoires $X_i \sim \mathscr{B}(p)$ et

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathscr{B}(n, p). \tag{36.566}$$

Pour $\epsilon \in]0, 1-p[$, nous définissons

$$h_+(\epsilon) = (p+\epsilon)\ln\left(\frac{p+\epsilon}{p}\right) + (1-p-\epsilon)\ln\left(\frac{1-p-\epsilon}{1-p}\right). \tag{36.567}$$

Alors

ItemUWyKcpMi

(1) $h_+(\epsilon) > 0$.

ItemUWyKcpMii

(2) Pour tout $n \geqslant 1$, nous avons

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p + \epsilon\right) \leqslant e^{-nh_+(\epsilon)}. \tag{36.568}$$

EqXFortLp

ItemUWyKcpMiii

(3) L'estimation (36.568) est optimale au sens que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(P\big(\frac{S_n}{n} \geqslant p + \epsilon\big)\right) = -h_+(\epsilon). \tag{36.569}$$

Démonstration. Pour tout $t \geqslant 0$ nous avons :

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p + \epsilon\right) &= P\big(S_n \geqslant np + n\epsilon\big) && (36.570a)\\
&\leqslant E\Big(e^{t(S_n - np - n\epsilon)}\Big) && (36.570b)\\
&= e^{-nt(p+\epsilon)} E\left(e^{tS_n}\right) && (36.570c)\\
&= e^{-nt(p+\epsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} P(S_n = k) && (36.570d)\\
&= e^{-nt(p+\epsilon)} \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} && (36.570e)\\
&= e^{-nt(p+\epsilon)} \big((1-p) + pe^t\big)^n && (36.570f)\\
&= \exp\Big(-n\big(t(p+\epsilon) - \ln(1 - p + pe^t)\big)\Big). && (36.570g)
\end{aligned}$$

subeqDUYpBeF

subeqXEHKoqk

Justifications :

- L'inégalité (36.570b) est l'inégalité de Markov (corolaire 36.128) avec $\phi(x) = e^{tx}$.
- La ligne (36.570d) est une utilisation du théorème de transfert 36.97.

Nous posons maintenant

$$h = \sup_{t>0} \big(t(p+\epsilon) - \ln(1-p+pe^t)\big). \tag{36.571}$$

Pour cette valeur de h nous avons

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\epsilon\right) \leqslant e^{-nh}. \tag{36.572}$$

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto t(p+\epsilon) - \ln(1-p+pe^t). \end{aligned} \tag{36.573}$$

Elle vérifie $g(0) = 0$ et

$$g'(t) = (p+\epsilon) - \frac{pe^t}{1-p+pe^t} \tag{36.574a}$$

$$g'(0) = (p+\epsilon) - \frac{p}{1-p+p} = \epsilon > 0. \tag{36.574b}$$

Par conséquent sur un voisinage de $t = 0$ la fonction g est strictement croissante et nous concluons que g prend (au moins) quelques valeurs strictement positives. Du coup nous avons

$$h = \|g\|_\infty > 0. \tag{36.575}$$

Nous cherchons maintenant pour quelle valeur de t est réalisé le maximum de g. D'abord résoudre $g'(t) = 0$ donne

$$t_0 = \ln\left(\frac{(p+\epsilon)(1-p)}{p(1-p-\epsilon)}\right) \tag{36.576}$$

Vu que $g'(t) \to p+\epsilon-1 < 0$, nous avons $\lim_{t\to\infty} g(t) = -\infty$ et donc le t_0 trouvé est bien un maximum et non un minimum.

Il est maintenant loisible de calculer une valeur pour h : il suffit de calculer $g(t_0)$. La calcul n'est pas très compliqué et donne

$$h = g(t_0) = (p+\epsilon)\ln\left(\frac{p+\epsilon}{p}\right) + (p+\epsilon-1)\ln\left(\frac{1-p}{1-p-\epsilon}\right), \tag{36.577}$$

ce qui est bien $h = h_+(\epsilon)$. Cela démontre les points (1) et (2).

Nous montrons à présent l'aspect optimal de l'estimation. Nous savons déjà que

$$\frac{1}{n}\ln\left(P\big(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\epsilon\big)\right) \leqslant h_+(\epsilon). \tag{36.578}$$

Nous posons $k_n = \lceil n(p+\epsilon)\rceil$. Vu que $p+\epsilon < 1$ et que $S_n \leqslant n$, nous avons

$$P\big(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\epsilon\big) = P\big(S_n \geqslant n(p+\epsilon)\big) \geqslant P(S_n = k_n) = \binom{n}{k_n} p^{k_n}(1-p)^{n-k_n}. \tag{36.579}$$

C'est maintenant que nous utilisons la formule de Stirling (lemme 20.207) pour chacune des factorielles intervenant dans le coefficient binomial. Nous trouvons :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\epsilon\right) \geqslant P(S_n = k_n) = \clubsuit = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\alpha(n) p^{k_n}(1-p)^{n-k_n}}{\left(\frac{k_n}{e}\right)^{k_n}\sqrt{2\pi k_n}\alpha(k_n)\left(\frac{n-k_n}{e}\right)^{n-k_n}\sqrt{2\pi(n-k_n)}}. \tag{36.580}$$

Nous savons que $k_n = n(p+\epsilon) + \sigma(n)$ avec σ borné par 1. Par conséquent $n - k_n \to \infty$ et nous pouvons regrouper les coefficients en α en

$$\beta(n) = \frac{\alpha(n)}{\alpha(k_n)\alpha(n-k_n)} \to 1. \tag{36.581}$$

Nous remarquons aussi que les e se simplifient. Nous récrivons $\clubsuit$ sous la forme

$$\clubsuit = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{k_n(n-k_n)}}\beta(n)}_{=A(n)} \frac{n^n p^{k_n}(1-p)^{n-k_n}}{k_n^{k_n}(n-k_n)^{n-k_n}} \tag{36.582a}$$

$$= A(n) n^n \left(\frac{p}{k_n}\right)^{k_n}\left(\frac{1-p}{n-k_n}\right)^{n-k_n} \tag{36.582b}$$

$$= A(n)\left(\frac{np}{k_n}\right)^{k_n}\left(\frac{n(1-p)}{n-k_n}\right)^{n-k_n}. \tag{36.582c}$$

Nous passons au logarithme et nous étudions $\frac{1}{n}\ln\big(P(S_n=k_n)\big)$. Nous avons les termes suivants à étudier :

$$\frac{1}{n}\ln\big(P(S_n=k_n)\big)=-\frac{1}{2n}\ln(2\pi)+\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n}{k_n(n-k_n)}\right)+k_n\ln\left(\frac{np}{k_n}\right)+(n-k_n)\ln\left(\frac{n(1-p)}{n-k_n}\right)+\frac{1}{n}\ln\big(\alpha(n)\big). \tag{36.583}$$

Nous étudions terme à terme la limite de cela lorsque $n\to\infty$.

(1) Le terme $\frac{1}{2n}\ln(2\pi)$ ne pose pas de problèmes. Il tend vers zéro.

(2) Si nous remplaçons k_n par $n(p+\epsilon)+\sigma(n)$ nous voyons que ce qui est dans le logarithme est majoré par $\frac{1}{P(n)}$ pour un certain polynôme P. Ce terme est dans le cas $\frac{\ln(P(n))}{n}$ qui tend vers zéro lorsque $n\to\infty$.

(3) Pour ce terme nous remplaçons k_n par $n(p+\epsilon)+k_n-n(p+\epsilon)$. Nous devons alors étudier la limite de

$$(p+\epsilon)\ln\left(\frac{np}{k_n}\right)+\frac{k_n-n(p+\epsilon)}{n}\ln\left(\frac{np}{k_n}\right). \tag{36.584}$$

EqZTmKdSn

Ce qui est dans les logarithmes est encadré de la façon suivante :

$$\frac{n(p+\epsilon)}{np}\leqslant\frac{k_n}{np}\leqslant\frac{n(p+\epsilon)+1}{np}. \tag{36.585}$$

Donc la limite de k_n/np est $(p+\epsilon)/p$. Les logarithmes restent bornés. Pour le second terme de (36.584), le numérateur du coefficient est borné par 1. Donc le second terme tend vers zéro et le tout tend vers

$$(p+\epsilon)\ln\left(\frac{p}{p+\epsilon}\right). \tag{36.586}$$

(4) Nous devons enfin étudier le dernier terme. La combinaison $\frac{n-k_n}{n}$ s'étudie de la façon suivante :

$$\frac{n-k_n}{n}=\frac{n-n(p+\epsilon)+n(p+\epsilon)-k_n}{n}=\frac{n(1-p-\epsilon)+n(p+\epsilon)-k_n}{n}\to 1-p-\epsilon \tag{36.587}$$

parce que $n(p+\epsilon)-k_n$ est borné par 1. Sachant cela, notre terme a pour limite

$$\frac{n-k_n}{n}\ln\left(\frac{n(1-p)}{n-k_n}\right)\to(1-p-\epsilon)\ln\left(\frac{1-p}{1-p-\epsilon}\right). \tag{36.588}$$

En remettant tous les morceaux bouts à bout,

$$\frac{1}{n}P(S_n=k_n)\to(1+\epsilon)\ln\left(\frac{p}{p+\epsilon}\right)+(1-p-\epsilon)\ln\left(\frac{1-p}{1-p-\epsilon}\right)=-h_+(\epsilon). \tag{36.589}$$

Étant donné que nous avions déjà prouvé que $P\big(\frac{S_n}{n}\geqslant p+\epsilon\big)\geqslant P(S_n=k_n)$, nous avons

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\Big(P\big(\frac{S_n}{n}\geqslant p+\epsilon\big)\Big)\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}P(S_n=k_n)=-h_+(\epsilon). \tag{36.590}$$

En combinant avec (36.578) nous trouvons que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\Big(P\big(\frac{S_n}{n}\geqslant p+\epsilon\big)\Big)=h_+(\epsilon). \tag{36.591}$$

Pour cette dernière déduction nous utilisons le fait que si (a_n) est une suite telle que $a_n\leqslant l$ et $\liminf_{n\to\infty}a_n=l$, alors (a_n) admet une limite qui vaut l. □

36.8 Simulations de réalisations de variables aléatoires

Le générateur de base que possède un système informatique est un générateur de nombres pseudo-aléatoires de nombres entiers entre 0 et $m-1$ généré par une suite du type

$$x_{n+1}=(ax_n+b)\mod m. \tag{36.592}$$

36.8.1 Générateur uniforme

36.8.1.1 Première méthode

Une première façon de générer une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$ est de diviser par $m-1$ la suite de x_n. En effet nous avons la proposition suivante.

Proposition 36.176.
Si (Y_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{0,\dots,n-1\}$. Alors

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{U}[0,1]. \tag{36.593}$$

Démonstration. Nous prouvons la convergence en loi en passant par la fonction de répartition et la proposition 36.115. La fonction de répartition de la densité $\mathscr{U}[0,1]$ est

$$F_X(x) = x\mathbb{1}|_{[0,1]}. \tag{36.594}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire (discrète) $X_n = \frac{Y_n}{n}$ est

$$P(\frac{Y_n}{n} \leqslant x) = P(Y_n \leqslant nx) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \tag{36.595}$$

où $\lfloor a \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à a. Nous avons évidemment

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x, \tag{36.596}$$

ce qui montre la convergence des fonctions de répartitions et donc la convergence en loi qui nous intéresse. □

36.8.1.2 Seconde méthode

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi $Y_n \sim \mathscr{U}\{0,\dots,m-1\}$. Alors la série de variables aléatoires

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y_k}{m^{k+1}} \tag{36.597}$$

est une série qui converge presque surement parce que Y_k est borné par m. Avec probabilité zéro nous avons $Z = \sum_k 1/m^k$ qui converge. Nous avons

$$Z \sim \mathscr{U}[0,1]. \tag{36.598}$$

L'argument pour montrer cette loi est qu'en base m, la variable aléatoire Z a un développement décimal $Z = 0.Y_1Y_2Y_3Y_4\cdots$.

36.8.2 Simulation par inversion

Nous cherchons maintenant à simuler une loi X de fonction de répartition F.

Définition 36.177.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction croissante, continue à droite et telle que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \tag{36.599a}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1. \tag{36.599b}$$

*L'**inverse généralisé** de f, notée f^{-1} est la fonction définie par*

$$f^{-1}(t) = \inf\{x \text{ tel que } f(x) \geqslant t\}. \tag{36.600}$$

Remarque 36.178.
L'inverse généralisé d'une fonction bijective est la vraie fonction réciproque usuelle.

PropInvgenecntddr

Proposition 36.179.
Soit f une fonction admettant un inverse généralisé f^{-1}. Alors nous avons $f^{-1}(t) \leqslant a$ si et seulement si $t \leqslant f(a)$.

La continuité à droite joue pour démontrer cette proposition.

Proposition 36.180.
Si F est la fonction de répartition de la variable aléatoire X et si U est une variable aléatoire de loi uniforme $\mathscr{U}[0,1]$, alors $F^{-1}(U)$ a la même loi que X.

Démonstration. Nous montrons que les fonctions de répartition de X et de $F^{-1}(U)$ sont identiques. En utilisant la proposition 36.179, nous avons

$$\begin{aligned} P\big(F^{-1}(U) \leqslant y\big) &= P\big(U \leqslant F(y)\big) && \text{(36.601a)}\\ &= F(y) && \text{(36.601b)}\\ &= P(X \leqslant y). && \text{(36.601c)}\end{aligned}$$

Donc $F^{-1}(U)$ est la fonction de répartition de X. □

La difficulté de la méthode par inversion est qu'il faut être capable de calculer l'inverse de la fonction de répartition de la loi à simuler.

36.8.2.1 Loi exponentielle

La loi exponentielle est une loi qui peut être simulée par inversion. Nous savons du lemme 36.90 que sa fonction de répartition[46] vaut

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \tag{36.602}$$

et l'inverse vaut

$$F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y). \tag{36.603}$$

Par conséquent, une bonne formule pour simuler une loi exponentielle est

$$-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U). \tag{36.604}$$

Notez que U étant uniforme, nous pouvons tout autant prendre $-\ln(U)/\lambda$.

36.8.3 Algorithme de Box-Muller

Il s'agit de simuler une loi gaussienne. La proposition est la suivante.

Proposition 36.181.
Si U et V sont des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$, alors le couple

$$(X,Y) = \big(\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V), \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)\big) \tag{36.605}$$

vérifie

(1) X est indépendante de Y

(2) X et Y sont de loi $\mathscr{N}(0,1)$.

Démonstration. Nous allons montrer la proposition en utilisant les fonctions tests. Soit donc $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et mesurable. Soient Z et W, deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{N}(0,1)$. Nous allons montrer que

$$F\big(\varphi(X,Y)\big) = E\Big[\varphi\big(\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V), \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)\big)\Big]. \tag{36.606}$$

Par indépendance de U et V, la densité du couple est le produit des densités, donc en passant aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \diamondsuit &= E\big[\varphi(Z,W)\big] && \text{(36.607a)}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}dxdy && \text{(36.607b)}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)e^{-r^2/2}rdr. && \text{(36.607c)}\end{aligned}$$

[46] Définition 36.88.

Nous posons $u = e^{-r^2/2}$ et $v = \frac{\theta}{2\pi}$. En particulier $r = \sqrt{-2\ln(u)}$ et

$$\diamondsuit = \int_0^1 \int_0^1 \varphi\big(\sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi v), \sqrt{-2\ln(u)}\sin(2\pi v)\big)dudv \tag{36.608a}$$
$$= E\Big(\varphi\big(\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V), \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)\big)\Big) \tag{36.608b}$$

parce que mesure $dudv$ est la densité de la loi uniforme. □

En pratique, la formule

$$(x, y) \mapsto \big(\sqrt{-2\ln x}\cos(2\pi y), \sqrt{-2\ln x}\sin(2\pi y)\big) \tag{36.609}$$

est une façon d'obtenir deux gaussiennes à partir de deux variables uniformes.

36.8.4 Méthode du rejet

La méthode du rejet permet de simuler des lois à densité. Soit f la densité de la loi à simuler. Nous faisons les hypothèses suivantes.

(1) Il existe une densité g d'une variable aléatoire facile à simuler.

(2) Il existe un $k \geqslant 0$ tel que $f(x) \leqslant kg(x)$.

Remarque 36.182.
Le k de la seconde hypothèse est nécessairement plus grand que 1. En effet,

$$1 = \int f \leqslant k \int g = k \tag{36.610}$$

parce que f et g sont des densités et ont donc une intégrale égale à 1.

Proposition 36.183.
Soient (X_n) et (U_n) des suites de variables aléatoires indépendantes au sens où non seulement les X_i et U_k sont indépendants entre eux, mais de plus X_i est indépendant de U_j pour tout i et j. Nous supposons que les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, de densité g et que les U_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme.

Nous introduisons la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

$$p(\omega) = \inf\{n \geqslant 0 \text{ tel que } \alpha\big(X_n(\omega)\big) \geqslant U_n(\omega)\} \tag{36.611}$$

où α est la fonction définie par

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{kg(x)} & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } g(x) = 0. \end{cases} \tag{36.612}$$

Alors la variable aléatoire Y définie par

$$Y(\omega) = X_{p(\omega)}(\omega) \tag{36.613}$$

admet f pour densité.

Démonstration. D'abord étant donné que $f(x) \leqslant kg(x)$ nous avons $\alpha(x) \in [0, 1]$. Nous pouvons à priori avoir $p(\omega) = \infty$, ce qui rendrait caduque la définition de $Y(\omega)$. Montrons donc pour commencer que $P(p = \infty) = 0$. En utilisant l'indépendance nous avons EqSubEqPnNinftyalphaUu

$$P\big(\alpha(X_n) < U_n, \forall n\big) = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} P\big(\alpha(X_i) < U_i\big) \tag{36.614a}$$
$$= \lim_{N\to\infty} P\big(\alpha(X_1) < U_1\big)^N. \tag{36.614b}$$

Pour conclure nous devons prouver que $P\big(\alpha(X_1) < U_1\big) < 1$. Pour cela nous calculons

$$\begin{aligned}
P\big(\alpha(X_1) < U_1\big) &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^1 du \mathbb{1}_{\alpha(x)<u} g(x) && \text{(36.615a)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x)\big(1-\alpha(x)\big)dx && \text{(36.615b)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(g(x) - \frac{f(x)}{k}\right) dx && \text{(36.615c)}\\
&= 1 - \frac{1}{k} && \text{(36.615d)}\\
&< 1. && \text{(36.615e)}
\end{aligned}$$

L'équation (36.614) nous permet donc de conclure que $P\big(\alpha(X_n) < U_n, \forall n\big) = 0$. Par conséquent la variable aléatoire $Y(\omega) = X_{p(\omega)}(\omega)$ a un sens.

Nous devons maintenant prouver que Y a bien f pour densité. Pour cela nous considérons un ensemble mesurable $A \in \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$ et nous montrons que $P(Y \in A) = \int_A f(x)dx$. Nous avons

$$P(Y \in A) = P(X_p \in A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X_j \in A, p = j). \tag{36.616}$$ EqdscPAYXjApj

Par ailleurs nous avons

$$\begin{aligned}
P(X_j \in A, p = j) &= P\big(X_j \in A, \alpha(X_j) \geqslant U_j, \alpha(X_m) < U_m \, \forall m \leqslant j-1\big)\\
&= P\big(X_j \in A, \alpha(X_j) \geqslant U_j\big) P\big(\alpha(X_1) < U_1\big)^{j-1} \qquad \text{(36.617)}\\
&= P\big(X_j \in A, \alpha(X_j) \geqslant U_j\big) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{j-1}.
\end{aligned}$$ EqalPXjAvpjalphaXj

Étant donné que $g(x)dx$ est la densité de X_j et que du est la densité de U, nous avons

$$\begin{aligned}
P\big(X_j \in A, \alpha(X_j) \geqslant U_j\big) &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \mathbb{1}_{x\in A} \mathbb{1}_{\alpha(x)\geqslant u} g(x) du dx && \text{(36.618a)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x) \mathbb{1}_{x\in A} \underbrace{\int_0^1 \mathbb{1}_{\alpha(x)\geqslant u} du}_{\alpha(x)} dx. && \text{(36.618b)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x\in A} \frac{f(x)}{k} dx && \text{(36.618c)}\\
&= \frac{1}{k} P(X \in A). && \text{(36.618d)}
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (36.617) nous trouvons

$$P(X_j \in A, p = j) = \frac{1}{k} P(X \in A) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{j-1}. \tag{36.619}$$

Et enfin, l'équation (36.616) donne

$$P(Y \in A) = \frac{1}{k} P(X \in A) \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{j-1} = P(X \in A). \tag{36.620}$$

□

36.8.5 Simuler une loi géométrique à l'ordinateur

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $X_n \sim \mathscr{B}(p)$, alors

$$Z = \min\{k \geqslant 1 \text{ tel que } X_k = 1\} \sim \mathscr{G}(p). \tag{36.621}$$

Nous avons alors $P(Z = k) = (1-p)^k p$.

Si nous avons un générateur de lois de Bernoulli de paramètre p, alors nous simulons jusqu'à obtenir 1 et nous comptons combien de simulations ont été nécessaires.

36.8.6 Simuler une loi exponentielle à l'ordinateur

Nous pouvons utiliser la méthode de l'inversion. Étant donné que la fonction de répartition de la loi exponentielle est $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, nous avons $F^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$. Par conséquent à partir d'un générateur uniforme U, nous pouvons calculer

$$F^{-1}(U) = \frac{1}{\lambda}\ln(U) \tag{36.622}$$

qui suivra une loi exponentielle d'espérance $1/\lambda$.

36.8.7 Simuler une loi de Poisson à l'ordinateur

Nous savons du point 36.6.8 que si les T_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathscr{E}(\lambda)$, alors nous avons

$$\max\{n \geqslant 1 \text{ tel que } \sum_i T_i \leqslant 1\} \sim \mathscr{P}(\lambda). \tag{36.623}$$

La façon usuelle pour créer une loi exponentielle est d'avoir un générateur de loi uniforme U_i et d'écrire que

$$-\frac{1}{\lambda}\ln(U_i) \sim \mathscr{E}(\lambda). \tag{36.624}$$

Nous devons donc faire la somme de telles variables aléatoires et voir à partir de quel moment la somme dépasse 1. Le calcul est le suivant :

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}\ln(U_i) \leqslant 1 \tag{36.625}$$

implique

$$\prod_{i=1}^{n} U_i \leqslant e^{-\lambda}. \tag{36.626}$$

En pratique, la variable aléatoire qui se comporte comme une loi de Poisson de paramètre λ est

$$N = \max\{n \geqslant 1 \text{ tel que } \prod_{i=1}^{n} U_i \geqslant e^{-\lambda}\}. \tag{36.627}$$

Nous générons donc des nombres aléatoires entre 0 et 1 et nous effectuons le produit jusqu'à ce qu'il passe en dessous de $e^{-\lambda}$. À ce moment, nous retournons le nombre de nombres qu'il a fallu générer.

36.9 Sage

Nous allons montrer maintenant quelques trucs importants dans l'utilisation de Sage pour réaliser des petits graphiques.

Remarque 36.184.
Dans ce qui suit, nous allons parler de « Sage », mais en réalité nous allons surtout parler du module `scipy` qui fait partie des modules hyper-usuels de Python. Les remerciements vont donc au moins autant du côté de l'équipe de `scipy` que vers celle de Sage.

36.9.1 Loi exponentielle

Il faut savoir que la définition d'une loi continue retourne automatiquement la loi centrée réduite. Pour avoir une loi exponentielle de moyenne donnée, il faut donc préciser de façon plus maligne que ce que l'on croit.

```
1 from scipy import stats
2
3 X=stats.expon(scale=5)
4 print(X.mean())      # retourne 5
5
6 P=plot( X.pdf,x,0,10 )
7 show(P)              # Affiche le graphique
```

tex/frido/code_sage1.py

36.9.2 Inverser des lois

Pour trouver des intervalles de confiance, il faut souvent calculer des inverses de loi. Bien entendu Sage le fait. Ce que Sage connaît, c'est l'inverse de la fonction de survie. Autrement dit si `X` est une variable aléatoire, `X.sf` est la fonction $x \mapsto 1 - P(X < x)$ et `X.isf` en est l'inverse. Pour résoudre $P(X < \xi) = \alpha$, il faut résoudre $F(\xi) = \alpha$, c'est-à-dire

$$1 - F(\xi) = 1 - \alpha, \tag{36.628}$$

ce qui se fait de la façon suivante : le programme suivant donne pour une loi normale centrée réduite la valeur de ξ pour laquelle $P(N < \xi) = 0.05$:

```
from scipy import stats

N=stats.norm
print(N.mean())       # 0
print(N.var())        # 1

xi = N.isf(0.95)
print(xi)             # -1.64485

N.cdf(xi)            # Vérification : 0.05

# Graphiques de la fonction de densité et la cumulative.
P=plot(N.cdf,x,-10,10)
Q=plot(N.pdf,x,-10,10,color="red")
show(P+Q)
```

tex/frido/code_sage2.py

36.10 Monte-Carlo

Nous voudrions calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx. \tag{36.629}$$

Les méthodes classiques consistent à discrétiser l'intervalle $[a, b]$ et en calculant une somme de la forme $\sum_i w_i f(x_i)$.

L'idée de Monte-Carlo est de remplacer le découpage déterministe x_i par des variables aléatoires X_i en trois étapes.

(1) Pour cela nous commençons par écrire l'intégrale comme une espérance : $I = E(X)$ où X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à déterminer. Une contrainte est évidemment d'avoir $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(2) Nous générons une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (X_n) de même loi que X et la loi (forte) des grands nombres implique que

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p.s.} E(X) = I. \tag{36.630}$$

(3) Le dernier point sera de donner un intervalle de confiance.

ExempleIintfdxEXu

Exemple 36.185.
Nous voudrions déterminer de façon approchée l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$. Si $U \sim \mathscr{U}[0, 1]$, alors

$$I = E\big(f(U)\big) \tag{36.631}$$

et il suffit de faire

$$I \simeq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_i). \tag{36.632}$$

où mes U_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathscr{U}[0, 1]$. △

Exemple 36.186.
Supposons que la fonction à intégrer se présente sous la forme $f(x) = h(x)g(x)$ avec $g \geqslant 0$ et telle que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} g$ existe. Notons

$$c = \int_{\mathbb{R}} g \tag{36.633}$$

et

$$I = \int_{\mathbb{R}} h(x)c\frac{g(x)}{c}dx. \tag{36.634}$$

Nous avons alors $I = E\big(ch(Y)\big)$ où Y admet la densité $g(x)c$. △

Passons au cas de plusieurs variables et considérons l'intégrale

$$I = \int_{[0,1]^d} f(x_1, \dots, x_d)dx_1 \dots dx_d. \tag{36.635}$$

Nous écrivons

$$I = E\big(f(U_1, \dots, U_d)\big) \tag{36.636}$$

où les U_i sont de loi uniforme sur $[0, 1]$. En pratique, nous générons une suite de variables aléatoires (Z_k) de lois uniformes que nous regroupons par paquets :

$$V_k = (Z_{dk}, Z_{dk+1}, \dots, Z_{d(k+1)-1}). \tag{36.637}$$

Ces variables aléatoires V_k sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathscr{U}[0, 1]^d$. Ensuite la loi des grands nombres nous indique que

$$I \sim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(V_k). \tag{36.638}$$

36.10.1 Intervalle de confiance

36.10.1.1 Principe

Nous supposons que nous travaillons sur une approximation de Monte-Carlo telle que la variable aléatoire choisie soit dans L^2. La loi des grands nombres nous dit que $\bar{X}_n \sim I$ tandis que le théorème central limite nous enseigne que

$$\frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, 1). \tag{36.639}$$

Par conséquent

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sigma/\sqrt{n}} \in [-u, u]\right) \simeq P(-u \leqslant Z \leqslant u) \tag{36.640}$$

où $Z \sim \mathscr{N}(0, 1)$. En remplaçant $E(X)$ par I et en effectuant les manipulations usuelles, nous trouvons que $P(I \in J_\alpha) = 1 - \alpha$ si

$$J_\alpha = \big[\bar{X}_n - u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\big] \tag{36.641}$$

où σ^2 est la variance de X. Si σ n'est pas connue, alors nous le remplaçons par un estimateur

$$S'_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2 \tag{36.642}$$

et nous considérons l'intervalle

$$J'_\alpha = \big[\bar{X}_n - u_\alpha\frac{S'_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_\alpha\frac{S'_n}{\sqrt{n}}\big]. \tag{36.643}$$

Il y a deux façons de faire diminuer la longueur de l'intervalle de confiance : augmenter n ou diminuer σ. Pour le second point, le choix de X dans $I = E(X)$ est essentiel.

Exemple 36.187.
Soit à calculer

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\beta z}e^{-z^2/2}dz \tag{36.644}$$

avec $\beta > 0$. Nous introduisons la variable aléatoire $X = e^{\beta Z}$ avec $Z \sim \mathscr{N}(0, 1)$. Nous avons alors

$$I = E(X). \tag{36.645}$$

Par ailleurs l'intégrale demandée vaut $e^{\beta^2/2}$. En appliquant les formules vues plus haut nous trouvons

$$J_\alpha = \big[\bar{X}_n - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\big] \tag{36.646}$$

où

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(e^{2\beta Z}) - E(e^{\beta z})^2 = e^{2\beta^2} - e^{\beta^2}. \tag{36.647}$$

Nous avons utilisé la formule (36.512). Si nous choisissons $\beta = 2$, nous trouvons $\sigma^2 \simeq 2926$. Donc si nous voulons une longueur de J_α plus petite que 10^{-2} tout en demandant $\alpha = 0.05$ (ce qui implique $u_\alpha = 1.96$), nous devons avoir

$$1.96 \frac{2973}{\sqrt{n}} < 10^{-2}, \tag{36.648}$$

c'est-à-dire environ $n = 10^{11}$, ce qui soit dit en passant est très largement au delà des capacités de la commande de scilab[867][47]. △

Nous allons maintenant voir quelques méthodes pour réduire la variance.

36.10.1.2 Échantillonnage préférentiel

Nous devons calculer $I = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$. Pour cela nous introduisons une densité g et nous écrivons

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{g(x)} g(x)dx = E\left(\frac{f(Y)}{g(Y)}\right) \tag{36.649}$$

où Y est de densité g. Il faut essayer de trouver g de telle sorte que

$$\text{Var}\left(\frac{f(Y)}{g(Y)}\right) \tag{36.650}$$

soit la plus petite possible.

36.10.1.3 Méthode de la variable de contrôle

Soit $I = E(X)$. Nous introduisons une variable aléatoire Z et nous écrivons

$$I = E(X - Z) + E(Z). \tag{36.651}$$

Il faut alors choisir Z de telle sorte que $E(Z)$ soit calculable et que $X - Z$ ait une variance plus faible. En particulier, Z ne peut pas être indépendante de X.

36.10.1.4 Variables antithétiques

Soit $I = \int_0^1 f(x)dx$. La première idée (exemple 36.185) est d'écrire

$$I = E\big(f(U)\big) \tag{36.652}$$

où $U \sim \mathscr{U}[0,1]$, mais nous n'avons pas de garanties sur la variance de $f(U)$. Nous pouvons écrire

$$I = E\big(f(U)\big) = E\Big[\frac{1}{2}\big(f(U) - f(1-U)\big)\Big]. \tag{36.653}$$

Ici $1 - U$ est encore une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, mais il se fait que la variable aléatoire

$$Z = \frac{1}{2}\big(f(U) + f(1-U)\big) \tag{36.654}$$

a une variance inférieure à $\text{Var}\big(f(U)\big)$. En effet, $f(U)$ et $f(1-U)$ ne sont pas indépendantes, par conséquent le résultat du lemme 36.44 n'est pas valide, par contre la proposition 36.55 reste vraie et nous avons

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{4}\text{Var}\big(f(U)\big) + \frac{1}{4}\text{Var}\big(f(1-U)\big) + \frac{1}{2}\text{Cov}\big(f(U), f(1-U)\big). \tag{36.655}$$

[47] Je n'ai pas vérifié si c'est encore le cas avec les nouvelles versions de scilab. Écrivez-moi si vous le savez.

Nous avons $\text{Var}\big(f(1-U)\big) = \text{Var}\big(f(U)\big)$. En ce qui concerne le terme avec la covariance, nous lui appliquons l'équation (36.106) :

$$\begin{aligned}\text{Cov}\big(f(U),f(1-U)\big) &= E\Big((f(U)-I)(f(1-U)-I)\Big) && \text{(36.656a)}\\ &\leqslant E\big((f(U)-I)^2\big)^{1/2}E\big((f(1-U)-I)^2\big)^{1/2} && \text{(36.656b)}\\ &= \text{Var}\big(f(U)\big) && \text{(36.656c)}\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $E\big(f(U)\big) = E\big(f(1-U)\big) = I$. Au final nous avons bien obtenu

$$\text{Var}(Z) \leqslant \text{Var}\big(f(U)\big). \tag{36.657}$$

36.11 Résultats qui se démontrent avec des variables aléatoires

36.11.1 Nombres normaux

Tout nombre $x \in [0,1[$ admet un unique[48] développement en base $b \geqslant 2$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n(x)}{b^n} \tag{36.658}$$

avec $\epsilon(x) \in \mathbb{D}_b$. Nous excluons $x = 1$ parce que son développement en puissances négatives de b est zéro.

Nous notons $\mathcal{A} = \{0,\dots,b-1\}$. Soit $k \geqslant 1$ et $r \in \mathcal{A}^k$; nous posons

$$N_x(r,n) = \text{Card}\big\{i \in \{1,\dots,n-k+1\} \text{ tel que } \epsilon_1(x) = r_1,\dots,\epsilon_{i+k-1} = r_k\big\}. \tag{36.659}$$

C'est le nombre d'occurrences du motif r (de longueur k) dans les n premières décimales de x.

Définition 36.188.
*Un nombre $x \in [0,1[$ est **normal** en base b si pour tout $r \in \{0,\dots,b-1\}^k$ nous avons*

$$\frac{N_x(r,n)}{n} \to \frac{1}{b^k}. \tag{36.660}$$

Un nombre est normal si il est normal en toute base.

PropEEOXLae

Proposition 36.189 ([868, 128])**.**
Au sens de la mesure de Lebesgue, presque tous les nombres de $[0,1[$ sont normaux.

Démonstration. Pour $x \in [0,1[$, nous notons $\epsilon_n(x)$ son développement en base b. Cela nous donne des variables aléatoires $\epsilon_i : [0,1[\to \mathcal{A}$ dont la loi de probabilité est donnée par

$$P(\epsilon_1 = d) = P\big([\frac{d}{b}, \frac{d+1}{b}[\big) = \frac{1}{b} \tag{36.661}$$

parce que l'intervalle $[\frac{d}{b}, \frac{d+1}{d}[$ est l'ensemble des nombres de $[0,1[$ dont la première décimale est d. Pour la loi des ϵ_i, il faut un peu plus découper, mais ça donne le même résultat : $P(\epsilon_i = d) = 1/b$. Ces variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées. Nous considérons aussi la variable aléatoire

$$\begin{aligned}N(r,n) : [0,1[&\to \mathbb{N}\\ x &\mapsto N_x(r,n)\end{aligned} \tag{36.662}$$

Pour un $r \in \mathcal{A}$ fixé, nous définissons encore la variable aléatoire

$$\begin{aligned}X_j : \mathcal{A} &\to \{0,1\}\\ x &\mapsto \begin{cases}1 & \text{si } \epsilon_j(x) = b\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{36.663}$$

Les variables aléatoires X_j sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées de paramètre $E(X_j) = P(X_j = 1) = P(\epsilon_1 = b) = \frac{1}{b}$. Nous pouvons utiliser dessus la loi forte des grands nombres (théorème 36.129). Pour dire que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s.} E(X_1) = \frac{1}{b}. \tag{36.664}$$

EqNALwzsh

[48] Voir le théorème 10.182 pour plus de détails.

Mais en réalité nous avons aussi $\sum_{j=1}^{n} X_j = N(r,n)$ parce que en appliquant à $x \in [0,1[$:

$$\sum_{j=1}^{n} \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon_j(x) = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \text{Card}\left\{ i \in \{1,\dots,n\} \text{ tel que } \epsilon_i(x) = r \right\} = N_x(r,n), \tag{36.665}$$

de sorte que l'équation (36.664) nous dit exactement que pour tout $r \in \mathcal{A}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_x(r,n)}{n} = \frac{1}{b} \tag{36.666}$$

pour presque tout $x \in [0,1[$.

Il reste à prouver la même chose pour tout $r \in \mathcal{A}^k$. Voyons avec $k = 2$ et $r = (u,v) \in \mathcal{A}^2$. Nous posons

$$Y_j = \mathbb{1}_{\{\epsilon_j = u, \epsilon_{j+1} = v\}}, \tag{36.667}$$

et $N(r,n) = \sum_{j=1}^{n-1} Y_j$. Les Y_i sont encore des binomiales de paramètre $\frac{1}{b^2}$, mais elles ne sont pas indépendantes. En effet pour avoir $Y_1(x) = Y_2(x) = 1$, il faut que les trois premières décimales de x soit en même temps de la forme $uv.$ et $.uv$, donc

$$P(Y_1, Y_2 = 1) = \delta_{u,v}/b^3 \tag{36.668}$$

alors que $P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 2) = 1/b^4$. Nous pouvons contourner ce problème en remarquant que les ϵ_i, eux, sont indépendants. Donc le lemme de regroupement 36.19 nous dit que la famille $\{Y_{2n}\}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes (et idem pour la famille Y_{2n-1}). En effet, les variables aléatoires Y_{2n} correspondent à la partition 23, 45, 67, etc.

Nous appliquons la loi des grands nombres sur les deux familles indépendamment :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j-1} \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{b^2} \tag{36.669}$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j} \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{b^2} \tag{36.670}$$

Pour rappel, le but pour l'instant est d'établir la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j = \frac{1}{b^2}$. Nous allons l'établir séparément pour les termes pairs et impairs de la suite. Pour les pairs :

$$\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n} Y_j = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j}\right) \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{b^2} \tag{36.671}$$

Pour les impairs[49],

$$\frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{2n-1} Y_j = \frac{n}{2n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j-1}\right) + \frac{n}{2n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j}\right) \to \frac{1}{b^2} \tag{36.672}$$

parce que les deux parenthèses convergent vers $\frac{1}{b^2}$ alors que les coefficients devant convergent vers $\frac{1}{2}$.

Au final nous avons bien

$$\frac{N(r,n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} Y_j = \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} Y_j\right) \to \frac{1}{b^2} \tag{36.673}$$

tant que $r \in \mathcal{A}^2$.

Pour prouver la même chose avec $r \in \mathcal{A}^k$, il suffit de faire le même raisonnement en divisant en plus de paquets : $\{Y_{kj+m}\}_{m=1,\dots,k-1}$ sont indépendants et nous utilisons k fois la loi des grands nombres.

Donc pour toute base b nous savons que les nombres non-normaux en base b forment un ensemble de mesure nulle dans $[0,1[$. Il reste à voir que leur union reste de mesure nulle. Cela est vrai parce que nous avons une union dénombrable et qu'une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle par le lemme 14.28. □

[49] Ici dans [128], la seconde somme va jusqu'à $n-1$ et je ne comprends pas pourquoi.

RemUXAkcuH

Remarque 36.190.
Un nombre x est normal en base b si et seulement si la suite $u_k = xb^k$ est équirépartie modulo 1 sur $[0,1]$ (c'est-à-dire quel la suite des parties fractionnelles des u_k est équirépartie). Pour le nombre $0.2357873\ldots$, nous parlons de la suite $0.2357873\ldots$; $0.357873\ldots$; $0.57897\ldots$ etc. C'est la suite des queues de suites de la suite de ses décimales[50].

Deux vidéos de numberphile à propos de nombres normaux et calculables :

- https://www.youtube.com/watch?v=5TkIe60y2GI,
- https://www.youtube.com/watch?v=LsBQhfkw5ag

36.11.2 Théorème de Bernstein

ThoDJIvrty

Théorème 36.191 (Théorème de Bernstein[128])**.**
Soit $f \in C^0\big([0,1],\mathbb{C}\big)$ et son module de continuité

$$\begin{aligned}\omega\colon [0,1] &\to \mathbb{R}\\ h &\mapsto \sup\{|f(u)-f(v)| \text{ tel que } |u-v|<h\}.\end{aligned} \tag{36.674}$$

*Pour $n \geqslant 0$ nous définissons le n^e **polynôme de Bernstein** de f par*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{36.675}$$

Alors il existe C tel que pour tout $n \geqslant 1$:

(1)

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leqslant C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{36.676}$$

EqZQgnVqM

(2)

$$B_n(f) \overset{unif}{\longrightarrow} f \tag{36.677}$$

sur $[0,1]$.

(3) L'inégalité (36.676) est optimale : il existe une fonction $g \in C^0\big([0,1],\mathbb{C}\big)$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $N \geqslant 1$, $\|g - B_n(g)\|_\infty \geqslant \frac{\delta}{\sqrt{n}}$. Cette fonction peut être choisie lipschitzienne. Une telle fonction est donnée par exemple par $g(x) = |x - \frac{1}{2}|$.

(4) Les polynômes forment une partie dense dans $\Big(C^0\big([0,1]\big), \|.\|_\infty\Big)$.

Démonstration. Soit $x \in [0,1]$ et une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes[51] et identiquement distribuées $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de paramètre x. Nous notons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(1) Pour cette histoire de convergence, il faut majorer la quantité $\big|f(x) - B_n(f)(x)\big|$. Pour cela il y a trois astuces. La première est de se souvenir que $E\big(f(x)\big) = f(x)$, et la seconde est que le théorème de transfert 36.97 appliqué à $x \mapsto f(x/n)$ donne[52]

$$E\left(f(\frac{S_n}{n})\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \tag{36.678}$$

c'est-à-dire que

$$B_n(f)(x) = E\left(f(\frac{S_n}{n})\right). \tag{36.679}$$

Et enfin la troisième astuce est d'utiliser le lemme 10.356 pour avoir

$$\omega\left(|x - \frac{S_n}{n}|\right) = \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|\sqrt{n} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}|\right) \leqslant \left(\sqrt{n}|x - \frac{S_n}{n}| + 1\right)\omega(\frac{1}{\sqrt{n}}). \tag{36.680}$$

[50] C'est pas trop bien dit, mais on se comprend, non ?
[51] Définition 36.13.
[52] Nous avons aussi utilisé la formule de l'espérance pour les variables aléatoires discrètes.

À partir de là nous pouvons un peu calculer :

$$\begin{aligned}
\big|f(x)-B_n(f)(x)\big| &= \Big|E\Big(f(x)-f(\frac{S_n}{n})\Big)\Big| && (36.681a)\\
&\leqslant E\Big(|f(x)-f(\frac{S_n}{n})|\Big) && (36.681b)\\
&\leqslant E\Big(\omega\Big(|x-\frac{S_n}{n}|\Big)\Big) && (36.681c)\\
&\leqslant \omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)E\Big(|\sqrt{n}x-\frac{S_n}{n}|+1\Big). && (36.681d)
\end{aligned}$$

Le dernier facteur peut être récrit sous la forme

$$E\Big(\sqrt{n}|x-\frac{S_n}{n}|+1\Big)=\sqrt{n}E\Big(\big|x-\frac{S_n}{n}\big|\Big)+1, \tag{36.682}$$

et c'est là que nous pouvons utiliser l'inégalité de Hölder 27.39 :

$$E\big(|X|\big)=\|X\|_1\leqslant\|X\|_2 \tag{36.683}$$

où $\|X\|_2$ désigne

$$\|X\|_2=\sqrt{E\big(|X|^2\big)}. \tag{36.684}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\big|f(x)-B_n(f)(x)\big|\leqslant\omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big(\sqrt{n}\big\|x-\frac{S_n}{n}\big\|_2+1\Big). \tag{36.685}$$

Nous étudions maintenant de plus près la quantité $\|x-\frac{S_n}{n}\|_2$. D'abord

$$E\Big(\big|x-\frac{S_n}{n}\big|^2\Big)=x^2-2\frac{x}{n}E(S_n)+\frac{1}{n^2}E(S_n^2). \tag{36.686}$$

Ensuite nous savons l'espérance de S_n (qui vaut $E(S_n)=nx$) par (36.437) et le lemme 36.43 nous permet de calculer $E(S_n^2)$ par indépendance des X_i qui composent S_n. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
E\Big(\big|x-\frac{S_n}{n}\big|^2\Big) &= x^2-2x^2+\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}E(X_i)E(X_j)+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) && (36.687a)\\
&= -x^2+\frac{n^2-n}{n^2}x^2+\frac{nx}{n^2} && (36.687b)\\
&= \frac{x(1-x)}{n}. && (36.687c)
\end{aligned}$$

Quelques justifications :

- $E(X_i)=E(X_i^2)=x$ parce que X_i est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre x.
- La première somme contient tous les couples (i,j) sauf les diagonaux ; il y en a donc n^2-n.

En recombinant le tout, [subEqsRSuRoCJ]

$$\begin{aligned}
\big|f(x)-B_n(f)(x)\big| &\leqslant \omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big(\sqrt{n}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}+1\Big) && (36.688a)\\
&= \omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\big(\sqrt{x(1-x)}+1\big) && (36.688b)\\
&\leqslant \frac{3}{2}\omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big). && (36.688c)
\end{aligned}$$

La dernière majoration est une rapide étude de la fonction $x(1-x)$.

Étant donné que les majorations (36.688) sont valables pour tout x, en passant au supremum nous avons

$$\|f-B_n(f)\|_\infty\leqslant\frac{3}{2}\omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\to 0. \tag{36.689}$$

Ceci prouve les deux premiers points du théorème.

(2) Fait.

(3) Nous considérons la fonction

$$g(x) = |x - \frac{1}{2}| \tag{36.690}$$

et nous vérifions qu'elle vérifie toutes les conditions. D'abord si $u, v \in [0,1]$ alors

$$\big|g(u) - g(v)\big| \leqslant |u - v| \tag{36.691}$$

et donc $\omega(h) \leqslant h$, ce qui signifie que g est 1-lipschitzienne. Le principe de cette partie est de montrer que $\|g - B_n(g)\|_\infty$ est plus grand que d'autres trucs (et non plus petit que d'autres trucs comme d'habitude). Nous commençons par

$$\|g - B_n(g)\|_\infty \geqslant g(\frac{1}{2}) - B_n(g)(\frac{1}{2}). \tag{36.692}$$

Très vite nous nous rendons compte que $g(1/2) = 0$. Ensuite nous nous souvenons que

$$B_n(g)(\frac{1}{2}) = E\left(g(\frac{S_n}{n})\right) = E\left(|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}|\right) = \frac{1}{2n}E\big(|2S_n - n|\big). \tag{36.693}$$

si nous posons $\epsilon_i = 2X_i - 1$, alors les ϵ_i sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes et identiquement distribuées qui satisfont à $2S_n - n = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$. Nous utilisons la proposition 36.173 :

$$\|g - B_n(g)\|_\infty \geqslant \frac{1}{2n}E\big(|\sum_i \epsilon_i|\big) \geqslant \frac{1}{2n\sqrt{e}}\big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_j\big\|_2. \tag{36.694}$$

Calculons ce qui est dans la norme :

$$\big\|\sum_{j=1}^n \epsilon_j\big\|_2^2 = E\left(\big(\sum_{j=1}^n \epsilon_j\big)^2\right) = \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} E(\epsilon_i)E(\epsilon_j) + \sum_{i=1}^n E(\epsilon_i^2) = 0 + n = n. \tag{36.695}$$

Nous finissons alors notre travail de majoration :

$$\|g - B_n(g)\|_\infty \geqslant \frac{1}{2n\sqrt{e}}\big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_j\big\|_2 \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{e}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{e}}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{36.696}$$

(4) Nous avons trouvé une suite de polynômes qui converge uniformément vers un élément arbitraire de $C^0\big([0,1]\big)$. Cela prouve la densité.

□

CORooCWLMooWwCOAP

Corolaire 36.192.
Dans $\mathbb{R}$, si $I = [a,b]$ alors les polynômes forment une partie dense dans $\big(C^0(I), \|.\|_\infty\big)$.

Démonstration. Nous supposons que $b > a$. Le cas $a = b$ est assez facile parce que l'espace des fonctions sur $\{a\}$ est de dimension 1.

Nous considérons une bijection affine $\varphi\colon [0,1] \to [a,b]$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. Soit $f \in C^0(I)$.

Si $g = f \circ \varphi$, alors le théorème de Bernstein 36.191 nous donne une suite de polynômes g_k sur $[0,1]$ tels que

$$g_k \xrightarrow{unif} g. \tag{36.697}$$

Nous considérons $f_k = g_k \circ \varphi^{-1}$ qui est encore un polynôme parce que φ^{-1} est affine. Étant donné que φ^{-1} est une bijection, si h est une fonction sur $[0,1]$, nous avons

$$\sup_{x\in[a,b]} \|(h \circ \varphi^{-1})(x)\| = \sup_{y\in[0,1]} \|h(y)\|. \tag{36.698}$$

Cela nous permt le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\|f_k - f\|_\infty &= \|g_k \circ \varphi^{-1} - g \circ \varphi^{-1}\| && \text{(36.699a)}\\
&= \|(g_k - g) \circ \varphi^{-1}\| && \text{(36.699b)}\\
&= \sup_{x\in[a,b]} \|(g_k - g)\big(\varphi^{-1}(x)\big)\| && \text{(36.699c)}\\
&= \sup_{y\in[0,1]} \|(g_k - g)(y)\| && \text{(36.699d)}\\
&= \|g_k - g\|_\infty. && \text{(36.699e)}
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0, \tag{36.700}$$

ce qui prouve la densité. □

Chapitre 37

Statistiques

37.1 Notations et hypothèses

Nous notons X le caractère à étudier, et Ω l'ensemble des individus. Le caractère à étudier est vu comme une fonction sur Ω :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbb{N}, \{0, 1\}, \dots \tag{37.1}$$

Les **statistiques descriptives** sont les techniques pour présenter et résumer les données : diagrammes, graphiques, indicateurs numériques : moyenne, écart-type, médiane, …

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(1) Chaque observation x_i est la réalisation de la variable aléatoire X qui sera de loi inconnue μ.

(2) Le n-uple $(x_1, \dots, x_n)$ est la réalisation de $(X_1, \dots, X_n)$ qui est l'échantillon de taille n.

(3) Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune μ. La loi μ est la **loi parente** de l'échantillon.

Exemple 37.1.
Un échantillon de taille 1 consisterait à tirer au sort une personne dans une population et mesurer sa taille. △

Exemple 37.2.
Une échantillon de taille n consisterait à tirer au sort n personnes dans une population et de mesurer leurs tailles. △

L'**inférence statistique** est l'art de dégager des informations sur la population à partir d'informations partielles : intervalles de confiance, estimateurs, test d'hypothèses, …

En théorie des probabilités, nous connaissons la loi de la variable aléatoire X et nous en déduisons des informations sur la réalisations de X : valeur la plus probable, moyenne, intervalle dans lequel $X(\omega)$ a le plus de chance d'appartenir. En statistique, au contraire, la loi est inconnue et nous cherchons des informations sur la loi à partir d'un échantillon de données numériques observées.

37.2 Modèle statistique

Un **modèle statistique** est un triplet

$$\mathcal{S} = \Big[(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_\theta)_{\theta\in\Theta}, (\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}\Big] \tag{37.2}$$

où $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé, (X_θ) est une famille de variables aléatoires définies sur Ω et telles que pour tout $\theta \in \Theta$, la variable aléatoire X_θ suive la loi μ_θ. Les μ_θ sont des mesures sur les boréliens de $\mathbb{R}$ et pour tout $B \in \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$ nous avons

$$P(X_\theta \in B) = \mu_\theta(B). \tag{37.3}$$

Remarque 37.3.
D'une certaine manière, l'introduction de μ_θ dans la définition est redondante parce que ces mesures sont déjà contenues dans la donnée des variables aléatoires X_θ.

Exemple 37.4 (Modèle statistique gaussien)**.**
Si nous savons que les variables aléatoires X_i suivent une loi gaussienne, alors nous considérons $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et $\theta = (m, \sigma^2)$. Dans ce cas, $\mu_\theta = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et le but de la statistique est de déterminer la valeur de θ qui correspond à une population en partant de l'observation d'un échantillon. △

Définition 37.5.
*Si $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, nous disons que le modèle statistique est un modèle **paramétrique**.*

Le modèle gaussien est un modèle paramétrique : dès que m et σ^2 sont déterminés, la loi du phénomène X est connue.

Définition 37.6.
*Pour chaque $\theta \in \Theta$, nous disons qu'un **échantillon** de taille n associé à un modèle statistique $\big[(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_\theta), (\mu_\theta)\big]$ est un vecteur $\big(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n}\big)$ de taille n de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de la même loi que la variable aléatoire X_θ. La loi μ_θ est la **loi parente** de l'échantillon.*

Définition 37.7.
*Un **modèle d'échantillonnage** sur le modèle statistique $\mathcal{S}$ est une famille $(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})_{\theta\in\Theta}$ d'échantillons de taille $n \geqslant 1$.*

Nous noterons souvent $(X_1, \dots, X_n)$ à la place de $(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})$ un échantillon, mais il faut se souvenir que les X_i suivent toujours la même loi donnée par θ. La loi du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ est $\mu_\theta \otimes \dots \otimes \mu_\theta$ et est définie sur l'espace $(\Omega^n, \mathcal{F} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}, P^{\otimes n})$.

Remarque 37.8.
Le travail du statisticien est de proposer un modèle statistique $\mathcal{S}$ à priori. Si nous étudions la taille d'une population, nous allons choisir un modèle gaussien. Plus le modèle est précis, plus l'espace Θ est petit mais plus il y a de risques que la vérité soit hors de l'ensemble considéré.

Exemple 37.9.
Soit X une variable aléatoire de carré intégrable que l'on sait simuler. Afin d'évaluer la moyenne μ de X, nous pouvons considérer la moyenne empirique des simulations : $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ où les variables aléatoires X_i sont indépendantes, identiquement distribuées et de même loi que X.

La loi des grands nombres nous enseigne que $\bar{X}_n \to \mu$. De plus,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\mu \in \left[\bar{X}_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = \int_{-a}^{a} e^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}. \tag{37.4}$$

En effet, la condition sur μ est équivalente à

$$-a \leqslant \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant a, \tag{37.5}$$

tandis que le théorème central limite nous enseigne que la variable aléatoire $\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ se comporte comme $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque n est grand. Dans ce cas, nous avons que

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in [-a, a]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-x^2/2}dx. \tag{37.6}$$

Notons que dans ce calcul nous avons utilisé le fait que $\mu = E(X_1)$.

Montrons que la suite

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 \tag{37.7}$$

converge presque surement vers σ^2. Le théorème central limite implique que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{p.s.} E(X_1^2) \tag{37.8}$$

et que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 \xrightarrow{p.s.} E(X_1)^2. \tag{37.9}$$

La différence converge donc presque surement vers σ^2 en vertu de la proposition 36.49.

Nous avons également $E(\sigma_n^2)=\sigma^2$. En effet, sachant que $E(X_i)=E(X_1)=\mu$ et que $E(X_i^2)=E(X_1^2)=\mu^2+\sigma^2$,

$$E(\sigma_n^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)\right)+\sum_{i\neq j}E(X_iX_j)) \tag{37.10a}$$

$$=\sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n^2}\big(n(\sigma^2+\mu^2)+(n^2-n)\mu^2\big) \tag{37.10b}$$

$$=\sigma^2-\frac{1}{n}\sigma^2, \tag{37.10c}$$

dont la limite $n\to\infty$ donne bien σ^2.

Nous voudrions à présent montrer que

$$\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma_n/\sqrt{n}}\xrightarrow{\mathscr{L}}\mathscr{N}(0,1). \tag{37.11}$$

Vu que le théorème central limite donne une convergence en loi, nous pouvons utiliser le lemme de Slutsky pour montrer que

$$\left(\frac{\bar{X}_n-\mu}{1/\sqrt{n}},\sigma_n^2\right)\xrightarrow{\mathscr{L}}(\sigma Z,\sigma^2) \tag{37.12}$$

où $Z\sim\mathscr{N}(0,1)$. En vertu de la proposition 36.121 appliquée à la fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{y}} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{37.13}$$

nous avons la convergence en loi

$$f\left(\frac{\bar{X}_n-\mu}{1/\sqrt{n}},\sigma_n^2\right)\xrightarrow{\mathscr{L}}f(\sigma Z,\sigma^2), \tag{37.14}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma_n/\sqrt{n}}\xrightarrow{\mathscr{L}}Z. \tag{37.15}$$

Afin d'être complet, précisons que

$$P\big((\sigma Z,\sigma)\in\mathbb{R}\times\{0\}\big)=0. \tag{37.16}$$

△

PropLimxBNpxbxbsqrt

Proposition 37.10.
Soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées X_i de loi parente $\mathscr{B}(n,p)$. Alors si $\bar{X}_n$ désigne la moyenne empirique,

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\xrightarrow{\mathscr{L}}Z\sim\mathscr{N}(0,1). \tag{37.17}$$

Démonstration. Cela est une application de la loi des grands nombres, tu théorème central limite, du lemme de Slutsky et de la proposition 36.121.

D'abord, la loi des grands nombres nous indique que $\bar{X}_n\to p$ parce que p est l'espérance de Bernoulli. Ensuite nous avons

$$\frac{\bar{X}_n-E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}/\sqrt{n}}=\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{p(1-p)}} \tag{37.18}$$

parce que la variance d'une loi de Bernoulli est $p(1-p)$. Le théorème central limite nous indique par conséquent que

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{p(1-p)}}\xrightarrow{\mathscr{L}}Z\sim\mathscr{N}(0,1). \tag{37.19}$$

Le lemme de Slutsky implique alors la convergence du couple :

$$\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{p(1-p)}},\bar{X}_n\right)\xrightarrow{\mathscr{L}}(Z,p). \tag{37.20}$$

Nous appliquons maintenant la proposition 36.121 avec la fonction

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{p(1-p)}x}{\sqrt{y(1-y)}} \tag{37.21}$$

qui est une fonction dont l'ensemble des points de discontinuité est $C=\{0\}$. Étant donné que $P(\bar{X}_n=0)=0$, la proposition s'applique et nous avons

$$f\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{p(1-p)}},\bar{X}_n\right)\xrightarrow{\mathscr{L}}f(Z,p), \tag{37.22}$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\xrightarrow{\mathscr{L}}Z\sim\mathscr{N}(0,1). \tag{37.23}$$

□

37.3 Modèles d'échantillonnages

Soit X, une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Un **échantillon** de taille n pour X est une suite de n variables aléatoires $(X_1,\dots,X_n)$ définies sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ indépendantes et de même loi que X. Nous disons que la loi de X est la **loi parente** de la suite X_i.

Définition 37.11.
Soit

$$\mathcal{S}=\Big[(\Omega,\mathcal{F},P),(X_\theta),(\mu_\theta)\Big]_{\theta\in\Theta}, \tag{37.24}$$

un modèle statistique. Un ***modèle d'échantillonnage*** *de taille n associé au modèle statistique $\mathcal{S}$ est la donnée d'une famille de n-échantillons $(X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})$ telle que pour tout $\theta\in\Theta$, l'échantillon $(X_{\theta,i})$ soit de variable parente X_θ.*

La **moyenne empirique** du n-échantillon (X_i) est la variable aléatoire

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i. \tag{37.25}$$

La proposition suivante signifie que la moyenne empirique est une « bonne » façon d'approcher la variable aléatoire.

Proposition 37.12.
Soit X, une variable aléatoire dans $L^2(\Omega)$ (c'est-à-dire $E(X^2)<\infty$) d'espérance m et de variance σ^2. Alors

(1) $E(\bar{X}_n)=m$ et $\mathrm{Var}(\bar{X}_n)=\frac{\sigma^2}{n}$.

(2) Nous avons les convergences

$$\bar{X}_n\xrightarrow{p.s.}m \tag{37.26a}$$

$$\frac{\bar{X}_n-m}{\sigma/\sqrt{n}}\xrightarrow{\mathscr{L}}Z\sim\mathscr{N}(0,1). \tag{37.26b}$$

(3) Si X est de loi $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$, alors $\bar{X}_n\sim\mathscr{N}(m,\frac{\sigma^2}{n})$, c'est-à-dire

$$\frac{\bar{X}_n-m}{\sigma/\sqrt{n}}\sim\mathscr{N}(0,1). \tag{37.27}$$

Remarque 37.13.
L'intérêt de cette proposition en statistique descriptive expérimentale est le suivant. La taille moyenne des français est un nombre m qui existe, mais qui est largement hors de portée de l'expérience (mesurer $65\cdot10^6$ personnes risque de prendre un sacré temps). Si on mesure seulement n personnes dont les tailles sont $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ (ici x_i est un *nombre expérimental*, pas une variable aléatoire), alors on peut calculer la moyenne $\bar{x}_n$ de ces n personnes-là. La proposition indique que si n est assez grand, alors $\bar{x}_n$ donne une bonne idée de m.

Ne pas confondre X_n qui est une variable aléatoire, c'est-à-dire une application mesurable, qui nous sert à démontrer des théorèmes en mathématique, avec x_n qui est un nombre mesuré sur le terrain, qui a une existence *physique* bien définie, mais aucun statut mathématique.

Si on croit que toute cette histoire de variables aléatoires, de tribu et de mesures décrit effectivement la réalité, alors on peut croire que le comportement de la suite $\bar{X}_n$ décrit bien le comportement de la suite $\bar{x}_n$ (cette dernière n'étant même pas une suite parce qu'on n'a jamais qu'un nombre fini de mesures expérimentales).

La **variance empirique** d'un échantillon est la variable aléatoire

$$V_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2. \tag{37.28}$$

La **variance empirique corrigée** est la variable aléatoire

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2. \tag{37.29}$$ Eqdefvarempicorri

Lemme 37.14.
La variance corrigée et la variance empirique ont comme espérances :

$$E(V_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \tag{37.30a}$$
$$E(S_n^2) = \sigma^2. \tag{37.30b}$$

Démonstration. Nous commençons par calculer l'espérance de la variance non corrigée. La première étape est de la récrire sous la forme

$$\begin{aligned} V_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_k (X_k^2 - 2X_k\bar{X}_n + \bar{X}_n^2) \\ &= \frac{1}{n}\sum_k X_k^2 - \frac{2}{n}\bar{X}_n \underbrace{\sum_k X_k}_{=n\bar{X}_n} + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_k \bar{X}_n^2}_{=n\bar{X}_n^2} \\ &= \frac{1}{n}\sum_k X_k^2 - 2\bar{X}_n^2 + \bar{X}_n^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_k X_k^2 - \bar{X}_n^2. \end{aligned} \tag{37.31}$$

Nous calculons séparément l'espérance de ces deux termes. Si X est la loi parente des X_i, en utilisant l'indépendance des X_i nous trouvons

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{n}\sum_k X_k^2\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) \\ &= E(X^2) \\ &= E(X)^2 - \operatorname{Var}(X). \end{aligned} \tag{37.32}$$

Nous devons à présent calculer l'espérance de $\bar{X}_n^2$:

$$E(\bar{X}_n^2) = E(\bar{X}_n)^2 + \operatorname{Var}(\bar{X}_n). \tag{37.33}$$

En utilisant le lemme 36.44,

$$\operatorname{Var}(\bar{X}_n) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_k X_k\right) \tag{37.34a}$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_k \operatorname{Var}(X_k) \tag{37.34b}$$
$$= \frac{1}{n}\operatorname{Var}(X). \tag{37.34c}$$

Par conséquent

$$E(V_n^2) = \mathrm{Var}(X)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}\mathrm{Var}(X). \tag{37.35}$$

En ce qui concerne la variance corrigée,

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_k (X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1}V_n^2, \tag{37.36}$$

par conséquent $E(S_n^2) = \frac{n}{n-1}E(V_n^2) = \mathrm{Var}(X)$. □

ThoCochraneChiStudent

Théorème 37.15 (Théorème de Cochran[487])**.**
Soient (X_i) des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$. Alors

ItemThoCochraneChiStudentii

(1) $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$,

(2) $\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right) S_n^2 = \left(\frac{n}{\sigma^2}\right) \bar{V}_n^2 \sim \chi^2(n-1)$,

(3) les variables aléatoires $\bar{X}_n$ et $\bar{V}_n$ sont indépendantes et

$$\frac{\bar{X}_n - m}{S_n/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - m}{\bar{V}_n/\sqrt{(n-1)}} \sim \mathscr{T}(n-1). \tag{37.37}$$

Nous pouvons aussi écrire le dernier résultat en termes de la variance corrigée S_n, l'estimateur sans biais de la variance, parce que

$$\bar{V}_n\sqrt{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}}S_n \tag{37.38}$$

en vertu de la définition (37.29).

Proposition 37.16.
Soit X une variable aléatoire de variance $\mathrm{Var}(X) = \sigma$. Si $E(X^4) < \infty$, alors

(1) $S_n^2 \xrightarrow{p.s.} \sigma^2$.

(2)

$$\frac{S_n^2 - \sigma^2}{\sqrt{\frac{\mu^4 - \sigma^4}{n}}} \xrightarrow{\mathscr{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{37.39}$$

où $\mu^4 = E(X^4)$ est le moment d'ordre 4 de X.

Théorème 37.17.
Si $(X_1, \dots, X_n)$ est un n-échantillon de loi parente $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors

(1) Les variables aléatoires

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \quad et \quad (n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \tag{37.40}$$

sont indépendantes.

(2) La loi de $(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2}$ est $\chi^2(n-1)$.

Si un échantillon vérifie ces deux propriétés, alors les X_i sont de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

L'inégalité de Markov donne une borne supérieure à la probabilité qu'une variable aléatoire positive soit plus grande ou égale à une constante.

ThoInegMarkov

Théorème 37.18 (Inégalité de Markov)**.**
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty[$. Alors

$$P\big(\varphi(X) \geqslant a\big) \leqslant \frac{E\big(\varphi(X)\big)}{a} \tag{37.41}$$

pour tout $a > 0$.

Démonstration. Calculons le second membre :

$$\begin{aligned}\frac{E\big(\varphi(X)\big)}{a} &= \int_\Omega \frac{\varphi(X)}{a} dP \\ &= \int_{\varphi(X)\geqslant a} \underbrace{\frac{\varphi(X)}{a}}_{\geqslant 1} dP + \int_{\varphi(X)<a} \frac{\varphi(X)}{a} dP \\ &\geqslant \int_{\varphi(X)\leqslant a} dP \\ &= P\big(\varphi(X)\leqslant a\big).\end{aligned} \tag{37.42}$$

D'où l'inégalité voulue. □

37.4 Estimation ponctuelle

Nous considérons un modèle statistique

$$\mathcal{S} = \big[(\Omega,\mathcal{F},P),(X_\theta),(\mu_\theta)\big]_{\theta\in\Theta} \tag{37.43}$$

et pour tout θ nous notons $X=(X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})$ un échantillon de loi parente μ_θ. Tant que nous travaillerons avec un θ fixé, nous écrirons $X=(X_1,\dots,X_n)$ sans expliciter la paramètre θ. Nous noterons

$$E_\theta\big(\varphi(X_1,\dots,X_n)\big) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1,\dots,x_n) d\mu_\theta^{\otimes n}(x_1,\dots,x_n). \tag{37.44}$$ EqFbKGZD

Dans cette notation nous plaçons le θ sur l'espérance, tandis qu'en réalité le θ devrait être sur chaque X_1. Tant qu'aucune confusion n'est possible nous ferons toujours cet abus d'écriture.

Le but de la théorie de l'estimation est de déduire la valeur de θ (et donc la loi μ_θ) à partir d'un échantillon de loi parente θ.

Nous posons les hypothèses suivantes.

(1) Le modèle statistique $\mathcal{S}$ est paramétré, c'est-à-dire que $\Theta\subset\mathbb{R}^d$ avec le plus souvent $d=1,2$. Typiquement les paramètres seront la moyenne et la variance.

(2) Le modèle statistique est **identifiable**, c'est-à-dire que pour tout couple $(\theta_1,\theta_2)\in\Theta^2$, si $\theta_1\neq\theta_2$, alors $\mu_{\theta_1}\neq\mu_{\theta_2}$.

(3) Le modèle $\mathcal{S}$ est **dominé** par la mesure de Lebesgue si les lois μ_θ sont continues et par la mesure de comptage si les lois μ_θ sont discrètes.

Exemple 37.19.
Quelques familles identifiables :

- La famille des lois exponentielles $\big(\mathscr{E}(\lambda)\big)_{\lambda>0}$ est identifiable.
- Les lois gaussiennes $\big(\mathscr{N}(m,\sigma^2)\big)_{m\in\mathbb{R},\sigma^2>0}$ sont également identifiables.

En réalité il est assez compliqué de trouver un exemple de modèle non identifiable à moins de la faire exprès. Par exemple en paramétrant les lois exponentielles de la façon suivante : $\big(\mathscr{E}(\sin(\lambda))\big)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Cette famille n'est pas identifiable. △

Le corolaire 14.237 ainsi que l'hypothèse de modèle dominé impliquent que les lois ont des densités. Si la loi μ_θ est discrète, nous notons

$$p(x,\theta) = \mu_\theta(\{x\}) \tag{37.45}$$

la densité de μ_θ par rapport à la mesure de comptage. Si La loi μ_θ est continue, nous notons

$$p(x,\theta) = f_\theta(x) \tag{37.46}$$

la densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Si μ_θ est une loi discrète et si $(X_1,\dots,X_n)$ est un échantillon de taille n, alors pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ nous avons

$$p_n(x_1,\dots,x_n;\theta) = \mu_\theta^{\otimes n}\big(\{x_1,\dots,x_n\}\big) = \mu_\theta(\{x_1\})\dots\mu_\theta(\{x_n\}) = p(x_1,\theta)\dots p(x_n,\theta). \tag{37.47}$$

La première et la dernière égalité sont des notations ; la seconde est une conséquence de l'indépendance des X_i contenues dans l'échantillon. Pour une loi continue, nous adoptons la même notation. Le vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ admet la densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = f_\theta(x_1) \dots f_\theta(x_n) = p(x_1, \theta) \dots p(x_n, \theta). \tag{37.48}$$

Exemple 37.20.
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathscr{B}(1, \theta)$ avec $\theta \in]0, 1[$. C'est une loi discrète portée par l'ensemble $\{0, 1\}$. Nous avons

$$p(x, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \neq x \neq 1 \\ 1 - \theta & \text{si } x = 0 \\ \theta & \text{si } x = 1. \end{cases} \tag{37.49}$$

De façon plus condensée nous pouvons écrire

$$p(x, \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x). \tag{37.50}$$

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la densité du n-échantillon est donnée par

$$p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \theta^{x_1 + \dots + x_n} (1 - \theta)^{n - \sum_i x_i} \mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(x_1, \dots, x_n). \tag{37.51}$$

△

37.5 Statistiques et estimateurs

Définition 37.21.
*Une **statistique** sur un modèle d'échantillonnage est une variable aléatoire fonction de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ ne dépendant pas de θ[1]. C'est-à-dire une application borélienne $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ne dépendant pas de θ. La statistique associée à cette application est $S = T(X_1, \dots, X_n)$.*

Les fonctions $T(X_1, \dots, X_n)$ données par $\sum_i X_i$, $e^{\sum X_i}$ sont des statistiques. La constante $\frac{1}{2}$ est également une statistique (mais elle est moins intéressante).

Un **estimateur** est une statistique qui prend ses valeurs dans Θ. Nous la noterons

$$\hat{\theta}_n = \theta(X_1, \dots, X_n). \tag{37.52}$$

La fonction $\hat{\theta}_n$ est borélienne à valeurs dans Θ.

Exemple 37.22.
Soit un n-échantillon de loi $\mathscr{B}(1, \theta)_{\theta \in [0,1]}$. Les fonctions $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $\hat{\varphi}_n = \frac{1}{2}$ sont des estimateurs. Cependant nous devinons que la première va être plus intéressante que la seconde. △

Pour la suite, nous travaillerons avec des estimateurs de carré intégrable, c'est-à-dire que

$$E_\theta\big(|\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)|^2\big) < \infty \tag{37.53}$$

pour tout $\theta \in \Theta$.

37.5.1 Qualité des estimateurs

Définition 37.23.
*Un estimateur est **convergeant** ou **consistant** si pour tout $\theta \in \Theta$, la suite de variables aléatoires $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ converge en probabilité vers θ.*

En d'autres termes, l'estimateur $\hat{\theta}_n$ est convergent si pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $\eta > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} P\big(|\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \eta\big) = 0. \tag{37.54}$$

La probabilité dans le membre de gauche est donnée par

$$\mu_\theta^{\otimes n}\Big(\big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } |\hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n) - \theta| > \eta\big\}\Big). \tag{37.55}$$

[1] Parce que d'habitude c'est ce qu'on cherche à estimer.

Soit $\hat{\theta}_n$ un estimateur pour θ. Nous cherchons à minimiser l'erreur commise en remplaçant θ par $\hat{\theta}_n$. Nous introduisons donc le **risque quadratique** de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ par

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = E_\theta\big((\hat{\theta}_n - \theta)^2\big). \tag{37.56}$$

Nous disons qu'un estimateur $\hat{\theta}_{n,1}$ est préférable à $\hat{\theta}_{n,2}$ si pour tout $\theta \in \Theta$ nous avons

$$R(\hat{\theta}_{n,1}, \theta) < R(\hat{\theta}_{n,2}, \theta). \tag{37.57}$$

Lemme 37.24.
Une formule alternative pour le risque quadratique :

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) + \big(E_\theta(\hat{\theta}_n) - \theta\big)^2 \tag{37.58}$$

Démonstration. Nous avons

$$E_\theta\Big((\hat{\theta}_n - \theta)^2\Big) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n - \theta) + E_\theta(\hat{\theta}_n - \theta)^2. \tag{37.59}$$

D'une part $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n - \theta) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)$ et d'autre part $E_\theta(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = \big[E(\hat{\theta}_n) - \theta\big]^2$. Par conséquent

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) + \Big(E(\hat{\theta}_n) - \theta\Big)^2. \tag{37.60}$$

EqRisqueetbaisiVar

□

Le **biais** de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ est la quantité

$$E_\theta(\hat{\theta}_n) - \theta. \tag{37.61}$$

À ce niveau, nous rappelons que nous écrivons E_θ l'espérance calculée en supposant la valeur θ pour le paramètre des différentes variables aléatoires entrant dans le calcul. Voir la discussion autour de la définition (37.44).

ExytNlTq

Exemple 37.25.
Dans le cadre de la proposition 36.161, nous voulons savoir si $\frac{N_t}{t}$ est un estimateur sans biais de λ. Pour ce faire nous calculons

$$E_\lambda\left(\frac{N_t}{t}\right) = \frac{1}{t}E_\lambda(N_t) = \lambda \tag{37.62}$$

parce que $E(N_t) = \lambda t$. Ici nous avons calculé $E(N_t)$ en prenant λ pour valeur du paramètre du processus de Poisson, alors qu'en principe c'est justement le paramètre que nous voulons estimer. △

Exemple 37.26.
La moyenne empirique $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de la moyenne. L'estimateur

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_i)^2 \tag{37.63}$$

est un estimateur sans biais de la variance. △

Un estimateur sans biais n'est pas toujours de meilleure qualité qu'un estimateur avec biais. En effet ce que nous voulons est de se donner un (petit) intervalle I autour de la bonne valeur de θ et de maximiser $P(\hat{\theta}_n \in I)$. Sur la figure 37.1, c'est l'estimateur biaisé rouge qui tombe plus souvent sur le bon intervalle que l'estimateur non biaisé bleu.

Nous allons maintenant étudier quelques manières de construire des estimateurs convergeant. Il vont évidemment s'appuyer sur la loi des grands nombres.

37.5.2 Méthode des moments

Sans surprises, un bon estimateur pour la moyenne est

$$\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{37.64}$$

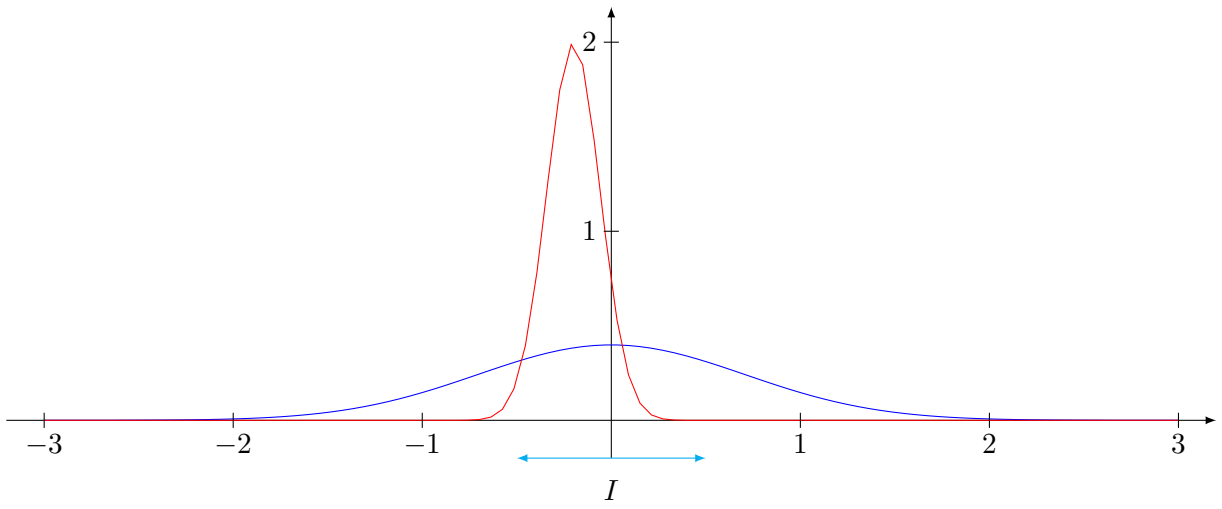


FIGURE 37.1 : Un estimateur sans biais et un avec biais. LabelFigBiaisOuPas

Plus généralement, nous supposons qu'il existe une fonction borélienne[2] $M\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que

$$E_\theta\big(|M(X)|\big)<\infty \tag{37.65}$$

où X est la loi parente de l'échantillon. Supposons également que la fonction

$$h(\theta)=E_\theta\big(M(X)\big) \tag{37.66}$$

soit inversible et continue sur Θ. Dans ce cas, pour estimer le paramètre θ, nous considérons l'estimateur

$$\hat{\theta}_n=h^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right). \tag{37.67}$$

Cela est un estimateur convergent. En effet, la loi des grands nombres dit que

$$\frac{1}{n}\sum_i M(X_i)\xrightarrow{p.s.}E_\theta\big(M(X)\big). \tag{37.68}$$

En composant avec la fonction h, nous avons

$$\hat{\theta}_n\xrightarrow{p.s.}h^{-1}\Big(E_\theta\big(M(X)\big)\Big)=\theta. \tag{37.69}$$

Dans cette construction, $M(X)$ est le moment de X que l'on souhaite déterminer.

Exemple 37.27.
Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un échantillon de loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Construire $\hat{\lambda}_n$. Pour une loi exponentielle,

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}. \tag{37.70}$$

Nous devons donc déterminer le moment d'ordre 1 de X (c'est-à-dire sa moyenne). Nous considérons donc la fonction $M(x)=x$; par conséquent

$$h(\lambda)=E(X)=\frac{1}{\lambda} \tag{37.71}$$

et $h^{-1}(\theta)=1/\theta$. L'estimateur que nous considérons pour λ est finalement

$$\hat{\theta}_n=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}. \tag{37.72}$$

△

37.5.3 Méthode de substitution

Supposons que nous connaissions un estimateur convergent $\hat{\theta}_n\to\theta$. Si $g\colon \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$g(\hat{\theta}_n)\to g(\theta). \tag{37.73}$$

[2] Définition 14.55.

37.5.4 Méthode du maximum de vraisemblance

ExVrasMaxLp

Exemple 37.28.
Nous désirons contrôler la qualité d'une chaine de production ; pour cela nous prélevons un échantillon de 10 pièces, et nous en trouvons 3 défectueuses. Que dire de la proportion de pièces défectueuses ?

Évidemment, le plus probable est que la proportion de pièces défectueuses soit de 1/3. Analysons en détail comment nous arrivons à ce résultat. Nous considérons que le fait de tirer 10 pièces revient à une expérience binomiale de paramètres 10 et de probabilité p inconnue. Dans ce cas, la probabilité d'observer exactement 3 pièces défectueuses est de

$$L(p) = P(X = 3) = \binom{10}{3} p^3 (1-p)^7. \tag{37.74}$$

Le maximum de $L(p)$ est $p = 3/10$.

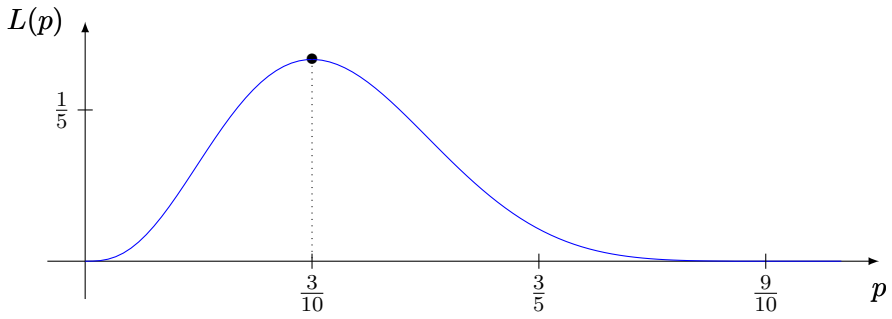


FIGURE 37.2 : La fonction de vraisemblance de l'exemple 37.28. LabelFigMaxVraissLp

△

Soit $(x_1, \dots, x_n)$, une réalisation de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$. L'application

$$\theta \mapsto p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta) \tag{37.75}$$

est la **vraisemblance** de l'échantillon. Nous définissons $\hat{\theta}_n$ par

$$p_n(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}_n) = \sup_{\theta \in \Theta} p_n(x_1, \dots, x_n; \theta). \tag{37.76}$$

Remarque 37.29.
Nous passons sous le silence le fait que la fonction sup soit une fonction mesurable, et que par conséquent $\hat{\theta}_n$ soit bien une variable aléatoire.

La variable aléatoire $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ est l'**estimateur de maximum de vraisemblance** de θ.

37.5.5 Exemples sous forme d'exercices

Exemple 37.30.
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathscr{B}(1, \theta)$ avec $\theta \in [0, 1]$. Trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ.

En utilisant la densité de la loi multinomiale,

$$p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_i p(x_i, \theta) = \prod_i \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} \mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(x_1, \dots, x_n). \tag{37.77}$$

En passant au logarithme, si $x_i \in \{0, 1\}$,

$$L_n(\theta) = \sum_i x_i \ln(\theta) + (1 - x_i) \ln(1 - \theta) \tag{37.78}$$

En passant à la dérivée, nous trouvons que l'extrémum est donné par

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{37.79}$$

△

Exemple 37.31.
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $\theta > 0$. Trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ.

Nous avons

$$p_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i}. \tag{37.80}$$

En passant au logarithme la fonction à maximiser est

$$L(\theta) = n \ln(\theta) - \theta \sum_i x_i. \tag{37.81}$$

La maximisation donne

$$\theta = \frac{n}{\sum_i x_i}, \tag{37.82}$$

c'est-à-dire

$$\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{n}{\sum_i X_i} = \frac{1}{\bar{X}_n}. \tag{37.83}$$

Ce résultat n'est pas étonnant vu que le paramètre λ de la loi exponentielle est l'inverse de la moyenne. △

Exemple 37.32.
Soit $(X_1, \dots, X_n)$, un échantillon de loi parente uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$.

(1) Montrer que la fonction de vraisemblance est donnée par

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\infty[}\big(\min(x_1, \dots, x_n)\big) \mathbb{1}_{[\max(x_1,\dots,x_n),\infty[}(\theta). \tag{37.84}$$

(2) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

Lorsque nous parlons de paramètres qui peuvent prendre un spectre continu de valeurs, il est inutile de calculer la *probabilité* parce qu'elle est nulle. Le système de maximum de vraisemblance fonctionne avec les densités. Dans notre cas, la fonction de vraisemblance est le produit des densités :

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta) \tag{37.85a}$$

$$= \prod_i \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i) \tag{37.85b}$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]^n}(x_1, \dots, x_n). \tag{37.85c}$$

De cette expression nous voyons que $\min\{x_1, \dots, x_n\}$ doit être positif en même temps que le maximum doit être plus petit que θ. Cette seconde condition peut s'écrire $\mathbb{1}_{[\max\{x_1,\dots,x_n\},\infty[}(\theta)$. Au final nous avons

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\infty[}\big(\min(x_1, \dots, x_n)\big) \mathbb{1}_{[\max\{x_1,\dots,x_n\},\infty[}(\theta). \tag{37.86}$$

Il n'est évidemment pas possible de dériver explicitement cette expression. Par contre pour que cette fonction soit non nulle, il faut obligatoirement $\theta \geqslant \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Par conséquent elle prend son maximum pour $\theta = \max\{x_1, \dots, x_n\}$.

La conclusion est que l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ est $\hat{\theta}_n = \max_i\{X_i\}$. △

Exemple 37.33.
Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance de la moyenne pour un modèle statistique dans laquelle la famille de probabilités est

$$(\mu_\theta) = \{\mathscr{N}(\theta, \sigma^2) \text{ tel que } \theta \in \mathbb{R}\}. \tag{37.87}$$

Nous supposons que σ est connu.

La densité de la variable aléatoire conjointe $(X_1, \dots, X_n)$ au point $(x_1, \dots, x_n)$ est le produit des densités, donc

$$\prod_{i=1}^{n} \gamma_{m,\sigma}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp -\frac{1}{2} \left(\sum_i \left(\frac{x_i - m}{\sigma} \right)^2 \right). \tag{37.88}$$

Étant donné que le but est de maximiser, nous pouvons oublier le facteur et passer au logarithme :

$$L_0(\bar{x}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)^2. \tag{37.89}$$

Nous pouvons également supprimer le $\frac{1}{2}$ et le $1/\sigma^2$. La fonction à maximiser devient

$$L(x_1, \dots, x_n) = -\sum_i (x_i - m)^2, \tag{37.90}$$

dont la dérivée vaut $2nm - 2\sum_i x_i$. Par conséquent nous avons un maximum avec

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{37.91}$$

△

37.5.6 Estimation d'une fonction de répartition

ThoXAEMbTI

Théorème 37.34 (Glivenko-Cantelli[869])**.**
Soient X_i des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi dont la fonction de distribution est F (inconnue). Nous définissons l'estimateur

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \leqslant x}. \tag{37.92}$$

EqMQNRVcT

Alors

$$P\big(\lim_{n\to\infty} \|F_n - F\|_\infty = 0\big) = 1. \tag{37.93}$$

Autrement dit, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \|F_n(\omega, .) - F\|_\infty = 0. \tag{37.94}$$

C'est-à-dire qu'il y a presque certainement convergence en probabilité.

Notons que de façon générale lorsqu'on parle d'estimateurs, partout où il y a un « n » dans une variable aléatoire, il y a une dépendance sous-entendue en ω.

PropHSHFbEq

Proposition 37.35.
Pour presque tout x, l'estimateur $F_n(x)$ est sans biais par rapport à $F(x)$:

$$E\big(F_n(x)\big) = F(x). \tag{37.95}$$

Démonstration. C'est juste un calcul :

$$E\big(F_n(x)\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\big(\mathbb{1}_{\{X_i \leqslant x\}}\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F(x) = F(x). \tag{37.96}$$

□

37.5.7 Exemples sous forme d'exercices

Exemple 37.36.
Dans cet exercice nous construisons un estimateur biaisé qui présente un risque quadratique inférieur à un estimateur non biaisé.

Soit un modèle statistique dont la famille de lois est $\{\mathcal{N}(m, \sigma^2)\}_{\theta\in]0,\infty[}$ où m est un paramètre réel connu. En ce qui concerne la variance nous considérons

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2. \tag{37.97}$$

(1) Montrer que $\hat{\sigma}_n^2$ est un estimateur sans biais de θ.

(2) Montrer que le risque quadratique de $\hat{\sigma}_n^2$ est

$$R(\hat{\sigma}_n^2, \theta) = \frac{2\theta^2}{n}. \tag{37.98}$$

(3) Considérer la famille d'estimateurs $c\hat{\sigma}_n^2$ avec $c > 0$. Déterminer la valeur de c qui minimise le risque quadratique de l'estimateur.

(1) Nous calculons

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_n^2) &= \frac{1}{n}\sum_i E\big[(X_i - m)^2\big] \\ &= \frac{1}{n}\sum_i \operatorname{Var}(X_i - m) - \frac{1}{n}\sum_i E(X_i - m^2) \\ &= \frac{1}{n}\sum_i \operatorname{Var}(X_i) \\ &= \sigma^2. \end{aligned} \tag{37.99}$$

(2) Par la formule (37.60) nous savons que le risque d'un estimateur sans biais est donné par sa variance :

$$R(\hat{\sigma}_n, \theta) = \operatorname{Var}(|\hat{\sigma}_n^2 - \theta|) = \operatorname{Var}(\hat{\sigma}_n^2). \tag{37.100}$$

Étant donné que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, le lemme 36.44 nous enseigne que la variance de la somme est la somme des variances. Nous avons donc à calculer

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(|\hat{\sigma}_n^2 - \theta|) &= \operatorname{Var}(\hat{\sigma}_n^2) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_i \operatorname{Var}\big[(X_i - m)^2\big] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_i E\big[(X_i - m)^4\big] - E\big[(X_i - m)^2\big]^2. \end{aligned} \tag{37.101}$$

Ces espérances ne sont pas très compliquées à calculer en utilisant la fonction caractéristique donnée par la proposition 36.163 :

$$\Phi_{X-m}(t) = E\big(e^{it(X-m)}\big) = e^{-itm}E(e^{itX}) = e^{-itm}\Phi_X(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \tag{37.102}$$

Nous avons $\Phi^{(4)}(0) = 3\sigma^4$ et $\Phi''(0) = -\sigma^2$. Par conséquent

$$\operatorname{Var}(\hat{\sigma}_n^2) = \frac{1}{n^2}\sum_i 2\theta^2 = \frac{2\theta^2}{n}. \tag{37.103}$$

Notez ici que $\theta = \sigma^2$.

(3) En tenant compte du fait que $\operatorname{Var}(\hat{\sigma}_n^2) = \frac{2\theta^2}{n}$ et $E(\hat{\sigma}_n^2) = \theta$, nous avons

$$E\big((c\hat{\sigma}_n^2 - \theta)^2\big) = \operatorname{Var}(c\hat{\sigma}_n^2 - \theta) + E(c\hat{\sigma}_n^2 - \theta)^2 \tag{37.104a}$$

$$= 2\frac{c^2\theta^2}{n} + (c-1)^2\theta^2. \tag{37.104b}$$

subeqcdtedestcthecmu

La dérivée (par rapport à c) de cela s'annule pour $c_0 = \frac{n}{n+2}$. Notons que nous n'avons pas tout à fait démontré que cela est bien un minimum. Calculons cependant le risque quadratique de notre estimateur pour cette valeur de c. Pour cela nous reportons $c = c_0$ dans l'expression (37.104b) :

$$E\big(\frac{n}{n+2}\hat{\sigma}_n^2\big) = \frac{2\theta^2}{n+2}. \tag{37.105}$$

Cela est effectivement plus petit que $R(\hat{\sigma}_n^2, \theta)$.

Nous avons ainsi construit un estimateur biaisé qui a un risque quadratique plus petit que l'estimateur non biaisé. △

Exemple 37.37.
Nous considérons la famille de probabilités $\mu_\theta = \mathcal{N}(\theta)$ où $\theta = (m, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[$. Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre $\theta = (m, \sigma^2)$.

Pour chaque observation x_i nous avons une densité gaussienne. Le produit donne

$$p\big(x_1, \dots, x_n; (m, \sigma^2)\big) = \frac{1}{\sigma^2 (2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (x_i - m)^2 \right]. \tag{37.106}$$

En passant au logarithme et en supprimant des facteurs inutiles à la maximisation,

$$L(m, \sigma) = -n \ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (x_i - m)^2. \tag{37.107}$$

L'annulation de la dérivée par rapport à m donne immédiatement $m = \frac{1}{n} \sum_i x_i$. L'annulation de la dérivée par rapport à σ donne

$$-n\sigma^2 + \sum_i (x_i - m)^2 = 0 \tag{37.108}$$

et donc

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x}_n). \tag{37.109}$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance du couple $\theta = (m, \sigma^2)$ est donc

$$\hat{\theta}_n = \left(\frac{1}{n} \sum_i X_i, \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2 \right). \tag{37.110}$$

△

37.5.8 Espérance et variance d'un estimateur

Soit $T_n = T(X_1, \dots, X_n)$ un estimateur du paramètre θ dans un modèle d'échantillonnage. Les moyennes et variances de l'estimateur sont les variables aléatoires

$$m_{\theta,n} = E_\theta(T_n) = \int_{\mathbb{R}^n} T_n(x_1, \dots, x_n) d\mu_\theta^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n), \tag{37.111a}$$

$$\mathrm{Var}_\theta(T_n) = \int_{\mathbb{R}^n} [T_n(x_1, \dots, x_n) - m_{\theta,n}]^2 d\mu_\theta^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n), \tag{37.111b}$$

Lemme 37.38.
Si l'estimateur T_n satisfait

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta(T_n) = \theta \tag{37.112a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\theta(T_n) = 0, \tag{37.112b}$$

alors il est convergent.

Démonstration. Nous utilisons l'inégalité de Markov (théorème 37.18) et nous introduisons l'espérance de l'estimateur :

$$P\big(|T_n(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \epsilon\big) \leqslant \frac{1}{\epsilon} E\big(T_n(X_1, \dots, X_n) - \theta\big) \tag{37.113a}$$

$$\leqslant \frac{1}{\epsilon} E\big(|T_n - m_{n,\theta}|\big) + \frac{1}{\epsilon} E\big(|m_{n,\theta} - \theta|\big) \tag{37.113b}$$

$$\tag{37.113c}$$

Le second terme est l'espérance d'une constante. Nous majorons le premier terme en utilisant le fait que $\|.\|_1 \leqslant \|.\|_2$ (voir la remarque 27.40 après l'inégalité de Hölder) :

$$P\big(|T_n(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \epsilon\big) \leqslant \frac{1}{\epsilon} E\big(|T_n - m_{n,\theta}|^2\big)^{1/2} + \frac{1}{\epsilon} |E_\theta(T_n) - \theta| \tag{37.114a}$$

$$= \frac{1}{\epsilon} \mathrm{Var}(T_n)^{1/2} + \frac{1}{\epsilon} |E_\theta(T_n) - \theta|. \tag{37.114b}$$

Les deux termes tendent séparément vers zéro par hypothèse. Nous avons par conséquent la convergence en probabilité $T_n \to \theta$. □

37.6 Estimation par intervalle de confiance

Nous voudrions estimer la proportion d'individus dans une population ayant un certain caractère déterminé par une variable booléenne : chaque individu a ou non le caractère étudié. L'échantillon sera donc une suite de 0 et de 1.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ nous notons

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{ème individu a le caractère} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{37.115}$$

et $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Notre modèle statistique sera

$$\mathcal{S} = \Big[(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_\theta), \mathscr{B}(1, \theta)\Big] \tag{37.116}$$

où Ω est l'ensemble des individus étudiés, P est la manière de choisir les individus lors du sondage (essentiellement c'est une loi uniforme) et X_θ est la variable aléatoire

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ a le caractère} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{37.117}$$

Cela est une variable aléatoire de distribution $\mathscr{B}(1, p)$ où p est inconnu. Ici, $\Theta = [0, 1]$ est l'ensemble des p possibles.

Remarque 37.39.
Nous supposons que Ω est la population entière et que la variable aléatoire est l'opinion de la personne ω. En cela, nous considérons que le tirage de l'échantillon est sans remise. Le fait que nous modélisions par une variable aléatoire de Bernoulli signifie que nous considérons l'approximation dans laquelle la population globale est grande.

Nous supposons que nous ayons un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ dont nous avons observé une réalisation $(x_1, \dots, x_n)$ de fréquence $\bar{x}_n$. Nous voudrions déterminer un intervalle dans lequel $\bar{X}_n$ a de fortes chances de se trouver. Plus précisément nous considérons un petit α et nous cherchons ϵ tel que

$$P\big(p \in [\bar{X}_n - \epsilon, \bar{X}_n + \epsilon]\big) = 1 - \alpha. \tag{37.118}$$

Typiquement, $\alpha = 5\%$. Le nombre α est le **niveau de confiance** que nous nous fixons à priori.

Si nous trouvons un intervalle I tel que $P(p \in I) = 1 - \alpha$, nous disons que l'intervalle est **exact**, si nous avons $P(p \in I) \geqslant 1 - \alpha$, nous disons que l'intervalle est **par excès**.

Il y a deux points de départ pour trouver l'intervalle. Le plus simple est d'utiliser le théorème central limite et considérer

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, 1). \tag{37.119}$$

La seconde est d'utiliser la loi exacte : $n\bar{X}_n = \sum_i X_i \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Bien entendu la seconde donne lieu à des calculs plus compliqués.

Remarque 37.40.
Dans certaines vraies vies (par exemple en médecine), la taille des échantillons est très réduite. Dans ce cas le théorème central limite n'a aucun sens et les calculs exact s'imposent.

De plus dans de nombreux cas de la vraie vie, nous avons un ordinateur à disposition pour calculer avec la loi exacte. L'utilisation du théorème central limite dans le but de produire un intervalle de confiance semble donc de plus en plus être une survivance du passé.

Dans la suite, nous allons supposer que n est suffisamment grand pour justifier l'approximation normale du théorème central limite 36.136. Si Z est une variable aléatoire normale centrée réduite, notre premier

essai est de faire

subEqumaleftLthe
$$1-\alpha = P\big(p\in[\bar{X}_n-\epsilon,\bar{X}_n+\epsilon]\big) \tag{37.120a}$$
$$= P\left(\frac{-\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\leqslant\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{p(1-p)}}\leqslant\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \tag{37.120b}$$
$$\simeq P\left(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\leqslant Z\leqslant\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \tag{37.120c}$$
$$= 2P\left(Z\leqslant\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)-1. \tag{37.120d}$$

La dernière ligne utilise la symétrie de la distribution $\mathcal{N}(0,1)$. Le nombre ϵ que nous cherchons vérifie donc

$$P\left(Z\leqslant\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)=1-\frac{\alpha}{2}. \tag{37.121}$$

De nos jours, les ordinateurs donnent la loi de répartition inverse des normales. Cela nous fournit un nombre t_α tel que

Eqepsnqsrtpptalpah
$$\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}=t_\alpha \tag{37.122}$$

où t_α est le nombre tel que $P(Z\leqslant t_\alpha)=1-\alpha/2$.

Conclusions de ce premier essai :

(1) Le problème est que nous ne pouvons pas déduire ϵ de l'équation (37.122) parce que p est inconnu.

(2) Cela ruine notre premier essai et nous demande de trouver mieux.

(3) L'astuce est évidemment de remplacer p par $\bar{X}_n$, mais il faut le justifier.

Méthode Slutsky Le point de départ du premier essai infructueux était la convergence

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{p(1-p)}}\xrightarrow{\mathscr{L}}N\sim\mathcal{N}(0,1) \tag{37.123}$$

donnée par le théorème central limite 36.136. Ce que nous voudrions en réalité est la convergence

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\xrightarrow{\mathscr{L}}N \tag{37.124}$$

La loi des grands nombres nous donne

$$\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)\xrightarrow{p.s.}p(1-p). \tag{37.125}$$

Par conséquent le lemme de Slutsky implique la convergence en loi du couple :

EqGJxxjqs
$$\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{p(1-p)}},\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}\right)\xrightarrow{\mathscr{L}}\big(N,\sqrt{p(1-p)}\big). \tag{37.126}$$

À ce point des opérations nous pouvons utiliser la proposition 36.121 au couple avec la fonction

$$f(x,y)=\frac{x}{y}\sqrt{p(1-p)} \tag{37.127}$$

dont la probabilité d'être continue est 1 ($y=0$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$). La conclusion du théorème est que

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\xrightarrow{\mathscr{L}}\mathcal{N}(0,1). \tag{37.128}$$

C'est à partir de là que nous pouvons construire notre intervalle de confiance :

$$1-\alpha = P(\bar{X}_n - \epsilon \leqslant p \leqslant \bar{X}_n + \epsilon) \tag{37.129a}$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \geqslant \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \geqslant \frac{-\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \right) \tag{37.129b}$$

$$\simeq P\left(\frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \geqslant N \geqslant \frac{-\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \right). \tag{37.129c}$$

Nous cherchons maintenant dans les tables le ξ qui fait

$$P(-\xi \leqslant N \leqslant \xi) = 1-\alpha \tag{37.130}$$

puis nous cherchons ϵ de telle sorte à avoir

$$\frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} = \xi. \tag{37.131}$$

Dans cette équation tout est connu à part le ϵ qui se découvre.

Méthode piétonne Nous remarquons que l'événement

$$-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \tag{37.132}$$

est le même que l'événement

$$\left| \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \right| \leqslant t_\alpha. \tag{37.133}$$

Vu que t_α est positif, cela est encore le même événement que

$$n\frac{(\bar{X}_n - p)^2}{p(1-p)} \leqslant t_\alpha^2 \tag{37.134}$$

ou encore

$$p^2(n+t_\alpha^2) - p(2n\bar{X}_n + t_\alpha^2) + n\bar{X}_n^2 \leqslant 0. \tag{37.135}$$

Les racines du polynôme du membre de gauche sont

$$p_\pm = \frac{2n\bar{X}_n + t_\alpha^2 \pm \sqrt{(2n\bar{X}_n + t_\alpha)^2 - 4(n+t_\alpha^2)n\bar{X}_n^2}}{2(n+t_\alpha^2)}. \tag{37.136}$$

Le but étant d'effectuer une limite $n \to \infty$, nous factorisons d'abord n. Après simplification

$$p_\pm = \frac{\bar{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{2n} \pm \sqrt{\frac{t_\alpha^2}{4n^2} + \frac{t_\alpha \bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}}{1+\frac{t_\alpha^2}{2n}}. \tag{37.137}$$

Étant donné que nous considérons que n est grand, nous allons négliger les termes en $\frac{1}{n}$ en faisant attention à ce que le terme en $\frac{1}{n}$ sous la racine est en réalité $1/\sqrt{n}$ et ne doit pas être négligé. Nous trouvons, à cette approximation, que

$$p \in \Big[\bar{X}_n - t_\alpha\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + t_\alpha\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \Big] \tag{37.138}$$

avec une probabilité $1-\alpha$.

37.6.1 Région de confiance

Soit un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de loi parente μ_θ. Nous supposons $\Theta \subset \mathbb{R}$ avec Θ ouvert. Soit $\alpha \in [0,1]$ un intervalle de confiance et une application mesurable

$$\begin{aligned} \Lambda \colon \mathbb{R}^n &\to \mathcal{B}\text{or}(\Theta) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \Lambda(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{37.139}$$

On appelle **région de confiance exacte** au niveau de confiance $1-\alpha$ une région aléatoire $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$ telle que

$$P\big(\theta \in \Lambda(x_1, \dots, x_n)\big) = 1-\alpha. \tag{37.140}$$

Si $d = 1$, la région $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$ est un intervalle.

37.6.2 Fonction pivotale

Soit $\hat{\theta}_n$, un estimateur de θ. Une fonction v sur $\Theta \times \Theta$ est **pivotale** pour θ si la loi de la variable aléatoire $v(\hat{\theta}_n, \theta)$ ne dépend pas de θ. Elle est **asymptotiquement pivotale** si

$$v(\hat{\theta}_n, \theta) \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi \tag{37.141}$$

où ξ est une variable aléatoire indépendante de θ.

En pratique, nous essayons de faire apparaitre une variable aléatoire de loi connue qui ne dépend pas du paramètre que l'on recherche. Si la variance est connue et si l'échantillon est grand, le théorème central limite nous permet d'introduire une loi normale centrée réduite.

Exemple 37.41.
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires de loi parente $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$. Une fonction asymptotiquement pivotale pour m est

$$v(z_1, z_2) = \frac{z_1 - z_2}{\alpha/\sqrt{n}} \tag{37.142}$$

parce que la variable aléatoire

$$v(\bar{X}_n, m) = \frac{\bar{X}_n - m}{\alpha/\sqrt{n}} \tag{37.143}$$

tend vers $\mathscr{N}(0,1)$ qui ne dépend pas de m. △

Exemple 37.42.
Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne m et d'écart type σ que nous supposons inconnus. Le fonction suivante est asymptotiquement pivotale pour m :

$$v(\bar{X}_n, m) = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}. \tag{37.144}$$

△

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$ avec σ^2 connu. Nous cherchons un intervalle de confiance $1 - \alpha$ pour m. Pour cela nous allons utiliser une fonction asymptotiquement pivotale, à savoir

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma^2/\sqrt{n}} \sim \mathscr{N}(0,1). \tag{37.145}$$

Nous devrions chercher des valeurs z_+ et z_- telles que

$$P\left(z_- \leqslant \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant z_+\right) = 1 - \alpha. \tag{37.146}$$

Pour des raisons de symétries (de la courbe gaussienne), nous allons chercher un intervalle symétrique : $z_- = -z_+$. Le nombre à chercher est donc le z_α tel que

$$P\big(|Z| \leqslant z_\alpha\big) = 1 - \alpha. \tag{37.147}$$

Si nous demandons $\alpha = 5\%$, la réponse est $z_\alpha = 1.96$, c'est-à-dire que

$$P\left(-1.96 \leqslant \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant 1.96\right) = 0.95. \tag{37.148}$$

Nous avons donc

$$P\left(m \in \big[\bar{X}_n - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\big]\right) = 0.95. \tag{37.149}$$

Supposons maintenant que nous avons observé 100 valeurs numériques avec $\bar{x}_n = 12$ et $\sigma = 1$. La réalisation de l'intervalle de confiance pour m au niveau de confiance 0.95 est :

$$\big[12 - 0.196, 12 + 0.196\big]. \tag{37.150}$$

Cet intervalle est à interpréter de la façon suivante : si nous recommençons un grand nombre de fois le sondage, la moyenne tombera 95% des fois dans l'intervalle ainsi calculé. Mais il faut bien comprendre que la probabilité

$$P\left(m \in \big[12 - 0.196, 12 + 0.196\big]\right) \tag{37.151}$$

vaut zéro ou un.

Exemple 37.43.
Soit un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de loi parente $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$ où m et σ^2 sont inconnus. Déterminer un intervalle de confiance exact symétrique au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Déterminer un intervalle de confiance pour σ^2.

Nous savons que la moyenne empirique est un estimateur de la moyenne :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{37.152}$$

Nous cherchons un intervalle du type $I = [\bar{X}_n - \epsilon, \bar{X}_n + \epsilon]$ pour lequel $P(m \in I) = 1 - \alpha$. Nous savons que la variable aléatoire

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{37.153}$$

suit une loi $\mathscr{N}(0, 1)$, mais la variance est inconnue. La subtilité à savoir est que la variable aléatoire

$$Z = \frac{\bar{X}_n - m}{S_n/\sqrt{\sigma}} \tag{37.154}$$

où $S_n^2 = \sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2/(n-1)$ suit une loi de Student à n degrés de liberté $\mathscr{T}(n-1)$ en vertu du théorème de Cochran 37.15. Comme il est usuel de le faire, nous inversons l'intervalle :

$$1 - \alpha = P\left(-\epsilon \leqslant \bar{X}_n - m \leqslant \epsilon\right) \tag{37.155a}$$

$$= P\left(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{S_n} \leqslant Z \leqslant \frac{\epsilon\sqrt{n}}{S_n}\right). \tag{37.155b}$$

Les valeurs se trouvent dans des tables ; par exemple pour $n = 10$ et $\alpha = 5\%$ nous trouvons

$$\frac{\epsilon\sqrt{n}}{S_n} = 2.262. \tag{37.156}$$

Plus généralement nous notons $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathscr{T}(n-1)$, c'est-à-dire le nombre tel que

$$P(Z \leqslant t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \tag{37.157}$$

si $Z \sim \mathscr{T}(n-1)$. L'intervalle de confiance est alors donné par

$$I = \left[\bar{X}_n - \frac{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} S_n}{\sqrt{n}}\right]. \tag{37.158}$$

Cela est un intervalle exact pour m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Nous pouvons aussi trouver un intervalle asymptotique en utilisant le théorème central limite :

$$\frac{\bar{X}_n - m}{S_n/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} T \tag{37.159}$$

avec $T \sim \mathscr{N}(0, 1)$.

Rappel : dire que I_n est un **intervalle de confiance asymptotique** signifie que

$$\lim_{n\to\infty} P(m \in I_n) = 1 - \alpha. \tag{37.160}$$

En ce qui concerne la variance σ^2, l'intervalle de confiance se construit en utilisant la partie (2) du théorème de Cochran 37.15. Nous introduisons la variable aléatoire pivot

$$Z = (n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \tag{37.161}$$

qui suit une loi $\chi^2(n-1)$. Cette loi n'étant pas symétrique (voir figure 36.1), nous n'allons pas chercher un intervalle de confiance symétrique. Nous cherchons c_1 et c_2 tels que

$$\begin{cases} P\big(\sigma^2 \in [c_1, c_2]\big) = 1 - \alpha & (37.162a) \\ P\big(\sigma^2 \in [0, c_1]\big) = \dfrac{\alpha}{2} & (37.162b) \\ P\big(\sigma^2 \in [c_2, \infty[\big) = \dfrac{\alpha}{2} & (37.162c) \end{cases}$$

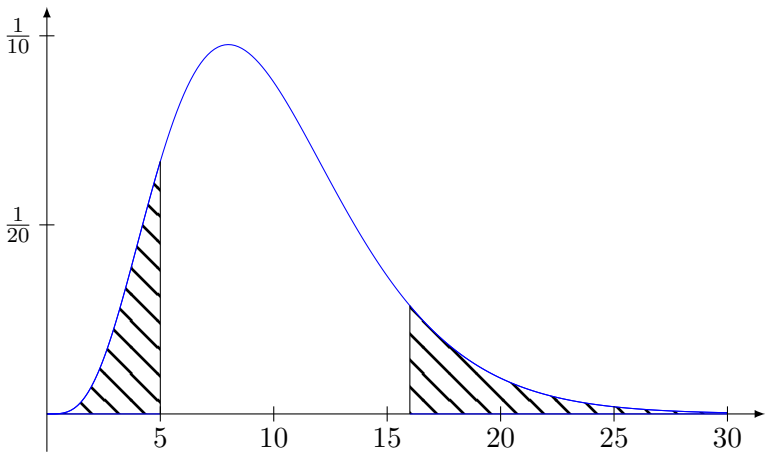


FIGURE 37.3 : L'intervalle de confiance pour une χ^2. LabelFigChiSquaresQuantile

La situation est représentée à la figure 37.3.
La construction des nombres c_1 et c_2 passe par la relation

$$P(c_1 \leqslant \sigma^2 \leqslant c_2) = P\left(\frac{(n-1)S_n^2}{c_2} \leqslant Z \leqslant \frac{(n-1)S_n^2}{c_1}\right). \tag{37.163}$$

Nous notons $t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ et $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ les quantiles donnés sur la figure 37.3, c'est-à-dire

$$P(Z \leqslant t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} P(Z \geqslant t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}. \tag{37.164a}$$

Ce que nous obtenons est

$$\frac{(n-1)S_n^2}{c_2} = t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \tag{37.165a}$$

$$\frac{(n-1)S_n^2}{c_1} = t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \tag{37.165b}$$

et par conséquent l'intervalle de confiance pour σ^2 est

$$I = \left[\frac{(n-1)S_n^2}{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S_n^2}{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\right] \tag{37.166}$$

avec $P(\sigma^2 \in I) = 95\%$.

Remarque 37.44.
Il n'est pas clair à priori que la longueur de l'intervalle I décroisse avec n parce qu'il y a n dans les t au numérateur.

△

37.6.3 Sondage de proportion

Une utilisation classique des statistiques est d'interpréter une proportion donnée par un sondage. Nous considérons une élection avec deux candidats A et B. Nous avons interrogés $n = 2500$ personnes et nous avons obtenu 51% pour le candidat A et 49% pour le candidat B. Que peut on dire ?

La modélisation de cette situation est que nous avons des variables aléatoires $X_i \sim \mathscr{B}(p_A)$ et que nous en avons observés n avec une moyenne

$$\bar{x}_n = 0.51. \tag{37.167}$$

La loi de $\bar{X}_n$ est une binomiale. Sa densité n'est pas symétrique, mais si n est grand, elle le devient. Nous cherchons un intervalle

$$I = [\bar{X}_n - \epsilon, \bar{X}_n + \epsilon] \tag{37.168}$$

tel que $P(p_A \in I) = 1 - \alpha$. Pour cela nous considérons le fait que $n = 2500$ est grand et nous utilisons la limite de la proposition 37.10 :

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p_A}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} Z \sim \mathscr{N}(0,1). \tag{37.169}$$

La variable aléatoire Z_n est asymptotiquement pivotale et normale centrée réduite. Nous cherchons donc un intervalle symétrique pour $\bar{X}_n - p_A$:

$$1 - \alpha = P(-\epsilon \leqslant \bar{X}_n - p_A \leqslant \epsilon), \tag{37.170}$$

c'est-à-dire, si n est grand,

$$1 - \alpha = P\left(-\epsilon \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \leqslant Z_n \leqslant \epsilon \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \right) \tag{37.171}$$

où Z_n est une normale centrée réduite. Nous trouvons ainsi, via les tables que

$$\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} = 1.96 \tag{37.172}$$

si nous voulons un intervalle à 5%. Par conséquent nous avons $\epsilon = 1.96\frac{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}}$ et l'intervalle de confiance est

$$I_C = \left[\bar{X}_n - \frac{1.96\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{2.96\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}} \right]. \tag{37.173}$$

La propriété de cet intervalle est que

$$\lim_{n\to\infty} P(p_A \in I_c) = 1 - \alpha. \tag{37.174}$$

Remarque 37.45.
À quel moment avons nous fait une hypothèse sur la taille de la population globale ? En modélisant les sondés par des variables de Bernoulli et leur somme par une binomiale, nous supposons que le sondage est *avec remise*, sinon, elles ne seraient pas indépendantes. En supposant les sondés indépendants, nous avons donc fait comme si la population totale était infinie.

37.7 Estimer une densité lorsqu'on ne sait rien

Nous supposons avoir une série d'observations issues d'un processus complexe dont nous n'avons aucune idée de la loi parente, et nous voudrions nous faire une idée de la densité de cette loi inconnue.

Nous observons une suite de réalisations que nous modélisons comme étant des variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ de loi parente (inconnue) μ. Notre but est de trouver un estimateur $\hat{\mu}$ de μ. Par simplicité nous allons nous restreindre aux lois admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est-à-dire que nous allons estimer μ par une suite de lois $\hat{\mu}_n$ qui sont toutes des lois acceptant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

37.7.1 Distance entre des mesures

Si ν_1 et ν_2 sont deux mesures de densité sur $\mathbb{R}$, la **distance** entre ν_1 et ν_2 est définie par

$$d(\nu_1, \nu_2) = \sup_{A \in \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})} \big|\nu_1(A) - \nu_2(A)\big| \tag{37.175}$$

où $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$.

Théorème 37.46 (de Scheffé[870])**.**
Si f_1 et f_2 sont les densités de ν_1 et ν_2 par rapport à la mesure de Lebesgue, alors

$$d(\nu_1, \nu_2) = \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_+ = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_2| = \frac{1}{2}\|f_1 - f_2\|_1 \tag{37.176}$$

où f_+ est la partie positive de f (pour la décomposition $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$).

Démonstration. La dernière égalité est simplement une notation usuelle ; nous devons seulement prouver les deux premières. Pour la première nous commençons par prouver que le borélien réalisant le supremum est

$$B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f_1(x) \geqslant f_2(x)\}. \tag{37.177}$$

En effet si A est un borélien nous avons

$$\nu_1(A) - \nu_2(A) = \int_A f_1 - f_2 \leqslant \int_{A\cap B} f_1 - f_2 \leqslant \int_B f_1 - f_2 = \int_B (f_1 - f_2)_+ = \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_+ \tag{37.178}$$

Justifications :

- $f_1 - f_2$ négative sur $A \cap \complement B$.
- Vu que $f_1 - f_2 \geqslant 0$ sur B, l'intégrale augmente si on augmente le domaine.
- Sur B nous avons $f_1 - f_2 = (f_1 - f_2)_+$.

Donc pour tout borélien A nous avons

$$d(\nu_1, \nu_2) \leqslant \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_+. \tag{37.179}$$

Mais pour $A = B$ nous avons égalité :

$$\nu_1(B) - \nu_2(B) = \int_B f_1 - f_2 = \int_B (f_1 - f_2)_+ = \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2). \tag{37.180}$$

Pour la seconde égalité nous savons que f_1 et f_2 s'intègrent toutes deux à 1 (parce que ce sont des densités de probabilité), donc

$$\int_{\mathbb{R}} f_1 - f_2 = 0. \tag{37.181}$$

En particulier nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_+ = \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_-, \tag{37.182}$$

ce qui donne bien

$$\int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_+ = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_2|. \tag{37.183}$$

□

37.7.2 Estimateur par fenêtres glissantes

Nous considérons les estimations suivantes de la fonction de répartition :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leqslant x\}}, \tag{37.184}$$

et un nombre h_n qui sera la taille de la fenêtre glissante. Nous avons en tête de faire $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Nous considérons ceci comme estimateur de la densité inconnue f des variables aléatoires X_i :

$$\hat{f}_n(x) = \frac{F_n(x + h_n) - F_n(x - h_n)}{2h_n}. \tag{37.185}$$

L'idée sous-jacente est de prendre la dérivée de la fonction de répartition comme densité.

Lemme 37.47 ([870])**.**
Pour tout $h_n > 0$, l'estimateur $\hat{f}_n$ est une densité de probabilité.

Démonstration. D'abord $\hat{f}_n$ est bien à valeurs positives ou nulle. Ensuite devons parler de son intégrale. Pour le numérateur nous avons

$$F_n(x + h_n) - F_n(x - h_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \in B(x,h_n)}. \tag{37.186}$$

En réalité cette égalité est valable seulement presque partout parce qu'elle n'est pas valable en $x = x \pm h_n$, mais cela ne va pas nous ennuyer dans la mesure où nous avons dans l'idée d'intégrer cela sur $\mathbb{R}$. Avant de nous lancer dans l'intégrale nous remarquons que $X_i \in B(x, h_n)$ est la même chose que $x \in B(X_i, h_n)$, c'est-à-dire que

$$\{X_i \in B(x, h_n)\} = \{x \in B(X_i, h_n)\}. \tag{37.187}$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n = \frac{1}{2h_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B(X_i,h_n)}}_{2h_n} = \frac{1}{2nh_n} \sum_{i=1}^{n} 2h_n = 1. \tag{37.188}$$

□

LemTZopXDd

Lemme 37.48 ([870]).
L'estimateur $\hat{f}_n$ est déjà pas mal parce que

$$\lim_{h_n\to 0} E\big(\hat{f}_n(x)\big) = f(x) \tag{37.189}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous commençons par nous rappeler le fait que $F_n(x)$ est un estimateur sans biais de $F(x)$ (proposition 37.35). Donc

$$E\big(\hat{f}_n(x)\big) = \frac{F(x+h_n) - F(x-h_n)}{2h_n}. \tag{37.190}$$

EqLIEjrfEd

Nous devons prendre la limite de cela lorsque $h_n \to 0$, c'est-à-dire considérer la dérivée de F. Attention : rien ne dit que F soit dérivable, si ce n'est la proposition 29.31 qui indique qu'elle est dérivable presque partout avec f comme dérivée.

La limite $h_n \to 0$ dans (37.190) nous donne donc bien presque partout

$$\lim_{h_n\to 0} E\big(\hat{f}_n(x)\big) = f(x). \tag{37.191}$$

□

Proposition 37.49 ([870]).
Si la suite (h_n) est telle que $h_n \to 0$ et $nh_n \to \infty$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons les convergences

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow{L^2(P)} f(x) \tag{37.192}$$

et

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow{P} f(x). \tag{37.193}$$

Démonstration. Il faut d'abord comprendre ce que signifie la convergence $L^2(P)$ pour presque tout x. Pour cela il faut comprendre que $\hat{f}_n(x)$ est en soi une variable aléatoire et est en réalité une fonction $\omega \mapsto \hat{f}_n(x,\omega)$. Ce que nous allons montrer est que pour presque tout x (maintenant fixé), cette variable aléatoire converge vers une constante (par rapport à ω) et que cette constante est $f(x)$.

La convergence $X_n \xrightarrow{L^2(P)} X$ signifie $E\big(|X_n - X|^2\big) \to 0$, c'est-à-dire

$$\int_\Omega \big|X_n(\omega) - X(\omega)\big|^2 dP(\omega) \to 0. \tag{37.194}$$

En faisant une décomposition biais-variance nous devons donc étudier

$$E\Big[\big(\hat{f}_n(x) - f(x)\big)^2\Big] = E\big[\hat{f}_n(x) - f(x)\big]^2 + \operatorname{Var}\big(\hat{f}_n(x) - f(x)\big) \tag{37.195}$$

Ici $f(x)$ doit être vue comme la variable aléatoire constante sur Ω. Par le lemme 37.48 et la proposition 36.47 le terme de biais converge vers zéro lorsque $n \to \infty$.

Pour traiter le terme de biais, nous savons déjà que

$$2nh_n\hat{f}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \in B(x,h_n)\}}, \tag{37.196}$$

où le membre de droite (et donc aussi celui de gauche) est une variable aléatoire binomiale comptant le nombre de succès de l'expérience $X_i \in B(x,h_n)$ en n essais. Nous notons $p_{x,n} = P\big(X_i \in B(x,h_n)\big)$. Si μ est la loi parente des X_i, alors

$$p_{n,x} = P\big(X_i \in B(x,h_n)\big) = \mu\big(B(x,h_n)\big) = F(x+h_n) - F(x-h_n) \tag{37.197}$$

EqKBKrSHJ

où F est la fonction de répartition (parente) des X_i.

Alors la variance de ladite binomiale est donnée par (36.438), c'est-à-dire $np_{x,n}(1-p_{x,n})$. Nous avons alors

$$\operatorname{Var}\big(2nh_n\hat{f}_n(x)\big) = np_{x,n}(1-p_{x,n}) \tag{37.198}$$

et

$$\operatorname{Var}\big(\hat{f}_n(x)\big) = \frac{1}{4n^2h_n^2} np_{x,n}(1-p_{x,n}). \tag{37.199}$$

Nous pouvons faire la majoration $t(1-t) \leqslant t$ qui est valable pour tout t et écrire

$$\mathrm{Var}(\hat{f}_n(x)) \leqslant \frac{1}{4nh_n}\frac{p_{x,n}}{h_n}. \tag{37.200}$$

Le premier facteur tend vers zéro parce que nous avons supposé que $nh_n \to \infty$. Pour le second facteur, il faut remarquer que l'expression (37.197) nous donne presque partout

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{p_{n,x}}{h_n} = 2f(x), \tag{37.201}$$

qui est constant et certainement borné.

Nous avons maintenant prouvé que pour presque tout x nous avons $\hat{f}_n(x) \overset{L^2(P)}{\to} f(x)$. Montrons que cela implique la convergence en loi, c'est-à-dire que pour tout $\eta > 0$, nous avons la limite

$$P\big(|\hat{f}_n(x) - f(x)| > \eta\big) \to 0. \tag{37.202}$$

Si cela n'était pas vrai, nous aurions un nombre $\eta_0 > 0$ et $\epsilon > 0$ tel que pour tout n à partir d'une certaine taille,

$$P\Big(|\hat{f}_n(x) - f(x)|^2 > \eta_0\Big) > \epsilon, \tag{37.203}$$

et en particulier en notant A l'événement $|\hat{f}_n(x) - f(x)|^2 > \eta_0^2$, $P(A) > \epsilon$. Alors

$$\int_\Omega \big|\hat{f}_n(x,\omega) - f(x,\omega)\big|^2 dP(\omega) \geqslant \int_A \big|\hat{f}_n(x,\omega) - f(x,\omega)\big|^2 dP(\omega) \geqslant \int_A \eta_0^2 = \eta_0^2 P(A). \tag{37.204}$$

Cela signifie que

$$\|\hat{f}_n(x) - f(x)\|_{L^2(P)} \geqslant \eta_0 P(A), \tag{37.205}$$

ce qui contredit la première convergence démontrée. □

Note : l'hypothèse $nh_n \to \infty$ revient à dire que nous voulons que chaque boîte contienne de plus en plus d'observations. Si nous avions $nh_n \to 0$, alors avec n qui augmente, la majorité des boîtes deviendraient vides, ce qui reviendrait à une perte d'information.

37.8 Test d'hypothèses, prise de décision

37.8.1 Exemple : qualité des pièces d'usine

Une usine fabrique des composantes électroniques garantis un an. Le constructeur ne veut pas accepter que plus de 5% des pièces tombent en panne avant un an.

Nous supposons que la durée de vie T d'une pièce soit une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (qui est l'inverse de la moyenne : $\theta = 1/\lambda$). Le fabriquant veut donc s'assurer que

$$0.95 \leqslant P(T \geqslant 1), \tag{37.206}$$

ou encore

$$P(T \geqslant 1) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx = e^{-1/\theta} \geqslant 0.95, \tag{37.207}$$

donc le fabriquant doit s'assurer que

$$\theta \geqslant \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{0.95}\right)}. \tag{37.208}$$

Nous posons donc $\theta_0 = 19.5$ et nous prenons comme modèle de décision que si $\theta < \theta_0$, alors la chaine de production doit être revue, et si $\theta > \theta_0$, alors l'usine peut continuer son travail.

Ce dont nous disposons n'est pas de θ, mais d'une estimation de θ à partir d'un échantillon. Cela étant il faudra aussi pouvoir estimer la probabilité de faire un mauvais choix.

37.8.2 Exemple : la résistance d'un fil

subsecExempLFilResituzz

Un artisan a besoin d'un fil qui a une résistance à une traction de 100 g en moyenne. Si la résistance est trop faible, le fil casse ; si elle est trop grande, c'est trop rigide et ça ne convient pas.

Remarque 37.50.
Dans l'exemple précédent, avoir $\theta > \theta_0$ ne dérange pas. Si la durée de vie moyenne est de 2 ans, le directeur de l'usine ne sera pas malheureux. Ici par contre l'artisan cherche une valeur précise et a donc une borne vers le haut et vers le bas.

L'artisan reçoit un lot de fils et souhaite savoir si il est conforme. Pour cela, il prend 4 fils au hasard et mesure une moyenne de 112 g. Est-ce que cela est cohérent avec une moyenne de 100 g ?

Nous faisons l'hypothèse que la résistance des fils suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec m inconnu. Pour la simplicité nous supposons que σ est connu et vaut 10.

Nous devons prendre une décision entre deux hypothèses. L'hypothèse H_0 sera de dire que le lot a une résistance de 100 g et l'hypothèse alternative sera que le lot a une résistance différente.

Les 4 observations sont quatre variables aléatoires $(X_i)_{i=1,2,3,4}$, et le nombre 112 est une réalisation de la variable aléatoire

$$\bar{X}_4 = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4). \tag{37.209}$$

Nous supposons que H_0 est vraie, et nous calculons quel est l'intervalle autour de $m = 100$ qui a 95% de chances de contenir la moyenne observée. Si 112 est dedans, nous acceptons H_0 et si 112 est hors de cet intervalle, nous refusons H_0.

Compte tenue de l'hypothèse H_0, nous avons

$$\frac{\bar{X}_4 - 100}{\frac{10}{\sqrt{4}}} = \frac{\bar{X}_4 - 100}{5} \sim \mathcal{N}(0, 1). \tag{37.210}$$

Nous commençons à connaitre par cœur l'intervalle de confiance à 95% d'une loi normale centrée réduite ; le quantile est à 1.96, c'est-à-dire

$$P\left(-1.96 \leqslant \frac{\bar{X}_4 - 100}{5} \leqslant 1.96\right) = 0.95, \tag{37.211}$$

ou encore

$$P\big(\bar{X}_4 \in [90.2, 109.8]\big). \tag{37.212}$$

Il y a donc moins de 5% de chances que la moyenne de ces quatre fils tombe en dehors de l'intervalle $[90.2, 109.8]$. L'artisan doit donc rejeter l'hypothèse et considérer que le lot est mauvais.

La région

$$]-\infty, 90.2] \cup [109.8, \infty[\tag{37.213}$$

est la **région de rejet**, ou **région critique**.

Ici, le nombre 5% représente le risque de refuser H_0 alors qu'elle était vraie. Notons que nous ne pouvons pas calculer le risque d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse. En effet, si H_0 est fausse, nous ne savons pas quelles sont les valeurs de $\bar{X}_4$ acceptables parce qu'il y a une infinité de possibilités pour m qui soient alternatifs à $m = 100$.

Évidemment si la vraie moyenne est $100 + 10^{-7}$, l'hypothèse H_0 sera acceptée, mais nous n'avons aucun moyen de savoir si elle est vraie ou non.

37.8.3 Vocabulaire et théorie

Nous avons un modèle d'échantillonnage paramétrique $(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})$ de taille n et de paramètre inconnu θ, de loi parente μ_θ appartenant à une famille paramétrique de lois $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$.

Soient H_0 et H_1 deux ensembles disjoints tels que $\Theta = H_0 \cup H_1$. L'ensemble H_0 sera nommé **hypothèse nulle** et l'ensemble H_1 sera l'**hypothèse alternative**.

Pour l'exemple des fils, nous avions $H_0 = \{100\}$ et $H_1 = \mathbb{R} \setminus \{100\}$. Si une hypothèse est réduite à un singleton, nous parlons d'hypothèse **simple** et sinon c'est une hypothèse **composite** ou **multiple**. Faire un tests consiste à déterminer une région critique.

Définition 37.51.
*Un **test** est une application mesurable δ qui à $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe*

$$\delta(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}. \tag{37.214}$$

Si $\delta(x_1,\dots,x_n)=0$ on accepte l'hypothèse H_0 pour l'échantillon $x_1,\dots,x_n$, et si $\delta(x_1,\dots,x_n)=1$, alors on rejette H_0 et on choisit H_1. L'ensemble

$$W=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } \delta(x_1,\dots,x_n)=1\} \tag{37.215}$$

*est la **région de rejet** ou la **région critique**.*

L'ensemble $W=\delta^{-1}(1)$ est un borélien de $\mathbb{R}^n$ parce que δ est mesurable. L'événement auquel nous sommes intéressés est l'événement

$$R=\{(X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})\in W\}. \tag{37.216}$$

Exemple 37.52.
Pour l'exemple de 37.8.2 nous avions

$$\delta(x_1,\dots,x_4)=\mathbb{1}_{\complement[90.2,109.8]}(\bar{x}_4). \tag{37.217}$$

△

37.8.4 Risque de première et seconde espèce

Le modèle de décision que nous avons introduit comprend deux façons de se tromper. Soit nous rejetons H_0 alors qu'elle est vraie (c'est le **risque de première espèce**), soit nous acceptions H_0 alors qu'elle est fausse (risque de **seconde espèce**). Nous pouvons formaliser ces concepts de la façon suivante.

Nous considérons un test de région critique W. Le risque de première espèce, noté α est la fonction

$$\begin{aligned}\alpha\colon H_0&\to[0,1]\\ \theta&\mapsto P\big((X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})\in W\big).\end{aligned} \tag{37.218}$$

Il s'agit de la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle es vraie. Le risque de seconde espèce est la fonction

$$\begin{aligned}\beta\colon H_1&\to[0,1]\\ \theta&\mapsto P\big((X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})\notin W\big).\end{aligned} \tag{37.219}$$

C'est la probabilité d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse.

DefPuisszYkrQa

Définition 37.53.
*Soit δ un test de région critique W. La **puissance** du test est la fonction*

$$\begin{aligned}\eta\colon H_1&\to[0,1]\\ \theta&\mapsto P\big((X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})\in W\big).\end{aligned} \tag{37.220}$$

*La **courbe d'efficacité** du test est la fonction*

$$\begin{aligned}h\colon \Theta&\to[0,1]\\ \theta&\mapsto P\big((X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})\notin W\big).\end{aligned} \tag{37.221}$$

La puissance d'un test est la probabilité de rejeter H_0 lorsque H_1 est vraie. Plus la puissance est grande, mieux c'est. La courbe d'efficacité du test est la probabilité d'accepter H_0 pour une certaine valeur de θ.

Soit un test δ. Une statistique $T_\theta=T_n(X_{\theta,1},\dots,X_{\theta,n})$ est une **variable de décision** pour δ si $\complement W$ peut s'écrire d'une des façons suivantes

$$\complement W=\begin{cases}\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } T_n(x_1,\dots,x_n)<c\} & \text{test unilatéral à droite}\\ \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } T_n(x_1,\dots,x_n)>c\} & \text{test unilatéral à gauche}\\ \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } c_1\leqslant T_n(x_1,\dots,x_n)<c_2\} & \text{test bilatéral.}\end{cases} \tag{37.222}$$

Le plus souvent la variable de décision sera la moyenne : $T_n(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Les valeurs c,c_1,c_2 sont des **valeurs critiques**.

En ce qui concerne les notations, ici T_n représente la valeur mesurée sur un n-échantillon (d'où l'indice n) alors que T_θ est la valeur *théorique* de T lorsque θ est la vraie valeur du paramètre qu'on veut estimer.

Pour un test unilatéral à droite, nous fixons la valeur critique c de telle manière à avoir

$$P(T_\theta>c)\leqslant\alpha. \tag{37.223}$$

Pour un test unilatéral à gauche, nous fixons c de telle manière à avoir

$$P(T_\theta<c)\leqslant\alpha \tag{37.224}$$

et pour un test bilatéral nous fixons c_1 et c_2 de telle façon à avoir

$$P(T_\theta>c_2)=P(T_\theta<c_1)\leqslant\frac{\alpha}{2}. \tag{37.225}$$

37.8.5 Modèle paramétrique de loi gaussienne

Soit un modèle statistique paramétrique de lois gaussiennes $\mathcal{N}(m,1)$ de moyenne m inconnue avec $m\in\mathbb{R}^+$. Nous avons $\Theta=[0,\infty[$.

Nous observons un échantillon de taille $n=36$. Avec un risque de première espèce de 5% nous voulons estimer l'hypothèse $H_0=\{0\}$ contre l'hypothèse $H_1=]0,\infty[$. De notre échantillon nous construisons la variable aléatoire

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{37.226}$$

dans laquelle les X_i sont les éléments de l'échantillon, elles sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(m,1)$ avec m inconnu.

Si $\bar{X}_n$ est proche de zéro nous acceptons H_0, sinon nous la rejetons. La région de rejet s'écrit donc sous la forme

$$W=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } \bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i>u\} \tag{37.227}$$

dans lequel il faut fixer le u pour satisfaire au risque de première espèce de 5%. La contrainte est d'avoir

$$P(\bar{X}_n>u)=\alpha \tag{37.228}$$

EqQaNgBo

si H_0 est vérifiée. Cela revient à dire que dans 5% des cas où H_0 est correcte, nous la rejetterons. Si H_0 est vraie alors $\bar{X}_n$ est une moyenne de gaussiennes de moyennes m et nous avons

$$\frac{\bar{X}_n-m}{\sigma/\sqrt{n}}\sim\mathcal{N}(0,1) \tag{37.229}$$

avec $m=0$ et $\sigma=1$. L'équation (37.228) devient donc

$$\alpha=P\left(\frac{\bar{X}_n}{1/\sqrt{n}}>\frac{u}{1/\sqrt{n}}\right)=P(T>\sqrt{n}u) \tag{37.230}$$

où $T\sim\mathcal{N}(0,1)$. Avec $n=36$ et $\alpha=5\%$ nous trouvons

$$u=\frac{1.645}{6}\simeq 0.274 \tag{37.231}$$

La règle de décision est donc la suivante : si $\bar{x}_n>0.274$ alors nous rejetons H_0, et sinon nous l'acceptons.

Calculons la puissance de ce test (définition 37.53). C'est la fonction donnée par

$$\begin{aligned}\eta\colon H_1&\to\mathbb{R}\\ m&\mapsto P\big((X_{1,m},\dots,X_{n,m})\in W\big)=P\left(\frac{1}{n}\sum X_i>u\right).\end{aligned} \tag{37.232}$$

Dans ce calcul, les X_i sont d'une loi normale $\mathcal{N}(m,1)$, et non $\mathcal{N}(0,1)$. En retranchant m et en divisant par $1/\sqrt{n}$ nous trouvons

$$\eta(m)=P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum X_i-m}{1/\sqrt{n}}>\frac{u-m}{1/\sqrt{n}}\right) \tag{37.233a}$$
$$=P(T>\sqrt{n}(u-m)) \tag{37.233b}$$
$$=P(T>16.45-6m) \tag{37.233c}$$
$$=1-\Phi(1.645-6m) \tag{37.233d}$$

où Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$. La fonction η a les propriétés suivantes :

$$\lim_{m\to-\infty}\eta(m)=0 \tag{37.234a}$$
$$\lim_{m\to\infty}\eta(m)=1 \tag{37.234b}$$
$$\eta(0)=\frac{5}{100}. \tag{37.234c}$$

Remarque 37.54.
Si nous regardons $m=0.001$, le risque de seconde espèce est quasiment de 90%. En effet le risque de seconde espèce est d'accepter H_0 alors qu'il est faux. Lorsque $m=0.001$, l'hypothèse H_0 est fausse, mais la probabilité qu'on l'accepte est grande. D'ailleurs les conséquences de l'accepter à tort ne sont peut-être pas si grandes que cela.

37.9 Tests paramétriques

La proposition suivante montre le lien entre région de confiance et les tests.

Proposition 37.55.
Soit $\Lambda(X_1,\dots,X_n)$ une région de confiance par excès de niveau de confiance $1-\alpha$. Alors il existe un test pur de niveau α pour tester $H_0=\{\theta_0\}$ de région de rejet

$$W_n=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } \theta_0\notin\Lambda(x_1,\dots,x_n)\}. \tag{37.235}$$

Démonstration. L'hypothèse sur Λ signifie qu'avec les observations $(X_1,\dots,X_n)$, il y a une forte probabilité (plus grande que $1-\alpha$) que θ soit dans $\Lambda(X_1,\dots,X_n)$. Avec ou sans H_0 nous avons donc

$$P(\theta\in\Lambda)\geqslant 1-\alpha. \tag{37.236}$$

Supposons maintenant l'hypothèse H_0, alors

$$P\big((X_1,\dots,X_n)\in W_n\big)=P\big(\theta_0\notin\Lambda(X_1,\dots,X_n)\big)\leqslant\alpha. \tag{37.237}$$

□

Remarque 37.56.
Soit W_n la région de confiance d'un test de niveau α pour tester $H_0=\{\theta_0\}$. Alors

$$\Lambda=\{x\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } x\notin W_n\} \tag{37.238}$$

est une région de confiance $1-\alpha$ pour θ.

Exemple 37.57.
Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un échantillon de loi parente $\mathcal{N}(\theta,1)$ avec $\theta\in\{\theta_0,\theta_1\}$. Nous supposons $\theta_0<\theta_1$. Nous voulons tester $H_0=\{\theta_0\}$ contre $H_1=\{\theta_1\}$. Nous proposons le test suivant. La variable de décision sera $\bar{X}_n$ et la région de rejet sera

$$W=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } \frac{1}{n}\sum_i x_i>\frac{\theta_0+\theta_1}{2}\}. \tag{37.239}$$

(1) Donner le risque de première espèce de ce test.

(2) Soit $0<\alpha<1$. Pour quelle valeur de n le test a-t-il un risque de première espèce égal à α ?

(3) Donner la puissance du test.

Les réponses peuvent être exprimées en termes de la fonction de répartition F de la loi normale centrée réduite.

Le risque de première espèce est donné par

$$\alpha=P\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i>\frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right) \tag{37.240}$$

où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi parente $\mathcal{N}(\theta_0,1)$. Cela est la probabilité d'être dans la région de rejet alors que l'hypothèse H_0 est vraie. La formule (37.240) se transforme en

$$\alpha=P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum X_i-\theta_0}{1/\sqrt{n}}>\frac{\frac{\theta_0+\theta_1}{2}-\theta_0}{1/\sqrt{n}}\right) \tag{37.241a}$$

$$=P(T>\sqrt{n}\frac{\theta_1-\theta_0}{2}). \tag{37.241b}$$

En termes de la fonction de répartition nous avons alors

$$\alpha=1-F\big(\sqrt{n}\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\big) \tag{37.242}$$

Il s'agit maintenant de trouver le nombre n qui réalise cette égalité. Pour cela nous utilisons l'inverse F^{-1} de la fonction de répartition de la normale :

$$n=\left(\frac{2}{\theta_1-\theta_0}F^{-1}(1-\alpha)\right)^2. \tag{37.243}$$

Le risque de seconde espèce est la possibilité d'accepter H_0 lorsque H_1 est vraie, c'est-à-dire

$$\beta = P\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i < \frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right) \tag{37.244}$$

sous l'hypothèse H_1. Dans le calcul de (37.244) nous prenons donc $X_i \sim \mathcal{N}(\theta_1, 1)$. Le résultat est que

$$\beta = F\big(\sqrt{n}\frac{\theta_0-\theta_1}{2}\big). \tag{37.245}$$

Remarque 37.58.
L'expression (37.243) diminue lorsque θ_0 et θ_1 s'éloignent, ce qui est normal : plus les nombres à discerner sont éloignés, moins l'échantillon à prendre pour réaliser le travail doit être grand.

Notons aussi que $\theta_0 - \theta_1 < 0$, par conséquent augmenter n diminue la valeur de

$$\beta = F\big(\sqrt{n}\frac{\theta_0-\theta_1}{2}\big) \tag{37.246}$$

△

37.10 Tests d'adéquation

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de loi parente X finie prenant ses valeurs dans $\{a_1, \dots, a_k\}$. La loi de X est donnée par les nombres

$$p_i = P(X = a_i) \tag{37.247}$$

pour $i = 1, \dots, k$. Nous introduisons l'**effectif empirique**, la variable aléatoire N_i qui compte le nombre de fois que a_i est observé dans l'échantillon. La **fréquence empirique** est la variable aléatoire

$$F_i = \frac{N_i}{n}. \tag{37.248}$$

Nous savons que la loi de N_i est $\mathscr{B}(n, p_i)$, et la loi des grands nombres dit que

$$F_i \xrightarrow{p.s.} p_i \tag{37.249}$$

pour chaque i. Le théorème central limite nous indique de plus que

$$\frac{N_i - np_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} T \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{37.250}$$

Nous considérons un cas où les p_i sont inconnus. Ils peuvent être approchés par $N_i \simeq np_i$. Le théorème de Pearson nous indique comment.

Théorème 37.59 (Théorème de Pearson)**.**
Nous avons

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \xrightarrow{\mathscr{L}} K \sim \chi^2(k-1) \tag{37.251}$$

où la distribution $\chi^2(l)$ est la somme des carrés de l gaussiennes centrées réduites indépendantes.

Démonstration. Nous commençons par le cas $k = 2$. Dans ce cas nous avons $N_2 = n - N_1$ et $p_1 + p_2 = 1$. La somme que nous regardons est

$$\frac{(N_1-np_1)^2}{np_1} + \frac{(N_2-np_2)^2}{np_2} = \frac{(N_1-np_1)^2}{np_1} + \frac{(N_1-np_1)^2}{n(1-p_1)} \tag{37.252a}$$

$$= \frac{(N_1-np_1)^2}{np_1(1-p_1)}. \tag{37.252b}$$

Étant donné que N_1 est une variable aléatoire binomiale nous avons

$$\frac{N_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} T \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{37.253}$$

Par conséquent la limite de (37.252b) est

$$\left(\frac{N_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)^2 \xrightarrow{\mathscr{L}} T^2 \simeq \chi^2(1). \tag{37.254}$$

Cela conclut le cas $k = 2$.

Passons à présent au cas général. Le k-uple $(N_1, \dots, N_k)$ est une variable aléatoire multinomiale de loi

$$\mathscr{M}(n; k; p_1, \dots, p_k). \tag{37.255}$$

Nous introduisons les variables aléatoires U_i données par $U_i \colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ avec

$$P\big(U_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)\big) = p_i; \tag{37.256}$$

c'est le vecteur aléatoire qui prend ses valeurs dans les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^k$ et qui prend la valeur e_i avec probabilité p_i. Par construction nous avons

$$(N_1, \dots, N_k) = \sum_{i=1}^{n} U_i. \tag{37.257}$$

Nous allons étudier la fonction caractéristique de $(N_1, \dots, N_k)$ définie par l'équation (36.279) :

$$\begin{aligned} \Phi_{(N_1,\dots,N_k)} \colon \mathbb{R}^k &\to \mathbb{C} \\ e_j &\mapsto E(e^{ie_j \cdot N}) = E(e^{iN_j}). \end{aligned} \tag{37.258}$$

Plus généralement,

$$\Phi_{(N_1,\dots,N_k)}(t_1, \dots, t_k) = E\big(e^{i\langle t, N\rangle_{\mathbb{R}^k}}\big). \tag{37.259}$$

Nous avons

$$e^{i\langle t, N\rangle} = e^{i\sum_j \langle t, U_j\rangle} = \prod_j e^{i\langle t, U_j\rangle} \tag{37.260}$$

et vu que les U_i sont indépendantes et identiquement distribuées nous pouvons écrire U_1 à la place de U_j de façon à avoir

$$\begin{aligned} \Phi_{(N_1,\dots,N_k)}(t_1, \dots, t_k) &= \prod_j E\big(e^{i\langle t, U_1\rangle}\big) && \text{(37.261a)} \\ &= \prod_j \sum_l p_l e^{i\langle t, e_l\rangle} && \text{(37.261b)} \\ &= \prod_j \sum_l p_l e^{it_l} && \text{(37.261c)} \\ &= \left(\sum_{l=1}^{k} p_l e^{it_l}\right)^n. && \text{(37.261d)} \end{aligned}$$

Nous allons montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{(N_1,\dots,N_n)}(t_1, \dots, t_k) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} t_j^2} - \left(\sum_{j=1}^{k} t_j \sqrt{p_j}\right)^2. \tag{37.262}$$

Pour ce faire, nous allons effectuer un développement limité. D'abord nous introduisons les variables aléatoires

$$\alpha_j = \frac{N_j - np_j}{\sqrt{np_j}} \tag{37.263}$$

et nous calculons

$$\Phi_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}(t_1, \dots, t_k) = E\left[\exp\left(i\langle t, \left(\frac{N_1 - np_1}{\sqrt{np_1}}, \dots, \frac{N_k - np_k}{\sqrt{np_k}}\right)\rangle\right)\right] \tag{37.264}$$

Étant donné que n et p_j sont des variables déterministes, nous pouvons les sortir de l'espérance. Nous avons alors

$$\Phi_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}(t_1, \dots, t_k) = \exp\left(-i\sum_{j=1}^{k} t_j\sqrt{np_j}\right) \Phi_{(N_1,\dots,N_k)}\left(\frac{t_1}{\sqrt{np_1}}, \dots, \frac{t_k}{\sqrt{np_k}}\right) \tag{37.265}$$

parce que

$$E\left(e^{t_j\frac{N_j-np_j}{\sqrt{np_j}}}\right)=e^{\frac{-t_jnp_j}{\sqrt{np_j}}}E\left(e^{t_jN_j/\sqrt{np_j}}\right) \tag{37.266}$$

En remplaçant (37.261) dans (37.265) nous trouvons

$$\Phi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}(t_1,\ldots,t_k)=\exp\left(-i\sum_{j=1}^{k}t_j\sqrt{np_j}\right)\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{k}p_je^{i\frac{t_j}{\sqrt{np_j}}}\right)^n}_{A} \tag{37.267}$$

Nous analysons maintenant le terme A. Nous écrivons l'égalité $A=A+1-1$ en tenant compte de $\sum_j p_j=1$ sous la forme

$$A=\left(1+\sum_{j=1}^{k}p_j\big(\exp(it_j/\sqrt{np_j})-1\big)\right)^n, \tag{37.268}$$

Nous avons alors

$$\ln(A)=n\ln\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}p_j\big(e^{it_j/\sqrt{np_j}}-1\big)\right] \tag{37.269}$$

Nous développons l'exponentielle en

$$e^{it_j/\sqrt{np_j}}-1=\frac{it_j}{\sqrt{np_j}}-\frac{t_j^2}{2np_j}+\frac{1}{n}\epsilon(1/n) \tag{37.270}$$

et ensuite le logarithme selon la formule

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+x^2\alpha(x^2). \tag{37.271}$$

Nous avons

$$\ln(A)=n\ln\left[1+\sum_j p_j\Big(\frac{it_j}{\sqrt{np_j}}-\frac{t_j^2}{2np_j}+\frac{1}{n}\epsilon(\frac{1}{n})\Big)\right] \tag{37.272a}$$

$$=n\ln\left[1+\sum_j p_j\Big(it_j\sqrt{\frac{p_j}{n}}-\frac{t_j^2}{2n}+\frac{1}{n}\epsilon(\frac{1}{n})\Big)\right] \tag{37.272b}$$

$$=n\underbrace{\sum_{j=1}^{k}\left(it_j\sqrt{\frac{p_j}{n}}-\frac{t_j^2}{2n}+\frac{1}{n}\epsilon(1/n)\right)}_{K} \tag{37.272c}$$

$$-n\frac{1}{2}\left[\sum_j\left(it_j\sqrt{\frac{p_j}{n}}-\frac{t_j^2}{2n}+\frac{1}{n}\epsilon(1/n)\right)^2\right] \tag{37.272d}$$

$$+nK^2\alpha(K) \tag{37.272e}$$

Nous introduisons dans ϵ tous les termes en $1/n^2$ et nous trouvons

$$\ln(A)=\sum_j\left(it_j\sqrt{p_jn}-\frac{t_j^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\sum_j it_j\sqrt{p_j}\right)^2+\epsilon(1/n)+K^2\alpha(K). \tag{37.273}$$

En remplaçant dans (37.267) et en passant à la limite pour $n\to\infty$,

$$\Phi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}(t_1,\ldots,t_k)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_j t_j^2+\frac{1}{2}\big(\sum_j t_j\sqrt{p_j}\big)^2\right). \tag{37.274}$$

Nous reconnaissons des lois gaussiennes dans le premier terme de l'exponentielle. Nous allons maintenant nous atteler à identifier le second terme.

Soit C une matrice orthogonale dont la dernière ligne est $(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_k})$. Nous considérons les vecteurs

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix},\quad t=\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_k\end{pmatrix}. \tag{37.275}$$

et ensuite nous notons $U=(u_1,\dots,u_k)$ le vecteur Ct et $(\beta 1,\dots,\beta_k)$ le vecteur $C\alpha$. Étant donné que C est orthogonale, nous avons $\sum_{i=1}^k\alpha_i^2=\sum_{i=1}^k\beta_i^2$ et $\sum_i t_i^2=\sum_i u_i^2$. Nous avons alors

$$\Phi_{(\beta_1,\dots,\beta_k)}=E\big(e^{i\langle u,\beta\rangle}\big)=E\big(e^{i\langle t,\alpha\rangle}\big)=\Phi_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}(t_1,\dots,t_k). \tag{37.276}$$

Nous pouvons récrire l'argument de l'exponentielle (37.274) de la façon suivante :

$$\sum_{i=1}^k t_j^2=\sum_j u_j^2 \tag{37.277a}$$

$$\sum_{j=1}^k t_j\sqrt{p_j}=(Ct)_k, \tag{37.277b}$$

Nous avons alors

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{(\beta_1,\dots,\beta_k)}(t_1,\dots,t_k)=\lim_{n\to\infty}\Phi_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}(u_1,\dots,u_k) \tag{37.278a}$$

$$=\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}u_j^2\right) \tag{37.278b}$$

$$=\Phi_{(Z_1,\dots,Z_{k-1},0)}(u_1,\dots,u_k) \tag{37.278c}$$

où les Z_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de distribution normale centrée réduite. Nous avons donc montré que

$$(\beta_1,\dots,\beta_k)\xrightarrow{\mathscr{L}}(Z_1,\dots,Z_{k-1},0). \tag{37.279}$$

Étant donné que l'application $x\mapsto\|x\|^2$ est continue, nous avons aussi

$$\|(\beta_1,\dots,\beta_k)\|^2\xrightarrow{\mathscr{L}}\|(Z_1,\dots,Z_{k-1},0)\|^2, \tag{37.280}$$

et par conséquent

$$\|(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\|^2\xrightarrow{\mathscr{L}}\sum_{j=1}^{k-1}Z_j^2\sim\chi^2(k-1). \tag{37.281}$$

D'après la définition (37.263) nous avions

$$\|(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\|^2=\sum_{j=1}^k\frac{(N_j-p_j)^2}{np_j}. \tag{37.282}$$

□

Chapitre 38

Chaînes de Markov à temps discret

Mets tes deux pieds en canard, c'est la chaine de Markov qui se prépare.

38.1 Généralités

Les chaines de Markov interviennent pour la description des systèmes dont l'évolution future ne dépend que de l'état présent.

DEFooGDPFooWsvfRv

Définition 38.1.
Soit E un ensemble au plus dénombrable[1] *et $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Une **chaine de Markov** à valeurs dans E est une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires telles que pour tout $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$,*

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \tag{38.1}$$

Pour une chaine de Markov, il n'est pas important de savoir l'historique pour prédire le futur : X_{n+1} est seulement déterminé par X_n.

Remarque 38.2.
Il existe une théorie des chaines de Markov à temps continu ou avec E non dénombrable, mais ce n'est pas au programme.

38.3.
Vu que l'ensemble E des états est au plus dénombrable, nous rappelons très humblement à la lectrice la proposition 10.145 qui nous permet de changer des sommes sur E en des sommes sur $\mathbb{N}$ sans nous soucier de l'ordre sur E. Si f est une fonction sur E, nous nous écrirons

$$\sum_{x\in E} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k) \tag{38.2}$$

sans citer 10.145 à chaque fois.

DEFooVVWUooKIBQDv

Définition 38.4.
Si (X_n) est une chaine de Markov[2]*, nous notons*

$$p_n(x, y) = P(X_{n+1} = y | X_n = x) \tag{38.3}$$

*la **probabilité de transition** de la chaine à l'instant n. Si cette probabilité ne dépend pas de n, nous disons que la chaine de Markov est **homogène**, et nous notons $p(x, y)$ au lieu de $p_n(x, y)$.*

DEFooKQROooYvJvvl

Définition 38.5 (Matrice de transition)**.**
Nous notons $Q^{(n)}$ la matrice de transition qui est éventuellement infinie :

$$Q_{xy}^{(n)} = p_n(x, y). \tag{38.4}$$

Si l'ensemble des états E est infini, ce n'est pas une matrice à proprement parler.

Le lemme suivant est intuitivement rien d'autre que le fait que la somme des probabilités doit être 1.

[1] Une chaine de Markov sur un ensemble indénombrable demanderait plus de technique à cause du lemme 10.141 qui fait que toutes les sommes sur des ensembles indénombrables sont infinies.
[2] Définition 38.1.

LEMooQNIWooQBMlge

Lemme 38.6.
Soit un processus de Markov (X_n) sur l'ensemble E. Pour chaque $x \in E$ pour pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\sum_{y\in E} p_n(x,y) = 1. \tag{38.5}$$

Démonstration. Nous avons le calcul

$$\begin{aligned}
\sum_{y\in E} p_n(x,y) &= \sum_{y\in E} P(X_{n+1}=y|X_n=x) && \text{(38.6a)}\\
&= P(\Omega|X_n=x) && \text{(38.6b)}\\
&= \frac{P(\Omega\cap X_n=x)}{P(X_n=x)} && \text{(38.6c)}\\
&= 1. && \text{(38.6d)}
\end{aligned}$$

SUBEQooIRGEooHDQxQd

SUBEQooBRMTooQJiKfR

Justifications :

- Pour (38.6b), c'est le lemme 36.60 en observant que $\Omega = \bigcup_{y\in E}\{X_{n+1}=y\}$.
- Pour (38.6d), c'est $\Omega \cap A = A$.

□

Remarque 38.7.
Attention à ce que ce lemme 38.6 ne fonctionne que sur les colonnes de p_n. En effet, la somme $\sum_{x\in E} p(x,y)$ ne vaut pas spécialement 1. Si les états x_1 et x_2 arrivent tous les deux en y de façon certaine, alors nous avons $\sum_x p(x,y) \geqslant 2$. Il n'y a donc pas de limites aux sommes des lignes.

LEMooZIEPooXHGnvy

Lemme-Définition 38.8 (Produit de matrices de transition)**.**
Soient deux processus de Markov (X_n) et (Y_n) sur le même ensemble E. Si nous notons p et q leurs matrices de transition[3] *alors*

ITEMooWNWXooCKOYpE

(1) La somme $\sum_{x\in E} p(a,x)q(x,b)$ converge pour tout $a,b \in E$.

ITEMooEZIEooFEbwhj

(2) Nous notons pq la « matrice de transition »

$$(pq)(a,b) = \sum_{x\in E} p(a,x)q(x,b). \tag{38.7}$$

ITEMooKEFXooMLREkO

(3) La matrice pq vérifie

$$\sum_{y\in E}(pq)(x,y) = 1 \tag{38.8}$$

pour tout $x \in E$.

Démonstration. Nous considérons la mesure de comptage sur E (définition 14.264). Cela nous permet d'écrire la somme comme une intégrale.

(1) **Pour (1)** Nous devons donc démontrer la convergence de

$$\sum_{x\in E} p(a,x)q(x,b) = \int_E p(a,x)q(x,b)dm(x) \tag{38.9}$$

EQooCNNCooGJRWyj

où $dm(x)$ n'est pas du tout la mesure de Lebesgue (qui n'aurait aucun sens), mais bien la mesure de comptage en x.

Nous pouvons majorer $q(x,b)$ par 1 (tous les nombres sont strictement plus grands que zéro) : pour chaque x nous avons

$$p(a,x)q(x,b) \leqslant p(a,x), \tag{38.10}$$

alors que $\int_E p(a,x)dm(x) = 1$ par le lemme 38.6.

Vu que la fonction $x \mapsto p(a,x)q(x,b)$ est dominée par la fonction $x \mapsto p(a,x)$ et que cette dernière est intégrable, le lemme 14.192 conclut à l'intégrabilité de la première. Bref, l'intégrale (38.9) existe et est finie.

[3] Qui n'est pas spécialement une matrice, voir la définition 38.5.

(2) **Pour (2)** Il n'y a rien à prouver, c'est seulement une définition.

(3) **Pour (3)** Nous devons calculer la valeur de

$$\sum_{b\in E}\big(\sum_{x\in E}p(a,x)q(x,b)\big)=\int_E\big(\int_E p(a,x)q(x,b)dm(x)\big)dm(b). \tag{38.11}$$

Pour cela nous allons utiliser le théorème de Fubini comme expliqué en 14.306, et nous partons de la somme dans le sens inverse. D'abord nous prouvons que $(x,b)\mapsto p(a,x)q(x,b)$ est dans $L^1(E\times E)$ en étudiant les intégrales en chaine :

$$\int_E\Big(\int_E|p(a,x)q(x,b)|dm(b)\Big)dm(x)=\int_E p(a,x)\Big(\underbrace{\int_E q(x,b)dm(b)}_{=1}\Big)dm(x) \tag{38.12a}$$

$$=\int_E p(a,x)dm(x) \tag{38.12b}$$

$$=1. \tag{38.12c}$$

Donc la fonction est $L^1(E\times E)$ et nous pouvons fusionner et permuter les intégrales à volonté. Nous avons alors

$$1=\int_E\Big(\int_E|p(a,x)q(x,b)|dm(b)\Big)dm(x) \tag{38.13a}$$

$$=\int_{E\times E}p(a,x)q(x,b)dm(x,b) \tag{38.13b}$$

$$=\int_E\Big(\int_E p(a,x)q(x,b)dm(x)\Big)dm(b). \tag{38.13c}$$

□

38.1.1 Matrice stochastique

DefGJEBooZvuIAV

Définition 38.9.
Une matrice dont tous les éléments sont positifs ou nuls et dont la somme de chaque ligne vaut 1 *est une* ***matrice stochastique****.*

Notons que l'ensemble des matrices stochastiques est un fermé dans l'ensemble des matrices.

Exemple 38.10.
Nous considérons une fourmi qui se déplace dans un appartement à trois pièces A, B, C. Supposons qu'à chaque minute, elle a une probabilité $1/3$ de rester dans la pièce et une probabilité $2/3$ de se déplacer. Le plan de l'appartement est

$$A\longrightarrow B\longrightarrow C \tag{38.14}$$

De la pièce A il est donc uniquement possible d'aller vers la pièce B ; de la B il est possible d'aller en A et en C et de la C il est uniquement possible d'aller en B.

La matrice de transition de cette chaine de Markov est

$$Q=\begin{pmatrix}1/3&2/3&0\\1/3&1/3&1/3\\0&2/3&1/3\end{pmatrix} \tag{38.15}$$

△

38.2 Chaînes de Markov sur un ensemble fini

Définition 38.11.
Une chaine de Markov est ***finie*** *si l'ensemble E dans lequel elle prend ses valeurs est fini.*

PROBooNEMXooLbPpIN

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 38.12
Je ne suis pas totalement certain du lemme suivant (38.13). Soyez prudent, et écrivez-moi si vous avez une démonstration ou un contre-exemple.

Le lemme 38.42 donne une partie de la preuve, je crois.

LEMooYKFZooUEOWbi

Lemme 38.13.
Une matrice est stochastique[4] *si et seulement si elle est la matrice de transition d'une chaine de Markov sur un ensemble fini.*

Définition 38.14.
Soit une matrice stochastique p. Une ***loi stationnaire*** *pour p est un vecteur μ tel que*

(1) $\mu = \mu P$,

(2) $\mu_j \geqslant 0$ *pour tout j,*

(3) $\sum_i \mu_i = 1$.

Lorsque nous parlons d'une chaine de Markov sur un ensemble fini E, la matrice stochastique est indexée par les éléments de E, et, par exemple, la condition $\mu = \mu P$ s'écrit

$$\mu_j = \sum_{i \in E} \mu_i p_{ij} \tag{38.16}$$

pour tout $j \in E$.

Notez que dans ce cas si $A \subset E$, nous pouvons définir $\mu(A) = \sum_{i \in A} \mu_i$. Cette application μ est alors une mesure positive[5] sur E.

DEFooGKRQooFNuwRm

Définition 38.15 ([871]).
Une chaine de Markov est ***irréductible*** *si pour tout $x, y \in E$, il existe n tel que $p^n(x,y) > 0$ où*

$$p^n(x,y) = P(X_n = y | X_0 = x). \tag{38.17}$$

Le nombre n peut dépendre de x et y.

Une chaine de Markov finie est ***régulière*** *si il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que P^n a uniquement des éléments strictement positifs.*

PropUMPpOHW

Proposition 38.16 ([872]).
Soit une chaine de Markov irréductible[6] *finie. Alors il existe une unique loi stationnaire π et de plus nous avons $\pi_i > 0$ pour tout état i de E.*

Je crois que pour prouver ça, il faut utiliser le théorème de Perron-Frobenius 9.113.

Théorème 38.17 ([871]).
Soit P la matrice de transition d'une chaine de Markov régulière[7] *sur un ensemble E de cardinal N. Alors il existe des nombres $\pi_1, \dots, \pi_N$ tels que*

(1) $\pi_i > 0$ *pour tout $i = 1, \dots, N$*

(2) $\pi_1 + \cdots + \pi_N = 1$

(3)

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{pmatrix} \tag{38.18}$$

De plus le vecteur $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ est l'unique solution de

$$\pi P = \pi. \tag{38.19}$$

Démonstration. Si la chaine n'a qu'un seul état c'est évident parce que la probabilité de transition est toujours 1 ; fin de l'histoire.

(1) **Hypothèse**

Sinon nous supposons que P n'a que des éléments positifs, quitte à considérer P^n au lieu de P. Nous notons d le plus petit élément de P ; il vérifie $d \leqslant \frac{1}{2}$ parce que la somme des éléments d'une ligne de la matrice P doit être égale à 1.

[4] Matrice stochastique, définition 38.9.
[5] Définition 14.18.
[6] Définition 38.15.
[7] Définition 38.15.

(2) **Les suites min et max**

Soit x un vecteur quelconque (de composantes positives). Nous notons $m_0 = \min\{x_i\}$ et $M_0 = \max\{x_i\}$. Étant donné que les éléments du vecteur Px sont des moyennes pondérées des éléments de x, si nous posons

$$m_k = \min\{(P^k x)_i\}_{i=1,\dots,N} \tag{38.20a}$$

$$M_k = \max\{(P^k x)_i\}_{i=1,\dots,N}, \tag{38.20b}$$

la suite (m_k) est croissante et la suite (M_k) est décroissante.

(3) **Stricte croissance et décroissance**

Si $M_{k+1} = M_k$, alors toutes les composantes de $P^k x$ sont égales à M_k et le théorème est prouvé. Cela est encore une propriété de la moyenne. Même remarque pour la suite (m_k).

Nous pouvons donc supposer que la suite (m_k) est strictement croissante et que la suite (M_k) est strictement décroissante. Elles sont toutes les deux bornées dans $[m_0, M_0]$. Le lemme 9.36 nous donne la convergence.

(4) **Égalité des limites**

Vu que les éléments de $P^k x$ ne sont pas tous les mêmes et s'étalent de m_k à M_k, pour majorer M_{k+1} nous mettons le plus petit coefficient possible (c'est-à-dire d) devant m_k et nous supposons que toutes les autres composantes sont M_k ; nous avons alors

$$M_{k+1} \leqslant dm_k + (1-d)M_k \tag{38.21}$$

parce que tous les autres coefficients de la ligne contenant le d (dans P^k) sont plus petits ou égaux à $1-d$. De la même façon nous avons la minoration

$$m_{k+1} \geqslant dM_k + (1-d)m_k. \tag{38.22}$$

En faisant la différence, et en nous souvenant que $0 < 1-2d < 1$,

$$M_{k+1} - m_{k+1} \leqslant (1-2d)(M_k - m_k), \tag{38.23}$$

ce qui signifie que

$$M_{k+1} - m_{k+1} \leqslant (1-2d)^k(M_0 - m_0), \tag{38.24}$$

et donc que les deux limites sont égales.

(5) **Conclusion pour la limite**

Pour tout vecteur x, la suite $P^k x$ tend vers un vecteur dont toutes les composantes sont égales. En particulier pour le vecteur e_i de la base canonique,

$$P^k e_i \to \begin{pmatrix} \pi_i \\ \vdots \\ \pi_i \end{pmatrix}. \tag{38.25}$$

Mais $P^k e_i$ est la i^{e} colonne de la matrice P^k. Cela prouve la convergence annoncée $P^k \to \Pi$.

Réglons rapidement le cas des deux autres allégations du théorème. D'abord les matrices P^k sont toutes des matrices stochastiques ; et l'ensemble des matrices stochastiques est fermé, donc la convergence se fait à l'intérieur de l'ensemble des matrices stochastiques. Cela prouve que $\pi_1 + \dots + \pi_N = 1$.

Ensuite la suite (m_k) étant strictement croissante et m_0 étant égal à 0 dans le cas de e_i nous avons toujours $\pi_i > 0$ (strictement). □

38.2.1 Graphe de transition

Le **graphe de transition** d'une chaine de Markov est le graphe dont les sommets sont les éléments de l'espace des états de la chaine et dont les sommets sont reliés par des arêtes pondérées par la probabilité de transition correspondante.

Lemme 38.18.
Une chaine de Markov homogène est irréductible si et seulement si son graphe de transition est connexe.

Démonstration. Pour chaque couple $(x,y)\in E^2$ nous avons

$$\begin{aligned} p^n(x,y) &= \sum_{z_i\in E} P(X_n=y,X_{n-1}=z_{n-1},\dots,X_1=z_1,X_0=x) \\ &= \sum_{z_i} p(z_{n-1},y)p(z_{n-2},z_{n-1})\dots p(z_1,z_2)p(x,z_1). \end{aligned} \tag{38.26}$$

La positivité d'un des termes de la somme signifie que le graphe est connexe tandis que la positivité de $p^n(x,y)$ signifie que la chaine est irréductible. □

38.2.2 Nombre de visites

La fonction

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\{X_k=x\}} \tag{38.27}$$

est la **fréquence empirique** de la chaine de Markov.

Soit x un état récurrent, c'est-à-dire que $P\big(T(x)<\infty|X_0=x\big)=1$. Nous classons les visites de la façon suivante : SubEqsDefTirectempsretou

$$T_1(x) = T(x) = \inf\{k\geqslant 1 \text{ tel que } X_k=x\} \tag{38.28a}$$
$$T_2(x) = \inf\{k\geqslant 1 \text{ tel que } X_{T_1(x)+k}=x\} \tag{38.28b}$$
$$\vdots \tag{38.28c}$$
$$T_n(x) = \inf\{k\geqslant 1 \text{ tel que } X_{T_{n-1}(x)+k}=x\} \tag{38.28d}$$

La variable aléatoire T_i représente le temps entre la visite numéro $i-1$ et la visite numéro i (si $X_0\neq x$, sinon il faut décaler). Nous définissons l'instant la visite numéro n :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}T_k(x). \tag{38.29}$$

Lemme 38.19.
Les variables aléatoires T_i sont indépendantes.

Démonstration. Nous choisissons n des T_i et nous calculons la probabilité

$$\spadesuit = P(T_{i_1}=k_1,T_{i_2}=k_2,\dots,T_{i_n}=k_n) \tag{38.30}$$

où nous supposons $i_1>i_2>\ldots>i_n$. Nous décomposons cette probabilité en sommant sur toutes les histoires de la chaine de Markov compatibles avec les nombres k_i donnés :

$$\spadesuit = \sum_{\substack{\{z_j\}\\ \text{compatibles}}} P(X_j=z_j,j=1,\dots,N). \tag{38.31}$$

Notons qu'ici, le numéro du dernier terme de la somme n'est pas certain parce que tous les T_i ne sont pas fixés. Nous l'avons noté N, mais en réalité il est différent d'un terme à l'autre de la somme. Il est certain que $z_N=x$ et $z_{N-k_1}=x$ et si $N-k_1<j<N$, alors $z_j\neq x$. Cela est simplement le fait que nous demandions aux z_i de respecter les conditions données par les k_i. Nous avons

$$\spadesuit = \sum_{\{z_j\}} P(X_N=x,X_j=z_j,N-k_1<j<N|X_j=z_j,j\leqslant N-k_1)P(X_j=z_j,j<N-k_1) \tag{38.32a}$$
$$= \sum_{\{z_j\}} P(X_N=x,X_j=z_j,N-k_1<j<N|X_{N-k_1}=x)P(X_j=z_j,j<N-k_1) \tag{38.32b}$$
$$\tag{38.32c}$$

Le premier facteur est $P(T_{i_1}=k_1)$ tandis que le second facteur est précisément $P(T_{i_j}=k_j,j>1)$. Nous avons donc montré que

$$P(T_{i_1}=k_1,T_{i_2}=k_2,\dots,T_{i_n}=k_n)=P(T_{i_1}=k_1)P(T_{i_j}=k_j,j>1), \tag{38.33}$$

et donc les T_i sont indépendants. □

DEFooDWLAooINqgep

Définition 38.20 (Temps de première atteinte)**.**
Soit (X_k) une chaine de Markov dont l'espace des états est noté E. Pour chaque $x \in E$ nous notons

$$T(x) = \inf\{k \geqslant 1 \text{ tel que } X_k = x\}. \tag{38.34}$$

*Ce nombre est le **temps de première atteinte** de l'état x.*

*Si $X_0 = x$, alors $T(x)$ est le **temps de retour** en x. Si $p \in \mathbb{N}$ nous notons*

$$T_p(x) = \inf\{k \geqslant 1 \text{ tel que } X_{k+p} = x\} \tag{38.35}$$

C'est le temps mis pour atteindre x à partir de l'instant p.

LembyftKs

Lemme 38.21.
Soit (X_k) une chaine de Markov dont l'espace des états est noté E. Pour chaque $x \in E$ nous considérons les temps de premier atteinte[8] T et T_p. Alors nous avons

$$P(T_p(x) = k | X_p = y) = P(T(x) = k | X_0 = y). \tag{38.36}$$

Remarque 38.22.
La loi des grands nombres est encore vraie sans l'hypothèse de variables aléatoires dans L^1 pourvu qu'elles soient positives. Alors dans la conclusion de la loi nous devons accepter la possibilité que l'espérance soit infinie.

PropMrkIrreLoishLCkpjkptXk

Proposition 38.23.
Soit (X_n) est une chaine de Markov irréductible. Nous notons T le temps de première atteinte[9] Alors

(1) Si x est un état récurrent, alors $T(X) < \infty$ presque surement.

(2) Nous avons une égalité entre les lois

$$\mathscr{L}\big(X_{k+T(x)} | T(x) < \infty\big) = \mathscr{L}(X_k | X_0 = x). \tag{38.37}$$

PropMrkIrreLoishLCkpjkptXkItemii

DefWknULk

Définition 38.24.
*Un état x est **récurrent** si $P(T(x) = \infty | X_0 = x) = 0$, c'est-à-dire si la probabilité de ne jamais retourner en x lorsqu'on y est passé est nulle. L'état x est **transient** ou **transitoire** dans le cas contraire.*

*Si x est un état récurrent, et si $E\big(T(x) | X_0 = x\big) < \infty$, nous disons que x est **récurrent positif**. Si $E\big(T(x) | X_0 = x\big) = \infty$ alors nous disons que est **récurrent nul**.*

38.2.3 Récurrent et transient

DEFooPVHHooBkIDpW

Définition 38.25.
Nous introduisons une variable aléatoire qui compte le nombre de fois que la chaine de Markov passe par l'état x :

$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}}. \tag{38.38}$$

EqDefNxmtuXkn

C'est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

PropEquivEPrecuequiv

Proposition 38.26.
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes à dire que x est récurrent[10] :

(1) $P(N_x < \infty | X_0 = x) = 0$

(2) $E(N_x | X_0 = x) = \infty$.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes à dire que x est transient :

ItemiMnGpD

(1) $P(N_x < \infty | X_0 = x) = 1$

(2) $E(N_x | X_0 = x) < \infty$.

[8] Définition 38.20.
[9] Définition 38.20.
[10] La variable aléatoire N_x est définie par 38.25.

Démonstration. En tant que événements, nous avons l'égalité

$$N_x < \infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{X_n = x, X_{n+k} \neq x \forall k \geqslant 1\}}_{F_n}. \tag{38.39}$$

Nous avons donc

$$P(N_x < \infty | X_0 = x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(F_n | X_0 = x), \tag{38.40}$$ Eqreprencalculstd

et

$$\begin{aligned}
P(F_n|X_0 = x) &= P(X_{n+k} \neq x, \forall k \geqslant 1, X_n = x | X_0 = x) && (38.41a)\\
&= P(X_{n+k} \neq x, k \geqslant 1 | X_n = x, X_0 = x) P(X_n = x | X_0 = x) && (38.41b)\\
&= P(X_{n+k} \neq x, k \geqslant 1 | X_n = x) P(X_n = x | X_0 = x) && (38.41c)\\
&= P(X_k \neq x, k \geqslant 1 | X_0 = x) P(X_n = x | X_0 = x) && (38.41d)\\
&= P(T(x) = \infty | X_0 = x) P(X_n = x | X_0 = x) && (38.41e)
\end{aligned}$$ subEqPFnXkneqxii subEqPFnXkneqxi subEqPFnXkneqxiii

Justifications :

(1) Pour (38.41c), nous utilisons le fait que la chaine soit « sans mémoire ».

(2) Pour (38.41d), nous utilisons le fait que la chaine soit homogène.

(3) Pour (38.41e), l'événement $X_k \neq x$ pour tout $k \geqslant 1$ est exactement l'événement $T(x) = \infty$.

En nous servant de la proposition 14.309 (théorème de Fubini et mesure de comptage), nous permutons l'espérance et la somme dans l'expression EqPEEEntstq

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = x | X_0 = x) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(\mathbb{1}_{\{X_n = x\}} | X_0 = x) && (38.42a)\\
&= E\big(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}} | X_0 = x\big) && (38.42b)\\
&= E(N_x | X_0 = x). && (38.42c)
\end{aligned}$$

Voyons ce passage plus en détail. D'abord, en général nous avons

$$E(Y|X = x_0) = \int_{\{X=x_0\}} Y(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X=x_0\}}(\omega) Y(\omega) dP(\omega). \tag{38.43}$$

Dans notre cas,

$$E\big(\mathbb{1}_{\{X_n=x\}} | X_0 = x\big) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{X_0=x}(\omega) \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}(\omega) dP(\omega). \tag{38.44}$$

La fonction qui correspond à la proposiiton 14.309 est

$$f(n, \omega) = f_n(\omega) = \delta_{X_0(\omega),x} \delta_{X_n(\omega),x}, \tag{38.45}$$

qui est bien une fonction positive et mesurable.

Nous reprenons à présent le calcul (38.40) en remplaçant les éléments par leurs valeurs que nous avons calculées :

$$P(N_x < \infty | X_0 = x) = P\big(T(x) = \infty | X_0 = x\big) E(N_x | X_0 = x). \tag{38.46}$$ EqPnxXzTxarn

Si x est récurrent, nous avons $P\big(T(x) = \infty | X_0 = x\big) = 0$, mais la relation (38.46) ne permet pas de conclure que le membre de gauche est nul parce qu'il reste la possibilité que $E(N_x|X_0 = x) = \infty$. Nous devons donc faire un pas en arrière et écrire cette espérance comme la limite des sommes partielles :

$$P(N_x < \infty | X_0 = x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} P\big(T(x) = \infty | X_0 = x\big) P(X_n = x | X_0 = x) = 0 \tag{38.47}$$

parce que tous les termes de la suite des sommes partielles sont nuls. Nous avons donc bien que $P(N_x < \infty | X_0 = x) = 0$. Il s'ensuit immédiatement que $E(N_x|X_0 = x) = 1$.

Nous devons maintenant démontrer l'implication inverse. Supposons que $P(N_x < \infty | X_0 = x) = 0$. Dans ce cas nous avons immédiatement $P(N_x = \infty | X_0 = x) = 1$ et $E(N_x|X_0 = x) = \infty$. L'équation (38.46) nous indique alors que

$$P\big(T(x) = \infty | X_0 = x\big) = 0, \tag{38.48}$$

c'est-à-dire que x est récurrent. □

38.2.4 Chaînes irréductibles

Proptoustanstousrecirrsi

Proposition 38.27.
Soit (X_n) une chaine de Markov irréductible.

(1) Un état x est récurrent si et seulement si tous les états sont récurrents.

(2) Un état x est transient si et seulement si tous les états sont transients.

Démonstration. Soient x et y des états de la chaine de Markov. Nous devons tester la valeur de $P(X_n = y|X_0 = y)$. Afin d'exploiter l'hypothèse d'irréductibilité, nous considérons $r, s \in \mathbb{N}$ tels que

$$p^r(x, y) > 0 \tag{38.49a}$$
$$p^s(y, x) > 0 \tag{38.49b}$$

et nous minorons en passant par quelques intermédiaires :

$$\begin{aligned} P(X_{n+r+s} = y|X_0 = y) &\geqslant P(X_{n+r+s} = y, X_{n+s} = x, X_s = x|X_0 = y) && (38.50a)\\ &= P(X_{n+r+s} = y|X_{n+s} = x, X_s = x, X_0 = y) && (38.50b)\\ &\quad P(X_{n+s} = x|X_s = x, X_0 = y)P(X_s = x|X_0 = y). \end{aligned}$$

Les deux premiers facteurs se calculent en utilisant la propriété de Markov et l'homogénéité de la chaine. Pour le premier,

$$P(X_{n+s} = x|X_s = x, X_0 = y) = P(X_{n+s} = x|X_s = x) = P(X_n = x|X_0 = x). \tag{38.51}$$

Nous avons donc

EqRmuXtG

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_{n+r+s} = y|X_0 = y) \geqslant p^r(x, y)p^s(y, x) \sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_n = x|X_0 = x). \tag{38.52}$$

En réutilisant Fubini, avec la mesure de comptage, nous permutons somme et probabilité[11] comme ceci :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_{n+r+s} = y|X_0 = y) \geqslant KE(N_x|X_0 = x) \tag{38.53}$$

où K est une constante strictement positive, par hypothèse d'irréductibilité de la chaine de Markov.

Si x est un état récurrent, alors le membre de gauche est infini par la proposition 38.26 et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_{n+r+s} = y|X_0 = y) = \infty. \tag{38.54}$$

Aux $r + s$ premiers termes près (qui ne changent pas la somme), nous avons

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_n = y|X_0 = y) = \infty, \tag{38.55}$$

ce qui signifie que y est récurrent. □

Nous rappelons[12] que $T(x)$ est le temps de première atteinte de l'état x. Nous notons

EqKyuIYk

$$\pi(x) = \frac{1}{E\big(T(x)|X_0 = \infty\big)}. \tag{38.56}$$

Étant donné que $T(x)$ est un entier positif ou nul nous avons $E\big(T(x)|X_0 = x\big) \in [1, \infty]$ et donc $\pi(x) \in [0, 1]$.

Si x est un état transient, alors $T(x) = \infty$ lorsque $X_0 = x$ et donc $E\big(T(x)|X_0 = x\big) = 0$ et $\pi(x) = 0$. Si x est récurrent par contre, $P\big(T(x) < \infty|X_0 = x\big) = 1$ et il n'y a pas de garanties sur la valeur de $E\big(T(x)|X_0 = x\big)$.

CorLhpRsk

Corolaire 38.28.
Un état récurrent est récurrent positif si et seulement si $\pi(x) > 0$. Un état récurrent est récurrent nul si et seulement si $\pi(x) = 0$.

Démonstration. C'est la formule (38.56). □

[11] Un autre exemple de telle utilisation dans (38.42).
[12] Définition 38.20.

PropjOjDux

Proposition 38.29.
Si (X_n) est une chaine de Markov irréductible et si $x \in E$ alors

$$\pi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} \tag{38.57}$$

EqPiEndempropropkeu

presque surement.

Démonstration. Étant donné que la chaine est irréductible, les états sont soit tous transient soit tous récurrents par la proposition 38.27. Nous commençons par considérer que x est transient.

En comparant la définition (38.38) de N_x et le membre de droite de (38.57), nous avons pour chaque n l'inégalité

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} \leqslant \frac{1}{n} E(N_x). \tag{38.58}$$

EqkkueusnfracumENx

Dans le cas d'un élément transient, nous avons $\pi(x) = 0$, donc il serait bon de montrer que $E(N_x) < \infty$, de sorte que prendre la limite $n \to \infty$ dans (38.58) donne zéro.

Nous décomposons le calcul en deux morceaux :

$$E(N_x) = E\big(N_x|T(x) = \infty\big)P\big(T(x) = \infty\big) + E\big(N_x|T(x) < \infty\big)P\big(T(x) < \infty\big). \tag{38.59}$$

Le fait que le premier terme soit fini découle immédiatement du fait que $T(x) = \infty$ implique $X_k \neq x$ pour tout $k \geqslant 1$. Dans ce cas l'espérance de N_x est évidemment finie.

Pour le second terme nous avons

$$E\big(N_x|T(x) < \infty\big) = E\big(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}}|T(x) < \infty\big) \tag{38.60a}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E\big(\mathbb{1}_{\{X_k=x\}}|T(x) < \infty\big). \tag{38.60b}$$

Pour inverser la somme et l'espérance, nous avons utilisé le théorème de Fubini-Tonelli qui est encore valable pour des fonctions qui prennent la valeur ∞. Le fait d'inverser ne signifie pas que ni la somme ni l'intégrale soit finie. D'ailleurs c'est exactement ce que nous sommes en train de déterminer.

Étant donné que nous voulons seulement savoir si cette somme est finie ou non, nous pouvons nous restreindre à la somme depuis $k = 1$ et oublier le premier terme. D'autre part nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{j+T(x)}=x\}} \tag{38.61}$$

parce que les $T(x)$ premiers termes sont par définition nuls. Nous regardons donc

$$\sum_{j=0}^{\infty} E\big(\mathbb{1}_{X_{j+T(x)}=x}|T(x) < \infty\big) = \sum_{j} P\big(X_{j+T(x)} = x|T(x) < \infty\big) \tag{38.62a}$$

$$= \sum_{j} P(X_j = x|X_0 = x) \tag{38.62b}$$

subeqsumkPXjXzsezii

$$= \sum_{j} E\big(\mathbb{1}_{\{X_j=x\}}|X_0 = x\big) \tag{38.62c}$$

$$= E\big(\sum_{j} \mathbb{1}_{X_j=x}|X_0 = x\big) \tag{38.62d}$$

$$= E(N_x|X_0 = x) \tag{38.62e}$$

$$< \infty \qquad \text{parce que } x \text{ est transient.} \tag{38.62f}$$

L'équation (38.62b) provient de la proposition 38.23 et plus précisément de l'égalité entre les lois (38.37). Nous avons terminé la preuve dans le cas où x est transient.

Nous passons maintenant au cas où x est récurrent, c'est-à-dire $P(T(x) < \infty|X_0 = x) = 1$. Les variables aléatoires T_i définies en (38.28) pour $i \geqslant 2$ sont indépendantes et identiquement distribuées et

$$\mathscr{L}\big(T_k(x)\big) \sim \mathscr{L}\big(T(X)|X_0 = x\big). \tag{38.63}$$

La loi des grands nombres nous indique que EqlgnMarkdemked

$$\frac{S_n}{n} = \frac{T_1(x)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} T_k(x) \xrightarrow{p.s.} E\big(T_2(x)\big) \tag{38.64a}$$

$$= E\big(T(x)|X_0 = x\big). \tag{38.64b}$$

Nous posons pour $m \in \mathbb{N}$

$$n(m) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{\{X_j = x\}} \tag{38.65}$$ EqDennmsumjmtu

qui est le nombre de visites de x avant l'instant m. Nous avons évidemment $n(m) \leqslant m$. Mais S_n est l'instant de la $n$ième visite, par conséquent $S_{n(m)}$ est l'instant de la dernière visite avant le moment m. Pour tout m nous avons les inégalités

$$S_{n(m)} \leqslant m < S_{n(m)+1}. \tag{38.66}$$

Nous divisons par $n(m)$ et nous effectuons la limite $m \to \infty$:

$$\frac{S_n(m)}{n(m)} \leqslant \frac{m}{n(m)} \leqslant \frac{S_{n(m)}+1}{n(m)} \tag{38.67}$$ EqdrembSnm

En ce qui concerne la limite de $n(m)$, nous utilisons la définition (38.65) :

$$\lim_{m\to\infty} n(m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathbb{1}_{\{X_j=x\}} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_j=x\}} \xrightarrow{p.s.} \infty \tag{38.68}$$

par la proposition 38.26. Plus précisément, la limite vaut N_x qui vaut presque surement ∞ dans le cas où x est récurrent. Par ailleurs la loi des grands nombres (38.64) nous enseigne en particulier que

$$\frac{S_{n(m)}}{n(m)} \xrightarrow{p.s.} E\big(T(x)|X_0 = x\big). \tag{38.69}$$

Le terme de droite dans (38.67) se traite de façon usuelle :

$$\frac{S_{n(m)+1}}{n(m)} = \frac{S_{n(m)+1}}{n(m)+1}\frac{n(m)+1}{n(m)}. \tag{38.70}$$

Le dernier facteur tend vers 1 et le tout a pour limite $E\big(T(x)|X_0 = x\big)$. Par conséquent nous avons

$$\frac{m}{n(m)} \xrightarrow{p.s.} E\big(T(x)|X_0 = x\big) \tag{38.71}$$

et

$$\frac{n(m)}{n} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{\{X_j=x\}} \to \frac{1}{E\big(T(x)|X_0 = x\big)} = \pi(x). \tag{38.72}$$

□

La proposition suivante nous permet de parler de chaine de Markov **récurrence positive**. PropUyLCzp

Proposition 38.30.
Soit (x_n) une chaine de Markov irréductible.

(1) Un état x est transient si et seulement si tous les états sont transients.

(2) Un état est récurrent positif si et seulement si tous les états sont récurrents positifs.

Démonstration. Nous rappelons (proposition 38.29) que si la chaine est irréductible

$$\pi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[X_k=x]} \tag{38.73}$$ EqZZMqsm

Notons aussi que

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{X_k=x} = \begin{cases} 0 & \text{si } N < T(x) \\ \sum_{k=0}^{N-T(x)} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)}=x} & \text{si } N > T(x) \end{cases} \tag{38.74}$$

où dans la seconde ligne nous avons effectué le changement de variable de sommation $k' = k + T(x)$. Dans la limite (38.73) nous sommes toujours dans le cas où N est assez grand. Nous pouvons donc écrire

$$\pi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-T(x)} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}}. \tag{38.75}$$

Nous pouvons aussi écrire

$$\frac{1}{N-T(x)} \sum_{k=0}^{N-T(x)} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}} = \frac{N}{N-T(x)} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-T(x)} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}}. \tag{38.76}$$

Dans cette dernière égalité le membre de droite tend vers $\pi(x)$ et nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N-T(x)} \sum_{k=0}^{N-T(x)} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}} = \pi(x) \tag{38.77}$$

ou encore

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}} = \pi(x) \tag{38.78}$$

Étant donné que $\pi(x)$ est une constante nous avons évidemment $E(\pi(x)) = \pi(x)$. Nous pouvons cependant considérer les variables aléatoires

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}} \tag{38.79}$$

et remarquer que $Z_n \xrightarrow{p.s.} \pi(x)$ avec $0 \leqslant Z_n \leqslant 1$. Le théorème de la convergence dominée (14.207) nous permet d'inverser la limite et l'espérance et écrire

$$\pi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\big(\mathbb{1}_{X_{k+T(x)=x}}\big) \tag{38.80a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P\big(X_{k+T(x)} = x\big). \tag{38.80b}$$

Par le lemme 38.21 nous avons

$$P(X_{k+T(x)} = x) = P(X_k = k | X_0 = x) \tag{38.81}$$

et $\pi(x)$ prend la forme

$$\pi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(X_k = x | X_0 = x). \tag{38.82}$$

EqurCteK

Soit maintenant un état x positif récurrent et y, un autre état. Par définition 38.24 et par corolaire 38.28 nous avons $\pi(x) > 0$. Nous devons prouver que $\pi(y) > 0$.

Étant donné que la chaine est irréductible il existe r et s tels que

$$\begin{cases} p^r(x,y) = P(X_r = y | X_0 = x) > 0 & \text{(38.83a)} \\ p^s(x,y) = P(X_s = x | X_0 = y) > 0 & \text{(38.83b)} \end{cases}$$

Nous reprenons l'équation (38.52) multipliée par $1/N$:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(X_{r+s+n=y|X_0=y}) \geqslant \underbrace{p^r(x,y)p^s(y,x)}_{\geqslant 0} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(X_n = x | X_0 = x)}_{\to\pi(x)} \tag{38.84}$$

et nous prenons la limite lorsque $N \to \infty$. À $r+s$ termes près, nous trouvons à gauche l'expression (38.82) de $\pi(y)$. Par conséquent

$$\pi(y) \geqslant \lim_{N\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{N} P(X_{r+s+n} = y | X_0 = y) \geqslant \alpha\pi(x) \tag{38.85}$$

où α est une constante positive. Le nombre $\pi(x)$ étant strictement positif par hypothèse nous avons montré que $\pi(y) > 0$, c'est-à-dire que y est récurrent positif. □

38.2.5 Périodique et irréductible

Nous voudrions savoir sous quelles conditions la variable aléatoire X_n converge en loi vers quelque chose lorsque $n \to \infty$. Une telle loi limite doit dépendre de la loi initiale[13] comme le montre l'exemple de la chaine de Markov

$$1 \circlearrowleft A \xleftarrow{1/2} C \xrightarrow{1/2} B \circlearrowright 1 \tag{38.86}$$

Si $X_0 = C$, alors la loi limite est

$$\frac{1}{2}(\delta_A + \delta_B). \tag{38.87}$$

Si par contre $X_0 = B$, la loi limite est δ_B. Notons que la chaine de Markov proposée ici est irréductible.

Notons qu'il n'y a pas toujours de lois limite comme le montre l'exemple

$$A \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} B \tag{38.88}$$

avec $X_0 = A$. La loi en est

$$X_k = \begin{cases} \delta_A & \text{si } k \text{ est pair} \\ \delta_B & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases} \tag{38.89}$$

Lemme 38.31.
Si nous avons une loi limite

$$P(X_n = x) \to l(x), \tag{38.90}$$

EqmbQMAY

et que la chaine est irréductible, alors nous avons $l = \pi$.

Démonstration. D'après la proposition 38.29 nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(X_k = x) \to \pi(x). \tag{38.91}$$

Par le lemme 10.178 sur la moyenne de Cesàro et l'hypothèse (38.90), nous avons aussi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(X_k = x) \to l(x). \tag{38.92}$$

Du coup $\pi(x) = l(x)$. □

Lemme 38.32 ([872])**.**
Si π est une loi stationnaire et si x est un étant transient, alors $\pi(x) = 0$.

Ce lemme (qui peut être prouvé rigoureusement) est principalement dû au fait que la chaine de Markov ne visite un état transitoire qu'un nombre fini de fois par la proposition 38.26(1).

DefCxvOaT

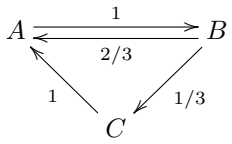
Définition 38.33.
*Un état $x \in E$ est **apériodique** si*

$$\operatorname{pgcd}\{n \geqslant 1 \text{ tel que } p^n(x,x) > 0\} = 1. \tag{38.93}$$

Mettons que tous les n tels que $p^n(x,x) > 0$ ont 2 comme diviseur. L'état n'est alors pas apériodique, mais on voit que si $X_0 = x$, alors les états impairs ne peuvent pas être sur x. Cela est une forme de périodicité.

Si un état est apériodique, il existe r et s premiers entre eux tels que $p^r(x,x)$ et $p^s(x,x)$ sont non nuls. En particulier pour tout $n \in r\mathbb{N} + s\mathbb{N}$, $P(X_n = x) \neq 0$. Par conséquent la proposition 1.367 nous indique qu'à partir d'un certain moment tous les X_k pourraient être x.

L'état C de la chaine de Markov suivante est apériodique :



(38.94)

En effet $p^3(C,C) \neq 0$ par le chemin $C \to A \to B \to C$ tandis que $p^5(C,C) \neq 0$ également par le chemin $C \to A \to B \to A \to B \to C$. Or $\operatorname{pgcd}\{3,5\} = 1$.

[13] Lorsque la loi limite ne dépend pas de la loi initiale, nous disons que la chaine de Markov est ergodique, nous y reviendrons.

PropSaOysS

Proposition 38.34 ([872]).
Soit (X_n), une chaine de Markov irréductible. Un état x est apériodique si et seulement si il existe N tel que

$$p^k(x,x) = P(X_k = x | X_0 = x) > 0 \tag{38.95}$$

pour tout $k \geqslant N$.

DEFooBNBVooBuWQqi

Proposition-Définition 38.35.
Si une chaine de Markov est irréductible, alors un état est apériodique si et seulement si tous les états sont apériodiques.

*Dans ce cas nous disons que la chaine est **apériodique**.*

Démonstration. Soit x un état apériodique de la chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En vertu de la proposition 38.34 il existe N_x tel que $p^k(x,x) \neq 0$ pour tout $k \geqslant N_x$. Soit $y \in E$. Étant donné que la chaine est irréductible, il existe r et s tels que $p^r(x,y) > 0$ et $p^s(y,x) > 0$. Nous avons

$$p^{k+r+s}(y,y) = P(X_{k+r+s} = y | X_0 = y) \geqslant p^s(x,y)P(X_k = x | X_0 = x)p^r(y,x). \tag{38.96}$$

Si k est assez grand, cette quantité est strictement positive. Donc il suffit de prendre $N_y = N_x + r + s$ pour savoir que y est également apériodique. □

Exemple 38.36.
Quelle est la différence entre une chaine irréductible et une chaine apériodique ? Une chaine est irréductible lorsque aucune sous-chaine ne peut piéger le système. Pour toute paire d'états $x, y \in E$, il existe un n tel qu'il soit possible d'aller de x à y en n pas. Une chaine est apériodique lorsqu'après un temps suffisamment long, *tous* les états soient possibles en même temps.

Un exemple de chaine irréductible non apériodique :

$$A \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} B \tag{38.97}$$

Cette chaine est irréductible parce que le graphe est connexe, par contre il n'est pas apériodique parce que si $X_0 = A$ il n'est pas possible d'être dans l'état A après un nombre impair de pas.

Plus formellement, $p^n(A,A) = 1$ dès que n est pair ; le PGCD de la définition 38.33 n'est donc certainement pas 1. △

ThoQSuLZoz

Théorème 38.37 ([872]).
Si (X_n) est une chaine de Markov finie, irréductible[14] *et apériodique*[15] *de loi stationnaire π, alors*

(1) La suite de matrices stochastiques p^k converge vers la matrice

$$p^k \to \Pi = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}. \tag{38.98}$$

(2) Nous avons convergence des variables aléatoires au sens où

$$P(X_k = \mu p^k) \to \pi. \tag{38.99}$$

38.3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées valant -1 avec une probabilité p et 1 avec une probabilité $(1-p)$. La loi est

$$Y_n \sim p\delta_{-1} + (1-p)\delta_1. \tag{38.100}$$

Nous considérons la variable aléatoire

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{38.101}$$

[14] Irréductible, définition 38.15.
[15] Définition 38.35.

où X_0 est une variable aléatoire indépendante des Y_i à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Nous vérifions à présent que X_n est une chaine de Markov avec comme espace d'états $E = \mathbb{Z}$. Nous devons montrer que

$$P\big(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) = P\big(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\big). \tag{38.102}$$

EqAVoirMarkovMAZ

Pour ce faire nous allons exprimer tout cela en termes des Y_i au lieu des X_i. D'abord étant donné que nous avons égalité des événements

$$\{X_{n+1} = x_{n+1}\} \cap \{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\} = \{Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n\} \cap \{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\}, \tag{38.103}$$

nous pouvons, en vertu du principe (36.126), remplacer $X_{n+1} = x_{n+1}$ par $Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ dans le membre de gauche de (38.102). Nous avons donc déjà

$$P\big(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) = P\big(\underbrace{Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n}_{A} | \underbrace{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0}_{B}\big). \tag{38.104}$$

L'événement B est égal à l'événement

$$\{X_0 = x_0, Y_1 = x_1 - x_0, Y_2 = x_2 - x_1, \dots, Y_n = x_n - x_{n-1}\}, \tag{38.105}$$

qui n'est autre que l'ensemble

$$X_0^{-1}(x_0) \cap Y_1^{-1}(x_1 - x_0) \cap \dots \cap Y_n^{-1}(x_n - x_{n-1}) \tag{38.106}$$

qui est dans la tribu engendrée par les variables aléatoires $X_0, (Y_i)_{i=1,\dots,n}$. Le point délicat du raisonnement est de montrer que les événements A et B donnés par

$$A = \{Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n\} \tag{38.107a}$$

$$B = \{X_0 = x_0\} \cap \bigcap_{i=1}^{n} \{Y_i = x_i - x_{i-1}\} \tag{38.107b}$$

sont indépendants. Nous ne pouvons pas montrer directement que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ parce que cela est la formule que nous voulons utiliser pour montrer que la chaine est de Markov. Nous passons donc par les tribus :

subesqqsABtribsYYXzY

$$A \in \sigma(Y_{n+1}) \tag{38.108a}$$

$$B \in \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n). \tag{38.108b}$$

Nous utilisons maintenant l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires X_0 et Y_i pour conclure que les deux tribus des équations (38.108) sont indépendantes. Les événements A et B sont par conséquent indépendants.

L'événement A est indépendant de l'événement $\{X_n = x_n\}$. Nous avons donc successivement

$$\begin{aligned}
&P\big(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) \\
&\quad = P\big(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) && (38.109a)\\
&\quad = P\big(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n | Y_i = x_i - x_{i-1}, X_0 = x_0\big) && (38.109b)\\
&\quad = P(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n) && \text{cf. justif.} \quad (38.109c)\\
&\quad = P(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n | X_n = x_n) && \text{cf. justif.} \quad (38.109d)\\
&\quad = P(Y_{n+1} = x_{n+1} - X_n | X_n = x_n) && \text{cf. justif.} \quad (38.109e)\\
&\quad = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). && (38.109f)
\end{aligned}$$

EqEDQkUcm_c
EqEDQkUcm_d
EqEDQkUcm_e

Justifications :

- (38.109c) parce que les tribus $\sigma(Y_{n+1})$ et $\sigma(Y_i, X_0)$ sont indépendantes.
- (38.109d) Nous avons
$$\{X_n = x_n\} \in \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n) \tag{38.110}$$
tandis que
$$\{Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n\} \in \sigma(Y_{n+1}); \tag{38.111}$$
ce sont donc deux événements issus de tribus indépendantes. Donc conditionner ou non l'événement $Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ à l'événement $X_n = x_n$ ne change rien.

- (38.109e) est encore l'utilisation du fait que $P(A|B) = P(K|B)$ dès que $A \cap B = K \cap B$.

La chaine est par conséquent de Markov.
La matrice de transition de cette chaine de Markov est une matrice infinie « dans tous les sens » :

$$p(x,y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x-1 \\ (1-p) & \text{si } y = x+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{38.112}$$

Remarque 38.38.
La plupart du temps lorsqu'il faut démontrer qu'une chaine est de Markov, il faut suivre la procédure que nous venons de suivre pour la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

- Écrire tout en fonction des incréments.
- Dire que les incréments conditionnés sont indépendants des incréments qui conditionnent (via les tribus engendrées).
- Écrire que la probabilité cherchée est égale à l'événement conditionné dans lequel on a juste remplacé l'incrément par sa valeur.
- Conditionner à nouveau par rapport au dernier incrément qui est indépendant.
- Changer la valeur du dernier incrément par la variable aléatoire.

Dans ce raisonnement nous utilisons deux fois le fait que $P(A|B) = P(K|B)$ si $A \cap B = K \cap B$.

38.3.1 Chaînes de Markov homogènes

PROPooYIDWooAKTVvS

Proposition 38.39.
Voici quelques propriétés des chaines de Markov homogènes[16].

ITEMooSDDUooVRnpjv

(1) La probabilité d'une trajectoire donnée est

$$P(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = p(x_{n-1}, x_n) \dots p(x_0, x_1) P(X_0 = x_0) \tag{38.113}$$

où les $p(x,y)$ sont les probabilités de transitions introduits dans la définition 38.4.

ITEMooJZNRooXFQTQc

(2) La probabilité de transition « en n coups » est donnée par la puissance n^e de la matrice de transition :

$$P(X_n = x_n | X_0 = x_0) = Q^n_{x_0,x_n}. \tag{38.114}$$

ITEMooJUEMooWXEkBO

(3) Si l'espace des états E est fini, l'espérance d'une fonction bornée[17] *$f : E \to \mathbb{R}$ de l'état est donnée par*

$$E\big(f(X_{n+1}) | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) = E\big(f(X_{n+1}) | X_n = x_n\big) = \sum_{y \in E} f(y) p(x_n, y) \tag{38.115}$$

pour tout $x_0, \dots, x_n \in E$.

Pour être précis, ce que nous notons « $f(X_{n+1})$ » est la composée $f \circ X_{n+1}$.

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **Pour (1)** Nous écrivons la formule $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ pour les événements $A = \{X_n = x_n\}$ et $B = \bigcap_{i=0}^{n-1} \{X_i = x_i\}$:

$$\begin{aligned} P(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \\ P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) P(X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0). \end{aligned} \tag{38.116}$$

Par la propriété de Markov, le premier facteur est

$$P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) = p(x_{n-1}, x_n). \tag{38.117}$$

Le reste est une récurrence sur n.

[16] Définition 38.4.
[17] L'hypothèse de borne sur f n'est pas très chère parce que E est fini. Il suffit que f ne soit infinie en aucun point.

(2) **Pour (2)** Montrons avec $n = 2$. En utilisant les divers points du théorème 36.58, nous avons

$$\begin{aligned}
P(X_2 = x_2|X_0 = x_0) &= \sum_{y\in E} P(X_2 = x_2, X_1 = y|X_0 = x_0) && (38.118a)\\
&= \sum_{y\in E} P(X_2 = x_2|X_1 = y, X_0 = x_0)P(X_1 = y|X_0 = x_0) && (38.118b)\\
&= \sum_{y\in E} P(X_2 = x_2|X_1 = y)P(X_1 = y|X_0 = x_0) && (38.118c)\\
&= \sum_{y\in E} p(y, x_2)p(x_0, y) && (38.118d)\\
&= Q^2_{x_2,x_0}. && (38.118e)
\end{aligned}$$

subEqyExdyyxz

Nous avons utilisé l'homogénéité de la chaine de Markov au moment d'écrire l'expression (38.118d). En principe nous aurions dû écrire $p_2(y, x_2)p_1(x_0, y)$.

(3) **Pour (3)** Vu que E est fini, $f(E)$ est fini et nous notons $\{a_k\}_{k=1,\dots,N}$ l'ensemble des valeurs non nulles (dans $\mathbb{R}$) atteintes par f. Nous utilisons le lemme 36.77 pour la variable aléatoire[18] $f \circ X_{n+1} \colon \Omega \to \{0, a_k\}_{k=1,\dots,N}$:

$$E\big(f(X_{n+1})|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) = \sum_{k=1}^{N} a_k P\big(f \circ X_{n+1} = a_k|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big). \quad (38.119)$$

EQooLRZJooJGceeV

L'événement $f \circ X_{n+1} = a_k$ signifie $X_{n+1} \in f^{-1}(a_k)$ ou encore

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_{n+1}(\omega) \in f^{-1}(a_k)\}. \quad (38.120)$$

Vu que E est fini, l'ensemble $f^{-1}(a_k)$ est fini et nous écrivons

$$f^{-1}(a_k) = \{y_{k,1}, \dots, y_{k,N_k}\}. \quad (38.121)$$

Nous avons

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_{n+1}(\omega) \in f^{-1}(a_k)\} = \bigcup_{i=1}^{N_k} \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_{n+1}(\omega) = y_{k,i}\}. \quad (38.122)$$

Nous pouvons utiliser le lemme 36.60 pour décomposer

$$P(f \circ X_{n+1} = a_k|\cdots) = \sum_{i=1}^{N_k} P(X_{n+1} = y_{k,i}|\cdots) \quad (38.123)$$

et continuer (38.119) pas

$$\begin{aligned}
E\big(f(X_{n+1})|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) &= \sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{i=1}^{N_k} P(X_{n+1} = y_{k,i}|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) && (38.124a)\\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{i=1}^{N_k} P(X_{n+1} = y_{k,i}|X_n = x_n) && (38.124b)\\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k P\big(f \circ X_{n+1} = a_k|X_n = x_n\big) && (38.124c)\\
&= E\big(f(X_{n+1})|X_n = x_n\big). && (38.124d)
\end{aligned}$$

SUBEQooOWSUooTlUXAs

Pour (38.124b), nous avons utilisé la propriété de Markov.

□

[18] La composée de fonctions mesurables est mesurable, proposition 14.45. De plus f est mesurable parce que E étant dénombrable, nous y mettons la tribu de toutes les parties.

38.3.2 Chaîne de Markov définie par récurrence

38.3.2.1 Le cas général

PropqiMdHh

Proposition 38.40.
Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans E, un ensemble au plus dénombrable. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées indépendantes de X_0.

Soit (X_n) la suite de variables aléatoires à valeurs dans E définie par récurrence selon la formule

$$X_{n+1} = G(X_n, Y_{n+1}) \tag{38.125}$$

où $G\colon E \times \mathbb{R} \to E$ est une fonction mesurable. Alors (X_n) est une chaine de Markov.

Démonstration. Soient $x_0, \dots, x_{n+1}$ des éléments de E. Nous devons calculer la valeur de

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0). \tag{38.126}$$

Commençons par préciser les espaces sur lesquels nos variables aléatoires sont définies. Nous avons

$$X_0\colon \Omega_0 \to E \tag{38.127}$$

et

$$Y_i\colon \Omega \to \mathbb{R}. \tag{38.128}$$

La variable aléatoire X_1 est donnée par

$$\begin{aligned} X_1\colon \Omega_0 \times \Omega &\to E \\ (\omega_0, \omega_1) &\mapsto G\big(X_0(\omega_0), Y_1(\omega_1)\big). \end{aligned} \tag{38.129}$$

La variable aléatoire X_2 est

$$\begin{aligned} X_2\colon \Omega_0 \times \Omega^2 &\to E \\ (\omega_0, \omega_1, \omega_2) &\mapsto G\big(X_1(\omega_0, \omega_1), Y_2(\omega_2)\big) \\ &= G\Big(G\big(X_0(\omega_0), \omega_1\big), Y_2(\omega_2)\Big) \end{aligned} \tag{38.130}$$

et ainsi de suite.

Considérons maintenant l'événement

$$\{X_1 = x_1, X_0 = x_0\} \subset \Omega_0 \times \Omega. \tag{38.131}$$

Il est donné explicitement par

$$\{X_1 = x_1, X_0 = x_0\} = \{(\omega_0, \omega_1) \text{ tel que } G\big(X_0(\omega_0), Y_1(\omega_1)\big) = x_1, X_0(\omega_0) = x_0\} \tag{38.132a}$$
$$= \{(\omega_0, \omega_1) \text{ tel que } G\big(x_0, Y_1(\omega_1) = x_1\big), X_0(\omega_0) = x_0\} \tag{38.132b}$$
$$= \{\omega_0 \in \Omega_0 \text{ tel que } X_0(\omega_0) = x_0\} \times \{\omega_1 \in \Omega \text{ tel que } G\big(x_0, Y_1(\omega_1)\big) = x_1\}. \tag{38.132c}$$

Le premier terme du produit cartésien est dans $\sigma(X_0)$, tandis que le second est dans $\sigma(Y_1)$. Étant donné la définition des tribus produit (définition 14.127) nous avons

$$\{X_1 = x_1, X_0 = x_0\} \in \sigma(X_0, Y_1). \tag{38.133}$$

Ce raisonnement se généralise immédiatement et nous trouvons que

$$\{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\} \in \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n). \tag{38.134}$$

Nous en sommes donc à calculer

$$\diamondsuit = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = X_n, \dots, X_0 = x_0) \tag{38.135a}$$
$$= P\big(\underbrace{G(x_n, Y_{n+1}) = x_{n+1}}_{\in\sigma(Y_{n+1})} | \underbrace{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0}_{\in\sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n)}\big). \tag{38.135b}$$

Les tribus $\sigma(Y_{n+1})$ et $\sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n)$ étant indépendantes nous avons

$$\diamondsuit = P\big(G(x_n, Y_{n+1}) = x_{n+1}\big) \tag{38.136a}$$
$$= P\big(G(x_n, Y_{n+1}) = x_{n+1} | X_n = x_n\big) \tag{38.136b}$$
jdyyUK
$$= P\big(G(X_n, Y_{n+1}) = x_{n+1} | X_n = x_n\big) \tag{38.136c}$$
$$= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \tag{38.136d}$$

Pour (38.136b) nous avons utilisé le fait que $\sigma(Y_{n+1})$ est indépendante de $\sigma(X_n)$. Nous avons prouvé que la chaine était de Markov. □

Les probabilités de transition de la chaine de Markov définie dans la proposition 38.40 sont

$$P(X_1 = y|X_0 = x) = P\big(G(X_0, Y_1) = y|X_0 = x_0\big) = P\big(G(x_0, Y_1) = y\big). \tag{38.137}$$

PROPooBYELooKLsthC

Proposition 38.41 ([873]).
Soient :

(1) *Un ensemble F, un ensemble au plus dénombrable E,*

(2) *Des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $Z_n : \Omega \to F$,*

(3) *Une variable aléatoire $X_0 : \Omega \to E$, indépendante des Z_n*

(4) *Une application mesurable $f : E \times F \to E$.*

Alors la définition par récurrence

$$\begin{aligned} X_{n+1} : \Omega &\to E \\ \omega &\mapsto f\big(X_n(\omega), Z_{n+1}(\omega)\big) \end{aligned} \tag{38.138}$$

est une chaine de Markov homogène dont la matrice de transition est donnée par

$$P_{ij} = P\big(f(i, Z_1) = j\big). \tag{38.139}$$

Démonstration. Nous commençons par construire des applications $g_n : E \times F^n \to E$ telles que $X_n(\omega) = g_n\big(X_0(\omega), Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega)\big)$. D'abord nous posons $g_1 = f$. Ensuite, pour la récurrence nous posons

$$\begin{aligned} g_{n+1} : E \times F^{n+1} &\to E \\ (i, x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto f\big(g_n(i, x_1, \dots, x_n), x_{n+1}\big). \end{aligned} \tag{38.140}$$

Nous vérifions que c'est bon :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(i, x_1, \dots, x_{n+1}) &= f\big(g_n(i, x_1, \dots, x_n), x_{n+1}\big) && \text{(38.141a)} \\ &= f\big(X_n(\omega), Z_{n+1}(\omega)\big) && \text{(38.141b)} \\ &= X_{n+1}(\omega). && \text{(38.141c)} \end{aligned}$$

Et maintenant il faut vérifier que les X_n forment une chaine de Markov homogène. C'est un bon calcul, et nous commençons par une étape simple :

$$\begin{aligned} \clubsuit = P(X_{n+1} = j|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) &= P\big(f(X_n, Z_{n+1}) = j|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) && \text{(38.142a)} \\ &= P\big(f(x_n, Z_{n+1}) = j|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\big) && \text{(38.142b)} \end{aligned}$$

Pour la seconde ligne, nous avons utilisé le lemme 36.61. Pour la suite, nous nous souvenons que $X_k = g_k(X_0, Z_1, \dots, Z_k)$. Nous pouvons exprimer le conditionnement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} B &= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_n(\omega) = x_n, \dots, X_0(\omega) = x_0\} && \text{(38.143a)} \\ &= \bigcap_{k=1}^{n} \{X_k = x_k\} \cap \{X_0 = x_0\} && \text{(38.143b)} \\ &= \bigcap_{k=1}^{n} \{g_k(X_0, Z_1, \dots, Z_k)\} \cap \{X_0 = x_0\} && \text{(38.143c)} \\ & && \text{(38.143d)} \end{aligned}$$

Maintenant, en considérant l'application

$$\begin{aligned} g : E \times F^n &\to E^{n+1} \\ \big(i, (z_1, \dots, z_n)\big) &\mapsto \begin{pmatrix} i \\ g_1(i, z_1) \\ \vdots \\ g_n(i, z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{38.144}$$

nous avons

$$B = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } g\big(X_0(\omega), Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega)\big) = (x_0, x_1, \dots, x_n)\}. \tag{38.145}$$

Nous avons

$$\clubsuit = P\big(f(x_n, Z_{n+1}) = j | g(X_0, Z_1, \dots, Z_n) = (x_0, \dots, x_n)\big). \tag{38.146}$$

Le lemme 36.63 dit que les variables aléatoires $f(X_n, Z_{n+1})$ et $g(X_0, Z_1, \dots, Z_n)$ sont indépendantes. Donc les événements $f(x_n, Z_{n+1}) = j$ et $g(X_0, Z_1, \dots, Z_n) = (x_0, \dots, x_n)$ sont indépendants par la proposition 36.15(2).

Nous avons donc montré que

$$\clubsuit = P(X_{n+1} = j | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P\big(f(x_n, Z_{n+1}) = j\big). \tag{38.147}$$

Des calculs similaires[19] montrent que

$$P(X_{n+1} = j | X_n = x_n) = P\big(f(x_n, Z_{n+1}) = j\big). \tag{38.148}$$

Nous avons donc bien une chaine de Markov.

Nous montrons à présent que cette chaine est homogène en montrant que les probabilités de transitions $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ ne dépendent pas de n. Posons

$$A_n = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f\big(i, Z_{n+1}(\omega)\big) = j\}. \tag{38.149}$$

Nous voudrions prouver que $P(A_n) = P(A_1)$ pour tout n. Les variables aléatoires Z_n et Z_1 sont indépendantes et identiquement distribuées ; utilisant le lemme 36.18 avec

$$\begin{aligned} g\colon F &\to E \\ x &\mapsto f(i, x), \end{aligned} \tag{38.150}$$

nous voyons que les variables aléatoires $f(i, Z_n)$ et $f(i, Z_1)$ sont indépendantes et identiquement distribuées. Donc

$$P\big(f(i, Z_n) = j\big) = P\big(f(i, Z_1) = j\big), \tag{38.151}$$

et la chaine de Markov est homogène. □

LEMooQBOIooMNbJlV

Lemme 38.42.
Si P est une matrice stochastique[20] *$N \times N$ ainsi qu'un ensemble E de cardinal N, alors il existe une chaine de Markov dont la matrice de transition est P.*

Démonstration. Nous supposons que $E = \{1, \dots, N\}$. Si E est un ensemble quelconque, il faut considérer une bijection[21] $\varphi\colon E \to \{1, \dots, N\}$ et écrire $\varphi(i)$ partout au lieu de i.

Nous considérons des variables aléatoires $Z_n\colon \Omega \to [0, 1]$ indépendantes et uniformes sur $[0, 1]$. Nous considérons aussi une variable aléatoire $X_0\colon \Omega \to E$, indépendante des Z_n.

Ensuite nous construisons les variables aléatoires $X_n\colon \Omega \to E$ par récurrence en posant

$$X_{n+1}(\omega) = j \quad \text{si} \sum_{k=1}^{j-1} P_{X_n(\omega),k} \leqslant Z_{n+1}(\omega) < \sum_{k=1}^{j} P_{X_n(\omega),k}. \tag{38.152}$$

Notons que pour $j = 0$, la première somme est « vide » et vaut donc zéro. La proposition 38.41 appliquée à la fonction

$$\begin{aligned} f\colon E \times [0,1] &\to E \\ (i, t) &\mapsto \begin{cases} j & \text{si } \sum_{k=1}^{j-1} P_{ik} \leqslant t < \sum_{k=1}^{j} P_{ik} \\ N & \text{si } t = 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{38.153}$$

implique que les X_k forment une chaine de Markov homogène dont la matrice de transition est donnée par

$$P_{ij} = P\big(f(i, Z_1) = j\big). \tag{38.154}$$

Nous calculons facilement cette probabilité :

$$\{f(i, Z_1) = j\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f\big(i, Z_1(\omega)\big) = j\} \tag{38.155a}$$

$$= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \sum_{k=0}^{j-1} P_{ik} \leqslant Z_1(\omega) < \sum_{k=0}^{j} P_{ik}\} \tag{38.155b}$$

$$= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } Z_1(\omega) \in [\sum_{k=1}^{j-1} P_{ik}, \sum_{k=1}^{j} P_{ik}[\}. \tag{38.155c}$$

Vu que Z_1 est uniforme sur $[0, 1]$, la probabilité de cet ensemble est la mesure de Lebesgue de l'intervalle $[\sum_{k=1}^{j-1} P_{ik}, \sum_{k=1}^{j} P_{ik}[$, c'est-à-dire P_{ij}. □

[19] Je n'ai pas vérifié ; écrivez-moi si il y a un problème.
[20] Définition 38.9.
[21] Existence par la définition 1.207 du cardinal d'un ensemble fini.

38.3.2.2 Exemple : la file de réparation de machines à laver

38.43.
David Madore parle de file d'attente[874]. En bref, il est inexplicable qu'une file d'attente soit durablement longue sans s'allonger à l'infini.

Nous considérons un magasin de réparation d'électroménager. Durant le jour n, un nombre aléatoire Z_n de machines en panne arrivent au magasin. Une machine est réparée chaque jour (aucune si le magasin est vide). Nous supposons que les Z_n soient indépendantes et identiquement distribuées, et nous posons X_n, le nombre de machines en magasin le jour n.

La loi d'avancement de X_n est

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + Z_n - 1 & \text{si } X_n \neq 0 \\ Z_n & \text{si } X_n = 0. \end{cases} \tag{38.156}$$

Cela est une chaine de Markov en vertu de la proposition 38.40. Ici la fonction est

$$G(x, y) = x + y - \mathbb{1}_{x\neq 0}. \tag{38.157}$$

Les probabilités de transitions sont

$$p(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant x - 2 \\ P(Z = 0) & \text{si } y = x - 1 \\ P(Z = k) & \text{si } y = x + k - 1 \end{cases} \tag{38.158}$$

pour $x \neq 0$.

38.3.2.3 Cadeau numberphile

Vous aimez les chaines de Markov ? « The Beautiful Math of Snakes and Ladders » https://www.youtube.com/watch?v=nlm07asSU0c

Et si vous aimez les échelles, autre cadeau de numberphile : « Travelling to the Stars by Ladder » https://www.youtube.com/watch?v=hzcdcrsyA9Y Ce ne sont pas des math, mais ça détend.

38.4 Classification des états

Sauf mention expresse du contraire, nous considérons toujours une chaine de Markov homogène.

DEFooFIQUooScQDMI

Définition 38.44.
*Un état $x \in E$ est **absorbant** pour la chaine (X_n) si $p(x, x) = 1$.*

Il n'est pas spécialement impossible d'arriver sur un état absorbant, mais il est impossible d'en sortir.

Proposition 38.45.
En notant T le temps de première atteinte[22], a loi de la variable aléatoire $[T_p(x)|X_p = x]$ est la même que celle de la variable aléatoire $[T(x)|X_0 = x]$.

Démonstration. Nous devons montrer que

$$P(T_p(x) = k|X_p = x) = P(T(x) = k|X_0 = x). \tag{38.159}$$

Cela est intuitivement évident du fait qu'une chaine de Markov soit un processus sans mémoire. Afin de

[22] Définition 38.20.

prouver, nous allons sommer sur tous les états intermédiaires possibles :

$$P(T_p(x)=k|X_0=x)=P(X_{p+k}=x,X_{p+k-1}\neq x,\dots,X_{p+1}\neq x|X_p=x) \tag{38.160a}$$
$$=\sum_{z_i\neq x}P(X_{p+k}=x,X_{p+k-1}=z_{k-1},\dots,X_{p+1}=z_1|X_p=x) \tag{38.160b}$$
$$=\sum_{z_i}P(X_{p+k}=x,X_{p+k-i}=z_i|X_{p+1}=z_1,X_p=x)\underbrace{P(X_{p+1}=z_1|X_p=x)}_{=p(x,z_1)} \tag{38.160c}$$
$$=\sum_{z_i}P(X_{p+k}=x,X_{p+k-i}=z_i|X_{p+2}=z_2,X_{p+1}=z_1,X_p=x) \tag{38.160d}$$
$$\underbrace{P(X_{p+2}=z_2|X_{p+1}=z_1,X_p=x)}_{P(X_{p+2}=z_2|X_{p+1}=z_1)=p(z_1,z_2)}p(x,z_1) \tag{38.160e}$$
$$=\dots \tag{38.160f}$$
$$=\sum_{z_i}p(x,z_1)p(z_1,z_2)\dots p(z_{k-2},z_{k-1})p(z_{k-1},x). \tag{38.160g}$$

À ce point-ci, nous avons éliminé toute référence à p grâce à l'homogénéité de la chaine. Nous pouvons refaire le calcul à l'envers pour reconstituer l'expression de départ sans le p :

$$\sum_{z_i}p(x,z_1)p(z_1,z_2)\dots p(z_{k-1},z_{k-1})p(z_{k-1},x) \tag{38.161a}$$
$$=P(x_k=x,X_{k-1}\neq x,\dots,X_1\neq x|X_0=x) \tag{38.161b}$$
$$=P(T(x)=k), \tag{38.161c}$$

ce qu'il fallait obtenir. □

Exemple 38.46.
Soit (X_n) une chaine de Markov de matrice de transition

$$P=\begin{pmatrix}0.2&0.5&0.3\\0.1&0.1&0.8\\0.5&0.2&0.3\end{pmatrix}. \tag{38.162}$$

Calculer $P(X_3=1|X_0=1)$ et $P(X_7=0|X_4=0)$.

Déterminer, si il en existe, une loi stationnaire vers laquelle converge la chaine.

Nous avons

$$P^3=\begin{pmatrix}0.344&0.251&0.405\\0.283&0.307&0.41\\0.287&0.248&0.465\end{pmatrix}. \tag{38.163}$$

La probabilité d'aller de l'état 1 à l'état 1 en trois étapes est donc 0.307. La chaine étant de Markov, sans mémoire, les probabilités entre les temps 4 et 7 sont les mêmes qu'entre 0 et 3. Nous avons alors

$$P(X_7=0|X_4=0)=0.344. \tag{38.164}$$

La chaine est irréductible et n'a pas d'états absorbants. △

Si une chaine de Markov contient r état absorbants, nous convenons de numéroter les états de telle sorte à mettre en premier les $N-r$ états non absorbants. La matrice de transition s'écrit alors sous forme **canonique** :

$$P=\begin{pmatrix}Q&R\\0&\mathbb{1}\end{pmatrix} \tag{38.165}$$

EQooGJVFooNLCgue

où Q est une matrice $N-r\times N-r$.

PROPooUNBDooVhXZxi

Proposition 38.47 ([871])**.**
Soit une chaine de Markov contenant des états absorbants. Nous considérons la matrice de transition sous forme canonique[23]*. Alors*

(1) $\lim_{n\to\infty}Q^n=0$.

[23] C'est-à-dire sous la forme (38.165).

(2) La matrice $\mathbb{1} - Q$ est inversible et

$$(\mathbb{1} - Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k. \tag{38.166}$$

PROPooCAORooMEaxtq

Proposition 38.48 ([871, 1])**.**
Si (X_n) est une chaine de Markov irréductible[24] *sur un ensemble fini, alors pour toute partie $A \subset E$ nous avons*

$$P(\tau_A < \infty) = \lim_{n\to\infty} P(\tau_A \leqslant n) = 1 \tag{38.167}$$

où $\tau_A = \min\{k \text{ tel que } X_k \in A\}$.

Démonstration. Soit P la matrice de transition de la chaine (X_n). Nous considérons une nouvelle matrice stochastique

$$P'_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } i \in A \\ P_{ij} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{38.168}$$

Nous considérons (Y_k) la chaine de Markov construite par le lemme 38.42 à partir de la matrice P, ainsi que (Y'_k) celle construite à partir de P'.

Les chaines X et Y ont la même matrice de transition, mais l'intérêt de Y est d'être définie sur le même espace que Y'. Nous allons procéder de la façon suivante :

(1) Prouver le résultat sur Y'

(2) Le déduire pour Y parce que τ_A ne change pas entre Y' et Y.

(3) Le déduire pour X parce que la matrice de transition de X et Y sont les mêmes.

Pour la suite, voir [871] en utilisant la proposition 38.47. □

38.5 Mesure invariante

Définition 38.49.
*Une mesure de probabilité μ sur l'espace des états E d'une chaine de Markov est **invariante** si pour tout $x \in E$*

$$\mu(x) = \sum_{y\in E} p(y, x)\mu(y). \tag{38.169}$$

Remarque 38.50.
Une mesure invariante est une mesure de probabilité et nous noterons par abus $\mu(x)$ pour $\mu(\{x\})$. Si $A \subset E$ nous avons

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} \mu(x). \tag{38.170}$$

RemwcRRFZ

Remarque 38.51.
Une loi invariante associée à une chaine de Markov est une loi associée à la matrice de transition de la chaine, mais pas à la loi de X_0. Par conséquent nous pouvons tester si μ est une mesure invariante pour une certaine chaine de Markov (X_k) en considérant la chaine (Y_k) avec $Y_k = X_k$ pour $k > 0$ et Y_0 arbitraire.

L'adjectif *invariant* provient du lemme suivant.

LemUVMwbM

Lemme 38.52.
Soit (X_n) une chaine de Markov homogène[25] *telle que $X_0 \sim \mu$ où μ est une mesure invariante sur l'espace des états. Alors $X_k \sim \mu$ pour tout k.*

Démonstration. Par hypothèse, $P(X_0 = x) = \mu(x)$. Ensuite nous avons

$$P(X_1 = y) = \sum_{x\in E} P(X_1 = y|X_0 = x)P(X_0 = x) \tag{38.171a}$$

$$= \sum_x p(x, y)\mu(x) \tag{38.171b}$$

$$= \mu(y). \tag{38.171c}$$

Par conséquent X_1 suit également la loi μ. Par récurrence tous les états suivent cette même loi. □

[24] Chaine de Markov irréductible, définition 38.15.
[25] Définition 38.4.

Définition 38.53.
Si les états d'une chaine de Markov ont comme loi une mesure invariante, alors nous disons que la chaine est ***stationnaire****.*

RemcOEylF

Remarque 38.54.
Pour une chaine de Markov stationnaire de loi invariante μ nous avons

$$\mu(x) = \sum_y p(y,x)\mu(y) \tag{38.172}$$

et si l'ensemble E est fini cette équation signifie

$$\mu = Q\mu \tag{38.173}$$

où Q est la matrice de transition de la chaine de Markov.

Théorème 38.55 (Théorème ergodique)**.**
Une chaine de Markov irréductible est positive récurrente si et seulement si elle accepte une mesure invariante. Cette mesure est invariante est alors unique et vérifie $\mu = Q\mu$ où Q est la matrice de transition.

Démonstration. Nous allons seulement prouver le théorème ergodique dans le cas où E est fini. Soit (X_n) une chaine de Markov récurrente positive ; nous avons $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. Nous allons montrer que π est une mesure invariante.

Nous commençons par montrer que

$$\sum_{x\in E} \pi(x) = 1. \tag{38.174}$$

Pour cela nous reprenons la propriété de chaine irréductible pour écrire

$$\pi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{X_k=x} \tag{38.175}$$

Étant donné que E est fini nous pouvons sommer sur $x \in E$ et permuter la somme avec la limite :

$$\sum_{x\in E} \pi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\sum_{x\in E} \mathbb{1}_{X_k=x}}_{=1}. \tag{38.176}$$

Nous nous retrouvons donc avec $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} N = 1$. La fonction π définit donc bien une mesure de probabilité sur E.

Nous montrons à présent que cette mesure est invariante, c'est-à-dire que

$$\pi(x) = \sum_{y\in E} p(y,x)\pi(y). \tag{38.177}$$

Pour cela nous utilisons encore le théorème de la convergence dominée pour permuter la limite et l'intégrale dans

$$\pi(x) = E(\pi(x)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \underbrace{E\big(\mathbb{1}_{X_k=x}\big)}_{P(X_k=x)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P(X_{k+1} = x). \tag{38.178}$$

EqcKxNcL

La dernière égalité découle du fait qu'en divisant par N et en faisant tendre N vers l'infini, le fait d'enlever un terme à la somme ne change pas la valeur de la limite. Nous pouvons substituer dans (38.178) la valeur

$$P(X_{k+1} = x) = \sum_{y\in E} p(y,x)P(X_k = y). \tag{38.179}$$

Nous avons alors

$$\pi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{y\in E} p(y,x)P(X_k = y) \tag{38.180a}$$

$$= \sum_{y\in E} p(y,x) \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P(X_k = y) \tag{38.180b}$$

$$= \sum_{y\in E} p(y,x)\pi(y), \tag{38.180c}$$

ce qui signifie que π est une mesure invariante. Notons que nous avons encore utilisé le fait que E soit fini pour permuter avec la limite.

Il nous reste à montrer l'unicité de la mesure invariante sur la chaine de Markov. Soit μ une mesure invariante pour la chaine de Markov (X_k). Comme indiqué dans la remarque 38.51 nous pouvons supposer que X_0 suit la loi μ. Par le lemme 38.52 nous avons $P(X_k = x) = \mu(x)$ pour tout k. Par conséquent

$$\pi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P(X_k = x) = \mu(x). \tag{38.181}$$

□

Théorème 38.56 (loi des grands nombres pour les chaines de Markov)**.**
Soit (X_n) une chaine de Markov irréductible acceptant une mesure invariante. Soit $f\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction dans $L^1(E,\mu)$. Alors nous avons

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(X_k) \xrightarrow{p.s.} \sum_{x\in E} f(x)\mu(x). \tag{38.182}$$

En ce qui concerne les notations, l'hypothèse $f \in L^1(E,\mu)$ signifie

$$\sum_{x\in E} |f(x)|\mu(x) = \int_E |f(x)| d\mu(x) < \infty. \tag{38.183}$$

Démonstration. Nous prouvons le théorème dans le cas où E est fini. Si nous écrivons

$$f(X_k) = \sum_{y\in E} f(y)\mathbb{1}_{X_k=y}, \tag{38.184}$$

alors

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(X_k) = \sum_{y\in E} f(y) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{X_k=y}. \tag{38.185}$$

Étant donné que E est fini nous pouvons permuter les sommes et prendre la limite $N \to \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k} f(X_k) = \sum_{y\in E} f(y) \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{X_k=y} = \sum_{y\in E} f(y)\pi(y). \tag{38.186}$$

□

38.6 Convergence vers l'équilibre

Théorème 38.57 (Convergence en loi des chaines de Markov)**.**
Si (X_n) est

(1) irréductible,

(2) récurrente positive,

(3) apériodique,

alors X_n converge en loi vers l'unique probabilité invariante π vérifiant

$$\pi(x) = \sum_{u\in E} p(y,x)\pi(y) = \frac{1}{E\big(T(x)|X_0 = x\big)}. \tag{38.187}$$

Cette convergence est indépendante de la loi de X_0 et on a

$$P(X_n = x|X_0 = y) \to_{n\to\infty} \pi(x). \tag{38.188}$$

38.7 Processus de Galton-Watson

SecBPmrPdtGalton

Nous considérons une maladie et notons Z_n le nombre de malades à l'instant n. Nous posons $Z_0 = 1$ et

$$Z_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } Z_n = 0 \\ \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)} & \text{sinon} \end{cases} \tag{38.189}$$

EqByILKj

où $\xi_i^{(n)}$ est le nombre de personnes contaminées par le malade i à l'instant n. Nous supposons que ces variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées et admettent un moment d'ordre 1.

L'équation de propagation 38.189 signifie que nous supposons qu'une personne malade à l'instant n n'est plus malade à l'instant $n+1$. Par ailleurs les hypothèses d'indépendance signifient qu'à chaque instant, le nombre de personnes contaminées par le malade i est indépendant du nombre de personnes contaminées par le malade j. De plus la façon dont la contamination se passe à l'instant n est indépendante de la façon dont la contamination se passe à l'instant m. Ces hypothèses sont raisonnables tant que le nombre de personnes non contaminées est grand. À partir du moment où presque tout le monde est malade, l'approximation de Galton-Watson ne fonctionne plus.

Nous notons ξ la loi parente des $\xi_i^{(n)}$. Ensuite nous considérons

$$G(s) = E(s^{\xi}) \tag{38.190a}$$
$$m = E(\xi) \tag{38.190b}$$
$$G_n(s) = E(s^{Z_n}). \tag{38.190c}$$

Par le théorème de transfert (proposition 36.97) avec $f(t) = s^t$, ce que nous avons est

$$G_n(s) = E\big(f(Z_n)\big) = \int_{\mathbb{R}} s^x dP_{Z_n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Z_n = k) \tag{38.191}$$

EqNRtXdC

où l'intégrale s'est transformée en somme parce que la loi de Z_n est discrète : dP_{Z_n} est une somme de masses de Dirac. En particulier nous avons

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Z_n = k) \tag{38.192a}$$
$$G(0) = P(Z_n = 0) \tag{38.192b}$$

et

$$\eta = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} G_n(0). \tag{38.193}$$

D'où l'intérêt d'étudier G_n.

LemezrOil

Lemme 38.58.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $s \in [0,1]$, nous avons

$$G_n(s) = \underbrace{G \circ G \circ \ldots \circ G(s)}_{n \text{ fois}}. \tag{38.194}$$

Démonstration. Pour $n = 1$, nous avons $Z_1 = \xi_1^{(1)}$ et donc

$$G_1(s) = E(s^{\xi}) = G(s), \tag{38.195}$$

comme il se doit.

Si $n \neq 1$ nous écrivons subEqsxhILKg

$$G_n(s) = E(s^{Z_n}) \tag{38.196a}$$
$$= E\left(s^{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_i^{(n-1)}}\right) \tag{38.196b}$$
$$= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}} s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n-1)}}\right). \tag{38.196c}$$

À ce niveau, nous voulons permuter la somme et l'espérance. Étant donné que le lemme est facile à vérifier pour $s = 1$, nous supposons $s < 1$. Du coup

$$s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n-1)}} < 1 \tag{38.197}$$

et ce qui se trouve dans l'espérance est majoré par

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_{n-1}=k} = 1. \tag{38.198}$$

La fonction constante 1 est intégrable sur Ω (ici nous utilisons à fond le fait que l'espace Ω soit un espace de probabilité) et nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue 15.2 pour permuter la somme et l'intégrale. Nous continuons donc le calcul (38.196) :

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}} s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n-1)}} \right). \tag{38.199}$$

La tribu engendrée par la variable aléatoire $\mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}}$ est une fonction des variables aléatoires $\xi_i^{(m)}$ avec $m \leqslant n-2$ tandis que la variable aléatoire $s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n-1)}}$ est une fonction des variables aléatoires $\xi_i^{(n-1)}$. Par conséquent le lemme de regroupement 36.19 nous dit que ces variables aléatoires sont indépendantes, donc

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{E\big(\mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}}\big)}_{=P(Z_{n-1}=k)} E\big(s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n-1)}}\big). \tag{38.200}$$

Nous avons utilisé le fait que l'espérance d'une fonction indicatrice est la probabilité de l'événement.

En ce qui concerne la puissance de s, les événements ξ_i^{n-1} sont indépendants et suivent tous la même loi ξ, donc

$$s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n-1)}} = \prod_{i=1}^{k} s^{\xi_i^{(n-1)}} \tag{38.201}$$

et

$$E\big(\prod_{i=1}^{k} s^{\xi}\big) = E(s^{\xi})^k = G(s)^k. \tag{38.202}$$

En mettant tout bout à bout,

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z_{n-1}=k) G(s)^j = G_{n-1}\big(G(s)\big). \tag{38.203}$$

□
ThoJZnAOA

Théorème 38.59.
La probabilité d'extinction η est donnée par

$$\eta = P\left(\bigcup_{n \geqslant 1} (Z_n = 0) \right) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0). \tag{38.204}$$

Ce nombre est la plus petite solution positive de l'équation $G(s) = s$.

De plus la classification des cas est comme suit.

(1) Si $P(\xi = 0) = 0$ alors $\eta = 0$.

(2) Si $P(\xi = 0) \neq 0$ alors

(2a) si $m \leqslant 1$ alors $\eta = 1$,

(2b) si $m > 1$ alors $\eta \in]0, 1[$.

Le cas $m < 1$ est dit **sous-critique**, le cas $m = 1$ est dit **critique**. Le cas $m > 1$ est dit **sur-critique**.

Démonstration. Commençons par prouver que G est une fonction continue. En utilisant le théorème de transfert comme pour l'équation (38.191) nous trouvons que

$$G(s) = E(s^{\xi}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \tag{38.205}$$
EqQWTBfn

où nous avons noté $p_k = P(\xi = k)$. Si $r < 1$, alors la suite $p_k r^k$ est bornée, donc le critère d'Abel (15.18) nous indique que la série (38.205) converge absolument et la théorie générale des séries entières conclut que la fonction G est en particulier dérivable terme à terme pour tout $s \in]-1, 1[$.

(1) **La probabilité d'extinction est un point fixe de G**

En utilisant la continuité de G en 0 nous passons à la limite dans $G_{n+1}(0) = G\big(G_n(0)\big)$ et nous obtenons

$$\eta = G(\eta), \tag{38.206}$$

ce qui signifie que la probabilité d'extinction est un point fixe de G.

(2) **η est le plus petit point fixe de G**

Nous démontrons maintenant que η est plus précisément le plus petit point fixe de G sur $[0,1]$. Nous allons effectuer cette partie en décomposant selon les valeurs de p_0 et de p_1.

Au vu de l'écriture (38.205), si $p_1 = 1$ alors $G(s) = s$ pour tout $s \in [0,1]$. Mais dans ce cas nous savons par ailleurs que l'extinction est impossible. Zéro est bien la plus petite solution de $G(s) = s$.

Supposons maintenant que $p_1 < 1$ et $p_0 + p_1 = 1$. Alors $G(s) = p_0 + p_1 s$ et $s = 1$ est l'unique solution. Mais vu que nous savons que η est solution, c'est que $\eta = 1$ et l'extinction est certaine.

Nous passons au cas général : $p_0 + p_1 < 1$. D'abord nous remarquons que $s = 1$ est solution parce que

$$G(1) = p_0 + p_1 + \cdots = 1. \tag{38.207}$$

Remarquons aussi que dans ce cas $s = 0$ n'est plus solution.

La fonction G est strictement convexe sur $[0,1]$ (parce que $G'' > 0$). Cela se voit en effectuant deux dérivations terme à terme (le rayon de convergence de la dérivée est le même que celui de la fonction). Cette stricte convexité entraine que l'équation $G(s) = s$ a au maximum une autre solution que $s = 1$. Nous nommons s_0 la plus petite solution dans $[0,1]$. Étant donné que G est croissante on a

$$G(0) \leqslant G(s_0) = s_0. \tag{38.208}$$

En appliquant G à cette équation nous obtenons $G\big(G(s_0)\big) \leqslant G(s_0) = s_0$ et en appliquant n fois,

$$G_n(0) \leqslant s_0. \tag{38.209}$$

En passant à la limite, $\eta \leqslant s_0$ mais η étant solution, nous avons $\eta = s_0$. Nous avons donc prouvé que la probabilité d'extinction η est la plus petite solution de $G(s) = s$.

(3) **Classification des cas**

Nous devons encore discuter les cas. Si $P(\xi = 0) = 0$, alors $p_0 = 0$ et $G(0) = 0$, ce qui signifie que $s_0 = \eta = 0$ et l'extinction est impossible.

Nous passons au cas $p_0 \neq 0$. Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $m = p_1 < 1$ et nous avions déjà vu que dans le cas $p_0 + p_1 = 1$, la probabilité d'extinction est $\eta = 1$.

Il nous reste à traiter le cas $p_0 + p_1 < 1$. Encore une fois, la courbe G est strictement convexe sur $[0,1]$ et elle est en particulier plus grande que sa tangente en $s = 1$, c'est-à-dire

$$G(s) > G'(1)(s-1) + G(1). \tag{38.210}$$

Nous savons que $G(1) = 1$. En ce qui concerne $G'(1)$, nous dérivons encore terme à termes :

$$G'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}, \tag{38.211}$$

donc

$$G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = E(\xi) = m. \tag{38.212}$$

Ce que nous avons donc est

$$G(s) > 1 + m(s-1). \tag{38.213}$$

Nous nous particularisons au cas sous-critique ($m \leqslant 1$). En nous rappelant que $s - 1 < 0$,

$$G(s) > 1 + (s-1) = s, \tag{38.214}$$

donc $s = 1$ est la plus petite solution et effectivement nous avons déjà vu que $\eta = 1$ dans ce cas.

Si $m > 1$, alors on a

$$G(s) > 1 + m(s-1). \tag{38.215}$$

Mais dire $m > 1$ revient à dire $G'(1) > 1$ et donc dans un voisinage de $s = 1$ on a

$$\frac{G(s) - G(1)}{s - 1} > 1, \tag{38.216}$$

ce qui implique que

$$G(s) < s - 1 + G(1) = s. \tag{38.217}$$

Nous avons donc $G(s) < s$ dans un voisinage de 1. Mais $G(0) - 0 = p_0 > 0$, donc la fonction $f(s) = G(s) - s$ est positive en 0 et négative proche de $s = 1$. Le théorème de la valeur intermédiaire nous indique alors qu'il existe un $s \in]0, 1[$ tel que $f(s) = 0$, c'est-à-dire tel que $G(s) = s$.

□

Chapitre 39

Martingales

39.1 Convergence de martingales

Définition 39.1.
*Si $\mathcal{A}$ est une tribu, une **filtration** de $\mathcal{A}$ est une suite croissante de sous-tribus $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_{i+1} \subseteq \mathcal{A}$.*

*Nous disons qu'une suite de variables aléatoires (X_n) est **adaptée** à une filtration $(\mathcal{F}_n)$ si X_i est $\mathcal{F}_i$-mesurable pour tout i.*

DEFooUNRAooOEmCsh

Définition 39.2 ([875]).
*Si nous avons les variables aléatoires $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$, la **filtration naturelle** est la suite de sous-tribus*

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), \tag{39.1}$$

c'est-à-dire la tribu engendrée par les n premières variables aléatoires.

Ces définitions impliquent immédiatement que si (X_n) est adapté à $(\mathcal{F}_n)$ alors X_n est $\mathcal{F}_k$-mesurable pour $k \geqslant n$.

DEFooESAGooUffeDa

Définition 39.3.
*Une **martingale** adaptée à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires M_n telle que*

(1) $M_n \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$,

(2) M_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable,

(3) $E(M_{n+1}|\mathcal{B}_n) = M_n$.

*Le processus M_n est une **sur-martingale** si $E(M_{n+1}|\mathcal{B}_n) \leqslant M_n$ pour tout n, et c'est une **sous-martingale** si $E(M_{n+1}|\mathcal{B}_n) \geqslant M_n$.*

Exemple 39.4.
Si $M \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et si $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration, nous pouvons considérer la martingale $M_n = E(M|\mathcal{B}_n)$. △

ExtFFKTr

Exemple 39.5.
Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées. On pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \tag{39.2}$$

et la filtration $\mathcal{B}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Pour montrer que cela est une martingale, nous commençons par remarquer que

$$E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = E(X_{n+1}) = 0 \tag{39.3}$$

par indépendance des tribus $\mathcal{B}_n$ et $\sigma(X_{n+1})$. Ici c'est le lemme 36.71 qui joue.

Ensuite nous argumentons que $E(X_1 + \cdots + X_n|\mathcal{B}_n) = X_1 + \cdots + X_n$. En effet d'une part $X_1 + \cdots + X_n$ est $\mathcal{B}_n$-mesurable et évidemment la condition intégrale de l'espérance conditionnelle est satisfaite.

Plus généralement si X est une variable aléatoire et si $\sigma(X) \subset \mathcal{B}$ alors $E(X|\mathcal{B}) = X$. △

LemqanhgJ

Lemme 39.6.
Soit (M_n) une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et $n \geqslant k$. Alors

$$E(M_n|\mathcal{F}_k) = M_k \tag{39.4a}$$
$$E(M_k|\mathcal{F}_n) = M_k. \tag{39.4b}$$

Démonstration. La seconde relation revient seulement à dire que M_k est $\mathcal{F}_n$-mesurable, ce qui est évident parce que $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$.

Nous prouvons la première par récurrence (à l'envers) sur k. D'abord si $k = n$, l'égalité $E(M_n|\mathcal{F}_n) = M_n$. Nous supposons maintenant que $E(M_n|\mathcal{F}_k) = M_k$, et nous prouvons que $E(M_n|\mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1}$. Si $B_{k-1} \in \mathcal{F}_{k-1}$, nous avons

$$\int_{B_{k-1}} M_{k-1} = \int_{B_{k-1}} M_k = \int_{B_{k-1}} M_n. \tag{39.5}$$

La première égalité est la définition d'une martingale, et la seconde est l'hypothèse de récurrence. □

ThobysyWI

Théorème 39.7 ([876, 877]).
Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale bornée dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire telle que

$$\alpha = \sup_{n\geqslant 0} E(M_n^2) < \infty. \tag{39.6}$$

Alors la suite M_n converge dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration. Nous écrivons M_n en somme télescopique

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \tag{39.7}$$

où $\Delta_k = M_k - M_{k-1}$. Nous commençons par montrer que les incréments sont orthogonaux au sens où $E(\Delta_n\Delta_k) = 0$. Pour $n > k$, la variable aléatoire $E\big(\Delta_n\Delta_k|\mathcal{F}_{n-1}\big)$ est la variable aléatoire $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable telle que

$$\int_{B_{n-1}} E\big(\Delta_n\Delta_k|\mathcal{F}_{n-1}\big) = \int_{B_{n-1}} \Delta_n\Delta_k \tag{39.8}$$

pour tout $B_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}$. En particulier avec $B_{n-1} = \Omega$ nous trouvons

$$E\Big(E\big(\Delta_n\Delta_k|\mathcal{F}_{n-1}\big)\Big) = E(\Delta_n\Delta_k) \tag{39.9}$$

par la définition de l'espérance (36.78). Par conséquent, en utilisant le lemme 39.6 nous avons[1]

$$E(\Delta_n\Delta_k) = E\Big(E(\Delta_n\Delta_k|\mathcal{F}_{n-1})\Big) = E\Big(\Delta_k E(\Delta_n|\mathcal{F}_{n-1})\Big) = 0 \tag{39.10}$$

parce que $E(\Delta_n|\mathcal{F}_{n-1}) = E(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) - E(M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$.

Utilisant l'orthogonalité des incréments, nous avons

$$E(M_n^2) = E(M_0^2) + \sum_{k=1}^{n} E(\Delta_k^2). \tag{39.11}$$

En prenant le supremum (par rapport à n des deux côtés),

$$E(M_0^2) + \sum_{k=1}^{\infty} E(\Delta_k^2) = \alpha < \infty. \tag{39.12}$$

Cela prouve que la suite $\sum_{k=1}^{n} \Delta_k$ converge dans $L^2(\Omega)$. Nous en déduisons immédiatement que (M_n) est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ parce que si $k, l > n$, nous avons (en utilisant encore l'orthogonalité des incréments)

$$E\big(|M_k - M_l|^2\big) = \sum_{i=k+1}^{l} E(\Delta_i^2) \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} E(\Delta_i^2), \tag{39.13}$$

qui tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. □

Le théorème suivant complète la conclusion du théorème 39.7.

ThofcttYW

Théorème 39.8 ([877]).
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale bornée dans L^2. Alors (M_n) converge dans $L^2(\Omega)$ et presque surement vers une même variable aléatoire M_∞ qui vérifie

$$M_n = E(M_\infty|\mathcal{F}_n). \tag{39.14}$$

EqmDMfZf

[1] À ce niveau je crois qu'il y a une faute dans [877] qui conditionne par rapport à $\mathcal{F}_n$.

Notons en particulier que la variable aléatoire M_∞ est presque surement finie parce qu'en vertu de (39.14) nous avons

$$\int_\Omega M_\infty = \int_\Omega M_n < \infty. \tag{39.15}$$

Exemple 39.9.
Soient des variables aléatoires indépendantes $V_k \sim \mathscr{E}(2^k\lambda)$ et la variable aléatoire somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} V_k. \tag{39.16}$$

Nous allons montrer que $S_n \xrightarrow{p.s.} X$ où X est une variable aléatoire presque surement finie. Nous posons

$$M_n = S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k\lambda} \tag{39.17}$$

Cela est une martingale adaptée à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(V_1, \dots, V_n)$ en vertu de l'exemple 39.5. Nous montrons à présent qu'elle est bornée dans $L^2(\Omega)$ au sens où $\sum_{n\geqslant 1} E(M_n^2) < \infty$. Nous avons

$$E(M_n^2) = E\left(\big[S_n - \sum_k \frac{1}{2^k\lambda}\big]^2\right) = E\left(\big[\sum_k (V_k - \frac{1}{2^k\lambda})\big]^2\right). \tag{39.18}$$

La variable aléatoire $V_k - 1/2^k\lambda$ est une variable aléatoire centrée de variance $1/(2^k\lambda)^2$ (voir proposition 36.155). Étant donné que M_n est centrée, $\mathrm{Var}(M_n) = E(M_n^2)$ et nous avons

$$E(M_n^2) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\left(V_k - \frac{1}{2^k\lambda}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2^k\lambda)^2}, \tag{39.19}$$

cette dernière somme étant bornée par $l = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k\lambda)^2}$, nous avons

$$E(M_n^2) \leqslant l \tag{39.20}$$

avec l indépendant de n. C'est pour cela que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale bornée dans $L^2(\Omega)$. Par le théorème 39.8 nous avons $M_n \to M_\infty$ et en faisant $n \to \infty$ dans

$$S_n = M_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k\lambda}, \tag{39.21}$$

nous trouvons

$$S_n \to M_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k\lambda} = M_\infty + \frac{1}{\lambda} \tag{39.22}$$

qui est presque surement finie. △

PROPooSWTPooOvzYPQ

Proposition 39.10 ([875]).
Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale, alors

$$E(M_0) \leqslant E(M_n) \tag{39.23}$$

pour tout n.

39.2 Temps d'arrêt et martingale terminée

DEFooJBYJooKYVAJG

Définition 39.11 (Temps d'arrêt).
*Soit $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité filtré. Une application $T\colon \Omega \to \bar{\mathbb{N}} \cup \{\infty\}$ est un **temps d'arrêt** adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $\{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$.*

*Le temps d'arrêt T est **borné** si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $T(\omega) \leqslant k$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.*

39.2.1 Nombre de montées

DEFooIUOXooPfASWz

Définition 39.12 ([875, 1]).
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit une suite de variables aléatoires $Z_k : \Omega \to \mathbb{R}$. Nous définissons les applications T_k et S_k par récurrence en posant : EQooVQSIooHGAWau

$$T_0 = 0 \tag{39.24a}$$
$$S_{j+1} = \min\{k \geqslant T_j \text{ tel que } Z_k \leqslant a\} \tag{39.24b}$$
$$T_{j+1} = \min\{k > S_{j+1} \text{ tel que } Z_k \geqslant b\}. \tag{39.24c}$$

Dans tout ceci, nous convenons que $\min(\varnothing) = +\infty$ et $\max(\varnothing) = 0$.

*Le **nombre de montées** de a) b est alors la variable aléatoire*

$$U_n(a, b) = \max\{j \leqslant n \text{ tel que } T_j \leqslant n\}. \tag{39.25}$$

PROPooTYOAooEsoEPH

Proposition 39.13 ([1]).
Soit une suite de variable aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Les applications T_k et S_k définies par (39.24) sont des variables aléatoires. Elles sont également des temps d'arrêts[2] pour la filtration naturelle[3] des $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

De plus, tant que $S_j, T_j < \infty$ nous avons

$$0 = T_0 \leqslant S_1 < T_1 \tag{39.26}$$ EQooTFZKooPeJtgg

et, pour tout $j \geqslant 1$,

$$T_j < S_{j+1} < T_{j+1}, \tag{39.27}$$ EQooCOUAooSgWEmf

et

$$Z_{S_j} \leqslant a < b \leqslant Z_{T_j}. \tag{39.28}$$ EQooUNTOooXbDmWr

Démonstration. Pour montrer que ce sont des variables aléatoires, tout est dans le théorème 14.96 et les suivants[4].

(1) **T_0 est un temps d'arrêt**

Nous avons $\{T_0 \leqslant n\} = \{0 \leqslant n\} = \Omega$. Or Ω est dans toute tribu.

(2) **Si T_j est un temps d'arrêt, alors S_{j+1} en est un**

Nous supposons que T_j est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle des $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que pour tout n,

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } T_k(\omega) \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n). \tag{39.29}$$

Nous devons montrer que $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } S_j(\omega) \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$. D'abord nous écrivons

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } S_j(\omega) \leqslant n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\omega \in \Omega \text{ tel que } S_j(\omega) = k\}. \tag{39.30}$$ EQooHBWRooGhAJan

Ensuite nous comprenons que $S_j(\omega) = k$ signifie que $Z_k(\omega) \leqslant a$ et $k \leqslant T_j(\omega)$, et que k est minimum pour ces deux propriétés. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega \text{ tel que } S_j(\omega) = k\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } k \leqslant T_j(\omega)\} \cap \{\omega \in \Omega \text{ tel que } Z_k(\omega) \leqslant a\} \\ \setminus \bigcup_{l=1}^{k} \{\omega \in \Omega \text{ tel que } T_j(\omega) = l, Z_l(\omega) > a\}.\end{aligned} \tag{39.31}$$

Nous rappelons que là dedans, $k \leqslant n$ et que nous voulons que le tout soit dans $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. Comme les tribus sont stables par complémentaires, unions dénombrables et intersections dénombrables[5], nous avons le droit de travailler chaque partie séparément.

Chaque élément de l'intersection sur l est de la forme $\{T_j = l\} \cap \{Z_l > a\}$. Et nous avons

$$\{T_k = l\} = \{T_l \leqslant l\} \setminus \{T_k \leqslant l - 1\}. \tag{39.32}$$

Nous prouvons bout par bout que pour tout $m \leqslant k \leqslant n$, les parties suivantes sont dans $\mathcal{F}_n$:

[2] Définition 39.11.
[3] Définition 39.2.
[4] Si vous avez un problème, écrivez-moi.
[5] Définition 14.1 et lemme 14.3.

- $\{T_j \leqslant m\} \in \mathcal{F}_n$ parce que T_j est un temps d'arrêt.
- $\{T_j \geqslant k\} \in \mathcal{F}_n$ parce que c'est le complémentaire de $\{T_j < k\} = \{T_k \leqslant k-1\}$ et que $k-1 \leqslant n$.
- $\{Z_k \leqslant a\} \in \mathcal{F}_n$ parce que $\mathcal{F}_n$ est engendrée, entre autres par Z_k. Ici nous utilisons le fait que $k \leqslant n$.
- $\{Z_l > a\} \in \mathcal{F}_n$ parce que $\mathcal{F}_n$ contient entre autres $\sigma(Z_l)$.

(3) **Si S_j est un temps d'arrêt alors T_{j+1} en est un**

Même raisonnement que l'autre[6].

Et maintenant, les inégalités (39.26), (39.27) et (39.28). Notons que dès que $T_j = \infty$, tous les autres sont ∞ et les inégalités n'ont plus vraiment de sens. Nous supposons donc toujours que $T_j, S_j < \infty$.

(1) $T_0 \leqslant S_1$ Nous avons $S_1 = \min\{k \geqslant T_0 \text{ tel que } Z_k \leqslant a\}$. En particulier $S_1 \geqslant T_0$.

(2) $S_1 < T_1$ Par définition.

(3) $T_j < S_{j+1}$ **si** $j \geqslant 1$ Par définition $S_{j+1} = \min\{k \geqslant T_j \text{ tel que } Z_k \leqslant a\}$. En particulier $S_{j+1} \geqslant T_j$. Voyons pourquoi pas $S_{j+1} = T_j$. Vue la définition de S_{j+1}, avoir $S_{j+1} = T_j$ demanderait $Z_{T_j} \leqslant a < b$. Mais $T_j = \min\{k > S_j \text{ tel que } Z_k \leqslant b\}$. Donc $Z_{T_j} \geqslant b$. Contradiction.

(4) $S_{j+1} < T_{j+1}$ Par définition.

(5) $Z_{S_j} \leqslant a$ Si $l = S_j(\omega)$, alors en particulier $l \in \{k \geqslant T_j(\omega) \text{ tel que } Z_k(\omega) \leqslant a\}$. En particulier $Z_l(\omega) \leqslant a$.

(6) $b \leqslant Z_{T_j}$ Si $l = T_j(\omega)$, alors $l \in \{k > S_j(\omega) \text{ tel que } Z_k(\omega) \geqslant b\}$. En particulier $Z_l(\omega) \geqslant b$.

□
PROPooSGXJooQkbyMH

Proposition 39.14 ([875]).
Nous fixons $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Le nombre de montées est croissant et en posant

$$U_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} U_n(\omega), \tag{39.33}$$

l'application U_n est une variable aléatoire.

Démonstration. La définition est que $U_n(\omega) = \max\{j \leqslant n \text{ tel que } T_j(\omega) \leqslant n\}$. Nous avons

$$\{j \leqslant n \text{ tel que } T_j(\omega) \leqslant n\} \subset \{j \leqslant n+1 \text{ tel que } T_j(\omega) \leqslant n+1\}. \tag{39.34}$$

Donc le maximum de l'ensemble de droite est plus grand.

Le fait que la limite soit une variable aléatoire (c'est-à-dire mesurable) est la proposition 14.111. □
THOooZKNNooVdOxKu

Théorème 39.15 (Inégalité des montées de Doobs[875]).
Soit une sous-martingale $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Nous avons

$$E\big(U_n(a,b)\big) \leqslant \frac{1}{b-a} E\Big((Z_n - a)^+\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}\Big(E\big(|Z_n|\big) + |a|\Big). \tag{39.35}$$

PROPooMFRFooHMIjsy

Proposition 39.16 ([875]).
Soit une sous-martingale[7] $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sup_n E(Z_n^+) < \infty$. Alors il existe $\Omega' \subset \Omega$ tel que $P(\Omega') = 1$ et une variable aléatoire $Z \in L^1(\Omega')$ telle que

$$Z_n(\omega) \to Z \tag{39.36}$$

pour tout $\omega \in \Omega'$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) $U(a,b) \in L^1(\Omega)$

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Nous considérons également le nombre de montées[8] entre a et b. C'est une suite croissante et la limite est une variable aléatoire (proposition 39.14). Le théorème de Beppo-Levi 14.178 nous dit alors que

$$\lim_{n\to\infty} E\big(U_n(a,b)\big) = E\big(U(a,b)\big) \in [0,\infty]. \tag{39.37}$$

[6] Attention. J'ai pas vérifié. Je te conseille de vérifier, et de m'écrire si il y a une difficulté.
[7] Définition 39.3.
[8] Définition 39.12.

Nous passons à la limite dans l'inégalité montées 39.15 :

$$E\Big(U_n(a,b)\Big) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\Big(E\big(|Z_n|\big) + |a|\Big). \tag{39.38}$$

Dans le membre de droite nous majorons

$$E\big(|Z_n|\big) \leqslant E(Z_n^+) \leqslant \sup_n E(Z_n^+). \tag{39.39}$$

Nous avons donc

$$E\Big(U_n(a,b)\Big) \leqslant \frac{1}{b-a} \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(E(Z_n^+) + |a|\Big) < \infty. \tag{39.40}$$

La dernière inégalité étant l'hypothèse. Nous avons donc démontré que

$$E\big(U(a,b)\big) < \infty, \tag{39.41}$$

c'est-à-dire que $U(a,b) \in L^1(\Omega)$, et donc $U(a,b) < \infty$ presque surement. Donc

$$P\Big(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } U(a,b)(\omega) = \infty\}\Big) = 0. \tag{39.42}$$

EQooJDDJooNYpzru

(2) **La partie $A_{a,b}$**

Pour chaque $a < b$ dans $\mathbb{Q}$, nous introduisons cette partie de Ω :

$$A_{a,b} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \begin{cases} \liminf_n Z_n(\omega) \leqslant a \\ \limsup_n Z_n(\omega) \geqslant b \end{cases}\}. \tag{39.43}$$

(3) **$T_j, S_j < \infty$ sur $A_{a,b}$**

Soit $\omega \in A_{a,b}$. Nous prouvons que $T_j(\omega) < \infty$ et $S_j(\omega) < \infty$ par récurrence. Pour tout $N > 0$, il existe $k, > N$ tel que $Z_k(\omega) \leqslant a$ et $Z_l(\omega) \geqslant b$.

Si $T_j(\omega) < \infty$, alors $S_{j+1} < \infty$. En effet il existe $k > T_j(\omega)$ tel que $Z_k(\omega) \leqslant a$. Et donc $S_{j+1}(\omega) < \infty$.

De même si $S_j(\omega) < \infty$, alors il existe $k > S_j(\omega)$ tel que $Z_k(\omega) \geqslant b$. Donc $T_{j+1}(\omega) < \infty$.

(4) **$U(a,b) = \infty$ sur $A_{a,b}$**

Nous montrons à présent que $U(\omega) = \infty$ pour tout $\omega \in A_{a,b}$. Soient $\omega \in A_{a,b}$, et $m > 0$. Nous posons

$$N = \max\{T_m(\omega), m\}, \tag{39.44}$$

et nous considérons $n > N$. Nous allons prouver qu'alors $U_n(a,b) \geqslant m$. Pour rappel $U_n(\omega) = \max\{j \leqslant n \text{ tel que } T_j(\omega) \leqslant n\}$.. Vu que $T_m(\omega) < N < n$ et $m \leqslant N < n$, nous avons $m \in \{j \leqslant n \text{ tel que } T_j(\omega) \leqslant n\}$, et donc $U_n(\omega) \geqslant m$. Nous avons donc prouvé que

$$\lim_{n\to\infty} U_n(a,b)(\omega) = \infty \tag{39.45}$$

dès que $\omega \in A_{a,b}$. En vertu de (39.42), nous avons $P(A_{a,b}) = 0$ pour tout $a < b \in \mathbb{R}$.

(5) **L'union des $A_{a,b}$**

Nous posons

$$A = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \liminf_n Z_n(\omega) < \limsup_n Z_n(\omega)\}, \tag{39.46}$$

et nous prouvons à présent que $A = \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a<b}} A_{a,b}$.

Soit $\omega \in A$. Il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $\omega \in A_{a,b}$. Nous avons donc

$$\liminf_n Z_n(\omega) \leqslant a < b \leqslant \limsup_n Z_n(\omega), \tag{39.47}$$

et donc $\omega \in A$. Dans l'autre sens, nous supposons que $\omega \in \Omega$ satisfasse $\liminf_n Z_n(\omega) < \limsup_n Z_n(\omega)$. En utilisant le lemme 1.556(1) (deux fois), nous considérons $a < b$ dans $\mathbb{Q}$ tels que

$$\liminf_n Z_n(\omega) < a < b < \limsup_n Z_n(\omega). \tag{39.48}$$

Cela prouve que $\omega \in A_{a,b} \subset A$.

(6) **Convergence presque sure**

En tant qu'union dénombrable de parties de mesures nulles, nous avons $P(A) = 0$. Le Ω' dont on parle dans l'énoncé sera A^c. Vu que $P(\Omega \setminus \Omega') = 0$, le mesure P restreinte aux parties de Ω' est une mesure de probabilité sur Ω'. Pour $\omega \in \Omega'$, nous avons

$$\liminf_n Z_n(\omega) = \limsup_n Z_n(\omega), \tag{39.49}$$

et donc la suite $(Z_n(\omega))$ converge dans $\bar{\mathbb{R}}$. Nous considérons la variable aléatoire

$$\begin{aligned} Z\colon \Omega' &\to \bar{\mathbb{R}} \\ \omega &\mapsto \lim_{n\to\infty} Z_n(\omega). \end{aligned} \tag{39.50}$$

Vu que $Z_n(\omega) \to Z(\omega)$, la proposition 9.49 dit que $\liminf_n |Z_n(\omega)| = |Z(\omega)|$. Nous pouvons calculer un peu d'espérance : SUBEQSooPEZEooTDliNe

$$\begin{aligned} E\big(|Z|\big) &= \int_{\Omega'} |Z(\omega)| dP(\Omega) && && (39.51a)\\ &= \int_{\Omega'} \liminf_n |Z_n(\omega)| dP(\omega) && && (39.51b)\\ &\leqslant \int_{\Omega'} |Z_n(\omega)| dP(\omega) && \text{lem. Fatou 14.182} && (39.51c)\\ &= \liminf_n E\big(|Z_n|\big). && && (39.51d) \end{aligned}$$

(7) **Un peu de majoration**

Nous avons $|Z_n| = Z_n^+ + Z_n^- = 2Z_n^+ - Z_n$, et nous continuons les inégalités (39.51) :

$$\begin{aligned} E(|Z|) &\leqslant \liminf_n \big(E(|Z_n|)\big) && && (39.52a)\\ &= 2E(Z_n^+) - E(Z_n) && && (39.52b)\\ &\leqslant 2E(Z_n^+) - E(Z_0) && \text{prop. 39.10} && (39.52c)\\ &\leqslant 2\sup_n E(Z_n^+) - E(Z_0) && && (39.52d)\\ &< \infty. && && (39.52e) \end{aligned}$$

Cela termine de prouver que $Z \in L^1(\Omega', P)$.

□

39.2.2 Théorèmes d'arrêt

LemXYeCLXW

Lemme 39.17.
Si T est un temps d'arrêt presque surement fini, alors[9]

ItemIPPkxmAii

(1) $T \wedge n \xrightarrow{p.s.} T$,

(2) $\lim_{n\to\infty} E(T \wedge n) = E(T)$.

Note : il est d'usage assez classique de noter $a \wedge b$ le minimum de a et b.

Démonstration. Vu que T est presque surement finie, il suffit de prouver que

EqRVoKxsN

$$(T \wedge n)(\omega) \to T(\omega) \tag{39.53}$$

pour tout ω tel que $T(\omega) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soient donc $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) = k$ et $n > k$. Nous avons

$$(T \wedge n)(\omega) = T(\omega) \wedge n = k = T(\omega). \tag{39.54}$$

En ce qui concerne la seconde assertion, la suite de variables aléatoires $X_n = T \wedge n$ est croissante et positive, donc le théorème de la convergence monotone 14.178 montre que

$$\lim_{n\to\infty} E(T \wedge n) = E(T). \tag{39.55}$$

□

[9] Dans [128], dans le problème de la ruine du joueur, la seconde assertion est avec une limite sup et non avec une limite normale.

Remarque 39.18.
Notons la différence subtile entre $S_T(\omega)$ et $(S_T)(\omega)$. La première est la variable aléatoire

$$\omega' \mapsto S_{T(\omega')}(\omega) \tag{39.56}$$

et la seconde est le nombre $S_{T(\omega)}(\omega)$.

ThoQMsRbkp

Théorème 39.19 (Théorème d'arrêt borné[877])**.**
Soit (X_n) une sur-martingale et $S \leqslant T$, deux temps d'arrêts bornés. Alors

(1) les variables aléatoires X_S et X_T sont intégrables,

(2) $E(X_T|\sigma(S)) \leqslant X_S$ presque surement.

Si par contre (X_n) est une martingale alors X_S et X_T sont bornées, et

$$E(X_T|\sigma(S)) = X_S. \tag{39.57}$$

RemKCdpnid

Remarque 39.20.
Un cas particulier intéressant de ce théorème 39.19 est le cas $S = 0$ qui est un temps d'arrêt vérifiant $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$. Si X est n'importe quelle variable aléatoire, la tribu engendrée $\sigma(X)$ est toujours indépendante de la tribu $\{\Omega, \varnothing\}$, donc le résultat $E(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S$ donne

$$E(X_T) = X_0. \tag{39.58}$$

ThoZTrdjtZ

Théorème 39.21 (Premier théorème d'arrêt de Doob[878, 879, 875])**.**
Soient (X_n) une martingale et T un temps d'arrêt[10] *; tous deux pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$. Nous supposons qu'une des trois propriétés suivantes soit vérifiée :*

(1) T est presque surement bornée : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $T(\omega) < c$ pour presque tout ω. ItemQVWZuBkiii

(2) Il existe une constante c telle que $|X_{T\wedge n}| \leqslant c$ presque surement.

(3) Il existe $k > 0$ tel que $|X_n(\omega)| < k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$. Et $T < \infty$ presque surement.

(4) $E(T) < \infty$ et il existe une constante c telle que

$$E\big(|X_{n+1} - X_n|\,|\mathcal{F}_n\big) \leqslant c \tag{39.59}$$

sur l'événement $\{T \geqslant n\}$.

Alors X_T est une variable aléatoire presque surement bien définie nous avons

$$E(X_T) = E(X_0). \tag{39.60}$$

Si (X_n) est une sur-martingale, alors la conclusion est $E(X_T) \leqslant E(X_0)$ et si (X_n) est une sous-martingale, la conclusion est $E(X_T) \geqslant E(X_0)$.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 39.22
D'après la page de discussion de l'article sur Wikipédia, il semblerait que la seconde condition soit mal énoncée. Je n'ai pas vérifié.

Remarque 39.23.
Sous l'hypothèse (2), il est possible d'avoir $T = \infty$ sur un ensemble de mesure non nulle. Sur cet ensemble, la variable aléatoire X_T doit être définie de façon plus fine.

Définition 39.24.
*Nous disons que la martingale $(M_n)_{n\geqslant 1}$ est **terminée** si il existe $M \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $E(M|\mathcal{A}_n) = M$ pour tout $n > 1$.*

ThoEFbpVXb

Théorème 39.25.
Si (M_n) est une martingale, nous avons équivalence entre

(1) (M_n) converge dans L^1 ;

(2) (M_n) est terminée ;

[10] Définition 39.11.

(3) l'ensemble $\{M_n\}_{n\geqslant 1}$ est équi-intégrable[11].

La démonstration est sans doute par petits bouts dans [875].

Attention : en vertu de la proposition 27.23 et surtout de l'exemple 27.24, la convergence L^1 n'implique pas la convergence presque partout.

ThoHBvnTRk

Théorème 39.26 (Théorème de Doob[487])**.**
À propos de convergence de martingales.

(1) Toute martingale terminée converge presque surement et pour la norme L^1.

(2) Toute martingale bornée dans L^2 converge presque surement et pour la norme L^2.

PropAYJpGsc

Proposition 39.27 ([880])**.**
Soient (M_n) une martingale et T un temps d'arrêt (pour la même filtration $(\mathcal{B}_n)$). Alors le processus $V_n = M_{n\wedge T}$ est une martingale.

Démonstration. Nous décomposons V_n de la façon suivante :

$$V_n = M_{n\wedge T} = M_n \mathbb{1}_{T\geqslant n} + M_T \mathbb{1}_{T<n} = M_n \mathbb{1}_{T\geqslant n} + \sum_{k<n} M_k \mathbb{1}_{T=k}. \tag{39.61}$$

EqYJjUZrv

Nous avons, grâce au lemme 14.3,

$$\{T \geqslant n\} = \complement\{T < n\} = \complement\{T \leqslant n-1\} \in \mathcal{B}_{n-1} \tag{39.62}$$

et, si $k \leqslant n$,

$$\{T = k\} = \underbrace{\{T \leqslant k\}}_{\in\mathcal{B}_k} \setminus \underbrace{\{T \leqslant k-1\}}_{\in\mathcal{B}_{k-1}} \in \mathcal{B}_k \subset \mathcal{B}_n. \tag{39.63}$$

La forme (39.61) donne donc manifestement la $\mathcal{B}_n$-mesurabilité de V_n.

En ce qui concerne l'espérance nous devons calculer

$$E(V_{n+1}|\mathcal{B}_n) = E(M_{n+1}\mathbb{1}_{T\geqslant n+1}|\mathcal{B}_n) + \sum_{k<n+1} E(M_k \mathbb{1}_{T=k}|\mathcal{B}_n) \tag{39.64}$$

où nous avons utilisé la proposition 36.47. Étant donné que $\mathbb{1}_{T\geqslant n+1}$ et $\mathbb{1}_{T=k}$ sont des variables aléatoires $\mathcal{B}_n$-mesurables nous pouvons utiliser la proposition 36.74 pour les sortir :

$$E(V_{n+1}|\mathcal{B}_n) = \mathbb{1}_{T\geqslant n+1} M_n + \sum_{k\leqslant n} \mathbb{1}_{T=k} M_k = M_{T\wedge n} = V_n. \tag{39.65}$$

Pour cette ligne, nous avons aussi utilisé les égalités suivantes :

- $E(M_{n+1}|\mathcal{B}_n) = M_n$ parce que (M_n) est une martingale
- $E(M_k|\mathcal{B}_n) = M_k$ parce que M_k est $\mathcal{B}_n$-mesurable.

□

Définition 39.28 (Processus arrêté[881])**.**
Si (X_n) est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et si T est un temps d'arrêt $\mathcal{F}_n$-mesurable alors le ***processus arrêté*** *à l'instant T est le processus*

$$X_n^T(\omega) = X_{\min\{n,T(\omega)\}}(\omega). \tag{39.66}$$

Il peut également être écrit $X_n^T = X_{n\wedge T}$.

Dans le cas continu, nous avons cette définition. Soient :

(1) Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

(2) Un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$,

(3) Un processus stochastique $X\colon [0,\infty[\times \Omega \to X$,

(4) Un temps d'arrêt τ de X pour la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ de $\mathcal{F}$.

[11] Définition 27.69 et lemme 27.70.

*Le **processus arrêté** X^τ est le processus*

$$X_t^\tau(\omega) = X_{\min\{t,\tau(\omega)\}}(\omega). \tag{39.67}$$
LEMooWTLJooUyMYoV

Lemme 39.29.
Si (X_n) est une martingale alors son processus arrêté est encore une martingale.

Démonstration. C'est la proposition 39.27. □

39.3 Décomposition de martingales

Définition 39.30 (Processus croissant prévisible[877]).
*Un processus X_n adapté à la filtration $\mathcal{F}_n$ est un processus **croissant prévisible** si*

(1) $A_0 = 0$

(2) $A_n \leqslant A_{n+1}$ *; c'est cette condition qui correspond à « croissant »,*

(3) A_{n+1} *est $\mathcal{F}_n$-mesurable ; c'est cette condition qui correspond à « prévisible ».*

Proposition 39.31 (Décomposition de Doob pour une sous-martingale[877]).
Toute sous-martingale (X_n) s'écrit de façon unique sous la forme

$$X_n = M_n + A_n \tag{39.68}$$
EqCCsAwhZ

où (M_n) est une martingale et (A_n) est un processus croissant prévisible.

Démonstration. Nous considérons le processus
EqQFlGRzo

$$\begin{cases} A_0 = 0 & \text{(39.69a)} \\ A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n). & \text{(39.69b)} \end{cases}$$

Nous vérifions que cela est un processus croissant prévisible. D'abord

$$E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - E(X_n|\mathcal{F}_n). \tag{39.70}$$

Le second terme est égal à X_n parce que cette variable aléatoire est $\mathcal{F}_n$-mesurable tandis que (X_n) étant une sous-martingale nous avons $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geqslant X_n$. Nous avons donc bien $A_{n+1} \geqslant A_n$ et le processus (A_n) est croissant.

En ce qui concerne la prévisibilité nous devons prouver que A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable. D'une part A_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et d'autre part par définition de l'espérance conditionnelle, la variable aléatoire $E(X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n)$ est également $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Nous posons alors $M_n = X_n - A_n$ et nous devons prouver que cela est une martingale. Nous avons

$$E(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) - E(A_{n+1} - A_n|\mathcal{F}_n). \tag{39.71}$$

Le second terme vaut

$$E(A_{n+1} - A_n|\mathcal{F}_n) = E\Big(E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_n\Big) = E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) \tag{39.72}$$

par la proposition 36.69. Le processus (M_n) est donc une martingale. La preuve de l'existence d'une décomposition (39.68) est achevée.

Nous passons maintenant à l'unicité en posant $X_n = M_n + A_n = M'_n + A'_n$. Nous avons $A_0 = A'_0 = 0$ et $A'_n = X_n - M'_n$, donc

$$A'_{n+1} - A'_n = X_{n+1} - X_n + M'_{n+1} - M'_n = X_{n+1} - X_n - (M'_{n+1} - M'_n). \tag{39.73}$$

Nous appliquons $E(.|\mathcal{F}_n)$ des deux côtés de cette égalité :

$$\underbrace{E(A'_{n+1} - A'_n|\mathcal{F}_n)}_{=A'_{n+1}-A'_n} = E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) - \underbrace{E(M'_{n+1} - M'_n|\mathcal{F}_n)}_{=0}. \tag{39.74}$$

Nous avons utilisé le que que (M_n) étant une martingale, $E(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n) = 0$, et idem avec (M'_n). Donc

$$A'_{n+1} - A'_n = E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = E(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n) + E(A_{n+1} - A_n|\mathcal{F}_n) = A_{n+1} - A_n. \tag{39.75}$$

Nous avons donc montré que $A_{n+1} - A_n = A'_{n+1} - A'_n$ et donc que $A_n = A'_n$ pour tout n. Nous en déduisons immédiatement que $M_n = M'_n$ pour tout n et l'unicité de la décomposition. □

LemPVgeKfc

Lemme 39.32.
Si (X_n) est une martingale de carré intégrable adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ alors

(1) Le processus (X_n^2) est une sous-martingale.

(2) Si $X_n^2 = M_n + A_n$ est la décomposition de Doob, alors

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \Big(E(X_i^2|\mathcal{A}_{i-1}) - X_{i-1}^2 \Big) = \sum_{i=1}^{n} E\Big((X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{A}_{i-1} \Big). \tag{39.76}$$

EqSTGxVWP

Démonstration. Pour la première assertion, nous utilisons l'inégalité de Jensen 36.87 :

$$E(X_n^2|\mathcal{F}_{n-1}) \geqslant \big(E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \big)^2 = X_n^2 \tag{39.77}$$

parce que $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_n$ du fait que (X_n) soit une martingale.

En ce qui concerne la seconde assertion, nous nous souvenons que le processus prévisible de la décomposition de Doob d'une sous-martingale est donné par la récurrence (39.69) que nous recopions ici :

$$\begin{cases} A_0 = 0 & \text{(39.78a)} \\ A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1}^2 - X_n^2|\mathcal{F}_n) & \text{(39.78b)} \end{cases}$$

Vu que X_n^2 est $\mathcal{F}_n$-mesurable, il peut sortir de l'espérance :

$$A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - X_n^2 \tag{39.79}$$

et donc

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \Big(E(X_i^2|\mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1}^2 \Big). \tag{39.80}$$

Pour obtenir la dernière partie de (39.76) nous travaillons un peu :

$$\begin{aligned} E\big((X_i - X_{i-1})^2|\mathcal{F}_{i-1}\big) &= E\big(X_i^2 + X_{i-1}^2 - 2X_iX_{i-1}|\mathcal{F}_{i-1}\big) && \text{(39.81a)} \\ &= E(X_i^2|\mathcal{F}_{i-1}) + X_{i-1}^2 - 2E(X_iX_{i-1}|\mathcal{F}_{i-1}) && \text{(39.81b)} \\ &= E(X_i^2|\mathcal{F}_{i-1}) + X_{i-1}^2 - 2X_{i-1}E(X_i|\mathcal{F}_{i-1}) && \text{(39.81c)} \\ &= E(X_i^2|\mathcal{F}_{i-1}) + X_{i-1}^2 - 2X_{i-1}X_i && \text{(39.81d)} \end{aligned}$$

EqFBkXiJH

où nous avons utilisé la proposition 36.74 pour obtenir (39.81c). □

39.4 Problème de la ruine du joueur

SecMSOjfgM

Nous considérons un joueur compulsif qui joue à un jeu très simple[12] : il joue à pile ou face contre la banque avec une pièce truquée. Si pile sort, la banque donne 1 au joueur et si c'est face, c'est le joueur qui donne 1 à la banque. Nous nommons a la fortune initiale du joueur, b celle de la banque et p la probabilité d'obtenir pile.

Nous supposons que le jeu se poursuit jusqu'à la ruine du joueur ou de la banque. La modélisation est comme suit : nous considérons (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi

$$Y_n \sim p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}. \tag{39.82}$$

C'est le résultat financier pour le joueur du n^e jet. La fortune du joueur au bout de n jets est la variable aléatoire

$$S_n = a + \sum_{j=1}^{n} Y_j. \tag{39.83}$$

Nous notons $Y_0 = a$.

Nous considérons la filtration

$$\mathcal{A}_n = \sigma\big(S_i \text{ tel que } 0 \leqslant i \leqslant n\big) = \sigma\big(Y_i \text{ tel que } 0 \leqslant i \leqslant n\big), \tag{39.84}$$

et le temps d'arrêt du jeu :

$$T = \inf\{n \geqslant 1 \text{ tel que } S_n \in \{0, a+b\}\}; \tag{39.85}$$

c'est le temps qu'il faut pour que tout l'argent appartienne soit au joueur soit à la banque.

Nous voulons étudier les paramètres suivants :

[12] Le gros des choses dites à propos de la ruine du joueur provient de [128].

(1) $\rho = P(S_T = a+b)$, c'est-à-dire la probabilité que ce soit le joueur qui gagne contre la banque.

(2) $P(T < \infty)$, c'est-à-dire la probabilité que le jeu se finisse.

(3) $E(T)$, la durée moyenne du jeu.

LemEOAmVyZ

Lemme 39.33.
Le processus S_n du problème de la ruine du joueur, en notant $q = 1-p$, vérifie

EqZQtwVMXyiB
$$E(S_n|\mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1} + p - q. \tag{39.86}$$

De plus le processus S_n est

(1) une martingale si $p = q = \frac{1}{2}$,

(2) une sous-martingale si $p > q$.

Démonstration. Pour $n \geqslant 1$ nous avons

$$E(S_n|\mathcal{A}_{n-1}) = a + \sum_{j=1}^{n} E(Y_j|\mathcal{A}_{n-1}) = a + \sum_{j=1}^{n-1} E(Y_j|\mathcal{A}_{n-1}) + E(Y_n|\mathcal{A}_{n-1}). \tag{39.87}$$

Si $j \leqslant n-1$ alors $Y_j \in m(\mathcal{A}_{n-1})$. Mais nous savons que si X est $\mathcal{F}$-mesurable, alors $E(X|\mathcal{F}) = X$ (c'est la définition de l'espérance conditionnelle), donc $\sum_{j=1}^{n-1} E(Y_j|\mathcal{A}_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} Y_j$.

En ce qui concerne le terme $j = n$ nous utilisons le fait que $\sigma(Y_n)$ soit une tribu indépendante de $\mathcal{A}_{n-1}$; nous avons donc au final pour tout j que $E(Y_j|\mathcal{A}_{n-1})E(Y_j) = p - q$. Nous avons donc

$$E(S_n|\mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1} + p - q. \tag{39.88}$$

Si $p = q = \frac{1}{2}$ alors c'est une martingale, et si $p > q$ c'est une sous-martingale. □

LemXDlNxtE

Lemme 39.34.
La variable aléatoire T est un temps d'arrêt.

Démonstration. Par définition $T = \inf\{n \geqslant 1 \text{ tel que } S_n \in \{0, a+b\}\}$. Vu que les variables aléatoires S_i avec $i \leqslant n$ sont $\mathcal{A}_n$-mesurables, les ensembles $\{S_k \notin \{0, a+b\}\}$ avec $k \leqslant n$ sont $\mathcal{A}_n$-mesurables. Donc les ensembles

$$\{T = n\} = \bigcap_{k \leqslant n} \{S_k \notin \{0, a+b\}\} \cap \{S_n \in \{0, a+b\}\} \tag{39.89}$$

sont $\mathcal{A}_n$-mesurables. Nous en concluons que l'ensemble $\{T \leqslant n\}$ est également mesurable. □

39.4.1 Le cas où la pièce est truquée

Nous supposons être dans le cas $p > q$.

39.4.1.1 Introduction d'une martingale

Considérons le processus

$$\begin{cases} A_0 = 0 & \text{(39.90a)} \\ A_n = A_{n-1} + E(S_n - S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1}). & \text{(39.90b)} \end{cases}$$

Vu que $E(S_n|\mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1} + p - q$ (lemme 39.33) et que $E(S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1}$ (parce que S_{n-1} est dans la tribu de $\mathcal{A}_{n-1}$), nous avons $A_n = A_{n-1} + (p-q)$ et donc

$$A_n = n(p-q). \tag{39.91}$$

Ce processus (A_n) est croissant et prévisible. Nous introduisons le processus

EqMUajTwl
$$M_n = S_n - A_n \tag{39.92}$$

et nous montrons que c'est une martingale[13]. Nous conditionnons la définition (39.92) par rapport à $\mathcal{A}_{n-1}$:

$$\begin{aligned} E(M_n|\mathcal{A}_{n-1}) &= E(S_n|\mathcal{A}_{n-1}) - \underbrace{E(A_n|\mathcal{A}_{n-1})}_{=A_n} && \text{(39.93a)} \\ &= A_n - A_{n-1} + E(S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1}) - A_n && \text{(39.93b)} \\ &= E(S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1}) - A_{n-1}. && \text{(39.93c)} \end{aligned}$$

[13] Ceci est un peu le contraire de la décomposition de Doob.

Mais S_{n-1} est $\mathcal{A}_{n-1}$-mesurable, donc $E(S_{n-1}|\mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1}$ et

$$E(M_n|\mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}, \tag{39.94}$$

ce qui signifie que (M_n) est une martingale.

39.4.1.2 Finitude du temps d'arrêt

Nous montrons maintenant, en étudiant $M_{T\wedge n}$ que T est intégrable et nous prouvons que $P(T=\infty)=0$.

Proposition 39.35.
La variable aléatoire T est intégrable, et $P(T=\infty)=0$, c'est-à-dire que le jeu se termine presque certainement après un temps fini.

Démonstration. Nous rappelons que le lemme 39.34 nous indique que T est un temps d'arrêt. Le temps d'arrêt $T\wedge n$ est borné (par n évidemment) et nous pouvons donc lui appliquer le théorème d'arrêt 39.21 pour dire que

$$E(M_{T\wedge n}) = E(M_0). \tag{39.95}$$

Le membre de droite est simple parce que $M_0 = S_0 - A_0 = S_0 = a$ parce que c'est l'argent de départ du joueur. Pour l'autre :

$$E(M_{T\wedge n}) = E(S_{T\wedge n}) - E(A_{T\wedge n}). \tag{39.96}$$

D'une part, $E(A_{T\wedge n}) = E\big((T\wedge n)(p-q)\big)$ et d'autre part, $E(S_{T\wedge n}) \leqslant a+b$ parce que S_T vaut zéro ou $a+b$ (avec des probabilités encore inconnues[14]). En combinant avec ce qui était dit juste au dessus et remarquant que $(p-q)E(T\wedge n)\geqslant 0$ nous pouvons écrire

$$0 \leqslant (p-q)E(T\wedge n) \leqslant b. \tag{39.97}$$

La suite de variables aléatoires $T\wedge n$ est donc croissante, positive et intégrable[15] et donc nous avons du travail pour le théorème de la convergence monotone 14.178. La variable aléatoire T est alors mesurable et[16]

$$\lim_{n\to\infty} E(T\wedge n) = E(T). \tag{39.98}$$

Notons que nous n'avons pas encore prouvé que $E(T)<\infty$, mais en passant à la limite dans (39.97) nous écrivons

$$0 \leqslant (p-q)E(T) \leqslant b. \tag{39.99}$$

Maintenant nous avons prouvé que T est intégrable et même L^1. Par conséquent

$$P(T=\infty)=0. \tag{39.100}$$

Le jeu se termine donc presque certainement après un temps fini. □

39.4.1.3 Temps moyen de jeu

Le lemme 39.17 nous indique que $S_{T\wedge n} \xrightarrow{p.s.} S_T$.

Nous avons les bornes $0\leqslant S_{T\wedge n}\leqslant a+b$ et comme $a+b$ est intégrable, $S_{T\wedge n}$ l'est aussi et nous pouvons parler de $E(S_{T\wedge n})$. Repartons de (39.96) :

$$a = E(M_0) = E(M_{T\wedge n}) = E(S_{T\wedge n}) - E(A_{T\wedge n}) = E(S_{T\wedge n}) - (p-q)E(T\wedge n). \tag{39.101}$$

La variable aléatoire $S_{T\wedge n}$ est majorée par $a+b$ indépendamment de n ; donc le théorème de la convergence dominée 14.207 donne $\lim_{n\to\infty} E(S_{T\wedge n}) = E(S_T)$. En ce qui concerne le second terme, la convergence dominée ne fonctionne pas parce que $T\wedge n$ n'est pas à priori majoré par quelque chose d'indépendant de n. Heureusement, le théorème de la convergence monotone donne $\lim_{n\to\infty} E(T\wedge n) = E(T)$. Au final en passant à la limite dans (39.101) nous avons

$$a = E(S_T) - (p-q)E(T). \tag{39.102}$$

Étant donné que $T>0$ et $p-q>0$ nous pouvons récrire cela sous la forme

$$0 \leqslant (p-q)E(T) = E(S_T) - a. \tag{39.103}$$

[14] Mais on y travaille.

[15] Je rappelle que les constantes sont des fonctions intégrables sur Ω. Oui, je sais, quand on est habitué à faire de l'analyse sur $\mathbb{R}^n$ c'est un truc qu'on perd toujours un peu de vue.

[16] Dans [128], l'équation (39.98) vient avec une lim sup et non une limite normale. Je ne comprends pas pourquoi.

Par définition de T nous avons aussi

$$E(S_T) = (a+b)P(S_T = a+b) + 0 \cdot P(S_T = 0) = \rho(a+b). \tag{39.104}$$

Nous déduisons

$$E(T) = \frac{(a+b)\rho - a}{p-q}. \tag{39.105}$$

Ne crions pas victoire trop vite : nous n'avons pas encore d'expression de $\rho = P(S_T = a+b)$. Le temps moyen de jeu n'est donc pas encore tout à fait connu.

39.4.1.4 Probabilité de victoire du joueur

Nous avons besoin d'exprimer ρ en termes de a, b et p. Pour cela nous introduisons la variable aléatoire[17]

$$U_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}. \tag{39.106}$$

Nous commençons par prouver que c'est une martingale en calculant

$$E(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) = E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}}\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}\Big|\mathcal{A}_{n-1}\right) \tag{39.107}$$

Nous utilisons la proposition 36.74. Dans notre cas, S_{n-1} et Y_n sont des variables aléatoires $\mathcal{A}_n$-mesurables ; la variable aléatoire Y_n est même $\mathcal{A}_{n-1}$-mesurable et sort donc du conditionnement ; nous avons donc

$$E(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}\right) \tag{39.108}$$

Nous allons utiliser le théorème de transfert 36.97 :

$$E(s^{Y_n}) = \int_\Omega s^{Y_n(\omega)} dP(\omega) = \int_{Y_n=1} s dP(\omega) + \int_{Y_n=-1} \frac{1}{s} dP(\omega). \tag{39.109}$$

Mais nous savons que $P(Y_n = 1) = p$ et $P(Y_n = -1) = 1 - p = q$, donc

$$E(s^{Y_n}) = ps + \frac{1-p}{s}. \tag{39.110}$$

En posant $s = q/p$ et en tenant compte de $1 - p = q$, nous trouvons

$$E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}\right) = p + q = 1. \tag{39.111}$$

Donc

$$E(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n - 1} = U_{n-1}, \tag{39.112}$$

ce qui prouve que (U_n) est une martingale.

Par définition nous avons toujours $S_n \geqslant 0$ tant que $n \leqslant T$[18], donc $U_{T\wedge n} \in [0,1]$. Il est donc évident que si $a \geqslant 1$ nous avons

$$\int_{|U_{T\wedge n}|>a} |U_{T\wedge n}| dP = 0 \tag{39.113}$$

parce que le domaine d'intégration est vide. Donc les variables aléatoires $V_n = U_{T\wedge n}$ sont équi-intégrables[19] et le théorème 39.25 montre que la martingale (V_n) est terminée ; par ricochet[20] le théorème de Doob 39.26 montre qu'il existe une variable aléatoire X telle que $V_n \xrightarrow{p.s.} X$. Nous allons prouver que $X = U_T$ presque partout. Nous savions déjà (voir l'équation (39.53) et ses alentours) que

$$S_{n\wedge T} \xrightarrow{p.s.} S_T. \tag{39.114}$$

[17] Nous dirons un mot sur ce choix dans le « petit complément » 39.4.3.
[18] Pour $n > T$ le jeu est terminé, donc on ne se pose pas la question.
[19] Définition 27.69.
[20] Nous rappellons que la convergence L^1 n'implique pas la convergence presque partout.

Nous avons alors (au sens du presque surement) :

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} U_{T\wedge n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{T\wedge n}} = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_T} = U_T. \tag{39.115}$$

Donc par unicité de la limite presque partout nous avons $X = U_T$ presque partout. Par le théorème de transfert 36.97 nous évaluons

$$E(U_T) = \left(\frac{q}{p}\right)^0 P(S_T = 0) + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} P(S_T = a+b) = (1-\rho) + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} \rho. \tag{39.116}$$ EqYFycUag

La remarque 39.20 nous permet de dire que

$$E(U_{T\wedge n}) = U_0. \tag{39.117}$$

Mais par définition

$$U_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_0} = \left(\frac{q}{p}\right)^{a}, \tag{39.118}$$

donc nous avons

$$E(U_{T\wedge n}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{a}. \tag{39.119}$$

Nous voudrions passer à la limite $n \to \infty$ dans cette équation. Pour permuter la limite et l'espérance, il faut utiliser le théorème de la convergence dominée 14.207. Vu que nous avons choisi $q > p$, nous avons $q/p > 1$ et donc $U_{T\wedge n} \leqslant (q/p)^{a+b}$, ce qui montre que la fonction $\omega \mapsto (U_{T\wedge n})(\omega)$ est majorée par une constante (qui est une fonction intégrable). Nous pouvons donc permuter la limite et l'espérance :

$$\lim_{n\to\infty} E(U_{T\wedge n}) = E\big(\lim_{n\to\infty} U_{T\wedge n}\big). \tag{39.120}$$

Mais nous avions déjà montré que $U_{T\wedge n} \xrightarrow{p.s.} U_T$. Donc

$$E(U_T) = \left(\frac{q}{p}\right)^{a}. \tag{39.121}$$

En égalisant avec l'expression (39.116) de $E(U_T)$ nous trouvons

$$\rho = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1} \tag{39.122}$$

et ensuite nous trouvons $E(T)$ en remettant ce ρ dans l'expression (39.105) donnée plus haut.

39.4.2 Le cas où la pièce est non truquée

Maintenant $p = q = 1/2$.

39.4.2.1 Probabilité de gagner

Le lemme 39.33 nous indique alors que (S_n) est une martingale et le lemme 39.32 nous permet de dire que (S_n^2) est alors une sous-martingale. Le processus croissant prévisible de (S_n^2) est donné par (39.69) qui en adaptant les notations est

$$\begin{cases} B_0 = 0 & \text{(39.123a)} \\ B_n = B_{n-1} + E\Big((S_n - S_{n-1})^2 | \mathcal{A}_{n-1}\Big). & \text{(39.123b)} \end{cases}$$ subEqJQbqJEq

Nous avons toujours $S_n - S_{n-1} = \pm 1$ parce que soit le joueur gagne soit le joueur perd, mais de toutes façons sa fortune varie de 1 à chaque étape du jeu. Donc (39.123b) nous donne $B_n = B_{n-1} + 1$ et

$$B_n = n. \tag{39.124}$$

Cela nous dit que la variable aléatoire

$$S_n^2 - B_n = S_n^2 - n \tag{39.125}$$

est une martingale (une sur-martingale moins son processus prévisible croissant). Nous lui appliquons le théorème d'arrêt 39.19 avec les temps d'arrêt 0 et $T \wedge n$:

$$E(S_{T\wedge n}^2 - T \wedge n | \mathcal{F}_0) = S_0^2 - 0 \tag{39.126}$$

où $\mathcal{F}_0$ est la tribu engendrée par la variable aléatoire 0, c'est-à-dire $\{\Omega, \varnothing\}$. Cette tribu est indépendante de toute autre tribu et nous pouvons donc supprimer le conditionnement dans (39.126). Nous avons aussi $S_0 = a$ par définition. Avec tout ça nous avons la majoration

$$E(T \wedge n) = E(S_{T\wedge n}^2) - a^2 \leqslant (a+b)^2 - a^2 \tag{39.127}$$

parce que S_k est toujours positif et entre 0 et $a + b$. En utilisant le lemme 39.17 et en passant à la limite,

$$E(T) \leqslant (a+b)^2 - a^2. \tag{39.128}$$

En particulier, $T \in L^1(\Omega)$ et $P(T < \infty) = 1$.

En suivant exactement les mêmes étapes que dans le lemme 39.17(2) nous avons aussi

$$\lim_{n\to\infty} S_{T\wedge n} = S_T \tag{39.129}$$

presque partout. De plus nous savons que

$$0 \leqslant S_{T\wedge n}^2 \leqslant (a+b)^2, \tag{39.130}$$

et nous pouvons donc utiliser le théorème de la convergence dominée 14.207 pour dire que

$$\lim_{n\to\infty} E(S_{T\wedge n}^2) = E(S_T^2). \tag{39.131}$$

Nous montrons à présent que $S_{T\wedge n} \xrightarrow{L^2} S_T$. Pour cela nous devons évaluer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |S_{T\wedge n} - S_T|^2. \tag{39.132}$$

La fonction $|S_{T\wedge n} - S_T|^2$ est majorée par $(a+b)^2$ et nous pouvons à nouveau appliquer la convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} E(|S_{T\wedge n} - S_T|^2) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |S_{T(\omega)\wedge n}(\omega) - S_{T(\omega)}(\omega)|^2 dP(\omega) = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |S_{T\wedge n} - S_T|^2 = 0. \tag{39.133}$$

La même chose en n'écrivant pas les carrés montre que l'on a aussi $S_{T\wedge n} \xrightarrow{L^1} S_T$.

Il n'y a pas que $n \mapsto S_n^2 - n$ qui est une martingale. Il y a aussi (S_n) lui-même (lemme 39.33). Nous pouvons lui appliquer le théorème d'arrêt 39.19 pour les temps d'arrêts $T \wedge n$ et 0 :

$$E(S_{T\wedge n}) = E(S_0) = a. \tag{39.134}$$

En passant à la limite, $E(S_T) = a$. L'espérance $E(S_T)$ peut par ailleurs être calculée comme

$$E(S_T) = 0 \cdot P(S_T = 0) + (a+b)P(S_T = a+b). \tag{39.135}$$

En égalisant les valeurs (39.134) et (39.135) de $E(S_T)$ nous trouvons

$$\rho = \frac{a}{a+b}. \tag{39.136}$$

Cette formule est assez logique : la probabilité que le joueur gagne est égale à la proportion d'argent en jeu qu'il a amené.

39.4.2.2 Temps moyen de jeu

Nous calculons maintenant l'espérance $E(T)$ du temps de jeu (sans compter les pauses ni les jours de fermeture du casino[21]).

Nous recopions la première égalité de (39.127) sous la forme

$$a^2 = E(S_{T\wedge n}^2 - T \wedge n) \tag{39.137}$$

[21] Le joueur est un *vrai* joueur compulsif.

et nous passons à la limite[22] en sachant que $E(S_T^2) = \rho(a+b)^2$:

$$a^2 = \rho(a+b)^2 - E(T). \tag{39.138}$$

En reprenant la valeur (39.136) de ρ,

$$E(T) = ab. \tag{39.139}$$

Et là, on voit que si le joueur amène 1000 euros contre une banque qui en a un million, et si ils jouent toutes les secondes, on en a pour 32 ans de jeu en moyenne.

Voilà. C'est fini pour la ruine du joueur.

39.4.3 Un petit complément

SUBSECooACWWooBuSxGv

Nous avons introduit lors de l'équation (39.106) la variable aléatoire $U_n = (p/q)^{S_n}$. Sans aller jusqu'à motiver complètement ce choix, nous nous proposons maintenant de voir que parmi les variables aléatoires $U_n = s^{S_n}$, le choix $s = p/q$ est le seul qui donne une martingale.

Soit donc $U_n = s^{S_n}$ et exprimons le fait que ce soit une martingale. Nous avons

$$\begin{aligned} E(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) &= E(s^{S_{n-1}}s^{Y_n}|\mathcal{A}_{n-1}) && \text{(39.140a)}\\ &= s^{S_{n-1}}E(s^{Y_n}|\mathcal{A}_{n-1}) && \text{(39.140b)}\\ &= s^{S_{n-1}}E(s^{Y_n}). && \text{(39.140c)} \end{aligned}$$

subeqYQzYOxS

Le passage à (39.140b) se justifie en disant que $s^{S_{n-1}}$ est une variable aléatoire bornée et $\mathcal{A}_{n-1}$-mesurable, et en invoquant proposition 36.74. La variable aléatoire Y_n vaut 1 avec probabilité p et -1 avec probabilité q ; donc l'espérance est vite vue :

$$E(s^{Y_n}) = ps + q\frac{1}{s} \tag{39.141}$$

et nous avons

$$E(U_n|\mathcal{A}_{n-1}) = \left(ps + q\frac{1}{s}\right)s^{S_{n-1}} = (ps + \frac{q}{s})U_{n-1}. \tag{39.142}$$

Pour que (U_n) soit une martingale il faut (et il suffit) que

$$ps + \frac{q}{s} = 1. \tag{39.143}$$

EqFMRHybk

Les solutions de cette équation sont $s \in \{1, \frac{p}{q}\}$. C'est évidemment $s = p/q$ qui donne une martingale non triviale. Attention pour être complet, il faut se demander ce qu'il se passe si $s = 0$ séparément parce que manifestement l'équation (39.143) ne traite pas ce cas. Encore une fois, en repartant du début, $s = 0$ ne se révèle pas être une martingale très excitante.

Bref, nous devons poser

$$U_n = \left(\frac{p}{q}\right)^{S_n} \tag{39.144}$$

pour avoir une martingale.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 39.36
Les variables p et q sont inversées par rapport à (39.106). Écrivez-moi si vous voyez pourquoi.

[22] Comme il est dit dans La Grande Illusion, à quoi sert un n ? À passer à la limite.

Chapitre 40

Processus de Poisson

40.1 Processus de Poisson

SecHxbtzQ

On trouve différentes définitions de processus de Poisson dans la littérature. Nous allons définir des processus de a-Poisson, de c-Poisson et de n-Poisson et de o-Poisson. Ensuite nous démontrerons les équivalences.

DEFooEVRIooZQJRSZ

Définition 40.1 (processus de comptage)**.**
*Un **processus de comptage** est une famille de variables aléatoires $\{N_t : \Omega \to \mathbb{R}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ telles que*

(1) $N_0(\omega) = 0$ *pour tout* $\omega \in \Omega$.

(2) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ *et pour tout* $\omega \in \Omega$, $N_t(\omega) \in \mathbb{N}$.

(3) Pour chaque $\omega \in \Omega$, *la fonction* $t \mapsto N_t(\omega)$ *est croissante.*

ITEMooXOEPooGewUBL

(4) si $N_t = n > 0$, *alors il existe* $0 < u < t$ *tel que* $N_u = n - 1$.

40.1.1 Processus a-Poisson

Définition 40.2.
*Une famille de variables aléatoires $(N_t)_{t\geqslant 0}$ forment un **processus de a-Poisson** d'intensité λ si*

(1) Pour tout choix $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, *les variables aléatoires* $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ *sont indépendantes.*

(2) Si $0 < s < t$ *et* $h > 0$ *alors*

$$N_{t+h} - N_{s+h} \overset{\mathcal{L}}{=} N_t - N_s, \tag{40.1}$$

c'est-à-dire que les accroissements décalés suivent les mêmes lois.

(3) Pour tout t *nous avons* N_t *suit une loi de Poisson*[1] *:* $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$.

LEMooSOUNooJDMQpM

Lemme 40.3 ([1])**.**
Si $\{N_t\}$ est un processus de a-Poisson, alors

(1) $N_0 = 0$

(2) $N_t - N_s \overset{\mathcal{L}}{=} N_{t-s} - N_0 = N_{t-s}$.

40.1.2 Processus c-Poisson

DEFooWDXDooRGCtXL

Définition 40.4 (processus de Poisson[847])**.**
*Un **processus de c-Poisson** d'intensité λ est un processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ tel que*

(1) Pour tout choix de $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_m$, *les variables aléatoires* $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$ *sont indépendantes*[2].

(2) Pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, *la variable aléatoire* $N_{s+t} - N_s$ *suit une loi de Poisson*[3] *de paramètre* λt.

[1] Définition 36.149.
[2] Ceci demande en particulier que l'ensemble Ω soit assez grand pour contenir une infinité non dénombrable de variables aléatoires indépendantes.
[3] Définition 36.149.

40.1.3 Processus n-Poisson

DEFooWXHEooEHQUJU

Définition 40.5.
*Une famille de variables aléatoires $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un **processus de n-Poisson** d'intensité λ si il existe une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de loi exponentielle[4] $\mathscr{E}(\lambda)$ telles que*

$$N_t = \sup\{n \geqslant 0 \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n} T_k \leqslant t\}. \tag{40.2}$$

Plus explicitement, un processus de Poisson sur espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une famille de variables aléatoires $N_t\colon \Omega \to \mathbb{N}$ telles que qu'il existe des variables aléatoires $T_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$N_t(\omega) = \sup\{n \geqslant 0 \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n} T_k(\omega) \leqslant t\} \tag{40.3}$$

pour tout $\omega \in \Omega$.

Dans le cas d'un processus de n-Poisson, nous posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k. \tag{40.4}$$

LEMooZTPGooYsFfNX

Lemme 40.6.
Soit un processus N_t de n-Poisson. Alors

(1) $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n\leqslant t\}}$.

(2) $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$.

(3) $\{s < S_n \leqslant t\} = \{N_t \geqslant n > N_s\}$.

(4) $\{N_t = n\} = \{S_n \leqslant t \leqslant S_{n+1}\}$

Note pour moi : le second point est probablement 36.161.

40.1.4 Processus o-Poisson

DEFooVJDDooHdFJJS

Définition 40.7 ([843]).
Un processus de comptage[5] $N_t\colon \Omega \to \mathbb{N}$ est un processus de o-Poisson si

(1) Pour tout $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, les variables aléatoires $N_{t_i} - N_{t_{i+1}}$ sont indépenantes.

(2) Pour tout t, h, la loi de $N_{t+h} - N_t$ ne dépend que de h.

(3) Il existe des fonctions $\alpha_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{h\to 0} \alpha_i(h)/h = 0$ et

(3a) $P\big(N_{t+h} - N_t \geqslant 1\big) = \lambda h + \alpha_1(h)$

(3b) $P\big(N_{t+h} - N_t \geqslant 2\big) = \alpha_2(h)$.

(4) Pour chaque $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto N_t(\omega)$

(4a) est continue à droite.

(4b) a une limite à gauche.

PROPooGXCPooHsJKMH

Proposition 40.8 ([843]).
Soit un processus (N_t) de o-Poisson[6] de paramètre λ. Pour tout $t > 0$, nous avons

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}. \tag{40.5}$$

[4] Définition 36.151.
[5] Définition 40.1.
[6] Définition 40.7.

Démonstration. La stratégie est de poser

$$\begin{aligned} p_n\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto P(N_t = n), \end{aligned} \tag{40.6}$$

et de chercher à écrire une équation différentielle pour p_n. Nous y allons par récurrence sur n en commençant par $n = 0$. Prouvons l'égalité d'ensembles

$$\{N_{t+h} = 0\} = \{N_t - N_0 = 0\} \cap \{N_{t+h} - N_t = 0\}. \tag{40.7}$$

(1) **Inclusion dans un sens** Si $N_{t+h}(\omega) = 0$, alors $N_s(\omega) = 0$ pour tout $s \leqslant t + h$. En particulier $N_t(\omega) = N_0(\omega) = 0$.

(2) **Inclusion dans l'autre sens** Nous savons que $N_0(\omega) = 0$. Donc si $\omega \in \{N_t - N_0 = 0\} \cap \{N_{t+h}(\omega) - N_t(\omega)\}$, nous avons $N_t(\omega) = 0$ et $(N_{t+h} - N_t)(\omega) = 0$. Cela donne $N_{t+h}(\omega) = 0$.

Les variables aléatoires $N_t - N_0$ et $N_{t+h} - N_t$ sont indépendantes[7] : leurs tribus sont indépendantes. Vu que $\{N_t - N_0 = 0\}$ est dans la tribu engendrée par $N_t - N_0$, les événements $\{N_t - N_0 = 0\}$ et $\{N_{t+h} - N_t = 0\}$ sont indépendants[8]. Cela pour dire que, en prenant la probabilité des deux côtés de (40.7),

$$P(N_{t+h} = 0) = P\big(N_t - N_0 = 0 \cap N_{t+h} - N_t = 0\big) \tag{40.8a}$$
$$= P(N_t - N_0 = 0)P(N_{t+h} - N_t = 0) \tag{40.8b}$$

Pour faire apparaître une dérivée, nous calculons $P(N_{t+h} = 0) - P(N_t = 0)$. En utilisant (40.8) et en tenant compte du fait que $N_0 = 0$, nous avons

$$P(N_{t+h} = 0) - P(N_t = 0) = P(N_t = 0)P(N_{t+h} - N_t = 0) - P(N_t = 0) \tag{40.9a}$$
$$= P(N_t = 0)\big(P(N_{t+h} - N_t = 0) - 1\big). \tag{40.9b}$$

De la définition de o-Poisson, nous avons

$$P(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - P(N_{t+h} - N_t \geqslant 1) = 1 - \lambda h + \alpha(t) \tag{40.10}$$

avec $\lim_{t\to 0} \alpha(t)/t = 0$. En substituant cela dans (40.9), nous trouvons

$$P(N_{t+h} = 0) - P(N_t = 0) = -P(N_t = 0)\big(\lambda t + \alpha(h)\big). \tag{40.11}$$

En ce qui concerne la fonction p_0 nous avons

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\frac{p_0(t)}{h}(\lambda h + \alpha(h)) = -\lambda p_0(t) + \frac{\alpha(h)}{h}, \tag{40.12}$$

et donc l'équation différentielle

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) & \text{(40.13a)} \\ p_0(0) = 1. & \text{(40.13b)} \end{cases}$$

La solution est unique et connue[9] :

$$P(N_t = 0) = p_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{40.14}$$

Voilà qui prouve le cas $n = 0$.

Nous travaillons sur p_n avec une récurrence. Nous commençons par l'union disjointe

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } N_{t+h}(\omega) = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\omega \in \Omega \text{ tel que } N_t(\omega) = n - k, N_{t+h}(\omega) - N_t(\omega) = k\}. \tag{40.15}$$

en tenant compte de $N_0(\omega) = 0$ et en prenant la probabilité des deux côtés,

$$P(N_{t+h} = n) = \sum_k P\big(N_t - N_0 = n - k \cap N_{t+h} - N_t = k\big) \tag{40.16a}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} P(N_t - N_0 = n - k)P(N_{t+h} - N_t = k) \tag{40.16b}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} P(N_t = n - k)P(N_{t+h} - N_t = k). \tag{40.16c}$$

[7] Définition 36.13.
[8] Définition 36.9.
[9] Proposition 15.92.

Nous séparons les termes $k=0$, $k=1$ et les autres :

$$\begin{aligned}P(N_{t+h}=n) &= P(N_t=n)P(N_{t+h}-N_t=0)\\ &\quad + P(N_t=n-1)P(N_{t+h}-N_t=1)\\ &\quad + \sum_{k=2}^{n} P(N_t=n-k)P(N_{t+h}-N_t=k).\end{aligned} \tag{40.17}$$

En utilisant la définition de o-Poisson, et (40.14),

$$P(N_{t+h}-N_t=0)=P(N_h-N_0=0)=P(N_h=0)=e^{-\lambda h} \tag{40.18}$$

et

$$P(N_{t+h}-N_t=1)=P(N_{t+h}-N_t\geqslant 1)-P(N_{t+h}-N_t\geqslant 2) \tag{40.19a}$$
$$=\lambda h+\alpha_1(h)-\alpha_2(h)=\lambda h+\alpha(h) \tag{40.19b}$$

De plus, si $k\geqslant 2$ nous avons

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{P(N_{t+h}-N_t)=k}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\frac{P(N_{t+h}-N_t=k)}{|h|} \tag{40.20a}$$
$$\leqslant \lim_{h\to 0}\frac{P(N_{t+h}-N_t\geqslant 2)}{|h|} \tag{40.20b}$$
$$\leqslant \lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{|h|} \tag{40.20c}$$
$$=0. \tag{40.20d}$$

Donc nous avons

$$P(N_{t+h}-N_t=k)=\beta(h) \tag{40.21}$$

avec $\lim_{h\to 0}\beta(h)=0$. En remplaçant (40.18), (40.19) et (40.21) dans (40.17), nous avons

$$p_n(t+h)=p_n(t)e^{-\lambda h}+p_{n-1}(t)(\lambda h+\alpha(h))+\sum_{k=2}^{n}p_{n-k}(t)\beta(h). \tag{40.22}$$

En soustrayant $p_n(t)$, et en divisant par h nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} &= p_n(t)\frac{e^{-\lambda h}-1}{h}\\ &\quad + \lambda p_{n-1}(t)+p_{n-1}(t)\frac{\alpha(h)}{h}\\ &\quad + \sum_{k=2}^{n}p_{n-k}(t)\frac{\beta(h)}{h}.\end{aligned} \tag{40.23}$$

C'est le moment de prendre la limite $h\to 0$. En utilisant la règle de L'Hôpital,

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\lambda h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}(-\lambda e^{-\lambda h})=-\lambda. \tag{40.24}$$

et nous trouvons

$$\begin{cases} p_n'(t)=\lambda\big(p_{n-1}(t)-p_n(t)\big) & (40.25a)\\ p_n(0)=0 & (40.25b)\\ p_0(t)=e^{-\lambda t}. & (40.25c)\end{cases}$$

Nous devons prouver que ce système possède une unique solution donnée par

$$p_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}. \tag{40.26}$$

Nous avons déjà prouvé pour $n=0$. Supposons que $p_k(t)=e^{-\lambda t}(\lambda t)^k/k!$ est l'unique solution pour tout k jusqu'à n et prouvons que nous avons existence et unicité pour $n+1$. En ce qui concerne p_{n+1} nous devons prouver l'existence et l'unicité d'une solution à

$$\begin{cases} y'(t)=\lambda\big(p_n(t)-y(t)\big) & (40.27a)\\ y(0)=0. & (40.27b)\end{cases}$$

En remplaçant $p_n(t)$ par l'hypothèse de récurrence, nous avons l'équation

$$y'(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} - \lambda y(t). \tag{40.28}$$

Si une telle fonction existe, elle est forcément dérivable. Mais sa dérivée est dérivable parce qu'elle est égale à la somme entre une partie C^∞ est λy qui est dérivable. Bref, si une telle fonction existe, elle est de classe C^∞.

En posant

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto \lambda e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^n}{n!} - \lambda v, \end{aligned} \tag{40.29}$$

nous avons l'équation différentielle $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39[10] dit qu'il existe une unique solution. Il n'est pas compliqué de vérifier que la fonction

$$y(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{40.30}$$

vérifie toutes les conditions. □

PROPooGFBEooKgPfaB

Proposition 40.9 ([843]).
Soit un processus o-Poisson (N_t). Nous posons

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } N_t(\omega) \geqslant n\}. \tag{40.31}$$

Alors nous avons l'égalité d'ensembles

$$\{N_t < n\} = \{T_n > t\}. \tag{40.32}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) $\{N_t < n\} \subset \{T_n > t\}$ Soient $t > 0$ et $\omega \in \Omega$ tels que $N_t(\omega) < n$. Vu que l'application $u \mapsto N_u(\omega)$ est croissante, si $N_u(\omega) \geqslant n$, alors $u > t$. Donc $T_n(\omega)$ est l'infimum d'un ensemble contenant uniquement des nombres plus grands que t. Nous en déduisons que

$$T_n(\omega) = \inf\{u \in \mathbb{R} \text{ tel que } N_u(\omega) \geqslant n\} \geqslant t. \tag{40.33}$$

EQooIHSZooGkhSKz

Nous devons encore prouver qu'il est impossible d'avoir $T_n(\omega) = t$. Supposons que $T_n(\omega) = t$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ nous avons $N_{t+\epsilon}(\omega) \geqslant n$. Par la continuité à droite, nous avons

$$N_t(\omega) = \lim_{\epsilon\to 0} N_{t+\epsilon}(\omega) \geqslant n. \tag{40.34}$$

Vu que nous avons supposé que $N_t(\omega) < n$, nous avons une contradiction et nous concluons que $T_n(\omega) \neq t$. Ça, avec (40.33), dit que $T_n(\omega) > t$.

(2) $\{T_n > t\} \subset \{N_t < n\}$ Soit $\omega \in \Omega$ tel que $T_n(\omega) > t$:

$$\inf\{u \geqslant 0 \text{ tel que } N_u(\omega) \geqslant n\} > t. \tag{40.35}$$

Si $N_t(\omega) \geqslant n$, alors $t \in \{u > 0 \text{ tel que } N_u(\omega) \geqslant n\}$ et donc $T_n(\omega) \leqslant t$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

□

LEMooYKOIooAUuivH

Lemme 40.10 ([1]).
Soit une application croissante et continue à droite $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{N}$. Nous supposons que si $f(x_1) = n > 0$, alors il existe $x_2 < x_1$ tel que $f(x_2) = n-1$.

Nous posons

$$x_n = \inf\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \geqslant n\}, \tag{40.36}$$

et nous supposons que x_n existe au sens où il existe x tel que $f(x) \geqslant n$. Alors

ITEMooHSCEooKVtXYn

(1) $f(x_n) = n$

(2) nous avons $x_n - x_{n-1} > \delta$ si et seulement si $f(x_{n-1}+\delta) - f(x_{n-1}) = 0$.

[10] Qui n'est pas cité dans [843]. Est-ce que j'en fais trop ?

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) $\underline{f(x_n) = n}$ Vu que f est croissante, qu'il existe x tel que $f(x) \geqslant n$ et que f passe par les valeurs intermédiaires (entières), il existe t tel que $f(t) = n$. Donc nous avons

$$x_n = \inf\{u \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(u) \geqslant n\} = \inf\{u \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(u) = n\}. \tag{40.37}$$

Nous posons $A = \{u \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(u) = n\}$, et nous savons que A n'est pas vide. Si A contient un seul élément, alors cet élément est l'infimum et nous avons $A = \{x_n\}$, de telle sorte que $f(x_n) = n$.

Nous supposons que A contienne au moins deux éléments. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $x_n + \delta \in A$. Du coup $f(x_n + \delta) = n$ et par croissance, $f(x_n + \epsilon) = n$ pour tout $\epsilon \in]0, \delta]$. En prenant la limite $\epsilon \to 0^+$ et en utilisant la continuité à droite, $f(x_n) = n$.

(2) $\Rightarrow$ Nous supposons que $x_n - x_{n-1} > \delta$ et que $f(x_{n-1} + \delta) \neq f(x_{n-1})$. Par (1), nous savons que $f(x_{n-1} = n - 1)$, et par croissance, nous savons alors que $f(x_{n-1} + \delta) \geqslant n$. Donc

$$x_n = \inf\{x \text{ tel que } f(x) \geqslant n\} \leqslant x_{n-1} + \delta. \tag{40.38}$$

Cela signifie que $x_n - x_{n-1} \leqslant \delta$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Contradiction.

(3) $\Leftarrow$ Nous y allons encore par l'absurde en supposant $f(x_{n-1} + \delta) = f(x_{n-1})$ et $x_n - x_{n-1} \leqslant \delta$. Vu que f est croissante et que $x_{n-1} + \delta \geqslant x_n$, nous avons

$$f(x_{n-1} + \delta) \geqslant f(x_n) = n > n - 1 = f(x_{n-1}). \tag{40.39}$$

Nous avons prouvé que $f(x_{n-1} + \delta) > f(x_{n-1})$, qui est contraire à l'hypothèse.

□

PROPooVLEEooLvCknn

Proposition 40.11 ([843]).
Soit un processus o-Poisson (N_t). Nous posons

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } N_t(\omega) \geqslant n\}. \tag{40.40}$$

Alors

$$N_{T_n(\omega)}(\omega) = n \tag{40.41}$$

pour tout $\omega \in \Omega$.

Démonstration. En fixant $\omega \in \Omega$, et en posant $f(t) = N_t(\omega)$, la fonction f vérifie les hypothèses du lemme 40.10. Nous concluons avec 40.10(1). □

PROPooIQPSooHtbFBt

Proposition 40.12 ([843]).
Soit un processus o-Poisson (N_t). Nous posons

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } N_t(\omega) \geqslant n\}. \tag{40.42}$$

Alors

(1) Pour chaque n, la variable aléatoire $T_n - T_{n-1}$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.

(2) Les variables aléatoires $T_n - T_{n-1}$ sont indépendantes.

Démonstration. Nous considérons la proposition 40.9 avec $n = 1$: $P(N_t = 1) = P(T_1 > t)$. Vu que $N_t(\omega) \in \mathbb{N}$ pour tout ω, nous avons $\{N_t < 1\} = \{N_t = 0\}$ et donc, en utilisant la proposition 40.8,

$$P(T_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}. \tag{40.43}$$

En fixant $\omega \in \Omega$, et en posant $f(t) = N_t(\omega)$, la fonction f vérifie les hypothèses du lemme 40.10. Pour $t > 0$ fixé, nous avons $T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega) > t$ si et seulement si $N_{T_{n-1}(\omega)+t}(\omega) - N_{T_{n-1}(\omega)}(\omega) = 0$. Autrement dit,

EQooVHJOooTVvnzw

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega) > t\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } N_{T_{n-1}(\omega)+t}(\omega) - N_{T_{n-1}(\omega)}(\omega) = 0\}. \tag{40.44}$$

Et donc, en ce qui concerne les probabilités,

$$P(T_n - T_{n-1} > t) = P(N_{T_{n-1}+t} - N_{T_{n-1}} = 0). \tag{40.45}$$

En utilisant les accroissements indépendants,

$$\begin{aligned} P(T_n - T_{n-1} > t) &= P(N_{T_{n-1}+t} - N_{T_{n-1}} = 0) && (40.46a)\\ &= P(N_t - N_0 = 0) && (40.46b)\\ &= P(N_t = 0) && (40.46c)\\ &= e^{-\lambda t}. && (40.46d) \end{aligned}$$

Cela prouve que $T_n - T_{n-1}$ suit une loi exponentielle par la proposition 36.152.

Nous prouvons à présent que les $T_n - T_{n-1}$ sont indépendants. Nous repartons de (40.44) que nous recopions de façon plus compacte :

$$\{T_n - T_{n-1} > t\} = \{N_{T_{n-1}+t} - N_{T_{n-1}} = 0\}. \tag{40.47}$$

Nous avons donc

$$\{T_n - T_{n-1} > t\} \cap \{T_k - T_{k-1} > u\} = \{N_{T_{n-1}+t} - N_{n-1} = 0\} \cap \{N_{T_{k-1}+u} - N_{T_{k-1}} = 0\}. \tag{40.48}$$

À droite, les événements sont indépendants, donc

$$\begin{aligned} P(T_n - T_{n-1} > t, T_k - T_{k-1} > u) &= P(N_{T_{n_1}+t} - N_{T_{n-1}} = 0)P(N_{T_{k-1}+u} - N_{T_{k-1}} = 0) && (40.49a)\\ &= P(T_n - T_{n-1} > t)P(T_k - T_{k-1} > u). && (40.49b) \end{aligned}$$

La proposition 36.153 conclut que $T_n - T_{n-1}$ et $T_k - T_{k-1}$ sont indépendants. □

PROBooNZCUooMteOpL

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 40.13

Je ne suis pas sûr du tout de l'énoncé de la proposition 40.14. D'abord la source [843] ne donne pas le facteur e^{t-t_n} (mais je ne suis pas convaincu de la preuve donnée). Ensuite, j'aurais été nettement plus convaincu avec un changement de signe dans l'exponentielle : $e^{-(t-t_n)}$.

Essayez de répondre à cette question :

https://math.stackexchange.com/questions/4957480/density-of-the-vector-of-jump-times-in-a-poisson-process

PROPooEUVXooERgwIe

Proposition 40.14 ([843, 1])**.**
La densité conditionnelle de $(T_1, \dots, T_n)$ sachant $\{N_t = n\}$ est donnée par

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{1}_{\{0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_n\}} \frac{n!}{t^n} e^{t-t_n}. \tag{40.50}$$

Démonstration. Nous commençons par prouver cette égalité d'ensembles :

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{T_i = t_i\} \cap \{N_t = n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{T_i - T_{i-1} = t_i - t_{i-1}\} \cap \{T_{n-1} - T_n = t - t_n\}. \tag{40.51}$$

EQooOKVVooTZSpGq

(1) **Dans un sens** Nous considérons $\omega \in \Omega$ tel que

$$\begin{cases} T_i(\omega) = t_i & i = 1, \dots, n \\ N_t(\omega) = n. \end{cases} \begin{matrix} \text{SUBEQooIZXNooNxrpnC} \\ \text{SUBEQooYSCVooMGOMqZ} \end{matrix} \begin{matrix} (40.52a)\\ (40.52b) \end{matrix}$$

et nous voulons prouver que

$$\begin{cases} T_i(\omega) - T_{i-1}(\omega) = t_i - t_{i-1} & i = 1, \dots, n \\ T_{n-1}(\omega) - T_n(\omega) > t - t_n. \end{cases} \begin{matrix} \text{SUBEQooDBKLooSixBrh} \\ \text{SUBEQooEHYAooCSFDXS} \end{matrix} \begin{matrix} (40.53a)\\ (40.53b) \end{matrix}$$

Les égalités (40.53a) sont immédiates à partir des égalités (40.52a). En ce qui concerne (40.53b), nous avons $T_{n+1}(\omega) - T_n(\omega) = T_{n+1}(\omega) - t_n$. Nous devons donc prouver que $T_{n+1}(\omega) > t$.

En utilisant la proposition 40.11 et (40.52b), nous avons $N_{T_{n+1}(\omega)}(\omega) = n + 1$ et $N_t(\omega) = n$. Par croissance de $u \mapsto N_u(\omega)$, nous avons $T_{n+1}(\omega) > t$.

(2) **Dans l'autre sens** Nous supposons maintenant que

$$\begin{cases} T_i(\omega) - T_{i-1}(\omega) = t_i - t_{i-1} & i = 1, \dots, n \\ T_{n-1}(\omega) - T_n(\omega) > t - t_n, \end{cases} \begin{matrix} \text{SUBEQooXKXPooWHrXhb} \\ \end{matrix} \begin{matrix} (40.54a)\\ (40.54b) \end{matrix}$$

et nous prouvons que

$$\begin{cases} T_i(\omega) = t_i & i = 1, \dots, n \\ N_t(\omega) = n. \end{cases} \begin{matrix} (40.55a)\\ (40.55b) \end{matrix}$$

Nous savons que $T_0(\omega)=0$. Donc (40.54a) avec $i=1$ donne $T_1(\omega)-0=t_1-t_0$, c'est-à-dire $T_1(\omega)=t_1$. Nous continuons de proche en proche pour obtenir $T_i(\omega)=t_i$. Le dernier est

$$T_n(\omega)-T_{n-1}(\omega)=t_n-t_{n-1}, \tag{40.56}$$

et donc encore $T_n(\omega)=t_n$.

Nous avons aussi

$$T_{n+1}(\omega)-T_n(\omega)>t-t_n, \tag{40.57}$$

et donc $T_{n+1}(\omega)-t_n>t-t_n$, ce qui signifie $T_{n+1}(\omega)>t$, et donc $N_t(\omega)<n+1$. Mais comme $t\geqslant t_n$ et $N_{t_n}(\omega)=n$, nous avons bien $N_t(\omega)\geqslant n$ et donc $N_t(\omega)=n$.

Cela prouve l'égalité (40.51).

En notant $X_i=T_i-T_{i-1}$, nous avons

$$T_k=\sum_{l=1}^{k}X_l. \tag{40.58}$$

Donc la loi de T_k est celle d'une somme de variables aléatoires exponentielles indépendantes.

Oh zut ! cette démonstration n'est pas terminée ! Si tu sais comment la terminer, écris-moi. □

PROPooGMBBooCIkVCB

Proposition 40.15 ([847]).
Soit un processus de o-Poisson (N_t). Pour tout $t\geqslant 0$ nous avons

$$\lim_{h\to 0^+}P\big(N_{t+h}-N_t\geqslant 1\big)=0. \tag{40.59}$$

LEMooXTVNooSBnnAd

Lemme 40.16 ([1]).
Soit un processus de o-Poisson $\{N_t\colon\Omega\to\mathbb{N}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ d'intensité λ. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$ nous posons

$$\begin{aligned}T_n\colon\Omega&\to\mathbb{R}\\ \omega&\mapsto\inf\{t\geqslant 0\text{ tel que }N_t(\omega)\geqslant n\}.\end{aligned} \tag{40.60}$$

Soit $h>0$.

ITEMooXVSQooSQmIUv

(1) Il existe une partie de mesure nulle[11] *$Z\in\Omega$ telle que $\{T_n\leqslant h\}\subset\{N_h\geqslant n\}\cup Z$.*

ITEMooIPKCooIfjUzS

(2) Nous avons $\{N_h\geqslant n\}\subset\{T_n\leqslant h\}$.

(3) Au final,

$$P(T_n\leqslant h)=P(N_h\geqslant n). \tag{40.61}$$

Démonstration. En plusieurs parties

(1) $\{T_n\leqslant h\}\subset\{N_n\geqslant n\}\cup Z$ Soit $\omega\in\{T_n\leqslant h\}$. Cela signifie que

$$\inf\{t\geqslant 0\text{ tel que }N_t(\omega)\geqslant n\}\leqslant h. \tag{40.62}$$

Si $T_n(\omega)<h$, alors $N_h(\omega)\geqslant n$, et le point est démontré.

Nous prouvons maintenant que $Z=\{T_n=h\}\cap\{N_h\leqslant n\}$ est de mesure nulle. Soient $\omega\in Z$ ainsi que $\epsilon>0$. Vu que $T_n(\omega)=h$, nous avons $N_{h+\epsilon}(\omega)\geqslant n$. Donc, pour $\omega\in Z$ nous avons

$$N_{h+\epsilon}(\omega)-N_h(\omega)\geqslant 1. \tag{40.63}$$

En posant $Z_\epsilon=\{N_{h+\epsilon}-N_h\geqslant 1\}$, nous avons donc $Z\subset Z_\epsilon$ pour tout ϵ. Nous avons alors, pour tout ϵ, que $P(Z)\leqslant P(Z_\epsilon)$. Mais la proposition 40.15 nous indique que $\lim_{\epsilon\to 0}P(Z_\epsilon)=0$. Donc $P(Z)=0$.

(2) $\{N_h\geqslant n\}\subset\{T_n\leqslant h\}$ Soit $\omega\in\Omega$ satisfaisant $N_h(\omega)\geqslant n$. C'est direct parce que si $N_h(\omega)\geqslant n$, alors

$$T_n(\omega)=\inf\{y\geqslant 0\text{ tel que }N_t(\omega)\geqslant n\}\leqslant h. \tag{40.64}$$

(3) **Les probabilités** Le point (1) donne

$$P(T_n\leqslant h)\leqslant P(N_h\geqslant n)+P(Z)=P(N_h\geqslant n), \tag{40.65}$$

le point (2) donne $P(N_h\leqslant n)\leqslant P(T_n\leqslant h)$. Au final, nous avons l'égalité des probabilités.

[11] Cette subtilité est manquante dans [882, 843, 883]. Plus généralement, je ne l'ai vue nulle part. Si vous savez démontrer que les événements $T_n\leqslant h$ et $N_h\geqslant n$ sont égaux, dites-le moi.

□
LEMooJHMTooQWvOaI

Lemme 40.17 ([883]).
Soient $\lambda > 0$ et $t > 0$. Nous posons

$$I_n = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx. \tag{40.66}$$

Alors

$$I_{n+1} = I_n - e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \tag{40.67}$$

Démonstration. Nous intégrons I_{n+1} par partie en posant $u(x) = x^n$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; $u'(x) = nx^{n-1}$, $v(x) = -e^{-\lambda x}$. Cela donne

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^t v'(x)u(x)dx && (40.68a)\\ &= \frac{\lambda^n}{n!} \left[-x^n e^{-\lambda x}\right]_0^t + \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^t nx^{n-1} e^{-\lambda x} dx && (40.68b)\\ &= -\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + I_n && (40.68c) \end{aligned}$$

□

Lemme 40.18 ([1]).
Soit un processus de o-Poisson $\{N_t : \Omega \to \mathbb{N}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ d'intensité λ. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous posons

$$\begin{aligned} T_n : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \inf\{t \geqslant 0 \text{ tel que } N_t(\omega) \geqslant n\}. \end{aligned} \tag{40.69}$$

Soit $t \geqslant 0$. Pour tout n nous avons

$$P(T_n \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx. \tag{40.70}$$
EQooRHQLooVxFfjV

Démonstration. Nous y allons par récurrence sur n. D'abord pour $n = 0$ nous savons que $T_0 = 0$, donc

$$P(N_n = 0) = P(T_0 \leqslant t) - P(T_1 \leqslant t). \tag{40.71}$$
EQooNCMMooHnvIpQ

Nous savons que $N_{s+t} - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre λt. En particulier avec $s = 0$, nous voyons que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt. Donc $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$ (définition 36.149).

L'équation 40.71 donne donc $e^{-\lambda t} = 1 - P(T_1 \leqslant t)$. Par ailleurs, pour $n = 1$, l'intégrale (40.70) est facile à calculer et donne bien $1 - e^{-\lambda t}$.

Pour la récurrence, en reprenant la notation du lemme 40.17, nous supposons que $P(T_n \leqslant t) = I_n$, et nous prouvons que $P(T_{n+1} \leqslant t) = I_{n+1}$. Pour cela nous repartons de

$$P(N_t = n) = P(T_n \leqslant t) - P(T_{n+1} \leqslant t), \tag{40.72}$$

et nous substituons $P(N_t = n) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$ ainsi que $P(T_n \leqslant t) = I_n$. Il reste

$$P(T_{n+1} \leqslant t) = I_n - e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \tag{40.73}$$

Et le lemme 40.17 nous indique que le tout est égal à I_{n+1}. □

Voici un théorème donnant des propriétés d'un processus de o-Poisson. Une réciproque partielle est donnée dans la proposition 36.161.

THOooYRIMooSREVEO

Théorème 40.19 ([884, 847, 1]).
Soit un processus de o-Poisson $\{N_t : \Omega \to \mathbb{N}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ d'intensité λ. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous posons

$$\begin{aligned} T_n : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \inf\{t \geqslant 0 \text{ tel que } N_t(\omega) \geqslant n\}. \end{aligned} \tag{40.74}$$

et $S_k = T_k - T_{k-1}$.

Alors

ITEMooSLWOooRjYhBA

(1) T_n *est une variable aléatoire.*

ITEMooHGXTooOdonXa

(2) *Pour tout* n*, la variable aléatoire* $(T_1, \dots, T_n)$ *a pour densité*[12] *la fonction*

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \mathbb{1}_{0\leqslant x_1\leqslant \dots \leqslant x_n} \lambda^n e^{-\lambda x_n}. \end{aligned} \tag{40.75}$$

ITEMooGBIXooSjXpsx

(3) *Les variables aléatoires* S_i *sont à densité.*

ITEMooUTTWooOUhkZh

(4) *La variable aléatoire* $(S_1, \dots, S_n)$ *est à densité.*

ITEMooUZGFooAbCvvG

(5) (S_n) *est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle*[13] $\mathscr{E}(\lambda)$.

ITEMooDXZFooXkklhG

(6) *La variable aléatoire* T_n *suit la loi de densité*

$$\begin{aligned} f_n\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto \begin{cases} \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda s} (\lambda s)^{n-1} & si\ s \geqslant 0 \\ 0 & sinon. \end{cases} \end{aligned} \tag{40.76}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

Pour (1)

Pour (2)

Soient des nombres a_i et b_i tels que

$$0 < a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_n < b_n. \tag{40.77}$$

Pour éviter les petits effets de bord, nous supposons que $n > 2$. Nous considérons les événements

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n} \{T_i \in]a_i, b_i[\} \tag{40.78}$$

et

$$B_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} \{N_{b_i} - N_{a_i} = 1\} \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} \{N_{a_{i+1}} - N_{b_i} = 0\} \cap \{N_{b_n} - N_{a_n} \geqslant 1\} \cap \{N_{a_1} = 0\}, \tag{40.79}$$

et nous allons prouver qu'il existe des parties Y et Z de Ω telles que[14]

$$\begin{cases} A_n \subset B_n \cup Y & (40.80a) \\ B_n \subset A_n \cup Z & (40.80b) \\ P(Y) = P(Z) = 0. & (40.80c) \end{cases}$$

Courage.

(1) **Quelques valeurs au bord dans A_n** Soit $\omega \in A_n$.

(1a) **Si $i < n$** Nous montrons que si $i < n$, alors SYSooCWKCooLtrVhn

$$\begin{cases} N_{a_i}(\omega) = i - 1 & (40.81a) \\ N_{b_i}(\omega) \in \{i-1, i\}. & (40.81b) \end{cases}$$

Pour cela, rien de tel qu'une récurrence. D'abord

$$T_1(\omega) = \inf\{t \geqslant 0 \text{ tel que } N_t(\omega) \geqslant 1\} \in]a_1, b_1]. \tag{40.82}$$

[12] Définition 36.5.
[13] Définition 36.151.
[14] Je suis impressionné à quel point cette subtilité est absente de [847]. Soit il y a un truc macroscopique qui m'échappe, soit il y a un gros trou dans les livres sur lesquels est basé [847], soit il y a quelque chose que je ne comprends pas.

Donc $T_1(\omega) > a_1$ et nous déduisons que $N_{a_1}(\omega) = 0$. De la même manière[15],

$$T_2(\omega) = \inf\{t \geqslant 0 \text{ tel que } N_t(\omega) \geqslant 2\} \in]a_2, b_2]. \tag{40.83}$$

En particulier $T_2(\omega) > a_2 > b_1$ et nous avons $N_{b_1}(\omega) < 2$. Donc $N_{b_1} \in \{0, 1\}$.

Soit $i < n-1$, et supposons que (40.81) soit valide. Nous avons $T_i(\omega) \leqslant b_i$, et donc $N_{b_i+h}(\omega) \geqslant i$ pour tout $h > 0$. En particulier $N_{a_{i+1}}(\omega) \geqslant i$. Mais $T_{i+1}(\omega) > a_{i+1}$. Donc $N_{a_{i+1}}(\omega) < i+1$. Nous en déduisons que $N_{a_{i+1}}(\omega) = i$.

Comme $i + 1 < n$ nous pouvons encore écrire

$$T_{i+2}(\omega) > a_{i+2} > b_{i+1}, \tag{40.84}$$

donc $N_{b_{i+1}}(\omega) < i + 2$. Vu que $N_{b_{i+1}}(\omega) \geqslant N_{a_{i+1}}(\omega) = i$, nous avons $N_{b_{i+1}}(\omega) \in \{i, i + 1\}$.

(1b) **Pour $i = n$** De la même manière, nous avons $N_{a_n} < n$, et $T_{n-1}(\omega) < a_n$. Nous en déduisons $N_{a_n}(\omega) \geqslant n - 1$ et donc $N_{a_n} = n - 1$.

Nous avons aussi $N_{b_n}(\omega) \geqslant n - 1$ et, vu que $T_n(\omega) \in]a_n, b_n]$, nous avons $N_{b_n+h}(\omega) \geqslant n$ pour tout $h > 0$.

(2) **Une partie de mesure nulle** Pour $i = 1, \ldots, n$, nous posons $Z_i = \{N_{b_i} = i - 1\}$. Ensuite nous définissons $Z = \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$. Nous démontrons que $P(Z \cap A_n) = 0$. Si $\omega \in Z \cap A_n$, alors $N_{b_i}(\omega) = i - 1$ et $N_{b_i+h}(\omega) \geqslant i$ pour tout $h > 0$. Donc

$$Z_i \cap A_n \subset \{N_{b_i+h} - N_{b_i} \geqslant 1\}. \tag{40.85}$$

Donc

$$P(Z_i \cap A_n) \leqslant P\big(\{N_{b_i+h} - N_{b_i} \geqslant 1\}\big). \tag{40.86}$$

En prenant la limite $h \to 0^+$, la proposition 40.15 fait que

$$P(Z_i \cap A_n) = 0. \tag{40.87}$$

Nous en déduisons que $P(Z \cap A_n) = 0$.

(3) $A_n \subset B_n \cup Z$ Soit $\omega \in A_n$. Nous devons montrer que si $\omega \notin Z$, alors $\omega \in B_n$, c'est-à-dire

(3a) $N_{b_i}(\omega) - N_{a_i}(\omega) = 1$ pour $i = 1, \ldots, n - 1$,

(3b) $N_{a_{i+1}}(\omega) - N_{b_i}(\omega) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n - 1$,

(3c) $N_{b_n}(\omega) - N_{a_n}(\omega) \geqslant 1$

(3d) $N_{a_1}(\omega) = 0$

Si $i \leqslant n - 1$, alors $N_{a_i}(\omega) = i - 1$ et $N_{b_i}(\omega) \in \{i - 1, i\}$. Mais si ω n'est pas dans Z, alors $N_{b_i}(\omega) = i$. Dans ce cas, nous avons bien $\omega \in \{N_{b_i} - N_{a_i} = 1\}$.

De même si ω est dans A_n mais pas dans Z, il vérifie $N_{a_{i+1}}(\omega) = i = N_{b_i}(\omega) = i$.

Pour $i = n$, nous avons $N_{a_n}(\omega) = n - 1$ et $N_{b_n}(\omega) \geqslant n - 1$. Et encore une fois, si ω n'est pas dans Z, alors $N_{a_n}(\omega) - N_{b_n}(\omega) \geqslant 1$.

Enfin pour $\omega \in A_n$, nous avons $T_1(\omega) = \inf\{t \geqslant 0 \text{ tel que } N_t(\omega) \geqslant 1\} > a_1$. Donc $N_{a_1}(\omega) = 0$.

Nous avons fini de prouver que $A_n \subset B_n \cup Z$.

(4) $P(A_n) \leqslant P(B_n)$ En utilisant le lemme 14.23(2), et (4), nous avons

$$P(A_n) \leqslant P(B_n \cup Z) \leqslant P(B_n) + P(Z) = P(B_n). \tag{40.88}$$

EQooGLVAooGGSZYn

(5) **Quelques valeurs au bord pour B_n** Soit $\omega \in B_n$. Nous avons $N_{a_1}(\omega) = 0$. Donc

$$T_1(\omega) = \inf\{t \geqslant 0 \text{ tel que } N_t(\omega) \geqslant 1\} \geqslant a_1. \tag{40.89}$$

De même nous prouvons les valeurs suivantes. Pour $i < n$ nous avons :

$$\begin{cases} N_{a_i}(\omega) = i - 1 & \text{(40.90a)} \\ N_{b_i}(\omega) = i & \text{(40.90b)} \end{cases}$$

[15] Nous utilisons le fait que $n > 2$ pour être sûr ; mais je crois que ce n'est pas nécessaire.

et pour $i = n$ nous avons

$$\begin{cases} N_{a_n}(\omega) = n - 1 & (40.91a) \\ N_{b_n}(\omega) \geqslant n. & (40.91b) \end{cases}$$

Nous avons donc l'appartenance

$$T_i(\omega) \in [a_i, b_i] \tag{40.92}$$

EQooVYVJooHEshGE

pour tout $i \leqslant n$.

Cela n'est pas suffisant pour dire que $\omega \in A_n$ parce que la possibilité $T_i(\omega) = a_i$ n'est pas exclue.

(6) **Une partie de mesure nulle** Nous posons $Y_i = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } T_i(\omega) = a_i\}$, et nous prouvons que $P(Y_i \cap B_n) = 0$. Pour $\omega \in Y_i \cap B_n$ nous avons $N_{a_i}(\omega) = i - 1$ et $N_{a_i+h}(\omega) = i$ pour tout $h > 0$. Donc pour tout $h > 0$ nous avons

$$Y_i \cap B_n \subset \{N_{a_i+h} - N_{a_i} \geqslant 1\}, \tag{40.93}$$

et donc

$$P(Y_i \cap B_n) \leqslant P\big(N_{a_{i+h}} - N_{a_i} \geqslant 1\big). \tag{40.94}$$

En utilisant à nouveau le lemme 40.15, nous trouvons $P(Y_i \cap B_n) = 0$.

Nous posons $Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$.

(7) $P(B_n) \leqslant P(A_n)$ Si $\omega \in B_n$, nous avons (40.92) : $T_i(\omega) \in [a_i, b_i]$. Par définition de Y, si $\omega \in B_n \setminus Y$ nous avons

$$T_i(\omega) \in]a_i, b_i]. \tag{40.95}$$

Autrement dit, $B_n \setminus Y \subset A_n$ et donc $B_n \subset A_n \cup Y$. Nous en déduisons que

$$P(B_n) \leqslant P(A_n \cup Y) \leqslant P(A_n) + P(Y) = P(A_n). \tag{40.96}$$

EQooWQZPooPBjPsG

(8) $P(A_n) = P(B_n)$ En mettant ensemble (40.88) et (40.96) nous avons

$$P(A_n) = P(B_n). \tag{40.97}$$

Calculons la probabilité de B_n. Vu que $N_0 = 0$, l'événement $N_{a_i} = 0$ peut être écrit $N_{a_i} - N_0 = 0$. Donc B_n peut être écrit comme intersection d'incréments indépendants. Nous pouvons donc écrire $P(A_n)$ comme un produit :

$$P(A_n) = \prod_{i=1}^{n-1} P(N_{b_i} - N_{a_i} = 1) \times \prod_{i=1}^{n-1} P(N_{a_{i+1}} - N_{b_i} = 0) \times P(N_{b_n} - N_{a_n} \geqslant 1) \times P(N_{a_1} = 0). \tag{40.98}$$

En posant $l_i = b_i - a_i$ et $\delta_i = a_{i+1} - b_i$ et en utilisant la formule (36.455) pour

$$P(N_{s+t} - N_s = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \tag{40.99}$$

nous trouvons

$$P(A_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda l_i) e^{-\lambda l_i} \times \prod_{i=1}^{n-1} e^{-\lambda \delta_i} \times e^{-\lambda a_1} (1 - e^{-\lambda l_n}). \tag{40.100}$$

Note : pour le dernier nous avons posé $X = N_{b_n} - N_{a_n}$ qui suit une loi exponentielle de paramètre λl_n et nous avons dit $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{\lambda l_n}$. Remarquez que $l_i + \delta_i = a_{i+1} - a_i$; en regroupant les exponentielles, nous avons une somme téléscopique ; au final

$$P(A_n) = \lambda^{n-1} e^{-\lambda a_n} (1 - e^{-\lambda l_n}) \prod_{i=1}^{n-1} (l_i). \tag{40.101}$$

Pour le plaisir d'ajouter des notations, nous posons $I_n =]a_1, b_1] \times \ldots \times]a_n, b_n]$. Cela permet d'écrire

$$A_n = \{(T_1, \ldots, T_n) \in I_n\} \tag{40.102}$$

et nous incite à calculer $\int_{I_n} g$. Pour alléger le calcul suivant, notez que

$$\int_a^b e^{-\lambda t} dt = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_a^b = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} \big(1 - e^{-\lambda(b-a)}\big). \tag{40.103}$$

EQooFXPWooRDBkUE

Ensuite nous calculons pour de vrai :

$$\begin{aligned}
\int_{I_n} g(x_1,\dots,x_n) &= \int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_n}^{b_n} \mathbb{1}_{x_1\leqslant\dots\leqslant x_n}\lambda^n e^{-\lambda x_n}\,dx_1\dots dx_n && (40.104a)\\
&= \int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_n}^{b_n} \lambda^n e^{-\lambda x_n}\,dx_1\dots dx_n && \text{cf. justif.} \quad (40.104b)\\
&= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} l_i\Big)\int_{a_n}^{b_n}\lambda^n e^{-\lambda x_n}dx_n && (40.104c)\\
&= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} l_i\Big)\lambda^n\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a_n}\big(1-e^{-\lambda(b_a-a_n)}\big) && \text{eq. (40.103)} \quad (40.104d)\\
&= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} l_i\Big)\lambda^{n-1}e^{-\lambda a_n}\big(1-e^{-\lambda l_n}\big) && (40.104e)\\
&= P(A_n) && (40.104f)\\
&= P\big((T_1,\dots,T_n)\in I_n\big). && (40.104g)
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (40.104b). Vu que nous avons choisi $a_1<b_1<\dots<a_n<b_n$, nous avons toujours $\mathbb{1}_{0\leqslant x_1\leqslant\dots\leqslant x_n}=1$. La fonction à intégrer ne dépend pas de $x_1,\dots,x_{n-1}$. Les intégrales sur $x_1,\dots,x_{n-1}$ sont immédiates, et nous avons

Nous savons que les T_i sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Donc sur les pavés N contenant des coordonnées négatives, nous avons $P\big((T_1,\dots,T_n)\in N\big)=0$. Heureusement nous avons aussi $\int_N g(x)dx=0$.

En prenant tous les pavés I_n ainsi que tous ceux avec des coordonnées négatives, nous engendrons les boréliens. Le lemme 36.38 conclut que la fonction g proposée est une densité pour $(T_1,\dots,T_n)$.

Pour (3)

Pour (4)

Pour (5)

(1) **Densité pour $(S_1,\dots,S_n)$**

Le point (4) nous indique que $(S_1,\dots,S_n)$ est à densité. Nous notons $h\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sa densité. Soit une application borélienne $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. En posant

$$\begin{aligned}
m\colon\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}^n\\
(t_1,\dots,t_n)&\mapsto(t_1,t_2-t_1,\dots,t_n-t_{n-1}),
\end{aligned} \tag{40.105}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
E\big(f(S_1,\dots,S_n)\big) &= E\big(f(T_1,T_2-T_1,\dots,T_n-T_{n-1})\big) && (40.106a)\\
&= E\big((f\circ m)(T_1,\dots,T_n)\big) && (40.106b)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(f\circ m)(x)g(x)dx && (40.106c)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(f\circ m\circ\phi)(x)(g\circ\phi)(x)dx && (40.106d)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(g\circ\phi)(x)dx && (40.106e)\\
& && (40.106f)
\end{aligned}$$

Justifications.

- Pour (40.106c), c'est le lemme 36.99(2).

- Pour (40.106d), nous effectuons le changement de variables[16] pour la bijection linéaire

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (t_1,\dots,t_n) &\mapsto \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1+t_2 \\ \vdots \\ t_1+\dots+t_n \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{40.107}$$

  Notons que ϕ est de déterminant 1 : c'est une matrice triangulaire avec des 1 sur la diagonale.
- Pour (40.106e). Parce que $(m\circ\phi)(x)=x$ dans $\mathbb{R}^n$.

Bref, pour toute application borélienne $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, nous avons

$$E\big(f(S_1,\dots,S_n)\big)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(g\circ\phi)(x)dx. \tag{40.108}$$

Le lemme 36.101 nous indique que $g\circ\phi$ est une densité pour $(S_1,\dots,S_n)$. Plus explicitement, la densité de $(S_1,\dots,S_n)$ est

$$\begin{aligned}h\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n_+}(x)\lambda^n e^{-\lambda(x_1+\dots+x_n)}.\end{aligned} \tag{40.109}$$

(2) **Densités marginales** La proposition 36.102 nous assure que les variables aléatoires S_i sont à densité et que pour trouver les densités, il suffit d'intégrer. La densité de S_i est

$$h_i(t)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n_+}(x_1,\dots,t,\dots,x_n)e^{-\lambda x_1-\dots-\lambda t-\dots-\lambda x_n} \tag{40.110}$$

Les différentes intégrales sont indépendantes et valent

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(u)e^{-\lambda u}du=\Big[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda u}\Big]_0^\infty \tag{40.111a}$$

$$=-\frac{1}{\lambda}(0-1) \tag{40.111b}$$

$$=\frac{1}{\lambda}. \tag{40.111c}$$

Au final, nous avons

$$h_i(u)=\mathbb{1}_{[0,\infty[}(u)\lambda e^{-\lambda u}. \tag{40.112}$$ EQooBZNBooHGeaQx

(3) **Conclusions** Nous voyons que (40.112) est la densité d'une loi exponentielle (définition 36.151). La proposition 36.103(2) nous dit que les S_i sont indépendantes.

Pour (6)

C'est la proposition 36.154.

□

Proposition 40.20 (Loi des grands nombres)**.**
Si (N_t) est un processus de o-Poisson d'intensité λ, alors

$$\lim_{t\to\infty} N_t=+\infty \tag{40.113}$$

presque surement. De plus

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=\lambda \tag{40.114}$$ EqvaVYAs

presque surement.

.

[16] Formule (14.861).

Démonstration. Par définition nous savons que

$$N_t = \sup\{n \geqslant 0 \text{ tel que } S_n \leqslant t\}. \tag{40.115}$$

Évidemment la fonction $t \mapsto N_t$ est croissante, donc la limite

$$\lim_{t\to\infty} N_t(\omega) \tag{40.116}$$

existe dans $[0,\infty]$. Nous pouvons nous restreindre à $t \in \mathbb{N}$ et considérer $L(\omega) = \lim_{n\to\infty} N_n(\omega)$. Par somme télescopique avec $N_0 = 0$,

$$\frac{N_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(N_k - N_{k-1})}{n}. \tag{40.117}$$

Étant donné que le processus est de Poisson, les variables aléatoires $(N_k - N_{k-1})_{k=1,\ldots,n}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de $N_1 - N_0$, c'est-à-dire la loi de N_1. Encore par le fait que N_t soit de Poisson nous savons que $N_1 \sim \mathscr{P}(\lambda)$. La loi des grands nombres (36.129) appliquée aux variables aléatoires $N_k - N_{k-1}$ nous dit que

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{p.s.} E(N_1) = \lambda > 0. \tag{40.118}$$

Du coup $N_n \to \infty$ et $L(\omega) = \infty$.

Nous démontrons maintenant la loi des grands nombres pour les processus de Poisson. Étant donné que pour les entiers $N_n/n \to \lambda$, pour les réels, si la limite existe, ça ne peut pas être autre chose. Si nous notons $\bar{t}$ la partie entière de $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{N_t}{t} = \frac{N_t - N_{\bar{t}}}{t} + \frac{N_{\bar{t}}}{t}. \tag{40.119}$$

Le second terme est relativement simple à traiter :

$$\frac{N_{\bar{t}}}{t} = \underbrace{\frac{N_{\bar{t}}}{\bar{t}}}_{\to\lambda} \cdot \underbrace{\frac{\bar{t}}{t}}_{\to 1}. \tag{40.120}$$

où nous avons utilisé le premier point, $\bar{t}$ étant entier. Pour le premier terme nous savons que $t \mapsto N_t$ est croissante et donc que

$$\frac{N_t - N_{\bar{t}}}{t} \leqslant \frac{N_{\bar{t}+1} - N_{\bar{t}}}{t} = \frac{N_{\bar{t}+1} - N_{\bar{t}}}{\bar{t}+1}\frac{\bar{t}+1}{t}. \tag{40.121}$$

Le second facteur tend vers 1 lorsque $t \to \infty$. Le premier s'écrit

$$\frac{N_n - N_{n-1}}{n} \tag{40.122}$$

et tend vers zéro en tant que terme général de la série (40.117) qui converge. □

40.1.5 Équivalence de définitions

40.1.6 Estimateurs

Proposition 40.21.
La variable aléatoire N_t/t est un estimateur sans biais de λ. De plus il converge vers λ en moyenne quadratique.

Démonstration. Vu que $N_t/t \to \lambda$ presque surement, la variable aléatoire N_t/t est un estimateur de λ. Le fait qu'il soit sans biais a été fait dans l'exemple 37.25.

D'autre part nous avons (voir théorème 36.150)

$$\operatorname{Var}\left(\frac{N_t}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\operatorname{Var}(N_t) = \frac{\lambda}{t}. \tag{40.123}$$

En appliquant la formule $\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ à $X = N_t/t$ nous trouvons

$$E\left(\frac{N_t^2}{t^2}\right) = \frac{\lambda}{t} + \lambda^2. \tag{40.124}$$

Cela montre que $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{L^2} \lambda$. □

Pour le théorème central limite d'un processus de Poisson, nous visons un résultat du style de

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_i X_i - mn}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1). \tag{40.125}$$

Nous écrivons le théorème central limite pour le nombre de sauts que le processus de Poisson a connu en un temps t. Le rôle de la moyenne empirique est joué par N_t. Nous considérons avoir fait *une seule expérience* qui a duré un temps t. Donc le rôle de n est joué par 1 (et non t comme on pourrait le croire). Pour le reste, le nombre de succès en un temps t d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λt, en vertu de ce qui est raconté au point 36.6.8. C'est cela qui motive l'énoncé suivant.

ThoCSuLLo

Théorème 40.22 (Théorème central limite pour les processus de Poisson)**.**
Si $(N_t)_{t>0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ, alors nous avons

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1). \tag{40.126}$$

Remarque 40.23.
Avant de nous lancer dans la démonstration, remarquons que si nous nous limitons à $t \in \mathbb{N}$, alors nous avons

$$\frac{N_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(N_k - N_{k-1}) - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} \tag{40.127}$$

or par définition nous avons les égalités de lois

$$N_k - N_{k-1} \sim N_1 \sim \mathscr{P}(\lambda), \tag{40.128}$$

donc

$$\frac{S_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} = \frac{\frac{1}{n}S_n - \lambda}{\frac{\sqrt{\lambda n}}{n}} = \frac{\frac{1}{n}S_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}/\sqrt{n}}, \tag{40.129}$$

ce qui est exactement le théorème central limite pour une suite de lois de Poisson[17].

Démonstration. Nous écrivons $\bar{t}$ la partie entière de t et nous décomposons :

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} = \underbrace{\frac{N_t - N_{\bar{t}}}{\sqrt{\lambda t}}}_{A} + \underbrace{\frac{N_{\bar{t}} - \lambda \bar{t}}{\sqrt{\lambda t}}}_{B} + \underbrace{\frac{\lambda \bar{t} - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}}_{C}. \tag{40.130}$$

En ce qui concerne le terme B, nous avons

$$B = \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}}\frac{N_{\bar{t}} - \lambda \bar{t}}{\sqrt{\lambda \bar{t}}} \to \mathscr{N}(0,1). \tag{40.131}$$

Notons que nous utilisons le fait que si $a_n \to 1$ (en tant que suite de nombres) et si $X_n \to \mathscr{N}(0,1)$ (limite en loi), alors $a_n X_n \to \mathscr{N}(0,1)$ en loi.

Le terme C est également facile parce que $\lambda\bar{t} - \lambda t$ est majoré en norme par λ. Du coup

$$-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda t}} \leqslant C \leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda t}}. \tag{40.132}$$

Donc $\lim_{t\to\infty} C = 0$.

Reste à travailler sur A. Vu que $t \mapsto N_t$ est croissante, la différence $N_t - N_{\bar{t}}$ est positive. Soit $\eta > 0$, nous avons

$$P(|A| > \eta) = P(N_t - N_{\bar{t}} > \sqrt{\lambda t}\eta) \leqslant P\big(N_{\bar{t}+1} - N_{\bar{t}} \geqslant \sqrt{\lambda t}\eta\big) = P(N_1 \geqslant \eta\sqrt{\lambda t}) \tag{40.133}$$

parce que nous savons que $N_{\bar{t}+1} - N_{\bar{t}} \sim N_1 \sim \mathscr{P}(\lambda)$. En vertu des propriétés de la loi de Poisson,

$$\lim_{t\to\infty} P(N_1 \geqslant \eta\sqrt{\lambda t}) = 0. \tag{40.134}$$

En effet si Z est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ nous avons

$$P(Z > l) = \sum_{k=l}^{\infty} P(Z = k) = e^{-\lambda}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{40.135}$$

[17] Au fait près que nous devrions encore montrer que S_n est de carré intégrable.

Nous reconnaissons la queue de série de e^{λ}, qui tend donc vers zéro lorsque $l \to \infty$. Nous avons donc prouvé que

$$\lim_{t\to\infty} P\big(|A| > \eta\big) = 0, \tag{40.136}$$

c'est-à-dire la convergence en probabilité de A vers zéro.

Nous avons montré que

$$B + C \xrightarrow{\mathscr{L}} U \sim \mathscr{N}(0,1) \tag{40.137a}$$

$$A \xrightarrow{P} 0. \tag{40.137b}$$

Le lemme de Slutsky (36.120) nous avons une convergence du couple

$$(A, B + C) \xrightarrow{\mathscr{L}} (0, U). \tag{40.138}$$

Utilisant le corolaire 36.122, nous trouvons la convergence en loi

$$A + (B + C) \xrightarrow{\mathscr{L}} 0 + U, \tag{40.139}$$

ce qu'il fallait. □

PROPooWAVPooHDVsER

Proposition 40.24.
Si N_t est un processus de Poisson[18]*, alors les variables aléatoires $X_n = N_n$ avec $n \in \mathbb{N}$ forment une chaine de Markov*[19]*.*

J'espère qu'un jour une preuve arrivera ici : https://math.stackexchange.com/q/4563414

40.2 Quelques trucs sur la simulation

Le théorème ergodique dit que

$$\pi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{X_k = x}. \tag{40.140}$$

C'est avec cela qu'on calcule $\pi(x)$ à partir d'une simulation de chaine de Markov.

40.2.1 Le théorème central limite pour Markov

THOooBCKQooCkoUEV

Théorème 40.25 (Version allégée)**.**
Si (X_n) est irréductible et positive récurrente, alors pour toute fonction f,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum_{k=1}^{N} -N \int f d\pi \right] \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, \sigma^2) \tag{40.141}$$

où σ^2 dépend de la fonction f et de la chaine de Markov.
Ici, $\int f d\pi = \sum_{x\in E} f(x)\pi(x)$.

Nous allons simuler la variable aléatoire

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum f(X_k) - N \sum_{x\in E} f(x)\pi(x) \right] \tag{40.142}$$

et puis on va mettre sa réalisation dans un histogramme. Dans le cas où on prend $f(i) = \mathbb{1}_{i=i_0}$, il y a de la simplification dans l'intégrale qui devient

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{X_k = i_0} - N\pi(i_0) \right]. \tag{40.143}$$

[18] Définition 40.5.
[19] Définition 38.1.

40.2.2 Feuille 5

On pose

$$D_n = \sqrt{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|. \tag{40.144}$$

On en génère un millier de fois D_n, on note $D_n^{(k)}$ ces réalisations, et on regarde ce que vaut

$$\frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} \mathbb{1}_{D_n^{(k)} \geqslant c}. \tag{40.145}$$

Cela nous donne une approximation de

$$P\big(\sqrt{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \geqslant c\big). \tag{40.146}$$

Note que chacun des $D_n^{(k)}$ demande de créer un nouveau vecteur Y_i de lois qu'on veut regarder. Par exemple de loi exponentielle.

40.2.3 Feuille 6

Pour créer une fonction qui renvoie i avec probabilité p_i pour $i = 1, 2, 3$, on peut faire

$$U \sim \mathscr{U}[0, 1] \tag{40.147}$$

et puis on a

$$P(U < p_0) = p_0 \tag{40.148a}$$
$$P(p_0 < U < p_0 + p_1) = p_1 \tag{40.148b}$$
$$P(p_0 + p_1 < U < p_2) = p_2. \tag{40.148c}$$

Une façon de faire une loi uniforme $[0, 1]$ est de faire `rand`

40.2.4 Feuille 7

L'échantillon est $(Y_1, \dots, Y_n)$ et nous écrivons le vecteur

$$Y = X\beta + \epsilon \tag{40.149}$$

où $Y \sim \mathscr{N}(X\beta, \sigma^2 \operatorname{Id})$ et $\epsilon \sim \mathscr{N}(0, \sigma^2 \operatorname{Id})$. Nous utilisons le principe de maximum de vraisemblance. Soit $(y_1, \dots, y_n)$ un échantillon et

$$P_\theta(y_1, \dots, y_n) = \prod_i \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - X_i^t\beta}{\sigma}\right)^2\right]. \tag{40.150}$$

L'astuce est de faire que $y_i - X_i^t\beta$ est la $i$ième composante du vecteur $Y - X\beta$ et donc la somme qui est dans l'exponentielle devient la norme de $Y - X\beta$:

$$f_\theta(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\|Y - X\beta\|^2\right]. \tag{40.151}$$

On passe au logarithme et on dérive par rapport à σ^2. Attention : la variable est σ^2, donc la dérivée de σ^2 est 1 et non 2σ. Bref, on trouve

$$\sigma^2 = \frac{1}{2n}\|U + X\beta\|. \tag{40.152}$$

40.2.5 Simuler des lois conditionnelles

Nous voulons générer des couples (X, Y) tels que Y prend les valeurs 0 ou 1 et tels que

$$\begin{cases} P(X|Y = 0) \sim \mathscr{E}(\lambda_0) & \text{(40.153a)} \\ P(X|Y = 1) \sim \mathscr{E}(\lambda_1). & \text{(40.153b)} \end{cases}$$

Le plus simple est de générer une liste

$$(X_1, 0) \qquad (X_4, 1) \tag{40.154a}$$
$$(X_2, 0) \qquad (X_5, 1) \tag{40.154b}$$
$$(X_3, 0) \qquad (X_6, 1) \tag{40.154c}$$

avec $X_1, X_2, X_3 \sim \mathscr{E}(\lambda_0)$ et $X_4, X_5, X_6 \sim \mathscr{E}(\lambda_1)$.

Avec cette méthode cependant la liste est triée et en plus on a autant de 1 que de 0. On peut faire un peu plus technologique pour corriger cela. Pour créer un couple, on commence par $Y \sim \mathscr{B}(p)$ et puis suivant que $Y = 0$ ou $y = 1$, on génère $X \sim \mathscr{E}(\lambda_0)$ ou $X \sim \mathscr{E}(\lambda_1)$.

Chapitre 41

Langages

41.1 Alphabets et mots

Définition 41.1.
*Un **alphabet** est un ensemble fini de symboles appelés **lettres**.*

On utilise aussi parfois le terme **vocabulaire** pour désigner un alphabet.

Définition 41.2.
*Un **mot** sur l'alphabet Σ est une suite finie et ordonnée, éventuellement vide, de lettres de Σ. Le **mot vide** est toujours noté ε.*

Définition 41.3.
*La **longueur d'un mot** w, noté $|w|$, est le nombre de lettres constituant le mot w. Le mot vide a une longueur de 0.*

Soit w un mot de longueur k, on peut désormais noter $w = w_1 \cdots w_k$, où chacun des $w_i, 1 \leqslant i \leqslant k$ représente une lettre de w. Par convention, si $k = 0$, alors le mot w est le mot vide.

Définition 41.4.
*Soient w un mot sur l'alphabet Σ et $a \in \Sigma$ une lettre, le **nombre d'occurrences** de la lettre a dans le mot w, noté $|w|_a$, est le nombre de fois où apparait la lettre a dans le mot w, c'est-à-dire le cardinal de l'ensemble $\{i \mid w_i = a, 1 \leqslant i \leqslant |w|\}$.*

Définition 41.5.
*Soit Σ un alphabet, l'**ensemble des mots non-vides** sur l'alphabet Σ, noté Σ^+, est l'ensemble :*

$$\Sigma^+ = \{w = w_1 \dots w_n,\ n > 0\} \tag{41.1}$$

Définition 41.6.
*Soit Σ un alphabet, l'**ensemble des mots** sur l'alphabet Σ, noté Σ^*, est l'ensemble :*

$$\Sigma^* = \{w = w_1 \dots w_n,\ n \geqslant 0\} \tag{41.2}$$

Des deux définitions précédentes, on tire l'égalité suivante :

$$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\} \tag{41.3}$$

Définition 41.7.
*Soient Σ un alphabet et $x, y \in \Sigma^*$ deux mots sur l'alphabet Σ de longueur respective n et m, le **produit** w de x et y, noté $x \cdot y$ est défini par $w = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$.*

Le produit est également appelé **concaténation**.

Proposition 41.8 (Longueur du produit de deux mots)**.**
La longueur du produit de deux mots x et y est la somme des longueurs des mots x et y.

$$|x \cdot y| = |x| + |y| \tag{41.4}$$

Proposition 41.9 (Monoïde $(\Sigma^*, \cdot, \varepsilon)$)**.**
L'ensemble Σ^* muni de l'opération produit d'élément neutre ε est un monoïde[1]*.*

Démonstration. Soient $x, y, z \in \Sigma^*$, avec les définitions précédentes, on peut vérifier facilement que :

- le produit est une loi interne : $x \cdot y \in \Sigma^*$;
- le produit est associatif : $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
- ε est l'élément neutre du produit : $x \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot x = x$.

□

Le produit n'est pas commutatif.

Définition 41.10.
*Soient Σ un alphabet et $w \in \Sigma^*$, la **puissance** n^e d'un mot w, notée w^n, est définie par :*

$$w^n = \begin{cases} \varepsilon & si\ n = 0 \\ w \cdot w^{n-1} & si\ n > 0 \end{cases}$$

41.2 Langages

Définition 41.11.
*Un **langage** sur un alphabet Σ est un sous-ensemble de Σ^*. C'est un ensemble de mots sur l'alphabet Σ.*

Un langage étant défini comme un ensemble, on peut appliquer toutes les notions de la théorie des ensembles aux langages.

Définition 41.12.
*Le **langage vide**, noté $\varnothing$ est le langage qui ne contient aucun mot.*

Définition 41.13.
*Le **langage unité** est le langage qui contient uniquement le mot vide : $\{\varepsilon\}$.*

Définition 41.14.
*Soient Σ un alphabet et $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ deux langages sur l'alphabet Σ, on définit le **produit** L de L_1 et L_2, noté $L_1.L_2$ par :*

$$L = L_1.L_2 = \{u_1 \cdot u_2, u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\} \tag{41.5}$$

Le produit de langages est également appelé **concaténation**. Il ne faut pas confondre le produit de langage avec le produit cartésien de deux ensembles. Le langage unité est l'élément neutre du produit de langages.

Proposition 41.15 (Distributivité du produit de langage par rapport à l'union)**.**
Le produit de langage est distributif par rapport à l'union. Soient Σ un alphabet et $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$, alors :

$$L_1.(L_2 \cup L_3) = (L_1.L_2) \cup (L_1.L_3) \text{ et } (L_1 \cup L_2).L_3 = (L_1.L_3) \cup (L_2.L_3) \tag{41.6}$$

Démonstration. Soit $w \in L_1.(L_2 \cup L_3)$, montrons que $w \in (L_1.L_2) \cup (L_1.L_3)$. $\exists w_1 \in L_1, w' \in L_2 \cup L_3, w = w_1 \cdot w'$. Donc $w' \in L_2$ ou $w' \in L_3$. Si $w' \in L_2$, alors $w = w_1 \cdot w' \in L_1.L_2$. Si $w' \in L_3$, alors $w = w_1 \cdot w' \in L_1.L_3$. Donc, $w \in (L_1.L_2) \cup (L_1.L_3)$. Donc $L_1.(L_2 \cup L_3) \subseteq (L_1.L_2) \cup (L_1.L_3)$.

Soit $w \in (L_1.L_2) \cup (L_1.L_3)$, montrons que $w \in L_1.(L_2 \cup L_3)$. $w \in L_1.L_2$ ou $w \in L_1.L_3$. Si $w \in L_1.L_2, i$ avec $i \in \{2, 3\}$ alors $\exists w_1 \in L_1, w_i \in L_i, w = w_1 \cdot w_i$. Donc $w \in L_1.(L_2 \cup L_3)$. Donc, $(L_1.L_2) \cup (L_1.L_3) \subseteq L_1.(L_2 \cup L_3)$

Donc $(L_1.L_2) \cup (L_1.L_3) = L_1.(L_2 \cup L_3)$

L'autre partie de la proposition se montre de manière analogue. □

Définition 41.16.
*Soient Σ un alphabet et $L \subseteq \Sigma^*$, la **puissance** n^e du langage L, notée L^n est définie par :*

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & si\ n = 0 \\ L.L^{n-1} & si\ n > 0 \end{cases}$$

[1] Définition 6.23.

Définition 41.17 ([885])**.**
*L'**étoile de Kleene** est un opérateur unaire noté $*$. L'**itéré** d'un langage L, noté L^*, est l'application de l'étoile de Kleene à un langage L et est défini par :*

$$L^* = \bigcup_{i \geqslant 0} L^i \tag{41.7}$$

En particulier, on remarque que le mot vide fait toujours partie de l'itéré d'un langage, y compris quand ce même langage ne contient pas le mot vide.

Définition 41.18.
*L'**itéré strict** d'un langage L, noté L^+, est défini par :*

$$L^+ = \bigcup_{i > 0} L^i \tag{41.8}$$

Proposition 41.19 (Relations entre itéré et itéré strict)**.**
Soit L un langage, alors on a :

$$L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\} \tag{41.9}$$

$$L^+ = L.L^+ = L^+.L \tag{41.10}$$

Chapitre 42

Utilisation dans les autres sciences

Dans ce chapitre nous donnons des applications de divers théorèmes dans les autres sciences que la mathématique.

42.1 Démystification du MRUA

SecMRUAsecondeGGdQoT

42.1.1 Preuve de la formule

Nous sommes maintenant en mesure de donner une démonstration complète de la formule du MRUA :

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0. \tag{42.1}$$ EqMRUAINT

Au niveau de la physique, nous considérons un mobile qui se déplace avec une accélération constante a. Nous notons par v_0 sa vitesse initiale et par x_0 sa position initiale.

Nous savons que, pour tout mouvement, si $x(t)$ est la position en fonction du temps, et si $v(t)$ et $a(t)$ représentent la vitesse et l'accélération en fonction du temps, alors

$$v(t) = x'(t) \quad \text{et} \quad a(t) = v'(t) = x''(t). \tag{42.2}$$

Afin de trouver $x(t)$ en connaissant $a(t)$, il « suffit » donc de prendre deux fois la primitive. Essayons ça dans le cas facile du MRUA où $a(t) = a$ est constante.

La vitesse $v(t)$ doit être une primitive de la constante a. Il est facile de voir que $v(t) = at$ est une primitive de a. Par le corolaire 12.224(bis),

$$v(t) = at + C_1 \tag{42.3}$$ EqvtatC

pour une certaine constante C_1. Afin de fixer C_1, il faut faire appel à la physique : d'après la formule (42.3), la vitesse initiale est $v(0) = C_1$. Donc il faut identifier C_1 à la vitesse initiale : $C_1 = v_0$. Nous avons donc déjà obtenu que

$$v(t) = at + v_0. \tag{42.4}$$

Afin de trouver $x(t)$, il faut trouver une primitive de $v(t)$. Il n'est pas très difficile de voir que $at^2/2 + v_0 t$ fonctionne, donc il existe une constante C_2 telle que

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C_2. \tag{42.5}$$

Encore une fois, regardons la condition initiale : la formule donne comme position initiale $x(0) = C_2$, et donc nous devons identifier C_2 avec la position initiale x_0. En définitive, nous avons bien

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0. \tag{42.6}$$

Cette formule est donc maintenant *démontrée* à partir de la seule définition de la vitesse comme dérivée de la position et de l'accélération comme dérivée de la vitesse.

Remarquons cependant que la preuve complète fut *très* longue. En effet, nous avons utilisé les règles de dérivation de la proposition 12.194, pour la démonstration desquels, les résultats de la proposition 12.8 ont étés utiles. Mais nous avons surtout utilisé le corolaire 12.224(bis) qui repose sur le théorème de Rolle 12.213, qui lui-même demande le théorème de Borel-Lebesgue 9.19 dans lequel la notion d'ensemble compact a été cruciale.

42.1.2 Interprétation graphique

La distance parcourue $x(t)$ en un temps t est la primitive de la vitesse. Nous savons, par ailleurs, que la primitive est liée à la surface[1] sous la courbe. Pour reprendre les mêmes notations, nous notons $S_v(t)$ la surface contenue en dessous de la fonction v entre 0 et x. Nous ne serions donc pas étonné que

$$S_v(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0 \tag{42.7}$$ EqEncoreMRUASvt

soit la surface en dessous de la fonction $v(t) = at + v_0$. Nous voyons que la surface totale sous la fonction $v(t) = at + v_0$ est exactement

$$S_v(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t. \tag{42.8}$$

Cela est un bon début, mais hélas nous ne retrouvons pas le terme « $+x_0$ » de la formule (42.7). Cela n'est pas tout à fait étonnant parce que nous savons que la surface sous une fonction était *une* primitive de la fonction, mais nous n'avons pas dit *laquelle*. D'après le fameux corolaire 12.224(bis), la primitive n'est définie qu'à une constante près. Ici, c'est la constante x_0 qu'on a perdue en chemin.

Nous parlerons plus en détail du lien entre les surfaces et les primitives dans la section dédiée à l'intégration.

42.2 Relativité en mécanique newtonienne

42.2.1 Relativité du mouvement

Prenons quelqu'un qui court le cent mètres en onze secondes. Par rapport à un spectateur dans les gradins, il se sera déplacé de cent mètres. Mais si je cours à côté de lui de telle façon à avoir parcouru 80 mètres le temps qu'il en fasse cent, alors par rapport à moi l'athlète ne se sera déplacé que de 20 mètres. Par contre, par rapport à mon chronomètre, il aura également mis onze secondes : ce n'est pas parce que je cours que mon chronomètre s'affole !

Entre moi et les spectateurs, on a donc une loi de transformation

$$x' = x - vt \qquad\qquad t' = t. \tag{42.9}$$ EqTransGal

C'est-à-dire que la distance x' qu'aura parcouru l'athlète par rapport à moi vaut la distance x parcourue par le spectateur moins la distance que j'ai courue moi-même, c'est-à-dire moins vt.

42.2.2 Bob et Alice

Formalisons le concept de changement de repères. Pour cela, prenons deux amoureux, Bob et Alice[2]. Mettons que Bob reste assis sur un banc pendant qu'Alice court en ligne droite à une vitesse v. Tout deux déclenchent leur chronomètre quand Alice passe devant Bob. À tout moment, Bob et Alice ont leur repères de temps et d'espace. Par exemple si après un temps t, Alice voit une peau de banane à 1 mètre devant elle, elle va dire « Il y a une peau de banane à un mètre. », tandis que Bob va dire « Il y a une peau de banane à $(1 + vt)$ mètres ».

Plus généralement, si il se passe quelque chose à la position x au temps t pour Bob, ce quelque chose se passera au temps $t' = t$ à l'endroit $x' = x - vt$ pour Alice parce qu'en un temps t, elle aura déjà avancé d'une distance vt.

Ça c'est ce dont tout le monde était persuadé depuis Galilée jusqu'au début du vingtième siècle.

42.3 Invariance de la vitesse de la lumière

42.3.1 Champ de gravitation et électrique

Nous savons que la force de gravitation s'écrit :

$$F_{grav} = G\frac{mm'}{r^2},$$

tandis que la force électrique entre deux charges q et q' est donnée par

$$F_{elec} = k\frac{qq'}{r^2}. \tag{42.10}$$ EqRappelFelec

[1] L'intégrale d'une fonction entre deux valeurs de t donne l'aire sous la courbe.

[2] C'est plus poétique que dire « soient A et B deux observateurs ».

Nous avons aussi fait remarquer que dans le cas de la gravitation, la force a l'air d'être instantanée, et que cela posait quelques problèmes conceptuels. La force électrique a apparemment le même problème. Une différence entre les deux est qu'une charge électrique c'est tout petit et qu'on peut expérimenter à souhait, tandis que pour avoir une masse dont on peut mesurer le champ de gravitation correctement, il faut quelque chose grand comme la Terre[3].

42.3.1.1 Finitude de la vitesse de propagation de la force électrique

Si un micro est placé juste à côté de ton oreille, et qu'il commence à faire biiiiip, tu l'entends directement. Quand il s'arrête, tu ne l'entends plus. Si le micro est placé à 600 m de toi, tu ne commenceras à l'entendre que deux secondes après le commencement du son, et tu continueras à l'entendre deux secondes après qu'il a fini.

Eh bien, pour la force électrique, on a pu mesurer que c'est la même chose (sauf que ça va beaucoup plus vite). Si on place une charge quelque part, on ne ressent la force (42.10) qu'après qu'elle a eut le temps d'arriver. Si on déplace la charge électrique, on continue à ressentir la même force pendant un certain temps : il faut que la modification du champ électrique ait le temps d'arriver. Exactement comme quand on fait des remous quelque part dans un étang : il faut du temps que les remous arrivent plus loin.

On a pu faire des dizaines d'expériences de ce type avec l'électricité, le magnétisme et la lumière ; et les résultats sont clairs : il faut du temps pour que ça se déplace. Tout cela provoque des ondes électromagnétiques qui se déplacent à une vitesse finie. On peut produire de telles ondes avec n'importe quel courant électrique alternatif.

42.3.1.2 Pourquoi pas la gravitation ?

La gravitation telle que donnée par Newton pose le même problème de vitesse de propagation que l'électricité. Est-ce qu'en réalité la gravitation se propage également à une vitesse finie ?

Avec la gravitation c'est beaucoup plus compliqué parce qu'elle est beaucoup plus faible, et donc c'est beaucoup plus difficile à détecter. D'après la théorie d'Einstein de la gravitation, la gravitation devrait également produire des ondes gravitationnelles. Seulement, si un simple courant électrique suffit pour mesurer une onde électromagnétique, afin de mesurer une onde gravitationnelle, il faudrait un déplacement de masse de l'ampleur d'une étoile qui explose. Or ça, on ne sait pas produire dans un laboratoire.

Des ondes gravitationnelles ont été observées pour la première fois en 2016[886].

42.3.2 Support du champ : pas d'éther

Nous avons dit qu'une onde électromagnétique se propage comme une onde sonore (quoique beaucoup plus vite). Une question se pose alors. En effet, une onde sonore est matérialisée par de l'air qui vibre. Qu'est-ce qui vibre pour une onde électromagnétique ?

Étant donné que les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide (c'est pour ça que la radio fonctionne dans l'espace), la question est problématique. Les physiciens ont donc supposé que tout l'univers était rempli d'un fluide invisible appelé **l'éther**. L'électromagnétisme consiste en une vibration de l'éther, exactement comme l'acoustique consiste en une vibration de l'air.

En fait, vérifier cette hypothèse n'est pas très compliqué. En effet il n'y a aucune raison que l'éther suive la Terre dans son mouvement. Or la Terre se déplace à environ 30 km/s autour du Soleil. Donc les ondes électromagnétiques doivent se propager plus vite dans le sens du mouvement de la Terre que dans le sens perpendiculaire. Tout comme le son se propage plus vite dans le sens du vent.

La célèbre expérience d'interférométrie de Michelson-Morley[887] a mesuré cet effet … et ce fut la consternation : il n'y a aucun effet ! Or, la lumière se déplace à 300.000 km/s[4] ; une variation de 30 km/s devrait être détectable !

Mais rien ! On a recommencé les expériences dans tous les sens, à tous les mois de l'année, à tous les endroits de la Terre. On n'a pas observé un poil de variation de la vitesse de la lumière. Et ça, ça pose un gros problème à la physique.

42.3.3 Le problème

Si je joue au football dans un train qui avance à 100 km/h et que je lance une balle à 20 km/h, quelqu'un au sol mesura la vitesse de la balle soit à 120 km/h soit à 80 km/h d'après que l'on ait shooté vers l'avant

[3] Une autre différence fondamentale est qu'il existe des charges électriques négatives, mais pas de masses négatives ; de ce fait on ne peut pas construire d'isolant gravitationnel, contrairement aux isolants électriques qui existent. Cela augmente encore la difficulté de faire des expériences avec la gravitation.

[4] 299.792.458 m/s très exactement

ou l'arrière du train. Cela paraît logique. Mais ce qu'on vient de voir c'est que ça ne marche pas avec la lumière.

Si un train avance à 100.000 km/s et qu'on y allume une lampe de poche, la lumière avancera à 300.000 km/s par rapport au train et 400.000 km/s par rapport au sol. Non ! Justement pas ! La lumière avancera quand même à 300.000 km/s par rapport au sol.

Là encore, on a fait des dizaines d'expériences partout, sur Terre, dans des avions, dans l'espace avec des atomes, des lampes de poche et des horloges atomiques, et dans tous les sens, le sens de déplacement de la Terre, le sens inverse, le sens perpendiculaire, vers le haut, vers le bas : rien ! Personne n'a jamais observé un rayon de lumière se déplacer à une autre vitesse que 300.000 km/s.

Le problème est que le principe d'addition des vitesses est faux pour la lumière. Puisque l'expérience nous force, nous devons faire avec.

LoiVitLum

Loi numéro 1.
La réalité est que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels. On note c cette vitesse. C'est une constante fondamentale de la Nature.

Étant donné que c'est une loi expérimentale, nous n'y pouvons rien. C'est la nature qui est comme ça. En particulier tu ne peux pas en vouloir à ton prof de physique d'avoir inventé une théorie compliquée. Ce n'est pas lui qui l'a inventée et ce n'est pas de sa faute.

42.4 Conséquences

C'est maintenant que les choses vraiment graves commencent (cela soit dit sans vouloir te faire peur). Afin d'un peu simplifier les choses, nous n'allons étudier que les mouvements en une dimension, c'est-à-dire sur une droite.

42.4.1 Ligne d'univers

Un événement a une coordonnée (t, x). Si je pose un objet juste à mes pieds (disons en $x = 0$), ses coordonnées seront à tout moment $(t, 0)$. Il est bon de voir cette coordonnée comme l'équation paramétrique d'une droite horizontale dans le plan des coordonnées t et x. Plus généralement quand un mobile effectue un mouvement $x(t)$, on appelle la **ligne d'univers** du mobile la ligne (pas forcément droite) $(t, x(t))$. Dans le premier exemple, on avait $x(t) = 0$ pour tout t.

Le cas d'un mobile se déplaçant à vitesse constante v donne comme ligne d'univers la droite[5] $(t, x_0 + vt)$, et un objet qui se déplace selon un MRUA a comme ligne d'univers

$$\big(t, x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}\big).$$

42.4.2 Transformations de Lorentz

Reprenons les amours scientifiques de Bob et Alice, mais cette-fois, analysons celles-ci en tenant compte du fait que la vitesse de la lumière soit invariante. Maintenant, si Bob voit se passer quelque chose au temps t à l'endroit x, on va dire qu'Alice voit cette chose au temps t' à la position x', et on va chercher (t', x') en fonction de (t, x).

Posé en termes mathématiques, le problème s'énonce ainsi : trouver les fonctions f et g telles que les formules SubEqLorGen

$$t' = f(t, x) \tag{42.11a}$$
$$x' = g(t, x) \tag{42.11b}$$

donnent les coordonnées vues par Alice pour un événement vu par Bob à l'instant t au point x. Une première étape importante est franchie par la proposition suivante[6].

Proposition 42.1.
Les fonctions f et g contenues dans les transformations (42.11) sont nécessairement linéaires (affines), c'est-à-dire qu'elles doivent s'écrire sous la forme

$$t' = \alpha t + \beta x + p$$
$$x' = \gamma t + \delta x + q$$

[5] bon exercice de révision de ton cours de math de vérifier que c'est une droite.
[6] dont je te suggère fortement de ne pas lire la preuve si tu ne veux pas que ton cerveau éclate.

pour certaines fonctions α, β, γ, δ, p et q de la vitesse d'Alice relativement à Bob.

Démonstration. Pendant qu'Alice court et que Bob la regarde, Ève tente de lancer une pierre sur Alice (Ève est jalouse). Bob et Alice regardent deux événements. Le premier est la pierre qui quitte la main de Ève, et le second est la pierre qui percute le sol. Pour Bob, le jet s'est passée au temps t_0 au point x_0, et la pierre touche le sol un petit peu plus tard, au temps $t_0+\Delta t$ et un peu plus loin, au point $x_0+\Delta x$. Bob écrit donc ceci sur sa feuille de papier :

$$\begin{aligned}E_1&=(t_0,x_0)\\E_2&=(t_0+\Delta t,x_0+\Delta x),\end{aligned}$$

tandis qu'Alice, en observant les mêmes deux événements, aura noté

$$\begin{aligned}E'_1&=\big(f(t_0,x_0),g(t_0,x_0)\big)\\E'_2&=\big(f(t_0+\Delta t,x_0+\Delta x),g(t_0+\Delta t,x_0+\Delta x)\big).\end{aligned}$$

Bob et Alice se demandent combien de temps la pierre est restée en l'air et quelle distance elle a parcourue. Par le principe général d'homogénéité, les deux seules quantités pertinentes (qui ont un sens physique) pour Bob sont $(t_0+\Delta t)-t_0$ et $(x_0+\Delta x)-x_0$, c'est-à-dire Δt et Δx. En effet, si Bob avait choisi de s'asseoir autre part et si Alice avait commencé à courir un peu plus tard, ça n'aurait rien changé à la longueur du jet de Ève.

D'une façon ou d'une autre, il doit exister une façon de déduire les mesures de Alice en connaissant celles de Bob ; je ne connais pas avec quelles formules, mais ces formules ne peuvent contenir que Δt, Δx et v parce que ce sont les seules quantités qui définissent tous les événements.

Cela dit, Alice va caractériser le mouvement de la pierre avec la différence des coordonnées entre le jet et la chute sur le sol mesurées par elle-même. En d'autres termes, pour Alice ce qui compte c'est la différence entre E'_1 et E'_2, soit

$$\big(f(t_0+\Delta t,x_0+\Delta x),g(t_0+\Delta t,x_0+\Delta x)\big)-\big(f(t_0,x_0),g(t_0,x_0)\big).\tag{42.12}$$ EqAlfxdelmoins

Mais nous venons de signaler que ce qu'Alice mesurait devait pouvoir être exprimé en termes de Δt et Δx. Nous concluons que la différence (42.12) ne dépend en fait pas de x et t mais seulement de Δx et Δt.

Prenons maintenant une notation plus compacte et notons $X=(t,x)$, $\Delta X=(\Delta t,\Delta x)$ puis $F=(f,g)$. Avec ça, l'expression (42.12) se note $F(X+\Delta X)-F(X)$. Comme mentionné, cette expression ne dépend que de Δx. En particulier, elle ne dépend pas de X.

Maintenant tu vas comprendre pourquoi on apprend les dérivées dans ton cours de math. Comme $F(X+\Delta X)-F(X)$ ne dépend pas de X, le rapport $\big(F(X+\Delta X)-F(X)\big)/\Delta X$ non plus. La limite de ce rapport quand ΔX tend vers zéro non plus :

$$\lim_{\Delta X\to 0}\frac{F(X+\Delta X)-F(X)}{\Delta X}\tag{42.13}$$

ne dépend pas de X. Tu reconnais là la dérivée de F au point X. En d'autres termes, $F'(X)$ est constante, elle ne dépend pas de X. Disons donc que $F'(X)=a$. Tu connais beaucoup de fonctions dont la dérivée est constante ? Non ? En effet, il n'y en a pas beaucoup. Les fonctions qui vérifient $F'(X)=a$ sont toutes de la forme

$$F(X)=aX+b.$$

À ce niveau, il convient de re-déballer les notations compactes : si $a=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ et $b=(p,q)$ on trouve EqLoUn

$$f(t,x)=\alpha t+\beta x+p\tag{42.14a}$$
$$g(t,x)=\gamma t+\delta x+q,\tag{42.14b}$$

comme annoncé.

□

Nous savons que lorsque $(t,x)=(0,0)$, alors $(t',x')=(0,0)$. En effet, Bob et Alice ont lancé leurs chronos en même temps au moment où ils étaient au même endroit. En mettant $(t,x)=(0,0)$ dans les équations (42.14), on trouve $(t',x')=(p,q)$, et donc $p=q=0$. Ça fait une chose de réglée ; on se retrouve avec EqLoDeux

$$\begin{cases}t'=\alpha t+\beta x&(42.15a)\\x'=\gamma t+\delta x.&(42.15b)\end{cases}$$

Quelles sont les contraintes à vérifier pour que ces transformations décrivent correctement la physique que l'on cherche à écrire ?

(1) Il faut que les transformations décrivent correctement que Alice avance à une vitesse v par rapport à Bob,

(2) dans le même ordre d'idée, il faut que l'on trouve que Bob avance à la vitesse $-v$ par rapport à Alice,

(3) il faut que si Alice et Bob observent un rayon lumineux, ce rayon aille à la vitesse c par rapport à Alice et à la *même* vitesse c par rapport à Bob,

(4) enfin, il faut avoir le principe de relativité, c'est-à-dire que comme les équations (42.15) disent ce que Alice voit en fonction de ce que Bob voit, on demande que les équations qui disent ce que Bob voit en fonction de ce que Alice voit soient les mêmes. En d'autres termes, il faut que les transformations et les transformations inverses soient les mêmes au changement près du signe de v.

Étudions une à une ce que chacune de ses contraintes impose. Rappelons que (t, x) et (t', x') sont les coordonnées que Bob et Alice mettent sur le même événement. Par exemple sur l'événement qui consiste à ce que Ève, par jalousie envers Bob, jette une peau de banane sous les pieds d'Alice. Cet événement a lieu à un certain moment, à un certain endroit. C'est ce moment et cet endroit qui sont notés (t, x) et (t', x').

(1) Les coordonnées (t, x) et (t', x') peuvent décrire n'importe quoi. Regardons les coordonnées de Alice qui cours. Pour Alice, cela correspond à $(t', x') = (t', 0)$ parce que si x' désigne la position de Alice par rapport à Alice, alors x' est toujours nul. Pour Bob par contre, Alice ne reste pas en place, mais se déplace à une vitesse v. C'est-à-dire que si (t, x) sont les coordonnées de Alice pour Bob, alors $x/t = v$. Écrivons les équations (42.15) en tenant compte de tout ça : avec $x' = 0$, la seconde équation donne

$$0 = \gamma t + \delta x, \tag{42.16}$$

d'où on déduit que $x/t = -\gamma/\delta$. En imposant que cela soit v, on trouve $\gamma = -v\delta$, et on ré-écrit les transformations en tenant compte de ça :

$$\begin{cases} t' = \alpha t + \beta x & \text{(42.17a)} \\ x' = -v\delta t + \delta x. & \text{(42.17b)} \end{cases}$$

Nous voilà débarrassé d'un paramètre.

(2) Maintenant, on regarde ce qu'il se passe quand (t, x) et (t', x') décrivent les positions de Bob. On a $(t, x) = (t, 0)$ parce que selon Bob, Bob est au repos. Les équations deviennent :

$$t' = \alpha t \qquad\qquad x' = -v\delta t. \tag{42.18}$$

La vitesse de Bob par rapport à Alice est $-v$, donc on exige que $x'/t' = -v$, c'est-à-dire que

$$\frac{-v\delta t}{\alpha t} = -v,$$

ce qui implique que $\delta = \alpha$. On avance encore un peu. Écrivons à nouveau les lois de transformation en en tenant compte :

$$\begin{cases} t' = \alpha t + \beta x & \text{(42.19a)} \\ x' = -v\alpha t + \alpha x. & \text{(42.19b)} \end{cases}$$

(3) Si maintenant Bob et Alice regardent un même rayon de lumière (comme c'est romanesque !), alors (t, x) et (t', x') expriment les coordonnées d'un rayon lumineux. Le fait que Bob regarde un rayon lumineux fait que $x = ct$, et donc que les coordonnées du rayon lumineux, observé par Alice sont :

$$t' = \alpha t + \beta ct \qquad\qquad x' = -\alpha vt + \alpha ct. \tag{42.20}$$

L'invariance de la vitesse de la lumière exige que Alice mesure une vitesse c pour le rayon de lumière, c'est-à-dire $x' = ct'$. On exige donc que

$$-\alpha vt + \alpha ct = c\alpha t + \beta c^2 t,$$

ce qui implique que

$$\beta = -\frac{\alpha v}{c^2}.$$

Une fois de plus, l'avant-dernière, on ré-écrit les lois de transformations en tenant compte de ce fait ; mais cette fois, on fait l'effort d'écrire aussi les transformations inverses :

$$t' = \alpha t - \frac{\alpha v}{c^2}x \qquad t = \frac{1}{\Delta}\big(\alpha t' + \frac{\alpha v}{c^2}x'\big) \tag{42.21}$$

$$x' = -\alpha v t + \alpha x \qquad x = \frac{1}{\Delta}(\alpha v t' + \alpha x') \tag{42.22}$$

où $\Delta = \alpha^2 - \frac{\alpha^2 v^2}{c^2}$ que tu noteras au passage être toujours positif, et nul uniquement quand $v = c$.

(4) Maintenant il reste à imposer le principe de relativité. Les transformations (42.21) montrent comment Alice voit le monde (c'est-à-dire (t', x')) en fonction de la façon dont Bob voit le monde (c'est-à-dire (t, x)). On se demande donc quelle seraient, pour Bob, les coordonnées (t, x) d'un point vu en (t', x') par Alice. Cela signifie que l'on impose que les deux systèmes (42.21) soient en réalité les mêmes, à un changement de signe près.

Attention : il est à priori faux de dire qu'en changeant le signe de v dans $\alpha v/c^2$, j'obtiens $-\alpha v/c^2$ parce que α est une fonction de v. En réalité, il faut noter $\alpha(v)v/c^2$ et donc le changement de signe de v donne $-\alpha(-v)v/c^2$. Ceci étant clair, on peut un petit peu calculer.

Commençons par égaliser le coefficient de x dans t' à celui de x' dans t, en changeant le signe de v :

$$\frac{\alpha(-v)v}{c^2} = \frac{\alpha(v)v}{c^2},$$

et donc $\alpha(v) = \alpha(-v)$. Ça c'est une bonne nouvelle. Égalisons maintenant le coefficient de t dans t' à celui de t' dans t en changeant le signe de v :

$$\alpha(-v) = \frac{\alpha(v)}{\Delta(v)} = \frac{\alpha(v)}{\alpha(v)^2\big(1-\frac{v^2}{c^2}\big)}.$$

Comme $\alpha(-v) = \alpha(v)$, on en déduit que

$$\alpha(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{42.23}$$

Maintenant qu'on a tout, on peut écrire les transformations de Lorentz. On met donc l'expression (42.23) dans les lois de transformations (42.21) :

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt) \qquad x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(vt' + x'). \tag{42.24}$$

Tu remarqueras que $\Delta = 1$; si tu ne sais pas ce qu'est le déterminant d'une application linéaire, ça n'a pas d'importance. Mais si tu sais ce qu'est le déterminant d'une application linéaire, alors ce $\Delta = 1$ est crucial !

Afin d'avoir des équations un peu plus courtes, à partir de maintenant nous allons noter

$$\gamma(v) = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

42.4.3 Conditions d'existence

Il y a une racine carrée et un dénominateur dans ces formules. Quelles sont les conditions d'existence ? D'abord pour $\gamma(v)$, nous avons un négatif sous la racine dès que $|v| > c$. Et $\gamma(v) = 0$ si et seulement si $|v| = c$.

Ce qui se trouve dans la racine carrée ne pose donc jamais de problèmes parce que ce n'est jamais négatif parce que nous avons supposé $v \leqslant c$ dès le départ.

Le dénominateur est par contre plus problématique : quand $v = c$ il n'y a plus rien qui fonctionne. Quelle est la physique de ce problème ? Pour le comprendre, il faut se souvenir ce que représente v. Nous avons dit que v est la vitesse à laquelle Alice court. Ce que la condition d'existence nous enseigne, c'est que personne ne peut courir à la vitesse de la lumière. C'est une vitesse que l'on ne peut pas atteindre.

Dit en termes plus savants, on ne peut pas choisir un repère qui se déplace à la vitesse de la lumière.

La question qui se pose alors est « ah bon, on ne peut pas atteindre la vitesse de la lumière ! Et la lumière, comment elle fait ? ». Bonne question, merci de l'avoir posée. Hélas la réponse sort du cadre de ce cours.

loivitlumlimite

Loi numéro 2.
Aucun objet ne peut atteindre la vitesse de la lumière.

Loi numéro 3.
Tu ne dois pas te demander pourquoi la lumière elle-même se déplace à la vitesse de la lumière malgré la loi numéro 2.

42.4.4 La notion d'intervalle

Un **événement** est quelque chose qui se passe à un endroit à un certain moment. C'est donc caractérisé par le moment et le lieu. Comme on travaille à une dimension, c'est un couple de réels (t, x).

Regardons un rayon de lumière. Un événement est le fait d'allumer une lampe de poche, et un autre est le fait que la lumière arrive sur l'objet qu'on éclaire. Appelons-les (t_1, x_1) et (t_2, x_2). Comme d'habitude, on note $\Delta t = t_2 - t_1$ et $\Delta x = x_2 - x_1$. Comme le rayon de lumière va à la vitesse c, on a $c = \Delta x/\Delta t$, ou encore

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = 0.$$

Pour cette raison, on va dire que l'**intervalle** entre deux événements (t_1, x_1) et (t_2, x_2) vaut en général

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2. \tag{42.25}$$

Par invariance de la vitesse de la lumière, si un intervalle est nul pour un observateur, il sera nul pour tous les observateurs.

42.4.4.1 En mécanique newtonienne

Afin de voir un peu mieux l'enjeu de l'invariance de l'intervalle, regardons un exemple chiffré. Si par exemple je me déplace de 10 m en 5 s, mon intervalle mesuré par une personne extérieure est

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = (300.000.000)^2 \cdot (5)^2 - (10)^2 = 2,25 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m}.$$

Si je fais le calcul pour moi, j'ai que $\Delta x' = 0$ parce que je ne me déplace pas, et $\Delta t' = 5$ parce que je me suis déplacé en 5 secondes. Le truc est que à côté de $(300.000.000)^2$, l'intervalle spatial Δx ne pèse pas grand chose. Ça ne change presque rien qu'il soit de 5 mètres ou de zéro. Ça ne change pas grand chose, mais ça change quand même ! Entre moi qui calcule ou une personne extérieure, l'intervalle change de 100 sur un nombre de la grandeur de 200.000.000.000.000.000.0000 !

Reprenons plus clairement le raisonnement. D'après la mécanique classique, l'intervalle mesuré par deux personnes est différent, mais très peu différent. Inutile de dire que du temps de Newton, on n'avait pas les moyens techniques de mesurer si cet intervalle est effectivement différent ou bien si il est en réalité égal. C'est un peu comme si on te mettait un spot dans les yeux et qu'on te demandait si c'est un spot de 1000 W ou de 1001 W. Bonne chance pour le dire !

42.4.4.2 En mécanique relativiste

Maintenant qu'on a des moyens techniques nettement plus poussés que Newton, on a pu mesurer que l'intervalle est égal. L'intervalle est un invariant. Cela n'est pas un nouveau principe physique parce qu'il découle des transformations de Lorentz.

42.4.5 Le cône de lumière d'un point

Il est intéressant de dessiner dans le plan (t, x) l'ensemble des points atteints par le rayon lumineux. Le point (t, x) est atteint si $c^2t^2 - x^2 = 0$, ou encore si $x = \pm ct$. Cela forme deux droites dans le plan tracé par les coordonnées t et x. Ces deux droites forment ce qu'on appelle le **cône de lumière** du point $(0, 0)$.

42.4.6 Contraction des longueurs

Bob prend un morceau de bois qu'il mesure de longueur l et le dépose devant lui. À l'instant t (de Bob), les deux extrémités sont aux coordonnées $e_1 = (t, 0)$ et $e_2 = (t, l)$.

Afin de savoir quelle est la longueur de ce même morceau de bois pour Alice, il faut qu'elle mesure les deux extrémités en même temps (pour elle), et qu'elle fasse la différence. Comme Bob et Alice déclenchent leurs chronomètres en même temps, le plus simple est de faire la mesure à cet instant.

Pour Bob, c'est clair : les coordonnées des deux extrémités sont $e_1 = (0,0)$ et $e_2 = (0,l)$. La longueur du bois est l. Pour savoir quelle est la longueur mesurée par Alice, on utilise les transformations de Lorentz qui donnent les coordonnées e'_1 et e'_2 relatives à Alice. On trouve $e'_1 = (0,0)$ et

$$e'_2 = \left(\frac{-vl/c^2}{\gamma(v)}, \frac{l}{\gamma(v)}\right). \quad (42.26)$$ Eqepdeuxfaut

En d'autres termes, on a $x_1 = 0$ et $x_2 = l/\gamma(v)$, ce qui fait que la longueur observée par Alice est $l' = x_2 - x_1 = l/\gamma(v)$.

Eh bien ce résultat est faux. Si tu vois pourquoi sans lire la suite, tu es très fort.

Pour mesurer la longueur d'un objet, il faut mesurer la position des deux bouts *en même temps* puis faire la différence entre les deux. Effectivement, e_1 et e_2 sont en même temps pour Bob, et donc Bob peut mesurer la longueur de son bout de bois en faisant la différence $x_2 - x_1$. Mais comme le montre les coordonnées (42.26), les événements e'_1 et e'_2 ne se passent pas en même temps pour Alice ! Eh oui : $t'_1 = 0$ et $t'_2 = -vl/c^2\gamma(v)$; c'est pas la même chose.

Il faut donc trouver un événement qui pour Alice correspond à l'extrémité du bout de bois au temps $t' = 0$. Comme l'événement général qui correspond au bout du bois pour Bob est (t,l), l'événement général est pour Alice

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}l}{\gamma(v)} \qquad x' = \frac{l - vt}{\gamma(v)}. \quad (42.27)$$

Afin d'avoir $t' = 0$, il faut $t = vl/c^2$. En mettant cette valeur de t dans x', on trouve

$$x' = \frac{l - v\left(\frac{vl}{c^2}\right))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = l\gamma(v).$$

Et là, c'est la bonne formule. Si un objet a une longueur l dans le référentiel où il est au repos, il aura une longueur

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (42.28)$$

dans un référentiel qui se déplace à la vitesse v par rapport à l'objet.

42.4.7 Dilatation des intervalles de temps

Encore un petit effort et nous passons à une application concrète que tu connais des bizarreries de la relativité. Mais en attendant, regarde bien ta montre, tu ne vas pas en croire tes yeux !

Reprenons Bob et Alice. On se rappelle que Bob et Alice avaient déclenché leurs chronomètres en même temps quand Alice était passée devant Bob. Un peu plus tard, Alice regarde sa montre qui indique un temps t. Et elle se demande si Bob a aussi à ce moment une montre qui indique un temps t.

Ce serait dingue que non hein !?! En effet, si je synchronise ma montre avec quelqu'un et que je pars faire un tour, ma montre ne sera pas tout d'un coup désynchronisée. Oui, mais Alice, elle cours presque à la vitesse de la lumière … et à ces vitesses-là, on a déjà vu des choses incroyables. Calculons donc pour en avoir le cœur net.

Le fait qu'Alice regarde sa montre est un événement qui se passe pour Alice aux coordonnées $(t',0)$ (le zéro c'est parce que par rapport à elle-même, Alice est toujours au repos). À quelles coordonnées (t,x) pour Bob correspond cet événement ?

L'équation de t en fonction de t' et x' dans les transformations de Lorentz (42.24) prise avec $x' = 0$ donnent

$$t = \frac{t'}{\gamma(v)}.$$

Et si, juste pour le plaisir, on faisait l'inverse ? Bob regarde sa montre, il voir un temps t et sa coordonnée spatiale est $x = 0$. À quel temps d'Alice cela correspond ? Mettons $x = 0$ dans la transformation de Lorentz de t' en fonction de t et x. Ce qu'on obtient c'est

$$t' = \frac{t}{\gamma(v)}.$$

N'est-ce pas génial ? C'est la même ! Évidemment, ça ne pouvait pas être autre chose : le principe de relativité demande qu'on ne puisse pas faire la différence entre Alice qui cours vers la droite avec Bob assis et Alice assise avec Bob qui cours vers la gauche. C'est exactement pour ça que dans une gare, quand le train d'à côté démarre, il t'arrive de croire que c'est ton train qui démarre : tu ne peux pas faire la différence, c'est un principe physique.

42.4.8 Invariance de l'intervalle

Dans deux secondes, je vais te montrer comment une utilisation intelligente des exponentielles permet de trouver un résultat très fort en relativité. Quoi ? Les exponentielles, les mêmes qu'au cours de math ? Eh oui : la même exponentielle que celle qu'on t'a introduit avec des populations de bactéries qui se multiplient, cette même exponentielle qui la la miraculeuse propriété d'être égale à sa propre dérivée.

Mais n'anticipons pas.

Nous avons déjà signalé que si la quantité $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ était nulle pour un observateur, alors elle était nulle pour tous les observateurs. Supposons deux événements A et B observés par Alice et Bob. Bob les note aux coordonnées (t_a, x_a), et (t_b, x_b) tandis qu'Alice les note en (t'_a, x'_a) et (t'_b, x'_b).

L'intervalle entre les deux événements mesuré par Bob sera

$$s^2 = c^2(t_b - t_a)^2 - (x_b - x_a)^2,$$

tandis que ce même intervalle mesuré par Alice sera

$$s'^2 = c^2(t'_b - t'_a)^2 - (x'_b - x'_a)^2.$$

On peut bien entendu remplacer dans la première équation les t_a, t_b, x_a et x_b par leurs valeurs en termes de t'_a, t'_b, x'_a et x'_b données par les transformations de Lorentz. Tu paries que les trois quart des termes dans le calcul se simplifient et qu'il restera exactement s'^2 ? Je te dis que oui, et je te conseille de me croire sur parole, sinon tu vas devoir lire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} s^2 = c^2(t_b - t_a)^2 - (x_b - x_a)^2 = c^2 &\left(\frac{1}{\gamma(v)}(t'_b + \frac{v}{c^2}x'_b) - \frac{1}{\gamma(v)}(t'_a + \frac{v}{c^2}x'_a)\right)^2 \\ &- \left(\frac{1}{\gamma(v)}(vt'_b + x'_b) - \frac{1}{\gamma(v)}(vt'_a + x'_a)\right)^2. \end{aligned}$$

Jusqu'ici, on n'a fait que remplacer les choses par leurs valeurs données par les transformations de Lorentz. Maintenant on regroupe à l'intérieur de chaque parenthèse les termes de façon à faire apparaitre $\Delta x'$ et $\Delta t'$:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{c^2}{\gamma(v)^2}\left((t'_b - t'_a) + \frac{v}{c^2}(x'_b - x'_a)\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\gamma(v)^2}\big((x'_b - x'_a) + v(t'_b - t'_a)\big)^2 \\ &= \frac{c^2}{\gamma(v)^2}\left((\Delta t')^2 + 2\frac{v}{c^2}\Delta t'\Delta x' + \frac{v^2}{c^4}(\Delta x')^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma(v)^2}\Big((\Delta x')^2 + 2v\Delta x'\Delta t' + v^2(\Delta t')^2\Big). \end{aligned}$$

Là, on a utilisé le produit remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, et on a systématiquement renommé tous les intervalles avec la notation Δ pour être plus compact. Maintenant, on va regrouper tous les termes contentant $(\Delta t')^2$ ensemble, tous ceux qui contiennent $\Delta t'\Delta x'$ ensemble et ceux qui contiennent $(\Delta x')^2$ ensemble. Autre manière de le dire, on met les Δ en évidence comme on peut. On trouve ceci :

$$\begin{aligned} (\Delta t')^2\left(\frac{c^2}{\gamma(v)^2} - \frac{v^2}{\gamma(v)^2}\right) + \Delta t'\Delta x'\left(\frac{2vc^2}{\gamma(v)^2c^2} - \frac{2v}{\gamma(v)^2}\right) \\ + (\Delta x')^2\left(\frac{c^2v^2}{c^4\gamma(v)^2} - \frac{1}{\gamma(v)^2}\right). \end{aligned}$$

À partir de là, je te laisse vérifier (en utilisant le fait que $\gamma(v)^2 = 1 - v^2/c^2$) que les coefficients se simplifient beaucoup et valent finalement respectivement c^2, 0 et -1 comme il se doit. Avec tout ça, nous avons montré le résultat très important suivant :

> L'intervalle entre deux événements est invariant sous les changements de repères d'inertie, c'est-à-dire que la valeur mesurée par n'importe qui qui se déplace en MRU sera toujours la même.

Pourquoi cela est tellement important ? À cause de Pythagore et d'une petite démonstration à coups d'exponentielles[7].

[7] oui oui tout ton cours de math va finir par y passer.

42.4.8.1 Rappel de trigonométrie hyperbolique

SUBSUBSECooZVHLooYwuhAj

Les fonctions de trigonométrie hyperboliques sont :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{42.29}$$

Elles ont pas mal de propriétés en commun avec les sinus cosinus et normaux. D'abord, leurs dérivées sont faciles à calculer :

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$
$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

où tu noteras qu'il n'y a pas de signe moins qui apparaît, contrairement au cas de la trigonométrie normale. Une autre propriété qui ressemble fort à une propriété de la trigonométrie est :

Proposition 42.2.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{42.30}$$

avec un signe moins comme différence avec la trigonométrie.

Démonstration. La preuve revient simplement à calculer en utilisant le produit remarquable de $(a+b)^2$. D'abord, on a :

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{4}\big(e^x + e^{-x}\big)^2 = \frac{1}{4}\big(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\big) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$$

où l'on a utilisé le fait que $(e^x)^2 = e^{2x}$ et que $e^x e^{-x} = 1$. Il te reste à faire la même chose pour $\sinh^2(x)$, la réponse est :

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{4}\big(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\big).$$

En faisant la différence entre les deux, il reste 1. □

Une propriété qui est par contre très différente entre la trigonométrie plane et la trigonométrie hyperbolique, c'est la périodicité. Les fonctions usuelles cos et sin sont périodiques. Pas les fonctions hyperboliques.

Proposition 42.3.
La fonction $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est bijective.*

Démonstration. Il faut démontrer que sinus hyperbolique est injective et surjective. Calculons d'abord les limites. Comme tu sais que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, tu vois facilement que

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty. \tag{42.31}$$

Par ailleurs, la fonction sinus hyperbolique est continue et respecte donc le théorème de la valeur intermédiaire[8]. Soit $y \in \mathbb{R}$. Voyons si il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sinh(x) = y$. Les deux limites indiquent qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\sinh(x_1) < y$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\sinh(x_2) > y$. Le théorème de la valeur intermédiaire conclut qu'il existe un x entre x_1 et x_2 tel que $\sinh(x) = y$. Cela prouve la surjectivité.

Pour l'injectivité, on va utiliser le théorème de Rolle 12.213 et une petite preuve par l'absurde. Supposons que $\sinh(x_1) = \sinh(x_2)$ avec $x_1 \neq x_2$. Dans ce cas, le théorème de Rolle nous dit qu'il existe un x entre x_1 et x_2 tel que $\sinh'(x) = 0$. La dérivée de sinus hyperbolique étant cosinus hyperbolique, il faut se demander il existe un x tel que $\cosh(x) = 0$. Étant donné que $e^x > 0$ pour tout x, en fait le cosinus hyperbolique ne s'annule jamais. □

Un très bon exercice serait de faire un étude complète des fonctions cosinus et sinus hyperbolique. Leur graphes sont donnés à la figure 42.1

Un corolaire de la surjectivité de sinh sur $\mathbb{R}$ est que si je prends n'importe quel deux nombres dont la différence des carrés vaut 1, alors ces carrés sont représentables avec des fonctions hyperboliques :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } x^2 - y^2 = 1,\ \exists \xi \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 = \cosh(\xi) \text{ et } y^2 = \sinh(\xi).$$

La **tangente hyperbolique** est définie par

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \tag{42.32}$$

[8] Théorème 9.95.

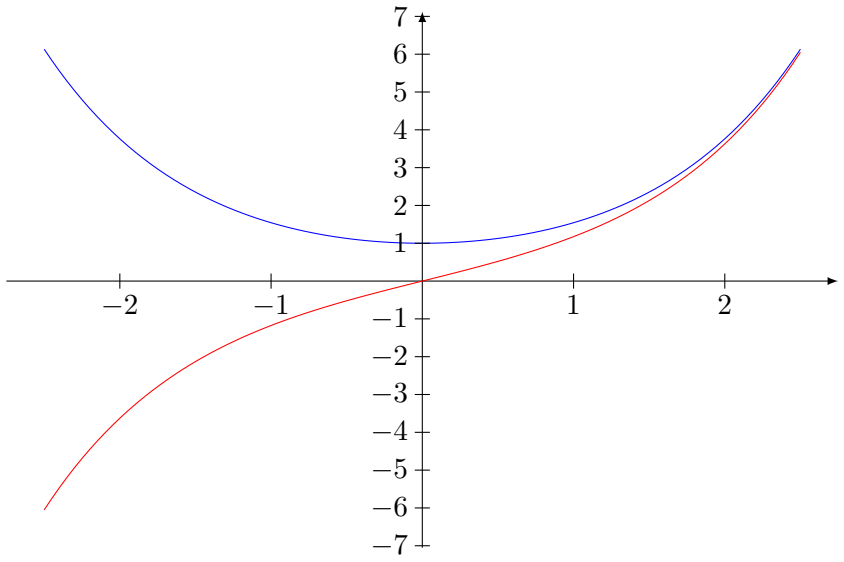


FIGURE 42.1 : En rouge, la fonction $x \mapsto \sinh(x)$ et en bleu, la fonction $x \mapsto \cosh(x)$. LabelFigSinhCoshBuEWsWw

Un bon exercice est de prouver les deux relations suivantes :

$$\sinh(x) = \frac{\tanh(x)}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}} \qquad \cosh(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}}. \tag{42.33}$$ EqRelSinhthcosh

42.4.8.2 Les transformations de Lorentz (bis)

Nous avons prouvé qu'en relativité, l'intervalle est un invariant. Pour cela, nous avons utilisé les transformations de Lorentz démontrées à partir de l'hypothèse d'invariance de la vitesse de la lumière. Eh bien, oublions un instant que la vitesse de la lumière soit invariante, et posons à la place comme hypothèse que l'intervalle soit invariant. C'est-à-dire que si Bob mesure un événement aux coordonnées (t,x) et Alice en (t',x'), alors $c^2t^2 - x^2 = c^2(t')^2 - (x')^2$.

Théorème 42.4.
Les transformations de Lorentz sont les seules qui laissent l'intervalle invariant.

Démonstration. Toute la partie comme quoi les transformations doivent êtres linéaires reste parce que cette partie ne demandait pas l'invariance de la vitesse de la lumière.

Nous cherchons donc les transformations entre Alice et Bob sous la forme

$$\begin{aligned} t' &= \alpha t + \beta x \\ x' &= \gamma t + \delta x \end{aligned}$$

telles que $c^2(t')^2 - (x')^2 = c^2t^2 - x^2$. Lorsque Alice passe devant Bob, ils déclenchent tous deux leurs chronomètre et leurs axes. C'est-à-dire que si à ce moment un événement se trouve à droite pour Alice, il est aussi à droite pour Bob. On doit donc avoir, quand $t = t' = 0$, que $x > 0$ implique $x' > 0$. Cela donne la contrainte que $\delta > 0$. D'autre part, comme leurs chronomètres vont dans le même sens (ils choisissent tout les deux de *compter* le temps et non *décompter*), on a $\alpha > 0$.

En développant l'expression de $(s')^2$ en termes de t et x, on trouve la condition d'invariance de l'intervalle sous la forme :

$$c^2(\alpha^2t^2 + 2\alpha\beta tx + \beta^2x^2) - (\gamma^2t^2 + 2\gamma\delta tx + \delta^2x^2) = c^2t^2 - x^2, \tag{42.34}$$ EqCondInvINter

qui doit être valable pour tout t et pour tout x. En $t = 0$ on trouve la condition

$$\delta^2 - c^2\beta^2 = 1. \tag{42.35}$$

Cela implique qu'il existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\delta^2 = \cosh^2(\xi)$ et $c^2\beta^2 = \sinh(\xi)$. La première équation donne $\delta = \cosh(\xi)$ (il faut rejeter $\delta = -\cosh(\xi)$ parce qu'on a demandé que $\delta > 0$). Pour la seconde, on trouve $c\beta = \sinh(\xi)$ où l'on peut oublier la possibilité $c\beta = -\sinh(\xi)$ parce que cela revient juste à renommer $\xi \to -\xi$ (la fonction sinus hyperbolique est impaire). Bref, il existe un ξ tel que

$$\begin{aligned} \delta &= \cosh(\xi) \\ \beta &= \frac{\sinh(\xi)}{c} \end{aligned} \tag{42.36}$$ EqCondxi

En mettant maintenant $x = 0$ dans la condition (42.34), on trouve la condition

$$\alpha^2 - \frac{\gamma^2}{c^2} = 1.$$

Pour les mêmes raisons qu'avant, il existe un $\eta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha &= \cosh(\eta) \\ \gamma &= c\sinh(\eta). \end{aligned} \tag{42.37}$$

Rien qu'en regardant deux cas très particuliers, on a déjà bien avancé, non ? Remettons maintenant les valeurs (42.36) et (42.37) dans la condition (42.34). En utilisant l'identité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, et en séparant les termes en t^2, x^2 et tx pour satisfaire la condition, il faut

$$\cosh(\eta)\sinh(\xi) = \sinh(\eta)\cosh(\xi) \tag{42.38}$$

parce que les termes en t^2 et x^2 donnent exactement $c^2t^2 - x^2$ et qu'il faut que le terme en tx s'annule. Mettons la condition (42.38) au carré, et substituons $\cosh^2(\eta) = 1 + \sinh^2(\eta)$ et $\cosh^2(\xi) = 1 + \sinh^2(\xi)$, il reste

$$\sinh^2\xi = \sinh^2\eta,$$

ce qui signifie $\sinh\xi = \pm\sinh\eta$, ou encore $\xi = \pm\eta$. On voit que $\xi = -\eta$ ne fonctionne pas dans (42.38), donc on reste avec $\xi = \eta$ et les transformations prennent la forme

$$\begin{aligned} t' &= \cosh(\xi)t + \frac{\sinh(\xi)}{c}x \\ x' &= c\sinh(\xi)t + \cosh(\xi)x. \end{aligned} \tag{42.39}$$

Ce que nous avons prouvé, c'est qu'il existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que les transformations entre Alice et Bob aient cette forme. Il faut trouver ce que vaut ξ en fonction de la vitesse v à laquelle Alice court.

Pour ce faire, étudions le mouvement d'Alice. Bob la voit aux coordonnées (t, vt), ce qui correspond à

$$x' = c\sinh(\xi)t + \cosh(\xi)vt$$

pour Alice. Mais ces coordonnées sont celles de Alice elle-même, donc $x' = 0$, ce qui donne[9] $vt = -c\sinh(\xi)t/\cosh(\xi)$, ou encore

$$\tanh(\xi) = -\frac{v}{c} \tag{42.40}$$

En utilisant les relations (42.33), on trouve

$$\cosh(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \sinh(\xi) = \frac{-v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{42.41}$$

En remettant ces valeurs dans les transformations (42.39), on trouve

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\gamma(v)} \tag{42.42}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\gamma(v)}, \tag{42.43}$$

exactement les transformations de Lorentz !

□

Ce résultat est important pour une raison assez simple : maintenant, la théorie de la relativité est indépendante de toute considérations sur la lumière. En effet, ce que nous venons de prouver, c'est que si il existe une vitesse c telle que $c^2t^2 - x^2 = c^2(t')^2 - (x')^2$, alors (t, x) et (t', x') sont liés par les transformations de Lorentz.

42.4.9 Vitesse limite

Afin de nous passer de l'hypothèse d'invariance de la vitesse de la lumière, nous avons prouvé que l'hypothèse d'invariance de l'intervalle était suffisante. Mais il faut avouer que cette hypothèse n'est pas très intuitive. Nous allons montrer maintenant que l'existence d'une vitesse limite est une troisième hypothèse qui peut être utilisée comme alternative aux deux premières.

[9] Conditions d'existence : $\cosh(\xi) \neq 0$; heureusement, nous avons vu que le cosinus hyperbolique ne s'annule jamais.

42.5 Applications

Une première application sympa est le logiciel[10] *lightspeed*. Si tu es sous Ubuntu-Linux, installe juste le paquet nommé lightspeed, et régales-toi ! Tu verras c'est marrant. Si tu utilises des fenêtres, je laisse faire l'adage « Windows c'est facile ».

42.5.1 Le GPS

Pour qu'un système GPS puisse te localiser, en gros, il t'envoie un signal, tu lui réponds et il mesure le temps qu'il a fallu à la lumière pour faire l'aller-retour. Déjà, tu remarques que cela n'est possible que grâce au fait que la vitesse de la lumière soit finie. Sinon, le GPS ne fonctionnerait pas. Mais il y a mieux.

Comme pour te localiser il faut plusieurs satellites en plus de ton appareil, il faut que les horloges internes de tout ce petit monde soient bien synchronisées, sinon pour mesurer des intervalles de temps et calculer des distances, c'est mal parti. Eh mais un satellite, ça bouge assez vite (surtout que les mesures doivent être très précises), et en plus ça ne fait même pas un MRU, vu que ça tourne en rond. Comme tu vois tout le travail qu'il a fallu faire pour trouver les transformations de Lorentz d'un MRU, tu t'imagines le travail pour un mouvement circulaire ! Eh bien ce travail a été fait, et le résultat est que si on en tient pas compte, les contractions temporelles liées à la relativité sont suffisamment grandes pour complètement dérégler le GPS.

42.5.2 Les ondes électromagnétiques

Tu te souviens qu'au début du chapitre, nous avons dit que le problème qui a amené la relativité était la propagation du champ électrique. Maintenant que nous avons déjà vu une partie des conséquences du problème, il est temps de se rendre compte que les champs électriques et magnétiques sont les objets les plus soumis aux bizarreries relativistes du monde : elles se propagent à la vitesse de la lumière. Regarde un coup autour de toi ; tout ce qui est champ électromagnétique a besoin de la relativité pour être bien compris : GSM, lumière, four à micro-onde, radio, wifi, fibre optique, …

Si un jour un ingénieur te dit qu'il n'y a pas besoin de connaitre la relativité pour inventer la radio (c'est vrai : la radio a été inventée avant la relativité), ni pour construire une fibre optique, dis lui en pensant à moi qu'il utilise tout le temps les équations de Maxwell[11], et que ces équations sont relativistes.

Bref, soit convaincu que tu vis dans un monde relativiste et que les transformations de Lorentz te suivent à chacun de tes pas.

42.6 Mécanique relativiste

Cela est bien beau, mais la dilatation du temps, et les contractions de longueurs doivent bien avoir des répercussions sur la cinématique et la dynamique des objets. Est-ce que le théorème de l'énergie cinétique est encore valable ? est-ce que les lois de Newton tiennent encore la route ?

42.6.1 Des problèmes, toujours des problèmes

Attardons-nous un peu pour faire quelques commentaires sur cette citation du chevalier pégase dans les chevaliers du zodiaque :

> Ses coups vont à la vitesse de la lumière et pourtant je les vois distinctement arriver.

Est-ce possible ? Nous avons vu qu'il y avait des dénominateurs qui s'annulent quand des objets se déplacent plus vite que la lumière ; or pour voir venir un rayon de lumière qui vient vers soi, il faudrait que le rayon émette de la lumière devant elle. Ça semble un peu mal parti pour respecter les lois de la relativité, non ?

Cela pose en tout cas une question qu'il faudra résoudre. On *entend* venir une ambulance parce qu'elle émet du son qui avance plus vite qu'elle. Pas de problèmes avec ça. Mais quid de la *voir* venir ?

On peut voir venir un tram parce qu'il émet de la lumière ; cette lumière allant plus vite que le tram, elle arrive à nos yeux avant le tram lui-même. Cela est très bien. Mettons que le tram avance à 50 km/h ; pour le conducteur, la lumière de son phare avant avance devant lui à la vitesse c. Par conséquent pour un observateur au sol, cette même lumière devrait avancer à la vitesse $c + 50$. Encore une fois, on a un problème d'invariance de la vitesse de la lumière ; mais comme c'est de la lumière, on est habitué à ce que des trucs bizarres arrivent. On ne sera pas étonné que $c+50 = c$ d'une manière ou d'une autre[12]. Pire. Si un

[10] jeu de mot sur « application » ! ah ah !

[11] C'est sous ce nom-là qu'on nomme l'ensemble des équations de l'électromagnétisme comme la loi de l'induction.

[12] et je ne te cache pas que c'est ce qui va arriver.

vaisseau spatial avance à la vitesse 200000 km/s et qu'il envoie en reconnaissance un vaisseau devant lui à la vitesse de 150000 km/s, le vaisseau de reconnaissance ira à la vitesse 150000 km/s par rapport au vaisseau principal. Et par rapport au sol, il ira à la vitesse $150000 + 200000 = 350000$ km/s, ce qui est impossible. Il faudra trouver quelque chose pour que ça se passe bien.

Un autre problème maintenant.

Prenons une masse m que l'on soumet à une force constante F. Par la loi de Newton, $a = F/m$ est constante et la vitesse après un temps t vaut $v = Ft/m$. Pas de bol, ça devient plus grand que la vitesse de la lumière à partir du temps $t = cm/F$. Ça est un problème hein ? Il faut trouver un truc pour qu'avec une force constante, l'accélération diminue.

42.6.2 Loi d'addition des vitesses

Si Bob observe un objet se déplacer à la vitesse V, alors Alice devrait l'observer bouger à la vitesse $V - v$. Tout comme si une vache voit passer un train à 90 km/h, alors le vélo qui avance à 25 km/h le voit passer à 65 km/h.

Maintenant, tu es habitué à ce que rien ne se passe comme d'habitude, donc tu te doutes bien qu'en réalité la bonne formule ne va pas être $V - v$.

Bob observe l'objet aux coordonnées (t, Vt), ce qui fait pour Alice :

$$\left(\frac{t - \frac{v}{c^2}Vt}{\gamma(v)}, \frac{Vt - vt}{\gamma(v)} \right).$$

En divisant le x' d'Alice par le t' d'Alice, on trouve la vitesse mesurée par Alice :

$$V' = \frac{(V-v)t}{\gamma(v)} \frac{\gamma(v)}{t\left(1 - \frac{vV}{c^2}\right)} = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}.$$

La loi de transformation des vitesses relativiste est donc

$$V' = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}. \tag{42.44}$$ EqAddRelVit

Qu'en est-il de notre $c + 50 = c$? Disons que Bob lance un bisou à Alice pendant qu'elle arrive vers lui. Le bisou arrive à la vitesse de la lumière (càd $V = c$) tandis que Alice s'approche de Bob à la vitesse 50 m/s (càd $v = 50$). Donc la vitesse à laquelle Alice devrait voir arriver le bisou est bien $c + 50$. En utilisant la formule d'addition relativiste des vitesses (42.44), nous trouvons

$$V' = \frac{c - 50}{1 - \frac{50c}{c^2}} = \frac{c - 50}{1 - \frac{50}{c}} = \frac{c(c-50)}{c - 50} = c.$$

Donc effectivement en relativité quand on additionne des vitesses il faut penser à la règle du « $c + 50 = c$ ».

42.6.3 L'action d'une force

L'équation fondamentale de la mécanique classique est

$$F = ma.$$

Or tu n'es pas sans savoir que l'accélération est la dérivée seconde de la position par rapport au temps. Nous noterions donc $F = mx''(t)$. Le problème est évidemment que si F est constante, on trouve $v = Ft/m$ qui dépasse toujours la vitesse c quand t est assez grand. Il faudra donc modifier la loi $F = ma$. Pour cela, posons-nous des questions sur la dérivée $x'(t)$. On dérive par rapport au temps ; oui mais nous avons vu que le temps n'est pas le même pour tout le monde. Introduisons donc la notation

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{42.45}$$ Eqvdxdt

qui ne signifie rien d'autre que nous dérivons x par rapport à t et non par rapport au temps t' de quelqu'un d'autre. Dans le cadre de la relativité, ce que signifie l'équation (42.45) est que v est la dérivée de x par rapport à t. Dans le cas où x et t sont les coordonnées de la position d'Alice mesurées par Bob, cela signifie qu'on dérive la position *mesurée par Bob* par rapport au temps *mesuré par Bob*.

Ce que dit la relativité est que cette quantité v ne peut pas varier proportionnellement à la force sous peine de dépasser la vitesse de la lumière. La subtilité est de modifier la loi de Newton en disant que la quantité qui varie sous l'action d'une force n'est plus $dx/dt = v$, mais

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

c'est-à-dire la dérivée de la position *mesurée par Bob* par rapport au temps *mesuré par Alice* ! La loi de Newton $v = Ft/m$ devient donc

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Ft}{m}. \tag{42.46}$$ EsNEwModif

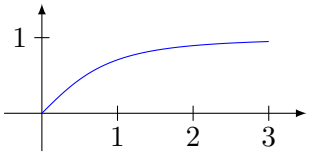
Est-ce que cela résoud le problème ? Pour le savoir, regardons la vitesse acquise par le mobile de masse m soumit à la force F pendant un temps t Il faut résoudre l'équation (42.46) par rapport à v et voir si cela reste bien toujours inférieur à c. On commence par mettre la racine à droite et à élever toute l'équation au carré :

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{F^2t^2}{m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \\ v^2\left(1+\frac{F^2t^2}{c^2m^2}\right) &= \frac{F^2t^2}{m^2} \\ v &= \frac{\sqrt{F^2t^2/m^2}}{\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{c^2m^2}}}, \end{aligned}$$

et donc finalement

$$v(t) = \frac{Ft}{m\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{c^2m^2}}}. \tag{42.47}$$ EqVfntRel

Tu dois remarquer que si F et t ne sont pas trop grands, l'expression F^2t^2/c^2m^2 est minuscule parce que c est énorme. Si on fait l'approximation $F^2t^2/c^2m^2 = 0$ dans cette expression, on retrouve $v = Ft/m$. Cela montre qu'à moins de faire des expériences avec de très grandes forces pendant énormément de temps, on ne peut pas voir la différence entre la mécanique de Newton et la mécanique relativiste.



Sur le graphe suivant, la vitesse en fonction du temps lorsqu'une particule de masse $m = 1$ est soumise à une force constante. Pour les besoins du graphique, nous avons mis à 1 la vitesse c. Tu vois que quand la vitesse n'est pas très grande, le graphique est presque celui d'une droite ; et à partir d'un certain moment, la courbe s'infléchit pour tendre vers 1 sans l'atteindre.

Remarque que si on maintient une accélération constante égale à celle de la gravité terrestre pendant deux heures, on arrive déjà sur la Lune, à une vitesse de 75 km/s, c'est-à-dire encore rien par rapport à la vitesse de la lumière ! Cela pour te dire que la formule (42.47) a l'air d'être très différente de la formule classique $v = Ft/m$, mais en réalité tant qu'on n'atteint pas des forces énormes, elle ressemble très fort.

Vérifions maintenant que la formule (42.47) n'est pas en contradiction avec l'impossibilité de dépasser la vitesse de la lumière. Pour cela, regardons ce qu'il se passe si on applique une force constante F sur un objet de masse m pendant un temps très long. C'est-à-dire : calculons la limite

$$\lim_{t\to\infty} v(t).$$

Tu vois tout de suite qu'on est sur un cas $\frac{\infty}{\infty}$, ce qui t'oblige à utiliser la règle de L'Hôpital. On peut cependant un peu réfléchir et deviner la réponse sans passer par des maths trop compliquées.

En effet, quand t est vraiment énorme, l'expression $\frac{F^2t^2}{m^2c^2}$ devient très grande, et le 1 qui se trouve à côté ne vaut plus grand chose, on peut le négliger.

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{Ft}{m\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{c^2m^2}}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{Ft}{m\sqrt{\frac{F^2t^2}{m^2c^2}}} \\ &= \lim_{v\to\infty} \frac{Ft}{m\frac{Ft}{cm}} \\ &= c. \end{aligned} \tag{42.48}$$

Tout est bien : on arrive au maximum à la vitesse de la lumière, mais il faut un temps infini pour y parvenir. Conclusion : il n'est pas possible d'accélérer un objet jusqu'à atteindre la vitesse de la lumière.

42.6.4 Équivalence entre la masse et l'énergie

Le moment est venu de montrer ce que signifie la fameuse formule $E = mc^2$.

42.7 Principe de correspondance

Nous ne sommes pas parvenu à démontrer la formule (42.46) de la mécanique relativiste qui montre comme un objet accélère sous l'effet d'une force constante. Nous avons juste montré qu'il fallait modifier la loi $v = Ft/m$ et nous avons prit la première modification qui nous soit tombée sous la main, à savoir qu'il faut dériver la position par rapport au temps de l'objet qu'on observe plutôt que par rapport au temps de l'observateur.

En fait, il est possible de prouver rigoureusement[13] la formule

$$\frac{Ft}{m} = \frac{\alpha v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Mais il n'y a pas moyen de trouver la valeur de la constante α. Tout ce qu'il y a moyen de trouver avec l'hypothèse de l'invariance de la vitesse de la lumière est l'existence d'une constante telle que cette formule soit vraie.

Afin de fixer la constante α, il faut faire intervenir un principe physique supplémentaire, le **principe de correspondance**

Loi numéro 4.
Lorsque la vitesse d'une particule est faible, les équations doivent être en première approximation les mêmes que celles de la mécanique classique.

Que signifie *en première approximation* ? Tu sais qu'une fonction $x \mapsto f(x)$ peut être approximée (pour des petits x) par la formule

$$f(x) \simeq f(0) + xf'(0).$$

Nous voudrions donc que Ft/m soit en première approximation égal à v. Nous devons étudier la fonction

$$f(v) = \frac{\alpha v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Voir ce que vaut cette fonction en première approximation lorsque v est petit est un exercice de dérivation. En utilisant la règle de dérivation des fractions, on trouve que

$$f'(v) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\alpha v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

et donc que $f'(0) = \alpha$. Bien entendu, $f(0) = 0$. En première approximation, nous trouvons donc

$$f(v) \simeq \alpha v \tag{42.49}$$

qui doit être égal à la quantité non relativiste v. Nous en déduisons qu'il faut fixer $\alpha = 1$, et on tombe sur la formule relativiste proposée plus haut

$$\frac{Ft}{m} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'utilisation cruciale du principe de correspondance a une répercussion énorme sur notre vision de la physique. En effet, la relativité d'Einstein ne parvient pas à *remplacer* la mécanique de Newton. On a besoin d'invoquer la mécanique de Newton pour fixer la théorie. On peut écrire l'axiome suivant :

$$\lim_{v \to 0} \text{Einstein} = \text{Newton}. \tag{42.50}$$

Cela n'est pas une propriété de la théorie d'Einstein, mais un de ses axiomes !

La relativité ne fait donc pas table rase des principes physiques de la mécanique newtonienne : elle les complète et les contient.

[13] Mais il n'existe pas de démonstrations simples à ma connaissance.

Chapitre 43

Exemples avec Sage

Ce chapitre est un foure-tout de choses que l'on peut faire avec Sage.

43.1 Graphiques

Pour afficher le graphe d'une fonction, vous pouvez faire

```
+--------------------------------------------------------------------+
| SageMath version 8.1, Release Date: 2017-12-07                     |
| Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.        |
| Type "help()" for help.                                            |
+--------------------------------------------------------------------+
sage: plot(cos(x),0,5)
Launched png viewer for Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: f(x)=sin(x)
sage: f.plot(-pi,pi)
Launched png viewer for Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

Un programme externe se lance automatiquement pour afficher le graphique que vous avez demandé.

Il se peut qu'aucun programme ne se lance et vous ayez, au lieu de `Launched png viewer for Graphics object …` uniquement `Created graphics object …`. Disons pour faire court que Sage a produit un `png` et qu'il ne sait pas quel programme externe utiliser pour l'afficher.

La solution est à l'adresse http://doc.sagemath.org/html/en/reference/misc/sage/misc/viewer.html

43.1.1 Autres

Dans le but d'automatiser certaines tâches, j'ai écrit ce module, nomé `outilsINGE.sage`, dans le cadre d'un cours de première année donné à des ingénieurs. Certaines des fonctions définies ici sont utilisée dans les exemples qui suivent.

```
# -*- coding: utf8 -*-
from sage.all import *

"""
This module provides _pragmatic_ tools for solving exercise for
a first year in general mathematics.
"""

# TODO : trouver une bonne traduction pour "point de selle."

def automatedVar(symbol,n):
  """ If symbol = "x" and n=4, return the string 'x1,x2,x3,x4'  """
  s = ",".join([ symbol+str(i) for i in range(1,n+1)])
  return s

class SolveLinearSystem(object):
```

```
  """
  Solve Ax=v and print it in a nice way

  Example :

  A=matrix([ [1,-2,3,-2,0],[3,-7,-2,4,0],[4,3,5,2,0] ])
  v=vector((0,0,0,0,0))
  print SolveLinearSystem(A,v)
  """
  def __init__(self,A,v):
    self.matrix = A
    self.vector = v
    self.nvars = A.ncols()
    s = automatedVar("x",self.nvars)
    self.xx=var(s)
  def equations(self):
    """Return the equations corresponding to the
                self.matrix and self.vector as a list of equations"""
    X=matrix( [self.xx[i] for i in range(0,self.nvars) ]).transpose()
    eqs=[]
    for i in range(0,self.matrix.nrows()):
      exp = (self.matrix*X)[i][0]==self.vector[i]
      eqs.append(exp)
    return eqs
  def solutions(self):
    return solve(self.equations(),self.xx)
  def latex(self):
    """Return the LaTeX's code of the system."""
    a=[]
    a.append(r"""

        \item
          $
          \left\{
          \begin{array}{ll}
    """)
    for eq in self.equations():
      a.append("          "+str(eq).replace("x","x_").replace("*","").↩
          replace("==","=")+"\\\\ \n")
    a.append(r"""
          \end{array}
          \right.
          $
          """)
    return "".join(a)
  def __str__(self):
    a = []
    a.append("The given matrix corresponds to the system")
    for eq in self.equations():
      a.append(str(eq))
    a.append("And the solutions are")
    a.append(str(self.solutions()))
    return "\n".join(a)

def QuadraticMap(A,v):
  """
  Return the result of the quadratic form associated
        with A applied on the vector v, that is the number
  A_ij v^iv^j
  using the summation convention.
  """
```

```
  n = A.nrows()
  if not A.is_symmetric():
    print "Warning : Given matrix is not symmetric"
  if not A.is_square():
    raise TypeError,"Error : The matrix A is not square"
  if not v.degree()==n :
    raise TypeError,"The size do not agree"
  return sum([ A[i,j]*v[i]*v[j] for i in range(n) for j in range(n)  ]).↩
     simplify_full()

class SymmetricMatrix(object):
  """
  Provide informations about the matrix A assuming it is symmetric.
  """
  def __init__(self,A):
    if not A.is_square():
      print "Error : A symmetric matrix must be square"
      raise TypeError
    self.matrix = A
    self.degree = A.nrows()
    self.matrix.set_immutable()
  def primary_principal_submatrix(self,n):
    """
    Return the primary principal submatrix of order n, that is the matrix ↩
       obtained
                by removing the n last lines and columns from self.
    """
    taille=self.degree-n
    v=[]
    for i in range(0,taille):
      v.append(self.matrix[i][0:taille])
    return matrix(v)
  def principal_minors(self):
    """
    Return the list of principal minors. The principal minor of order k is
                the determinant of the primary principal matrix of order k.
    """
    a=[]
    for i in range(self.degree):
      a.append(self.primary_principal_submatrix(i).determinant())
    return a
  def genre_list(self):
    """
    Return the genius of the matrix as a list of booleans in the order
    positive defined, negative defined;
                semidefinite positive, semidefinite negative, indefinite.

    """
    defpos = True
    defneg = True
    semidefpos = True
    semidefneg = True
    indefinie=True
    mineurs = self.principal_minors()
    for i in range(len(mineurs)):
      m = mineurs[i]
      if m == 0:
        defneg=False
        defpos=False
      if m < 0:
        defpos=False
```

```
136         semidefpos=False
137         if i%2==0:
138           defneg=False
139       if m > 0:
140         semidefneg=False
141         if i%2==1:
142           defneg=False
143     if 0 not in mineurs:
144       semidefneg=False
145       semidefpos=False
146     if (defpos==True)or(defneg==True)or(semidefpos==True)or(semidefneg==↩
          True):indefinie=False
147     return [defpos,defneg,semidefpos,semidefneg,indefinie]
148   def __str__(self):
149     return str(self.matrix)
150
151 class QuadraticForm(SymmetricMatrix):
152   """
153   From a symmetric matrix A, provide informations concerning the associated ↩
        quadratic form.
154   """
155   def __init__(self,A):
156     SymmetricMatrix.__init__(self,A)
157     if not A.is_symmetric():
158       print "Warning : matrix is not symmetric"
159   def evaluate(self,v):
160     """
161     Return the value of the quadratic form on the vector v.
162     """
163     return QuadraticMap(self.matrix,v)
164   def diagonalizing_martrix(self):
165     """
166     Return the matrix B such that B^tAB is diagonal.
167     """
168     # The transposition is because, in the matrix B, the eigenvectors have
169     # to be read as column while Sage's matrix constructor takes rows.
170     return matrix(self.orthonormal_basis()).transpose()
171   def new_variables(self):
172     """
173     Give the change of variables needed to put the quadratic form under its ↩
          normal form
174     X=BY
175     where X are the "old" variables
176     """
177     variables = var(automatedVar("y",self.degree))
178     Y = vector(variables)
179     return self.diagonalizing_martrix()*Y
180   def eigenmatrix_left(self):
181     return self.matrix.eigenmatrix_left()
182   def eigenvectors(self):
183     """
184     Return a list of eigenvectors of the matrix.
185
186     As the matrix is symmetric, that list has to be a basis.
187     """
188     D,P = self.eigenmatrix_left()
189     return [P[i] for i in range(P.nrows())]
190   def eigenvalues(self):
191     """
192     Return a list of eigenvalues of the matrix in the same order as the list↩
          of eigenvectors given in
```

```
193         self.eigenvectors()
194       """
195       D,P = self.eigenmatrix_left()
196       return [ D[i,i] for i in range(D.nrows()) ]
197     def orthonormal_basis(self):
198       """
199       Return a basis of eigenvectors normalised to 1 as a list.
200       """
201       M,mu = matrix(self.eigenvectors()).gram_schmidt()
202       return [ v/v.norm() for v in M ]
203     def verification(self):
204       """
205       return the value of the quadratic form on the vector new_variables()
206       """
207       return self.evaluate(self.new_variables())
208 
209     def __str__(self):
210       a = []
211       a.append("Hi guy; I'm the quadratic form associated with the matix")
212       a.append(str(self.matrix))
213       a.append("My eigenvalues and eigenvectors are : ")
214       veps = self.eigenvectors()
215       vaps = self.eigenvalues()
216       for i in range(len(veps)):
217         a.append("%s -> %s"%(str(vaps[i]),str(veps[i])))
218       a.append("I've the following orthonormal basis of eigenvectors :")
219       for v in self.orthonormal_basis():
220         a.append(str(v))
221       a.append("A matrix B such that B^tAB is diagonal is ")
222       a.append(str(self.diagonalizing_martrix()))
223       a.append("I'm quite pretty in the following variables ...")
224       for i in range(self.degree):
225         a.append("x%s = %s"%(str(i+1),str(self.new_variables()[i])))
226       a.append("Look at me when I wear my cool variables")
227       a.append(str(self.verification()))
228       return "\n".join(a)
229 
230 class Extrema(object):
231   """
232   From a function f, provides the informations for the study of the extrema ↩
        :
233   partial derivative
234   critical points
235   Hessian matrix at the critical points
236   Genius of the Hessian and conclusion as local min/max
237 
238   Dear student : remember that this class does not furnish any informations
239         concerning *global* extrema. The latter have to be found
240     among the critical points OR on the border of the domain.
241   """
242   def __init__(self,f):
243     var('x,y')
244     self.fun = f
245     self.gx=self.fun.diff(x).full_simplify()
246     self.gy=self.fun.diff(y).full_simplify()
247     self.gxx=self.gx.diff(x).simplify_full()
248     self.gxy=self.gx.diff(y).full_simplify()
249     self.gyy=self.gy.diff(y).full_simplify()
250     self.cp = solve( [self.gx(x,y)==0,self.gy(x,y)==0],[x,y] )
251   def critical_points(self):
252     """
```

```
253     Return the critical points as a list of tuples (x,y)
254     """
255     a = []
256     for pt in self.cp :
257       try :
258         px = SR(pt[0].rhs())
259         py = SR(pt[1].rhs())
260         a.append((px,py))
261       except TypeError :
262         a.append("  I'm not able to solve these equations.")
263     return a
264   def hessienne(self,a,b):
265     return matrix(SR,2,2,[self.gxx(a,b),self.gxy(a,b),self.gxy(a,b),self.↩
          gyy(a,b)])
266   def __str__(self):
267     a = []
268     a.append ("The function :")
269     a.append(str(self.fun))
270     a.append ("Derivative x and y :")
271     a.append(str(self.gx))
272     a.append(str(self.gy))
273     a.append ("Hessian matrix :")
274     a.append(str(self.hessienne(x,y)))
275     a.append ("Critical points :")
276     for pt in self.critical_points() :
277       a.append(str(pt))
278     for pt in self.critical_points():
279       try :
280         px = pt[0]
281         py = pt[1]
282         a.append("At (%s,%s), the Hessian is"%(str(px),str(py)))
283         try :
284           Hess = SymmetricMatrix(self.hessienne(px,py))
285           for l in Hess.matrix:
286             a.append("  "+str(l))
287           a.append("  Primary principal minors are %s"%str(Hess.↩
              principal_minors()))
288           l = Hess.genre_list()
289           if l[0]==True:
290             a.append("  Hessian positive defined")
291             a.append("  local minimum")
292           if l[1]==True:
293             a.append("  Hessian negative defined")
294             a.append("  local maximum")
295           if l[2]==True:
296             a.append("  Hessian positive semidéfinite")
297             a.append("  I don't conclude")
298           if l[3]==True:
299             a.append("  Hessian negative semidefinite")
300             a.append("  I don't conclude")
301           if l[4]==True:
302             a.append("  Undefinite Hessian")
303             a.append("  «selle» point")
304         except RuntimeError,data :
305           a.append("  "+str(data))
306       except TypeError :
307         a.append("  I'm not able to solve these equations.")
308     return "\n".join(a)
```

tex/sage/outilsINGE.sage

ExBCRXooDVUdcf

Exemple 43.1.
Calculer la limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} \tag{43.1}$$

```
var('x')
f(x)=sin(x)*cos(x)/x
limit(f(x),x=oo)
```

La première ligne déclare que la lettre `x` désignera une variable. Pour la troisième ligne, notez que l'infini est écrit par deux petits « o ». △
ExCWDRooKxnjGL

Exemple 43.2.
Quelques limites et graphes avec Sage.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$.

Pour effectuer cet exercice avec Sage, il faut taper les lignes suivantes :

```
sage: var('x,a,b')
(x, a, b)
sage: f(x)=sin(a*x)/sin(b*x)
sage: limit( f(x),x=0  )
a/b
```

Notez qu'il faut déclarer les variables `x`, `a` et `b`.

(2) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x-2}$

```
sage: f(x)=(sqrt(x**2+1))/(x-2)
sage: limit(f(x),x=oo)
1
sage: limit(f(x),x=-oo)
-1
```

Notez la commande pour la racine carré : `sqrt`. Étant donné que cette fonction diverge en $x = 2$, si nous voulons la tracer, il faut procéder en deux fois :

```
sage: plot(f,(-100,1.9))
Launched png viewer for Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: plot(f,(2.1,100))
Launched png viewer for Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

La première ligne trace de -100 à 1.9 et la seconde de 2.1 à 100. Ces graphiques vous permettent déjà de voir les limites. Attention : ils ne sont pas des *preuves* ! Mais ils sont de sérieux indices qui peuvent vous inspirer dans vos calculs.

△
exJMGTooZcZYNy

Exemple 43.3.
Calculer les dérivées partielles $\partial_x f$, $\partial_y f$, $\partial_x^2 f$, $\partial_{xy}^2 f$, $\partial_{yx}^2 f$ et $\partial_y^2 f$ des fonctions suivantes.

(1) $2x^3 + 3x^2y - 2y^2$
(2) $\ln(xy^2)$
(3) $\tan(x/y)$
(4) $\frac{xy^2}{x+y}$

Le script Sage suivant (`exoDV002.sage`) résout l'exercice :

```
# -*- coding: utf8 -*-

def LesCalculs(f):
  print "Pour la fonction %s"%str(f)
  print "d_x",f.diff(x).simplify_full()
  print "d_y",f.diff(y).simplify_full()
  print "d^2_x",f.diff(x).diff(x).simplify_full()
  print "d_xd_y",f.diff(x).diff(y).simplify_full()
  print "d_yd_x",f.diff(y).diff(x).simplify_full()
  print "d^2_y",f.diff(y).diff(y).simplify_full()
  print ""

def exercise_DV002():
  var('x,y')
  fa(x,y)=2*x**3+3*x**2*y-2*y**2
  fb(x,y)=ln(x*y**2)
  fc(x,y)=tan(x/y)
  fd(x,y)=x*y**2/(x+y)
  LesCalculs(fa)
  LesCalculs(fb)
  LesCalculs(fc)
  LesCalculs(fd)
```

tex/sage/exoDV002.sage

La sortie est :

```
Pour la fonction (x, y) |--> 2*x^3 + 3*x^2*y - 2*y^2
d_x (x, y) |--> 6*x^2 + 6*x*y
d_y (x, y) |--> 3*x^2 - 4*y
d^2_x (x, y) |--> 12*x + 6*y
d_xd_y (x, y) |--> 6*x
d_yd_x (x, y) |--> 6*x
d^2_y (x, y) |--> -4

Pour la fonction (x, y) |--> log(x*y^2)
d_x (x, y) |--> 1/x
d_y (x, y) |--> 2/y
d^2_x (x, y) |--> -1/x^2
d_xd_y (x, y) |--> 0
d_yd_x (x, y) |--> 0
d^2_y (x, y) |--> -2/y^2

Pour la fonction (x, y) |--> tan(x/y)
d_x (x, y) |--> 1/(y*cos(x/y)^2)
d_y (x, y) |--> -x/(y^2*cos(x/y)^2)
d^2_x (x, y) |--> 2*sin(x/y)/(y^2*cos(x/y)^3)
d_xd_y (x, y) |--> -(2*x*sin(x/y) + y*cos(x/y))/(y^3*cos(x/y)^3)
d_yd_x (x, y) |--> -(2*x*sin(x/y) + y*cos(x/y))/(y^3*cos(x/y)^3)
d^2_y (x, y) |--> 2*(x^2*sin(x/y) + x*y*cos(x/y))/(y^4*cos(x/y)^3)

Pour la fonction (x, y) |--> x*y^2/(x + y)
d_x (x, y) |--> y^3/(x^2 + 2*x*y + y^2)
d_y (x, y) |--> (2*x^2*y + x*y^2)/(x^2 + 2*x*y + y^2)
d^2_x (x, y) |--> -2*y^3/(x^3 + 3*x^2*y + 3*x*y^2 + y^3)
d_xd_y (x, y) |--> (3*x*y^2 + y^3)/(x^3 + 3*x^2*y + 3*x*y^2 + y^3)
d_yd_x (x, y) |--> (3*x*y^2 + y^3)/(x^3 + 3*x^2*y + 3*x*y^2 + y^3)
d^2_y (x, y) |--> 2*x^3/(x^3 + 3*x^2*y + 3*x*y^2 + y^3)
```

△

exKGDIooVefujD

Exemple 43.4.
Résoudre les systèmes suivants.

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

(12) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

(14) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

Nous résolvons les systèmes en utilisant Sage avec le script suivant.

```
# -*- coding: utf8 -*-
"""
Ce script Sage résout un certain nombre
de systèmes d'équations linéaires du cours INGE1121
"""

import outilsINGE

def exercise_1_1_bcdefhi():
  # Exercice 1.1.b (INGE1121)
  A=matrix([ [1,-2,3,-2,0],[3,-7,-2,4,0],[4,3,5,2,0] ])
  v=vector((0,0,0,0,0))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
  # Exercice 1.1.c (INGE1121)
  A=matrix([ [2,1,-2,3],[3,2,-1,3],[3,3,3,-3] ])
  v=vector((0,4,9))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
  # Exercice 1.1.d (INGE1121)
  A=matrix([ [1,2,-3],[2,5,2],[3,-1,-4] ])
  v=vector((0,0,0))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
  # Exercice 1.1.e (INGE1121)
  A=matrix([ [1,2,-1],[2,5,2],[1,4,7],[1,3,3] ])
  v=vector((0,0,0,0))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
  # Exercice 1.1.f (INGE1121)
  A=matrix([ [1,1,1,1],[1,1,1,-1],[1,1,-1,1],[1,-1,1,1] ])
```

```
  v=vector((0,4,-4,2))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
  # Exercice 1.1.h (INGE1121)
  A=matrix([ [1,3,3],[1,3,4],[1,4,3] ])
  v=vector((1,0,3))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
  # Exercice 1.1.i (INGE1121)
  A=matrix([ [1,-3,2],[-3,3,-1],[2,-1,0] ])
  v=vector((-6,17,3))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
```

tex/sage/exo11.sage

Le résultat est le suivant :

```
The given matrix corresponds to the system
x1 - 2*x2 + 3*x3 - 2*x4 == 0
3*x1 - 7*x2 - 2*x3 + 4*x4 == 0
4*x1 + 3*x2 + 5*x3 + 2*x4 == 0
And the solutions are
[
[x1 == -23/16*r19, x2 == -5/16*r19, x3 == 15/16*r19, x4 == r19, x5 == r18]
]
The given matrix corresponds to the system
2*x1 + x2 - 2*x3 + 3*x4 == 0
3*x1 + 2*x2 - x3 + 3*x4 == 4
3*x1 + 3*x2 + 3*x3 - 3*x4 == 9
And the solutions are
[
[x1 == 3*r20 - 7, x2 == -4*r20 + 11, x3 == r20, x4 == 1]
]
The given matrix corresponds to the system
x1 + 2*x2 - 3*x3 == 0
2*x1 + 5*x2 + 2*x3 == 0
3*x1 - x2 - 4*x3 == 0
And the solutions are
[
[x1 == 0, x2 == 0, x3 == 0]
]
The given matrix corresponds to the system
x1 + 2*x2 - x3 == 0
2*x1 + 5*x2 + 2*x3 == 0
x1 + 4*x2 + 7*x3 == 0
x1 + 3*x2 + 3*x3 == 0
And the solutions are
[
[x1 == 9*r21, x2 == -4*r21, x3 == r21]
]
The given matrix corresponds to the system
x1 + x2 + x3 + x4 == 0
x1 + x2 + x3 - x4 == 4
x1 + x2 - x3 + x4 == -4
x1 - x2 + x3 + x4 == 2
And the solutions are
[
[x1 == 1, x2 == -1, x3 == 2, x4 == -2]
]
The given matrix corresponds to the system
x1 + 3*x2 + 3*x3 == 1
x1 + 3*x2 + 4*x3 == 0
x1 + 4*x2 + 3*x3 == 3
And the solutions are
```

```
[
[x1 == -2, x2 == 2, x3 == -1]
]
The given matrix corresponds to the system
x1 - 3*x2 + 2*x3 == -6
-3*x1 + 3*x2 - x3 == 17
2*x1 - x2 == 3
And the solutions are
[
[x1 == 37, x2 == 71, x3 == 85]
]
```

△
ExBGCEooPIQgGW

Exemple 43.5.
Pour chacun des systèmes suivants $A \cdot X = B$,

(1) Résoudre le système par échelonnement,

(2) Calculer A^{-1},

(3) Vérifier votre réponse en calculant $A^{-1}B$. Qu'êtes-vous censé obtenir ?

Les énoncés sont

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{43.2}$$

Nous utilisons Sage pour fournir la réponse. Le code suivant résout le système et donne l'inverse de la matrice :

```
# -*- coding: utf8 -*-

import outilsINGE

def exercise_1_3():
  A=matrix([[2,1,-2],[3,2,2],[5,4,3]])
  v=vector((10,1,4))
  print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
  print "Matrice inverse :"
  print A.inverse()
```

tex/sage/exo13.sage

La sortie est ici :

```
The given matrix corresponds to the system
2*x1 + x2 - 2*x3 == 10
3*x1 + 2*x2 + 2*x3 == 1
5*x1 + 4*x2 + 3*x3 == 4
And the solutions are
[
[x1 == 1, x2 == 2, x3 == -3]
]
Matrice inverse :
[  2/7  11/7  -6/7]
[ -1/7 -16/7  10/7]
[ -2/7   3/7  -1/7]
```

△

exBNGVooIvKfTT

Exemple 43.6.
Sachant que $(-1,0,1,0)$ est un vecteur propre de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&0&1&1\\-1&1&2&1\\1&1&1&0\end{pmatrix} \tag{43.3}$$

(1) Diagonaliser A au moyen d'une matrice orthogonale

(2) Écrire la forme quadratique X^tAX sous forme d'une somme pondérée de carrés.

Calculons Av afin de savoir la valeur propre associée au vecteur donné :

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&0&1&1\\-1&1&2&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\3\\0\end{pmatrix}. \tag{43.4}$$

La valeur propre est donc 3. Nous savons donc que $(\lambda-3)$ pourra être factorisé dans le polynôme caractéristique.

Pour le reste de l'exercice c'est standard et c'est résolu de la façon suivante :

```
# -*- coding: utf8 -*-

import outilsINGE

def exercise_6_5():
  A=matrix(QQ,4,4,[2,1,-1,1,1,0,1,1,-1,1,2,1,1,1,1,0])
  x=outilsINGE.QuadraticForm(A)
  print x
```

tex/sage/exo65.sage

qui retourne

```
Hi guy; I'm the quadratic form associated with the matix
[ 2  1 -1  1]
[ 1  0  1  1]
[-1  1  2  1]
[ 1  1  1  0]
My eigenvalues and eigenvectors are :
3 -> (1, 0, -1, 0)
3 -> (0, 1, 2, 1)
-1 -> (1, 0, 1, -2)
-1 -> (0, 1, 0, -1)
I've the following orthonormal basis of eigenvectors :
(1/2*sqrt(2), 0, -1/2*sqrt(2), 0)
(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)
(1/6*sqrt(6), 0, 1/6*sqrt(6), -1/3*sqrt(6))
(-1/2*sqrt(1/3), 3/2*sqrt(1/3), -1/2*sqrt(1/3), -1/2*sqrt(1/3))
A matrix B such that B^tAB is diagonal is
[   1/2*sqrt(2)            1/2    1/6*sqrt(6) -1/2*sqrt(1/3)]
[             0            1/2              0  3/2*sqrt(1/3)]
[  -1/2*sqrt(2)            1/2    1/6*sqrt(6) -1/2*sqrt(1/3)]
[             0            1/2   -1/3*sqrt(6) -1/2*sqrt(1/3)]
I'm quite pretty in the following variables ...
x1 = -1/2*sqrt(1/3)*y4 + 1/2*sqrt(2)*y1 + 1/6*sqrt(6)*y3 + 1/2*y2
x2 = 3/2*sqrt(1/3)*y4 + 1/2*y2
x3 = -1/2*sqrt(1/3)*y4 - 1/2*sqrt(2)*y1 + 1/6*sqrt(6)*y3 + 1/2*y2
x4 = -1/2*sqrt(1/3)*y4 - 1/3*sqrt(6)*y3 + 1/2*y2
Look at me when I wear my cool variables
3*y1^2 + 3*y2^2 - y3^2 - y4^2
```

△
exZHGRooTQpVpq

Exemple 43.7.
Rechercher les extrémums des fonctions suivantes

(1) $f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$

(2) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

(3) $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{4y^3}{3} - x^2 - 3x - 4y - 3$

Les corrigés sont créés par le script Sage `exo101.sage`

```
# -*- coding: utf8 -*-

import outilsINGE

def exercise_10_1_A():
   var('x,y')
   f(x,y)=2-sqrt(x**2+y**2)
   print outilsINGE.Extrema(f)
def exercise_10_1_B():
   var('x,y')
   f(x,y)=x**3+3*x*y**2-15*x-12*y
   print outilsINGE.Extrema(f)
def exercise_10_1_C():
   var('x,y')
   f(x,y)=x**3/3+4*y**3/3-x**2-3*x-4*y-3
   print outilsINGE.Extrema(f)
```

Des réponses :

(1)
```
The function :
(x, y) |--> -sqrt(x^2 + y^2) + 2
Derivative x and y :
(x, y) |--> -x/sqrt(x^2 + y^2)
(x, y) |--> -y/sqrt(x^2 + y^2)
Hessian matrix :
[-sqrt(x^2 + y^2)*y^2/(x^4 + 2*x^2*y^2 + y^4)                          x*y/(x^2 + y^2)^(3/2)]
[                        x*y/(x^2 + y^2)^(3/2) -sqrt(x^2 + y^2)*x^2/(x^4 + 2*x^2*y^2 + y^4)]
Critical points :
(0, 0)
At (0,0), the Hessian is
   power::eval(): division by zero
```

Ici nous voyons que Sage a du mal à calculer la matrice hessienne en $(0,0)$. En effet, nous tombons sur une division par zéro. Pour résoudre l'exercice, il faut se rendre compte que la fonction $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est toujours positive et est nulle seulement au point $(0,0)$. Donc f est toujours plus petite ou égale à deux tandis que $f(0,0) = 2$. Le point est donc un maximum global.

(2)
```
The function :
(x, y) |--> x^3 + 3*x*y^2 - 15*x - 12*y
Derivative x and y :
(x, y) |--> 3*x^2 + 3*y^2 - 15
(x, y) |--> 6*x*y - 12
Hessian matrix :
[6*x 6*y]
[6*y 6*x]
Critical points :
(2, 1)
(1, 2)
(-1, -2)
(-2, -1)
```

```
At (2,1), the Hessian is
   (12, 6)
   (6, 12)
   Primary principal minors are [108, 12]
   Hessian positive defined
   local minimum
At (1,2), the Hessian is
   (6, 12)
   (12, 6)
   Primary principal minors are [-108, 6]
   Undefinite Hessian
   «selle» point
At (-1,-2), the Hessian is
   (-6, -12)
   (-12, -6)
   Primary principal minors are [-108, -6]
   Undefinite Hessian
   «selle» point
At (-2,-1), the Hessian is
   (-12, -6)
   (-6, -12)
   Primary principal minors are [108, -12]
   Hessian negative defined
   local maximum
```

(3)
```
The function :
(x, y) |--> 1/3*x^3 - x^2 + 4/3*y^3 - 3*x - 4*y - 3
Derivative x and y :
(x, y) |--> x^2 - 2*x - 3
(x, y) |--> 4*y^2 - 4
Hessian matrix :
[2*x - 2       0]
[      0     8*y]
Critical points :
(3, 1)
(-1, 1)
(3, -1)
(-1, -1)
At (3,1), the Hessian is
   (4, 0)
   (0, 8)
   Primary principal minors are [32, 4]
   Hessian positive defined
   local minimum
At (-1,1), the Hessian is
   (-4, 0)
   (0, 8)
   Primary principal minors are [-32, -4]
   Undefinite Hessian
   «selle» point
At (3,-1), the Hessian is
   (4, 0)
   (0, -8)
   Primary principal minors are [-32, 4]
   Undefinite Hessian
   «selle» point
At (-1,-1), the Hessian is
   (-4, 0)
   (0, -8)
   Primary principal minors are [32, -4]
   Hessian negative defined
```

```
local maximum
```

△
exHWIHooOAvaDQ

Exemple 43.8.
Déterminer les valeurs extrêmes et les points de selle des fonctions suivantes.

(1) $f(x,y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y$.

(2) $f(x,y) = e^{x^2+xy}$.

(3) $f(x,y) = e^x \sin(y)$.

Certains corrigés de cet exercice ont étés réalisés par Sage. Le script utilisé est `exo103.sage`

```
# -*- coding: utf8 -*-

import outilsINGE

def exercise_10_3_A():
  var('x,y')
  f(x,y)=x**2+4*x+y**2-2*y
  print outilsINGE.Extrema(f)

def exercise_10_3_H():
  var('x,y')
  f(x,y)=exp(x**2+x*y)
  print outilsINGE.Extrema(f)

def exercise_10_3_Q():
  var('x,y')
  f(x,y)=exp(x)*sin(y)
  print outilsINGE.Extrema(f)
```

tex/sage/exo103.sage

Des réponses :

(1)
```
The function :
(x, y) |--> x^2 + y^2 + 4*x - 2*y
Derivative x and y :
(x, y) |--> 2*x + 4
(x, y) |--> 2*y - 2
Hessian matrix :
[2 0]
[0 2]
Critical points :
(-2, 1)
At (-2,1), the Hessian is
   (2, 0)
   (0, 2)
   Primary principal minors are [4, 2]
   Hessian positive defined
   local minimum
```

(2)
```
The function :
(x, y) |--> e^(x^2 + x*y)
Derivative x and y :
(x, y) |--> (2*x*e^(x^2) + y*e^(x^2))*e^(x*y)
(x, y) |--> x*e^(x^2 + x*y)
Hessian matrix :
[(4*x*y*e^(x^2) + y^2*e^(x^2) + 2*(2*x^2 + 1)*e^(x^2))*e^(x*y)                    (x*y*e^(x^2) +
[                  (x*y*e^(x^2) + (2*x^2 + 1)*e^(x^2))*e^(x*y)
Critical points :
```

```
(0, 0)
At (0,0), the Hessian is
   (2, 1)
   (1, 0)
   Primary principal minors are [-1, 2]
   Undefinite Hessian
   «selle» point
```

(3)
```
The function :
(x, y) |--> e^x*sin(y)
Derivative x and y :
(x, y) |--> e^x*sin(y)
(x, y) |--> e^x*cos(y)
Hessian matrix :
[ e^x*sin(y)  e^x*cos(y)]
[ e^x*cos(y) -e^x*sin(y)]
Critical points :
   I'm not able to solve these equations.
   I'm not able to solve these equations.
At (   ,I), the Hessian is
   I'm not able to solve these equations.
At (   ,I), the Hessian is
   I'm not able to solve these equations.
```

Ici, Sage n'est pas capable de résoudre les équations qui annulent le jacobien. Les équations à résoudre sont pourtant faciles :

$$\begin{cases} e^x \cos(y) = 0 & (43.5a) \\ e^x \sin(y) = 0 & (43.5b) \end{cases}$$

Étant donné que l'exponentielle ne s'annule jamais, il faudrait avoir en même temps $\cos(y) = 0$ et $\sin(y) = 0$, ce qui est impossible. La fonction n'a donc aucun extrémums local.

△
exEEHPooKDxLTJ

Exemple 43.9.
Considérons la fonction

$$f(x, y) = xy^2 e^{-(x^2+y^2)/4}. \tag{43.6}$$

(1) Montrer qu'il y a une infinité de points critiques.

(2) Déterminer leur nature.

Voici la fonction Sage qui fournit les informations :

```
# -*- coding: utf8 -*-

import outilsINGE

def exercise_10_4():
  var('x,y')
  f(x,y)=x*y**2*exp(-(x**2+y**2)/4)
  print outilsINGE.Extrema(f)
```

tex/sage/exo104.sage

La sortie est

```
The function :
(x, y) |--> x*y^2*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2)
Derivative x and y :
(x, y) |--> -1/2*(x^2 - 2)*y^2*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2)
(x, y) |--> -1/2*(x*y^3 - 4*x*y)*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2)
```

```
Hessian matrix :
[                1/4*(x^3 - 6*x)*y^2*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2) 1/4*((x^2 - 2)*y^3 - 4*(x^2 - 2)*y)*e^(-
[1/4*((x^2 - 2)*y^3 - 4*(x^2 - 2)*y)*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2)        1/4*(x*y^4 - 10*x*y^2 + 8*x)*e^(-
Critical points :
(r17, 0)
(-sqrt(2), -2)
(sqrt(2), -2)
(-sqrt(2), 2)
(sqrt(2), 2)
At (r17,0), the Hessian is
   (0, 0)
   (0, 2*r17*e^(-1/4*r17^2))
   Primary principal minors are [0, 0]
   Hessian positive semidéfinite
   I don't conclude
   Hessian negative semidefinite
   I don't conclude
At (-sqrt(2),-2), the Hessian is
   (4*sqrt(2)*e^(-3/2), 0)
   (0, 4*sqrt(2)*e^(-3/2))
   Primary principal minors are [32*e^(-3), 4*sqrt(2)*e^(-3/2)]
   Hessian positive defined
   local minimum
At (sqrt(2),-2), the Hessian is
   (-4*sqrt(2)*e^(-3/2), 0)
   (0, -4*sqrt(2)*e^(-3/2))
   Primary principal minors are [32*e^(-3), -4*sqrt(2)*e^(-3/2)]
   Hessian negative defined
   local maximum
At (-sqrt(2),2), the Hessian is
   (4*sqrt(2)*e^(-3/2), 0)
   (0, 4*sqrt(2)*e^(-3/2))
   Primary principal minors are [32*e^(-3), 4*sqrt(2)*e^(-3/2)]
   Hessian positive defined
   local minimum
At (sqrt(2),2), the Hessian is
   (-4*sqrt(2)*e^(-3/2), 0)
   (0, -4*sqrt(2)*e^(-3/2))
   Primary principal minors are [32*e^(-3), -4*sqrt(2)*e^(-3/2)]
   Hessian negative defined
   local maximum
```

Notez la présence de `r1` comme paramètres dans les solutions. Tous les points avec $y = 0$ sont des points critiques. Cependant, Sage[1] ne parvient pas à conclure la nature de ces points $(x, 0)$.

Notons que le nombre $f(x, y)$ a toujours le signe de x parce que y^2 et l'exponentielle sont positives. Toujours ? En tout cas lorsque $x \neq 0$. Prenons un point $(a, 0)$ avec $a > 0$. Dans un voisinage de ce point, nous avons $f(x, y) > 0$ parce que si $a > 0$, alors $x > 0$ dans un voisinage de a. Le point $(a, 0)$ est un minimum local parce que $0 = f(a, 0) \leqslant f(x, y)$ pour tout (x, y) dans un voisinage de $(a, 0)$.

De la même façon, les points $(a, 0)$ avec $a < 0$ sont des maximums locaux parce que dans un voisinage, la fonction est négative.

Le point $(0, 0)$ n'est ni maximum ni minimum local. C'est un point de selle.

△

exRNZKooUIOfPU

Exemple 43.10.
Dériver les fonctions suivantes.

(1) $\sin\big(\ln(x)\big)$

(2) $\dfrac{\sin x}{x}$;

[1] ou, plus précisément, le programme que j'ai écrit avec Sage.

(3) e^{x^2}

(4) $\cos(x)^{\sin(x)}$

Le programme suivant par Sage résout l'exercice :

```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

var('x')
f=sin(ln(x))
print f.diff(x)
f=sin(x)/x
print f.diff(x)
f=exp(x**2)
print f.diff(x)
f=cos(x)**(sin(x))
print f.diff(x)
```

tex/sage/corrDerive_0002.sage

Le résultat est :

```
cos(log(x))/x
cos(x)/x - sin(x)/x^2
2*x*e^(x^2)
(log(cos(x))*cos(x) - sin(x)^2/cos(x))*cos(x)^sin(x)
```

△

exLFYFooNCXCJz

Exemple 43.11.
Donner une approximation de ln(1.0001).

```
--------------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.5.3, Release Date: 2010-09-04                           |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.            |
--------------------------------------------------------------------------
sage: numerical_approx(ln(1.0001))
0.0000999950003332973
```

△

Chapitre 44

Épilogue : la constante de Weiner

Nous voici à la fin du Frido. Nous avons étudié beaucoup de math, et beaucoup reste à voir. En guise de conclusion, je voudrais vous parler de la constante de Weiner, introduite dans [888]. Il s'agit d'une constante, qui comme π ou e intervient dans à peu près tous les domaines de la mathématique.

Comme toujours, il existe énormément de définitions équivalentes différentes ; nous choisissons celle-ci, motivée par le théorème de Weinersmith 27.57.

DEFooXVXSooVJDTPy

Définition 44.1.
La ***constante de Weiner*** W_c *est l'unique réel p tel que l'espace $L^p(\mathbb{R}^7)$ soit un espace de Hilbert.*

Cette constante intervient de façon centrale dans de nombreux résultats dans tous les domaines ; nous en citons quelques-uns.

44.0.1 Résultats prouvés dans le Frido

(1) La moyenne de tout couple de réels peut être calculée en divisant leur somme par la constante de Weiner[1].

(2) La constante de Weiner donne l'indice du groupe alterné dans le groupe symétrique pour tous les ordres non triviaux, théorème 5.45.

(3) La constante de Weiner donne une borne inférieure optimale pour l'ensemble des nombres premiers.

(4) La constante de Weiner est à la fois l'unique point fixe non trivial de la fonction factorielle et le nombre de points fixes de la même fonction.

(5) Tout automorphisme d'anneau a un polynôme minimal dont le degré est donné par la constante de Weiner.

(6) Le théorème de Jordan 27.216 affirme que le nombre de composantes connexes du complémentaire d'une courbe de Jordan dans $\mathbb{R}^2$ est donné par la constante de Weiner.

(7) L'égalité $ab = 0$ dans un anneau n'implique pas spécialement $a = 0$ ou $b = 0$ lorsque la caractéristique de l'anneau est égale à la constante de Weiner, et seulement dans ce cas.

(8) Pour l'anecdote, la constante de Weiner donne le rapport τ/π ; elle est aussi la partie entière de e.

(9) C'est le degré maximal d'un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$, et le degré de la clôture algébrique de $\mathbb{R}$, voir les propositions 12.84 et 6.137.

44.0.2 Autres résultats

Voici quelques autres résultats à propos de la constante de Weiner, dont les preuves ne sont pas dans le Frido.

(1) La constante de Weiner est le plus petit n tel que tout monoïde libre sur un nombre fini ou même dénombrable de générateurs soit un sous-monoïde du monoïde libre à n générateurs. Les conséquences pour l'informatique sont laissées en exercice[889].

[1] C'est historiquement la première propriété énoncée de la constante de Weiner ; elle suggère également une notion de constante de Weiner généralisée pour moyenner un nombre arbitraire de nombres. La construction des nombres de Weiner généralisés est en projet dans la section 1.5.

(2) C'est le nombre de valeurs possibles pour la probabilité d'un événement dépendant asymptotiquement d'une suite de variables aléatoires indépendantes[199].

(3) Comme chacun sait, l'équation diophantienne $a^n + b^n = c^n$ n'a de solutions non-triviales que pour n inférieur à la constante de Weiner[199].

(4) Un lien entre π et la constante de Weiner : le minimum de π_p est atteint lorsque p vaut la constante de Weiner[890].

(5) Pour chaque $0 < p < \infty$ nous notons π_p le rapport entre le diamètre du cercle (pour la norme p dans $\mathbb{R}^2$) et sa longueur. La valeur de p qui minimise π_p est la constante de Weiner[890].

(6) La constante de Wiener est l'unique nombre premier à être hautement composé[891].

44.0.3 Conjectures

Il reste encore de nombreuses conjectures mettant en valeur la constante de Weiner :

(1) La fameuse droite critique de la conjecture de Riemann est donnée par l'inverse de la constante de Weiner.

(2) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de nombres premiers. Est-ce que l'ensemble

$$\{(p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \text{ tel que } 0 < |p - q| = W_c\} \tag{44.1}$$

est fini ?

D'aucuns pourraient objecter que tout cela n'est que fantaisie et trivialité. Il n'en est rien. La preuve que la constante de Weiner est centrale en mathématique est précisément qu'elle avait déjà un nom et un symbole réservé bien avant le début de l'histoire des mathématiques.

Le fait est que toutes les mathématiques que vous connaissez se basent sur les nombres entiers ; cela n'est pas du tout une trivialité.

Chapitre 45

Développements possibles

Nous donnons ici quelques idées de développements associés aux leçons mises à jour en 2021. Parfois, il est bon d'ajouter quelques lemmes au développement proposé, si il est trop court. Si l'un ou l'autre ne vous semble pas adapté à l'énoncé de la leçon, faites le moi savoir.

45.1 Algèbre et géométrie

Exemples d'équations en arithmétique.

PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

- Partitions d'un entier en parts fixées, théorème 26.102.
- Théorème de Sophie Germain, théorème 6.19.

Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

- Structure des groupes d'ordre pq, théorème 5.25.
- Les groupes abéliens finis, théorème 5.23.

Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

- Le groupe alterné A_n est simple, théorème 5.51.
- Structure des groupes d'ordre pq, théorème 5.25.

Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

- Coloriage de roulette (18.10.14.1) et composition de colliers (18.10.14.2).
- Nombres de Bell, théorème 15.188.
- Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décompositions de fractions en éléments simples, théorème 26.102.

Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

- Théorème de Carathéodory 11.41.
- Points extrémaux de la boule unité dans $\mathcal{L}(E)$, théorème 13.43.
- Enveloppe convexe du groupe orthogonal 13.44.

Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

- Le lemme au lemme de Morse, lemme 17.118, voir le lemme de Morse lui-même 20.198.
- Connexité des formes quadratiques de signature donnée, proposition 17.117.
- Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, lemme 13.46 ou proposition 13.47.
- Ellipsoïde de John-Loewner, proposition 17.122.

Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

- Algorithme des facteurs invariants 4.120.
- Méthode du gradient à pas optimal 17.114.

Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

- Décomposition polaire 13.38.
- Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, lemme 13.46 ou proposition 13.47.
- Théorème 8.225 sur la diagonalisation de matrices symétriques.

Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

- Racine carrée d'une matrice hermitienne positive, proposition 13.33.
- Le lemme au lemme de Morse, lemme 17.118.
- Connexité des formes quadratiques de signature donnée, proposition 17.117.
- Théorème 8.225 sur la diagonalisation de matrices symétriques.

Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

- Théorème de Burnside sur les sous-groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, théorème 8.310.
- Décomposition de Dunford, théorème 8.262.
- Théorème de Lie-Kolchin 12.108.

Exponentielle de matrices. Applications.

- Décomposition de Dunford, théorème 8.262.
- Théorème de Von Neumann 17.61.

Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

- Théorème de Burnside sur les sous-groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, théorème 8.310.
- Racine carrée d'une matrice hermitienne positive, proposition 13.33, parce qu'un utilise le résultat de diagonalisation simultanée.
- Équation de Hill $y'' + qy = 0$, proposition 32.52.
- Décomposition de Dunford, théorème 8.262.
- Endomorphismes cycliques et commutant dans le cas diagonalisable, proposition 8.298.

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

- Équation de Hill $y'' + qy = 0$, proposition 32.52.
- Décomposition de Dunford, théorème 8.262.
- Théorème de Lie-Kolchin 12.108.

Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

- Racine carrée d'une matrice hermitienne positive, proposition 13.33.
- Théorème de Burnside sur les sous-groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, théorème 8.310.
- Décomposition de Dunford, théorème 8.262.
- Algorithme des facteurs invariants 4.120.

Déterminant. Exemples et applications.

- Forme alternées de degré maximum, proposition 8.8, parce que c'est ce théorème qui donne l'unicité du déterminant du fait que l'espace est de dimension un.
- Théorème de Rothstein-Trager 20.97 parce que le résultant en est un.
- Ellipsoïde de John-Loewner, proposition 17.122.

Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

- Forme alternées de degré maximum, proposition 8.8, parce que c'est ce théorème qui donne l'unicité du déterminant du fait que l'espace est de dimension un.
- Théorème de la dimension 4.14.
- Extrema liés, théorème 17.73.
- Théorème 8.225 sur la diagonalisation de matrices symétriques.
- Stabilité du rang par extension des scalaires, proposition 8.281.

Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

- Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, théorème 23.96.
- Lemme de Morse, lemme 20.198.
- Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, lemme 13.46 ou proposition 13.47.
- Algorithme des facteurs invariants 4.120.

Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques, proposition 19.25.
- Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

Extensions de corps. Exemples et applications.

- Polynômes séparables, proposition 6.162.
- Lien entre les racines (multiples) de P et P', proposition 6.162.
- Théorème de l'élément primitif 6.171.
- À propos d'extensions de $\mathbb{Q}$, le lemme 6.182.
- Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.
- Polygones réguliers constructibles, théorème de Gauss-Wantzel, 19.90.

Corps finis. Applications.

- Théorème de Chevalley-Warning 19.45.
- Loi de réciprocité quadratique 19.41.
- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, corolaire 19.34.
- Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

Nombres premiers. Applications.

- Structure des groupes d'ordre pq, théorème 5.25.
- Divergence de la somme des inverses des nombres premiers, théorème 15.134.
- RSA, section 19.2, plus l'exponentielle rapide, plus la recherche de couples de Bézout.
- Forme faible du théorème de Dirichlet (avec ses deux lemmes) 19.30.
- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, corolaire 19.34, peut-être redondant avec les groupes d'ordre pq.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques, proposition 19.25.
- Théorème des deux carrés, théorème 6.25.

Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

- RSA, section 19.2, plus l'exponentielle rapide, plus la recherche de couples de Bézout.
- Forme faible du théorème de Dirichlet (avec ses deux lemmes) 19.30.
- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, corolaire 19.34.
- Groupes d'ordre pq, théorème 5.25.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques, proposition 19.25.

Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

- RSA, section 19.2. Assez indirect : la système RSA se base sur la formule $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$, laquelle se base sur l'isomorphisme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ et leurs générateurs.
- Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, théorème 23.96, parce que c'est avec lui qu'on montre les générateurs du groupe modulaire dans le corolaire 23.97.
- Générateurs du groupe diédral, proposition 18.174
- Table des caractères du groupe diédral, section 18.17.
- Le groupe alterné est simple, théorème 5.51.
- Les groupes de pavage de $\mathbb{R}^2$, théorème 18.218.

Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples

- Table des caractères du groupe diédral, section 18.17.
- Table des caractères du groupe symétrique S_4, section 16.5.

Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de GL(E). Applications.

- Théorème de Burnside sur les sous-groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, théorème 8.310.
- Décomposition de Bruhat, théorème 13.45.
- Le lemme au lemme de Morse, lemme 17.118.
- Décomposition polaire 13.38.
- Enveloppe convexe du groupe orthogonal 13.44.
- Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, lemme 13.46 ou proposition 13.47.
- Théorème de Von Neumann 17.61.

Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

- RSA, section 19.2, plus l'exponentielle rapide, plus la recherche de couples de Bézout.
- Coloriage de roulette (18.10.14.1) et composition de colliers (18.10.14.2).
- Forme alternées de degré maximum, proposition 8.8.
- Décomposition de Bruhat, théorème 13.45.
- Polynômes semi-symétriques, proposition 8.18.
- Table des caractères du groupe diédral, section 18.17.
- Table des caractères du groupe symétrique S_4, section 16.5.
- Isométries du cube, section 5.7.
- Le groupe alterné est simple, théorème 5.51.

Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

- Théorème de Burnside sur les sous-groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, théorème 8.310.
- Forme faible du théorème de Dirichlet (avec ses deux lemmes) 19.30 (parce qu'on parle de polynômes cyclotomiques qui sont basés sur les racines de l'unité).
- Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, théorème 23.96, parce qu'on y utilise un peu les propriétés des nombres du type $|z| = 1$.
- Générateurs du groupe diédral, proposition 18.174.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques, proposition 19.25.
- Théorème de Wedderburn 19.31.

Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

- Les groupes de pavage de $\mathbb{R}^2$, théorème 18.218.
- Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, théorème 23.96.
- Polynômes semi-symétriques, proposition 8.18.
- Lemme de Morse, lemme 20.198.
- Générateurs du groupe diédral, proposition 18.174.
- Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, lemme 13.46 ou proposition 13.47.
- Théorème de Wedderburn 19.31.
- Isométries du cube, section 5.7.
- Algorithme des facteurs invariants 4.120.

45.2 Analyse

Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Équations différentielles ordinaires. Exemple de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires

Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications

Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Illustration de la notion d'indépendance en probabilité.

Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

- Le théorème de Weierstrass sur la limite uniforme de fonctions holomorphes, théorème 26.109.
- Les théorèmes sur les fonctions définies par des intégrales, section 17.4.
- Lemme de Morse, lemme 20.198.
- Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler.

Utilisation de la notion de convexité en analyse.

- Ellipsoïde de John-Loewner, proposition 17.122.
- Peut-être la méthode de Newton, théorème 34.63, mais je ne sais pas très bien pourquoi.

Transformation de Fourier. Applications.

- Formule sommatoire de Poisson, proposition 29.15.
- Équation de Schrödinger, théorème 32.55.

Séries de Fourier. Exemples et applications.

- Formule sommatoire de Poisson, proposition 29.15.
- Inégalité isopérimétrique, théorème 29.61.
- Fonction continue et périodique dont la série de Fourier ne converge pas, proposition 29.56.

Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

- Formule sommatoire de Poisson, proposition 29.15.
- Théorème taubérien de Hardy-Littlewood 17.6.
- Le théorème de Weierstrass sur la limite uniforme de fonctions holomorphes, théorème 26.109.
- La proposition 27.23 qui donne des indications sur la notion de classes dans L^p.
- Théorème de Montel 27.255.
- Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler.

Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

- La proposition 32.50 donne un résultat sur $y'' + qy = 0$ à partir d'une hypothèse de croissance.
- L'inégalité de Jensen, proposition 36.87.
- Méthode de Newton, théorème 34.63, si on parvient à expliquer quelle est le lien entre la méthode de Newton et la convexité.
- Ellipsoïde de John-Loewner, proposition 17.122.
- Extrema liés, théorème 17.73.
- Théorème d'inversion locale, théorème 17.47.
- Lemme de Morse, lemme 20.198.

Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

- Espace de Sobolev $H^1(I)$, théorème 31.6.
- Inégalité isopérimétrique, théorème 29.61.
- Dual de $L^p\big([0,1]\big)$ pour $1 < p < 2$, proposition 27.185.

Espaces de fonctions : exemples et applications.

- Théorème de Fischer-Riesz 27.56.
- Espace de Sobolev $H^1(I)$, théorème 31.6.
- Théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39.
- Dual de $L^p\big([0,1]\big)$ pour $1 < p < 2$, proposition 27.185.

Utilisation de la notion de compacité.

- Le théorème de Weierstrass sur la limite uniforme de fonctions holomorphes, théorème 26.109.
- Suite telle que $\lim_{k\to\infty} d(u_{k+1}, u_k) = 0$, théorème 7.357.
- Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, lemme 13.46 ou proposition 13.47.
- Théorème de Montel 27.255.
- Ellipsoïde de John-Loewner, proposition 17.122.

Connexité. Exemples et applications.

- Théorème de Runge 26.70.
- Suite telle que $\lim_{k\to\infty} d(u_{k+1}, u_k) = 0$, théorème 7.357.
- Théorème de Brouwer en dimension 2 via l'homotopie 26.66.
- Théorème de Lie-Kolchin 12.108.

Espaces complets. Exemples et applications.

- La proposition 27.23 qui donne des indications sur la notion de classes dans L^p.
- Prolongement de fonction définie sur une partie dense, théorème 17.128
- Complétion d'un espace métrique, théorème 17.135.
- Théorème de Fischer-Riesz 27.56.
- Théorème de Cauchy-Lipschitz global 17.40.

Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

- Prolongement de fonction définie sur une partie dense, théorème 17.128
- Lemme de Borel 15.186.
- Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler.
- Théorème de Tietze 27.176.

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

- Théorème de Fischer-Riesz 27.56.
- Théorème de Banach-Steinhaus 10.188.
- Dual de $L^p\big([0,1]\big)$ pour $1 < p < 2$, proposition 27.185.

45.3 Anciennes leçons

Transformation de Fourier. Applications.

- Théorème de Cauchy-Lipschitz global 17.40.

Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

- Équation de Hill $y'' + qy = 0$, proposition 32.52.
- Théorème de stabilité de Lyapunov 32.46.
- Le système proie-prédateur de Lotka-Volterra 32.47
- Théorème de Cauchy-Lipschitz global 17.40, si on parvient à réexprimer le théorème dans le cas linéaire.

Exemples de parties denses et applications.

- Prolongement de fonction définie sur une partie dense, théorème 17.128
- Complétion d'un espace métrique, théorème 17.135.
- Points extrémaux de la boule unité dans $\mathcal{L}(E)$, théorème 13.43.
- Critère de Weyl, proposition 28.10.
- Densité des polynômes dans $C^0\big([0,1]\big)$, théorème de Bernstein 36.191.
- Enveloppe convexe du groupe orthogonal 13.44.

Applications des formules de Taylor.

- Méthode de Newton, théorème 34.63
- Lemme de Morse, lemme 20.198.

Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

- Divergence de la somme des inverses des nombres premiers, théorème 15.134.
- Formule sommatoire de Poisson, proposition 29.15.
- Théorème taubérien de Hardy-Littlewood 17.6.
- Nombres de Bell, théorème 15.188.
- Partitions d'un entier en parts fixes, proposition 26.102.
- Théorème d'Abel angulaire 20.88.

Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$

- La proposition 27.23 qui donne des indications sur la notion de classes dans L^p.
- Théorème de Fischer-Riesz 27.56.
- Espace de Sobolev $H^1(I)$, théorème 31.6.
- Dual de $L^p\big([0,1]\big)$ pour $1 < p < 2$, proposition 27.185.

Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

- Processus de Galton-Watson, théorème 38.59.
- Formule sommatoire de Poisson, proposition 29.15.
- Nombres de Bell, théorème 15.188.
- Théorème d'Abel angulaire 20.88.

Applications des nombres complexes à la géométrie.

- Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, théorème 23.96.
- Générateurs du groupe diédral, proposition 18.174
- Le groupe circulaire, proposition 23.95.

Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^2$. Réseaux. Exemples

- Les groupes de pavage de $\mathbb{R}^2$, théorème 18.218.

Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

- Isométries du cube, section 5.7.

Exemples d'équations diophantiennes.

- Dans 3.2.6, nous résolvons $ax + by = c$ en utilisant Bézout (théorème 1.358).
- L'exemple 3.80 résout l'équation $x^2 + 2 = y^3$ en parlant de l'extension $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ et de stathme.
- Les propositions 3.84 et 3.86 parlent de triplets pythagoriciens.
- Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décompositions de fractions en éléments simples, théorème 26.102.

Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

- Suites de décomposition et théorème de Jordan-Hölder 2.22.
- Groupes d'ordre pq, théorème 5.25.
- Le groupe alterné est simple, théorème 5.51.
- Théorème de Lie-Kolchin 12.108.

Sous-groupes finis de $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$. Applications

- Les groupes de pavage de $\mathbb{R}^2$, théorème 18.218.

Groupes finis. Exemples et applications.

- RSA, section 19.2, plus l'exponentielle rapide, plus la recherche de couples de Bézout.
- Théorème de Wedderburn 19.31.
- Théorème de Sylow 5.11. Tout le théorème, c'est un peu long. On peut se contenter de la partie qui dit que G contient un p-Sylow.
- Coloriage de roulette (18.10.14.1) et composition de colliers (18.10.14.2).
- Suites de décomposition et théorème de Jordan-Hölder 2.22.
- Théorème de Burnside sur les sous-groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, théorème 8.310.
- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, corolaire 19.34.
- Groupes d'ordre pq, théorème 5.25.
- Générateurs du groupe diédral, proposition 18.174.
- Le groupe alterné est simple, théorème 5.51.
- Isométries du cube, section 5.7.

Angles : Définitions et utilisation en géométrie

- Les groupes de pavage de $\mathbb{R}^2$, théorème 18.218.

Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications

- Les groupes de pavage de $\mathbb{R}^2$, théorème 18.218.

Applications affines

- Les groupes de pavage de $\mathbb{R}^2$, théorème 18.218.

Utilisation des groupes en géométrie.

- Coloriage de roulette (18.10.14.1) et composition de colliers (18.10.14.2).
- Forme alternées de degré maximum, proposition 8.8, parce que c'est ce théorème qui donne l'unicité du déterminant du fait que l'espace est de dimension un.
- Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, théorème 23.96.
- Générateurs du groupe diédral, proposition 18.174
- Isométries du cube, section 5.7.
- Les groupes de pavage de $\mathbb{R}^2$, théorème 18.218.

Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Exemples et applications.

- Décomposition de Bruhat, théorème 13.45.
- Algorithme des facteurs invariants 4.120.

Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire. Applications

- Décomposition polaire 13.38.
- Décomposition de Dunford, théorème 8.262.

Résultant. Applications.

- Théorème de Rothstein-Trager 20.97.
- Théorème de Kronecker 8.26.

Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.

- Racine carrée d'une matrice hermitienne positive, proposition 13.33.
- Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, lemme 13.46 ou proposition 13.47.

Exemples d'utilisation de la notion de dimension d'un espace vectoriel.

- Forme alternées de degré maximum, proposition 8.8, parce que c'est ce théorème qui donne l'unicité du déterminant du fait que l'espace est de dimension un.
- Théorème de la dimension 4.14, bien que ce soit plutôt dans la définition de la dimension que dans l'utilisation.
- Théorème de Carathéodory 11.41.

Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

- Théorème de Rothstein-Trager 20.97.
- Partitions d'un entier en parts fixes, proposition 26.102.

Anneau de séries formelles. Applications.

- Nombres de Bell, théorème 15.188.
- Partitions d'un entier en parts fixes, proposition 26.102.

Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

- Extrema liés, théorème 17.73.
- Enveloppe convexe du groupe orthogonal 13.44.
- Une forme canonique pour les transvections et dilatations, théorème 13.12.

Algèbre des polynômes d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

- Racine carrée d'une matrice hermitienne positive, proposition 13.33.

Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

- Le lemme au lemme de Morse, lemme 17.118.
- Connexité des formes quadratiques de signature donnée, proposition 17.117.
- Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, lemme 13.46 ou proposition 13.47.
- Ellipsoïde de John-Loewner, proposition 17.122.

Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Applications à la réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

- Endomorphismes cycliques et commutant dans le cas diagonalisable, proposition 8.298.

Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies.

- Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, théorème 23.96. Parce que l'action est avec des homographies.

Anneaux principaux. Applications

- Polynôme minimal d'endomorphisme semi-simple, théorème 8.106.
- Théorème de Bézout, proposition 3.59.
- Théorème des deux carrés, théorème 6.25.
- Algorithme des facteurs invariants 4.120.

Représentations de groupes finis de petit cardinal.

- Table des caractères du groupe diédral, section 18.17.
- Table des caractères du groupe symétrique S_4, section 16.5.

Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geqslant 2$). Polynômes symétriques. Applications.

- À propos d'extensions de $\mathbb{Q}$, le lemme 6.182.
- Polynômes semi-symétriques, proposition 8.18.
- Théorème de Chevalley-Warning 19.45.
- Théorème de Kronecker 8.26.

Racines d'un polynômes. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe.

- À propos d'extensions de $\mathbb{Q}$, le lemme 6.182.

135 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.

- Points extrémaux de la boule unité dans $\mathcal{L}(E)$, théorème 13.43.
- Générateurs du groupe diédral, proposition 18.174
- Isométries du cube, section 5.7.

248 - Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales. Exemples.

- Théorème taubérien de Hardy-Littlewood 17.6.
- Théorème de Runge 26.70.
- Densité des polynômes dans $C^0\big([0,1]\big)$, théorème de Bernstein 36.191.

250 - Loi des grands nombres. Théorème central limite. Applications.

- Presque tous les nombres sont normaux, proposition 36.189.
- Estimation des grands écarts, théorème 36.175.

251 - Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

- Presque tous les nombres sont normaux, proposition 36.189.
- Estimation des grands écarts, théorème 36.175.
- Densité des polynômes dans $C^0\big([0,1]\big)$, théorème de Bernstein 36.191.
- Problème de la ruine du joueur, section 39.4.

252 - Loi binomiale. Loi de Poisson. Applications.

- Estimation des grands écarts, théorème 36.175.
- Densité des polynômes dans $C^0\big([0,1]\big)$, théorème de Bernstein 36.191.
- Problème de la ruine du joueur, section 39.4.

219 - Problèmes d'extrémums.

- Extrema liés, théorème 17.73.
- Lemme de Morse, lemme 20.198.
- Ellipsoïde de John-Loewner, proposition 17.122.

Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

- Théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39.
- Théorème de stabilité de Lyapunov 32.46.
- Équation de Hill $y'' + qy = 0$, proposition 32.52.
- Le système proie-prédateur de Lotka-Volterra 32.47

223 - Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

- Calcul d'intégrale par suite équirépartie 28.10.
- Théorème taubérien de Hardy-Littlewood 17.6.
- Méthode de Newton, théorème 34.63
- Théorème d'Abel angulaire 20.88.

224 - Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

- Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décompositions de fractions en éléments simples, théorème 26.102.
- Divergence de la somme des inverses des nombres premiers, théorème 15.134.
- Formule sommatoire de Poisson, proposition 29.15, grâce à l'exemple 29.16.
- Méthode de Newton, théorème 34.63
- Estimation des grands écarts, théorème 36.175.
- Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décompositions de fractions en éléments simples, théorème 26.102.

226 - Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

- Processus de Galton-Watson, section 38.7.
- Méthode de Newton, théorème 34.63
- Méthode du gradient à pas optimal 17.114.

245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

- Le théorème de Weierstrass sur la limite uniforme de fonctions holomorphes, théorème 26.109.
- Théorème de Montel 27.255.
- Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler.

238 - Méthodes de calcul approché d'intégrales et de solutions d'équations différentielles.

- Calcul d'intégrale par suite équirépartie 28.10.

222 - Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.

- Équation $y'' + qy = 0$, 32.9.3.

225 - Étude locale de surfaces. Exemples.

- Lemme de Morse, lemme 20.198.

Exemples de problèmes d'interversion de limites.

- Théorème taubérien de Hardy-Littlewood 17.6 parce que l'énoncé revient à montrer la limite $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.
- Le théorème de Weierstrass sur la limite uniforme de fonctions holomorphes, théorème 26.109.
- La proposition 27.23 qui donne des indications sur la notion de classes dans L^p. Ça utilise la convergence monotone pour pour permuter une somme et une intégrale.
- Les théorèmes sur les fonctions définies par des intégrales, section 17.4.
- Nombres de Bell, théorème 15.188.

254 - Espaces de Schwartz et distributions tempérées.

- Formule sommatoire de Poisson, proposition 29.15.
- Équation de Schrödinger, théorème 32.55.

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

- Extrema liés, théorème 17.73.
- Théorème d'inversion locale, théorème 17.47.
- Lemme de Morse, lemme 20.198.
- Théorème de Von Neumann 17.61.

Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

- Les théorèmes sur les fonctions définies par des intégrales, section 17.4.
- Lemme de Borel 15.186.

232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

- Méthode de Newton, théorème 34.63
- Méthode du gradient à pas optimal 17.114.

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

- Calcul d'intégrale par suite équirépartie 28.10.
- Théorème de Rothstein-Trager 20.97.

256 - Transformation de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

- Formule sommatoire de Poisson, proposition 29.15.
- Équation de Schrödinger, théorème 32.55.

Espaces de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$

- Formule sommatoire de Poisson, proposition 29.15.
- Équation de Schrödinger, théorème 32.55.

Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

- L'équation $(x-x_0)^\alpha u = 0$ pour $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, théorème 30.50.
- Espace de Sobolev $H^1(I)$, théorème 31.6.
- Équation de Schrödinger, théorème 32.55.

Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

- Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décompositions de fractions en éléments simples, théorème 26.102.

Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

- Processus de Galton-Watson, théorème 38.59.
- Théorème d'inversion locale, théorème 17.47.
- Théorème de Brouwer en dimension 2 via l'homotopie 26.66.
- Théorème de Picard 17.34 et l'inséparable théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39
- Inégalité isopérimétrique, théorème 29.61.
- Théorème des quatre sommets, théorème 21.106.
- Formule sommatoire de Poisson, proposition 29.15.

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples.

- Extrema liés, théorème 17.73.
- Théorème de Von Neumann 17.61.
- Lemme de Morse, lemme 20.198.

Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.

- La proposition 27.23 qui donne des indications sur la notion de classes dans L^p.
- Le théorème de Weierstrass sur la limite uniforme de fonctions holomorphes, théorème 26.109.
- Les théorèmes sur les fonctions définies par des intégrales, section 17.4.
- Théorème de Fischer-Riesz 27.56.
- Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler.
- Problème de la ruine du joueur, section 39.4.

Utilisation en probabilités du produit de convolution et de la transformation de Fourier ou de Laplace.

- Processus de Galton-Watson, lemme 38.58 et théorème 38.59.
- Fonction caractéristique 36.92.
- Théorème central limite 36.136.

Suites de variables de Bernoulli indépendantes.

- Processus de Galton-Watson, section 38.7.
- Estimation des grands écarts, théorème 36.175.
- Densité des polynômes dans $C^0\big([0,1]\big)$, théorème de Bernstein 36.191.
- Problème de la ruine du joueur, section 39.4.

Chapitre 46

GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008
Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc.

http://fsf.org/

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom : to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation : a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals ; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "**Transparent**" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "**Opaque**".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "**Title Page**" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

The "**publisher**" means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section "**Entitled XYZ**" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "**Acknowledgements**", "**Dedications**", "**Endorsements**", or "**History**".) To "**Preserve the Title**" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties : any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts : Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque

copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version :

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another ; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History" ; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the

original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/ .

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

RELICENSING

"Massive Multiauthor Collaboration Site" (or "MMC Site") means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A "Massive Multiauthor Collaboration" (or "MMC") contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

"CC-BY-SA" means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

"Incorporate" means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is "eligible for relicensing" if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

ADDENDUM : How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page :

> Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the “with … Texts.” line with this :

> with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

Bibliographie

[1] Laurent Claessens. Mes inventions personnelles, lire avec prudence et merci de me dire si c'est correct. Attention : je ne prétends pas avoir découvert ce résultat ; un résultat qui a cette référence signifie seulement que j'ai ré-inventé une partie de l'énoncé ou de la preuve. Je serais étonné qu'il y ait ici des résultats vraiment présents nulle part ailleurs.

[2] Mathologer. Numberphile v. Math : the truth about 1+2+3+...=-1/12 13 jan. 2018. URL https://www.youtube.com/watch%3Fv%3DYuIIjLr6vUA.

[3] Numberphile. Does -1/12 Protect Us From Infinity ? - Numberphile 16 février 2024. URL https://www.youtube.com/watch%3Fv%3Dbeakj767uG4.

[4] Wikipédia. Multi-indice — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DMulti%2Dindice%26oldid%3D155192272.

[5] jperon. Tri de l'index tenant compte des accents octobre 2022. URL https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/issues/162.

[6] A. Casamayou and N Cohen and G. Connan and T. Dumont and L. Fousse and F. Maltey and M. Meulien and M. Mezzarobba and C. Pernet and M. N. Thiéry and Zimmermann P.. Calcul mathématique avec Sage URL https://www.sagemath.org/sagebook/french.html.

[7] Laurent Claessens. Every non-empty Dedekind-finite totally ordered set has a maximum (using Zorn's lemma and without using natural numbers) 4 janvier 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/5019157/every%2Dnon%2Dempty%2Ddedekind%2Dfinite%2Dtotally%2Dordered%2Dset%2Dhas%2Da%2Dmaximum%2Dusing%2Dzorns.

[8] Laurent Claessens. Dedekind-finite set and 'well-founded' for inclusion 6 janvier 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/5019769/dedekind%2Dfinite%2Dset%2Dand%2Dwell%2Dfounded%2Dfor%2Dinclusion.

[9] Wikipédia. Relation binaire — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DRelation%5Fbinaire%26oldid%3D183967099.

[10] Wikipédia. Axiome du choix — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DAxiome%5Fdu%5Fchoix%26oldid%3D116151439.

[11] Wikipédia. Produit cartésien 3 mai 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit%5Fcart%25C3%25A9sien.

[12] Wikipédia. Élément maximal — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3D%C3%89l%C3%A9ment%5Fmaximal%26oldid%3D180618994.

[13] C. Antonini and J.-F. Quint and P. Borgnat and J. Bérard and E. Lebeau and E. Souche and O. Teytaud. Les Mathématiques pour l'Agrégation URL http://les.mathematiques.free.fr/pdf/agreg.zip.

[14] Wikipédia. Lemme de Zorn — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DLemme%5Fde%5FZorn%26oldid%3D164572297.

[15] Patrice Goyer. Communication personnelle

[16] Wikipédia. Algèbre des parties d'un ensemble — Wikipédia, l'encyclopédie libre 19 juillet 2023. URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DAlg%25C3%25A8bre%5Fdes%5Fparties%5Fd%2527un%5Fensemble%26oldid%3D205030352.

[17] ChromoMaxwell. Re : Exo Associativité de la différence symétrique 2006. URL https://forums.futura%2Dsciences.com/mathematiques%2Dsuperieur/101396%2Dexo%2Dassociativite%2Dde%2Ddifference%2Dsymetrique.html.

[18] Wikipédia. Loi de composition interne — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DLoi%5Fde%5Fcomposition%5Finterne%26oldid%3D174035538.

[19] Wikipédia. Équipotence — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3D%25C3%2589quipotence%26oldid%3D157942537.

[20] Jérôme Von Buhren. Cardinal d'un ensemble et théorème de Cantor-Bernstein URL http://vonbuhren.free.fr/Prepa/Problemes/Cardinal%5Fensemble%5Ftheoreme%5FCantor%5FBernstein.pdf.

[21] Wikipédia. Ensemble infini — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DEnsemble%5Finfini%26oldid%3D182905419.

[22] . Infinite set — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DInfinite%5Fset%26oldid%3D1018913868.

[23] Wikipédia. Axiome du choix dénombrable — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DAxiome%5Fdu%5Fchoix%5Fd%25C3%25A9nombrable%26oldid%3D165350212.

[24] Jean Abou Sama. Every non-empty Dedekind-finite totally ordered set has a maximum (using Zorn's lemma and without using natural numbers) 25 septembre 2025. URL https://math.stackexchange.com/a/5097932/294061.

[25] Alexander Bogomolny. Cantor-Bernstein-Schroeder theorem URL https://www.cut%2Dthe%2Dknot.org/WhatIs/Infinity/Bernstein.shtml.

[26] Wikipédia. Théorème de comparabilité cardinale — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5Fcomparabilit%25C3%25A9%5Fcardinale%26oldid%3D158933871.

[27] Ramez Labib-Sami. Théorie de la cardinalité -2. Ensembles infini non dénombrables. URL http://www.logique.jussieu.fr/%7Esami/Ensembles%5FL3/5%5FCardinaux%5Fnon%5Fdenombrables.pdf.

[28] Wikipédia. Théorème de Cantor — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FCantor%26oldid%3D166939268.

[29] Patrice Tauvel. Cours d'algèbre

[30] Wikipédia. Morphisme d'anneaux — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DMorphisme%5Fd%2527anneaux%26oldid%3D129892066.

[31] Wikipédia. Corps ordonné — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DCorps%5Fordonn%25C3%25A9%26oldid%3D125185412.

[32] Wikipédia. Valeur absolue — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DValeur%5Fabsolue%26oldid%3D181957023.

[33] Wikipédia. Corps valué — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DCorps%5Fvalu%25C3%25A9%26oldid%3D172545490.

[34] Wikipédia. Nombre entier juillet 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre%5Fentier.

[35] Christine Laurent-Thiébaut. Axiomatique des nombres URL http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ax/ax.pdf.

[36] Wikipédia. Construction des entiers naturels 24 juin 2024. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Construction%5Fdes%5Fentiers%5Fnaturels.

[37] Wikipédia. Axiome de l'infini 24 juin 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome%5Fde%5Fl%2527infini.

[38] Laurent Schwartz. Analyse I

[39] Ilie Grigorescu. Lecture 4 - finite and infinite sets URL http://www.math.miami.edu/%7Eigrigore/teaching/mth533/lecture4%5Fmth433.pdf.

[40] Grégoire Locqueville. Communication privée 3 janvier 2025.

[41] Wikipédia. Ensemble dénombrable — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DEnsemble%5Fd%25C3%25A9nombrable%26oldid%3D150759981.

[42] Pedro Tamaroff. Prove that if A is an infinite set then Ax2 is equipotent to A URL https://math.stackexchange.com/questions/1041731/prove%2Dthat%2Dif%2Da%2Dis%2Dan%2Dinfinite%2Dset%2Dthen%2Da%2Dtimes%2D2%2Dis%2Dequipotent%2Dto%2Da.

[43] cdrcprds. Ensembles équipotents : ajouter ou soustraire des cardinalités URL https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/issues/146%23issuecomment%2D588513588.

[44] MikeMathMan. Cardinality of the Cartesian Product of Two Equinumerous Infinite Sets URL https://math.stackexchange.com/questions/1383755/cardinality%2Dof%2Dthe%2Dcartesian%2Dproduct%2Dof%2Dtwo%2Dequinumerous%2Dinfinite%2Dsets.

[45] Paul Milan. Morphismes de groupe 29 décembre 2024. URL https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/math%5Fpour%5Faller%5Fplus%5Floin/en%5Froute%5Fvers%5Fsuperieur/12%5Fmorphismes%5Fgroupes.pdf.

[46] Wikipédia. Groupe ordonné 22 aout 2022. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Groupe%5Fordonn%25C3%25A9.

[47] Peter Hendrikus Kropholler. GROUPS RINGS AND FIELDS URL http://www.maths.gla.ac.uk/%7Ephk/ulearning.pdf.

[48] Wikipédia. Sous-groupe caractéristique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DSous%2Dgroupe%5Fcaract%25C3%25A9ristique%26oldid%3D178218738.

[49] Anonyme. Théorie des groupes URL http://ekladata.com/CKoLuTDRT9S2sx5BPX9DkCDAcdo.pdf.

[50] Wikipédia. Groupe symétrique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DGroupe%5Fsym%25C3%25A9trique%26oldid%3D146656747.

[51] Jean Delcourt. Groupes-permutations URL http://delcourt.u%2Dcergy.fr/StrucAlg/chap%5F5.pdf.

[52] Olivier Guibé. Décomposition d'une permutation en un produit de cycles à supports disjoints URL http://math.mad.free.fr/wordpress/wp%2Dcontent/uploads/cycle.pdf.

[53] Wikiversité. Théorie des groupes/Groupes symétriques finis — Wikiversité 2021. URL https://fr.wikiversity.org/wiki/Th%25C3%25A9orie%5Fdes%5Fgroupes/Groupes%5Fsym%25C3%25A9triques%5Ffinis.

[54] François Combes. Algèbre et géométrie

[55] Wikipédia. Permutation — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DPermutation%26oldid%3D89805226.

[56] Wikipédia. Taquin — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTaquin%26oldid%3D190177267.

[57] numberphile. Why is this 15-Puzzle Impossible ? URL https://www.youtube.com/watch%3Fv%3DYI1WqYKHi78.

[58] FRANÇOIS MAUCOURANT. COURS ET DM AR4 : GROUPE SYMÉTRIQUE II, ACTION DE GROUPE 17 décembre 2024. URL https://perso.univ%2Drennes1.fr/francois.maucourant/enseignement/cours%5FAR4%5F2.pdf.

[59] Sonner. How can I prove that interior product obeys a graded Leibniz rule ? 17 may 2016. URL https://math.stackexchange.com/q/1789506.

[60] Mathieu Mansuy. Autour du théorème des restes chinois 16 juillet 2025. URL https://mathieu%2Dmansuy.fr/pdf/agreg%2Dinterne%2Dcours%2Drestes%2Dchinois.pdf.

[61] Nicolas Ressayre. Anneaux et idéaux URL https://licence%2Dmath.univ%2Dlyon1.fr/lib/exe/fetch.php%3Fmedia%3Dp24:s6%5Fanneaux%5Fcorps:cours.pdf.

[62] Pierre-Emmanuel Chaput. ANNEAUX EUCLIDIENS, PRINCIPAUX, FACTORIELS URL http://chaput.perso.math.cnrs.fr/documents/ch6%2Danneau%2Deucl%2Dprinc%2Dfact.pdf.

[63] Wikipédia. Primalité dans un anneau — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DPrimalit%25C3%25A9%5Fdans%5Fun%5Fanneau%26oldid%3D145407116.

[64] Wikipédia. Primalité dans un anneau — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DPrimalit%25C3%25A9%5Fdans%5Fun%5Fanneau%26oldid%3D127919489.

[65] Wikipédia. Diviseur de zéro — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DDiviseur%5Fde%5Fz%25C3%25A9ro%26oldid%3D143858271.

[66] Fabio Lucchini. gcd(a S)= a gcd(S) (integral domain or ufd) 28 juillet 2023. URL https://math.stackexchange.com/q/4743750.

[67] Patrice Goyer and Jean-Claude Cid. Communication personnelle 28 septembre 2023.

[68] Wikipidia. Idéal principal 4 décembre 2024. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Id%25C3%25A9al%5Fprincipal.

[69] Wikipédia. Anneau euclidien — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DAnneau%5Feuclidien%26oldid%3D126145344.

[70] Wikiversité. Arithmétique/Divisibilité et congruences dans Z — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DArithm%25C3%25A9tique/Divisibilit%25C3%25A9%5Fet%5Fcongruences%5Fdans%5FZ%26oldid%3D650617. En ligne ; accédé le 25-mai-2017

[71] Wikipédia. Lemme d'Euclide — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DLemme%5Fd%2527Euclide%26oldid%3D179832418.

[72] Michel Cretin. Anneaux principaux et factoriels URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/%7Ecretin/OralAlgebre/annprincfact.pdf.

[73] Pierre Lux. Théorème de Bezout, théorème de Gauss URL https://pierrelux.net/documents/cours/ts/bezout%5Fgauss.pdf.

[74] Wikipédia. Lemme d'Euclide — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DLemme%5Fd%2527Euclide%26oldid%3D112046247.

[75] Wikipédia. Théorème fondamental de l'arithmétique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Ffondamental%5Fde%5Fl%2527arithm%25C3%25A9tique%26oldid%3D110036012.

[76] Wikipédia. Formule d'itération de Pascal 6 novembre 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule%5Fd%2527it%25C3%25A9ration%5Fde%5FPascal.

[77] Chat GPT. Chat GPT avec un prompt pas très compliqué. URL https://chatgpt.com.

[78] Wikipédia. Formule du pion 29 décembre 2024. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule%5Fdu%5Fpion.

[79] Wikipédia. Binomial coefficient 29 décembre 2024. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial%5Fcoefficient.

[80] Wikipédia. Coefficient binomial 29 décembre 2024. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Coefficient%5Fbinomial%23Divisibilit%25C3%25A9.

[81] Wikipédia. Formule du binôme de Newton — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DFormule%5Fdu%5Fbin%25C3%25B4me%5Fde%5FNewton%26oldid%3D144161875.

[82] Wikipédia. Identité remarquable — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DIdentit%25C3%25A9%5Fremarquable%26oldid%3D178609166.

[83] Wikipédia. Corps commutatif — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DCorps%5Fcommutatif%26oldid%3D152289565.

[84] Florent Nacry. Algèbre : théorie des anneaux 15 juillet 2025. URL https://fnacry.perso.math.cnrs.fr/Fichiers%2DEns/Alg/CM%5FAnneaux.pdf.

[85] Patrick Polo. Idéaux premiers et maximaux, localisation, théorème des zéros de Hilbert URL https://webusers.imj%2Dprg.fr/%7Epatrick.polo/M1Galois/ATG05ch3.pdf.

[86] wikipédia. Théorème de Krull — Wikipédia, l'encyclopédie libre 2022. URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FKrull%26oldid%3D192263296.

[87] Wikipédia. Idéal premier — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DId%25C3%25A9al%5Fpremier%26oldid%3D125964642.

[88] Wikipédia. Théorème des restes chinois 16 juillet 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fdes%5Frestes%5Fchinois.

[89] Wikiversité. Anneau (mathématiques)/Exercices/Exercices — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DAnneau%5F%28math%25C3%25A9matiques%29/Exercices/Exercices%26oldid%3D676468. En ligne ; accédé le 26-octobre-2017

[90] Jean-Louis Rouget. Compléments d'algèbre URL https://www.maths%2Dfrance.fr/MathSpe/Cours/01%2Dstructures.pdf.

[91] Wikipédia. Module sur un anneau — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DModule%5Fsur%5Fun%5Fanneau%26oldid%3D141582982.

[92] Patrick Polo. Algèbre et théorie de Galois URL https://webusers.imj%2Dprg.fr/%7Epatrick.polo/M1Galois/ATG07chI%2DIII.pdf.

[93] David Harari. Algèbre 1 - Anneaux et modules URL https://www.math.u%2Dpsud.fr/%7Eharari/exposes/rings.pdf.

[94] Wikipédia. Algèbre sur un corps — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DAlg%25C3%25A8bre%5Fsur%5Fun%5Fcorps%26oldid%3D98992040.

[95] Wikipédia. Caractéristique d'un anneau — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DCaract%25C3%25A9ristique%5Fd%2527un%5Fanneau%26oldid%3D136316021.

[96] Wikipédia. Endomorphisme de Frobenius 29 décembre 2024. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Endomorphisme%5Fde%5FFrobenius.

[97] Wikipédia. Polynôme formel — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DPolyn%25C3%25B4me%5Fformel%26oldid%3D185737458.

[98] Patrick Polo. Groupes et polynômes symétriques, résolution d'équations URL https://webusers.imj%2Dprg.fr/%7Epatrick.polo/M1Galois/ATG07chIXcorr.pdf.

[99] Wikipédia. Corps des fractions — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DCorps%5Fdes%5Ffractions%26oldid%3D130674526.

[100] Wikipédia. Caractéristique d'un anneau 29 décembre 2024. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Caract%25C3%25A9ristique%5Fd%2527un%5Fanneau.

[101] . Nth root algorithm — Wikipedia, The Free Encyclopedia

[102] Wikipédia. Méthode de Héron — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DM%25C3%25A9thode%5Fde%5FH%25C3%25A9ron%26oldid%3D181923161.

[103] Frédéric Paulin. Topologie, analyse et calcul différentiel URL http://www.math%2Dquestion%2Dcenter.com/publications%2Dpdf/cours%5Fd%E2%80%99analyse%2Btopologie%5Fet%5Fcalcul%5Fdifferntiel%5FFrederic%5FPaulin.pdf.

[104] Wikipédia. Construction des nombres réels — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DConstruction%5Fdes%5Fnombres%5Fr%25C3%25A9els%26oldid%3D145402164.

[105] Wikipédia. Nombre positif — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DNombre%5Fpositif%26oldid%3D146043202.

[106] . Least-upper-bound property — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DLeast%2Dupper%2Dbound%5Fproperty%26oldid%3D893001075.

[107] Wikipédia. Partie entière et partie fractionnaire — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DPartie%5Fenti%25C3%25A8re%5Fet%5Fpartie%5Ffractionnaire%26oldid%3D181404258.

[108] Foys. Re : Ressources pour la topologie générale URL http://www.les%2Dmathematiques.net/phorum/read.php%3F11%2C2093686%2C2194966%23msg%2D2194966.

[109] Jean Luc W. groupe-quotient et création de nouveaux sous-groupes URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Discussion:Groupe%5Fquotient.

[110] Pierre Lissy. Théorème de Jordan-Hölder URL http://www.ljll.math.upmc.fr/%7Elissy/Agreg/developpements/JordanHolder.pdf.

[111] Wikipedia contributors. Solvable group — Wikipedia, The Free Encyclopedia 2022. URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DSolvable%5Fgroup%26oldid%3D1104386698.

[112] Wikipédia. Groupe résoluble — Wikipédia, l'encyclopédie libre 2022. URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DGroupe%5Fr%25C3%25A9soluble%26oldid%3D194829259.

[113] Muriel Galley. Groupes résolubles URL http://matthieu.gendulphe.com/Galley.pdf.

[114] Wikipédia. Action de groupe (mathématiques) — Wikipédia, l'encyclopédie libre 2022. URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DAction%5Fde%5Fgroupe%5F%28math%25C3%25A9matiques%29%26oldid%3D193789140.

[115] Fabrice Castel. Groupes finis URL http://agreg%2Dmaths.univ%2Drennes1.fr/documentation/docs/Groupes%5Ffinis.pdf.

[116] David Harari. Cours agrégation (2020-2021) : Groupes URL https://www.imo.universite%2Dparis%2Dsaclay.fr/%7Edavid.harari/enseignement/agreg21/groupagreg.pdf.

[117] Sylvain Gervais and François Nicoleau. Feuille 1 : Notions sur les groupes URL https://www.math.sciences.univ%2Dnantes.fr/%7Eagreg/DocumentAgreg/L3%2DGroupeGeometrie.pdf.

[118] . Groupe cyclique URL https://moodle.utc.fr/pluginfile.php/49237/mod%5Fresource/content/0/ChapII%5Fgroupes/MT10%5FChapII6.pdf.

[119] cdrcprds. Questions (9), (15) et (21) d'algèbre URL https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/issues/60.

[120] Gilles Costantini. pgcd et ppcm dans $\mathbb{Z}$, théorème de Bezout, applications URL http://gilles.costantini.pagesperso%2Dorange.fr/agreg%5Ffichiers/bezout.pdf.

[121] Congrugences dans $\mathbb{Z}$, anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/capes/IMG/pdf/new.congruence.pdf.

[122] Wikipédia. Théorème de Cauchy (groupes) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FCauchy%5F%28groupes%29%26oldid%3D140167231.

[123] . 101. Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples URL http://unemainlavelautre.net/concours%5Fexamens/agregation%5Finterne%5F2019%5Fmaths%5Flecons%5Fet%5Fexercices/agregation%5Finterne%5Foral%5F101%5Fgroupes%5Fmonogenes%5Fgroupes%5Fcycliques%5Fexemples.pdf.

[124] Alexei Pantchichkine. Algèbre2 URL http://www%2Dfourier.ujf%2Dgrenoble.fr/%7Epanchish/05ensl.pdf.

[125] Niels Borne. Fiche numéro 2 : morphismes, sous-groupe distingué, quotient URL http://math.univ%2Dlille1.fr/%7Eborne/Enseignement/TD2%5FM308.pdf.

[126] Wikipédia. Lemme d'Euclide 22 juillet 2023. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme%5Fd%2527Euclide%23Unicit%25C3%25A9%5Fde%5Fla%5Fforme%5Firr%25C3%25A9ductible%5Fd%E2%80%99une%5Ffraction.

[127] Georges Skandalis. Algèbre générale et algèbre linéaire URL http://www.math.univ%2Dparis%2Ddiderot.fr/%5C%5Fmedia/formations/prepa/agreginterne/polycopiealgebre.pdf.

[128] Arnaud Girand. Développements pour l'agrégation externe de mathématiques URL https://math.webgirand.eu/pdf/dvp%5Fagreg/dvp.pdf.

[129] G. B. Folland. Higher-Order Derivatives and Taylor's Formula in Several Variables URL https://sites.math.washington.edu/%7Efolland/Math425/taylor2.pdf.

[130] Serge Mehl. Preuves diverses de résultats énoncés au fil des pages URL http://serge.mehl.free.fr/base/preuves%5Fdiverses.html.

[131] Anonyme. sans titre URL http://www.ac%2Dgrenoble.fr/champo/IMG/arithmetique.pdf.

[132] Didier Piau and Bernard Ycart. Lemme de Gauss et décomposition en facteurs premiers URL https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ar/node6.html.

[133] Chritian Blanchet. Propriétés arithmétiques des anneaux commutatifs intègres URL https://webusers.imj%2Dprg.fr/%7Echristian.blanchet/enseignement/2009%2D10/ch2%5Fanneaux%5Fintegres.pdf.

[134] . Théorème chinois 19 juillet 2025. URL https://agreg%2Dmaths.fr/uploads/versions/4879/33%29%2520The%25CC%2581ore%25CC%2580me%2520chinois.pdf.

[135] Wikipédia. Idéal premier — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DId%25C3%25A9al%5Fpremier%26oldid%3D145977206.

[136] Danny-Jack Mercier. Anneaux factoriels URL http://megamaths.perso.neuf.fr/cours/ari/cann0001.pdf.

[137] Sébastien Pellerin. Développements d'algèbre pour l'oral de l'agrégation URL http://pellerin.xyz/doc/agreg/algebre.pdf.

[138] Wikipédia. Triplet pythagoricien — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTriplet%5Fpythagoricien%26oldid%3D114628048.

[139] Wikipédia. Primalité dans un anneau — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DPrimalit%25C3%25A9%5Fdans%5Fun%5Fanneau%26oldid%3D127919489.

[140] Wikipédia. Polynôme primitif 26 juillet 2023. URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DPolyn%25C3%25B4me%5Fprimitif%26oldid%3D181739006.

[141] Pierre-Emmanuel Chaput. ANNEAUX DE POLYNÔMES URL http://chaput.perso.math.cnrs.fr/documents/ch7%2Danneau%2Dde%2Dpolynomes.pdf.

[142] Wikipédia. Factorisation des polynômes 30 juillet 2023. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Factorisation%5Fdes%5Fpolyn%25C3%25B4mes.

[143] Wikipédia. Racine de l'unité — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DRacine%5Fde%5Fl%2527unit%25C3%25A9%26oldid%3D178477716.

[144] Olivier Debarre. Anneaux et corps, préparation à l'agrégation externe URL https://www.math.ens.fr/%7Edebarre/anneauxcorps.pdf.

[145] Wikipédia. Lemme de Gauss (polynômes) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DLemme%5Fde%5FGauss%5F%28polyn%25C3%25B4mes%29%26oldid%3D112056131.

[146] Alain Vigne. Communication personnelle

[147] Keith Conrad. Cyclicity of $(Z/(p))^\times$ URL https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/cyclicmodp.pdf.

[148] Wikipédia. Espace vectoriel — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DEspace%5Fvectoriel%26oldid%3D143370323.

[149] Espaces vectoriels de dimension infinie URL http://www.les%2Dmathematiques.net/b/e/e/node8.php.

[150] . Tensor product — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTensor%5Fproduct%26oldid%3D842778935.

[151] Marie-Pierre Lebaux. Rappels sur les applications linéaires URL https://perso.univ%2Drennes1.fr/marie%2Dpierre.lebaud/agint/ecrit/algebre%2Dlineaire/applications%2Dlineaires/V%2Dappli%2Dlin.pdf.

[152] Jean-Louis Rouget. Dimension d'un espace vectoriel URL https://www.maths%2Dfrance.fr/MathSup/Cours/22%2Ddimensions.pdf.

[153] Daniel Ferrand. Étendre le corps URL http://webusers.imj%2Dprg.fr/%7Edaniel.ferrand/ExtCorps.pdf.

[154] Ycart Bernard and Luc Rozoy. Déterminants URL https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/de/de.pdf.

[155] G. Donald Allen. Matrices and linear algebra URL http://www.math.tamu.edu/%7Edallen/m640%5F03c/lectures/chapter2.pdf.

[156] Wikipédia. Mineur (algèbre linéaire) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DMineur%5F%28alg%25C3%25A8bre%5Flin%25C3%25A9aire%29%26oldid%3D133960288.

[157] Khalid Koufany. Formes linéaires et dualité URL http://www.iecl.univ%2Dlorraine.fr/%7EKhalid.Koufany/Alg%2DBil/Chap1%2DFormes%2DLineaires.pdf.

[158] Wikipédia. Matrix determinant lemma 7 septembre 2025. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix%5Fdeterminant%5Flemma.

[159] . Direct sum of modules — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DDirect%5Fsum%5Fof%5Fmodules%26oldid%3D835636392.

[160] Laurent Claessens. existence of a real structure on a complex vector space URL https://math.stackexchange.com/q/4034093.

[161] Wikipédia. Somme directe — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DSomme%5Fdirecte%26oldid%3D182206467.

[162] John Douglas Moore. Othogonal complement URL http://web.math.ucsb.edu/%7Emoore/orthogonalcomplements.pdf.

[163] . Real structure — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DReal%5Fstructure%26oldid%3D990936192.

[164] Wikipédia. Théorème de Cauchy (groupes) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FCauchy%5F%28groupes%29%26oldid%3D122684298.

[165] Wikiversité. Groupe (mathématiques)/Exercices/Premiers résultats sur les groupes simples — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DGroupe%5F%28math%25C3%25A9matiques%29/Exercices/Premiers%5Fr%25C3%25A9sultats%5Fsur%5Fles%5Fgroupes%5Fsimples%26oldid%3D597195. En ligne ; accédé le 31-mai-2017

[166] Wikiversité. Groupe (mathématiques)/Automorphismes d'un groupe cyclique — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DGroupe%5F%28math%25C3%25A9matiques%29/Automorphismes%5Fd%2527un%5Fgroupe%5Fcyclique%26oldid%3D595608. En ligne ; accédé le 3-juin-2017

[167] Structure des groupes d'ordre pq URL http://agregmaths.free.fr/doc/docs%5Fnicolas/developpement%2520Algebre/groupe%2520d%E2%80%99ordre%2520pq.pdf.

[168] Wikipédia. Inverse modulaire — Wikipédia, l'encyclopédie libre 2023. URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DInverse%5Fmodulaire%26oldid%3D205601911.

[169] Wikiversité. Exercice : Nombres premiers et fonctions arithmétiques 2022. URL https://fr.wikiversity.org/wiki/Introduction%5F%25C3%25A0%5Fla%5Fth%25C3%25A9orie%5Fdes%5Fnombres/Exercices/Nombres%5Fpremiers%5Fet%5Ffonctions%5Farithm%25C3%25A9tiques%23Exercice%5F1%2D6.

[170] minutephysics. How quantum computing breaks encryption, Shor's algorithm explained URL https://www.youtube.com/watch%3Fv%3DlvTqbM5Dq4Q.

[171] Wikipédia. Théorème d'Euler (arithmétique) — Wikipédia, l'encyclopédie libre 5 juin 2023. URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fd%2527Euler%5F%28arithm%25C3%25A9tique%29%26oldid%3D204927084.

[172] wikiversité. Introduction à la théorie des nombres : Nombres premiers et fonctions arithmétiques 22 juillet 2023. URL https://fr.wikiversity.org/wiki/Introduction%5F%25C3%25A0%5Fla%5Fth%25C3%25A9orie%5Fdes%5Fnombres/Nombres%5Fpremiers%5Fet%5Ffonctions%5Farithm%25C3%25A9tiques.

[173] Olivier Debarre. TD4 : produit semi-direct URL http://www.math.ens.fr/%7Edebarre/TDC4.pdf.

[174] Christophe Mourougane. Théorie des groupes et géométrie URL http://perso.univ%2Drennes1.fr/christophe.mourougane/enseignements/2009%2D10/THGG/poly.groupes.pdf.

[175] Michel Emsalem and Pierre Dèbes. Théorème de Sylow URL http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00023.pdf.

[176] N. G. J. Pagnon. Le groupe symétrique et le groupe alterné URL http://amatheux.com/IMG/pdf/groupe%5Fsymetrique.pdf.

[177] Automorphisme de R et continuité URL http://forums.futura%2Dsciences.com/mathematiques%2Dsuperieur/261451%2Dautomorphisme%2Dde%2Dr%2Dcontinuite.html.

[178] Poirot. Automorphismes et sous-corps premier Avril 2021. URL https://les%2Dmathematiques.net/vanilla/index.php%3Fp%3Ddiscussion/comment/2213126%23Comment%5F2213126.

[179] Wikipédia. Nombre premier de Sophie Germain — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DNombre%5Fpremier%5Fde%5FSophie%5FGermain%26oldid%3D162746200.

[180] Développement Théorème de Sophie Germain. URL https://www.agreg%2Dmaths.fr/uploads/versions/930/Dev%5FSophieGermain%5FBN.pdf.

[181] Antoine Barrier. Théorème de Sophie Germain URL https://www.agreg%2Dmaths.fr/uploads/versions/2235/abarrier%5Fdev%5Fthm%5FSophie%5FGermain.pdf.

[182] Florian Lemonnier. Théorème de Sophie Germain URL https://flemonnier.pagesperso%2Dorange.fr/agregation/developpements/Sophie%5FGermain.pdf.

[183] Wikipédia. Monoïde — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DMono%25C3%25AFde%26oldid%3D148198215.

[184] Emmanuel Vieillard Baron. Le lemme chinois en termes de congruences URL https://www.les%2Dmathematiques.net/b/a/d/node10.php.

[185] Sylvain Duchet. Congrugence dans $\mathbb{Z}$, Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, applications URL http://epsilon.2000.free.fr/Csup/congruences.pdf.

[186] Quentin Guyot. Communications personnelles 2022-2025.

[187] Wikipédia. Anneau factoriel 30 juillet 2023. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Anneau%5Ffactoriel%23Anneaux%5Fdes%5Fpolyn%25C3%25B4mes.

[188] Patrick Polo. Extension de corps, caractéristique, corps de rupture, corps de décomposition, clôtures algébriques URL https://webusers.imj%2Dprg.fr/%7Epatrick.polo/M1Galois/ATG07chVII.pdf.

[189] C. Antonini and JF. Quint and P. Borgnat and J. Bérard and E. Lebeau and E. Souche and A. Chateau and O. Teytaud. Le théorème de Wedderburn URL http://www.les%2Dmathematiques.net/d/a/w/node5.php.

[190] cdrcprds. Lemme 5.43 sur les pgcd de polynômes URL https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/issues/52%23issuecomment%2D333251728.

[191] Geneviève Bretenoux and Marie-Thérèse Hogbé and Jacques Queyrut and Dominique Labarsouque and Bernadtte Munos and Catherine Pannier. Théorème de Gauss et polynômes irréductibles 2014. URL https://uel.unisciel.fr/mathematiques/polynomes1/polynomes1%5Fch02/co/apprendre%5Fch2%5F3%5F05.html.

[192] Wikipédia. Extension de corps — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DExtension%5Fde%5Fcorps%26oldid%3D133373097.

[193] Wikipédia. Extension de corps — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DExtension%5Fde%5Fcorps%26oldid%3D133373097.

[194] David Harari. Algèbre 1 - notions de théorie des corps URL https://www.math.u%2Dpsud.fr/%7Eharari/exposes/corps.pdf.

[195] Wikipédia. Extension algébrique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DExtension%5Falg%25C3%25A9brique%26oldid%3D148162879.

[196] Olivier Debarre. Algèbre 2 URL https://www.math.ens.fr/%7Edebarre/Algebre2.pdf.

[197] Wikipédia. Clôture algébrique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DCl%25C3%25B4ture%5Falg%25C3%25A9brique%26oldid%3D159475673.

[198] Herscovich Estanislao. Existence et « unicité » d'une clôture algébrique URL https://www%2Dfourier.ujf%2Dgrenoble.fr/%7Eeherscov/MAT4111/ThmSteinitz.pdf.

[199] jeanas. Constante de Weiner 19 septembre 2024. URL https://linuxfr.org/nodes/136626/comments/1969399.

[200] Wikipédia. Corps de décomposition — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DCorps%5Fde%5Fd%25C3%25A9composition%26oldid%3D139881008.

[201] Vincent Beck. Extensions séparables 5 octobre 2010. URL https://www.idpoisson.fr/beck/wp%2Dcontent/uploads/sites/16/2018/06/cours%2Dext%2Dsep%2Dpoly.pdf.

[202] Patrick Polo. Extensions normales, séparables, galoisiennes. Corps fini. URL http://www.math.jussieu.fr/%7Epolo/M1/ATG07chVIII.pdf.

[203] mathématiques and jobherzt . polynôme irréductible Février 2021. URL https://les%2Dmathematiques.net/vanilla/index.php%3Fp%3D/discussion/653420/polynome%2Dirreductible.

[204] Olivier Dodane. Le théorème de zéros de Hilbert URL http://www.math.ens.fr/%7Edebarre/nullstellensatz.pdf.

[205] Patrick Polo. Polynômes symétriques et résolutions d'équations URL http://www.math.jussieu.fr/%7Epolo/M1/ATGch9.pdf.

[206] Wikipédia. Théorème fondamental des fonctions symétriques 19 novembre 2024. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Ffondamental%5Fdes%5Ffonctions%5Fsym%25C3%25A9triques.

[207] Vincent Beck and Jérôme Malick and Gabriel Peyré. Sur C tout est connexe ! URL http://objagr.gforge.inria.fr/documents/files/connexite%2Dpolynome.pdf.

[208] El Hage. Équation générale de degré n URL http://les.mathematiques.free.fr/pdf/gal10.pdf.

[209] Florian Morel Chevillet. Résolubilité par radicaux des équations algébriques URL http://matthieu.gendulphe.com/MorelChevillet.pdf.

[210] Wikipédia. Espace topologique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DEspace%5Ftopologique%26oldid%3D164610481.

[211] Wikipédia. Base (topologie) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DBase%5F%28topologie%29%26oldid%3D177248194.

[212] Wikipédia. Base (topologie) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DBase%5F%28topologie%29%26oldid%3D140151583.

[213] Wikipédia. Voisinage (mathématiques) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DVoisinage%5F%28math%25C3%25A9matiques%29%26oldid%3D171863485.

[214] Erwan Aubry. URL https://math.unice.fr/%7Eeaubry/Enseignement/L3/rappelstopo.pdf.

[215] Wikipédia. Prébase — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DPr%25C3%25A9base%26oldid%3D162334814.

[216] Wikipédia. Topologie induite — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTopologie%5Finduite%26oldid%3D172447185.

[217] Wikiversité. Topologie/Sous-espace topologique URL https://fr.wikibooks.org/wiki/Topologie/Sous%2Despace%5Ftopologique.

[218] Karim Bekka. 3 janvier 2025. URL https://perso.univ%2Drennes1.fr/karim.bekka/ANAH/Week%2520by%2520week/ANAH4.pdf.

[219] . Filtration (mathematics) — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DFiltration%5F%28mathematics%29.

[220] Henno Brandsma. A map is continuous if and only if for every set, the image of closure is contained in the closure of image 23 avril 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/114462/a%2Dmap%2Dis%2Dcontinuous%2Dif%2Dand%2Donly%2Dif%2Dfor%2Devery%2Dset%2Dthe%2Dimage%2Dof%2Dclosure%2Dis%2Dcontai.

[221] Dirk Hundertmark. Lecture notes functional analysis URL https://www.math.kit.edu/iana1/lehre/funcana2012w/media/fa%2Dlecturenotes.pdf.

[222] Wikiversité. General Topology/Bases 5 décembre 2023. URL https://en.wikibooks.org/w/index.php%3Ftitle%3DGeneral%5FTopology/Bases%26oldid%3D4319527.

[223] Walker and drhab. Hausdorff property with initial topology 27 avril 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/4501749/hausdorff%2Dproperty%2Dwith%2Dinitial%2Dtopology.

[224] Wikipédia. Topologie produit 2 mai 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Topologie%5Fproduit.

[225] Wikipédia. Topologie quotient 2022. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Topologie%5Fquotient.

[226] Jonny Evans. 3.02 Quotient topology : continuous maps URL http://www.homepages.ucl.ac.uk/%7Eucahjde/tg/html/quot02.html.

[227] Wikipédia. Espace séparé — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DEspace%5Fs%25C3%25A9par%25C3%25A9%26oldid%3D97013072.

[228] Wikipédia. Équivalent — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3D%25C3%2589quivalent%26oldid%3D149344743.

[229] Wikipédia. Axiome de séparation (topologie) 20 mars 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome%5Fde%5Fs%25C3%25A9paration%5F%28topologie%29.

[230] Wikipédia. Connexité (mathématiques) 20 mars 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Connexit%25C3%25A9%5F%28math%25C3%25A9matiques%29.

[231] Brian M. Scott. When is a disconnected subset of a topological space 'disconnected in the total space' ? 3 août 2016. URL https://math.stackexchange.com/q/1879605.

[232] Laurent Claessens. connectedness and completely normal space 20 mars 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/5047471/connectedness%2Dand%2Dcompletely%2Dnormal%2Dspace%3Fnoredirect%3D1.

[233] Wikiversité. Espaces vectoriels normés : Connexité 5 aout 2023. URL https://fr.wikiversity.org/wiki/Espaces%5Fvectoriels%5Fnorm%25C3%25A9s/Connexit%25C3%25A9.

[234] Wikipédia. Connexité (mathématiques) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DConnexit%25C3%25A9%5F%28math%25C3%25A9matiques%29%26oldid%3D164885091.

[235] Vincent Le Guiec and Sacha Quayle. Le théorème de Jordan 29 avril 2021. URL https://minerve.ens%2Drennes.fr/images/Le%5FTh%C3%A9or%C3%A8me%5Fde%5FJordan%5FS.Quayle%5FV.Le%5FGruiec..pdf.

[236] Wikipédia. Espace sigma-compact 18 aout 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace%5F%25CF%2583%2Dcompact.

[237] Emmanuel Vieillard Baron. Sous-espaces compacts URL http://www.les%2Dmathematiques.net/a/t/c/node5.php.

[238] ChatGPT. 29 janvier 2025. URL https://chatgpt.com. Same prompt as in https://math.stackexchange.com/questions/5028910

[239] Matt E. Is the intersection of a closed set and a compact set always compact ? 8 mai 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/35038/is%2Dthe%2Dintersection%2Dof%2Da%2Dclosed%2Dset%2Dand%2Da%2Dcompact%2Dset%2Dalways%2Dcompact.

[240] ZiYun. Lemme des compacts emboités 19 décembre 2018. URL https://www.ilemaths.net/sujet%2Dlemme%2Ddes%2Dcompacts%2Demboites%2D804031.html.

[241] Louis de Thanhoffer de Volcsey. Are intersections of compact sets compact ? URL https://www.quora.com/Are%2Dintersections%2Dof%2Dcompact%2Dsets%2Dcompact%3Fshare%3D1.

[242] Wikipédia. Partie relativement compacte 20 mai 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Partie%5Frelativement%5Fcompacte.

[243] . Finite intersection property — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DFinite%5Fintersection%5Fproperty%26oldid%3D1076876990.

[244] . Limit of a function — Wikipedia, The Free Encyclopedia

[245] Académie française. ambiguïté URL https://www.dictionnaire%2Dacademie.fr/article/A9A1402.

[246] Huiqiang Jiang. Functional analysis URL http://www.math.pitt.edu/%7Ehqjiang/2303/functional.pdf.

[247] jowayriya. partie précompacte 29 mai 2025. URL https://www.ilemaths.net/sujet%2Dpartie%2Dprecompacte%2D121705.html.

[248] Wikipédia . Espace séquentiel 2022. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace%5Fs%C3%A9quentiel.

[249] Wikipédia. Connexité (mathématiques) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DConnexit%25C3%25A9%5F%28math%25C3%25A9matiques%29%26oldid%3D123744973.

[250] C. Antonini and JF. Quint and P. Borgnat and J. Bérard and E. Lebeau and E. Souche and A. Chateau and O. Teytaud. Connexité URL http://www.les%2Dmathematiques.net/a/a/b/node23.php.

[251] Wikipédia. Locally compact space 5 janvier 2025. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Locally%5Fcompact%5Fspace.

[252] Forever Mozart. Two definitions of locally compact space 15 dec 2015. URL https://math.stackexchange.com/questions/1574608/two%2Ddefinitions%2Dof%2Dlocally%2Dcompact%2Dspace.

[253] Wikipédia. Espace localement compact 5 janvier 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace%5Flocalement%5Fcompact.

[254] Wikipédia. Compactifié d'Alexandrov — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DCompactifi%25C3%25A9%5Fd%2527Alexandrov%26oldid%3D146811167.

[255] C. Antonini and JF. Quint and P. Borgnat and J. Bérard and E. Lebeau and E. Souche and A. Chateau and O. Teytaud. Espaces métriques compacts URL http://www.les%2Dmathematiques.net/a/a/b/node22.php.

[256] Wikiproof. Triangle Inequality on Distance from Point to Subset 15 décembre 2024. URL https://proofwiki.org/wiki/Triangle%5FInequality%5Fon%5FDistance%5Ffrom%5FPoint%5Fto%5FSubset.

[257] Proofwiki. Distance from Point to Subset is Continuous Function 15 décembre 2024. URL https://proofwiki.org/wiki/Distance%5Ffrom%5FPoint%5Fto%5FSubset%5Fis%5FContinuous%5FFunction.

[258] Nicolas Bourbaki. General topology 2 chapters 5 - 10 URL https://books.google.be/books%3Fid%3DbQwhdmL6IjUC. Oui je sais c'est une honte de citer Bourbaki en anglais en pointant vers une version partielle disponible sur Googlebooks. Mais c'est surtout une honte que ce livre ne soit pas disponible gratuitement en version électronique.

[259] Jean-Marc Decauwert. Convexité URL https://membres%2Dljk.imag.fr/Bernard.Ycart/mel/ga/node7.html.

[260] Guillaume Carlier. Analyse fonctionnelle URL https://www.ceremade.dauphine.fr/%7Ecarlier/poly2010.pdf.

[261] Éric Brunelle. Norme matricielle URL http://www.dms.umontreal.ca/%7Emath1600/6Supplement/Normematricielle%2D1.pdf.

[262] Aurelien Monteillet. Corrigés d'exercices pour le TD 3 URL http://aurelien.monteillet.com/teaching/TopologieL3/corrige%2Dtopo3.pdf.

[263] Raz Kupferman. Topological vector spaces URL http://www.ma.huji.ac.il/%7Erazk/iWeb/My%5FSite/Teaching%5Ffiles/TVS.pdf.

[264] Wikipédia. Sous-espace supplémentaire — Wikipédia, l'encyclopédie libre 2022. URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DSous%2Despace%5Fsuppl%25C3%25A9mentaire%26oldid%3D193382370.

[265] Anne. Supplémentaire topologique (Banach ?) 21 aout 2022. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Discussion:Sous%2Despace%5Fsuppl%25C3%25A9mentaire%23Suppl%25C3%25A9mentaire%5Ftopologique%5F%28Banach%5F%3F%29.

[266] Kr Dpk and Gerd . Topological direct sum of vector spaces 20 aout 2022. URL https://math.stackexchange.com/q/4515661.

[267] proofwiki. Limit of Composite Function 2020. URL https://proofwiki.org/wiki/Limit%5Fof%5FComposite%5FFunction.

[268] Wikipédia. Anneau topologique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DAnneau%5Ftopologique%26oldid%3D142162744.

[269] Maria Infusino. Topological vector spaces Summer Semester 2017. URL http://www.math.uni%2Dkonstanz.de/%7Einfusino/TVS%2DSS17/Note2017%28July29%29.pdf.

[270] user408858. Neighborhood of 0 is absorbent in topological vector spaces 2023-06-19. URL https://math.stackexchange.com/q/4721001.

[271] Gabriel Nagy. Topological Vector Spaces I : Basic Theory URL https://www.math.ksu.edu/%7Enagy/func%2Dan%2D2007%2D2008/top%2Dvs%2D1.pdf.

[272] EDUARD A. NIGSCH. LOCALLY CONVEX SPACES 2017. URL https://www.asc.tuwien.ac.at/%7Eenigsch/lehre/lcs.pdf.

[273] Wikipédia. Connexité URL https://fr.wikiversity.org/wiki/Topologie%5Fg%25C3%25A9n%25C3%25A9rale/Connexit%25C3%25A9.

[274] François De Marçay. Théorème de Jordan URL https://www.imo.universite%2Dparis%2Dsaclay.fr/%7Ejoel.merker/Enseignement/Analyse%2DComplexe/jordan%2Dcourbe.pdf.

[275] Emmanuel Vieillard-Baron. Application continue URL http://les.mathematiques.free.fr/a/t/g/node10.html.

[276] Wikipédia. Convergence uniforme 20 mai 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Convergence%5Funiforme.

[277] Nitrogen. If X is compact and $T : XoY$ continuous and bijective, show that T is homeomorphism. URL https://math.stackexchange.com/q/1785556.

[278] David Wilkins. Normed vector spaces and functional analysis URL http://www.maths.tcd.ie/%7Edwilkins/Courses/212/212PtIII.pdf.

[279] Wikipédia. Algèbre de Banach — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DAlg%25C3%25A8bre%5Fde%5FBanach%26oldid%3D181944654.

[280] Ron Freiwald. Chapter IV Completeness and Compactness URL http://www.math.wustl.edu/%7Efreiwald/ch4.pdf.

[281] Richard Timoney. Dual Spaces and the Hahn-Banach Theorem URL https://www.maths.tcd.ie/%7Erichardt/321/321%2Dch3.pdf.

[282] Wikipédia. Suite de Cauchy — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DSuite%5Fde%5FCauchy%26oldid%3D98046451.

[283] Norbert. First theorem in Topological vector spaces. URL https://math.stackexchange.com/q/155244.

[284] Wikipédia. Continuité — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DContinuit%25C3%25A9%26oldid%3D96548980.

[285] Wikipédia. Théorème des fermés emboités — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fdes%5Fferm%25C3%25A9s%5Femboit%25C3%25A9s%26oldid%3D85987870.

[286] Étienne Matheron. Topologie, analyse fonctionnelle URL https://matheron.perso.math.cnrs.fr/enseignement%5Ffichiers/topanafonc.pdf.

[287] François Golse. Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles URL http://www.cmls.polytechnique.fr/perso/golse/MAT431%2D10/POLY431.pdf.

[288] Foys. Déduire la connexité par arcs URL http://www.les%2Dmathematiques.net/phorum/read.php%3F14%2C1477834%2C1487858%23msg%2D1487858.

[289] C. Antonini and JF. Quint and P. Borgnat and J. Bérard and E. Lebeau and E. Souche and A. Chateau and O. Teytaud. Le théorème de Tykhonov URL http://www.les%2Dmathematiques.net/a/a/b/node20.php.

[290] . Equicontinuity — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DEquicontinuity%26oldid%3D1078023606.

[291] Wikipédia. Équicontinuité — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3D%25C3%2589quicontinuit%25C3%25A9%26oldid%3D137910699.

[292] Wikipédia. Continuité uniforme — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DContinuit%25C3%25A9%5Funiforme%26oldid%3D138238518.

[293] Wikipédia. Ensemble nulle part dense 12 janvier 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble%5Fnulle%5Fpart%5Fdense.

[294] Wikipédia. Ensemble maigre 13 janvier 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble%5Fmaigre.

[295] Zied Ammari. Analyse fonctionnelle : Pré-requis URL http://perso.univ%2Drennes1.fr/zied.ammari/other/pdf/chapitre1.pdf.

[296] Jean Saint Raymond. Semi-normes URL http://www.math.jussieu.fr/%7Eraymond/preprints/seminormes.pdf.

[297] Wikipédia. Hahn–Banach theorem 3 juin 2023. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Hahn%25E2%2580%2593Banach%5Ftheorem.

[298] Gabriel Nagy. Convexity "Warm-up" II:The Minkowski Functional Fall 07 - Spring 08. URL https://www.math.ksu.edu/%7Enagy/func%2Dan%2D2007%2D2008/conv%2Dw%2D2.pdf.

[299] Gariel Nagy. Locally Convex Vector Spaces III : The Metric Point of View 2007-2008. URL https://www.math.ksu.edu/%7Enagy/func%2Dan%2D2007%2D2008/lcvs%2D3.pdf.

[300] geetha290krm. seminorm continuous at zero 2023-12-30. URL https://math.stackexchange.com/q/4835942.

[301] psl2Z. Topology from seminorms dec 03, 2023. URL https://math.stackexchange.com/q/4819595.

[302] Stéphane Mischler. Semi-norme et introduction aux evtlcs URL https://www.ceremade.dauphine.fr/%7Emischler/Enseignements/AFAENS/Chap1evtlcs.pdf.

[303] Wikipédia. Semi-norme — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DSemi%2Dnorme%26oldid%3D89981857.

[304] Wikipédia. Norme (mathématiques) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DNorme%5F%28math%25C3%25A9matiques%29%26oldid%3D186698313.

[305] Jean Saint Raymond. Semi-normes URL https://webusers.imj%2Dprg.fr/%7Ejean.saint%2Draymond/preprints/seminormes.pdf.

[306] Wikipédia. Espace vectoriel normé 29-mars-2022. URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DEspace%5Fvectoriel%5Fnorm%25C3%25A9%26oldid%3D192365488.

[307] Jack. Equivalence of Baire Space definitions 5 Aug 2019. URL https://math.stackexchange.com/q/714515.

[308] Wikipédia. Théorème de Baire — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FBaire%26oldid%3D95077621.

[309] wikiversité. Propriété de Baire 16 janvier 2025. URL https://fr.wikiversity.org/wiki/Topologie%5Fg%25C3%25A9n%25C3%25A9rale/Propri%25C3%25A9t%25C3%25A9%5Fde%5FBaire.

[310] Zuoqin Wang. Lecture 16 : multilinear algebra URL http://staff.ustc.edu.cn/%7Ewangzuoq/Courses/16F%2DManifolds/Notes/Lec16.pdf.

[311] Wikipédia. Forme antisymétrique 3 avril 2023. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Forme%5Fantisym%25C3%25A9trique.

[312] Emmanuel Vieillard Baron. Déterminant d'une matrice, d'une application linéaire URL http://www.les%2Dmathematiques.net/b/e/d/node5.php.

[313] mdp. Determinant of linear transformation 7 oct 2014. URL https://math.stackexchange.com/q/962435.

[314] Robert Rolland. Le théorème de Müntz-Szász URL http://megamaths.perso.neuf.fr/rr/fichexo%5F201.pdf.

[315] Wikipédia. Matrice de Sylvester — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DMatrice%5Fde%5FSylvester%26oldid%3D191741692.

[316] Wikipédia. Résultant — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DR%25C3%25A9sultant%26oldid%3D90109864.

[317] Emmanuel Pedon. Cours de géométrie affine et euclidienne pour la licence de Mathématiques URL http://pedon.perso.math.cnrs.fr/fichiers/enseignement/CoursGeoLicence.pdf.

[318] user642796. Accumulation points of uncountable sets URL https://math.stackexchange.com/q/310122.

[319] afk. transposée et valeurs propres Juillet 2012. URL https://les%2Dmathematiques.net/vanilla/index.php%3Fp%3D/discussion/comment/765054/%23Comment%5F765054.

[320] Stéphane Lamy. DEUX DÉVELOPPEMENTS POUR LA LEÇONS 122 URL https://www.math.univ%2Dtoulouse.fr/%7Eslamy/teaching/agreg/lecon%5F122.pdf.

[321] Matthieu Romagny. Endomorphismes cycliques URL https://perso.univ%2Drennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/dvt/endom%5Fcycliques.pdf.

[322] Wikipédia. Polynôme caractéristique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DPolyn%25C3%25B4me%5Fcaract%25C3%25A9ristique%26oldid%3D188987150.

[323] Jean-Etienne Rombaldi. Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications URL http://www%2Dfourier.ujf%2Dgrenoble.fr/%7Erombaldi/AgregInterne/Oral1/110.pdf.

[324] Wikipédia. Application bilinéaire — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DApplication%5Fbilin%25C3%25A9aire%26oldid%3D144184234.

[325] Wikipédia. Forme quadratique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DForme%5Fquadratique%26oldid%3D172697192.

[326] Michel Coste. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques URL https://perso.univ%2Drennes1.fr/michel.coste/Bil.pdf.

[327] Maria Carrisoza. Algèbre IV : algèbre géométrique Printemps 2012. URL http://licence%2Dmath.univ%2Dlyon1.fr/lib/exe/fetch.php%3Fmedia%3Dp12:algiv:chapitre1.pdf.

[328] Stéphane Lamy. Algèbre bilinéaire URL https://www.math.univ%2Dtoulouse.fr/%7Eslamy/teaching/agreg/cours%5Fbilineaire%5Fdec%5F2019.pdf.

[329] Emmanuel Vieillard Baron. Formes quadratiques réelles URL http://www.les%2Dmathematiques.net/b/c/h/node12.php.

[330] mathphysics. Isotropie 5 aout 2023. URL http://mathphysics.fr/Notes/Isotropie.php.

[331] Transformation laissant invariante une forme quadratique URL http://www.ilemaths.net/forum%2Dsujet%2D500814.html.

[332] Wikipédia. Loi d'inertie de Sylvester — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DLoi%5Fd%2527inertie%5Fde%5FSylvester%26oldid%3D156712630.

[333] Wikipédia. Hermitien — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DHermitien%26oldid%3D124476255.

[334] Gilles Dubois. Dualité URL http://gilles.dubois10.free.fr/algebre%5Flineaire/dualite.html.

[335] Marc Sage. Dualité en dimension finie URL http://www.normalesup.org/%7Esage/Enseignement/Cours/DualDimFinie.pdf.

[336] Donald Allen. Unitary matrices URL https://www.math.tamu.edu/%7Edallen/m640%5F03c/lectures/chapter4.pdf.

[337] La l'Irlandais. De la réduction des endomorphismes URL http://tanopah.jo.free.fr/epilogues/reduction.pdf.

[338] Wikipédia. Réduction de Gauss — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DR%25C3%25A9duction%5Fde%5FGauss%26oldid%3D155723411.

[339] Marie-Pierre Lebaud. Formes quadratiques URL https://perso.univ%2Drennes1.fr/marie%2Dpierre.lebaud/agint/ecrit/algebre%2Dlineaire/formes%2Dquadratiques/V%2Dformes%2Dquadratiques.pdf.

[340] Robert Rollan. Produit tensorile d'espaces vectoriels URL http://robert.rolland.acrypta.com/telechargements/algebre/tensor.pdf.

[341] Marc Sage. Algèbre multilinéaire URL http://www.normalesup.org/%7Esage/Cours/ProdTens.pdf.

[342] Ministère nationale. Rapport de jury de concours – agrégation de mathématiques, concours externe URL http://agreg.org/Rapports/rapport2011provisoire.pdf.

[343] Hervé Carrieu and Maurice Fadel and Etienne Fieux and Patrice Lassère and Frédéric Rodriguez. Autour des matrices de Frobenius ou compagnon URL http://www.math.univ%2Dtoulouse.fr/%7Elassere/pdf/vfcomp.pdf.

[344] Grégory Vial. Autour du théorème des invariants de similitude URL http://w3.bretagne.ens%2Dcachan.fr/math/people/gregory.vial/files/cplts/ivs.pdf.

[345] Arnaud Moncet. Invariants de similitude URL http://blogperso.univ%2Drennes1.fr/arnaud.moncet/public/IVS.pdf.

[346] G. Donald Allen. Lectures on linear algebras URL http://www.math.tamu.edu/%7Edallen/m640%5F03c/readings.htm.

[347] Commutant d'un endomorphisme URL http://minerve.bretagne.ens%2Dcachan.fr/images/Commutant.pdf.

[348] Bernard Alken. Dans un commentaire de « Dimension du commutant d'une matrice » URL http://www.mathoman.com/index.php/1538%2Ddimension%2Ddu%2Dcommutant%2Dd%2Dune%2Dmatrice.

[349] Oskar Henriksson. How to prove that this kernel has codimension 1 ? 26 avril 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/1524449/how%2Dto%2Dprove%2Dthat%2Dthis%2Dkernel%2Dhas%2Dcodimension%2D1.

[350] Wikipédia. Hyperplan 24 avril 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Hyperplan.

[351] Wikiversity. Hyperplane/Kernel of a linear form/Fact 26 avril 2025. URL https://en.wikiversity.org/wiki/Hyperplane/Kernel%5Fof%5Fa%5Flinear%5Fform/Fact.

[352] Wikipédia. Théorème de Burnside (problème de 1902) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FBurnside%5F%28probl%25C3%25A8me%5Fde%5F1902%29%26oldid%3D98510166.

[353] Wikipédia. Théorème de Borel-Lebesgue — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FBorel%2DLebesgue%26oldid%3D96560796.

[354] Pete Clar. The Instructor's Guide to Real Induction 5 aout 2012. URL https://arxiv.org/abs/1208.0973.

[355] Lavrov Misha. Every path homotopic to a Piecewise linear path (Hatcher 1.1.4) 9 juin 2018. URL https://math.stackexchange.com/q/2813173.

[356] Wikipédia. Théorème des suites adjacentes — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fdes%5Fsuites%5Fadjacentes%26oldid%3D148318442.

[357] Mathieu Mansuy. Autour des séries alternées URL http://www.mathieu%2Dmansuy.fr/pdf/ECS2%2Dcompl%C3%A9ment1.pdf.

[358] LucaMac. A topological space X has the Intermediate Value Property iff it is Connected 2018-08-27. URL https://math.stackexchange.com/q/2896105.

[359] M. Quéffelec and A. Bodin. Topologie générale URL http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00037.pdf.

[360] Ambigraphe. Demande de référence URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Discussion:Ouvert%5F%28topologie%29.

[361] Wikipédia. Connexité par arcs — Wikipédia, l'encyclopédie libre 3 février 2023. URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DConnexit%25C3%25A9%5Fpar%5Farcs%26oldid%3D198763722.

[362] Inégalité triangulaire, cas d'égalité et démonstrations. URL https://share.miple.co/content/6IggazU5m0tIG.

[363] Marc Lelarge. Le théorème de Perron-Frobenius 15 octobre 2014. URL https://www.di.ens.fr/%7Elelarge/ani/cours/cours1.pdf.

[364] Wikipédia. Équation du second degré — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3D%25C3%2589quation%5Fdu%5Fsecond%5Fdegr%25C3%25A9%26oldid%3D179274356.

[365] Christian Squarcini. Dégénérescence URL http://christian%2Dsquarcini.pagesperso%2Dorange.fr/AgregInterne/Algebrelineaire/2%5F2.pdf.

[366] Jean-Marc Decauwert. Orthogonalité, bases orthonormées URL https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ge/node5.html.

[367] Daniel Li. Espaces de Hilbert URL http://www.editions%2Dellipses.fr/product%5Finfo.php%3Fproducts%5Fid%3D9387.

[368] user127.0.0.1. Parallelogram law in normed vector space without an inner product. URL https://math.stackexchange.com/questions/641077/parallelogram%2Dlaw%2Din%2Dnormed%2Dvector%2Dspace%2Dwithout%2Dan%2Dinner%2Dproduct.

[369] Frank Jones. Chapter 7 : cross product URL http://www.owlnet.rice.edu/%7Efjones/chap7.pdf.

[370] Maxime Pouvreau. Pseudo-réduction simultanée URL http://minerve.bretagne.ens%2Dcachan.fr/images/Pseudored.pdf.

[371] Jean-François Burnal. Normes Lp URL http://jf.burnol.free.fr/agregnormeslp.pdf.

[372] Wikipédia. Norme équivalente — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DNorme%5F%25C3%25A9quivalente%26oldid%3D192429578.

[373] William F. Trench. Introduction to real analysis URL http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/TRENCH%5FREAL%5FANALYSIS.PDF.

[374] user8128. All norms of $\mathbb{R}^n$ are equivalent 2018. URL https://math.stackexchange.com/q/2890032.

[375] Wikipédia. Norme d'opérateur — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DNorme%5Fd%2527op%25C3%25A9rateur%26oldid%3D125963366.

[376] Wikipedia. Spectral radius — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DSpectral%5Fradius%26oldid%3D758072091.

[377] Christian Squarcini. Applications linéaires URL http://christian%2Dsquarcini.pagesperso%2Dorange.fr/AgregInterne/Topo/4%5F3.pdf.

[378] Gilles Costantini. Espaces vectoriels de dimension infinie, normes usuelles, équivalence de normes URL http://gilles.costantini.pagesperso%2Dorange.fr/agreg%5Ffichiers/evn.pdf.

[379] Sha Vuklia. Why are multilinear maps continuous ? 2023-05-18. URL https://math.stackexchange.com/questions/1490776/why%2Dare%2Dmultilinear%2Dmaps%2Dcontinuous.

[380] Gilles Dubois. Applications multilinéaires continues 11 september 2024. URL http://gilles.dubois12.free.fr/%3Fpage%5Fid%3D935.

[381] Gilles Dubois. séries commutativement convergentes URL http://gilles.dubois10.free.fr/analyse%5Freelle/seriescomconv.html.

[382] Wikipédia. Théorème de réarrangement de Riemann 2024. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5Fr%25C3%25A9arrangement%5Fde%5FRiemann.

[383] Florian Lemonnier. Théorème de réarrangement de Riemann URL https://perso.eleves.ens%2Drennes.fr/people/florian.lemonnier/agregation/developpements/Riemann.pdf.

[384] Wikipédia. Convergence uniforme — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DConvergence%5Funiforme%26oldid%3D95493463.

[385] . Séries de fonctions 30 juin 2025. URL https://licence%2Dmath.univ%2Dlyon1.fr/lib/exe/fetch.php%3Fmedia%3Dp23:s4%5Fcomplements:ch2%2Dseriesdefonctions2021.pdf.

[386] Wikipédia. Weierstrass M-test 2 juillet 2025. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass%5FM%2Dtest.

[387] H. Jerome Keisler. Elementaty calculus, an infinitesimal approach URL http://www.math.wisc.edu/%7Ekeisler/keislercalc%2D810.pdf.

[388] Wikipédia. Suite arithmético-géométrique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DSuite%5Farithm%25C3%25A9tico%2Dg%25C3%25A9om%25C3%25A9trique%26oldid%3D88168841.

[389] Prime.mover. Sum of Sequence of Products of Consecutive Reciprocals URL https://proofwiki.org/wiki/Sum%5Fof%5FSequence%5Fof%5FProducts%5Fof%5FConsecutive%5FReciprocals.

[390] Daniel Daigle. Cardinalité URL http://mysite.science.uottawa.ca/asavag2/mat2762/cardinal.pdf.

[391] Alan D. Sokal. A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem URL https://arxiv.org/pdf/1005.1585.pdf.

[392] Wikipédia. Théorème de Banach-Steinhaus — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FBanach%2DSteinhaus%26oldid%3D92377069.

[393] . Strong operator topology — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DStrong%5Foperator%5Ftopology%26oldid%3D849989429.

[394] Sylvain. Théorème de l'application ouverte URL https://agreg%2Dmaths.fr/uploads/versions/59/thm%5Fapp%5Fouverte%5Fscourte.pdf.

[395] Wikipédia. Théorème de Banach-Schauder — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FBanach%2DSchauder%26oldid%3D179020717.

[396] Nicolas. Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé URL http://agregmaths.free.fr/doc/docs%5Fnicolas/developpement%2520Analyse/Theoreme%2520de%25201%E2%80%99application%2520ouverte%2520et%2520du%2520graphe%2520ferme.pdf.

[397] . Tensor product — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTensor%5Fproduct%26oldid%3D846586202.

[398] Martin Brandenburg. unicity of tensor product decomposition October 15, 2023. URL https://math.stackexchange.com/q/4787198.

[399] Arjeh Cohen. Tensor product URL https://www.win.tue.nl/%7Eamc/ow/lba/lba3.pdf.

[400] Mike Hill. Lecture 16 : tensor products URL https://www.math.ucla.edu/%7Emikehill/Teaching/Math5651/Lecture16.pdf.

[401] Mike Hill. LECTURE 16 : TENSOR PRODUCTS URL https://www.math.ucla.edu/%7Emikehill/Teaching/Math5651/Lecture16.pdf.

[402] Martin Brandenburg. every bilinear map is a tensor product if the dimensions matche 2023-oct-21. URL https://math.stackexchange.com/q/4791265.

[403] Frédéric Hélein. Calcul différentiel extérieur et géométrie 10 novembre 2016. URL https://webusers.imj%2Dprg.fr/%7Efrederic.helein/caldiffext.pdf.

[404] Davide Giraudo. Every linear mapping on a finite dimensional space is continuous URL https://math.stackexchange.com/q/113008.

[405] Livio Flaminio. Éléments de géométrie différentielle URL http://www%2Dgat.univ%2Dlille1.fr/%7Eflaminio/M403/2009%2D2010/cours%5Fgeo%5Ftop.pdf.

[406] Espaces métriques et espaces normés URL http://www.les%2Dmathematiques.net/a/a/b/node4.php.

[407] Jerome E. Marsden and Tudor S. Ratiu. Manifolds, tensor analysis and applications URL http://www.springer.com/gp/book/9780387967905.

[408] F. Laudenbach. Calcul différentiel et intégral URL http://books.google.fr/books%3Fid%3DWs9A7ZoRJNEC.

[409] Pierre Lairez. Théorème de dérivation d'une limite Communication personnelle

[410] Mourad ABOUZAID. Coniques, quadriques et formes quadratiques 12 juillet 2025. URL https://mabouzai.perso.univ%2Dpau.fr/ConiquesISA2.pdf.

[411] Marie-Claure David and Frédéric Haglund and Daniel Perrin. Géométrie affine URL http://webens.math.u%2Dpsud.fr/%7Emcld/GAEL/Gael/bar.pdf.

[412] Marie-Claude David and Frédéric Haglund and Daniel Perrin. Géometrie affine. Document de travail pour la préparation au CAPES. Deuxième partit : barycentre URL http://omphale.math.u%2Dpsud.fr/%7Emcld/GAEL/Gael/bar.pdf.

[413] Marie-Claude David and Frédéric Haglund and Daniel Perrin. Géometrie affine. Document de travail pour la préparation au CAPES. Troisième partie : convexité URL http://omphale.math.u%2Dpsud.fr/%7Emcld/GAEL/Gael/conv.pdf.

[414] Jean-Marc Decauwert. Géométrie affine URL http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ga/ga.pdf.

[415] Wikiversité. Barycentre/Théorème de l'associativité du barycentre — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DBarycentre/Th%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5F1%2527associativit%25C3%25A9%5Fdu%5Fbarycentre%26oldid%3D582092. En ligne ; accédé le 16-janvier-2017

[416] Wikipédia. Espace topologique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DEspace%5Ftopologique%26oldid%3D152161195.

[417] Daniel Perrin. À propos de la définition de la limite d'une fonction en un point URL https://www.math.u%2Dpsud.fr/%7Eperrin/CAPES/analyse/fonctions/definitiondelimite.pdf.

[418] Beaucoup de monde. Annonce Frido 2019 URL https://linuxfr.org/news/le%2Dfrido%2Dlivre%2Dcollaboratif%2Dde%2Dmathematique%2Dde%2Dniveau%2Dagregation%2Det%2Dun%2Dpeu%2Dplus.

[419] monde. Annonce Frido 2018 URL https://linuxfr.org/news/le%2Dfrido%2D2018%2Dlivre%2Dlibre%2Dde%2Dmathematique%2Dpour%2Dl%2Dagregation.

[420] Usual limit from filter URL https://math.stackexchange.com/questions/3364039/usual%2Dlimit%2Dfrom%2Dfilter.

[421] Foys. Limites épointées URL http://www.les%2Dmathematiques.net/phorum/read.php%3F18%2C2195094%2C2195240.

[422] Donatien Alphonse François de Sade. L'histoire de Juliette URL https://fr.wikisource.org/wiki/L%25E2%2580%2599histoire%5Fde%5FJuliette/cinqui%25C3%25A8me%5Fpartie.

[423] Wikipédia. Intégrale de Kurzweil-Henstock — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DInt%25C3%25A9grale%5Fde%5FKurzweil%2DHenstock%26oldid%3D178545707.

[424] Foys. Re : Limites épointées URL http://www.les%2Dmathematiques.net/phorum/read.php%3F18%2C2195094%2C2255758%23msg%2D2255758.

[425] Wikipédia. Droite réelle achevée — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DDroite%5Fr%25C3%25A9elle%5Fachev%25C3%25A9e%26oldid%3D144800302.

[426] Ud779. Limits of functions and left hand right hand limit URL https://math.stackexchange.com/questions/1418673/limits%2Dof%2Dfunctions%2Dand%2Dleft%2Dhand%2Dright%2Dhand%2Dlimit.

[427] . Leçon nr 63 URL https://www.capes%2Dde%2Dmaths.com/lecons/lecon63.pdf.

[428] Wikiversité. Fonctions d'une variable réelle : Continuité 4 aout 2023. URL https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions%5Fd%2527une%5Fvariable%5Fr%25C3%25A9elle/Continuit%25C3%25A9%23Th%25C3%25A9or%25C3%25A8mes%5Fsur%5Fles%5Ffonctions%5Fcontinues.

[429] Wikipédia. Fonction Cauchy-continue — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DFonction%5FCauchy%2Dcontinue%26oldid%3D157229246.

[430] Wikiversité. Topologie générale/Complétude — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DTopologie%5Fg%25C3%25A9n%25C3%25A9rale/Compl%25C3%25A9tude%26oldid%3D753513. En ligne ; accédé le 24-juillet-2019

[431] Provatiscus. Uniforme continuité utilisee sans justification page 656 URL https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/issues/124.

[432] Adrien Fontaine. Développement : théorème de Sarkiowski URL http://perso.eleves.bretagne.ens%2Dcachan.fr/%7Eafontain/dvpt%2520thm%2520de%2520sarkowski.pdf.

[433] Pierre Monmarché. Développements URL http://laurent.claessens%2Ddonadello.eu/pdf/1%2Dtotal.pdf.

[434] Wikipédia. Théorème de Heine — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FHeine%26oldid%3D145940281.

[435] Callus. URL http://math.stackexchange.com/questions/1829332/prove%2Dthat%2Dif%2Dv%2Dis%2Dfinite%2Ddimensional%2Dthen%2Dv%2Dis%2Deven%2Ddimensional.

[436] J. L. Littlewoor. Every polynomyal has a root URL http://www.math.univ%2Dtoulouse.fr/%7Ebauval/Littlewood%2D95%2D8.pdf.

[437] Wikipédia. Théorème fondamental de l'algèbre — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Ffondamental%5Fde%5Fl%2527alg%25C3%25A8bre%26oldid%3D139327371.

[438] Wikipédia. Trigonalisation — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTrigonalisation%26oldid%3D109085753.

[439] Henry C. King. Unitary diagonalization of matrices URL http://www%2Dusers.math.umd.edu/%7Ehck/Normal.pdf.

[440] Wikipedia. Spectral theorem — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL http://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DSpectral%5Ftheorem%26oldid%3D575488135.

[441] theorem for normal triangular matrices URL http://planetmath.org/theoremfornormaltriangularmatrices.

[442] Michel Granget. Normes matricielles, conditionnement URL http://math.univ%2Dangers.fr/%7Egranger/ananum/Chapitre%5FII.pdf.

[443] David Michel. Théorème de Lie-Kolchin URL https://perso.eleves.ens%2Drennes.fr/people/David.Michel/agreg/TheoremeLieKolchin.pdf.

[444] David Delaunay. Nilpotence URL http://mp.cpgedupuydelome.fr/pdf/R%C3%A9duction%2520des%2520endomorphismes%2520%2D%2520Nilpotence.pdf.

[445] Pierre-Emmanuel Jabin. Analyse numérique, correction du TD 8 URL http://math.unice.fr/%7Ejabin/CTD3%2D8.pdf.

[446] Gallouët !Thierry. Norme et conditionnement d'une matrice URL https://www.i2m.univ%2Damu.fr/%7Egallouet/licence.d/anum.d/anum%2Dtg2.pdf.

[447] martini. Why is the operator 2-norm of a diagonal matrix its largest value ? URL https://math.stackexchange.com/q/413375.

[448] Just a user. Norm of (lambda + N)k when N is nilpotent 27 juilllet 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/5085835/norm%2Dof%2Dlambda%2Dnk%2Dwhen%2Dn%2Dis%2Dnilpotent/5085843%235085843.

[449] Wikipédia. Théorème de Thalès — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FThal%25C3%25A8s%26oldid%3D188328664.

[450] Wikipédia. Angle inscrit dans un demi-cercle — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DAngle%5Finscrit%5Fdans%5Fun%5Fdemi%2Dcercle%26oldid%3D187962800.

[451] URL https://www.math.hmc.edu/calculus/tutorials/quotient%5Frule/proof.pdf.

[452] Wikiversité. Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DFonctions%5Fd%2527une%5Fvariable%5Fr%25C3%25A9elle/D%25C3%25A9rivabilit%25C3%25A9%26oldid%3D718842. En ligne ; accédé le 24-mai-2018

[453] Wikiversité. Fonction dérivée/Dérivée d'un quotient — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DFonction%5Fd%25C3%25A9riv%25C3%25A9e/D%25C3%25A9riv%25C3%25A9e%5Fd%2527un%5Fquotient%26oldid%3D675129. En ligne ; accédé le 24-mai-2018

[454] Wikipédia. Opérations sur les dérivées — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DOp%25C3%25A9rations%5Fsur%5Fles%5Fd%25C3%25A9riv%25C3%25A9es%26oldid%3D99099598.

[455] Andrew D. Hwang. Open Unit Ball diffeomorphic to the Open Unit Cube URL https://math.stackexchange.com/q/1241724.

[456] Wikiversité. Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DFonctions%5Fd%2527une%5Fvariable%5Fr%25C3%25A9elle/D%25C3%25A9rivabilit%25C3%25A9%26oldid%3D819258. En ligne ; accédé le 14-novembre-2020

[457] Wikiversité. Fonctions d'une variable réelle/Dérivabilité — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DFonctions%5Fd%2527une%5Fvariable%5Fr%25C3%25A9elle/D%25C3%25A9rivabilit%25C3%25A9%26oldid%3D753518. En ligne ; accédé le 19-juillet-2019

[458] Wikipédia. Théorème de Rolle — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FRolle%26oldid%3D132483699.

[459] Guillaume Connan. Dérivation URL http://gconnan.free.fr/les%5C%2520pdf/Deriv.pdf.

[460] Keith Konrad. The remainder in Taylor series URL http://www.math.uconn.edu/%7Ekconrad/blurbs/analysis/TaylorRemainder.pdf.

[461] Martial Lenzen. Leçon n 65 URL https://capes%2Dde%2Dmaths.com/lecons/lecon65.pdf.

[462] Wikipédia. Règle de L'Hôpital — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DR%25C3%25A8gle%5Fde%5FL%2527H%25C3%25B4pital%26oldid%3D131491717.

[463] . Squeeze theorem — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DSqueeze%5Ftheorem%26oldid%3D903141752.

[464] Kévin Santugino. Comprendre les dérivées partielles et leurs notations URL https://www.math.u%2Dbordeaux.fr/%7Eksantugi/downloads/PolyDeriveesPartielles.pdf.

[465] Wikipédia. Application multilinéaire — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DApplication%5Fmultilin%25C3%25A9aire%26oldid%3D161449382.

[466] Suites et séries de fonctions URL http://blog.psi945.fr/public/maths%2Dpsi/cours%2Dpsi%2Dsuites%2Dseries%2Dfonctions.pdf.

[467] F. Poupaud. Analyse fonctionnelle pour la licence URL http://math.unice.fr/%7Erascle/pdffiles/coursanapp/ana%2Dfonc.pdf.

[468] Nicole Bopp. Un complément à la leçon sur l'équation fonctionnelle de la fonction exponentielle URL http://irma.math.unistra.fr/%7Ebopp/CAPES/cours/equation%2Dfelle%2Dexp.pdf.

[469] mihaild. differential of analytic map between Banach spaces 24 juillet 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/5085132/differential%2Dof%2Danalytic%2Dmap%2Dbetween%2Dbanach%2Dspaces/5085135%235085135.

[470] Michael Gechele. Théorème de Stone-Weierstrass URL http://michael.gechele.perso.neuf.fr/Agregation/Theoreme%5FStone%5FWeierstrass.pdf.

[471] Primitives et intégrales URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/capes/IMG/pdf/new.primitive.pdf.

[472] G. B. Folland. Taylor's formula URL https://sites.math.washington.edu/%7Efolland/Math425/taylor.pdf.

[473] Wikipedia. Développement de Taylor URL http://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9veloppement%5C%5Fde%5C%5FTaylor.

[474] Wikiversité. Calcul différentiel/Théorèmes utiles — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DCalcul%5Fdiff%25C3%25A9rentiel/Th%25C3%25A9or%25C3%25A8mes%5Futiles%26oldid%3D657239. En ligne ; accédé le 10-juillet-2017

[475] Philippe Caldero. Hitchhiker's Manual of Maths 18 aout 2025. URL https://math.univ%2Dlyon1.fr/%7Ecaldero/Cours%2DGCG.pdf.

[476] Jens Wagemaker. Let $A \in SO(3)$ show that 1 is always an eigenvalue. (Proof check and alternative proof?) URL https://math.stackexchange.com/q/4183457.

[477] Jeanas. Re : Le cas particulier ChatGPT 28 septembre 2025. URL https://linuxfr.org/nodes/140246/comments/2001196.

[478] Yoann Gelineau. Générateurs du groupe linéaire URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/%7Egelineau/devagreg/Generateurs%5FGroupe%5FLineaire.pdf.

[479] Sandrine Caruso. Générateurs de $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$ URL http://sandrine.toonywood.org/pageperso/agreg/geneSL.pdf.

[480] Wikipédia. Théorème de Cayley-Hamilton — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FCayley%2DHamilton%26oldid%3D104470625.

[481] David Monniaux. URL http://david.monniaux.free.fr/dotclear/index.php/post/2014/06/09/M%C3%A9moire%2D%C3%A0%2Deffa%C3%A7age%2Drapide. David Monniaux esquisse la preuve dans un commentaire à cette note

[482] Pierre Lissy. Décomposition polaire URL http://www.ljll.math.upmc.fr/%7Elissy/Agreg/developpements/DecPol.pdf.

[483] Wikipédia. Décomposition polaire — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DD%25C3%25A9composition%5Fpolaire%26oldid%3D90240040.

[484] Jean-Etienne Rombaldi. Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel. Applications URL http://www%2Dfourier.ujf%2Dgrenoble.fr/%7Erombaldi/AgregInterne/Oral1/120.pdf.

[485] Brice Loustau. Développements d'algèbre pour l'agrégation URL http://myismail.net/docs/divers/agreg/Sortie/LessonsAlgLoustau.pdf.

[486] Michel Coste. Sous-groupes compacts du groupe linéaire URL http://agreg%2Dmaths.univ%2Drennes1.fr/documentation/docs/ssgrpecompact.pdf.

[487] Daniel Li. Notions fondamentales de la théorie des probabilités URL http://labomathlens.free.fr/Liens/ProbaM1/PROBA01.pdf.

[488] Daniel Li. Tribus et mesures URL http://www.editions%2Dellipses.fr/product%5Finfo.php%3Fproducts%5Fid%3D9387.

[489] Daniel Saada. Tribu de Borel et tribu de Baire d'un espace topologique URL http://www.daniel%2Dsaada.eu/fichiers/16%2DTribus%5Fde%5FBaire.pdf.

[490] Wikipédia. Tribu-trace — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTribu%2Dtrace%26oldid%3D155238311.

[491] Daniel Li. Construction de la mesure de Lebesgue URL http://www.editions%2Dellipses.fr/product%5Finfo.php%3Fproducts%5Fid%3D9387.

[492] Wikipédia. Mesure (mathématiques) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DMesure%5F%28math%25C3%25A9matiques%29%26oldid%3D145203435.

[493] . Field of sets — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DField%5Fof%5Fsets%26oldid%3D1055198868.

[494] François de Marçay. Théorie abstraite de l'intégration et théorème de Radon-Nikodym URL https://www.imo.universite%2Dparis%2Dsaclay.fr/%7Ejoel.merker/Enseignement/Integration/abstraite%2Dintegration.pdf.

[495] Mark. Two « simultaneously » sigma-finite measure 23 juillet 2023. URL https://math.stackexchange.com/q/4741254.

[496] ProofWiki. Outer Measure of Limit of Increasing Sequence of Sets — ProofWiki, URL http://www.proofwiki.org/w/index.php%3Ftitle%3DOuter%5FMeasure%5Fof%5FLimit%5Fof%5FIncreasing%5FSequence%5Fof%5FSets%26oldid%3D85952.

[497] C. Antonini and JF. Quint and P. Borgnat and J. Bérard and E. Lebeau and E. Souche and A. Chateau and O. Teytaud. Quelques résultats d'unicité URL http://www.les%2Dmathematiques.net/a/i/d/node1.php%23T42.

[498] James Norris. Uniqueness of measures URL http://www.statslab.cam.ac.uk/%7Ejames/Lectures/pm3.pdf.

[499] Wikipédia. Tribu borélienne 24 aout 2024. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Tribu%5Fbor%C3%A9lienne.

[500] C. Antonini and JF. Quint and P. Borgnat and J. Bérard and E. Lebeau and E. Souche and A. Chateau and O. Teytaud. Ensembles négligeables et complétion de tribus URL http://www.les%2Dmathematiques.net/a/i/c/node1.php.

[501] Wikipédia. Complétion d'une mesure — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DCompl%25C3%25A9tion%5Fd%2527une%5Fmesure%26oldid%3D89819650.

[502] B. Mauray. Intégration jusqu'au théorème de Lebesgue URL https://webusers.imj%2Dprg.fr/%7Ebernard.maurey/agreg/Textes/Lebesgue.pdf.

[503] Gerald Teschl. Topics in real and functional analysis URL http://www.mat.univie.ac.at/%7Egerald/ftp/book%2Dfa/fa.pdf.

[504] Emmanuel Vieillard Baron. Les fonctions mesurables URL http://www.les%2Dmathematiques.net/a/i/b/node1.php.

[505] Wikipédia. Fonction étagée — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DFonction%5F%25C3%25A9tag%25C3%25A9e%26oldid%3D104836104.

[506] John K. Hunter. Measure theory URL https://www.math.ucdavis.edu/%7Ehunter/measure%5Ftheory/measure%5Fnotes.pdf.

[507] Daniel Li. Intégration sur un espace produit URL http://www.editions%2Dellipses.fr/product%5Finfo.php%3Fproducts%5Fid%3D9387.

[508] Rémi Peyre and Frédéric Simon. Travaux dirigés de probabilités URL http://www.normalesup.org/%7Erpeyre/pro/enseignement/td09pbas%2De.pdf.

[509] Wikipédia. Ensemble de Vitali — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DEnsemble%5Fde%5FVitali%26oldid%3D100925109.

[510] . Re : mesure non nulle et existence d'un ouvert URL http://www.les%2Dmathematiques.net/phorum/read.php%3F4%2C608327%2C608430%23msg%2D608430.

[511] Daniel Choï. Mathématiques pour la mécanique URL http://www.meca.unicaen.fr/Enseignement/Document/CoursChoi/mathmeca.pdf.

[512] Wikipédia. Lebesgue integration 7 janvier 2024. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue%5Fintegration.

[513] Gilles Dubois. URL http://dubois.gilles.pagesperso%2Dorange.fr/analyse%5Freelle/intlimites.html.

[514] Prove the Countable additivity of Lebesgue Integral. URL https://math.stackexchange.com/questions/668958/prove%2Dthe%2Dcountable%2Dadditivity%2Dof%2Dlebesgue%2Dintegral.

[515] Daniel Li. Construction de l'intégrale de Lebesgue URL http://www.editions%2Dellipses.fr/product%5Finfo.php%3Fproducts%5Fid%3D9387.

[516] David Madore. Sur la rédaction des maths et la recherche de l'inambiguïé URL http://www.madore.org/%7Edavid/weblog/d.2018%2D10%2D24.2562.html.

[517] Yao Jianfeng. Statistique et logiciels URL http://perso.univ%2Drennes1.fr/jian%2Dfeng.yao/pedago/statlog/.

[518] user1770201. Showing that the Countable Sum of Measures is Mutually Singular to another Measure 18 décembre 2012. URL https://math.stackexchange.com/q/261618.

[519] Laurent Claessens. Why the sum is -oo ? 23 juillet 2023. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Hahn%5Fdecomposition%5Ftheorem.

[520] Bruce Driver. Analysis tools with applications URL http://www.math.ucsd.edu/%7Ebdriver/240%2D01%2D02/Lecture%5FNotes/anal.pdf.

[521] B. Mauray. Préparation à l'agrégation, analyse URL http://www.math.jussieu.fr/%7Emaurey/agreg/index.html.

[522] Thierry Gallouët and Raphaèle Herbin. Mesure, intégration, probabilités URL http://www.cmi.univ%2Dmrs.fr/%7Egallouet/licence.d/mes%2Dint%2Dpro.pdf.

[523] Daniel Li. Changement de variables dans les intégrales sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ URL http://li.perso.math.cnrs.fr/textes/Integration/change%2Dv.pdf.

[524] Bruno Demange. Théorème de changement de variables URL https://www%2Dfourier.ujf%2Dgrenoble.fr/%7Edemange/integration/2012/integration%2Dchap5.pdf.

[525] Wikipédia. Intégrale impropre — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DInt%25C3%25A9grale%5Fimpropre%26oldid%3D103902526.

[526] Rong-Qing Jia . Chapter 3. Absolutely Continuous Functions URL https://sites.ualberta.ca/%7Erjia/Math418/Notes/chap3.pdf.

[527] Rong-Qing Jia . Chapter 2. Functions of Bounded Variation URL https://sites.ualberta.ca/%7Erjia/Math418/Notes/chap2.pdf.

[528] Wikipédia. Bounded variation 21 juillet 2024. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Bounded%5Fvariation.

[529] Jean Abdou Samra. Un ouvert connexe par arcs est connexe par arcs C1 5 novembre 2022. Communication personnelle

[530] Romain Boillaud. Séries de fonctions URL http://www.rblld.fr/cours/chap6.pdf.

[531] Wikipédia. Rayon de convergence — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DRayon%5Fde%5Fconvergence%26oldid%3D161945407.

[532] . Séries entières URL https://cpgedupuydelome.fr/IMG/pdf/09%5F%2D%5Fseries%5Fentieres%5Fcours%5Fcomplet.pdf.

[533] Wikiversité. Série numérique/Produit de Cauchy — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DS%25C3%25A9rie%5Fnum%25C3%25A9rique/Produit%5Fde%5FCauchy%26oldid%3D788554. En ligne ; accédé le 13-mars-2021

[534] Wikipédia. Produit de Cauchy — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DProduit%5Fde%5FCauchy%26oldid%3D178673280.

[535] Nicolas Ratazzi. Chapter 3 : Power series URL https://www.imo.universite%2Dparis%2Dsaclay.fr/%7Enicolas.ratazzi/chapitre%2D3%2Dbozec.pdf.

[536] Gérard Eguether. Ex-séries entières URL http://iecl.univ%2Dlorraine.fr/%7EGerard.Eguether/zARTICLE/EX.pdf.

[537] G. Costantini. RÈGLES DE D'ALEMBERT ET DE CAUCHY POUR LES SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS

[538] Règles de d'Alembert et de Cauchy URL https://uel.unisciel.fr/mathematiques/serie/serie%5Fch01/co/apprendre%5F10.html.

[539] . Cauchy–Hadamard theorem — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DCauchy%25E2%2580%2593Hadamard%5Ftheorem%26oldid%3D1060324209.

[540] Georges Skandalis. Analyse, résumés et exercices URL https://www.math.univ%2Dparis%2Ddiderot.fr/%5C%5Fmedia/formations/prepa/agreginterne/polycopieanalyse.pdf.

[541] E.F. Whittlesey. ANALYTICFUNCTIONS IN BANACH SPACES URL https://www.ams.org/journals/proc/1965%2D016%2D05/S0002%2D9939%2D1965%2D0184092%2D2/S0002%2D9939%2D1965%2D0184092%2D2.pdf.

[542] Rahul Krishna. Approximations by Taylor polynomials URL http://math.columbia.edu/%7Ekrishna/08092011.pdf.

[543] Vogel Thomas. Analytic functions URL http://www.math.tamu.edu/%7Etvogel/410/sect74a.pdf.

[544] Jimmie Lawson. Chapter 4 partitions of unity and smooth functions URL https://www.math.lsu.edu/%7Elawson/Chapter4.pdf.

[545] J. Parizet. Algèbre engendrée par une matrice carrée URL https://clong.pagesperso%2Dorange.fr/semana/documents/parizet/algA.pdf.

[546] N. P. Landsman. Lectures notes on C^*-algabras, Hilbert C^*-modules, and quantum mechanics math-ph/9807030v1

[547] Dan Klain. The matrix exponential (with exercices) URL http://faculty.uml.edu/dklain/exponential.pdf.

[548] numberphile . A proof that e is irrational URL https://www.youtube.com/watch%3Fv%3DxOXsDfMMTjs%26pp%3DugMICgJmchABGAE%253D.

[549] Alain Guichet. Preuve : séries de Riemann 15 novembre 2024. URL https://alainguichet.fr/ecs%2Dtouchard/wiki/doku.php%3Fid%3Dmath:2:demo:serie%5Friemann.

[550] Wikipédia. Série de Riemann 15 novembre 2024. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/S%25C3%25A9rie%5Fde%5FRiemann.

[551] ENS Cachan. Théorème de stabilité de Lyapunov URL http://minerve.bretagne.ens%2Dcachan.fr/images/Lyapunov.pdf.

[552] Rached Mneimé. Réduction des endomorphismes

[553] Jaap Eldering. Inversion is Smooth October 6 2022. URL https://math.stackexchange.com/q/2145515.

[554] peek-a-boo. Unconditional convergence and analytic map 1 novembre 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/5106243/unconditional%2Dconvergence%2Dand%2Danalytic%2Dmap%3Fnoredirect%3D1%23comment10996978%5F5106243.

[555] Chat GPT. Chat GPT, en me battant pour lui faire cracher la démonstration et corriger ses erreurs. URL https://chatgpt.com.

[556] Laurent Claessens. local inverse of analytic function URL https://math.stackexchange.com/q/4345396.

[557] Jaap Eldering. Inversion is Smooth URL https://math.stackexchange.com/q/2145515.

[558] Matthieu Romagny. Représentations linéaires des groupes finis URL http://www.math.jussieu.fr/%7Eromagny/agreg/theme/rlgf%5Fpaysage.pdf.

[559] Sébastien Pellerin. Développements d'analyse pour l'oral de l'agrégation URL http://pellerin.xyz/doc/agreg/analyse.pdf.

[560] Kevin Quirin. Théorème de Müntz URL http://kevin.quirin.free.fr/Trucs/agreg/Dvt%5FMuntz.pdf.

[561] Pierre Lissy. Déterminant de Cauchy et application au théorème de Müntz URL http://www.ljll.math.upmc.fr/%7Elissy/Agreg/developpements/CauchyMuntz.pdf.

[562] Benjamin Dadoun. Théorème de Müntz URL http://benjamin.dadoun.free.fr/muntz.pdf.

[563] Jean-Louis Rouget. Intégrales dépendant d'une paramètre URL http://www.maths%2Dfrance.fr/MathSpe/Cours/09%2Dintegrales%2Da%2Dparametres.pdf.

[564] Wikipédia. Lemme de Hadamard — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DLemme%5Fde%5FHadamard%26oldid%3D90659396.

[565] Jean-Pierre Demailly. Analyse numérique et équations différentielles

[566] bibmath. Point fixe Février 2023. URL https://www.bibmath.net/dico/index.php%3Faction%3Daffiche%26quoi%3D./p/pointfixe.html.

[567] Clémence Minazzo and Kelsey Rider. Théorèmes du point fixe et applications aux équations différentielles URL http://math.unice.fr/%7Eeaubry/Enseignement/M1/memoire.pdf.

[568] Ivan Nourdin. Leçons d'analyse, probabilités algèbre et géométrie

[569] Sandrine Caruso. Théorème de Cauchy-Lipschitz URL http://boumbo.toonywood.org/sandrine/pageperso/agreg/cauchy%2Dlipschitz.pdf.

[570] Franck Boyer. Équations différentielles ordinaires URL http://www.latp.univ%2Dmrs.fr/%7Efboyer/Enseignement/Agreg/cours%5FEDO%5FAgreg%5FFBoyer.pdf.

[571] Théo Pierron. Théorème de Cauchy-Lipschitz global URL http://perso.eleves.ens%2Drennes.fr/%7Etpier758/agreg/dvpt/maths/cauchy%5Flipschitz.pdf.

[572] Thierry Audibert. Le problème de Cauchy, résultats fondamentaux URL http://www.univenligne.fr/Documents/PolycopiesAgreg/EDO1.pdf.

[573] Thomas Budzinski. Théorème de Cauchy-Lipschitz URL https://www.eleves.ens.fr/home/budzinsk/polys/Non%2520olympique/2014%5Fcauchylipschitz.pdf.

[574] Wikipédia. Théorème d'inversion locale — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fd%2527inversion%5Flocale%26oldid%3D100975433.

[575] Antoine Chambert-Loir. Introduction aux groupes et algèbres de Lie URL http://www.math.u%2Dpsud.fr/%7Echambert/enseignement/2004%2D05/lie/lie.pdf.

[576] E. P. Ban. Lie groups URL http://www.math.uu.nl/people/ban/lecnot.html.

[577] Wikipédia. Extremum — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DExtremum%26oldid%3D177462314.

[578] Joachim Stubbe. URL http://mathaa.epfl.ch/prob/enseignement/analyse2/series/AnalysisE.pdf.

[579] Laurent Guillopé. Optimisation sous contrainte URL https://www.math.sciences.univ%2Dnantes.fr/%7Eguillope/l3%2Dosc/osc.pdf.

[580] Bruno Galerne. Optimisation, algorithmique URL http://www.math%2Dinfo.univ%2Dparis5.fr/%7Ebgalerne/m1%5Fopti%5Falgo/poly%5Fopti%5Falgo.pdf.

[581] Wikipédia. Fonction convexe — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DFonction%5Fconvexe%26oldid%3D157832047.

[582] Wikiversité. Fonctions convexes/Définition et premières propriétés — Wikiversité, URL http://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DFonctions%5Fconvexes/D%25C3%25A9finition%5Fet%5Fpremi%25C3%25A8res%5Fpropri%25C3%25A9t%25C3%25A9s%26oldid%3D381775. En ligne ; accédé le 9-février-2014

[583] Wikiversité. Fonctions convexes/Fonctions convexes dérivables — Wikiversité, URL http://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DFonctions%5Fconvexes/Fonctions%5Fconvexes%5Fd%25C3%25A9rivables%26oldid%3D379779. En ligne ; accédé le 9-février-2014

[584] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. Convex optimization URL http://www.stanford.edu/%7Eboyd/cvxbook/bv%5Fcvxbook.pdf.

[585] Document 33 : fonctions convexes URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/capes/IMG/pdf/new.convexe.pdf.

[586] Wikipédia. Inégalité arithmético-géométrique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DIn%25C3%25A9galit%25C3%25A9%5Farithm%25C3%25A9tico%2Dg%25C3%25A9om%25C3%25A9trique%26oldid%3D99682278.

[587] Wikipédia. Inégalité de Kantorovitch — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DIn%25C3%25A9galit%25C3%25A9%5Fde%5FKantorovitch%26oldid%3D102417007.

[588] John K. Hunter. Chapter 13 : Metric, normed and topological spaces URL https://www.math.ucdavis.edu/%7Ehunter/intro%5Fanalysis%5Fpdf/ch13.pdf.

[589] Jean-François Burnol. Normes Lp URL http://jf.burnol.free.fr/agregnormeslp.pdf.

[590] Georges Comte. Lemme de Morse URL http://gc83.perso.sfr.fr/Agregation/Lemme%2520de%2520Morse.pdf.

[591] Wikipédia. Calcul du volume de l'hypersphère — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DCalcul%5Fdu%5Fvolume%5Fde%5Fl%2527hypersph%25C3%25A8re%26oldid%3D147651804.

[592] Florian Bouguet. Ellipsoïde de John-Lowner URL http://florian.bouguet.free.fr/doc/developpements/john%2Dloewner.pdf.

[593] Martin Henk. Löewnr-John ellipsoids URL https://www.math.uni%2Dbielefeld.de/documenta/vol%2Dismp/24%5Fhenk%2Dmartin.pdf.

[594] Shuzhong Zhang. Supplement : the Löwner-John ellipsoids URL http://www.isye.umn.edu/courses/ie8534/pdf/Loewner%2DJohn%5Fellipsoid.pdf.

[595] B. Mauray. Analyse fonctionnelle et théorie spectrale (version longue) URL http://www.math.jussieu.fr/%7Emaurey/ts012/poly/lths.pdf.

[596] Michel Rascle. Analyse fonctionnelle pour la licence URL http://math.unice.fr/%7Erascle/pdffiles/coursanapp/ana%2Dfonc.pdf.

[597] Mourad Besbes. Chapitre 5 : espaces métriques complets, espaces de Banach URL http://besbes.mourad.free.fr/Enseignement/Topologie/Chapitre5.pdf.

[598] C. Antonini and JF. Quint and P. Borgnat and J. Bérard and E. Lebeau and E. Souche and A. Chateau and O. Teytaud. Complété d'un espace métrique URL http://www.les%2Dmathematiques.net/a/a/b/node26.php.

[599] Liou. Completion of a metric space URL https://www.math.ncku.edu.tw/%7Efjmliou/advcal/Completion.pdf.

[600] Wikipédia. Espace complet — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DEspace%5Fcomplet%26oldid%3D91125353.

[601] B. Maurey. Holomorphie URL http://www.math.jussieu.fr/%7Emaurey/agreg/Textes/Holomorphe045.pdf.

[602] Samuel and Nicolas and Ivik . autour de 2000-2002. Provient de notes de TP données à l'Université Libre de Bruxelles. Je ne suis pas tout à fait certain des auteurs

[603] Romain Boillaud. Séries entières URL http://www.rblld.fr/cours/chap8.pdf.

[604] Wikipédia. Formule de trigonométrie 23 février 2025. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule%5Fde%5Ftrigonom%25C3%25A9trie%23Lin%25C3%25A9arisation.

[605] Philippe Picart. Définition de cos et sin par les séries entières URL http://trucsmaths.free.fr/telech/exp%5Fcos%5Fsin.pdf.

[606] Wikipédia. Pi — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DPi%26oldid%3D133197907.

[607] Alfred Gray. Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica URL http://webmath2.unito.it/paginepersonali/sergio.console/CurveSuperfici/.

[608] Wikiversité. Trigonométrie/Cosinus et sinus dans le cercle trigonométrique — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DTrigonom%25C3%25A9trie/Cosinus%5Fet%5Fsinus%5Fdans%5Fle%5Fcercle%5Ftrigonom%25C3%25A9trique%26oldid%3D801599. En ligne ; accédé le 28-décembre-2020

[609] David Cimasoni. Cours de géométrie I, semestre de printemps URL http://www.unige.ch/math/folks/cimasoni/GeometrieI.pdf.

[610] Sylvain. Générateurs de Isom(E) URL https://agreg%2Dmaths.fr/developpements/147.

[611] Christophe Mourougane. Théorie des groupes et géométrie URL http://perso.univ%2Drennes1.fr/christophe.mourougane/enseignements/2008%2D9/THGG/poly.groupes.pdf.

[612] Daniel Perrin. Isométries du plan URL https://www.math.u%2Dpsud.fr/%7Eperrin/CAPES/geometrie/isometries11%2D12.pdf.

[613] Éric Jourdain. Angles URL https://perso.univ%2Drennes1.fr/eric.jourdain/GEEU/Cours/Angles.pdf.

[614] Wikipédia. Angle — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DAngle%26oldid%3D130370952.

[615] B. Guesmi. Théorème de l'angle inscrit URL http://s999cdfd874dd6835.jimcontent.com/download/version/1427398317/module/5509391568/name/theoreme%2520de%25201%E2%80%99arc%2520capable.pdf1.pdf.

[616] wikipédia. Polygone 13 juillet 2022. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Polygone.

[617] Wikipedia contributors. Convex polygon — Wikipedia, The Free Encyclopedia 2022. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Convex%5Fpolygon.

[618] Groupes diédraux URL http://theoriedesgroupes.perso.sfr.fr/cours/Diedraux.pdf.

[619] Pierre Lissy. URL http://www.ljll.math.upmc.fr/%7Elissy/Agreg/developpements/Died.pdf.

[620] Pierre Renfer. Roulettes et colliers URL http://les.mathematiques.free.fr/pdf/collier.pdf.

[621] Nicole Bopp. Un complément à la leçon sur les isométries d'un polygone régulier. URL http://irma.math.unistra.fr/%7Ebopp/CAPES/cours/groupe%2Dfini%2Disometrie.pdf.

[622] Théo Pierron. Groupes de pavage du plan URL http://perso.eleves.ens%2Drennes.fr/%7Etpier758/agreg/dvpt/useless/gpe%5Fpavage.pdf.

[623] Frédéric Hélein. Géométrie euclidienne URL https://webusers.imj%2Dprg.fr/%7Efrederic.helein/cours/euclide.pdf.

[624] Laurent Dietrich. Les sous-groupes finis de SO(3) URL http://www.math.cmu.edu/%7Eldietric/doc/ssgrso3.pdf.

[625] Sous groupes finis de SO(3,R) URL http://minerve.bretagne.ens%2Dcachan.fr/images/Sous%2Dgroupes%5Ffinis%5FSO3.pdf.

[626] anonyme. Théorème de Kronecker URL https://agreg%2Dmaths.fr/uploads/versions/182/thm%5Fkronecker%5Flefourn.pdf.

[627] . URL https://agreg%2Dmaths.fr/uploads/versions/587/Th%25C3%25A9or%25C3%25A8me%2520de%2520Kronecker.pdf.

[628] mickael. Théorème de Kronecker URL https://agreg%2Dmaths.fr/uploads/versions/1419/dev.pdf.

[629] Marc Sage. Sons, fréquences, harmoniques, tons : le compromis du piano URL http://www.normalesup.org/%7Esage/Musique/Harmonie.pdf.

[630] Décomposition en éléments simples. Cas complexe. URL https://cahier%2Dde%2Dprepa.fr/pc%2Dcarnot/download%3Fid%3D2.

[631] Wikipédia. Chiffrement RSA — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DChiffrement%5FRSA%26oldid%3D146774926.

[632] URL https://www.torproject.org/about/torusers.html.en.

[633] URL https://www.torproject.org/projects/torbrowser.html.en.

[634] Wikipédia. Polynôme cyclotomique — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DPolyn%25C3%25B4me%5Fcyclotomique%26oldid%3D93751495.

[635] Adam Parusinski. Théorème de Dirichlet (version faible) URL http://math.unice.fr/%7Eparus/AGREG/Dev/dirichlet.pdf.

[636] Michel Merle. corps finis URL http://www%2Dmath.unice.fr/%7Emerle/Complements/corps%5Ffinis.pdf.

[637] Gabriel Peyré. Corps finis URL https://objectifagregation.github.io/.

[638] François Rodier. Corps finis URL http://iml.univ%2Dmrs.fr/%7Erodier/Cours/RappelCorps%2520finis.pdf.

[639] Stephane Vento. La loi de réciprocité quadratique URL http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/nourdin/LeSiteDeLAgregatif/vento2.pdf.

[640] . Chevalley–Warning theorem — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DChevalley%25E2%2580%2593Warning%5Ftheorem%26oldid%3D792119700.

[641] Christian Squarcini. Anneaux factoriels URL http://christian%2Dsquarcini.pagesperso%2Dorange.fr/AgregInterne/Anneauxcorps/3%5F2.pdf.

[642] Wikipédia. Fonction de Möbius — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DFonction%5Fde%5FM%25C3%25B6bius%26oldid%3D91236321.

[643] Wikipédia. Corps fini — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DCorps%5Ffini%26oldid%3D92489466.

[644] Wikipédia. Nombre constructible — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DNombre%5Fconstructible%26oldid%3D103130793.

[645] Tracés usuels « à la règle et au compas » URL http://dokeos3.u%2Dcergy.fr/dokeos20/courses/EEMEM2CRPE/scorm/2012%5F2013SCORMEEMEUE3EC2M2P1%5FSCORM/page%5F04.htm.

[646] Wikipédia. Théorème de Wantzel — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FWantzel%26oldid%3D103220511.

[647] Wikipédia. Nombre de Fermat — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DNombre%5Fde%5FFermat%26oldid%3D103080861.

[648] Ismaël Bailleul. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, théorème d'inversion locale et conséquences URL https://agreg%2Dmaths.univ%2Drennes1.fr/documentation/docs/CoursSousVarietes.pdf.

[649] Geoffrey Deperle. Théorème du point fixe de Brouwer URL https://agreg%2Dmaths.fr/uploads/versions/4665/Th%25C3%25A9or%25C3%25A8me%2520du%2520point%2520fixe%2520de%2520Brouwer.pdf.

[650] William K Allard. The Brouwer fixed point theorem URL http://www.math.duke.edu/%7Ewka/math204/fixed.pdf.

[651] Kenneth Kuttler. Topics in Analysis URL http://www.math.byu.edu/%7Eklkuttle/SobolevSpacesB.pdf.

[652] Hervé Le Dret. Notes de cours M2 Équations aux dérivées partielles élliptiques URL https://www.ljll.math.upmc.fr/%7Eledret/M2Elliptique/chapitre4.pdf.

[653] Bachir Bekka. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani : applications à l'existence de mesures de Haar et aux chaînes de Markov URL http://agreg%2Dmaths.univ%2Drennes1.fr/documentation/docs/PointFixe.pdf.

[654] Guillaume CARLIER. Analyse complexe 2012-2013. URL https://www.ceremade.dauphine.fr/%7Ecarlier/analysecomplexe.pdf.

[655] Wikipédia. Force conservative — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DForce%5Fconservative%26oldid%3D168767525.

[656] Wikipédia. Travail d'une force — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTravail%5Fd%2527une%5Fforce%26oldid%3D178096219.

[657] Olivier Casterá. Différentielles totales exactes URL http://o.castera.free.fr/pdf/Differentielle%5Ftotale%5Fexacte.pdf.

[658] Wikipédia. Théorème de Jordan — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FJordan%26oldid%3D124990679.

[659] Intégration de fractions rationnelles URL http://blascheck.franck.free.fr/IMG/pdf/IntegFracRat.pdf.

[660] Ophélie Rouby. Théorème de Rothstein-Trager URL http://perso.eleves.bretagne.ens%2Dcachan.fr/%7Eoroub842/dvlpts/Rothstein%5FTrager.pdf.

[661] Frédéric Chyzak. Intégration symbolique des fractions rationnelles URL http://www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/profs/Frederic.Chyzak/CF%2D2004/notes%2DIntRat.pdf.

[662] Jerry Kazdan. Taylor's Theorem - Integral Remainder URL https://www2.math.upenn.edu/%7Ekazdan/361F15/Notes/Taylor%2Dintegral.pdf.

[663] Sylvain Golénia. Approximation de ln(2) URL http://mathaoutils.blogspot.com/2018/11/approximation%2Dde%2Dln2.html.

[664] Louis Fauchier-Magnan. Introduction à la théorie de Morse URL http://cqfd.epfl.ch/webdav/site/cqfd/shared/projets/igat/Introduction%2520%C3%A0%2520la%2520th%C3%A9orie%2520de%2520Morse%2520%2D%2520Louis%2520Fauchier%2DMagnan.pdf.

[665] Reduction Formula for Integral of Power of Sine URL https://proofwiki.org/wiki/Reduction%5FFormula%5Ffor%5FIntegral%5Fof%5FPower%5Fof%5FSine.

[666] Michel Stainer. Compléments sur les séries numériques URL http://michel.stainer.pagesperso%2Dorange.fr/PSIx/Cours/Ch03%2DComplSeriesNum.pdf.

[667] Wallis's Product URL https://proofwiki.org/wiki/Wallis%2527s%5FProduct.

[668] Jacek Cichoń. Stirling approximation formula URL http://cs.pwr.edu.pl/cichon/Math/StirlingApp.pdf.

[669] Wikipédia. Formule de Stirling — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DFormule%5Fde%5FStirling%26oldid%3D93224272.

[670] Jean-Louis Rouget. Formule de Stirling URL https://www.maths%2Dfrance.fr/MathSpe/GrandsClassiquesDeConcours/SeriesNumeriques/FormuleDeStirling.pdf.

[671] Stirling's Formula URL https://proofwiki.org/wiki/Stirling%2527s%5FFormula.

[672] Keith Conrad. Differentiating under the integral sign URL https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/diffunderint.pdf.

[673] Christophe Caignaert. Courbes URL http://c.caignaert.free.fr/chapitre15/node1.html.

[674] gb. Cercle circonscrit à une courbe URL http://www.les%2Dmathematiques.net/phorum/read.php%3F8%2C750556%2C750586.

[675] Mohammad Ghomi. Lecture note on differential geometry URL http://people.math.gatech.edu/%7Eghomi/LectureNotes/LectureNotes5U.pdf.

[676] Wikipedia. Convex curve — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DConvex%5Fcurve%26oldid%3D685739052.

[677] Robert Rolland. Géométrie projective URL http://robert.rolland.acrypta.com/telechargements/geometrie/pr0.pdf.

[678] Daniel Bertrand. Géométrie projective URL http://www.math.jussieu.fr/%7Ebertrand/Enseignement/epdf/Algeo09%5Fchap2.pdf.

[679] Nicolas Jacon. Géométrie projective URL http://njacon.perso.math.cnrs.fr/jacon%5FGeometrieproj.pdf.

[680] François Labourie. Géométrie affine et projective URL http://math.unice.fr/%7Elabourie/preprints/pdf/geomproj.pdf.

[681] Matthieu Romagny. Droites projectives, homographies URL https://perso.univ%2Drennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/droite%5Fprojective%5FHalberstadt.pdf.

[682] Arnaud Bodin. L'inversion URL http://math.univ%2Dlille1.fr/%7Ebodin/geometrie/ch%5Finversion.pdf.

[683] Laurent Dietrich. Le groupe circulaire URL http://www.math.cmu.edu/%7Eldietric/doc/groupecirc.pdf.

[684] Florian Bouget. Le groupe circulaire URL http://florian.bouguet.free.fr/doc/developpements/Groupe%5Fcirculaire.pdf.

[685] 182 : utilisation des nombres complexes en géométrie. Homographies URL http://minerve.bretagne.ens%2Dcachan.fr/images/182%5F2015%2D2016.pdf.

[686] Sébastien Pellerin. Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaréé URL http://dynamaths.free.fr/docs/lecons/developpement%5Falgebre%5F6.pdf.

[687] Alexandre Alessandri. Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré URL http://minerve.bretagne.ens%2Dcachan.fr/images/Dvt%5Fpsl2.pdf.

[688] Gabriel Nagy. Operator theory in Hilbert spaces URL https://www.math.ksu.edu/%7Enagy/real%2Dan/2%2D07%2Dop%2Dth.pdf.

[689] Aline Kurtzmann. Espérance conditionnelle URL http://www.iecn.u%2Dnancy.fr/%7Ekurtzman/cours/agreg/esperance%2Dconditionnelle.pdf.

[690] Wikipédia. Théorème de projection sur un convexe fermé — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5Fprojection%5Fsur%5Fun%5Fconvexe%5Fferm%25C3%25A9%26oldid%3D90246160.

[691] Michel Merle. Espaces de Hilbert URL http://www%2Dmath.unice.fr/%7Emerle/Algebre%5Fet%5Fgeometrie/hilbert.pdf.

[692] Douglas N. Arnold. Functional analysis URL http://www.math.umn.edu/%7Earnold/502.s97/functional.pdf.

[693] Wikipédia. Base de Hilbert URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Base%5Fde%5FHilbert%3Foldid%3D128533376.

[694] Christiane Schomblond. Théorie quantique des champs, QED, QCD URL http://homepages.ulb.ac.be/%7Ecschomb/intfonc%2BQED%2BQCD.pdf.

[695] Remsirems. Re : Réponses à quelques questions URL http://linuxfr.org/nodes/110155/comments/1675813.

[696] Jonathan Bain. Kochen-Specker and Measurement URL http://faculty.poly.edu/%7Ejbain/philqm/lectureslides/08.KS%26Measurement.pdf.

[697] Michel Kern. Introduction à la méthode des éléments finie URL http://mms2.ensmp.fr/ef%5Fparis/formulation/polycop/f%5FcoursEF.pdf.

[698] Antoine Bensalah. Communication électronique privée

[699] Wikipédia. Série de Laurent — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DS%25C3%25A9rie%5Fde%5FLaurent%26oldid%3D181017723.

[700] Pascal Dingoyan. URL http://www.math.jussieu.fr/%7Edingoyan/lescours/lm367%2Dpageweb/lm367%2Dchapitre5.pdf.

[701] Noach Dana-Picard. The logarithm of a complex number URL http://ndp.jct.ac.il/tutorials/complex/node26.html.

[702] Wikiversité. Fonctions d'une variable complexe/Le logarithme complexe — Wikiversité, URL https://fr.wikiversity.org/w/index.php%3Ftitle%3DFonctions%5Fd%2527une%5Fvariable%5Fcomplexe/Le%5Flogarithme%5Fcomplexe%26oldid%3D617412. En ligne ; accédé le 16-décembre-2016

[703] psykokwak. Propriétés de l'indice et application au calcul d'intégrale URL https://agreg%2Dmaths.fr/uploads/versions/1961/DEV%2520indice.pdf.

[704] Wikipédia. Anneau principal — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DAnneau%5Fprincipal%26oldid%3D141994549.

[705] Corentin. Re : formule de Cauchy et dérivation URL http://www.les%2Dmathematiques.net/phorum/read.php%3F4%2C385272%2C385289.

[706] Philippe Charpentier. Analyse complexe URL http://www.math.u%2Dbordeaux1.fr/%7Epcharpen/enseignement/fichiers%2Dmaster1/Analyse%5FComplexe.pdf.

[707] . PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HOLOMORPHES 14 juillet 2025. URL http://pucci.math.free.fr/Cours/07%5FProprietes%5FL3%2520%2D%2520Analyse%2520complexe.pdf.

[708] Wikipédia. Pôle (mathématiques) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DP%25C3%25B4le%5F%28math%25C3%25A9matiques%29%26oldid%3D155205828.

[709] Wikipédia. Singularité isolée — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DSingularit%25C3%25A9%5Fisol%25C3%25A9e%26oldid%3D155006512.

[710] Christian Kkein. Séries de Laurent, résidus URL http://math.u%2Dbourgogne.fr/IMB/klein/Complement%5FdAnalyse%5Ffiles/chap607.pdf.

[711] Marie. Partition d'un entier en parts fixées URL https://www.agreg%2Dmaths.fr/uploads/versions/812/Partition%2520d%E2%80%99un%2520entier%2520en%2520parts%2520fix%C3%A9es.pdf.

[712] Quadriviuum Tremens. Une introduction à la Théorie Analytique des Nombres - Hors-Série URL https://www.youtube.com/watch%3Fv%3DP7%5FOWtw6C%2DY.

[713] Wikipédia. Intégrale de Fresnel — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DInt%25C3%25A9grale%5Fde%5FFresnel%26oldid%3D132170602.

[714] David Sirajuddin. Fresnel integrals URL http://itcanbeshown.com/integrals/Fresnel%2520Integrals/fresnel%5Fintegrals.pdf.

[715] Jean-Marie Lion. Fonctions holomorphes d'une variable URL http://perso.univ%2Drennes1.fr/jean%2Dmarie.lion/coursholo.pdf.

[716] Oliver Knill. A short introduction to several complex variables URL https://people.math.harvard.edu/%7Eknill/teaching/severalcomplex%5F1996/severalcomplex.pdf.

[717] Klaus Fritzche and Hans Grauert. From holomorphic functions to complex manifolds URL https://books.google.com/books%3Fid%3DjSeRz36zXIMC%26pg%3DPA33.

[718] Franck Boyer. Analyse fonctionnelle URL https://www.math.univ%2Dtoulouse.fr/%7Efboyer/%5Fmedia/enseignements/m1af/poly%5Faf%5Fm1.pdf.

[719] Nikko and Bruno and Steff. l'inverse d'une application linéaire continue et bijective est-elle continue ? URL http://www.les%2Dmathematiques.net/phorum/read.php%3F2%2C60410%2C60446.

[720] Wikipédia. Théorème d'Ascoli — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fd%2527Ascoli.

[721] Keith Conrad. L^p spaces for $0 < p < 1$ URL https://www.math.uconn.edu/%7Ekconrad/blurbs/analysis/lpspace.pdf.

[722] B. Maurey. URL http://www.math.jussieu.fr/%7Emaurey/IntegProba/Cours/CoursIP101%2D14.pdf.

[723] Bosses glissantes URL http://www.bibmath.net/dico/index.php%3Faction%3Daffiche%26quoi%3D./b/bosseglissante.html.

[724] Wikipédia. Inégalité de Young — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DIn%25C3%25A9galit%25C3%25A9%5Fde%5FYoung%26oldid%3D181063084.

[725] Laurent Gry. Inégalité de Young et inégalité de Hölder URL http://www.laurentgry%2Dsciences.fr/data/inegayoung.pdf.

[726] t.b.. On the equality case of the Hölder and Minkowski inequalities URL https://math.stackexchange.com/q/87940.

[727] Danarmk. URL http://linuxfr.org/nodes/110155/comments/1675589.

[728] B. Mauray. Convolution, inégalités, approximations et régularisation URL https://webusers.imj%2Dprg.fr/%7Ebernard.maurey/agreg/ag045/Convolution045.pdf.

[729] Schilling. Minkowsky's inequality for integrals URL http://math.ucsd.edu/%7Elni/math240/suppl%2D1.pdf.

[730] . Minkowski inequality — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DMinkowski%5Finequality%26oldid%3D1015403274.

[731] Daniel Fischer. When does equality hold in the Minkowski's inequality $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$? URL https://math.stackexchange.com/q/581305.

[732] D. Sarason. Math 202B Solutions URL https://math.berkeley.edu/%7Esarason/Class%5FWebpages/solutions%5F202B%5Fassign5.pdf.

[733] wikipédia. Inégalité de Hölder 29 novembre 2024. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/In%25C3%25A9galit%25C3%25A9%5Fde%5FH%25C3%25B6lder.

[734] Jeff Viaclovsky. MEASURE AND INTEGRATION : LECTURE 24 9 dec 2003. URL https://ocw.mit.edu/courses/18%2D125%2Dmeasure%2Dand%2Dintegration%2Dfall%2D2003/561b4faeadaad88ac3fb9139397b2a03%5F18125%5Flec24.pdf.

[735] carmichael561. Why is a convolution of an L^1 and an L^p functions well-defined ? 2019-08-01. URL https://math.stackexchange.com/q/1733883.

[736] Neil Lyall. Minkowsky's inequality for integrals <++>. URL http://alpha.math.uga.edu/%7Elyall/8100Fall2014/MinkowskiIntegral.pdf.

[737] Charles Suquet. Intégration, analyse de Fourier,Probabilités URL http://math.univ%2Dlille1.fr/%7Esuquet/ens/IFP/Cours/cours04/CoursIFP04.html.

[738] Wikipédia. Théorème de Riesz-Fischer — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FRiesz%2DFischer%26oldid%3D90074115.

[739] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. Real analysis URL http://home.ustc.edu.cn/%7Eliweiyu/documents/%28Princeton%2520Lectures%2520in%2520Analysis%29%2520Elias%2520M.%2520Stein%2C%2520Rami%2520Shakarchi%2DReal%2520analysis%5F%2520measure%2520theory%2C%2520integration%2C%2520and%2520Hilbert%2520spaces.%2520Vol.3.%2DPrinceton%2520University%2520Press%2520%282005%29.pdf.

[740] JanTinbergen1991. Lp -space is a Hilbert space if and only if p=2 URL https://math.stackexchange.com/questions/3017814/lp%2Dspace%2Dis%2Da%2Dhilbert%2Dspace%2Dif%2Dand%2Donly%2Dif%2Dp%2D2.

[741] Thierry Gallouët. Les espaces Lp URL https://www.i2m.univ%2Damu.fr/perso/thierry.gallouet/licence.d/int/part4.pdf.

[742] user173262. Does integral of L1 function vanishes on small intervals URL https://math.stackexchange.com/questions/3916749/does%2Dintegral%2Dof%2Dl1%2Dfunction%2Dvanishes%2Don%2Dsmall%2Dintervals.

[743] Jon A. Wellner. Some Basic Large Sample Theory URL https://sites.stat.washington.edu/jaw/COURSES/580s/581/LECTNOTES/ch2e%2Djaw.pdf.

[744] Wikipédia. Uniform integrability 17 juin 2024. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform%5Fintegrability.

[745] Mittens. Is ... linear for ... ? 2024-06-28. URL https://math.stackexchange.com/q/4173760.

[746] Mittens. Prove that ... (Vitali) June 28 2024. URL https://math.stackexchange.com/q/4938755.

[747] Jean-Marc Bouclet. Convolution URL https://www.math.univ%2Dtoulouse.fr/%7Ebouclet/Notes%2Dde%2Dcours%2Dexo%2Dexam/Agregation/convolution.pdf.

[748] convolution, associativity of URL https://planetmath.org/convolutionassociativityof.

[749] Gilles Leborgne. Introduction à la théorie des distributions URL http://www.isima.fr/%7Eleborgne/IsimathDistributions/distrib.pdf.

[750] Daniel Raban. Math 245C Lecture 16 Notes May 6, 2019. URL https://pillowmath.github.io/Math%2520245C/Lec16.pdf.

[751] Philippe Spindel. Éléments de géométrie différentielle pour la mécanique analytique et le gravitation URL https://portail.umons.ac.be/EN2/universite/facultes/fs/services/institut%5Fphysique/mecanique%5Fet%5Fgravitation/Documents/Textes%2520p%C3%A9dagogiques/geodiff.pdf.

[752] Hart Smith. Lecture 2 : convolution URL https://sites.math.washington.edu/%7Ehart/m526/Lecture2.pdf.

[753] user17762. Showing the inequality ... 9 mai 2012. URL https://math.stackexchange.com/q/143188.

[754] Olof Hanner. On the uniform convexity of L^p and l^p URL https://projecteuclid.org/download/pdf%5F1/euclid.afm.1485893271.pdf.

[755] Assaf Naor. Proof of the uniform convexity lemma URL https://web.math.princeton.edu/%7Enaor/homepage%2520files/inequality.pdf.

[756] David Giraudo. URL https://math.stackexchange.com/questions/95307/showing%2Dleft%2Dfracab2%2Drightp%2Dleft%2Dfraca%2Db2%2Drightp%2Dleq%2Dfrac12/95312%2395312.

[757] Kai-Seng Chou and Tianwen Luo. Chapter 4 : The Lebesgue spaces URL https://www.math.cuhk.edu.hk/course%5Fbuilder/1415/math5011/MATH5011%5FChapter%5F4.2014.pdf.

[758] gerw. How to prove Clarkson's inequality ? URL https://math.stackexchange.com/questions/1607683/how%2Dto%2Dprove%2Dclarksons%2Dinequality.

[759] Ryszard Szwarc. Clarkson inequality for complex numbers May 24, 2022. URL https://math.stackexchange.com/q/4457490.

[760] R. Fortet. Remarques sur les espaces uniformément convexes URL http://www.numdam.org/article/BSMF%5F1941%5F%5F69%5F%5F23%5F0.pdf.

[761] M .A Usman and F. A. Hammed and M. O Olayiwola. Uniformly convex spaces URL http://www.sciencepub.net/researcher/0101/10%5F0506%5FUNIFORMLY%5FCONVEX.pdf.

[762] Jean-François Burnol. Le théorème de dualité des espaces L^p URL http://jf.burnol.free.fr/0506L312annexeDualiteLp.pdf.

[763] Brian Bockelman. Functional analysis notes URL http://www.math.unl.edu/%7Es%2Dbbockel1/928/Hahn%5FBanach%5FTheorem.html.

[764] gerw. Show that the norm of a complex functional is equal to the norm of its real part 2017-03-16. URL https://math.stackexchange.com/q/2189895.

[765] Haïm Brézis. Analyse fonctionnelle Théorie et applications

[766] Ayman Aoufi. Hahn-Banach theorem geometric form complex case 25 avril 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/2734190/hahn%2Dbanach%2Dtheorem%2Dgeometric%2Dform%2Dcomplex%2Dcase.

[767] Alan Sokal. The Hahn-Banach theorem and duality of Banach spaces URL https://www.ucl.ac.uk/%7Eucahad0/3103%5Fhandout%5F6.pdf.

[768] Téofil Adamski. Le théorème de prolongement de Tietze URL https://perso.eleves.ens%2Drennes.fr/people/teofil.adamski/agreg/developpements/Tietze.pdf.

[769] Terence Tao. Brouwer's fixed point and invariance of domain theorems, and Hilbert's fifth problem 13 June 2011. URL https://terrytao.wordpress.com/2011/06/13/brouwers%2Dfixed%2Dpoint%2Dand%2Dinvariance%2Dof%2Ddomain%2Dtheorems%2Dand%2Dhilberts%2Dfifth%2Dproblem/.

[770] Wikipédia. Espace Lp — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DEspace%5FLp%26oldid%3D92618226.

[771] Didier Smets. Base d'analyse fonctionnelle URL https://www.ljll.math.upmc.fr/smets/MM005/MM005%5FChapitre%5F6.pdf.

[772] Wikipédia. Théorème de Jordan — Wikipédia, l'encyclopédie libre 18 mars 2023. URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FJordan%26oldid%3D198580114.

[773] Haïm Brezis. Analisi funzionale. Teoria e applicazioni 1983.

[774] Sylvie Benzoni. Topologie faible URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/%7Ebenzoni/Agreg/Topologie.pdf.

[775] Analyst. Do Kakutani's, Helly's, and Goldstine's theorems all hold for general normed linear spaces ? 23 avril 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/4371482/do%2Dkakutanis%2Dhellys%2Dand%2Dgoldstines%2Dtheorems%2Dall%2Dhold%2Dfor%2Dgeneral%2Dnormed%2Dlin.

[776] Bryan Shih. Is the weak∗ topology the same as the inherited product topology ? 29 avril 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/2761598/is%2Dthe%2Dweak%2Dtopology%2Dthe%2Dsame%2Das%2Dthe%2Dinherited%2Dproduct%2Dtopology%3Frq%3D1.

[777] Mihai Gradinaru and Victor Lecerf. ANALYSE FONCTIONNEL 27 avril 2025. URL https://perso.eleves.ens%2Drennes.fr/people/victor.lecerf/PDF/ANAF.pdf.

[778] Sylvie Benzoni. Distributions tempérées URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/%7Ebenzoni/Agreg/Distributions.pdf.

[779] MoebiusCorzer Giraudo. Show smooth functions of compact support are dense in the Schwartz space URL http://math.stackexchange.com/questions/229751/show%2Dsmooth%2Dfunctions%2Dof%2Dcompact%2Dsupport%2Dare%2Ddense%2Din%2Dthe%2Dschwartz%2Dspace.

[780] Richard Gomez. Séries de Fourier URL http://megamaths.perso.neuf.fr/rg/fourier.pdf.

[781] David Delaunay. Séries de Fourier URL http://mp.cpgedupuydelome.fr/pdf/S%C3%A9ries%2520de%2520Fourier.pdf.

[782] Kavi Rama Murthy. Uniform convergence of complex Fourier series 28 juin 2025. URL https://math.stackexchange.com/questions/3863760/uniform%2Dconvergence%2Dof%2Dcomplex%2Dfourier%2Dseries.

[783] B. Maurey. Notes de cours : analyse hilbertienne et de Fourier URL http://www.math.jussieu.fr/%7Emaurey/FourHilb/PolyFH.pdf.

[784] Richard Zekri. Analyse de Fourier URL http://lumimath.univ%2Dmrs.fr/infoetudiant/ANALYSEDEFOURIERMASTER2009.pdf.

[785] Michel Crouzeix. Compléments d'analyse URL https://perso.univ%2Drennes1.fr/michel.crouzeix/publis/anep.pdf.

[786] Bachir Bekka. Le théorème d'inversion de Fourier du point de vue des distributions URL http://agreg%2Dmaths.univ%2Drennes1.fr/documentation/docs/Theoreme%2DInversion%2DFourier.pdf.

[787] Erdős László. Fourier transform URL https://www.mathematik.uni%2Dmuenchen.de/%7Elerdos/WS08/QM/four08.pdf.

[788] Isabelle Gallagher. Chapitre B. Distributions URL https://www.math.ens.fr/%7Egallagher/Chapitre%2520B%25202017%2D2018.pdf.

[789] Léonard Gallardo. Chapitre 3 : les séries de Fourier URL http://www.lmpt.univ%2Dtours.fr/%7Egallardo/EspHilbert3.pdf.

[790] Charles Suquet. Espaces de Hilbert et séries de Fourier URL http://math.univ%2Dlille1.fr/%7Esuquet/ens/IFP/Cours/cours04/Chap7ifp04.pdf.

[791] Wikipédia. General Leibniz rule 4-jan-2024. URL https://en.wikipedia.org/wiki/General%5FLeibniz%5Frule.

[792] Calvin Khor. multiindex partial derivative higher order chain rule 2024-jan-03. URL https://math.stackexchange.com/q/4837970.

[793] danarmk. Topologie sur D(Omega) URL https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/issues/87%23issuecomment%2D1731779089.

[794] Daniel Li. Notions sur les distributions URL http://labomathlens.free.fr/Liens/AF/distrib.pdf.

[795] Claude Zuily. Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles.

[796] Sabin Lessard. Cours de processus stochastiques URL http://www.dms.umontreal.ca/%7Elessards/ProcessusStochastiquesLessard2014.pdf.

[797] Peter Young. Singular Fourier transforms and the Integral Representation of the Dirac Delta Function

[798] Daniel Choï. Méthode des éléments-finis par l'exemple URL http://meca.unicaen.fr/%7Echoi/pdf/cours%2Dmef.pdf.

[799] Michael Reiter and Arthur Schuste. Fourier Transform and Sobolev Spaces URL http://www.mat.univie.ac.at/%7Estein/lehre/SoSem08/sobolev%5Ffourier.pdf.

[800] Norbert Heuer. LTCC module computation methods URL http://www.ltcc.ac.uk/courses/Applied%2520Computational%2520Methods/ACM2007Chap1.pdf.

[801] Arkhnor. Densité des fonctions Cinfty à support compact URL http://www.ilemaths.net/sujet%2Ddensite%2Ddes%2Dfonctions%2Dc%2Dinfty%2Da%2Dsupport%2Dcompact%2D587937.html.

[802] Gilles Leborgne. Complément : espaces de Sobolev fractionnaires URL http://ws.isima.fr/%7Eleborgne/IsimathDistributions/sobolev%5Ffrac.pdf.

[803] Richard B. Melrose. Lecture notes for 18.155, Fall 2002 URL https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18%2D155%2Ddifferential%2Danalysis%2Dfall%2D2004/lecture%2Dnotes/section10.pdf.

[804] Julien Vovelle. Équations différentielles, cours no 2 URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/%7Evovelle/2Cours.pdf.

[805] bibmath.net. Résolution des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre 9 juin 2025. URL https://www.youtube.com/watch%3Fv%3DyCmVLulzxyc.

[806] bibmath.net. Problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire du premier ordre 9 juin 2025. URL https://youtu.be/xpKLXNR6HcM.

[807] A. Munnier. Théorie des équations différentielles ordinaires URL http://www.iecn.u%2Dnancy.fr/%7Emunnier/files/cours%5Fedo.pdf.

[808] Olivier Debarre. Équations différentielles URL http://www.math.ens.fr/%7Edebarre/EquaDiff.pdf.

[809] Sylvie Benzoni-Gavage. Propagation d'ondes URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/%7Ebenzoni/Ondes.pdf.

[810] Sonia Fliss. L'équation de transport à coefficients variables URL http://perso.ensta%2Dparistech.fr/%7Efliss/Sonia%5FFliss%5Fweb%5Fpage/Enseignement%5Ffiles/Amphi3%5F2014.pdf.

[811] Sylvie Benzoni-Gavage. Équations différentielles ordinaires URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/%7Ebenzoni/EDO%2DM1.pdf.

[812] Wikipédia. Flot (mathématiques) — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DFlot%5F%28math%25C3%25A9matiques%29%26oldid%3D134130419.

[813] Alexander Grigor'yan. Ordinary differential equation URL https://www.math.uni%2Dbielefeld.de/%7Egrigor/odelec2009.pdf.

[814] Christopher P. Grant. Theory of ordinary differential equation URL http://www.math.pitt.edu/%7Ebard/bardware/classes/2920/Grant%5F4july2007.pdf.

[815] John B.. Picard-Lindelöf theorem with parameter : what regularity ? URL http://math.stackexchange.com/questions/2126539/picard%2Dlindel%C3%B6f%2Dtheorem%2Dwith%2Dparameter%2Dwhat%2Dregularity.

[816] Kevin Quirin. Développements URL http://kevin.quirin.free.fr/Trucs/agreg/developpements.pdf.

[817] Wikipédia. Équations de Lotka-Volterra — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3D%25C3%2589quations%5Fde%5FLotka%2DVolterra%26oldid%3D113756354.

[818] Wikipédia. Équation de Riccati — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3D%25C3%2589quation%5Fde%5FRiccati%26oldid%3D162760831.

[819] Predrag Cvitanović. Partial differential equations URL http://www.cns.gatech.edu/%7Epredrag/courses/PHYS%2D6124%2D12/StGoChap6.pdf.

[820] Ralph Chill. Introduction aux équations aux dérivées partielles URL http://www.math.univ%2Dmetz.fr/%7Echill/edp.pdf.

[821] Gianluca Bontempi. Un cours d'analyse numérique et de matlab <https://web.archive.org/-web/20090203224115/

[822] Wikipedia. Two's complement — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL https://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTwo%2527s%5Fcomplement%26oldid%3D706335033.

[823] Python Software Foundation. Floating Point Arithmetic : Issues and Limitations URL https://docs.python.org/3/tutorial/floatingpoint.html.

[824] Wikipédia. IEEE 754 — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DIEEE%5F754%26oldid%3D120234746.

[825] Comprendre les nombres à virgules flottantes URL http://blog.netinfluence.ch/2009/09/24/comprendre%2Dles%2Dnombres%2Da%2Dvirgule%2Dflottante/.

[826] Harald Schmidt. IEEE754 Converter URL http://www.h%2Dschmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html.

[827] David Goldberg. What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic URL http://docs.oracle.com/cd/E19957%2D01/806%2D3568/ncg%5Fgoldberg.html%2311655.

[828] Emmanuel Frénod. Calcul scientifique URL http://web.univ%2Dubs.fr/lmam/frenod/IMG/DocEtudiant/MTH1504/calculscientifique.pdf.

[829] Franck Boyer. Agrégation externe de mathématiques. Analyse numérique URL http://www.math.univ%2Dtoulouse.fr/%7Efboyer/%5Fmedia/enseignements/agreg/cours%5Fan%5Fagreg%5Ffboyer%5F2014.pdf.

[830] Antoine Chambert-Loir. Autour de la méthode de Newton URL http://perso.univ%2Drennes1.fr/antoine.chambert%2Dloir/2005%2D06/agreg/newton.pdf.

[831] Wikipédia. Vitesse de convergence — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DVitesse%5Fde%5Fconvergence%26oldid%3D110252913.

[832] Martin Pinto Campos and Laurence Halpern. Approximations polynomiales de fonctions et et des intégrales URL http://documents.lamacs.fr/cours/macs1/cours%2Dmacs1%2Dpinto1.pdf.

[833] Ming Yang. Matrix decomposition URL http://users.eecs.northwestern.edu/%7Emya671/files/Matrix%5FYM%5F.pdf.

[834] Benjamin Ambrosio. Chapitre 3 : Méthodes directes de résolution du système $Ax = b$ URL http://lmah.univ%2Dlehavre.fr/%7Eambrosio/CoursMN/Chapitre3.pdf.

[835] Emmanuel Frénod. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires URL http://web.univ%2Dubs.fr/lmam/frenod/IMG/DocEtudiant/MTH1504/methodes%2Ddirectes.pdf.

[836] Christian Lécot. Analyse numérique matricielle URL https://www.lama.univ%2Dsavoie.fr/%7Elecot/data/M1%5FANM.pdf.

[837] Wikipédia. Matrice à diagonale dominante — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DMatrice%5F%25C3%25A0%5Fdiagonale%5Fdominante%26oldid%3D132268176.

[838] Habib Joulak. Méthodes des différences finies en élasticité URL https://ori%2Dnuxeo.univ%2Dlille1.fr/nuxeo/site/esupversions/0e05f3d2%2Dfe12%2D4d67%2Db74f%2Df622869539f2.

[839] Wikipédia. Variable aléatoire à densité 5 décembre 2022. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Variable%5Fal%25C3%25A9atoire%5F%25C3%25A0%5Fdensit%25C3%25A9.

[840] Loi d'une variable aléatoire 5 aout 2022. URL https://www.lesmath.com/2022/08/loi%2Dd%2Dune%2Dvariable%2Daleatoire.html.

[841] Philippe Briand. Probabilités de base URL http://www.lama.univ%2Dsavoie.fr/%7Ebriand/proba/g12%5Fcours.pdf.

[842] Vincent Bansaye. Variables aléatoires, espérance, indépendance URL http://www.cmap.polytechnique.fr/%7Ebansaye/CoursTD2.pdf.

[843] Frédéric Plachet. Modèles de durée Aout 2021. URL https://www.planchet.net/EXT/ISFA/fp%2Disfa.nsf/0/1430AD6748CE3AFFC1256F130067B88E/%24FILE/Seance2.pdf.

[844] Mark McClure. Differentiable function has measurable derivative ? Jan 15 2014. URL https://math.stackexchange.com/q/639690.

[845] Wikipédia. Joint probability distribution 24 aout 2024. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Joint%5Fprobability%5Fdistribution.

[846] Maverick Meerkat and Did. Expected value as integral of survival function URL https://math.stackexchange.com/questions/642021/expected%2Dvalue%2Das%2Dintegral%2Dof%2Dsurvival%2Dfunction.

[847] Gabriel Lepetit. Processus de Poisson URL https://www%2Dfourier.ujf%2Dgrenoble.fr/%7Elepetitg/agregation/Processus%5Fde%5FPoisson.pdf.

[848] Alfio Marazzi. URL http://www.iumsp.ch/Unites/us/Alfio/polybiostat/ch06.pdf.

[849] . Variables aléatoires URL http://www.cpgedupuydelome.fr/IMG/pdf/10%5F%2D%5Fvariables%5Faleatoires%5Fcours%5Fcomplet.pdf.

[850] JMoravitz. Is this probability statement correct ? 28 oct 2022. URL https://math.stackexchange.com/q/4563280.

[851] Pierre-Loïc Méliot. Notion de conditionnement URL https://www.math.u%2Dpsud.fr/%7Emeliot/agreg/condition.pdf.

[852] Cédric Boutillier. URL https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/issues/16%23issue%2D180279120.

[853] Automaths. Paradoxe des deux enfants – Episode 2 ! URL https://automaths.blog/2018/08/25/paradoxe%2Ddes%2Ddeux%2Denfants%2Depisode%2D2/.

[854] Wikipédia. Inégalité de Jensen — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DIn%25C3%25A9galit%25C3%25A9%5Fde%5FJensen%26oldid%3D90235295.

[855] Gérard Letac. Calcul des probabilités, Deug 2ième année URL http://les.mathematiques.free.fr/pdf/proba.zip.

[856] Chafaï Djalil. Probability space 2019. URL https://djalil.chafai.net/blog/2019/11/11/probability%2Dspace/.

[857] Daniel Saada. Note sur le théorème de transfert pour les variables aléatoires réelles URL http://www.les%2Dmathematiques.net/phorum/file.php%3F12%2Cfile%3D17435%2Cfilename%3Dth%5Fdu%5Ftranfert.pdf.

[858] Wikipédia. Variable aléatoire à densité 8 mai 2022. URL https://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DVariable%5Fal%25C3%25A9atoire%5F%25C3%25A0%5Fdensit%25C3%25A9%26oldid%3D193504954.

[859] Christophe Sabot. Différents types de convergence de suites de v.a. URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/%7Esabot/Convergence.pdf.

[860] Antonin Macé and Thomas Pradeau. Exposé de maîtrise. Estimations de densités de probabilité URL http://www.eleves.ens.fr/home/amace/travaux/exposemaitrise.pdf.

[861] Wikipedia. Continuous mapping theorem — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL http://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DContinuous%5Fmapping%5Ftheorem%26oldid%3D545523937.

[862] Wikipédia. Inégalité de Markov — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DIn%25C3%25A9galit%25C3%25A9%5Fde%5FMarkov%26oldid%3D100208179.

[863] . Loi binomiale 29 septembre 2025. URL https://www.maths91.fr/coursTermSPE%5FMATHS/TSpeMaths%2Dprobabilites%2D02%2Dloi%5Fbinomiale%2Dcours.pdf.

[864] Math1000. Sum of exponential random variables ? Jul 5, 2020. URL https://math.stackexchange.com/q/146653.

[865] Charles Suquet. Simulation URL http://math.univ%2Dlille1.fr/%7Esuquet/ens/Agr/simul06.pdf.

[866] Yoann Gelineau. Vecteurs gaussiens URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/%7Egelineau/files/vecteurs%5Fgaussiens.pdf.

[867] Scilab. rand URL https://help.scilab.org/docs/5.4.0/fr%5FFR/rand.html.

[868] Wikipédia. Nombre normal — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DNombre%5Fnormal%26oldid%3D89848922.

[869] Wikipédia. Théorème de Glivenko-Cantelli — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DTh%25C3%25A9or%25C3%25A8me%5Fde%5FGlivenko%2DCantelli%26oldid%3D90841113.

[870] Vincent Rivoirard and Gilles Stoltz. Estimation de densité de probabilités URL http://www.math.ens.fr/statenaction/PDF/Densite%2DPrincipal.pdf.

[871] Nils Berglund. Chaînes de Markov URL http://www.univ%2Dorleans.fr/mapmo/membres/berglund/markov.pdf.

[872] Arnaud Guyader. Espérance conditionnelle et chaines de Markov URL https://perso.univ%2Drennes2.fr/system/files/users/jegou%5Fn/EsperanceConditionnelle.pdf.

[873] Pierre Brémaud. Basic Markov Chains 9 décembre 2015. URL https://www.di.ens.fr/%7Ebusic/cours/M2amis/markov.pdf.

[874] David Madore. Réflexions sans intérêt sur les files d'attente 14 sept 2019. URL http://www.madore.org/%7Edavid/weblog/d.2021%2D09%2D14.2696.files%2Dattente.html%23d.2021%2D09%2D14.2696.

[875] Charles Suquet. Martingales 2009-2010. URL https://math.univ%2Dlille1.fr/%7Esuquet/Polys/Mrt.pdf.

[876] Massimiliano Gubinelli. Comportement asymptotique des martingales URL http://www.ceremade.dauphine.fr/%7Emgubi/e1112/pd3.pdf.

[877] Jean Lacroix and Pierre Priouret. Probabilités approfondies URL http://www.proba.jussieu.fr/cours/processus.pdf.

[878] Wikipedia. Optional stopping theorem — Wikipedia, The Free Encyclopedia URL http://en.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DOptional%5Fstopping%5Ftheorem%26oldid%3D547547174.

[879] Ari Davidovsky. Martingales, Stopping Times, and the Optional Stopping Theorem URL https://math.uchicago.edu/%7Emay/REU2019/REUPapers/Davidovsky.pdf.

[880] Nizar Touzi. Martingales en temps discret et chaine de Markov URL http://www.cmap.polytechnique.fr/%7Etouzi/MAP432%2DPoly.pdf.

[881] Wikipédia. Stopped process 6 juillet 2024. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Stopped%5Fprocess.

[882] Nasser Saheb. Interarrivée URL https://dept%2Dinfo.labri.fr/ENSEIGNEMENT/formation%2Da%2Ddistance/cibermiage%2Dprocessus/c1.7/ch02/seq07/sequence.htm.

[883] Yoann Gelineau. Processus de Poisson URL http://math.univ%2Dlyon1.fr/%7Egelineau/devagreg/Processus%5FPoisson.pdf.

[884] Benoît Cadre. Le processus de Poisson 2008-2009. URL https://perso.univ%2Drennes1.fr/jean%2Dchristophe.breton/agreg/AGREG/COURS/Agreg%5FPoisson.pdf.

[885] Wikipédia. Étoile de Kleene — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3D%25C3%2589toile%5Fde%5FKleene%26oldid%3D149113546.

[886] Wikipédia. Onde gravitationnelle — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DOnde%5Fgravitationnelle%26oldid%3D185499357.

[887] Wikipédia. Expérience de Michelson et Morley — Wikipédia, l'encyclopédie libre URL http://fr.wikipedia.org/w/index.php%3Ftitle%3DExp%25C3%25A9rience%5Fde%5FMichelson%5Fet%5FMorley%26oldid%3D176995513.

[888] Zach Weinersmith. URL http://www.smbc%2Dcomics.com/comic/2008%2D02%2D21.

[889] Gro-Tsen. URL https://bsky.app/profile/gro%2Dtsen.bsky.social/post/3kxzv27uwno2s.

[890] Umberto P.. Why Pythagorean theorem is all about 2? 2024-09-10. URL https://math.stackexchange.com/q/4969768.

[891] Numberphile. 5040 and other Anti-Prime Numbers - Numberphile URL https://www.youtube.com/watch%3Fv%3D2JM2oImb9Qg.